

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.

*Accessit XVI. de SOLIDORVM REGV-
LARIVM cuiuslibet intra quodli-
bet comparatione*

Omnes perspicuis DEMONSTRATIO-
NIBVS, accuratisque SCHOLIIS
ac multarum rerum accessione
locupletati:

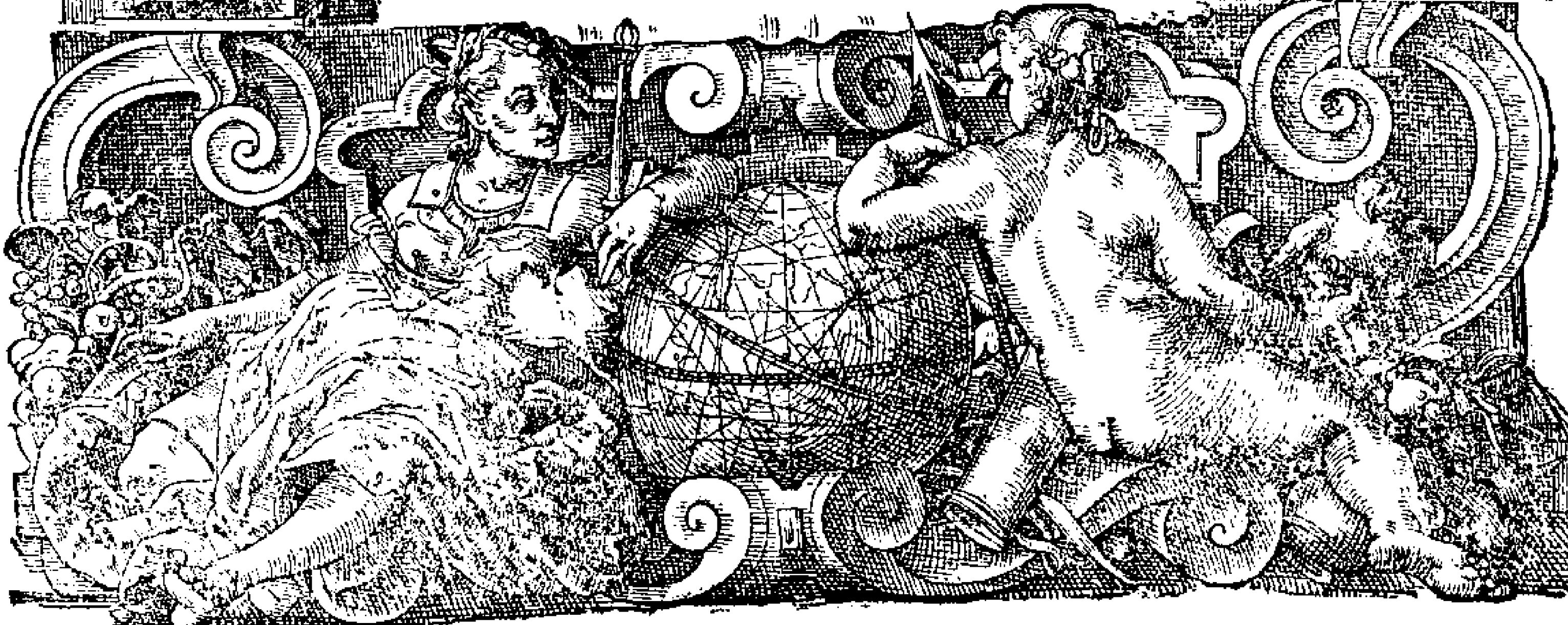
*Nunc tertio editi, summaq; diligentia recogniti,
atque emendati.*

Auctore

CHRISTOPHORO CLAVIO BAM-
BERGENS. Societate IESV.



COLONIAE,
Expensis IOH. BAPTISTAE CIOTTI
c1o 1o xci.



4° A. g. b. 1401

B S B
MÜNCHEN

95/182

SERENISSIMO

PRINCIPI AC

DOMINO,

D. CAROLO EMANUELI

SALABURGENSIS DUCI

CHRISTOPHORVS CLAVIVS Societate

IESV S. P. D.



CRIPSERAM superioribus annis in elemen-
ta Geometrica Euclidis, id est, in initia di-
sciplinarum Mathematicarum, Commen-
tarios: quorū omnibus iam distractis exem-
plaribus, cum alia essent recudenda, volui
etiam dare operam, ut locupletiores multo,
atq; uberiores ederentur: quod Dei beneficio
successit. Sic enim serres habet, quod te non fugit, Dux Sereniss. quem-
admodum nihil est simul inuentum, & perfectum: sic nemo est, qui à
principio in qualibet rescribenda, aut exponenda possit omnia per-
uidere: multa apparent iterū ac sapius cogitanti, quae aciem, quam-
libet acutam antè fugiebant. Rectè hoc quoq; Euripides, ut pleraque
omnia, sapientiores solent esse posteriores cogitationes. cum quo con-
gruit, & cohaeret vulgatum illud prouerbum, quod Publio tribui-
tur, Discipulus est prioris posterior dies. Itaq; cum priorē editionem
sumerem postea in manus, multa esse animaduerti, quae si adderētur,
non pauca ex Archimedis, Apollonij, Ptolemai, aliorumq; inuen-
tis videbantur melius explicari posse: si videlicet ē pronuntiatis, ac
theorematis Euclideanis alia quoq; necerentur. Quod ipsum etsi tunc
etiā prestiti, multo tamen nunc feci copiosius: interijciens ea scilicet,
quae vel utilia, vel necessaria fore censui ad aliorū, ut dixi, auctorum
cognitionem. Addidi inter cetera, ut specimē dem aliquod rerū, quae
hoc volumine accesserūt, demonstrationem Geometricam, eamq; a-
pertissimam axiomatis undecimi, quod proponitur ab Euclide: cum
ea, quā allatam scimus à Proclo, mutila esse atq; imperfecta videa-
tur. Descriptionem item omnium figurarum, quae rectilineae equa-

EPISTOLA DEDICATORIA

lium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem præ-
 terea & breuem, nec obscuram circuli quadrandi: rem, ut scis, tum à
 veteribus, tum à recentioribus sic expetitam, ut multorum in ea co-
 natus magis apparuerit, quam effectus. Effeci autem hoc (inquit illor)
 ita accurate, ac subtiliter, ut tam perfecte approbetur quadratum,
 aequale circulo, quam exquisitè rectilinea figura quælibet ad quadra-
 tum aequale ab Euclide dirigitur: immò (ut loquar aliquid auda-
 cius) aliquantò perfectius: cum ad quadrandum circulum paucio-
 ribus linearum ductibus sit opus, quam ad figuram rectilineam plu-
 rimorum angulorum, via, & ratione quadrandam, ut aperte doce-
 bitur lib. 6. Ad 9. deniq; lib. adieci numerorum fractionum demon-
 strationes clarissimas, aliaq; nonnulla, quæ nunc quidē non numero,
 q; ea mihi volo ad ipsamet loca, quibus explicabūtur, plena atq; in-
 tegra referuari. Laborem igitur hunc meū, qualiscunq; est, cū iterum
 essem daturus in vulgus, nemini arbitratus sum rectius, q; tibi, Dux
 Sereniss. dedicari posse. Primum quidem, q; cum superiore illam edi-
 tionem sub EMMANVELIS PHILIBERTI, clariss. Ducis patris
 tui nomine apparere voluerim: stulte fecissem, si posteriore hanc alijs,
 q; tibi, qui eius es & ditionis & humanitatis & pietatis heres, eiusq;
 imago corporis, atq; animi cōsecrassem. Deinde verò, q; in hoc seque-
 bar Archimedis exemplum: qui nemini opera sua iudicabat inscri-
 benda, nisi ei, qui intelligens talium rerum, ac peritus fuisset. Quod
 cum ita sit, quid ni hoc tibi potissimum deberetur donū, (si tamen do-
 num dicendū est id, quod qui dat, videtur accepisse) quē Ioan. Bapti-
 sta Benedictus scientiss. rerū Mathematicarum, ita testatur excellere
 in his artibus, illa præcipuè in parte, quæ principes viros, atq; excellen-
 tes Imperatores decet, ut ea, quæ pertinet ad instruendos exercitus, op-
 pidaq; munienda, per te ipse implere possis. Neque verò hæc postrema
 fuit causa, etsi postremo in loco ponitur: ut tibi alijsq; quorum in ma-
 nus hæc scripta pervenerint, hæc saltem ratione ostenderē ita tibi obli-
 gatam esse Societatem nostram universam, ut iure tibi omnia mea
 opera, & labores vindicare possis. Accipe tu hoc, quod tibi offer-
 tur, Princeps inuictissime: quod etsi paruum alicui videatur, atque
 exile, non dubito tamen futurum, quin ubi tuam istam attigerit
dexteram

dexteram fortitudine fideq, præstantem, plurimum sit accepturum, vel magnitudinis, vel gratiæ. Vale. Cal. Sept. M. D. Lxxxix.

QVÆ PRÆCIPVE PRIORIBVS COMMEN-
tarijs posteriore hac editione addita sint.

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis 11. Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq, partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illa rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.] multò euidētior, quàm ea, quæ Proclus affert. ad propof. 28. lib. 1.

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per solas priores 40. propof. lib. 1. absque ope proportionum 6. lib. ad propof. 40. lib. 1.

III.

QVO pacto construenda sint triangula Amblygonia, & Oxygonia, vt in numeris apparere possint, quæ ab Euclide demonstrata sunt propof. 12. & 13. lib. 2. ad propof. 12. & 13. lib. 2.

III.

RESPONSIO ad Apologiam Iac. Peletarij, de angulo cōtactus. ad prop. 16. lib. 3.

V.

CONSIDERATIO pulcherrima de figuris æquilateris, atque æquiangulis intra circulum, & extra circulum descriptis: Num scilicet, omnis æquilatera sit æquiangula etiam, & omnis æquiangula sit quoque æquilatera. ad finem lib. 4.

VI.

TRACTATIO copiosissima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica. ad defn. 4. lib. 5.

VII.

PYLCHRA contemplatio, cur Euclides in defn. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquemultiplicia definierit. ad defn. 8. lib. 5.

VIII.

DESCRIPTIO inflexæ cuiusdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterū æqualium describitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes æquales distribuitur: Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contra: Et denique alia scitu iucundissima perficiuntur. ad finem lib. 6.

IX.

QVO pacto pleraque theoremata libri 7. demonstrentur quoque de numeris fractis, siue ipsis adhæreant numeri integri, siue non. ad propositiones lib. 7.

X.

MINVTIARVM siue numerorum fractorum demonstrationes clarissimæ. ad finem lib. 9.

XI.

DE proportionū compositione; quo videlicet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio, ac Diuisio fieri debeat: aduersus quosdam Recentiores. ad finem lib. 9.

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regularium in data sphæra ex Pappo Alexandrino, & quidem faciliior, quàm ea, quæ nobis tradidit Euclides. ad finem lib. 16.

XIII.

COMPARATIO Soliditatum & superficierum conuexarum, eorundem quinque corporum Regularium inter se. ad finem lib. 16.

Cetera quæ passim hisce Commentarijs adiecta sunt nō pauca, diligens Lector nullo negotio notabit.



IN EUCLIDIS ELEMENTA PROLEGOMENA.



PRAEFATIO.



SI quis fortè miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis Elementa Geometrica Commentarios ab egregiis, & in primis Mathematicarum rerum peritis Scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi commentationes conscripserimus; is facile sibi persuadebit, non temerè id à nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cùm enim longa diuturnaque experientia nobis esset perspectum, atq; exploratum, eam esse utilitatem, atque adeò necessitatem horù elementorum, vt frustra quicumque se iperet sine ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasque Archimedis, Apollonij, Theodosij, Menelai, Ptolemæi, cæterorumque illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; vehementer dolebamus, tam insignem & illustrem auctorem à plerisque omnino negligi, à perpaucis verò pro dignitate tractari, ita vt vix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulam operam, ac studium in perdiscendis his elementis ponant; ob eam potissimum, vt arbitror, causam, quòd difficultate rerum, quas tractant, atq; obscuritate deterreantur, nullumq; habeant hac in re ducem, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem Commentarij Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros sanè eruditi, qui satis esse possint cuius ad facile consequendam horù elementorum doctrinam: Sed alter secutus in omnibus est traditione Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, ac methodum peruerterunt, verbaq; propositionum eiusdem locis non paucis immutârunt, vt verus germanusq; auctoris sensus perdifficile possit intelligi; id quod maximè in 10. lib. perspicitur: Alter (Theonem intelligo) penè innumeris mendis, vitiisq; incuria libroriorum ita est deprauatus, & propter notas Græcas, quæ in eius demonstrationibus adhibentur, obscuras illas ac malè expressas adeò impeditus, vt magnam difficultatē in exercitatis ingeniis, perplexitatemq; gignat. Quò fit, vt Euclidem sine maximo labore ac studio nemo percipiat. Iam si alij ad nostram vsque memoriam maius aliquod studium operamq; in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi vel sex priores tantum libros exposuerunt: vel si qui in vniuersum Euclidem Commentarios ediderunt, hi persæpe, relictis antiquorum demonstrationibus certissimis, proprias alias, ac nouas confinxerunt, quæ plerumq; nō tam firmæ sunt, neq; rem ipsam simpliciter & absolute conficiunt; præsertim quòd modò è propositionibus voces qualdam perperam detrahunt, modò alias ineptè apponunt, modò deniq; nonnullas temerè immutât, vt meritò de vero proprioq; Euclidis sensu dubitare quis possit. Qua tamē in re Federicum Commandinum Vrbinarem, Geometram non vulgare excipio, qui nuper Euclidem Latine redditum in pristinum nitore restituit, paucis locis exceptis, in quibus nō parū à vero aberrauit, vt suo loco monebimus. Quæ cum ita sint, resq; ac scientia tam præclara digna sit, quæ ope, studio, industria ab iis adiueretur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt, post diuturni temporis in rebus mathematicis operâ collocatâ; faciendum putauimus, vt lucubrationes nostras ac vigilias studiosis harum rerum non nihil (nisi fallimur) subsidij allaturas in publicum ederemus. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota à nobis pertractetur, quidq; in hac interpretatione præstitū sit, paucis accipe. Demonstrationes aliorum, maximè Theonis, quas quidem ipsius esse Euclidis, non leuibus argumentis adducti cum plerisque asseueramus, & Proclus etiam testatur, breuiiores, quantum per rei difficultatē licuit, vel certè planiores, quando illud nō potuimus, dilucidioresq; reddere conati sumus. Non enim illas nudè, ac totidem verbis, quot erant scriptæ, proposuimus. Etenim ea est interdum illarum breuitas, vt illud accadat, quod ab elegantissimo Poëta dictum est: *Breuis esse laboro, obscurus fio.* Interdum etiam cùm breuius, atque succinctius efferri possint, magna, ob longiorem, quàm satis est, sermonem, affertur molestia legenti. Quare vtrumque vitantes, eas, velut παραφραστεις, atque ad eum serè modum tradidimus, quem, cùm publicè Euclidem interpretaremur, obseruauimus; hac etiam re auditorum desiderio, & voluntati, quantum

P R A E F A T I O.

tum est in nobis, satisfacere cupientes. Ita enim, nostra sententia, Euclides facilius à studiosis, iis praesertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica studia nunc primum auspicantur, ac maiore voluptate, utilitateque cognoscerur. Præter hæc adiunximus multis in locis varia problemata, ac theoremata scitu non iniucunda, neque à scopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, aliisque auctoribus decerpimus, partim proprio (ut aiunt) Marte, assiduisque meditationibus ipsi confecimus. Data in super in hoc diligens opera, ut definitiones Euclidis, praesertim obscuriores, & quæ aliquid visæ sunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in scopulos quosdam incidentes, à recto cursu deflexerunt, & in errores varios atque absurdos, prorsusque ab instituto disciplinæ abhorrentes dilapsi sunt.) dilucidè atque perspicuè, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium studiosi faciliè iudicabunt. Postremò quindecim libris Euclidis sexdecimum ad comparationes quinque corporum regularium pertinentè, quem à Francisco Flussate Candalla accepimus, ut Elementa hæc Geometrica euaderent perfectiora, adiecimus.

B E N I G N O L E C T O R I.



*Q*UONIAM superiorem editionem Elementorum Euclidis non ingrati fuisse Mathematicarum disciplinarum studiosis intelleximus, exhibemus tibi benigne Lector, alteram editionem priore illa multò locupletiore: in qua scilicet varia tum problemata, tum theoremata, quæ rebus Mathematicis magnum adiumentum allatura, longo usu, atque experientia comprobavimus, & quæ in priore editione desunt, adiecimus, plurimaque loca subobscura clarioribus notis illustravimus. Addidimus præterea novam demonstrationem undecimi axiomatis Euclidis, (quod in hisce Commentarijs est tertium decimum) quo vult, Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duas illas rectas lineas in infinitum productas, coituras tandem ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores: addimus, inquam, novam demonstrationem à nobis nuper inuentam, quam non iniucundam studioso Lectori futuram speramus, quod eo principio tota doctrina de lineis parallelis, quæ immensa propemodum est, atque infinita, nitatur. Quanquàm enim idem illud principium Arabes quoque olim demonstrasse iam pridem acceperam: quia tamen eorum demonstrationem diu ac diligenter quaesitam videre mihi non licuit, (nondum enim ex Arabica in Latinam linguam conversa est) coactus sum hanc meo, ut aiunt, Marte excogitare, ut nullus in eo principio tam necessariò iam dubitationi locus esset. Neque enim Procli demonstratio, quam ad propos. 28. lib. 1. Euclides de re eadem affert, omni ex parte absoluta, ac Geometrica censi potest; cuius rei causa eodem loco à nobis explicata est. Deinde ex Pappo Alexandrino inscriptiones omnium figurarum regularium in circulo, beneficio lineæ certæ quadam ratione inflexæ, perfecimus: quod antè à Mathematicis desiderabatur. Ex qua eadē lineæ via quadam & ratio ad circulum quadrandum (res tot seculis à doctissimis viris exagitata) conficitur: quod suo loco docebitur. In definitionibus porrò quinti libri aperte ostendimus, cur Euclides magnitudines proportionales & impropportionales per aquemultiplicium habitudinem describere coactus sit. Postremò (ut alia omit- tam) omnes operationes fractionum vulgarium, quæ in Arithmetica practica declarari solent, Geometricè demonstravimus. Hac ferè præcipua sunt, quæ hac posteriore editione ad Commentarios nostros in Euclidem accesserunt. Cætera vel theoremata, vel problemata, quibus editio hac posterior priorem superat, quæ sanè plurima sunt, & Euclidis propositionibus sparsim inserta, inter legendum faciliè comperies, si utramque editionem cum altera conferens attentius paulò considerabis. Nunc quia hæc Euclidis elementa ostium atque aditum ad omnes alias disciplinas Mathematicas referant, ac patefaciunt, opera pretium fore duximus, antequam ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, undenam Mathematica disciplina hoc nomen acceperint: quæ sit earum divisio: à quibus primum orta, & per quos deinde singula fuerint excolta: quanta sit illarum præstantia atque utilitas; & si quæ sunt alia rei nostra opportuna.

PROLEGOMENA
MATHEMATICAE DISCIPLINAE
CUR SIC DICTAE
SINT.



DISCIPLINAE Mathematicae, quae quidem circa quantitatem versantur omnes, nomen acceperunt à dictione Graeca μάθημα, siue μάδω, quae significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem haec artes de quantitate agentes nomen disciplinae, vel doctrinae inter reliquas omnes sola sint adeptae, duas potissimum causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen Christiana fides falsum esse perspicue docet) testantur, eas nomen doctrinae, siue disciplinae obtinere, quod maxime ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscendamque illius scientiae, quae anima nostra, (ut eorum est error) antequam corpus informaret, erat praedita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in Dialogo, qui Menon inscribitur, ubi Socratem introducit pusionem quendam interrogantem Geometricam quaedam de quadrati dimensione, ad quae licet in principio responderit, ut puer, gradatim tamen ascendens, eò deductus est, ut responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diutissime perdidicisset Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes praeter ceteris nomen scientiae, et doctrinae sibi vindicare, quod sola modum rationemque scientiae retineant. Procedunt enim semper ex praecognitis quibusdam principijs ad conclusiones demonstrandas, quod proprium est munus, atque officium doctrinae, siue disciplinae, ut et Aristoteles 1. Posteriorum testatur: neque unquam aliquid non probatum assumunt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere volunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quae antè docuerant, id sumunt pro concesso, et probato: illud verò modo explicant, de quo antè nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinasve non semper observare videmus, cum plerumque in confirmationem eorum, quae ostendere volunt, ea, quae nondum sunt explicata, demonstratae adducant.

DISCIPLINARVM MATHEMATICARVM
DIVISIO.



PYTHAGOREI, quos deinde secuti sunt omnes propemodum Mathematici, atque Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas universas in quatuor partes distribuerunt, Arithmeticam, Musicam, Geometriam, atque Astronomiam. Cum enim omnis quantitas, circa quam versantur, sit vel discreta, sub qua omnes numeri, vel continua, sub qua omnes magnitudines comprehenduntur, et utraque tam secundum se, quam comparatione alterius possit considerari: Visum fuit illis consentaneum quatuor praedictas facultates instituire, quae utramque quantitatem, pro duplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundum se, inquirendo et accurate explicando omnes numerorum proprietates, ac passionem. Musica tractat eandem quantitatem discretam, siue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniam. Geometria de magnitudine, siue quantitate continua, secundum se quoque, ut immobilis existit, disputat. Astronomia denique tandem magnitudinem, ut est mobilis, considerat: qualia sunt caelestia corpora, prout continuo motu cidentur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarum Arithmetica, et Geometria pura, Musica verò atque Astronomia mixtae dicuntur, omnes aliae quovis modo de quantitate agentes, qualis est perspectiva, Geographia, et cetera huiusmodi, vel facili, ut ad capita, à quibus dependent, reduci possunt.

ALIA ratione à Gemino antiquo Geometria, et ab alijs, ut auctor est Proclus in Commentarijs, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematicae disciplinae diuiduntur. Quam quidem diuisionem, quoniam eleganter, copioseque docet, ad quam se extendant Mathematicae disciplinae, ferè ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Francisci Barocij Patricij Veneti excerptam hic subicere statui. Volunt itaque praedicti auctores, scientiarum Mathematicarum quasdam in intellectibilibus duntaxat ab omni materia separatis, quasdam verò in sensibilibus, ita ut attingant materiam sensibus obnoxiam, versari. Prioris generis statuunt duas longe primas, praecipuasque scientias, Arithmeticam et Geometriam: In posteriori verò genere constituunt sex, Astrologiam, Perspectivam, Geodesiam, Canonicam, siue Musicam, Supputatricem, atque Mechanicam. Astrologiam dicunt esse eam facultatem, quae de mundanis edisserit motibus, de corporum caelestium magnitudinibus, figuris et illuminationibus, à terraque distantijs, ac de alijs huiusmodi rebus. Huius rursus tres constituuntur partes: Gnomonica, quae in horarum dimensione, positi gnomonum exercetur: Meteoroscopica, quae elevationum differentias, siderumque reperit distantias, nec non multa alia et varia Astrologica perdocet theorematum: et Dioptrica, quae planetarum, rarerarumque stellarum distantias huiusmodi Dioptrici dignoscit instrumentis. Perspectivam aiunt à Geometria gigni, atque uti radijs visorij, tanquam lineis, et angulis, qui ex hisce constituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, quae proprio nomine dicitur Perspectiva, quae quidem reddit causam earum apparentiarum, quae aliter, quam sint, sese nobis offerre solent, ob eorum, quae sub visum cadunt, alios situs et distantias, ut parallelarum edimicidentiae, vel quadratorum, tanquam circularum, aspectionis: Et in universam speculariam, quae circa varias, multiplicesque versatur refractiones: Nec non in eam, quae Sciographice, hoc est, umbrarum designatrix appellatur, quae ostendit, qua ratione fieri possit, ut ea, quae in imaginibus apparent, haud inconcinnam, vel deformem ob designatorum distantias, altitudinesque videantur. Geodesiam appellant eam scientiam, quae res quantas metitur, ut materialium rerum acervos, tanquam conos et pyres, tanquam cylindros. Quod quidem non allegitur intellectibilibus rectis lineis ut Geometria, sed sensibilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, ut radijs Solaribus: interdum verò crassioribus, ut spatij et perpendicularo. Diuiditur haec, ut Geometria, in eam partem, quae plana, et in eam, quae solida dimetitur. Canonicam, siue Musicam, vocant eam scientiam, quae apparentes concentuum considerat rationes, sensusque ubique utitur adminiculo: et quae (ut Plato inquit) talis existit, ut menti aures ipsas praeposuisse videatur. Supputatrix eadem apud ipsos est, quae apud nos Arithmetica practica. Haec enim numeros considerat,

nam

PROLEGOMENA

non ut intellectibus, sed ut sunt in sensibilibus ipsis. Mechanica denique, quæ in cognitione rerum sensibilium, materiarumque coniunctarum consistit, apud ipsos multiplex est. Quædam enim est instrumentorum effectrix, quæ *ὀργανική* vocatur, eorum, inquam, quæ gerendis sunt bellis idonea, qualia sanè Archimedes etiam fertur construxisse, Syracusas terra mariq; obsidentibus resistentia. Quædam mirabilium prorsus rerum effectrix, quæ *δυναμική* vocatur, dicitur; quippe quæ alia quidem spiritibus maximo cum artificio construit, quemadmodum etiam Ctesibius, atq; Heron operantur, alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, status verò æquilibrium esse causam censendum est, ut Tomæus etiam determinavit; alia verò nervis, spartiisq; animatas convolutiones, ac motus imitantibus: Quædam est æquilibrantium omnino, et eorum, quæ centroponderantia vocantur, cognitio: Quædam denique sphaerarum effectrix, quæ *σφαίρική* appellatur, ad cælestium circumvolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus est: Atq; ut vno verbo dicam, omnis, quæ materiam mouendi vim habet. Hæc igitur sunt discipline Mathematicæ apud antiquos. Militarem autem artem, eam inquam, quæ ad instruendas, coordinandasq; pertinet acies, quam Græci *τακτική* vocant, unam aliquam ex Mathematicis partibus dicendam esse non censent, ut quidam alij voluere, sed uti eam volunt modo quidem arte supputandi, ut in enumerandis legionibus; modo verò Geodesia, ut in dividendis, dimetiendisq; castrametationi spatij in campo. Quemadmodum neq; Historicam, neq; medicendam artem Mathematicis partem ullam esse dicunt, licet sæpenumero tum Historici, tum etiam Medici Mathematicis utantur theorematibus: Rerum quidem gestarum scriptores, vel climatum situs referendo, vel urbium magnitudines, et diametros, vel ambitus, circuitusve colligendo: Medici verò quamplurimas res in arte sua huiusmodi vix dilucidando. Nam utilitatem, quæ in Medicinam ab Astrologia peruenit, ipse etiam Hippocrates ostendit, ac ferè omnes, quicumque aliquid de opportunis temporibus, locisq; dicere. Eadem sanè ratione ille etiam, qui aciebus instruendis operam accommodat, Mathematicis quidem utitur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamvis interdum quidem volens eam, quæ numerosa est, paucissimam ostendere multitudinē, castra suosq; exercitus ad figuram circuli formet; interdum verò ad figuram quadranguli, vel quinquanguli, vel alterius cuiusdam multanguli, ubi plurimam apparere cupit. Hæc igitur ferè sunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum scientiarum partitione reliquerunt.

INVENTORES MATHEMATICARVM DISCIPLINARVM.

MÆNES disciplinas Mathematicas à varijs et diversis auctoribus ortum originemq; duxisse, perspicuè historie testantur: Immo verò singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memorie quoq; proditum est. Arithmeticae enim inventores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atq; commercia, ut auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eiusq; successores, necnon Aegyptij, Græci deniq; atq; Arabes amplificârunt, varijsq; problematis, atq; theorematibus illustrârunt. Musicam deinde à Mercurio primū esse inuentam, multi scriptores tradunt, quam ipse postea Orpheo insigni Musico commendavit, atq; concedidit: Hic autem Thamyræ et Linus: Linus verò Herculi, et sic successionebus continuis per alios Musicos præclaros ad nostra usque tempora manavit. Geometria verò, auctore Proclo, ab Aegyptijs reperta est, ortumq; habuit ab agrorum dimensione. Cum enim annuversaria Nilii inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, vastaretq; ut nemo agrum dignoscere posset suum, ceperunt Aegyptij animos ad rationem mensurandarum agrorum applicare, ut hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata. *γεωμετρία* enim, siue *γεωμετρίω* idem significat, quod terram metior. Cæterum paulatim deinde Geometria cepta est expoliri, et non contenta suis finibus, sese ad corpora etiam cælestia dimetienda convertit, tradiditq; principia universæ Astronomiæ, Perspectivæ, Cosmographiæ, et alijs disciplinis quam plurimis, quæ ex ipsa, veluti radices dependent. Hanc Thales Milesius ex Aegypto in Græciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi ac Mathematici plurimis acutissimisque demonstrationibus locupletârunt, atq; exornârunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Severus, Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusanus, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Milens Romanus, qui et Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemaeus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, et alij penè innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiam denique non pauci ab Atlante primū inuentam esse autumant: Unde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Astronomiæ cognitionem, exortam esse volunt fabulam, illum suis humeris cælum sustinere. Alij putant, Chaldaeos diuturna observatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Divinatione) siderum scientiamadinuenisse. Alij Aegyptios primos huius scientiæ faciunt inventores: Alij Assyrios: Alij denique gloriam hanc et laudem Babylonij esse deferendam, censent. Hæc autem in scientia, ut est præstantissima, ita quoq; maximè illustres auctores claruerunt, quod non est huius loci declarare. Cæterum præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis reliquæ omnes de quantitate quovis modo agentes, facile ex ipsis, tanquam rivuli ex fonte, derivatae sunt, atque deductæ.

NOBILITAS ATQVE PRAESTANTIA SCIEN- TIARVM MATHEMATICARVM.

NON TAM discipline Mathematicæ de rebus agunt, quæ absque ulla materia sensibili considerantur, quamvis re ipsa materiæ sint immersæ: perspicuum est eas medium inter Metaphysicam, et naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earum consideremus, ut rectè à Proclo probatur, Metaphysices etenim subiectum ab omni est materia sciuntum, et re, et ratione: Physices verò subiectum et re, et ratione materiæ sensibili est coniunctum: Unde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamvis re ipsa in ea reperiat, liquidò constat, hoc medium esse inter alia duo.

PROLEGOMENA.

Si verò nobilitas, atque præstantia scientiæ ex certitudine demonstrationum, quibus vititur, sit iudicanda: baud dubiè Mathematicæ disciplinæ inter ceteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantque, ita ut verè scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationem tollant: Id quod alijs scientijs vix tribuere possumus, cum in eis sæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem apertè faciunt tot Peripateticorum sectæ, (ut alios interim Philosophos silentio inuoluam) quæ ab Aristotele, veluti rami à trunco aliquo exortæ, adeò & inter se, & nonnunquam à fonte ipso Aristotele dissident, ut prorsus ignores, quidnam sibi velit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, ut pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales, quos vocant, (qui omnes tamen Peripateticos se esse glorientur) tanquam duces sequantur. Quod quàm longè à Mathematicis demonstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, ceterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in Scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu Dialogo, qui de summo bono inscribitur: Eam scientiam esse digniorem, præstantioremque, quæ magis sinceritatis, veritatisque est amans. Cum igitur disciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetant, adamant, excolantque, ut non solum nihil, quod sit falsum, verum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirmet, corroborentque: dubium esse non potest, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

UTILITATES VARIÆ MATHEMATICARVM DISCIPLINARVM.

Non solum utiles, verum etiam necessariae admodum censei debent disciplinæ Mathematicæ, cum ad alias artes perfectè perdiscendas, tum ad rem etiam publicam rectè instituendam, & administrandam. Neque enim ad Metaphysicam, ut eleganter ostendit Proclus, ulli patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si à rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, seiunctasque, quas contempletur Metaphysicus, vires, aciemque nostri intellectus attollere absque ullo medio tentemus: nosmetipsos excacabimus, non secus, ac ei contingit, qui à carcere aliquo tenebrioso, in quo diu latuit, in lucem Solis clarissimam emittitur. Quam ob rem, antequam à rebus physicis, quæ materiæ sensibus obnoxie sunt coniunctæ, ad res metaphysicas, quæ sunt ab eadem maxime auulsæ, intellectus ascendat, necesse est, ne harum claritate offundatur, prius eum assuescere rebus minùs abstractis, quales à Mathematicis considerantur, ut facilius illas possit comprehendere. Quocirca rectè Diuinus Plato Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quantum verò emolumentum hæ disciplinæ ad sacras literas rectè percipiendas, interpretandasque conferant, multis pulcherrimè nobis exponit B. Augustinus lib. 2. cap. 16. de Doctrina Christiana demonstrans, numerorum inscitia multa non intelligi à multis, quæ translata, ac mysticè posita sunt in Scripturis. Cuius rei exempla non pauca in medium adducit, eandemque sententiam longè post pluribus verbis repetit eodem libro, capite 37. Hoc idem Diuus Hieronymus tomo 1. Epist. 5. asserens magnam inesse numeris vim, ad multa mysteria in Scripturis intelligenda: Quo item loco, Geometriam magnam afferre Theologis utilitatem perhibet. Rursum Beatus Augustinus loco iam citato, capite 16. quem paulò antè retuli, testatur, Musicam pernecessariam esse doctori Christiano, subiungens paulò post, cap. 19. Theologos debere etiam Geographia diligenter esse instructos. Quod non ignorans Diuus Gregorius Nazianzenus, summis laudibus Diuum Basilium Præceptorem suum extollit, quòd in Astrologia, Geometria, numerorum cognitione, ceterisque scientijs Mathematicis, fuerit non mediocriter versatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad Philosophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesque perfectè acquirendas, ut perspicue docet Proclus. His adde, quòd omnia volumina antiquorum Philosophorum, maxime Aristotelis, & Platonis, quos meritò duces nobis sequendos, ad bene rectèque philosophandum proponimus, eorumque ferè omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis sunt referta, ea potissimum de causa, ut ea, quæ alioquin multis obstructa difficultatibus videbantur esse, per exempla huiusmodi clariora, magisque perspicua fierent: quæ proculdubio nulla ratione percipiet is, qui scientiarum Mathematicarum omnino est expertus. Quid? quòd olim nemo ausus esset celeberrimum Diuini Platonis Gymnasium frequentare, qui prius optimè Mathematicis disciplinis non fuisset exornatus? Unde pro foribus Academia hoc symbolum dicitur pinxisse: *ἀγνοίᾳ καὶ ἄδωκον ἔσομαι*. Immo verò idem Plato in Philebo, omnes disciplinas siue Mathematicas viles esse non dubitavit asserere. Quæ de causa in 7. de Republ. præcipit: Mathematicas disciplinas primò omnium esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum utilitates, (ut copiosè scribit) non solum ad reliquas artes rectius percipiendas, verum etiam ad Rempublicam bene administrandam. Cuius ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum nostræ ætatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, præcipue Arithmeticos naturæ ad omnes doctrinas aptos esse, idoneosque, adeò ut etiam si nullam aliam nobis hæ scientiæ afferrent utilitatem, (cum tamen infinita prope modum alia commoda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni studio eas esse statuatur, quod ingenium mentemque ad reliquas artes omnes capeffendas aptiorem reddant, & acutiorem. Quod quidem experientia ipsa magis strâ facile comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hisce disciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex alijs scientijs percipere: Contrà verò, eos qui ad hæc facultates idonei minimè reperiuntur, prorsus ad ceteras esse ineptos. Quare iure optimo Plato tanse frequenter in suis oporibus iterum atque iterum harum disciplinarum utilitatem nobis inculcat, atque commendat: præsertim in 7. de Republ. in Epinomide, seu Philosopho, in Timæo, ubi Mathematicas disciplinas omnis eruditionis ingenuam viam appellat, & perisq; alijs in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de industria supersedeo. Ad hæc omnes utilitates accedit ma-

PROLEGOMENA

xima iucunditas, atq; voluptas, qua cuiusque animus his artibus colendis, exercendiq; perfunditur. Sunt enim hæ præcipue ex septem artibus liberalibus, in quibus non solum ingenui adolescentes, verum etiam nobiles Viri, Principes, Reges, ac Imperatores ad honestissimam, maximeq; liberalem oblectationem animi, quam summa etiam cum utilitate coniunctam pariunt, diu multumq; versari solebant. Quorum exemplum multos adhuc nostra hac ætate imitari conspiciamus. Testatur magnam animi voluptatem ex his artibus percipi, Diuinus Plato in 7. de Republica, ubi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum animæ, qui ab alijs studijs excacatur, defoditurq; a Mathematicis tantum disciplinis recreari, excitariq; rursus ad eius, quod est, contemplationem. Omitto plurima alia testimonia Platonis, aliorumq; grauissimorum Philosophorum, quibus harum disciplinarum utilitas cum necessitate & delectatione coniuncta, atque præstantia abundè potest comprobari.

EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIÆ COMMENTATIO.

 **V**ISUM fuerit Euclides, horum elementorum institutor, (ut aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum proposuimus, deq; Geometria vniuersa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non satis conuenit inter scriptores. Multi enim, ut testatur vulgata elementorum Euclidis secundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inscriptio, existimant, eum fuisse Philosophum illum Megaris natum, quod oppidum Isthmo adiacet, Socratisq; auditorem, qui sectam instituit à se dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eò quod sectatores illius interrogando, respondendoq; (quod proprium est munus Dialecticorum) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de Vitis Philosophorum. Scribit & de hoc Cicero Quæstionum Academicarum libro secundo, ubi ait: Post Euclides Socratis Discipulus Megareus, à quo idem illi Megarici dicti, qui id bonum solum esse dicebant, quod esset vnum, & simile, & idem, & semper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo libro scribit: nimirum à Platone, qui Socratis etiam discipulus fuit, conductores aræ sacræ de modo, & forma eius secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iussos. Verum si Proclo nobili scriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megarico, floruitq; tempore Ptolemæi primi, qui Egypto, post Alexandri Magni mortem, Olympiade centesima decimaquinta, & ante Christum natum anno trecentesimo decimo nono cæpit imperare, ut Ioannes Lucidus refert. Quod quidem verius esse crediderim, hoc maxime adductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentissimè enumerans, nullam prorsus faciat mentionem huius celeberrimi voluminis de Geometricis elementis conscripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam sibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum est, Diogenem in monumentis Philosophorum exercitatissimum, hoc tam insigne opus vel scientem voluisse præterire, vel ab Euclide suo esse compositum, ignorasse. Itaque Euclides noster, Geometra acutissimus, ab illo Megareo Philosopho longè alius est, qui cum in doctrina Academicorum esset summa cum laude versatus, animum totum ad Mathematicas disciplinas transfudit; in quibus ita excelluit, ut concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos sibi locum iure optimo vendicauit. Scripsit autem volumina ad rem Mathematicam spectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaq; doctrina facile elucet: qualia sunt eius Optica, Catoptrica, Elementares institutiones ad Musicam capeffendam pertinentes, Phænomena, atque Datorum liber, opus de Diuisionibus, quod nonnulli suspicantur esse libellum illum acutissimum, de Superficierum diuisionibus, Machometo Bagdedino ascriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinensis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem est editus. Conscripsit item Conica elementa, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum peruenire, & alia id genus opuscula. Maxime verò hoc volumen Elementorum Geometricorum, nunquam omnium consensione satis laudatum, tam mirabili ordine, tantaq; eruditione contextit, ut nullus vnquam eorum, qui similia conscripserunt elementa, (conscripserunt autem, ut ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipsum superaret. In quo quidem, ut summum ingenij acumen demonstrauit, ita non omnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda: sed ea duntaxat, quæ visa sunt esse necessaria, atque utilia, ad communem omnium utilitatem, argumentis & rationibus firmissimis censuit esse comprobanda. Ceterum, quanta sit horum Euclidis Elementorum Geometricorum, ac promde vniuersæ Geometriæ, præstantia, ac utilitas, partim ex his, quæ antè scripsimus: partim ex his, quæ nunc dicemus, non obscure perspici potest. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam ob causam, quod sine ipsis nullum opus Mathematicum possumus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere. Omnes siquidem Mathematicarum rerum scriptores, ut Archimedes, Apollonius, Theodosius, &c. in suis demonstrationibus usurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perspecta, atque demonstrata. Quamobrem sicut is, qui legere vult, elementa literarum discit prius, & illis assidue repetitis utitur in vocibus omnibus exprimentis, sic qui alias disciplinas Mathematicas desiderat sibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plenè ac perfectè calleat prius necesse est. Ex his etenim elementis, veluti fonte vberissimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, insularum dimensio, atque diuisio, omnis in cælo per instrumenta siderum observatio, omnis horologiorum sciotericorum compositio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarum, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere variè illuminato, diuersitas manat. Ex his, inquam, elementis machinæ totius huius mundanæ est inuentam mediam, atque centrum, inuenti cardines, circa quos perpetuò conuertitur, orbis denique totius explorata figura, ac quantitas. Ostenditur atque demonstratur vnus huius scientiæ viceli vniuersi, siderumq; perennis conuersio, ortus, occasus, abitus, reditus, ascensus, descensus, diei ac noctis, temporumq; toto anno per omnem terrarum situm, & mundi inclinationem, Varietas. Coniunctiones item planetarum, oppositiones, aspectusq; varij tam expeditè cognoscuntur, ut & loca illorum in cælo, & eclipses, seu Solis ac Lunæ defectiones certissimè, antequam fiant, in omne posterum tempus à Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & Naturæ opus, n. idem, inquam, totum, mentis nostræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ subiectum conspiciamus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia esse videntur, omniumq;

PROLEGOMENA.

fidem superant, perspicua facere, credibiliaque esse ostendere: Quale est illud, quod de Archimede Syracusio testatur historia. Cum enim Hieron Syracusarum Rex nauem, quam Ptolemæo Ægyptiorum Regi mittere statuerat, tanta esset molis fabricatus, ut eam omnes una Syracusij à loco dimouere minime valerent: Archimedes Geometra peritissimus, vnius Geometriæ viribus fretus Regi promisit, se effecturum, ut ipsam solus Rex absq. vlllo labore subduceret. Quod cum præstitisset, in conspectu omnium Rex stupefactus exclamasse perhibetur: Ab hac die, quidquid dixerit Archimedes, illi credendum est. Non dissimile huic videtur mihi esse pulcherrimum illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ gessit Syracusis, quando corona ex auro argentoque confecta, quam Rex summo studio fabricari iusserat, non dissoluta, singula auri & argenti pondera, quæ inter se aurificis fraude ac dolo commissa erant, subtilissime offendit. Neque silentio præteriri debet, eundem Archimedem robori ac efficacie demonstrationum Geometricarum inmixtum sæpenuerò iactitasse, si haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc nostram, quam incolimus, è loco se commouere posse. Pari ratione, datis viribus quibuscunque, pondus quodcunque se posse mouere. Et alia id genus, non solum ab Archimede, verum etiam ab alijs præclaris, & illustribus Geometris patrata esse, memoriæ proditum est. Tantum denique nomen una hæc Geometria Archimedi peperit, ut Marcellus Romani exercitus imperator, contra quem diu Syracusanam urbem defenderat Archimedes, machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnata urbis direptione, ac cæde citium vnius Archimedis saluti publico editto canerit: quem, ubi contra imperium suum & voluntatem à gregario quodam milite interfectum cognouit, vehementer doluit, eumque honorem mortuo habuit, quem vivo habere non potuit. Cuius sepulchrum Cicero à se, cum in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoque ad præstantiam vtilitatemque Geometriæ, quod cum demonstrationes Geometricæ sint maxime illustres, nemo sine ipsis satis perspiciat, quæ sit vis demonstrationum, nemoque eisdem destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidem ingenue fatetur Galenus insignis Philosophus, ac Medicorum princeps, in libro, quem de libris proprijs inscripsit. Is enim instructissimus rebus Dialecticus, cum scholas Peripateticorum ac Stoicorum sui temporis percurrisset omnium, & præcepta miro cum animi ardore studioque arripisset; nihil ferè ab ipsis audisse se testatur, quod ad demonstrationis cognitionem pertineret; quinimò pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuersia posita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia reperiisse. Ita ut ad Pyrrhoniolum ferè (erant Pyrrhoni Philosopheri, qui nihil decernebant, sed de omnibus dubitabant) hæsitantiam deuenurus fuerit, nisi Arithmetica, Geometria, Dialecticaque (quibus artibus ab auis & patre fuerat institutus) esset cognitione scientiaque reuocatus. Vnde suadet, sequendos esse characteres illos Arithmeticos, & linearum demonstrationes. Plato etiam cum ob alias, tum ob eam etiam causam discendam esse Geometriam dixit, quod eius cognitio maxime sit utilis, ut aliæ artes facilius & rectius percipiantur. Postremo est hæc summa laus Geometriæ, omnibusque modis prædicanda, quod non hæsit in exiguis & inferioribus hisce machinis, à quibus originem traxit: sed euolauit in cælum vsque, & humanas mentes humi abiectas in illam rursus cælestem sedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusque administrationem & gubernationem nostro intellectui subiecit.

DIVISIO GEOMETRIÆ ET ELEMENTORVM EVCLIDIS.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria vniuersè sibi hunc scopum proponit, ut plana, aut solida vel constituat, vel constituta inter se comparet, aut diuidat. Neque verò mirum alicui videri debet, quod cum tria sint genera magnitudinum, linea, superficies & corpus, solum de duobus posterioribus extent propriæ contemplationes, ut diximus, non autem de lineis, vel etiam punctis. Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, ut ait Proclus, Geometria potissimum circa figuras versatur, quæ in planis duntaxat, vel etiam solidis consistunt omnes. Non enim puncta, vel lineæ figuram vllam constituunt sine planis, aut solidis, ac proinde necesse non erat, propriam de punctis, & lineis scientiam instituere: Superficiebus vero, siue planis & corporibus, solidisve maxime conueniebat, ut proprias nanciscerentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis persequi etiam, & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis, in posterioribus verò quinque de solidis acutissime disputat, eorumque proprietates maxime illustres peruestigat. Quoniam verò cum res omnes Geometricæ, tum præsertim solida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici solent, perfectè tractari non poterant, absq. linearum commensurabilitatem, atq. incommensurabilitatem notitia: Immo verò quàm plurimæ magnitudines sub mensuram cadere nulla ratione absq. earundem linearum cognitione possunt, cum earum latera sæpenuerò sint talia, ut ea communis & nota mensura data metiri nequeat, ut liquido constat ijs, qui aliquando demonstrationes Geometricas in opus contulerunt, atq. vsu: idcirco vs hisce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinū intelligentiam, dimensionemque requisita, Stereometriæ suæ præposuit decimum librum, in quo subtiliter & copiose de huiusmodi lineis differit. Intelligas rursus Euclides, neq. hanc tractationem linearum commensurabilium & incommensurabilium sine numerorū cognitione posse consistere, ante decimum librum agit de numerorum passionibus, eaq. copiose & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, est persequutus. Quamobrem totum hoc volumē elementorum Geometricorum quindecim libris comprehensum (quorum quidem priores tredecim sine vlla controuersia Euclidi ascribuntur ab omnibus posteriores verò duo à nonnullis Hypsicles Alexandrini esse creduntur) secari rectè poterit in quatuor partes, ita ut primā pars contenta sex prioribus libris agat de planis, Secunda tres sequentes complectens, passionem numerorum perscrutetur: Tertia, quam solus decimus constituit liber, de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusq. disputet: Quarta denique reliquis quinque libris absoluta scientiam solidorum, siue corporum complectatur. Prima pars rursus triplex est: Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis absolute, inuestigando eorū æqualitatem & inæqualitatem: In quinto verò libro

PROLEGOMENA

Libro de proportionibus magnitudinum in genere disputatur: In sexto denique proportionum figurarum planarum discutuntur. Quid verò Euclides in singulis alijs libri pertractet, proprijs in locis exponemus.

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA, QVID PROPOSITIO, ET QVID LEMMA APUD Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicarum dividitur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocant eam demonstrationem, quæ iubet, ac docet aliquid construere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum æquilatrum constitui, appellabitur huiusmodi demonstratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum æquilatrum constitui debeat supra rectam lineam finitam. Dicitur est aut hoc genus demonstrationum Problema ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur questio illa, cuius utraque pars contradictionis (ut ipsi loquuntur) est probabilis, qualis hæc est questio: An totum distinguatur realiter à suis partibus simul acceptis: Sic etiam questum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent construere, & cuius contrarium effici etiam potest, problema appellatur. Vt si quis proponat se demonstraturum, supra lineam rectam finitam triangulum æquilatrum posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum non æquilatrum, nempe Isosceles, vel scalenum, supra eandem lineam constitui potest. Pari ratione, qui instituit angulum rectilineum secare bisariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem dividi potest in partes non æquales. Est tamen discrimen non parvum inter Dialecticorum & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico utraque pars contradictionis suscepta confirmatur tantum probabiliter, ita ut intellectus cuiusque ambigat utramque illius pars vera sit: In Mathematico verò, quamcumque quis partem elegerit, eam firma demonstratione, ita ut nihil omnino dubij sit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra statuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propositæ lineam perpendicularem educere, efficiet utique hoc ipsum ratione constanti, & evidenti: Eodem modo dicendum est, si ex eodem puncto velit educere lineam non perpendicularem. Theorema autem appellant eam demonstrationem, quæ solum passionem aliquam proprietatemve unius, vel plurium simul quantitatum perscrutatur. Vt si quis optes demonstrare, in omni triangulo tres angulos esse æquales duobus rectis, vocabunt talem demonstrationem Theorema, quia non iubet, aut docet triangulum, aut quippiam aliud construere, sed contemplatur tantummodo trianguli cuiuslibet constituti passionem, dant, quod anguli illius duobus sint rectis æquales. Vnde à contemplatione ipsa, hæc demonstratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione potest, contradictionis utraque pars vera ut sit. Si enim quis demonstret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus esse rectis æquales, nullo poterit modo fieri, ut inæquales quoque sint duobus rectis. Eadem ratio in alijs theorematibus est intelligenda. Itaque ut uno verbo dicam, questum illud Mathematicum construere aliquid docens, cuius etiam oppositum potest effici, Problema: Illud verò, quod nihil docet construere, & cuius pars opposita perpetuò falsa existit, Theorema appellatur. Vnde si quis proponeret in modum problematis, se in semicirculo velle angulum rectum constituere, irridendus omnino esset, & Geometria prorsus ignarus indicandus, quoniam omnes anguli in semicirculo constituti sunt recti, ut demonstrabitur libro 3. Propositione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendum erit. Ceterum tam problema, quam theorema dici consuevit apud Mathematicos Propositio, propterea quod utrumque aliquid nobis proponit, ut in exemplis adductis constat. Hæc idem dixerim, ut studiosus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & ceteris Mathematicis, propositionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (ut aliorum interim volumina taceam) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concluduntur his fere verbis: Quod faciendum erat: Theorematum verò hisce: Quod ostendendum, vel demonstrandum erat: habita nimirum ratione finis utriusque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonstrationes continentur, & non una tantum, quantum ultimus syllogismus demonstrativus solum concludat id, quod in initio demonstrandum proponitur, ut declarabimus in prima Euclidis propositione, & in ceteris omnibus manifestum erit.

QUONIAM verò ad demonstrationes problematum, atq; theorematum sæpenumero requiruntur alia quedam theoremata, vel problemata minus principalia, & quæ facili ex ijs, quæ prius demonstrata sunt, intelligi possunt, inferuntur interdum à Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atque theorematibus, de quibus præcipue agitur, ut brevius demonstrari possint. Vocant autem illa Lemmata, propterea quod solum assumuntur ad alias demonstrationes, non autem de illis præcipua disputatio instituitur, quemadmodum de alijs. Itaque Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationem alicuius theorematum, vel problematis principalis assumitur, ut demonstratio expeditior fiat, ac brevior.

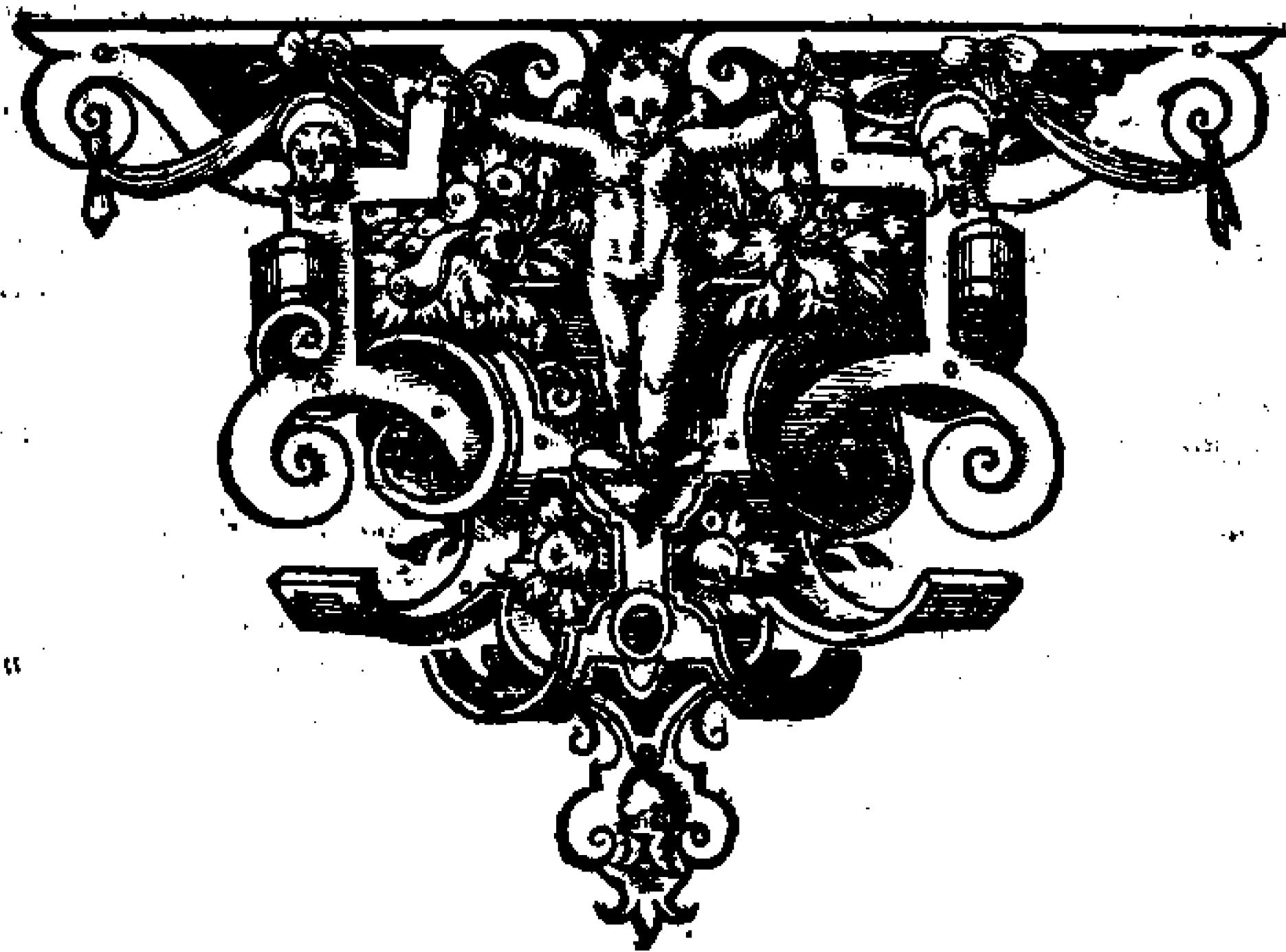
QUAENAM SINT PRINCIPIA APUD MATHEMATICOS.

UM omnis doctrina, omnisque disciplina ex præexistente gignatur cognitione, ut auctor est Aristoteles, atq; ex assumptis, & concessis quibusdam principijs suas demonstret conclusiones. Nulla autem scientia ex eiusdem Aristotelis, aliorumque Philosophorum sententia sua principia demonstrat: habebunt utique & Mathematica disciplina sua principia, ex quibus positus, & concessus sua problemata ac theoremata confirmant. Horum autem tria tantummodo genera apud Mathematicos reperiuntur. In primo reponuntur omnes definitiones, quas nonnulli cum Aristotele suppositiones, ut vult Proclus, appellant. His autem vocabula artis explicantur, ne in translatione ipsa, nominum ambiguitate, aut obscuritate circumventi in paralogismos incidamus. Secundum genus complectitur Petitiones, sive Postulata, quæ quidem adeo clara sunt, & perspicua in illa scientia, quæ in manibus habetur, ut nulla indigeant confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne vlla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertium genus referuntur Axiomata, seu communes animi notiones, quæ

PROLEGOMENA.

Non solum in scientia propofita, fed etiam in omnibus alijs ita manifefte funt, & euidentia, vt ab eorum illatione diffentire queat is, qui ipfa vocabula recte pertrahat. Atque his principijs recte mihi videtur accommodari poffe id, quod in Metaphysicis fcribit de primis principijs Aristoteles: *A iuxta quis aberrabit?* Et præclare à Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum Elementorum præmittit ante demonstrationes fuarum conclusionum omnia hæc principia, vt ex ipsis, quæ quidem factè à quouis intelliguntur, deducat admiranda theorematæ, quibus nemo vquam assensum præberet, nisi certa ac euidenti ratione confirmaretur. Vnde hoc etiam nomine summis laudibus effrenda est Geometria, omnibusque seculis prædicanda, quod ex tam exiguis initijs cuilibet quantamvis rudis & ignaro notissimis, & quidem perfacilibus progrediatur, ad illorum maiora primo aspectu ab omni sensu humana, & intellectu remota, quæ tamen omnia miro ordine, ac methodo facili demonstrationibusque certissimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porro in huiusmodi principijs tradendis hic ordo ab Euclide seruat, vt in ipso quidem introitu scientiæ proponat principia toti Geometria communia, in alijs autem deinde libris, vbi res postulat, ea exponat principia, quæ propriæ, & peculiari quædam ratione, ad materiam illorum subiectam videntur spectare. Neque verò omnia principia Geometrica ab Euclide in his elementis sunt explicata, sed multa reliquit lectori disquirenda, quæ tamen ex his, quæ tradidit, sine magno labore ac studio percipi possunt, & intelligi. Verum ne in hac quoque parte defuisse videamur rerum Mathematicarum studiosis, adiuuamus varijs in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum igno-

ratione maxime cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse. Sed iam
ad expositionem ipsam Principiorum Euclidis
accedamus.



IN GEOMETRIAM EUCLIDIS
CARMEN.



VILIS & suavis quàm sit diuina Matheſis,
Quis poſſit digno commemorare modo?
Quanquam tot linguis doctis ego præditus eſſem,
Conuexus quot habet ſydera clara polus:
Quanquam Romani Ciceronis acumine clarus
Præſtarem cunctis vnus in orbe viris:
Non tamen hoc aptis poſſem proponere verbis,
Materiam ingenio non capiente meo.
Et quamuis reliquas ſicco pede conſcius artes
Ipſe Mathematicas præteriſſe velim:
Nōne Geometrice tamen hoc oſtendere poſſit?
Muſice, Arithmetice nōne probare ſatis?
Harum equidem eſt vſus per vitam plurimus omnem.
Quod, niſi niſ ſapiat, nemo negare poteſt.
Hæc quia cognouit quicumque Mathematica rectè,
Promptior eſt alijs omnibus ille viris.
Ergo velut cuncti laudemq; decusq; merentur,
Qui diſcunt ſtudio talia cuncta bono:
Sic quoque debetur laus, gratia, gloria cunctis,
Ordine qui tradunt talia cuncta bono.
Quod cum ſic habeat, certè non parua, licèt ſit
Ethnicus, Euclidi gloria iure datur.
Is quia per doctis metirier omnia libris
Edocuit ſtudijs corda dicata bonis.

H. G. F.

IN ROMANAM EVANGELII

CRONICA

1. In nomine domini Amen. Incipit.

2. In nomine domini Amen. Incipit.

3. In nomine domini Amen. Incipit.

4. In nomine domini Amen. Incipit.

5. In nomine domini Amen. Incipit.

6. In nomine domini Amen. Incipit.

7. In nomine domini Amen. Incipit.

8. In nomine domini Amen. Incipit.

9. In nomine domini Amen. Incipit.

10. In nomine domini Amen. Incipit.

11. In nomine domini Amen. Incipit.

12. In nomine domini Amen. Incipit.

13. In nomine domini Amen. Incipit.

14. In nomine domini Amen. Incipit.

15. In nomine domini Amen. Incipit.

16. In nomine domini Amen. Incipit.

17. In nomine domini Amen. Incipit.

18. In nomine domini Amen. Incipit.

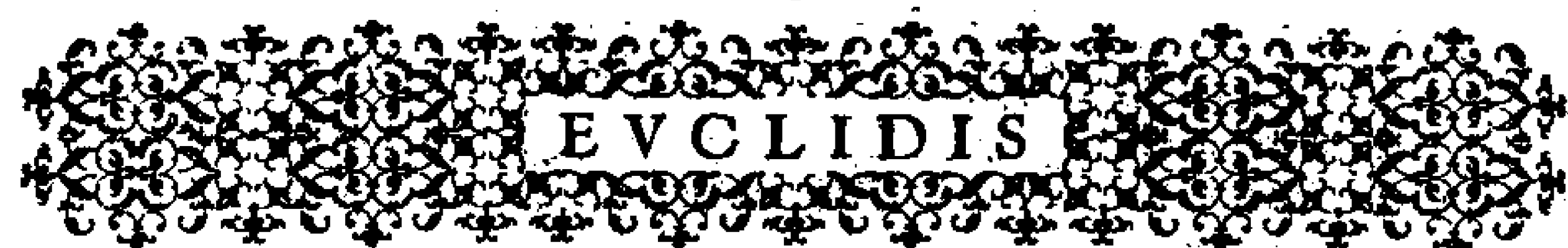
19. In nomine domini Amen. Incipit.

20. In nomine domini Amen. Incipit.

21. In nomine domini Amen. Incipit.

22. In nomine domini Amen. Incipit.

IN C.F.



E L E M E N T V M P R I M V M.



D E F I N I T I O N E S.

I.

PUNCTUM est, cuius pars nulla est.



*Or v s hic primus liber in eo positus est, ut nobis tradat ortum proprietateq;
triangulorum, tum quod ad eorum angulos spectat, tum quod ad latera: qua
quidem inter se comparat interdum, interdum verò unumquodq; per se in-
spicit, & contempletur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos con-
siderat, aliquando verò ex angulis latera, secundum aequalitatem atque ina-
qualitatem, rimatur. Idemq; varijs rationibus inquirat in duobus quandoque
triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates,
parallelogrammorumque contemplationem aggreditur, tum inter se, tum
etiam, ut cum triangulis inter easdem parallelas constitutis conferuntur. Ve
autem hac omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet divisio-*

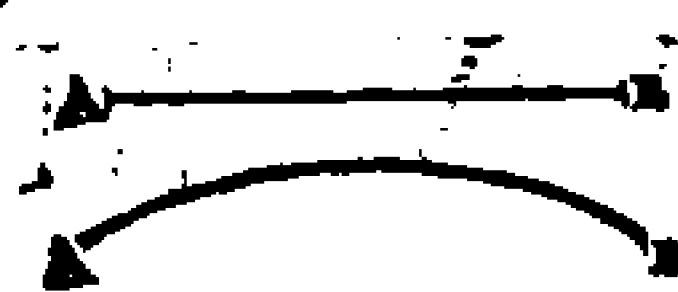
*mem anguli rectilinei, & linea recta in partes aequales, constitutionem linea perpendicularis, quo pacto angu-
lus angulo fiat aequalis, & alia huiusmodi. Itaque ut vno verbo rem totam complectar, in primo libro tradun-
tar, ex Procli sententia, rectilinearum figurarum maxime prima, ac principia, triangula inquam, atque pa-
rallelogramma. Ante omnia verò Euclides more Mathematicorum rem proposita exorditur à principijs, ini-
tio facto à definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate conti-
nuam, quod nullas habet partes. Qua quidem definitio planius ac facilius percipietur, si prius intelligamus, quan-
tatem continuam triplices habere partes, vnas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, &
secundum profunditatem altitudinemve alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet,
sed quaedam unicam tantum secundum longitudinem; quaedam duplices, ita ut illis adiciat partes etiam la-
titudinis; quaedam denique praeter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, siue profunditatis continet.
Quantitas enim omnis continua aut longa solum est, aut longa simul, & lata, aut longa, lata, atq; profunda.
Neque aliam dimensionem habere potest res vlla quanta, ut rectè demonstravit Ptolemaeus in libello de Ana-
leminute, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in pristinam dignitatem restituito, necnon, ut ait Sim-
plicius, in libello de Dimensione, qui quidem, quod sciam, adhuc nondum est excusus. Itaque quod in quan-
titate continua, siue magnitudine existit, intelligiturq; sine omni parte, ita ut neq; longum, neq; latum, ne-
que profundum esse cogitetur, (ut nimirum excludamus animam rationalem, Nunc vel Instans temporis, &
unitatem, quae etiam partes non habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum.
Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum potest, nisi velis, extremitatem ali- punctum
cuius acus acutissima, similitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum
non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinite, punctum verò indiuiduum prorsus debet exi-
stare. Denique in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero unitas, quodq; in tempore
instans. Sunt enim & hac concipienda indiuidua.*

II.

LINEA verò, longitudo latitudinis expers.

*DEFINIT hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam dunta-
taxat, non autem latam, intellige neque profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem
etiam necessario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, siue longitudinem absque*

latitudine, non absurdè concipere, intelligereq̃, poterimus ex termino loci alicuius partem illuminari, & partem obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quadam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & umbra extensa, carens omni latitudine, cum sit limes utriusque. Mathematici quoque, ut nobis inculcent veram lineam intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, e loco in locum moveri. Cum enim punctum sit prorsus individuum, relinquatur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum, omnis experte latitudinis. Ut si punctum



fluere intelligatur ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cuius verè intervallum inter duò puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quadam carens omni latitudine, propterea quòd punctum A, omni priuatum dimensione, esse efficere nulla ratione poterit. Hinc factum est, ut alij dixerint, lineam nil esse aliud, quàm puncti fluxum: Alij verò, magnitudinem vno contentam intervallo. Potest enim linea vnico tantum modo, utpote secundum longitudinem, secari atque diuidi.

III.

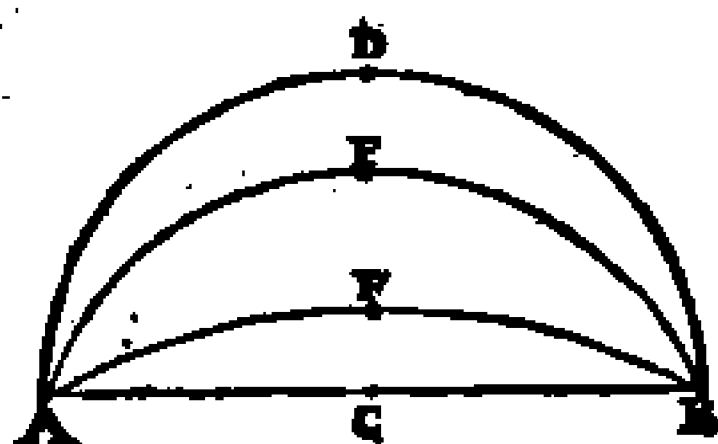
LINEAE autem termini, sunt puncta.

DOCET, quanam sint extrema linea cuiusvis, seu termini, dicens lineam terminari, siue claudi utrinque punctis; Non quòd omnis linea terminos habeat; quomodo enim linea infinita terminos assignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quòd linea quilibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Ut superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemque in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est; ita ut earum extremitates sola esse puncta cogitemus.

IV.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

TRIPLEX omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue composita ex utraque. Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ aequaliter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultat; in qua denique nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad vnum exprimit filum aliquod tenue summa vi extensum: In eo enim omnes partes mediae cum extremis aequalem obrinent firmitatem, nequè vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æqualiter inter extremos fines posita progrediuntur. Procius hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam



ex æquo sua interiaccere puncta, quando æquale occupat spatium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Ut linea A C B, diceretur recta, quoniam tantum occupat præcisè spatium, quanta est distantia puncti A, à puncto B: Linea verò A D B, A E B, A F B, non dicentur recta, cum maiora obrineant spatia, quàm sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta linea A C B, inter qua est punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineam perpulchrè sic definit: Linea recta est, cuius

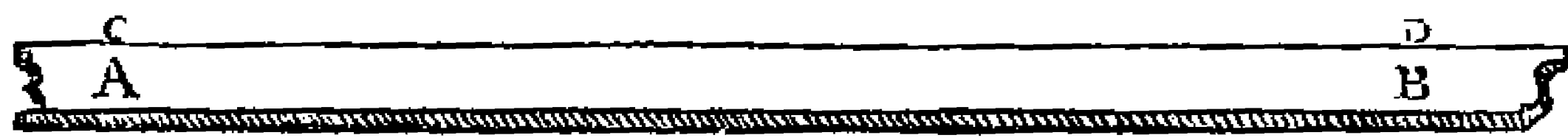
media obumbrant extrema. Ut in linea A C B, si punctum C, aut quodvis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento utrique esset C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur. Rursus oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremum B, ob interiectum punctum C; quod quidem non contingit in lineis non rectis, ut perspicuum est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes inquit, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiaceret sua puncta, sed ea potius linea, quæ minor diceretur, quàm A C B. Campanus describens rectam lineam, vocat eam brevissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Quomodo autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt describi lineam, ut per qualitatem fluxus puncti qualitatem lineæ descriptæ intelligunt. Si namque punctum rectæ fluere concipiatur per brevissimum spatium, ita ut neque in hanc partem, neque in illam deflectat, sed æquabilem quendam motum, atque incessum teneat, diceretur linea illa descripta, Recta: Si verò punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atque hinc inde titubare, appellabitur linea descripta, mixta: Si denique punctum fluens in suo motu non vacillet, sed in orbem feratur uniformi quodam motu, atque distantia à certo aliquo puncto, circa quod fertur, Vocabitur descripta illa linea, circularis. Itaq̃, si duo puncta moueantur similibus prorsus motibus, ita ut semper æqualiter inter se distent; describentur ab ipsis due lineæ similes, hoc est, si vna earum fuerit recta, erit & altera recta: si verò vna fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo curua, &c. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici possunt, non definit hoc loco Euclides, sed circularē exponet definitione decimaquinta, mixtam prorsus omittens, quæ ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat usum. Sunt autem plurima genera linearum

linearum mixtarum: quædam enim sunt vniformes, quædam diffformes. Vniformium rursus alia sunt in plano, alia in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsi, de quibus agit copiosissime Apollonius in conicis elementis; linea Conchoideos, de qua Nicomedes; linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spirilibus tractationem instituit, & alia huiusmodi. In solido, seu superficie curua sunt alterius generis linea helica, quam ea ab Archimede descripta, qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquem conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphaeram, cuiusmodi sunt spiræ illæ, quas Sol describit ab ortu in occasum, vt in sphaera docuimus. Difformium autem infinitus est numerus, quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunque sunt, mixtas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniose concludit Aristoteles in libro de Cælo iuxta triplicem lineam, tres tantum esse motus, duos quidem simplices, rectum & circularem, tertium verò mixtum, siue ex illis duobus compositum.

Lib. 1. text:

5.

Sed quoniam lineas rectas regula ducere solemus, doceamus, quæ ratione regulam propositam examinare possimus, num linea per illam descripta recta sit, nec ne. Sit ergo regula AB, secundum cuius latus CD, recta



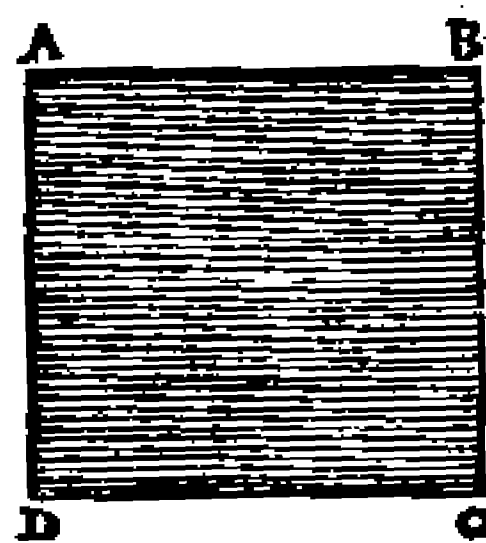
CD, descri-
batur ex pū-
cto C, in pun-

ctum D. Deinde conuertatur regula, vt, manente eadē parte superiore, punctū C, statuatur in D, & punctum D, in C: & secundum idē latus regula CD, recta ducatur ex puncto D, in punctū C. Nā si posterior hac linea priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regula AB, in lineis rectis ducendis fidere possimus. Si verò non congruet omni ex parte, latus illud CD, perfecte rectum non erit, sed corrigendum erit diligentius.

V.

SUPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemque tantum habet.

Post lineam, quæ est prima quantitatis continua species, vnicamque, habet dimensionem, definit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additque, prima dimensionem secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur non solum longitudo, vt in linea, verum etiam



latitudo, sine tamen omni profunditate. Vt quantitas ABCD, inter lineas AB, BC, CD, DA, comprehensa, considerataque, secundum longitudinem AB, vel DC, & secundum latitudinem AD, vel BC, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusque corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiem nobis exhibent vmbra corporum. Ha enim, quum interiorem terræ partem penetrare non possint, longa tantum erunt, & lata. Mathematici verò, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transversum moueri: Vestigium enim relictum ex isto motu erit quidem longum propter longitudinem lineæ,

latum quoque, propter motum, qui in transversum est factus; nulla verò ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens, omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea AB, fluat versus DC, efficietur superficies ABCD. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij verò, magnitudinem duobus constantem interuallis. Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, altero verò secundum latitudinem.

VI.

SUPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

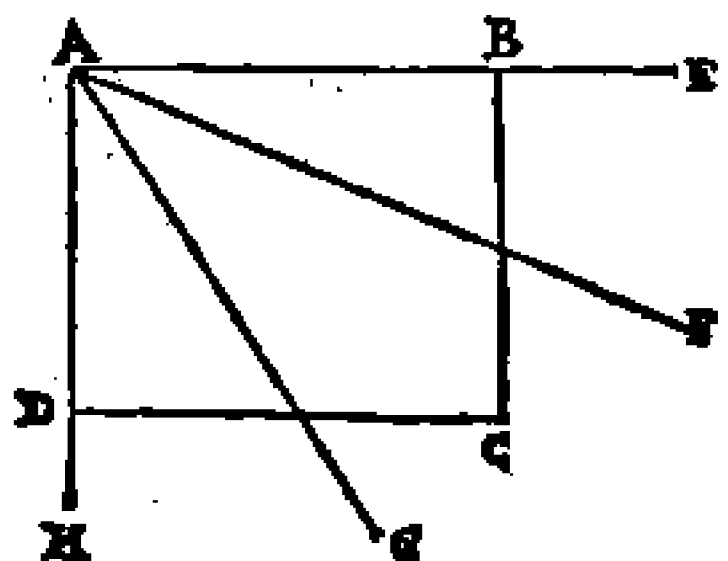
Non dissimilis est hæc definitio superiori, quæ termini lineæ fuere explicari. Vult enim extremitates superficiem esse lineas, quemadmodum linea fines extitere puncta. Vt superioris superficiem ABCD, extrema sunt lineæ AB, BC, CD, DA; Eodemque modo in quacunque altera superficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphaerica, quæ corpus sphaericum circumdat. Potest etiam superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.

VII.

PLANA superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

Hæc quoque definitio similitudinem quandam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis sursum, deorsumve subsultando non recedant, appellabitur plana: qualis est superficies perpolitæ alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocata, ita vt nihil habeat incisum angulum, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermedia cum extremis æqualem adeptæ sunt situm, nec vlla est alia sublimior, humiliorque, sed omnes æquabiliter protendantur. Alij superficiem planam definiunt, dicentes eam esse, cuius partes mediæ obum-

brant extrema: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, qua eadem habet extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari potest, ut placet Heroni antiquo Geometra. Ut superficies $A B C D$, tum



demum plana dici debet, quando linea recta $A E$, circa punctum A , immobile circunducta, ita ut nunc eadem sit, qua $A B$, nunc eadem, qua $A F$, nunc eadem, qua $A G$, & nunc eadem, qua $A H$, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum, sed omnia puncta superficies a linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod si minima superficies particula alii humilior a linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta libere non posset circumduci, propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, iam non posset nuncupari plana. Itaque ut sit plana, requiritur ut

omnibus modis possit recta linea commensurari, hoc est, ut ei applicari possit recta linea secundum $A B$, & $A F$, & denique secundum omnes partes. Hac autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu linea recta in transversum, qui super duas alias lineas rectas conficitur. Ut si linea recta $A B$, per duas rectas $A D$, $B C$, feratur, efficietur superficies perfecte plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic superficies traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita ut quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cetera omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qualis est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnae rotunda, vel etiam conici, &c. appellantur curua, & non plana. Quamvis enim superficies columnae rotunda, seu cylindri, secundum longitudinem adaptari possit linea recta, tamen secundum latitudinem minime potest. Idemq; dicendum est de aliis. Superficies autem curua duplex est, conuexa videlicet, ut exterior superficies sphaerae, vel cylindri, & concava, ut interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam vero

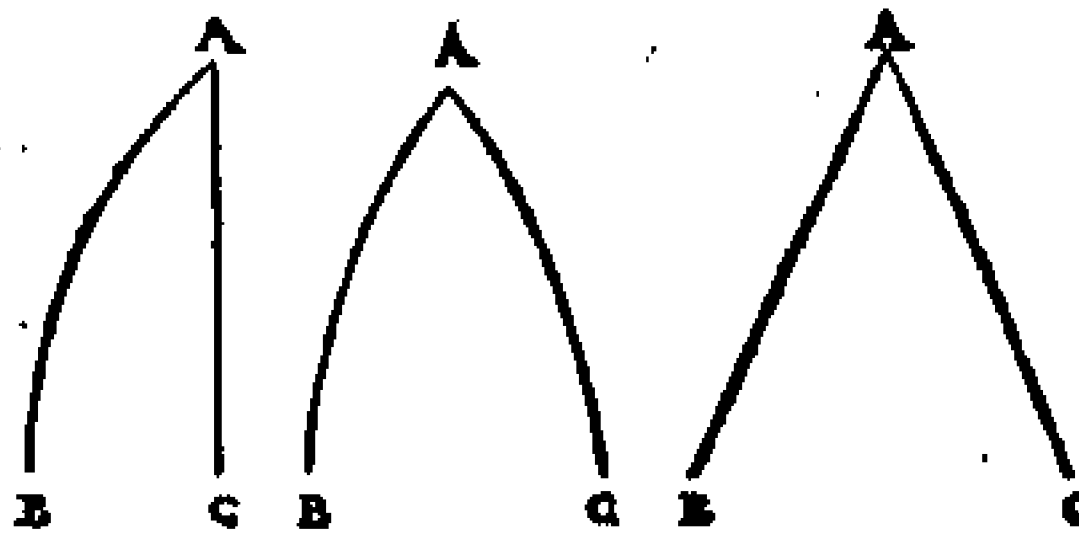


omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.

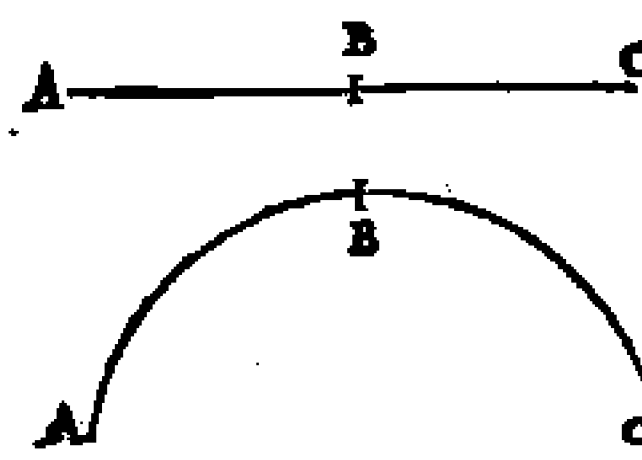
X.

PLANVS verò angulus, est duarum linearum in plano se mutuò tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quidnam sit angulus planus, dicens: Quandoquocumq; dua linea in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione unus ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia,



quia dua linea $A B$, $A C$, concurrunt in A , & non iacent in directum, idcirco efficiunt angulum A , planum in eadem existentem superficie, in qua dua illa linea constituuntur. Dicuntur autem dua linea non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum contactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo seiungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamvis eam non secet. Unde verè est angulus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in proposito. 16. lib. 3. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quod si dua linea se mutuò tangant, iacentes in directum, ita ut alterutra producta congruat toti alteri, non fiet ullus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed amba vnâ integram lineam constituent. Ut quia recta $A B$, producta conuenit cum recta $B C$, non efficietur angulus in B . Sic etiam non fiet angulus in B , ex lineis curuis $A B$, $B C$, quia alterutra secundum suam inflexionem, & obliquum dum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicuntur iacere. Itaque, ut linea recta efficiant angulum, necesse est, ut post concursum producta se mutuò secant: Curua autem linea, vel quarum altera curua, altera verò recta existit, angulum constituere verè possunt, etiam si non se mutuò interfecant, sufficit enim, quod sese contingant, ita ut statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semota cernuntur. Consistit



autem anguli cuiusvis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum: linea etenim longius excurrentes, non augent suam inclinationem, igitur neq; anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum

lorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides differit in Stereometria, quiq; in corporibus existunt; Posterius verò sphaerales, qui in superficie sphaera constituntur ex circularum maximorum circumferentiis, & de quibus copiose agitur in sphaericis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum à nobis rejicitur, cum hiis de soli plani angulis sit futurus sermo.

IX.

Cum autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

Angulus planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidē rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides; aut ex duabus curvis, quæ curvilineum vocare licet; aut ex vna curua, & altera recta, qui non ineptè mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis possunt curvilinei anguli tribus variari modis, &



mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum curvarum, utpotè secundum connexionem, & concavum, seu in propositis angulis

planis & aperte perspicitur. Rectilineus verò variari non potest ratione inclinationis, habitudinisve linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdum; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuat, quod & aliis commune est, non autem ita variatur, ut aliud constituat genus.

X.

Cum verò recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur eius, cui insistit.

Ubi s frequenter reperitur in Geometria anguli recti, & linea perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acuti, propterea docet hoc loco Euclides, quoniam angulus rectilineus apud Geometras appellatur rectus, & quoniam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest angulus rectilineus, præter rectum, obtusum, & acutum. Igitur si recta linea AB, recta CD, insistens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur à Mathematicis esse deinceps, quod eos eadem linea CD, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter se æquales, quod cum demum fiet, quando recta AB, non magis in C, quam in D, inclinabit, sed æquabiliter recta

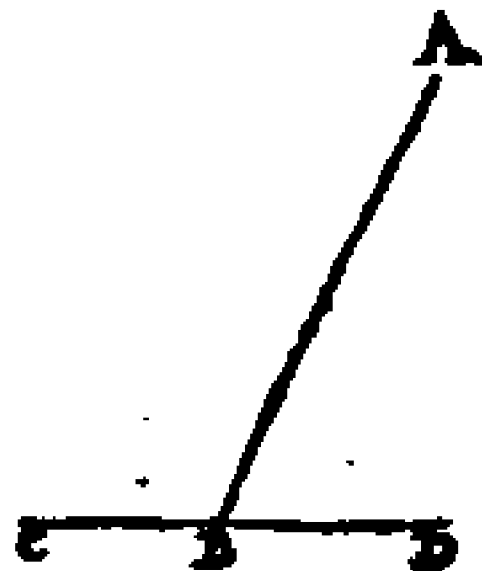


CD, insistet, vocabitur uterque angulus B, rectus, & recta AB, perpendicularis rectæ CD, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta CB, perpendicularis rectæ AB: quamvis enim CB, tantum faciat cum AB, unum angulum, tamē si AB, extendere-
tur in rectum & continuū versus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua verò arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docēbit Euclides proposit. 11. & 12. huius lib. Itaq; ut in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, quæ ipsam efficit, ad aliam esse perpendicularē, requiritur, & sufficit, ut probemus angulum, q. est ei deinceps, æqualem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipsum constituit, perpendicularis ad

aliā, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoq; esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se æquales, nuncupatur uterque illorum rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definit. quando autem non fuerint æquales, non dicitur quisquam illorum rectus, ut constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neq; linea eos constituens perpendicularis appellatur. Hac dixerim, ut videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quoniam vsum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magno labore hac, quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.

XI.

Obtusus angulus est, qui recto maior est.



Quando recta AB, recta CD, insistens, non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed unum quidem recto maiorem, alterum verò minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BC.

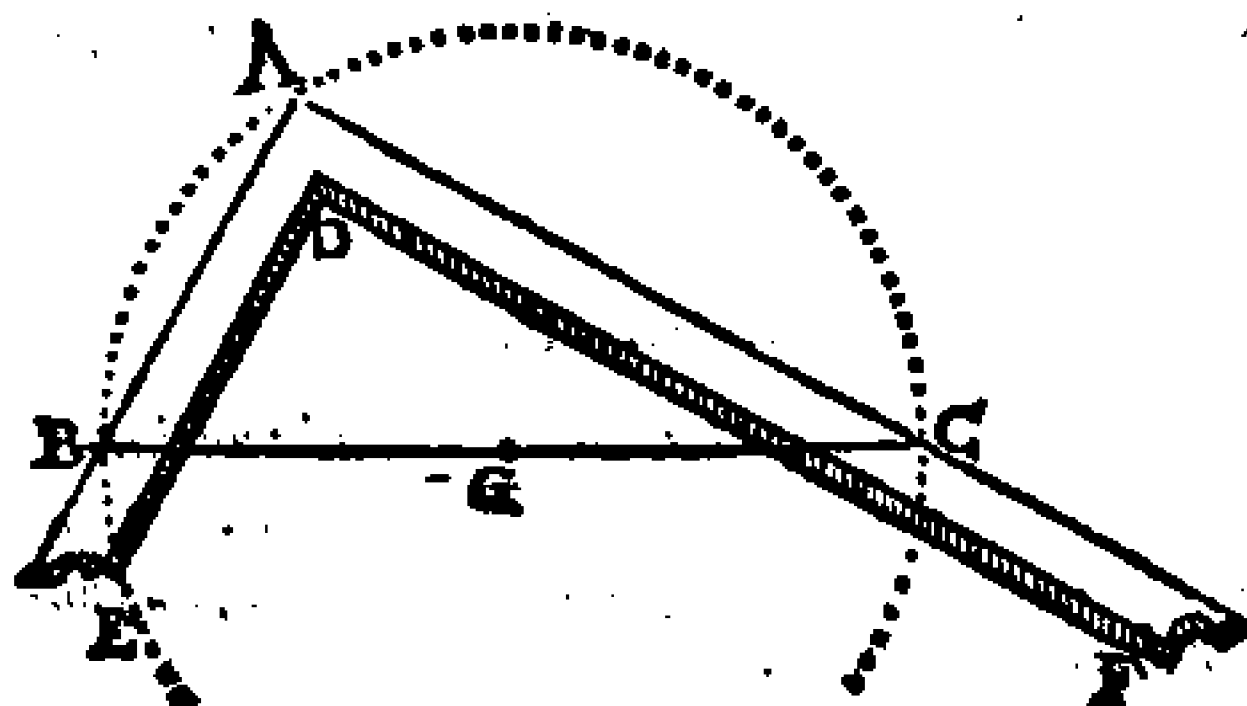
Ac v t v s verò, qui minor est recto.

Vt in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B D, vocatur acutus. Itaq, angulus rectus, ut ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, ut vnus altero maior minorve detur, cum linea perpendicularis cum efficiens nõ debeat magis in vnâ parte inclinare, q̃ in alteram: Obtusus verò, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate linea perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, ut perspicuum est. Quoniam verò ad quemvis angulum planum constituendum concurrunt dua lineæ, & aliquando in vno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, ut tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extrema verò significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum A B C, acutum verò, p̃ angulum A B D; quod diligenter est notandũ, ut facile dignoscamus angulos, quorũ mentio fit in demonstracionibus.

14 M vero proposito nobis angulo aliquo rectilineo, si experiri velimus, num rectus sit, an obtusus, acuruf-
ve, efficiemus id hoc modo. Contineant duae rectae AB, AC , angulum A . Ducta recta BC , utcuque, qua angu-

ALITER idem assequemur hoc modo. Describatur ex puncto D, quod rectam BC, dato angulo A, subtensam secant bisariam, semicirculus ad intervallum DB, vel DC: qui si transeat per punctum A, ^d datus angulus erit rectus, utpote qui in semicirculo existat. Si verò idem semicirculus transeat supra punctum A, datus angulus erit obtusus. Ducta enim recta DA, secante circumferentiam in E, iungantur recta EB, EC. ^e eritq, angulus BEC, in semicirculo rectus. Cum ergo angulus BAC, datus ^f maior sit angulo BEC, erit angulus datus A, recto maior, hoc est, obtusus. Si de-

*FACILIVS idē cognoscemus beneficio norma
lia cuius accuratē fabricata, quale refert instrument
um ABC, constans duabus regulis AE, AF, ad angu
lum rectum in A, coniunctis. Nam si Latus AB, huius
norma, recta AB, applicetur, cadere puncto A, in pun
ctum A; siquidem & norma latus AC, recta AC, con
gruat, erit angulus A, rectus: si verdē citra rectū AC,
cadat norma latus AC, erit angulus A, obtusus: si de
nique latus norma AC, ultra rectam AC, cadat, acu
tus erit angulus, ut perspicuum est.*



Ita autem normam examinabimus, num accurate sit fabricata, necne. Descripto semicirculo BAC , ex centro G , cuiusvis magnitudinis, ducta q. diametro BC , ponatur angulus A , in aliquo puncto circumferentia, ut in A , latusq. vnum norma, ut AB , per B , punctum extremam diametri transeat. Nam si alterum tunc latus AC , per alterum punctum extremum C , transeat, rite fabricata erit norma ABC ; ² quod tunc angulus BAC , in semicirculo BAC , rectus sit: si vero latus AC , nō per C , transeat, emendanda erit norma; quia eius angulus A , tunc rectus non erit. Eadem ratione interiorē partē norma examinabimus, si angulum D , circumferentia applicemus, & latera DE , DF , punctis extremis B , C , & c.

XIII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES sunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim terminus est, seu extremum linea: Linea superficies: & superficies corporis. Corpus autē terminare amplius nihil potest, quod non reperitur alia quantitas plures habens dimensiones, quā tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum vna dimensione, ut perspicuum est ex adductis exemplis.

XIV.

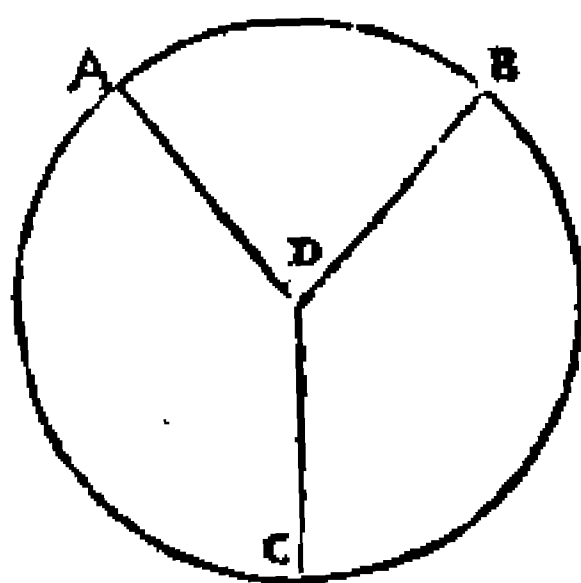
FIGURA est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

NON omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitā figurā appellare cogamur: Sed ea solum magnitudines, quæ latitudinē habent, nempe superficies terminata; & quæ profunditatem ad præ quoq. sunt, ut solida finita, Figura nomine appellabuntur. Hæ enim propriè terminis comprehendidicuntur. Nam linea finita non propriè dicitur punctis extremis comprehendī, cum puncta lineā non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur. Itaq. termini debent quantitatē, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare. Superficies quoq. infinita, vel etiam corpus, cū nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione potest. Figura vnico comprehensa termino sunt, Circulus, Ellipsis, Sphæra, Sphæroides, & alia huiusmodi: Pluribus vero terminis incluse figura sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, & c. Superficies terminata nuncupantur figura plana: solida autem circumscripta, figura solida, siue corporea. Porro quia formas, seu typos variarum figurarum inspicies q. plurimas in sequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum vero in posterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda esse videtur.

XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub vna linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ, inter se sunt æquales.

DEFINIT hic circulum, figurant inter planas perfectissimā, docens figuram illam planā, quæ vnica linea circumscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sunt æquales, vocari circulum. Ut si superficies, seu spatium concludatur vnica linea ABC , habueritq. hanc conditionem, ut ab aliquo puncto intus suscepto, utpote à D , omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum ABC , quales sunt DA , DB , DC , inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, aliās nō. Quæ verò ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides proposit. 1. lib. 3. Adiungit quoq. Euclides lineam extremā circuli, qualis est ABC , appellari Peripheriam, seu, ut Latini exponūt, circumferentiam. Potest circulus etiam hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur à linea recta finita circa alterū punctum extremū quiescens circumducta, cum in eundem rursus locū restituta fuerit, unde moueri cæperat. Quæ quidē descriptio persimilis est ei, quæ ab Euclide sphæra describitur lib. 11. Ut si intelligatur recta AD , circa punctū D , quiescens moueri, donec ad eundē redeat locū, à quo dimoueri cæpit, describet ipsa recta totū spatium circulare punctum verò alterū extremū A , delineabit peripheriā ABC : Erit quoq. punctū quiescens D , illud, à quo omnes lineæ cadentes in peripheriā sunt inter se æquales, propterea q. recta AD , circumducta, oēs lineas, q. ex D , possūt educi ad peripheriā, æquē metiatur. Igitur Ellipsis, quāuis figura sit plana vna linea circumscripta, tamē quia in ea non datur punctū, à quo ad ipsam lineā terminantē omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.



XVI.

HOC verò punctum centrum circuli appellatur.

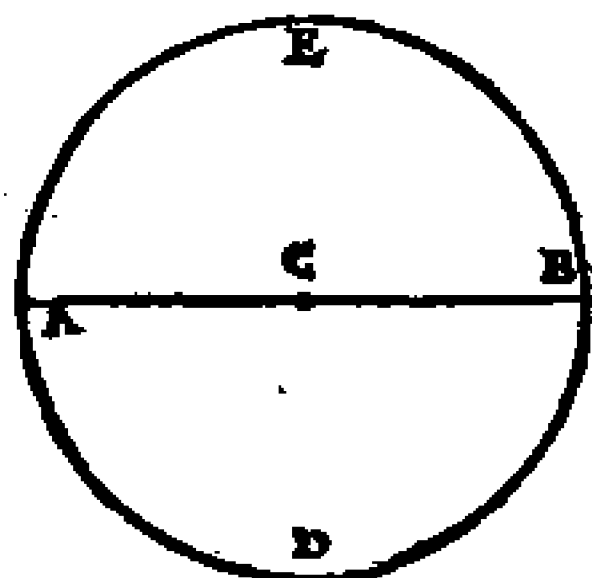
DOCT, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam ductæ, sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figura punctum D . Vnde perspicuum est, polum alicuius circuli in sphæra, à quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes sunt æquales, ut ait Theodosius in sphericis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphæra, non autem in superficie circuli; quæ tamen est necessariò requisita conditio, ut punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, ut punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, ut ab eo tres duntaxat li-

nea cadentes in peripheriam sint aequales inter se, ut demonstrat Euclides proposit. 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, ut omnes alia ab eodem puncto emissa inter se sint aequales.

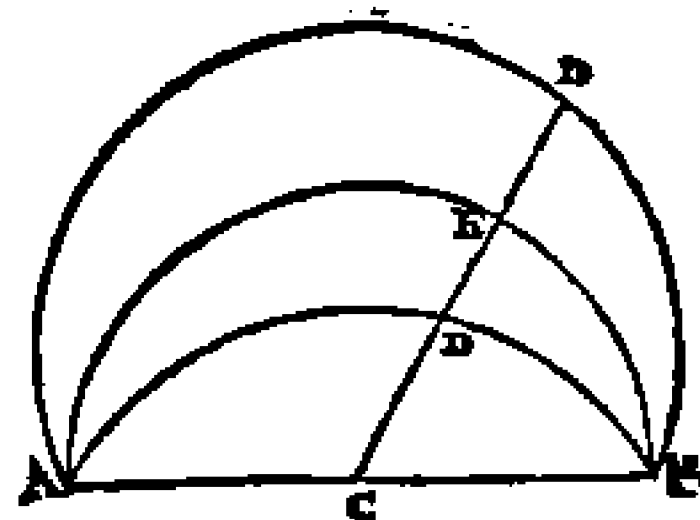
XVI.

DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circumulum bifariam secat.

Si in circulo ducatur recta linea AB , per centrum C , ita ut extrema eius A , & B , terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, qua per centrum usque ad peripheriam utrinque extenditur. Unde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum verò centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circumulum bifariam secari à diametro, perspicuum ex eo esse potest, quod diameter per medium circumulum, utpotè per centrum, ducitur. Hinc enim fit, ut propter directum diametri per centrum transitum, utrinque aequales circumferentiæ abscindantur. Quod tamè Thalesem Milesum hac ratione demonstrasse testatur Proclus. Concipiamus animo, portionem ADB , accommodari, & coaptari portioni reli-



que AEB , ita ut diameter AB , communis sit utrique portioni. Si igitur circumferentiæ ADB , congruat penitus circumferentiæ AEB , manifestum est, duas illas portiones à diametro factas, esse inter se aequales, quandoquidem neutra alteram excedit. Si verò circumferentiæ ADB , non omni ex parte cadere dicatur super circumferentiæ AEB , sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta à centro C , secante circumferentiæ ADB , in D , & circumferentiæ AEB , in E , erunt duæ rectæ CD , CE , ductæ ex centro ad circumferentiæ eiusdem circuli aequales, per circuli definitionem, cum tamen una sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet una circumferentiæ extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, sed amba inter se aptabuntur, ideoque aequales erunt. quod demonstrandum proponebatur.

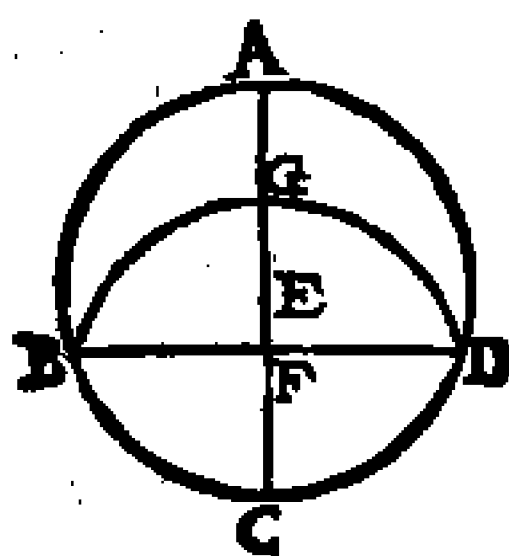


Ex hac demonstratione constat, diametrum non solum circumferentiæ, verumetiam totam aream circuli secare bifariam. Cum enim semicircumferentiæ sibi mutuo congruant, ut ostensum est, congruent etiam superficies ipsæ inter diametrum, & utramque circumferentiæ comprehensa, cum neutra alteram excedat. Quare aequales inter se erunt.

XVII.

SEMICIRCULVS verò est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria auferitur.

EXEMPLI gratiâ, in superiori circulo figura ADB , contenta sub diametro AB , & peripheria ADB , dicitur semicirculus, quia, ut in precedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadè ratione erit figura AEB , semicirculus. Adem autè punctum C , diametrum secans bifariam, centrum est in circulo, & in semicirculo. Quod si recta linea BD , non transeat per centrum E , secabitur circulus ab ea non bifariam, sed in duas



portiones inæquales BAD , BCD , quarum ea, in qua centrum circuli existit, cuiusmodi est portio BAD , maior est, quam alia BCD , extra quam centrum E , reperitur. Esse autè portiones BAD , BCD , inæquales, ita probari potest. Concipiatur per centrum E , ducta diameter ad rectam BD , perpendicularis AC . Si igitur dictæ portiones dicantur esse aequales, & portio BCD , intelligatur moveri circa rectam BD , ut super portionem BAD , cadat, congruet illa portio huic, & recta FC , recta FA , congruet, ob angulos rectos ad F , quæ omnes inter se aequales sunt ex definit. 10. cum sint sibi mutuo demceps. Recta ergo FC , quæ nunc eadè est, quæ FA , maior erit, quam EA , pars ipsius

FA . Cum ergo ipsi EA , sit æqualis EC , quod amba ducantur à centro ad circumferentiæ, erit quoque FC , maior quam EC , pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur portio BCD , portioni BAD , congruet, sed intra eam cadet, cuiusmodi est portio BGD , ut recta FG , eadem tunc existens, quæ FC , minor possit esse quam EA , vel EC . Si namque diceretur cadere extra, ut si circulus esset $BCDG$, cuius centrum E , & portio BCD , caderet extra BGD , qualis est portio BAD , effer rursus FA , eadè tunc existens, quæ FC , maior quæ EG , hoc est, quæ EC , atque ita pars FC , maior rursus foret toto EC , quod absurdum est. Ex quo patet, portionem BAD , in qua centrum E , existit, maiorem esse reliqua portione BCD , cum hac æqualis sit portioni BGD , quæ pars est portionis BAD . Cum enim ostensum sit, portionem BCD , circa rectam BD , circumductam non posse congruere portioni BAD , neque cadere extra; cadet omnino intra, qualis est BGD .

XVIII.

RECTILINEÆ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

Post definitionem circuli, traditurus iam Euclides descriptiones variarum figurarum, explicat prius quam

quanam figura dicantur rectilinea. De his enim porissimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figurae plane, quae undique rectis clauduntur lineis, rectilineae nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuram planam curvis lineis comprehensas, dici curvilineas: Eas vero, quae partim curvis, partim rectis circumscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclido describentur.

XX.

TRILATERAE quidem, quae sub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quae tribus rectis lineis circumscribuntur, aperte nobis innuit, quoniam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu recta linea, ex quibus constans, dicitur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.

XXI.

QUADRILATERAE vero, quae sub quatuor.

EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius varia species mox subsequuntur.

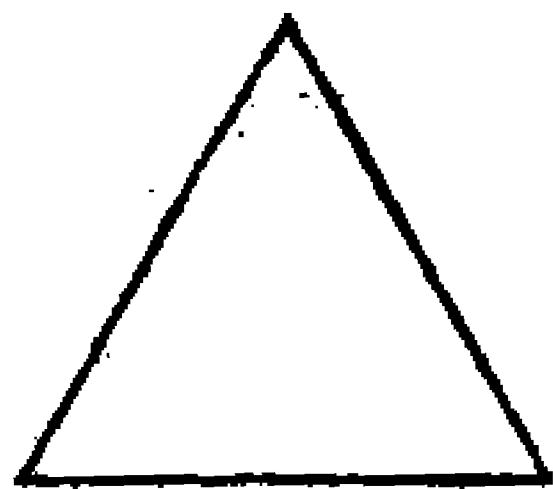
XXII.

MULTILATERAE autem, quae sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QUONIAM species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum: Nam tres recta linea claudentes figuram efficiunt primam speciem, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, quae omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam comprehendunt speciem; sex quartam, atque ita deinceps infinite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quae pluribus, quam quatuor, rectis lineis circumscribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, fortassis eam ob causam, quod praecipue in prioribus his libris de Triangulo, atque Quadrangulo sermo habeatur, & quod facile ad similitudinem harum duarum specierum caeterae omnes à quolibet definiri possint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam, sexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiusmodi figura quinquangula, sexangula, septangula, &c.

XXIII.

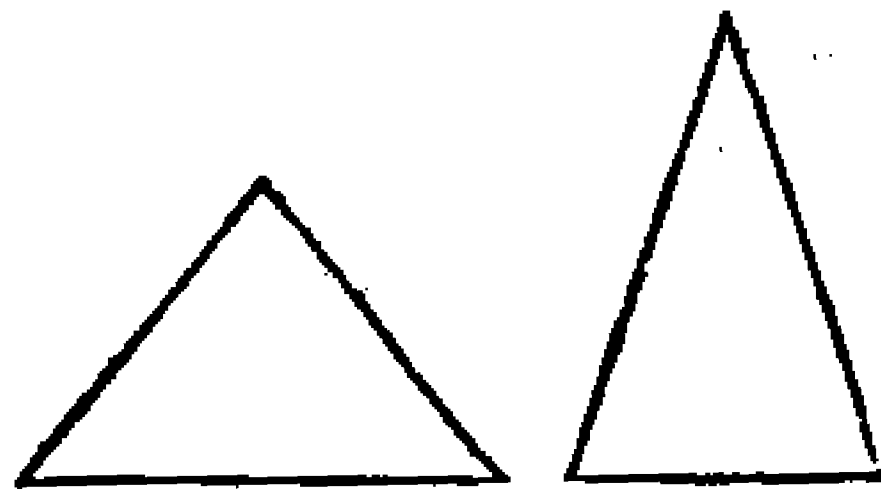
TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterum est triangulum, quod tria latera habet aequalia.



DESCENDIT iam ad singulas species triangulorum. Quia vero triangula diuidi possunt vel habita ratione laterum, vel angulorum, declarat prius species prioris diuisionis, quae tres sunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis sese possint habere. Aut enim omnia aequalia sunt; aut duo tantum, tertio existente vel maiore, vel minore; aut omnia inaequalia. Quando igitur omnia tria latera inter se aequalia sunt, dicitur triangulum Aequilaterum. Porro ex aequalitate omnium trium laterum trianguli aequilateri inferatur, omnes tres eius angulos aequales quoque esse, ceu ad 5. proposuit. huius libri demonstrabimus.

XXIV.

ISOSCELES autem est, quod duo tantum aequalia habet latera.

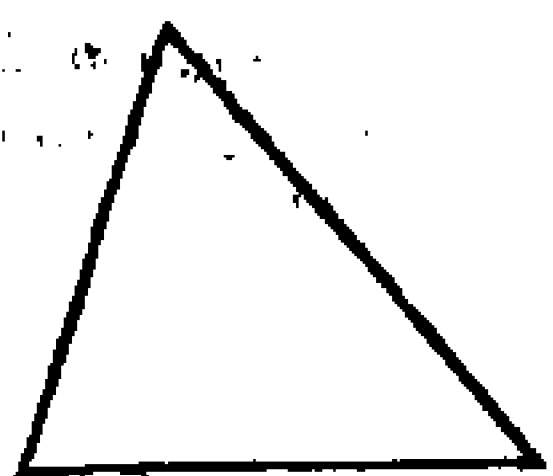


Ex hac rursus aequalitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse aequales, ut demonstrabit Euclides propositione quinta huius libri. Apposui autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertium latus utriusque aequalium maius, posterius autem idem minus obtinet: ita ut duo sint species trianguli Isoscelis; alterum, cuius tertium latus sit utriusque aequalium maius; & alterum, cuius tertium latus utriusque aequalium minus sit.

XXV.

SCALENVM vero est, quod tria inaequalia habet latera.

HI c denique ex inaequalitate omnium laterum trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inaequalitas, ut ostenderetur propos. 18. huius lib. Porro ex his constat, eodem modo potuisse diuidi triangulum in tres

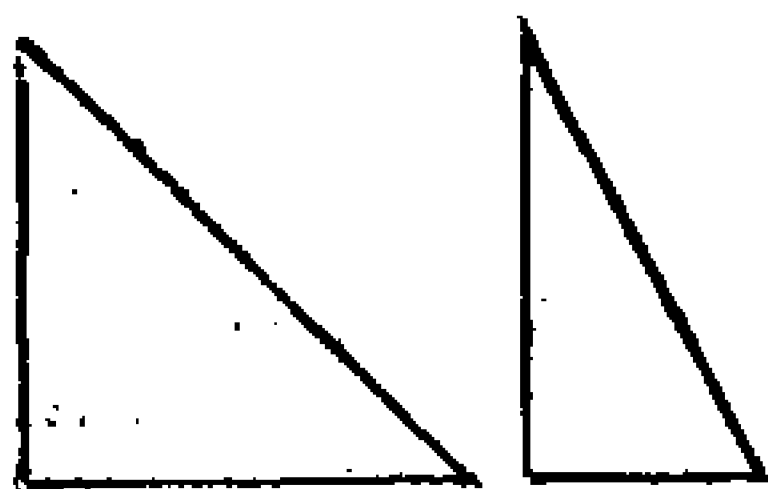


species, si aequalitatis angulorum ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli sint inter se aequales; aut duo tantum, tertio maiore, vel minore existente; aut omnes tres inaequales; erit omne triangulum, vel aequiangulum, habens tres omnes angulos aequales; vel duorum tantum angulorum aequalium; vel omnium angulorum inaequalium; quorum primum quidem Aequilatero, secundum verò Isosceli, tertium denique Scaleno respondet triangulo. Ceterum quam arte construenda sint triangula huius partitionis super quamvis data recta linea finita, trademus propositione prima huius libri.

X X V I.

Ad hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

Nunc exponit triangulorum species iuxta posteriorem diuisionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia verò tria tantummodò sunt angulorum rectilineorum genera diuersa; (Omnis enim angulus rectilineus vel est rectus, vel obtusus, vel acutus, ut supra diximus,) sit ut tres quoque species triangulorum sub hac consideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli est rectus, & ob



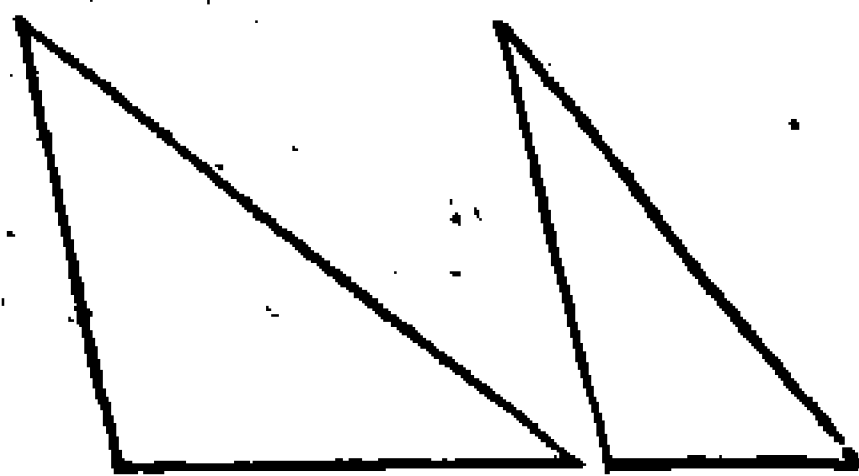
eam rem reliqui acuti, ut ex 17. propos. 1. lib. constabit; aut obtusus, & ob eandem causam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nullusque obtusus, sed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & aliis Geometris Rectangulum. Potest autem triangulum huiusmodi esse vel Isosceles, vel scalenum, ut hæc figura indicant, æquilaterum autem nulla ratione. Propter aequalitatem enim laterum essent per ea, quæ propos. 5. dicemus, omnes etiam anguli

æquales, ideoque, cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.

X X V I I.

AMBLYGONIUM autem, quod obtusum angulum habet.

TRIANGULUM Amblygoniū, siue obtusangulum esse quoque potest vel Isosceles, vel scalenum, ut in his figuris cernitur, non autem æquilaterū, alias eadem ratione essent omnes tres anguli per ea, quæ propos. 5. ostendemus, æquales, ideoque, cum vnus ponatur obtusus, oēs tres obtusi, quod multò magis pugnat cum propos. 17. & 32. huius lib.



X X I I X.

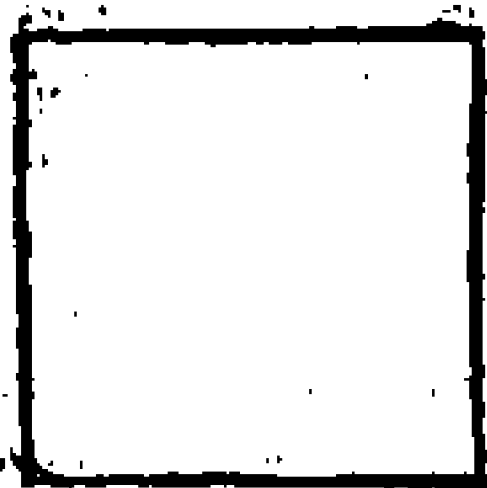
OXYGONIUM verò, quod tres habet acutos angulos.

OMNE triangulum Oxigonium, siue acutangulum, potest esse vel æquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum, ut cernere licet in triangulo, quæ in speciebus prioris diuisionis spectanda exhibuimus, ne eadem hic frustra reperantur. Ex dictis igitur palam sit, triangulum quodcumque, æquilaterum, esse necessario Oxigonium: At omne triangulum, tam Isosceles, quam Scalenum, esse vel Rectangulum, vel Amblygonium, vel Oxigonium; atque Isosceles Oxigonium rursum duplex, Isosceles nimirum Oxigonium habens tertium latus vtrius æqualium maius, atque Isosceles Oxigonium habens tertium latus vtrius æqualium minus. Ut vnica sit species trianguli æquilateri, quatuor verò Isoscelis, & tres Scaleni: atque, in vniuersum octo triangulorum genera, æquilaterum, quod perpetuò Oxigonium esse diximus, Isosceles rectangulum, Isosceles Amblygonium, Isosceles Oxigonium habens tertium latus vtrius æqualium maius, Isosceles Oxigonium habens tertium latus vtrius æqualium minus, Scalenum rectangulum, Scalenum Amblygonium, & Scalenum Oxigonium. Quæ etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Isosceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxigonium æquilaterum, Oxigonium Isosceles, habens tertium latus vtrius æqualium maius, Oxigonium Isosceles habens tertium latus vtrius æqualium minus, & Oxigonium Scalenum. Quare perspicuum est, quamnam connexionem, siue affinitatem habeant inter se triangula vtriusque partitionis. Possent autem dari triangula Isosceles Oxigonium, cuius duorum laterum æqualium vtrumvis tertio sit minus, ut rectè animaduertit Franciscus Barocius in sua Cosmographia, ostendemus ad propos. 15 lib. 4. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunque latera expresse nominantur, solet reliquum latus tertium à Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremum, &c. Hoc te breuiter monere volui, ne putares aliquid latere mystery in base trianguli, intelligeresque quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.

X X I X.

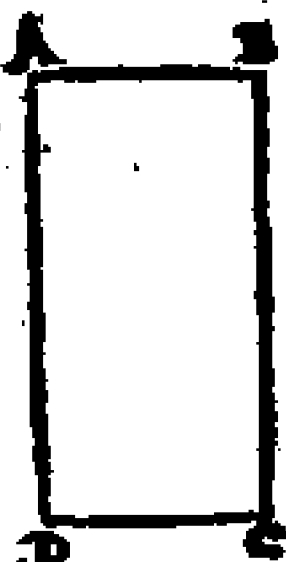
QVADRILATERARVM autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

Post figurarum trilaterarum species, exponit iam singularem quadrilaterarum figurarum, recensendo quinque tantummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterum autem & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter se aequalia existunt, omnesq; anguli recti. Itaque quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides proposit. 46. huius libri, quoniam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.



XXX.

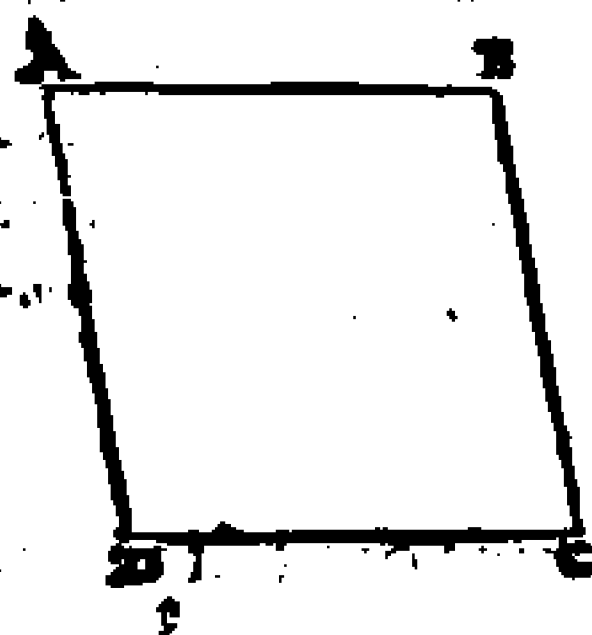
ALTERA verò parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.



SECUNDA figura quadrilatera appellatur altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se aequalia, quamuis bina opposita inter se aequalia existant. Vt in altera parte longiori ABCD, latera AB, DC, inter se, & AD, BC, inter se quoque aequalia sunt, cum ABCD, propter angulorum rectitudinem, parallelogrammum sit, ut in hoc libro ad propositionem trigessimam quartam ostendemus.

XXXI.

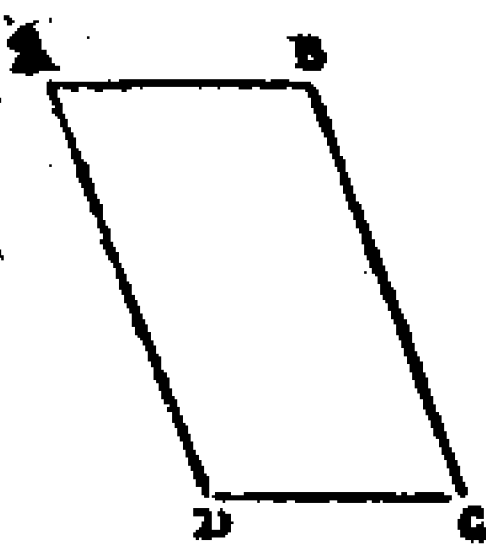
RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.



HÆC figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas à conditionibus figura altera parte longioris. Habet enim omnia latera aequalia, angulos verò non rectos, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se aequales existant. Vt in Rhombo ABCD, anguli A, & C, inter se, & B, & D, quoque inter se aequales sunt, cum ABCD, propter aequalitatem laterum, parallelogrammum sit, seu ad eandem propositionem trigessimam quartam huius libri demonstrabitur.

XXXII.

RHOMBOIDES verò, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se aequales, neque æquilatera est, neque rectangula.

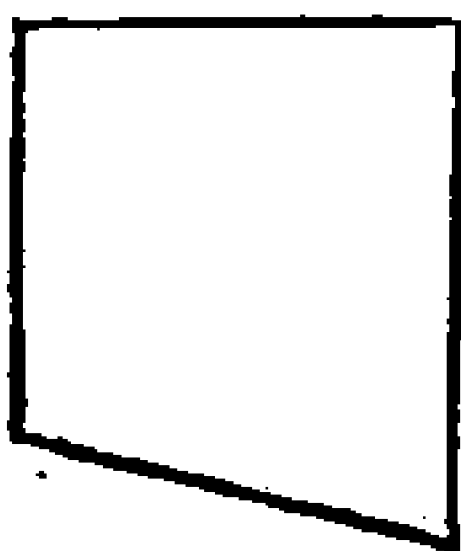


EST hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte opposita. Neque, eius latera omnia aequalia sunt, neque ullus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt AB, CD, & AD, BC, in Rhomboide ABCD, aequalia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existunt aequales. Hæc igitur quatuor figura quadrilatera dici possunt regulares; cætera verò omnes, quæcunque sunt, irregulares.

XXXIII.

PRAETER has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, Trapezia appellantur.

RELIQVÆ omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita ut neque, latera omnia aequalia, neque, omnes angulos aequales, seu rectos, neque latera bina opposita; neque, angulos binos oppositos habeant inter sese aequales, generali vocabulo Trapezia nominantur: quæ quidem cum infinitis modis variari queant, recte irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus tantum, vel etiam nullus, sed vel vnus obtusus, & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisio penes latera; Nam vel aliqua aequalia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale, &c. Determinatas porro trapeziorum species nonnullas afferemus post definitionem linearum parallelarum, seu aquidistantium, & parallelogrammi.

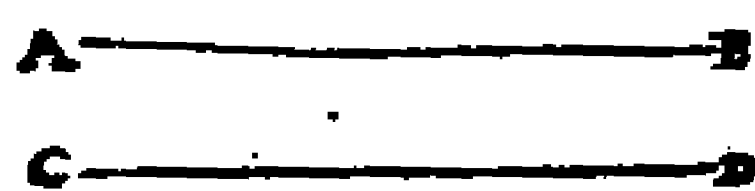


XXXIV.

PARALLELÆ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuò incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelae, sine aquidistantes, non satis est, vt in quamcunque partem, etiam spatio infinito, productæ nunquā ad vnum punctum coeant; sed necesse quoque est, vt in vna plana superficie existant. Multa siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquā in vnum conueniunt, & tamen non sunt parallelae dicendæ; quales sunt, exempli gratiā, duæ rectæ lineæ in transversum posita in medio aëre, & non se tangentes; Hæc tamen nunquam corro-

possunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superfici aliqua plana uni earum accommodata, ita ut omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilis circumvoluta, alteri quoque accommodari potest secundum omnia eius puncta, quamvis re ipsa in duabus superficiibus diversis reperiatur; Ut propositis duabus rectis lineis A B, C D, si superficies aliqua plana rectæ A B, applicetur, omnia



eius tangēs puncta, ita ut circa illam circumducta tangat quoque omnia puncta alterius rectæ C D; dicetur huiusmodi rectæ duæ lineæ in eadem superficie plana existere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non coeant, etiam si infinite producantur tam ad partes A, C, quàm ad

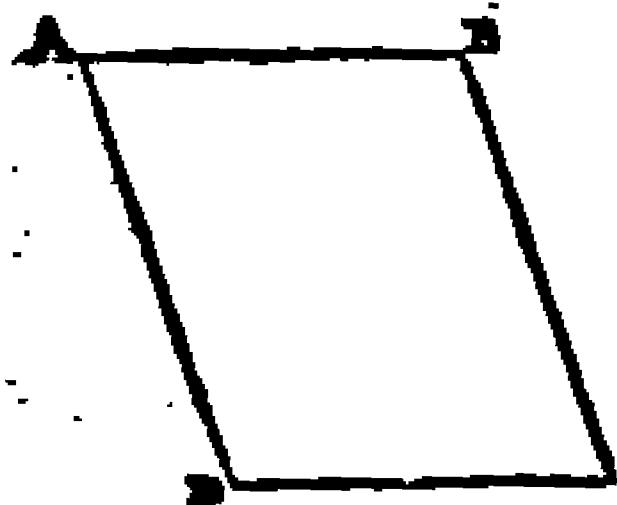
B, D, appellabuntur parallela, siue æquidistantes. Ceterum planius perfectiusque intelliges in II. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eadem dicuntur superficie existere: Satis sit hoc loco breviter admonuisse, recte ab Euclide utramque conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & productæ in utramvis partem nunquam in unum convenire, quantum hæ productio continuatur ad spatium infinitum. Quod si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensa non derinantur coire, constet tamen, eas tandem ex una parte longius protactas in unum punctum convergentas, quamvis ex altera semper magis ac magis inter se distent, ac disjunganrur, nequaquam appellande erunt parallela. Quotiescunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur à quopiam esse parallela, in necesse est concedat, illas in una, eademque superficie latere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstrat prius oportet, eas in eodem existere plano, & in neutram partem productas coniungi posse. Quia in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conantur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant, etiam si infinite producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, quæ easdem lineas in eodem requirit existere plano.

Hic finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam verò hoc eodem libro mentio fiet figure, quæ Parallelogrammum, nec non earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, ut facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

PARALLELOGRAMMUM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.

Ut figura quadrilatera A B C D, siquidem latus A B, æquidistat lateri D C, & latus A D, lateri B C, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solum parallelogramma;

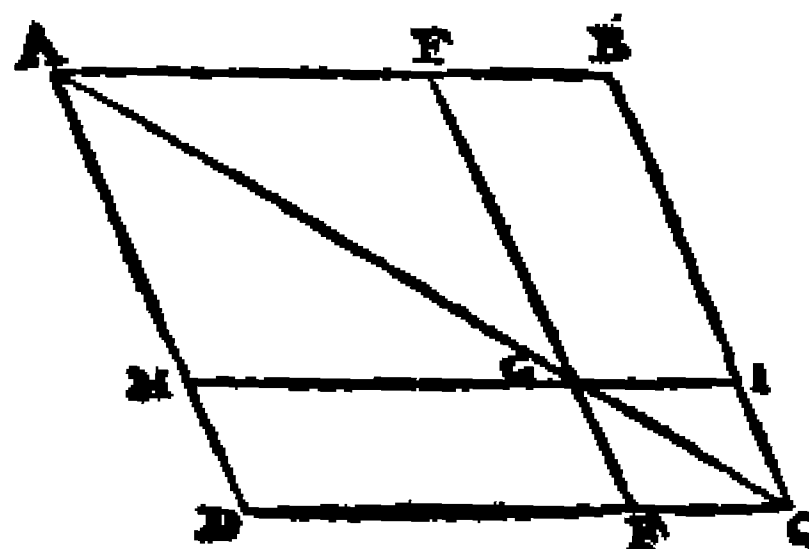


Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorū priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora verò duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Ceterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad proposit. 34. huius libri. Itaque possumus quadrilateras figuras, (ut & antiqui Geometra) dividere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum; in nec rectangulum nec æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, quale est figura altera

parte longior; & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoque aliud quidem habet duo latera opposita parallela, alia verò duo minimè: aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia, diciturque Trapezium Isosceles; vel inæqualia, Trapeziumque Scalenum appellatur. Itaque ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.

XXXVI.

CVM verò in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in vno eodemque puncto, ita ut parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa,



per quæ diameter non transit, complementa; duo verò reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.

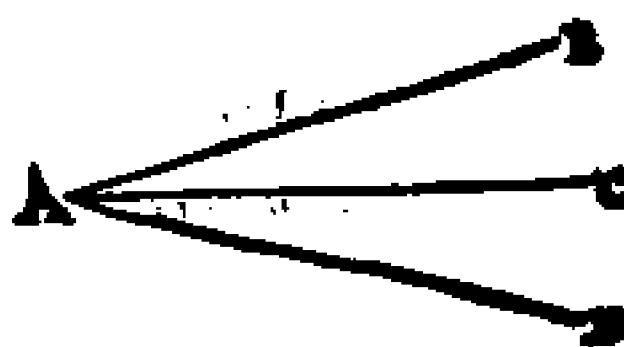
Si igitur parallelogrammum A B C D, in quo diameter A C; & lineæ E F, secans diametrum in G, & parallela existens lateribus A D, B C; Item lineæ H I, secans diametrum in eodem puncto G, parallelaque lateribus A B, D C, existens. Quæ cum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum divisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidem

quidem duo $EBIG$, $GFDH$, per quæ diameter AC , non transit, vocantur à Geometria complementa, siue supplementa reliquorum duorum $AEGH$, $GICF$, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat, ut videre est in presenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA

I.

POSTVLETVR, ut à quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.



PRIMVM hoc postulatum planum admodum est, si rectè considerentur ea, quæ paulò ante de linea scripsimus. Nam cū linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atq; adeò linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, sit ut si punctum quodpià ad aliud directò moueri intellexerimus, ducta sanè sit à puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione postulat Euclides, quemadmodum hic vides à puncto A, ductam esse res-

ectam lineam ad punctum B; ab eodemq; aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumerà alia ab eodem puncto educi possunt ad alia atq; alia puncta.

II.

ET rectam lineam terminatam in continuum rectà producere.

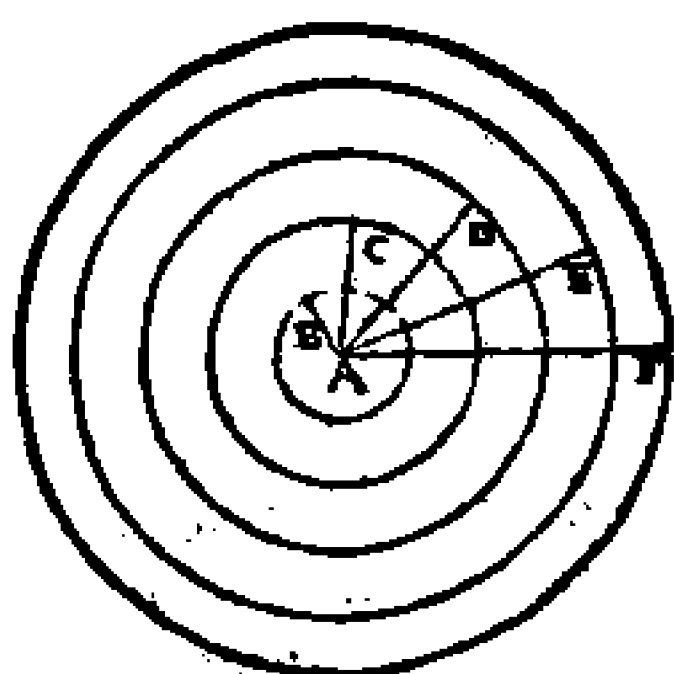


QVO si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directò, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam distàtiam. Sic linea recta AB,

producta est primò in continuum ad punctum C. Deinde ad punctum D, & c.

III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.



ITEM verò, si terminatam rectam lineam cuiuscunq; quantitatù mento conceperimus applicatà esse secundum alterũ extremũ ad quoduis punctũ ipsamq; circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum reuertatur locum, à quo dimoueri cepit, descriptus erit circulus, effectumq; quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in his quinque lineis AB, AC, AD, AE, AF, quæ singule circa centrum A, circumuoluta singulos circulos descripserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.

PRÆTER hæc tria postulata, quibus Euclides contentus fuit, sunt multa alia aequè facilia, è quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriae. Re-

liqua enim prudens Lector ex se vel facillè intelliget.

IV.

ITEM quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinẽ vel maiorem, vel minorem.

OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionẽ verò diminui potest infinitè: Vnde nunquam dabitur quantitas continua adeò magna, quin ea maior dari possit: neq; tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verũ est, qd ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionẽ vnitatis augeri potest infinitè: quãuis in eius diminutione ad vnitatẽ indiuiduã deueniatur.

COMMVNES NOTIONES, SIVE

Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent,
vel Dignitates.

I.

QVÆ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod vno æqualium maius est, aut minus, maius quoq; est, aut minus altero æqualium. Et si vnum æqualium maius est, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoq; æqualium eadem magnitudine maius est, aut minus.

FIAT, & nulla ratione potest, ut dua quantitates inæquales, æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum proposita quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessario maior illarum; Et si maior æqualis

fuerit proposita quantitati, superabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoque esse. Reliqua quoque partes Axiomati à nobis adiecta, quod frequentem usum habeant, clarissima sunt.

I I.

ET si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

Si enim quantitates constatae, siue composita, inæquales forent, proculdubio maiori plus esset adiectum, quam minori, cum antea æquales existerint. Quare ex additione æqualium quantitarum ad quantitates æquales, consicientur quantitates quoque, æquales.

I I I.

ET si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

Nam si reliqua quantitates forent inæquales, à minore plus fuisset detractum, quam à maiore.

I V.

ET si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia. Et, si inæqualibus inæqualia adiecta sint, maiori maius, & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

Quoniam si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita uni æqualium, maiorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adiciantur, composita quantitas ex maiore, maior est, quam composita ex minore. Alteram partem huius Axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius usum.

V.

ET si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

Si c etiam, si ab æqualibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor, quemadmodum residuum maius est residuo minori, si æqualia auferantur ab inæqualibus. Ceterum Euclides non docet, quidnam simpliciter, & absolute gignatur ex additione quantitarum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquantur post subtractionem inæqualium quantitarum ab inæqualibus quantitatibus propterea quod nihil certe colligi inde potest, nisi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahatur, ut in secunda parte Axiomatis dictum est, quam nos ob insignem eius utilitatem adiecimus. Possunt enim composita quantitates, vel residua, esse & inæquales, & æquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficiuntur 11. & 8. quæ sunt inæqualia. Sic etiam si ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquuntur 5. & 4. quæ sunt inæqualia. At vero si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. consicientur 11. et 11. quæ æqualia sunt. Item si detrahantur 3. & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque existunt.

Porro in his omnibus pronuntiatis, primo excepto, nomine æqualium quantitarum intelligenda est etiam una & eadem multo communis. Si enim æqualibus idem commune adiciatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur, residua æqualia erunt: Et si inæqualibus idem commune adiciatur, vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur, vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.

V I.

ET quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia. Et quod unius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium.

SIMILITER, quæ eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia, &c. inter se sunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum esset duplex, vel triplex, &c. alicuius quantitatibus, deficeret utriusque minus à duplici, vel triplici, &c. Quod si contra, minus esset duplex, vel triplex, &c. quantitatibus cuiuspiam, excederet sanè maius duplex ipsum, vel triplex, &c. Hoc autem & ex secundo axiomate comprobare potest, ad hunc modum: Si enim due quantitates æquales fuerint alicui tertia, & utrique tertia illa addatur, erunt composita duplices illius tertia, ^a sed & inter se æquales, ob idem additamentum. Quod si rursum ^b compositis eadem tertia adiciatur, erunt constata triplices eiusdem tertia. Cum igitur ^b & æquales inter se, propter idem additamentum, existant: eademque sit ratio in ceteris multiplicibus, perspicuum erit Axioma propositum. Secundam porro partem huius axiomatis nos apposuimus, quod non raro eius usum in rebus Geometricis requiratur.

V I I.

ET quæ eiusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt. Et contra, Quæ æqualia sunt, eiusdem sunt dimidia.

PARTI ratione, quæ eiusdem sunt partes tertia, vel quarta, vel quinta, &c. inter se equalia sunt.

In his duobus pronuntiatis per eandem quantitatem intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ equalium duplicia sunt, vel triplicia, &c. inter se equalia quoque sunt: Item, quæ equalium sunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter se equalia necessarîo existunt. Partem quoque secundam huius Axiomatis nos adiunximus, propterea quod non minùs frequenter, quàm prima, à Geometris vsurpatur.

I I X.

ET quæ sibi mutuò congruunt, ea inter se sunt æqualia.

Hoc est, duæ quantitates, quarum una superposita alteri, neutra alteram excedit, sed amba inter se congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicantur esse æquales, quando una alteri superposita, ea quæ superponitur, alteri tota congruit, ita ut eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando uno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, sed lineæ illius cum lineis huius prorsus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamvis lineæ interdum inter se inæquales existant.

ECONTRARIO, Quæ inter se sunt equalia, sibi mutuò congruunt, si alterum alteri superponatur. Intelligendum est autem, quantitates sibi mutuò congruentes, esse æquales, secundum id duntaxat, in quo sibi congruunt; Congruunt autem longitudo longitudini tantum, superficies superficiei, solidum solido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.

I X.

ET totum sua parte maius est.

Cum pars à toto ablata relinquit adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte maius.

In sequentibus porro pronuntiatis interruptitur ordo Euclidis, propterea quod duo alia axiomata hoc loco inferenda esse censuimus valde necessaria, cum ex his Axiomata 12. quod Euclidis est decimum, demonstrari possit, ut ibi dicemus. In margine tamen numeros apposimus ordini Euclidis respondentem.

X.

DUÆ lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.

Non est difficile istud Axioma, si perfectè intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim lineæ rectæ directæ semper itinere, nullam in partem deflectendo, producantur, fieri nulla ratione potest, ut duæ lineæ rectæ habeant vnā partem, quamvis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo se mutuò interfecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ A B, A C, partem communem A D. Ex centro autem D, & intervallo D A, ^a describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C; ^b Erunt igitur duæ circumferentiæ A B, A B C, inter se æquales, (Sunt enim circumferentiæ semicirculorum æqualium, cum A D B, A D C, ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.

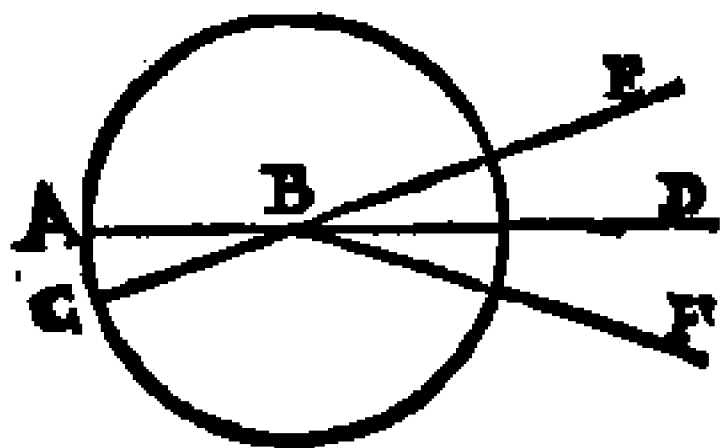
Possunt tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando vnā & eandem rectam lineam constituunt. Vt in hac figura, rectæ A D, B C, commune habent segmentum C D; quia amba vnā rectam constituunt lineam A B. At verò quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fu-

er A B, A C, in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, ut rectè à Proclo fuit demonstratum.

X I.

DUÆ rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessarîo se mutuò in eo puncto interfecabunt.

Hoc etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonstrabimus: Cœant duæ rectæ A B, C B, in B. Dico illas productas se mutuò secare in B, nempe C B, productam cadere in E, supra rectam A B, productam. Nam si C B, producta non cadit supra A B, productam, congruet cum A B, producta, ita ut transeat per D, atque ita duæ rectæ A B D, C B D, habebunt idem segmentum commune B D, quod in antecedenti axioma ostensum est fieri non posse: vel certè infra A B, productam cadet, ita ut C B, producta cadat in F, sitq; vnā recta linea C B F. Centro igitur B, describatur ad quodvis intervallum circulus A C F D, secans rectas A B, C B, productas in D, F. Quia ergo vtraque re-



a 3. petit.
b 17. defin.

Ita ABD, CBF, per centrum B, ducitur, erit tam ACD, quam CF, semicirculus, per definitionem 18. ac proinde aequales erunt circumferentia ACD, CF, ut ad definitionem 17. demonstravimus, totum & pars. Quod est absurdum.

De o proxima Axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen necessaria sunt ad aliorum Axiomatum probationes, ea hic inseruimus. Tria autem sequentia Euclidis sunt.

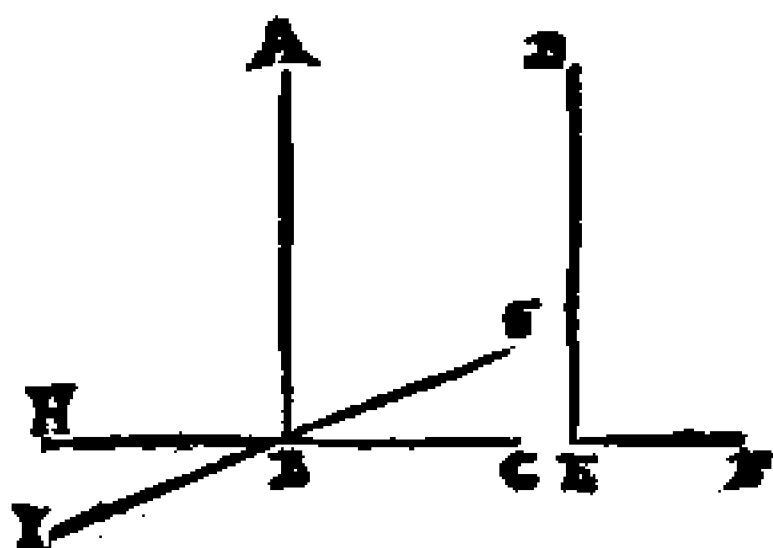
XII.

x.

ITEM, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

Hoc axioma apertissimū esse cuilibet potest ex 10. definitione, quia angulus rectus describitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum constituētium augeri minuique nequit, sed prorsus est immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita superstat, ut faciat utrobique angulos aequales, neque magis in vnam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos aequales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamuis lineæ sint inæquales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. definitione id demonstrare hac ratione: Sint duo anguli recti ABC, DEF, quos

a 2. petit.
b 10. defn.
c 2. petit.



dico esse inter se aequales. Si enim fieri potest, sint inæquales, sitque ABC, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam DE, recta AB, cadet recta EF, inter rectas AB, BC, qualis est BG, propterea quod angulus DEF, minor ponitur angulo ABC. ^a Producaturs CB, in rectum & continuum vsque ad H; Cum igitur angulus ABC, sit rectus, ^b erit angulus ABH, illi deinceps equalis, & rectus quoque: quare maior eriam angulo ABG. ^c Producta autem GB, in rectum & continuum vsque ad I, cadet portio producta BI, infra CB, productam, ut in precedenti Axiomate est demonstratum.

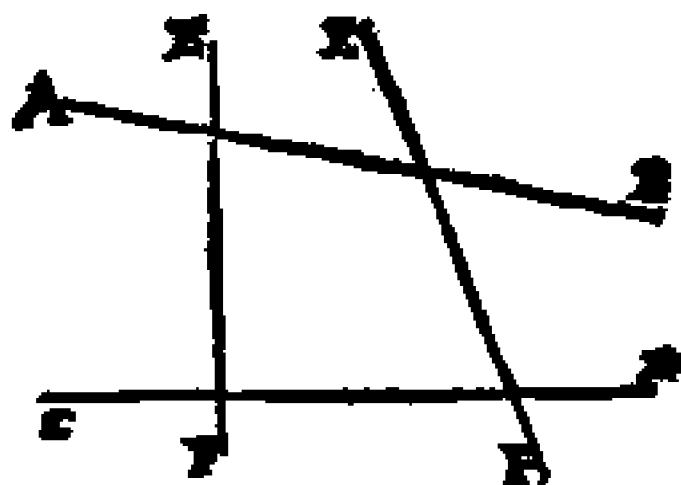
^d 10. defn. Quare cum angulus ABG, ponatur rectus, ^d fiet angulus ABI, illi deinceps, equalis. Quapropter angulus ABH, maior quoque, erit angulo ABI, pars toto, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt duo anguli recti propositi, sed aequales. Quod est propositum: eademque est ratio in cæteris.

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma istud non posse conuerti; non enim omnis angulus recto angulo equalis rectus est, cum & curvilineus recto equalis esse queat, ut in 5. lib. demonstrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cum non sit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus equalis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter se aequales erunt, sine vlla exceptione.

XIII.

xi.

ET si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



UT si in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem conuenturas esse ad aliquod punctum vnum, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, ut appositum exemplum commonstrat. Ratio huius perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte aequales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire possunt, sed equalis semper spatium protenduntur, ut propositione 28. huius libri demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte dictarum linearum spatium coarctari, ex altera verò magis ac magis dilatarì; ideòque eas conuenturas tandem esse aliquando in vnum punctum. Verum, quia axioma hoc subobscurum videri solet tyronibus, immodò à numero principiorum reijcitur à Gemino Geometra, Proclo, & alijs, quod non facile quivis ei assensum præbeat; præsertim cum reperiantur alia quadam lineæ, quarum spatium, licet semper magis ac magis coarctetur, (quemadmodum & in duabus rectis AB, CD, accidit, ut ad propositionem vigesimam octauam huius libri demonstrabimus.) nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiam si infinite producantur, ut constat ex elementis conicis Apollonijs Pergæi, & ex lineæ conchili Nicomedis. Idcirco pleniorẽ illius explanationem in scholium propositionis vigesima octava huius libri differimus, vbi illud ex Procli sententia Geometricè demonstrabimus, ut firmè, ac sine vlla dubitatione, tanquam verissimum, ad propositionis vigesima nona huius libri, (vbi primùm eius vsus incipit apparere) & ad aliarum propositionum demonstrationes possit assumi. Quod tamen nos aliter quàm Proclus, & quidem magis Geometricè demonstrabimus, ita ut nullus dubitationi locus relinquatur.

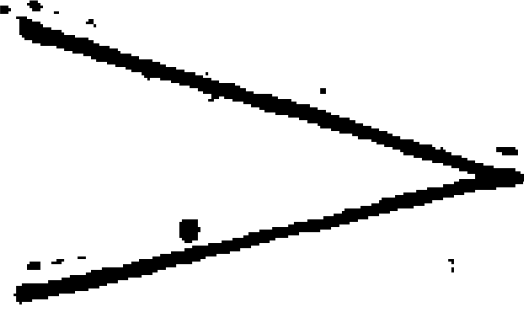
XIV.

xii.

DVAB rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

N^o 22. AM

¶ NEQUE enim prorsus habet difficultatem hoc principium: Si enim duæ rectæ lineæ ex una parte coeunt ad efficiendum angulum, necessariò ex altera parte semper magis ac magis disiungantur, si producantur, ut in exemplo proposito perspicuum est. Quare ut superficies, spatiumve quoddam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quadam adiungenda est. Ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demon-



strat hoc principium,

hoc modo: Si fieri potest, ut duæ lineæ rectæ claudant superficiem, comprehendant duæ rectæ ABC, ADC , superficiem $ABCD$, ita ut duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis A , & C . Facto deinde centro C ,^a describatur circulus intervallo CA ,^b & producantur rectæ ABC, ADC , in rectum, & continuum usque ad circumferentiam, nempe ad puncta E , & F .

a 3. petit.

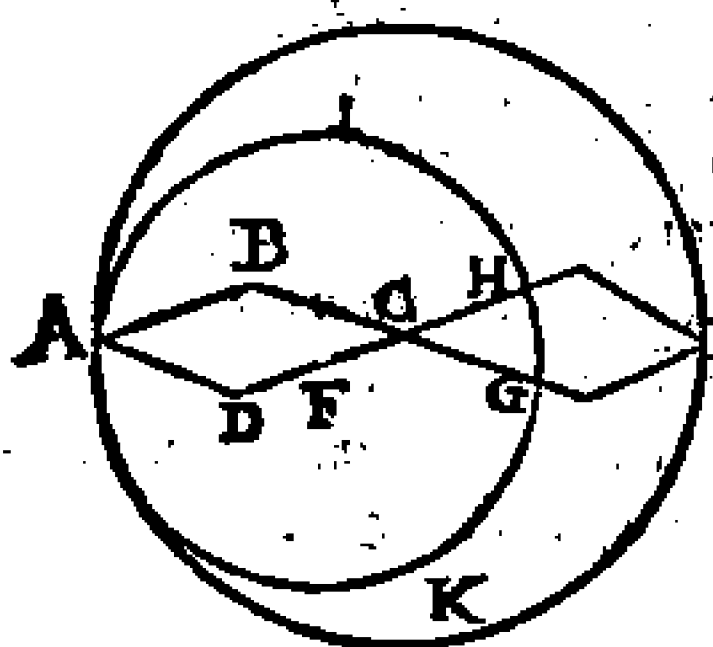
b 2. petit.

Itaque quia rectæ ACE, ACF , transeunt per

centrum C ,^c erunt semicirculi AE, AF , inter se aequales, & idcirco circumferentia quoque AE , circumferentia AF , equalis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo rectæ duæ lineæ spatium comprehendunt. Quod est propositum.

c 17. defin.

SE D quia fortassis aduersarius dicet, rectas ABC, ADC , productas coire iterum in aliquo puncto circumferentia, ut in E , vel F , atque adeo non sequi, partem aequalem esse toti, demonstrabimus tunc idem Axioma hoc modo: Coeant ergo duæ illæ lineæ iterum, si fieri potest, in E . Sumpto puncto F , in recta ADC , quocunque, erit AF , minor, quam FE , cum minor sit, quam AFC , hoc est, quam CE , quæ ipsi AFC , equalis est, atque adeo multo minor, quam FE . Circulus igitur ex F , ad intervallum FA , descriptus secabit rectam FE , in H , atque adeo CGE , in G . Quoniam igitur AH , diameter circuli est, erit AH , semicirculus, ut ad definit. 17. ostendimus: Portio autem AG , quam aufert recta ABG , & in qua centrum non est, semicirculo minor, ut ad definit. 18. demonstrabimus. Est ergo circumferentia AG , minor quam AH , parsque totum, quod est absurdum. Quod autem minor sit portio AG , semicirculo, ostendemus, ut supra. Nam ducta ex centro F , ad rectam ABG , perpendiculari & circumuoluta portione AG , circa rectam ABG , cades circumferentia AG , intra circumferentiam AKG , ne pars maior sit quam totum, ut supra demonstrabimus.

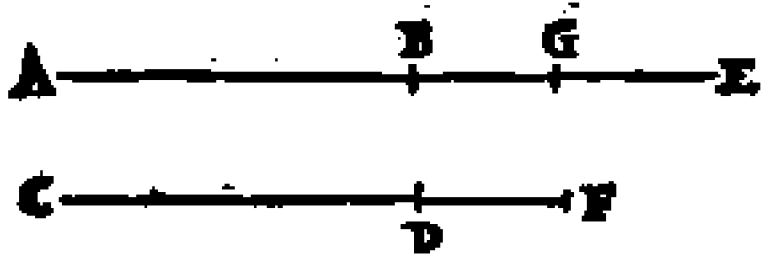


CONSTAT hoc etiam Axioma ex definitione lineæ rectæ. Cum enim recta linea sit breuissima extensio ab uno puncto ad aliud, duci poterit vnica tantum linea ab vno puncto ad aliud. Quare si ABC , recta est, non erit ADC , recta. Quod etiam patet ex definitione Platonis. Nam si ABC , est recta, obumbrabunt media illius extremitates eiusdem. Igitur media puncta lineæ ADC , non obumbrant extrema, cum visus per rectam ABC , feratur. Non ergo recta est ADC .

HIS Axiomatibus ab Euclide positis adiungemus nos nonnulla alia ex aliis Geometris decerpta, non minus necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atque Theorematum cum Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quam ea, quæ nobis tradidit Euclides.

XV.

SI æqualibus inæqualia adiiciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis.



Hoc, & sequens pronuntiatio desumpsit Proclus ex Pappo. Aequalibus itaque quantitibus AB, CD , addantur inæquales BE, DF , sitque BE , maior quam DF . Et ex BE , auferatur BG , equalis ipsi DF , ut sit GE , excessus, quo quantitas addita BE , superat quantitatem additam DF . Quoniam igitur equalibus AB, CD , addita sunt equalia BG, DF ,^d erunt tota AG, CF , equalia. Quare constat, totam quantitatem AE , superare totam CF , eodem excessu GE , quo magnitudo DF , adiuncta à magnitudine adiuncta BE , superatur. Quod est propositum.

d 2. pron.

XVI.

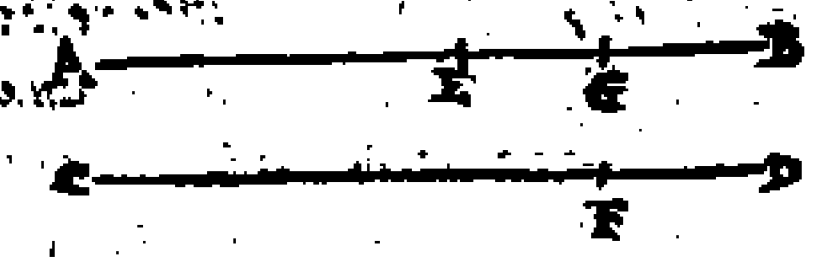
SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ à principio erant, æqualis.

IN eadem figura, inæqualibus quantitibus BE, DF , addantur æquales AB, CD . Et ex maiore BE , auferatur BG , equalis ipsi DF , ut GE , sit excessus, quo quantitas BE , quantitatem DF , superat. Quo-

2. pron. *niam igitur aequalibus BG, DF, addita sunt aequalia AB, CD, erunt tota AG, CF, aequalia. Quamobrem tota quantitas AE, superabit totam CF, eodem excessu GE, quo maior quantitas proposita BE, minorem DF, superat. Quod est propositum.*

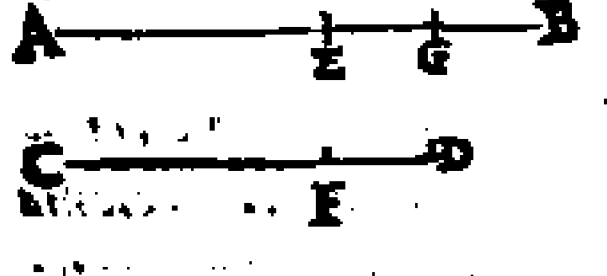
XVII.

Si ab inæqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

3. pron.  *Ab aequalibus AB, CD, auferantur inæqualia BE, DF. Sitq; EG, excessus, quo quantitas BE, superat quantitatem DF; ita ut BG, æqualis sit ipsi DF. Quia igitur ab aequalibus AB, CD, ablata sunt aequalia BG, DF, remanebunt AG, CF, aequalia. Perspicuum ergo est, residuum AE, superari à residuo CF, eodem excessu EG, quo magnitudo ablata BE, ablatam magnitudinem DF, superat. Quod est propositum.*

XIX.

Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.

3. pron.  *Ab inæqualibus AB, CD, auferantur æqualia AE, CF. Sitq; BG, excessus, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD, ita ut AG, æqualis sit ipsi CD. Quoniam igitur ab aequalibus AG, CD, ablata sunt aequalia AE, CF, remanebunt EG, FD, æqualia. Quare residuum EB, superabit residuum FD, eodem excessu BG, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD. Quod est propositum.*

In his quoque quatuor proximè positis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda est una etiam sola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adiciantur, erit totorum excessus adiunctorum excessui æqualis. Et si inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ à principio erant, æqualis. Et si ab eodem communi inæqualia demantur, erit residuorum excessus excessui ablatorum æqualis. Et si ab inæqualibus idem commune dematur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis. Nam in numeris, si ad 6. addas 5. & 3. sunt 11. & 9. quorum excessus est 2. idem qui ipsorum 5. & 3. Rursus, si ad 5. & 3. addas 6. sunt 11. & 9. quorum excessus 2. idem est, qui ipsorum 5. & 3. Item si ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 5. & 2. Denique si ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 10. & 7.

XX.

Omne totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

Quoniam omnes partes simul sumptæ constituunt totum, cuius sunt partes, manifesta est veritas huius axiomatis.

XX.

Si totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

Ut quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Et ablatum ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquum illius 14. duplus etiam est reliqui huius 7. In universum autem hoc demonstrabitur propos. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablata, ut decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliqua æque multiplex erit, atque tota totius.

Colligitur porro ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc discrimen, inter postulata, & Axiomata, quod cum utraque sint per se nota, & indemonstrabilia, illa naturam sapiunt Problematum, propterea quod aliquid fieri exposcant; hæc vero, Theoremata imitantur, cum nihil fieri petant, sed solum sententiam aliquam notissimam proponant. Differt autem Postulatum à problemate, quod constructio postulati non indigeat ulla demonstratione, problematis autem constructionem concedat nemo sine demonstratione, eo quod difficile aliquid nobis exhibeat construendum. Idem discrimen inter Axioma, & Theorema reperitur; illud enim demonstrari non debet, hæc vero concedendum nulla est ratio, nisi demonstretur. Nam nemo huius propositionis demonstrationem, vel etiam probationem requireret. Quæ eidem æqualia, inter se quoque æqualia sunt. Huius autem statim demonstrationem desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis. Idem iudicium habero de reliquis axiomatibus, atque Theorematis, nec non de postulatis, problematibusq;.

Constat quoque, Postulatum alia propria esse Geometria, qualia sunt illa tria, quæ Euclides nobis proposuit; quedam vero communia, & Geometria, & Arithmetica, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinire augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri potest, ita ut nunquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de Axiomatibus, sine pronunciatis. Nam octavum, decimum, undecimum,

decimum, duodecimum, tertiumdecimum, & quattuordecimum soli Geometria conueniant: Reliqua uero omnia, adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines aequales ablata à magnitudinibus aequalibus, relinquunt magnitudines aequales, siue ha magnitudines linea sint, siue superficies, siue corpora; ita quoque numeri aequales detracti à numeris aequalibus relinquunt numeros aequales, &c.

HÆC dicta à nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusq; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiusmodi, ut planè non intelligantur, nisi prius eorū usus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.

ANTE QUAM porro ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, pauca explicandū est, quoniam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus finis secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter uero in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus Græcis. Id uero eo consilio à nobis est factum: quoniam cum à quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab aliis uero iuxta Theonis seriem citentur, maximèque interdum duo hi interpretes inter se discrepent, in serie atque ordine propositionum, id quod maximè in 6. 7. & 10. libro perspicitur; necessarium esse duximus, ut utriusque interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, ut si quando numerus propositionum à Geometra quopiam citatus non responderet alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interromperetur, citauimus principia, & propositiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi semper literula aliqua alphaberi, vel alio quouis signo, cui similis literula, seu signum responderet in demonstratione, ut facilius cognoscatur, ad quem locum qualibet citatio sit referenda. Porro citationes intelligenda sunt hoc modo:

1. defin.	Prima definitio, & sic de alijs numeris, ut 4. defin. 23. defin. &c.
1. petit.	Prima petitio, vel primum Postulatum.
1. pronun.	Primum pronunciatum, seu axioma, & ita de reliquis numeris, ut prius.
1. primi.	Prima propositio primi libri.
23. Vndec.	Vigesimatertia propositio undecimi libri.
6. tertijdec.	Sexta tertijdecimi libri.
9. sextidec.	Nona sextidecimi libri.
13. duodec.	Decimatertia libri duodecimi.
7. quindec.	Septima libri quindecimi.
5. quartidec.	Quinta libri quartidecimi, &c.

Ex his alia citationes à quolibet facile poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus est ratio.

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

SUPER data recta linea terminata triangulum Aequilaterum constituere.

 N omni problemate duo potissimum sunt consideranda, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, qua ostenditur, constructionem rectè esse institutam. Ut quoniam primum hoc problema iubet constituere triangulum æquilaterum super data recta linea terminata quacunque, ita ut linea recta proposita sit unum latum trianguli, (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur unum figuræ latum) idcirco primum oportet construere ex principiis concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum ea ratione constructum, esse æquilaterum, hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in aliis problematibus perspicui potest. Hæc etiam duo reperiuntur ferè in omni Theoremate. Sz penumero enim ut demonstretur id, quod proponitur, construendum est, atq; efficiendum prius aliquid, seu manifestum erit in sequentibus. Pauca uero admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant constructionem.

Si r igitur proposita recta linea terminata AB, super quam constituere iubemur triangulum

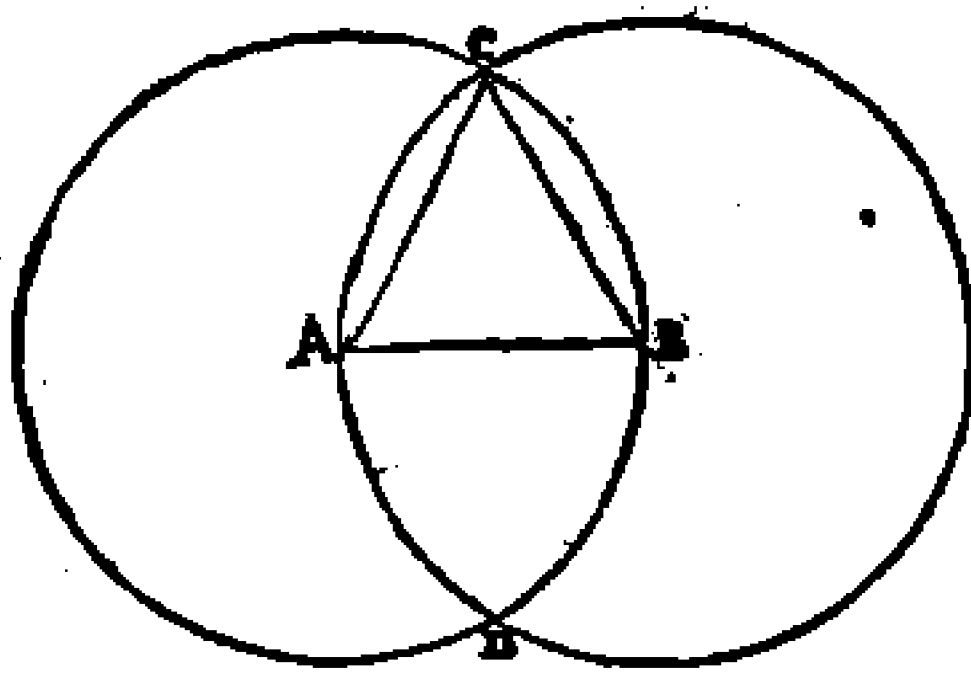
a 3. petit.

b 1. petit.

c 10. definit.

d 15. definit.

e 1. pronun.



$\overline{BC}$, $\overline{BA}$, ducuntur ex centro B , ad circumferentiam circuli CAD , erit recta BC , recta BA , æqualia. Tam igitur AC , quàm BC , æqualis est rectæ AB . Quare & AC , BC , inter se æquales erunt, atque idcirco triangulum ABC , erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

S C H O L I U M.

Ux autē videas, plures demonstrationes in vna propositione contineri, placuit primā hanc propositionem resolvere in prima sua principia, initio facto ab ultimo syllogismo demonstrativo. Si quis igitur probare velit, triangulum ABC , constructum methodo prædicta, esse æquilaterum, utetur hoc syllogismo demonstrante.

a 23. defin.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, est æquilaterum.

Triangulum ABC , tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur ABC , est æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo:

b 1. pron.

Quæ eidem æqualia sunt, inter se quoque sunt æqualia.

Duo latera AC , BC , æqualia sunt eidem lateri AB .

Igitur & duo latera AC , BC , inter se æqualia sunt. Ac propterea omnia tria latera AB , BC , æqualia existunt.

Minorem verò huius syllogismi hac ratione colliget:

c 15. defin.

Linea recta à centro ducta ad circumferentiam circuli, inter se sunt æquales.

Linea AB , AC , sunt ductæ à centro A , ad circumferentiam CBD .

Sunt igitur linea AB , AC , æquales inter se.

Eademque ratione erunt linea AB , BC , æquales, cum ducantur à centro B , ad circumferentiam CAD .

Quamobrem minor præcedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolveri poterunt omnes alia propositiones, non solum Euclidæ, verum etiam cæterorum Mathematicorum. Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eo quod brevius, ac facilius sine ea demonstrant id, quod proponitur, ut perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

Si quis autem super data recta desideret constituere triangulum quoque isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea AB , circa quam ex centrâ A , & B , describantur duo circuli, uti

d 2. petit.

e 3. petit.

f 1. petit.

g 20. defin.

h 15. defin.

i 15. defin.

k 1. pron.

l 2. pronun.

m 1. pron.

n 9. pron.

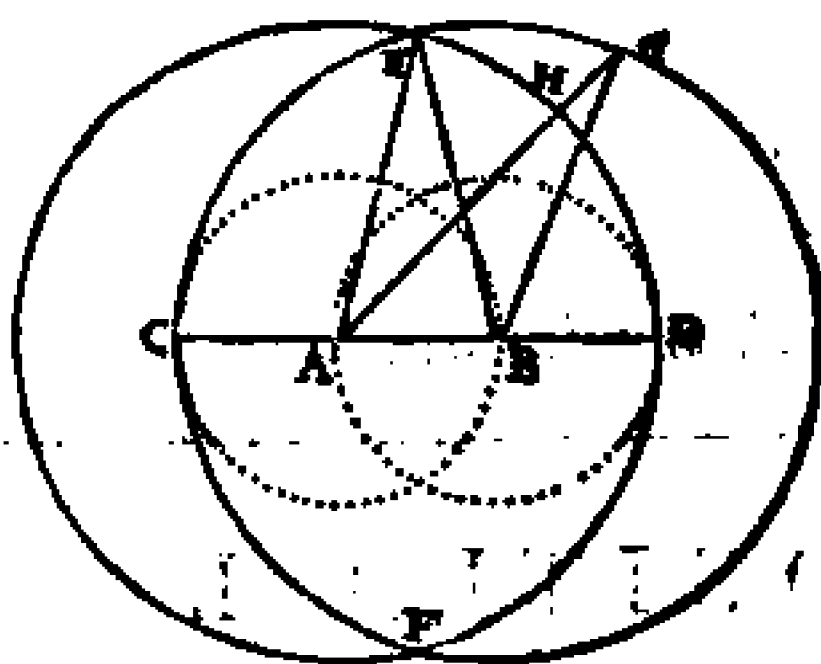
o 9. pron.

p 15. defin.

q 15. defin.

r 15. defin.

s 6. p. on.



prius. Deinde producat AB , in utramque partem ad circumferentias usque, ad puncta C , & D . Atque centro A , intervallo vero AD , describatur circulus EDF . Item centro B , intervallo vero BC , circulus ECF , secans priorem in punctis E , & F . Ex quorum utrolibet, nempe ex E , ducantur ad puncta A , & B , duæ rectæ EA , EB . Factumque erit super recta AB , triangulum ABE , quod dico esse isosceles, nimirum duo latera AE , BE , esse & æqualia inter se, et maiora latere AB . Cum enim recta AE , AD , ducantur à centro A , ad circumferentiam EDF , erit AE , æqualis rectæ AD . Item cum recta BE , BC , ducantur à centro B , ad circumferentiam ECF , erit BE , æqualis rectæ BC . Sunt autem

rectæ AD , BC , æquales inter se, (utraq; enim AC , & BD , æqualis est rectæ AB ; cum AB , AC , ex eodem centro A , ad circumferentiam ducantur; Item BA , BD , ex eodem centro B , ad circumferentiam quoque egrediantur.) Quare AC , BD , æquales inter se erunt. Addito igitur communi rectæ AB , erit tota AD , xori BC , æqualis.) Igitur AE , BE , æquales quoque inter se erunt. Quod verò utraq; AE , BE , maior sit, quàm AB , perspicuum est, cum AD , æqualis ostensa ipsi AE , maior sit, quàm AB ; Item BC , æqualis demonstrata ipsi BE , maior quoque sit, quàm AB . Constitutum igitur est super recta AB , isosceles ABE , habens duo latera AE , BE , æqualia inter se, & maiora latere AB , quod faciendum erat. Atque hæc est demonstratio Procli, aliorumque interpretum Euclidæ.

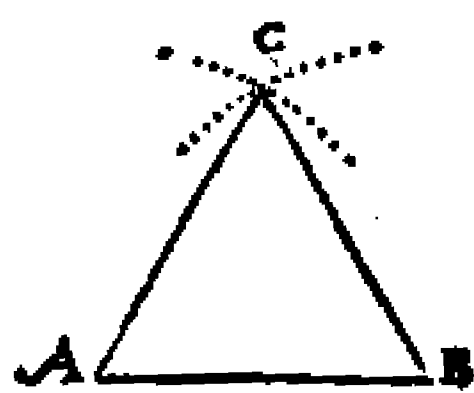
BREVIUS tamen videtur mihi posse demonstrari, triangulum ABE , esse isosceles, hac ratione. Quoniam AE , æqualis est rectæ AD , & recta AD , est dupla rectæ AB , propterea quod BA , BD , æquales inter se sunt; erit & AE , dupla rectæ AB . Rursum quia BE , æqualis est rectæ BC , & BC , dupla est ipsius AB , propterea quod AB , AC , æquales sunt inter se, erit & BE , dupla ipsius AB . Cum igitur utraq; AE , BE , dupla sit eiusdem AB , erunt AE , BE , inter se æquales, maioresque propterea rectæ AB . Isosceles ergo est triangulum ABE .

Ita vero, si ex puncto A, ^a ducatur linea recta AG, ad circumferentiam EGF, qua non sit eadem qua a 1. petit.
 AE, vel AD, secans circumferentiam EHD, in puncto H, & ex G, ad B, ^b ducatur alia recta GB, ^c constitutum b 1. petit.
 erit triangulum ABG, super recta AB, quod dico esse scalenum. ^d Quoniam AG, maior est, quam AH: ^e Sunt c 20. defin.
 autem AH, AE, ex centro A, ducta, inter se aequales; erit & AG, maior quam AE, hoc est, quam BE, qua offen d 9. pron.
 sa est aequalis ipsi AE; igitur & maior erit AG, quam BG, ^f cum BG, sit aequalis ipsi BE. Est autem & BG, e 15. defin.
 maior, quam AB, quia tota BC, aequalis ipsi BG, & maior sit, quam AB, pars. Omnia ergo tria latera trian- f 15. defin.
 guli ABG, inaequalia sunt, ideoque scalenum est ex definitione; quod erat faciendum. g 9. pron.

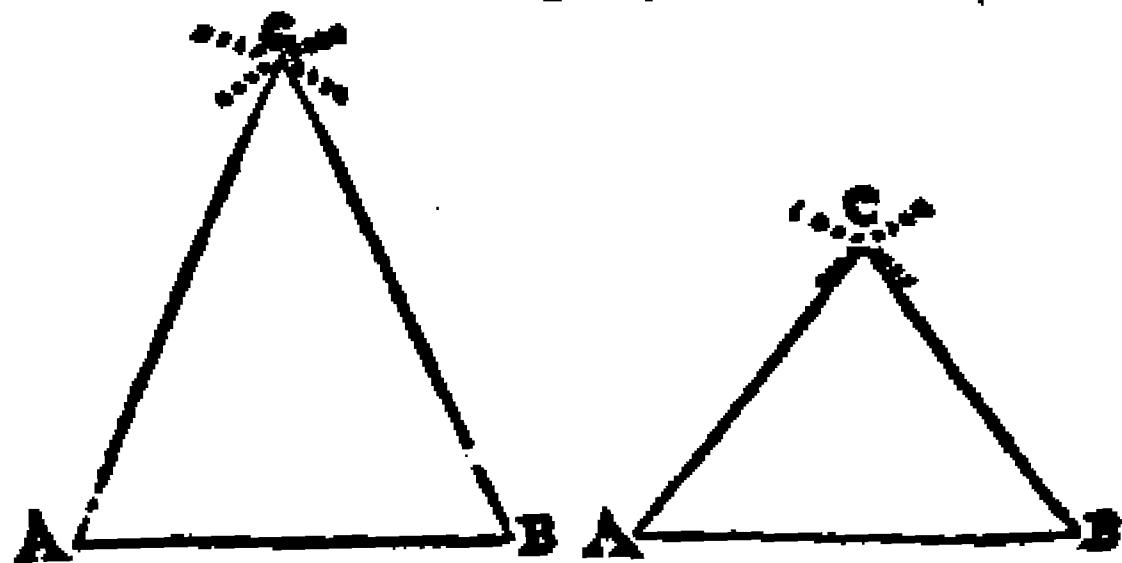
BREVIS quoque ostendamus, triangulum AGB, esse scalenum, hac ratione. Quoniam tam ^h AH, AD, h 15. defin.
 ex centro A, ducta, sunt aequales, quam BG, BC, ex centro B, ducta: Sunt autem AD, BC, ipsius AB, dupla,
 quod AB, utriusque BD, AC, aequalis sit; erunt quoque AH, BG, ipsius AB, dupla, ac propterea maiores, quam
 AB. Cum ergo ⁱ AG, maior sit, quam AH, siue quam BG, scalenum erit triangulum AGB, habes latus AG, i 9. pron.
 maximum, BG, medium, & AB, minimum.

PRAXIS.

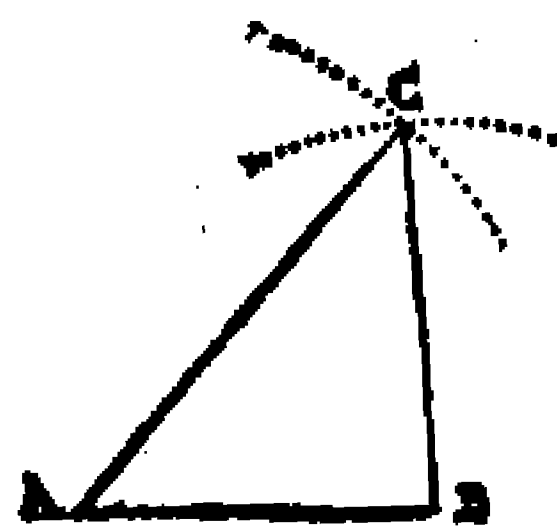
CONABIMUR in singulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & breuem,
 qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atque lineis contendit construere; Idque in his praesertim obser-
 nabimus, quae frequentiore usum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod se-
 cum videtur asserre.



ITAEQUE triangulum aequilaterum ita facile constructur super data
 recta AB. Ex centris A, & B, intervallo vero data recta AB, describantur duo
 arcus circularum se interfecantes in puncto C, siue hoc infra lineam contin-
 gat, siue supra. Post hac ducantur duae rectae AC, BC, ex puncto C, ad puncta
 A, & B; factumque erit, quod proponitur. Cuius rei eadem est demonstratio cum
 superiori, si modo circuli essent integri, ac perfecti. Transirent enim necessario
 per puncta A, & B.



ISOSCELES ita conficietur. Ex centris A, & B, intervallo vero maiore, quam AB, si data rectam
 esse velimus minus latus; vel minore, si eandem in
 latus maius eligamus, describantur duo arcus secan-
 tes se in C. Postea ducantur rectae AC, & BC; con-
 structumque erit Isosceles: quoniam AC, BC, e-
 quales erunt propter aequalitatem intervallorum assum-
 ptum, maius scilicet aut minus, quam recta AB.



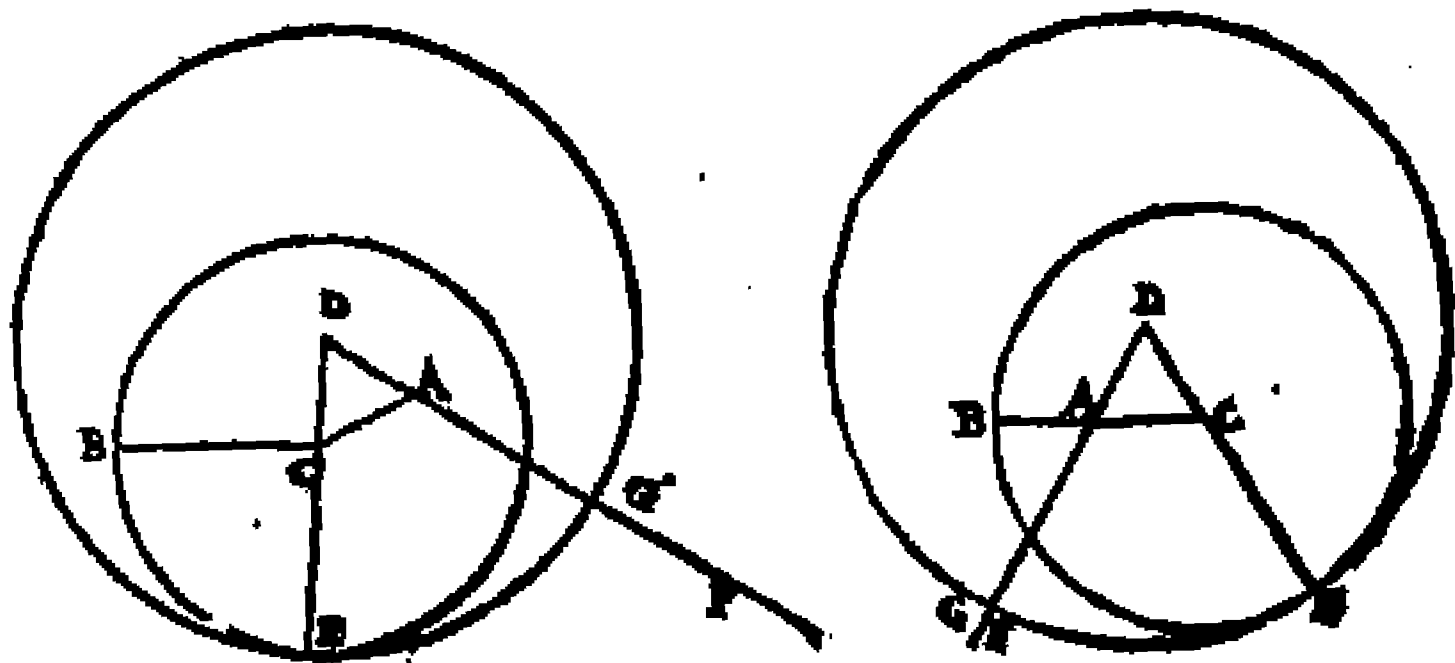
SCALENUM denique hoc modo fabricabitur super data recta AB. Ex
 centro B, intervallo vero maiore, quam BA, describatur arcus aliquis: Item
 ex centro A, intervallo vero adhuc maiore, quam prius assumptum, describa-
 tur alter arcus priorem secans in C. Deinde ducantur rectae AC, BC; consti-
 tutumque erit Scalenum, ut constat ex inaequalitate intervallorum, quae as-
 sumpta fuerunt ex constructione.

CAETERVM quo pacto triangulum constitui debeat, habens tria la-
 tera aequalia tribus datis lineis quibuscunque, singula singulis, latius explica-
 bimus proposit. 22. huius libri.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

22

AD datum punctum, datae rectae lineae aequalem rectam lineam ponere.



SIT punctum datum A, & data
 recta linea BC, cui aliam rectam
 aequalem ponere oportet ad pun-
 ctum A. Facto alterutro extremo
 lineae BC, nempe C, centro ^a de- a 3. petit.
 scribatur circulus BE, intervallo b 1. petit.
 rectae BC. Et ex A, ad centrum C, ^b
 recta ducatur AC; (nisi punctum
 A, intra rectam BC, fuerit: Tunc
 enim pro linea ducta sumetur AC,
 ut secunda figura indicat.) Super

recta vero AC, ^c construatur triangulum aequilaterum ACD, sursum, aut deorsum versus, ut li- c 1. primi.
 buerit; cuius duo latera modo constituta DA, DC, versus rectam AC, ^d extendantur; DC, qui- d 2. petit.
 dem opposita puncto dato A, usque ad circumferentiam in E; DA, vero opposita centro C, quan-
 tumlibet in F. Deinde centro D, intervallo vero rectae DE, per C, centrum transcuntis, ^e alter cir- e 3. petit.

a 15. definit.

b 3. pronun.

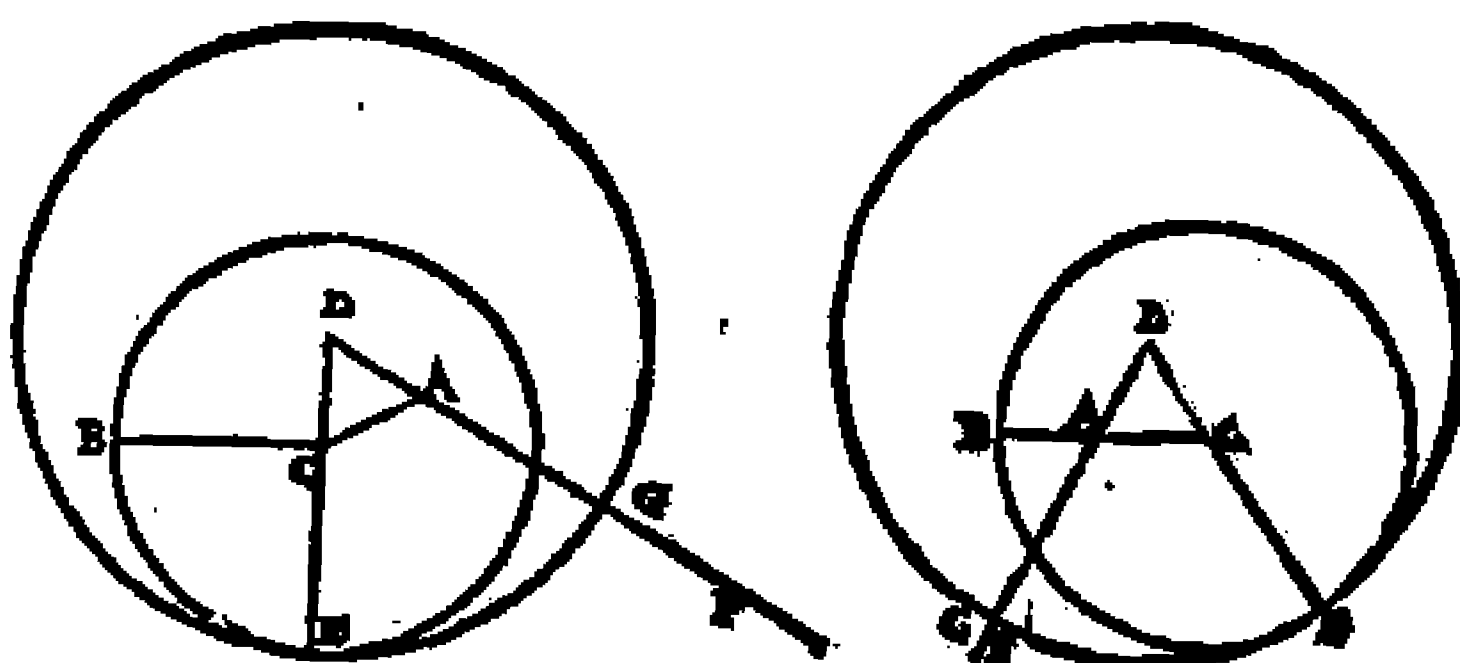
c 15. definit.

d 1. pronun.

e 3. petit.

f 1. petit.

g 15. definit.



culus describatur EG, secans rectam DF, in G. Dico rectam AG, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ BC. Quoniam DE, DG, ductæ sunt ex centro D, ad circumferentiæ EG, ipse inter se æquales erunt: Ablatis igitur DA, DC, æqualibus lateribus trianguli æquilateri ACD, remanebit AG, æqualis rectæ CE. Sed eidem CE, æqualis est recta

BC. (cùm ambæ rectæ CB, CE, cadant ex centro C, ad circumferentiæ BE.) Igitur rectæ AG, BC, quandoquidem utraq; æqualis est ostensa rectæ CE, inter se æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

QVOD si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facile absolvetur problema. Si enim centro C, & intervallo CB, describatur circulus, ad cuius circumferentiæ recta f ducatur vtcunque CE, erit hæc posita ad punctum datum C, æqualis datæ rectæ BC, cum utraque & BC, & CE ex eodem centro egrediatur ad circumferentiæ BE.

S C H O L I U M.

Huius problematis varij esse possunt casus, ut ait Proclus. Aut enim datū punctū in ipsa data recta est positum, aut extra ipsam: Si in ipsa, erit vel alterum extremorū eius, vel inter vtrumque iacebit extremum. Si vero extra ipsam, erit vel è directo data linea, ita ut producta in rectum, & continuum per ipsum punctum transeat, vel non è directo, ita ut ab ipso ad data lineæ extremorum quodvis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra datam lineam erit constitutum, vel infra, ut manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quod si in constructione fiat triangulum ACD, super recta AC, isosceles, eodem modo ostendemus, rectam AG, rectæ BC, æqualem esse.

3.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

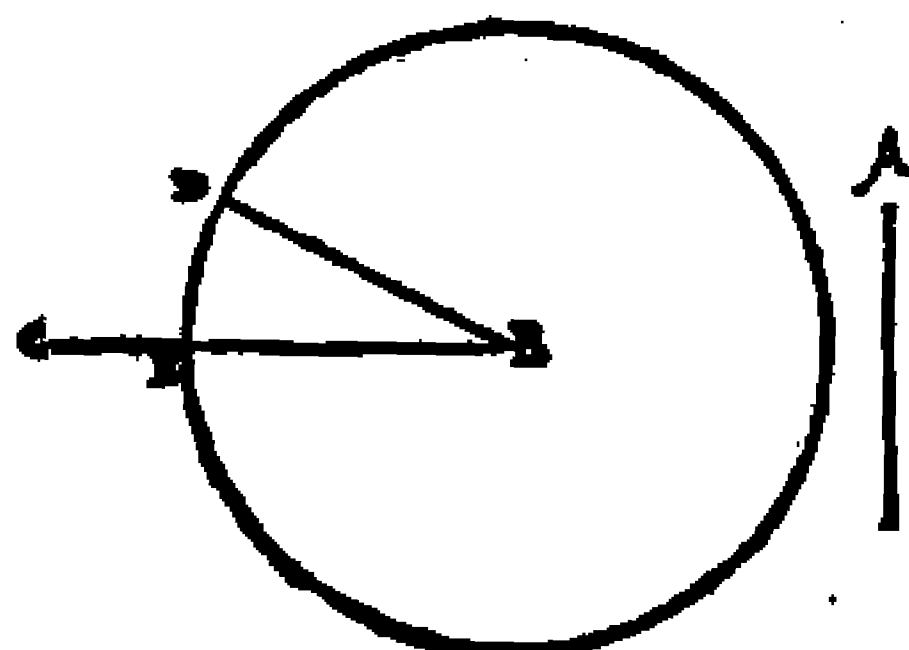
DE ABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahete.

b 2. primi.

i 3. petit.

k 15. definit.

l 1. pronun.



SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & BC, maior, oporteatq; ex maiore BC, detrahete lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris BC, nempe ad punctum B, ponatur aliqua linea, quæ sit BD, æqualis minori A. Deinde centro B, intervallo autem BD, circulus i describatur secans BC, in E. Dico BE, detractam esse æqualem ipsi A. Quoniam BE, æqualis est rectæ BD, & eidem BD, æqualis est recta A, per constructionem, erunt A, & BE, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis, &c. quod erat faciendum.

QVOD si duæ rectæ datæ coniungantur in vno extremo, quales sunt BD, & BC, coniunctæ in extremo vtriusque B, describendus erit circulus ex B, ad intervallū minoris BD. Hic enim auferet BE, æqualem ipsi BD, ut constat ex definitione circuli.

S C H O L I U M.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum due lineæ inæquales data vel inter se distent, ita ut neutra alteram contingat; vel non, sed vel coniungantur ad vnum extremum, vel se mutuo secant, vel certò altera alteram suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

4.

THEOREMA 1. PROPOS. 4.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtri- que; habeant verò & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtri- que, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

SINT duo triangula ABC, DEF, & vnus vtrumque latus AB, AC, æquale sit alterius vtri- que lateri DE, DF, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; angulusque A, contentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & vtrumque angulum B, & C, vtri- que angulo E, & F, id est,

Id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoque esse æquales. Quoniam enim recta AB, rectæ DE, ponitur æqualis, fit, ut si altera alteri superponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, ipsæ sibi mutuo congruant, punctumque B, in punctum E, cadat. Neque enim dicere quis poterit, partem rectæ AB, rectæ DE, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem segmentum commune, quod est impossibile. Quod si quis dicat, posito puncto A, in D, cadere quidem punctum B, in E, sed rectam AB, cadere vel ad dextram, vel ad sinistram DE, clauderent duæ rectæ lineæ superficiem, quod fieri non potest. Quare recta AB, rectæ DE, congruet, ut dictum est. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, congruet quoque alter alteri, hoc est, recta AC, rectæ DF, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum AC, DF. Basis igitur BC, basi EF, congruet quoque: aliàs si suprâ caderet, aut infrâ, ut efficeretur recta EGF, vel EHF, clauderent duæ rectæ EF, EGF, vel EF, EHF, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam EGF, quam EHF, rectam esse, cum utraque ponatur esse eadem, quæ recta BC.) quod est absurdum. Duæ enim rectæ superficiem claudere non possunt. Quocirca si basis BC, basi EF, æqualiserit, cum neutra alteram excedat; & triangulum ABC, triangulo DEF, & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis, ob eandem causam, existet. Quare si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonstrandum erat.

a 8. pronun.

b 10. pron.

c 14. pron.

d 8. pronun.

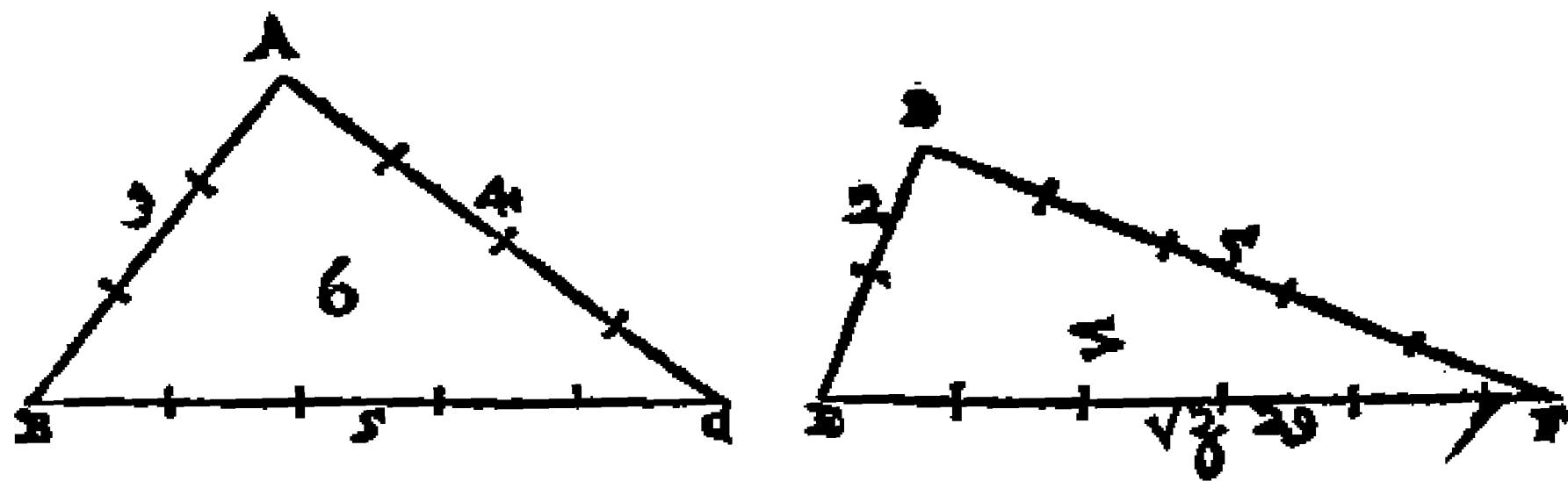
e 14. pron.

f 8. pronun.

SCHOLIUM.

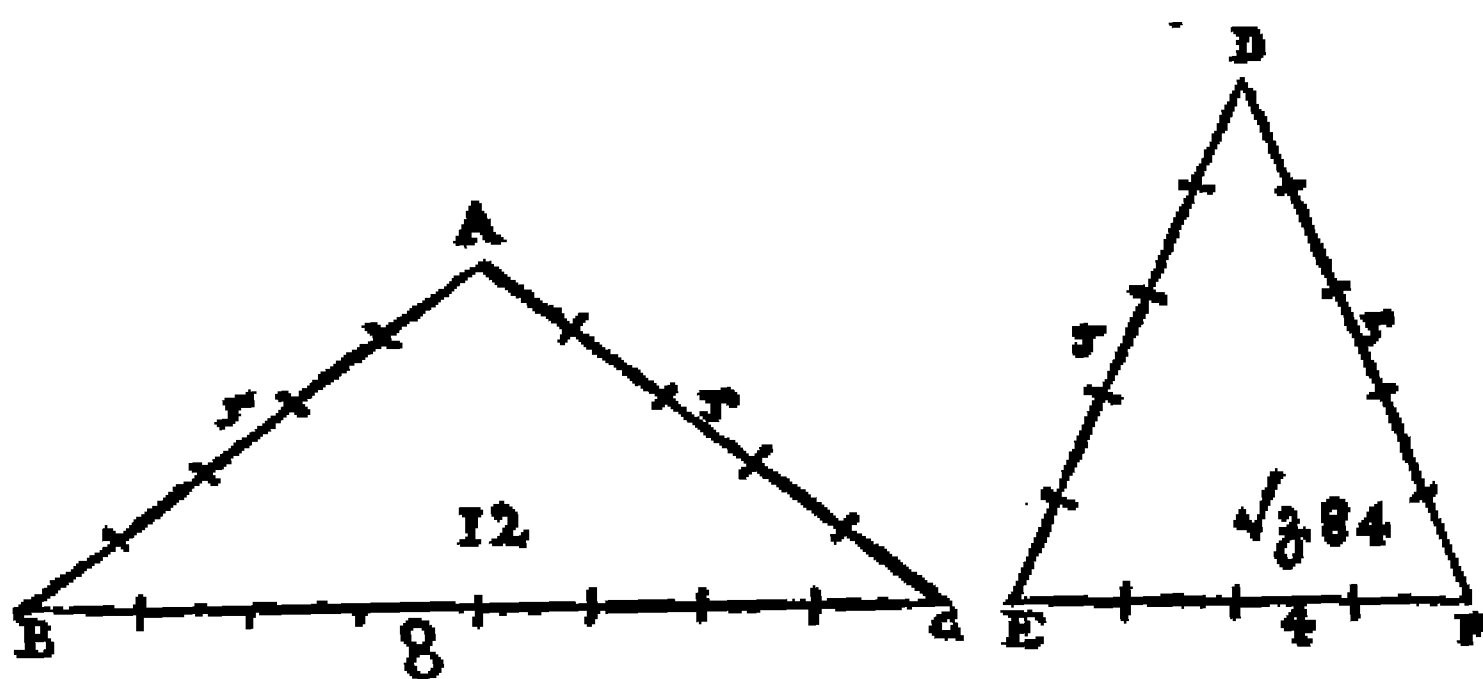
RECTE Euclides duas condiciones posuit in antecedente huius theoremati, quarum prima est, ut duo latera unius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, utrumque utrique; Secunda, ut angulus etiam unius contentus illis lateribus æqualis sit angulo alterius contento lateribus, quæ istis sunt æqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt unquam esse æquales, ut probè hoc loco à Proclo demonstratur: Triangula verò ipsa licet possint esse æqualia, posteriore dumtaxat conditione deficiente, ut ex scholio proposit. 37.

huius libri constabit, tamen raro admodum illud continget. Sint enim triangulorum ABC, DEF, anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera AB, AC, æqualia lateribus DE, DF, non quidem utrumque utrique, sed



illa simul sumpta hisce simul sumptis, sitq; AB, 3. AC, 4. ut ambo simul efficiant 7. At verò DE, sit 2. & DF, 5. ut ambo quoque simul 7. constituant. Quibus positus, erit basis BC, 5. & basis EF, radix quadrata huius numeri 29. quæ maior quidem est, quam 5. minor autem, quam 6. Item area trianguli ABC, erit 6. area verò trianguli DEF, 5. Anguli denique super basim BC, inæquales erunt angulis super basim EF. Quæ quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requirerentur multa, quæ nondum sunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia esse, propterea quod non utrumque lateris utriusque lateris æquale existit in dictis triangulis ABC, DEF.

RURUS triangulorum ABC, DEF, latera AB, AC, æqualia sint lateribus DE, DF, utrumque utri-



que, sitq; unumquodq; 5; anguli verò A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, sitq; A, maior, quam D. Quibus concessis, erit basis BC, maior base EF, ut proposit. 24. huius libri ostenderetur. Quod si basim BC, ponamus esse 8. basim autem EF, 4. erit area trianguli ABC, 12. area verò trianguli DEF, radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem est, quam 9. minor verò, quam 10. id quod notissimum est Geometriis.

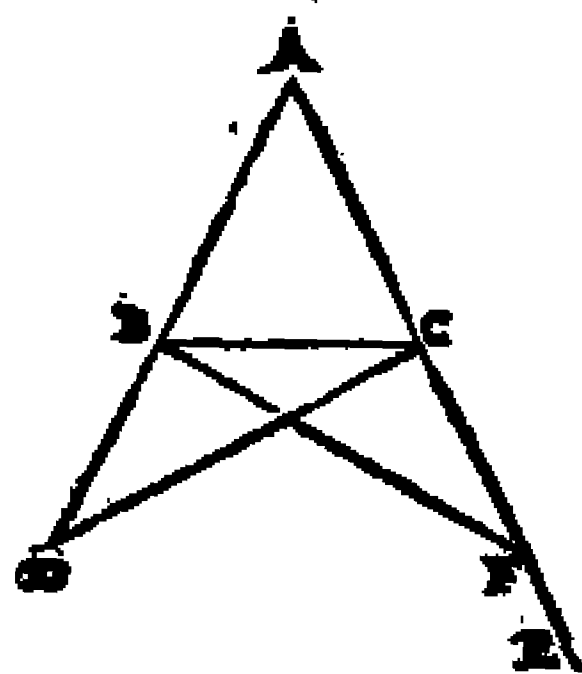
Ut igitur duorum triangulorum & bases, & anguli, nec non triangula ipsa æqualia inter se sint, necesse est, ut utrumque lateris unius æquale sit utrique lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales existant, ut optime dixit Euclides.

THEOR. 2. PROPOS. 5.

31

ISOSCELIUM triangulorū, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.

a 3. primi.
b. 1. post.



e 4. primi.

d 3. primum.

e 4. primi.

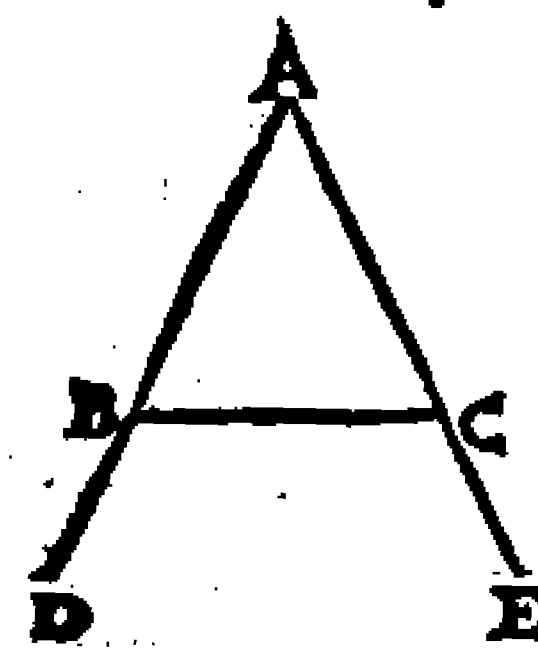
f 3. primum.

SIT triangulum Iſoſceles ABC , in quo duo latera AB , AC , inter ſe ſint æqualia. Dico angulos ABC , ACB , ſupra baſim BC , æquales inter ſe eſſe: Item ſi latera æqualia AB , AC , producantur quantum libuerit, uſque ad puncta D , & E , angulos quoque DBC , ECB , infra baſim eandem BC , eſſe æquales. Ex linea enim AE , producta inſinitè ^a abſcin datur AF , æqualis ipſi AD , ^b & ducantur rectæ BE , CD . Conſiderentur deinde duo triangula ABE , ACD . Quia ergo duo latera AB , AC , trianguli ABE , æqualia ſunt duobus lateribus AC , AD , trianguli ACD , utrumque utrique, nempe AB , ipſi AC , ex hypotheſi, & AE , ipſi AD , ex conſtructione: angulusque A , contentus lateribus AB , AE , æqualis eſt angulo A , contento lateribus AC , AD , immò angulus A , communis eſt utrique triangulo: Erit baſis BE , æqualis baſi CD , & angulus F , angulo D : & angulus ABE , angulo ACD : cùm & priores duo, & poſteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, ut patet. Rurſus conſiderentur duo triangula DBC , ECB . Quoniam verò rectæ AD , AE , æquales ſunt, per conſtructionem, ſit ut, ſi auferantur ex ipſis æquales AB , AC , ^d & reliquæ BD , & CE , ſint æquales. Quare duo latera BD , CE , trianguli DBC , æqualia ſunt duobus lateribus CE , EB , trianguli CEB , utrumque utrique, videlicet BD , ipſi CE , & DC , ipſi EB , ut probatum eſt: Sunt autem & anguli D , & E , contenti dictis lateribus æqualibus æquales, ut oſtenſum etiam fuit. Igitur erit angulus DBC , angulo ECB , æqualis; & angulus BCD , angulo CBE . Tam enim priores duo, quàm poſteriores, æqualibus opponuntur lateribus, exiſtuntque ſupra communem baſim BC , utriusque trianguli DBC , CEB . Quòd ſi ex totis angulis æqualibus ABE , ACD , (quos æquales eſſe iam demonſtrauiſmus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales CBE , BCD , (quos itidem in poſterioribus triangulis modo probauimus eſſe æquales) ^f remanebunt anguli ABC , ACB , ſupra baſim BC , æquales: Oſtenſum eſt autem in poſterioribus triangulis, & angulos DBC , ECB , qui quidem ſunt infra eandem baſim BC , eſſe æquales. Igitur & anguli ſupra baſim inter ſe, & anguli infra eandem inter ſe ſunt æquales: Ac propterea Iſoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt, anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

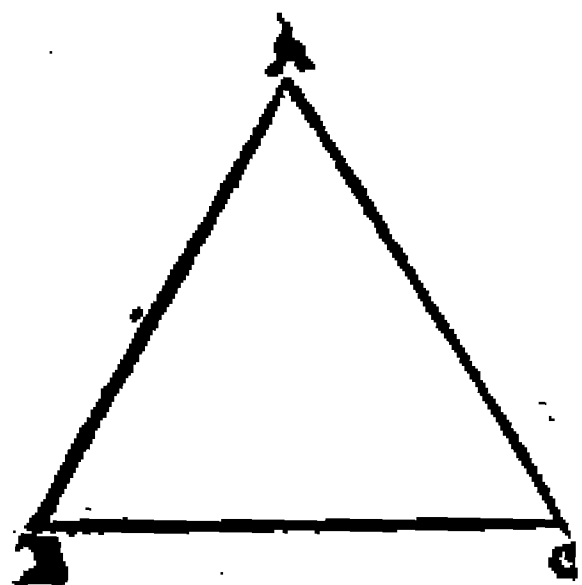
Hæc propositio vera etiam eſt in triangulis æquilateris, cùm in quolibet reperiantur duo latera inter ſe æqualia, licet eam Euclides ſolus Iſoſcelibus triangulis videatur accommodaſſe. Exiſtentibus enim duobus lateribus AB , AC , trianguli ABC , æqualibus, ſive reliquum latus BC , ipſis quoque ſit æquale, ut contingit in triangulo æquilatero, ſive inæquale, ut in Iſoſcele accidit, neceſſariò conſequitur, & angulos ſupra baſim inter ſe, & angulos infra eandem inter ſe quoque eſſe æquales, ut conſtat ex demonſtratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus ſubdifficile, & obſcuriſculum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum ſunt aſſueti. Veruntamen, ſi diligenter theoremati præcedenti viæ ac demonſtratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, à quolibet percipietur, ſi modò memor ſit, illos angulos triangulorum probari æquales eſſe, in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur. Quod quidem quoniam Campanus non appoſuit, cauſa fuit, ut confuſa eſſe videatur, & ſubobſcura eius demonſtratio.

a 8. primum.



VERITAS porro huius theoremati, quoad utramque partem, facile quoque demonſtrari poteſt per ſe perpoſitionem, ut demonſtrata fuit propositio 4. Sint enim rurſum in triangulo ABC , duo latera æqualia AB , AC , quæ producantur quantumlibet uſque ad D , & E . Dico tam angulos ABC , ACB , ſupra baſim BC , inter ſe æquales eſſe, & angulos DBC , ECB , infra eandem baſim. Si enim concipiamus mēte triangulum ABC , triangulo ACB . (ita ut idem triangulum ſit inſtar duorum) ſuperponi, ita ut recta AB , recta AC , ſuperponatur, cadet punctum B , in C , ob æqualitatem laterum AB , AC . Quo poſito cadet recta AC , ſuper rectam AB , ob æqualitatem, ſive identitatem anguli A ; atque punctum C , in punctum B , incidet, propter æqualitatem laterum AC , AB . Quapropter angulus ABC , angulo ACB , & angulus DBC , angulo ECB , congruet, ^a ac proinde tam illi, quàm hi inter ſe æquales erunt.

b 5. primi.



COROLLARIUM.

Ex hac propositioe quinta liquet, omne triangulum æquilaterum eſſe æquiangulum quoque. Hoc eſt, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri eſſe inter ſe æquales. Sit enim triangulum æquilaterum ABC . Quoniam igitur duo latera AB , AC , ſunt æqualia, ^b erunt duo anguli B , & C , æquales. Item quia duo latera AB , BC , ſunt æqualia, erunt & anguli C , & A , æquales. Quare omnes tres A , B , & C , æquales erunt. Quod oſtendendum erat.

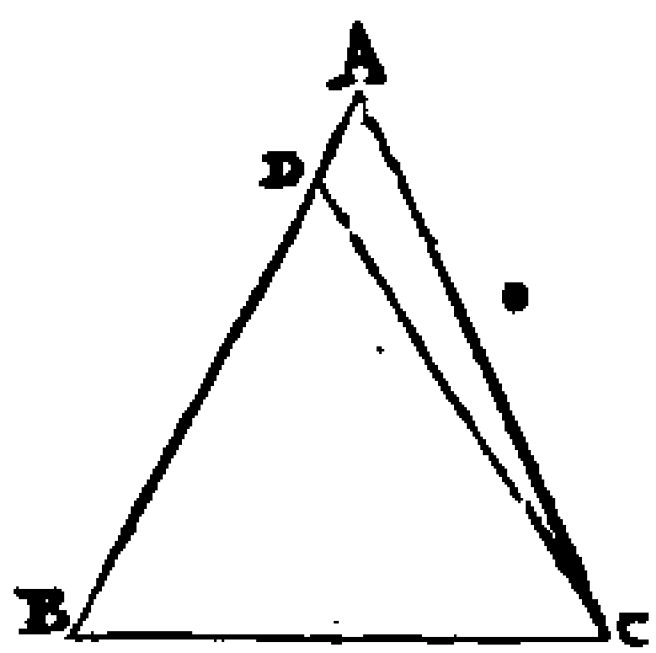
THEOR.

LIBER PRIMVS.
THEOR. 3. PROPOS. 6.

55

6.

Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint : & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.



IN triangulo ABC, sint duo anguli ABC, ACB, super latus BC, æquales. Dico duo latera illis opposita AB, AC, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero: sit igitur AB, maius quam AC, si fieri potest: Et ex A B, ^a abscindatur in D, recta BD, æqualis rectæ AC, (quæ minor dicitur esse, quam AB,) ducaturq; recta CD. Considerentur iam duo triangula ACB, DBC. In quibus cum duo latera AC, CB, trianguli ACB, æqualia sint duobus lateribus DB, BC, trianguli DBC, utrumque utrique, nempe AC, ipsi DB, (abscidimus enim ex AB, ipsi AC, concessu aduersarij, æqualem DB,) & CB, ipsi BC, cum sit unū & idem: Sint autē & anguli ACB, DBC,

a 3. primi.

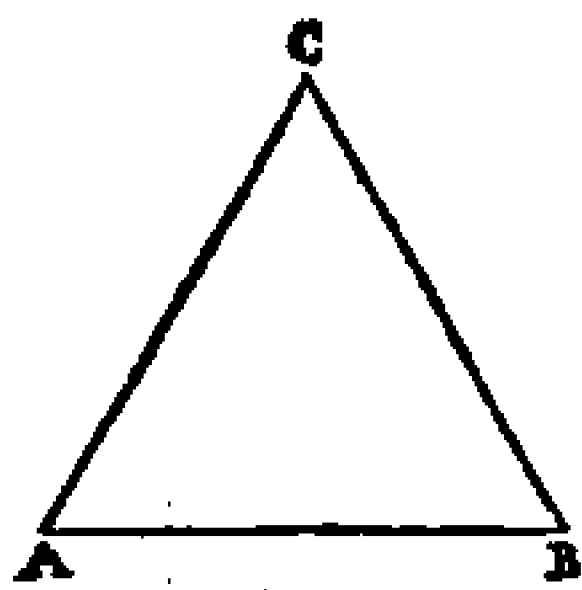
contenti dictis lateribus æquales, per hypothesin: ^b Erunt triangula ACB, DBC, æqualia, totū, & pars, quod fieri non potest. Non igitur erunt latera AB, AC, inæqualia, si anguli B, & C, super latus BC, æquales sunt, ne totum parti æquale esse concedamus: sed æqualia existent. Quare si trianguli duo anguli, &c. Quod demonstrandum erat.

b 4. primi.

S C H O L I V M.

CONVERTITUR hoc theorema primam partem precedentis. Nam ibi demonstratum est, si duo latera trianguli inter se æqualia fuerint, angulos, qui ad basim sunt, esse quoque æquales: Hic verò, si anguli ad basim sint æquales, latera quoque angulis illis opposita esse æqualia. Non autem mirum alicui debet videri, si Mathematici interdum conuertunt propositiones, ita ut nunc ex antecedente quopiam concessio colligant per demonstrationem consequens aliquod, nunc verò rursus ex consequente hoc concessio inferant per aliam demonstrationem antecedens illud, ut ab Euclide in hisce duabus proximis propositionibus factum esse conspiciamus: Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non semper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & consequens. Nam in propositionibus necessariis, quales sunt propositiones Geometricæ, potest interdum predicatum esse vniuersalius subiecto, ut cum Dialecticis loquamur. Quare tunc non poterit conuerteri propositio. Nam necessaria est hæc propositio: (Omnis homo est animal,) non tamen conuerteri potest vniuersaliter, cum non omne animal sit homo. Ita quoque fieri potest in propositionibus Geometricis necessariis: Cuius ego rei vnum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonstrat Euclides proposit. 16. huius libri. Si trianguli cuiusvis vnum latus producat, angulum externū maiorem esse duobus internis sibi oppositis; In qua quidem propositione nullo modo antecedens, & consequens reciprocantur. Non enim sequitur, si figura cuiusvis rectilinea, vno latere producta, angulus externus maior sit singulis internis oppositis, figuram illam esse triangulum, cum possit etiam esse quadrilatera figura, ut ad proposit. 16. huius libri ostendimus. Eodemq; modo multa alia propositiones conuertere nequeunt. Quā ob rem necesse est, ut prius demonstret Geometra propositionem aliquam conuertere, hoc est, antecedens & consequens illius reciprocari, antequam ex consequente concessio colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propositiones, quæ conuertere possunt, sed eas duntaxat, quarum conuersione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, ut ferè omnes illas conuertamus, quæ aliquam videbuntur asserere utilitatem.

C O R O L L A R I V M.



SEQVITVR ex hac propositione, omne triangulum æquiangulum, id est, cuius omnes anguli sunt æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conuersum est corollarij quintæ propositionis, ut liquet. Sint enim trianguli ABC, tres anguli æquales. Dico ipsum esse æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & C, sint æquales, ^a erunt latera AB, AC, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera AC, BC, æqualia, & idcirco omnia tria latera AB, BC, AC, æqualia. Quod ostendendum erat.

a 6. primi.

E X P R O C L O.

LICEBIT nobis etiam conuertere secundam partem quintæ propositionis, hoc modo.

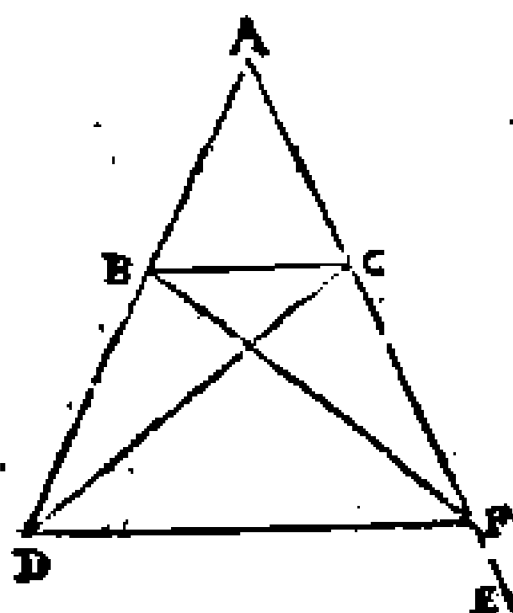
Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.

TRIANGVLI enim ABC, productis lateribus AB, AC, ad D, & E, fiant anguli DBC, ECB, infra basim BC, æquales. Dico latera AB, AC, esse quoque inter se æqualia. Ex CE, quantumlibet producta ^b abscin-

b 3. primi.

a 4. primi.

b 3. pron.



c 4. primi.

d 6. primi.

e 3. pron.

BF, ipsi CD, ut modo ostensum est; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus DBF, FCD, æquales, ut etiam fuit nuper demonstratum: ^c Erit angulus BDF, super basim DF, trianguli DBF, æqualis angulo CFD, super eandem basim FD, trianguli FCD. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo ADF, duo anguli ADF, AFD, sint æquales, ut nunc ostendimus, ^d erunt latera AD, AF, æqualia. A quibus si recta BD, CE, per constructionem, æquales demantur, ^e remanebunt AB, AC, latera trianguli ABC, æqualia. Quod erat ostendendum:

7.

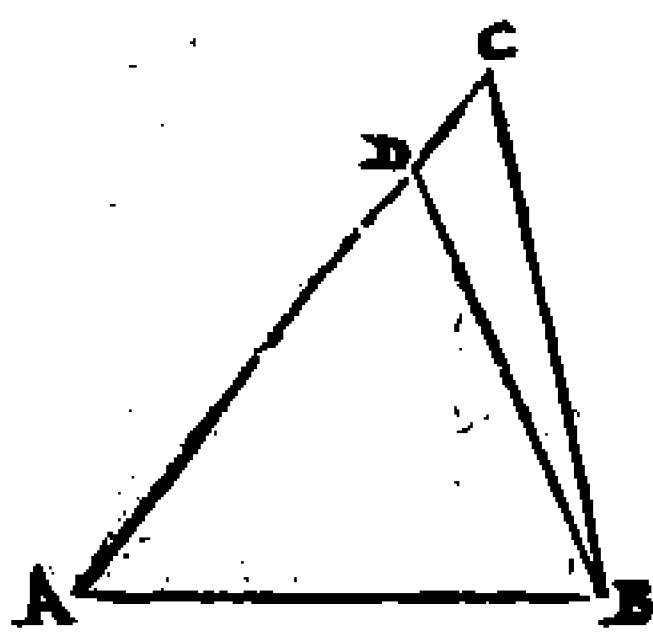
THEOR. 4: PROPOS. 7:

SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraque utrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eisdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SVPER recta AB, constituentur ad punctum quodvis C, duæ rectæ lineæ AC, BC. Dico super eandem rectam AB, versus partem eandem C, non posse ad aliud punctum, ut ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis AC, BC, utraq; utrique, nempe AC, ipsi AD, quæ eundem habent terminum A; & BC, ipsi BD, quæ eundem etiam terminum possident B. Sint

enim, si fieri potest, rectæ AC, AD, inter se, & rectæ BC, BD, inter se etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum AC, BC, ita ut recta AD, in ipsam rectam AC, vel BD, in ipsam BC, cadat; aut intra triangulum ABC; aut extra.

SI T primò punctum D, in altera rectarum AC, BC, nempe in AC, ut AD, sit pars ipsius AC. Quoniam igitur rectæ AC, AD, eundem terminum A, habentes, dicuntur æquales, erit pars AD, toti AC, æqualis, quod fieri non potest.



a 5. primi.

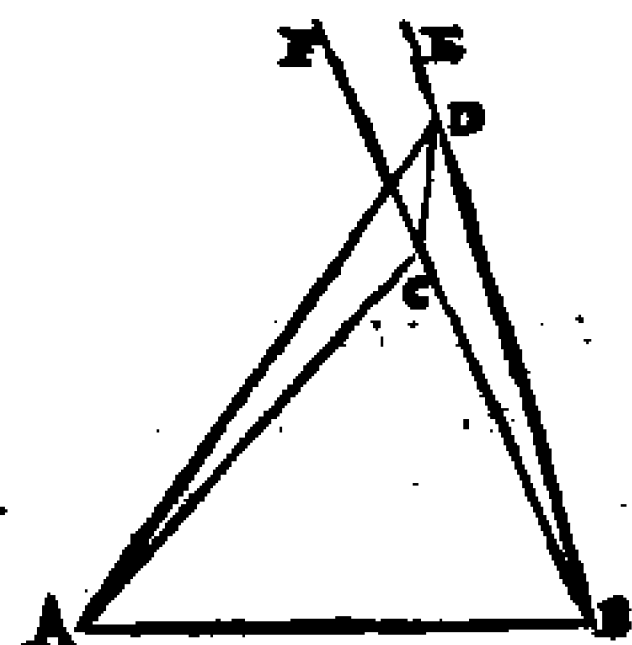
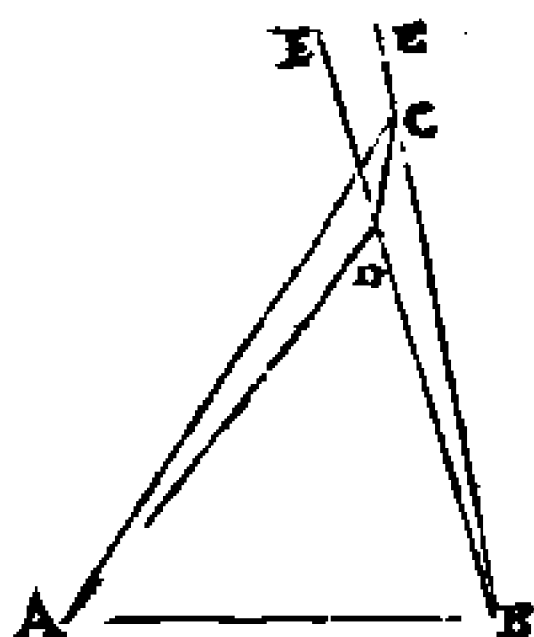
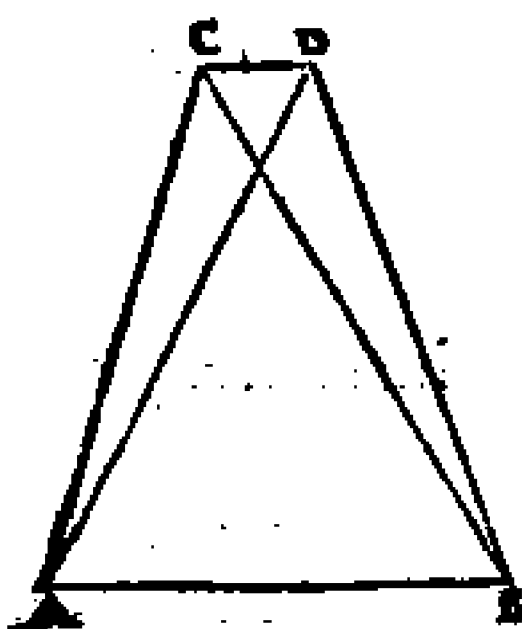
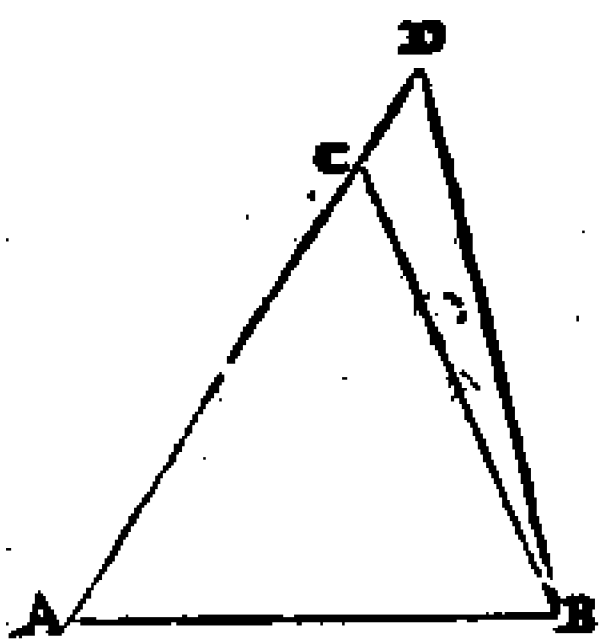
b 9. pron.

SI T deinde punctum D, intra triangulum ABC, & ducta recta CD, producantur rectæ BC, BD, usque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo ACD, ponuntur latera AC, AD, æqualia, ^a erunt anguli ACD, ADC, super basim CD, æquales; ^b Est autem angulus ACD, minor angulo DCE; nempe pars toto: Igitur & angulus ADC, minor erit eodem angulo DCE. Quare angulus CDE, pars ipsius ADC, multò minor erit eodem angulo DCE. Rursus, quia in triangulo BCD, latera BC, BD, ponuntur æqualia, ^c erunt anguli CDE, DCE, sub basi CD, æquales. Ostensum autem fuit, quòd idem angulus CDE, multò sit minor angulo DCE. Idem ergo angulus CDE, & minor est angulo DCE, & eidem æqualis, quod est absurdum.

SI T postremò punctum D, extra triangulum ABC. Aut igitur in tali erit loco, ut una linea super alteram cadat, ut in priori figura, dummodò loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum.

AV T in tali erit loco, ut posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo posito, in idem absurdum incidemus, nempe angulum DCE, & minorem esse angulo CDE, & eidem æqualem, ut perspicuum est.

AV T denique punctum D, ita erit extra triangulum ABC, ut altera linearum posteriorum, nempe AD, secet alteram priorum, ut ipsam BC. Ducta igitur recta CD, cum in

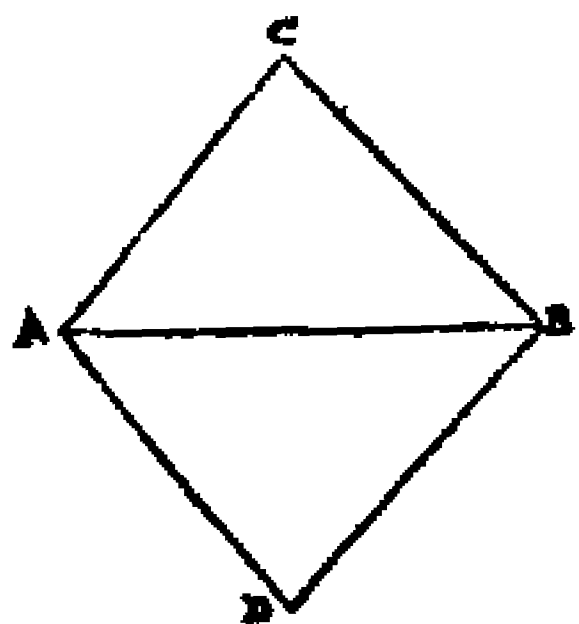


triangulo

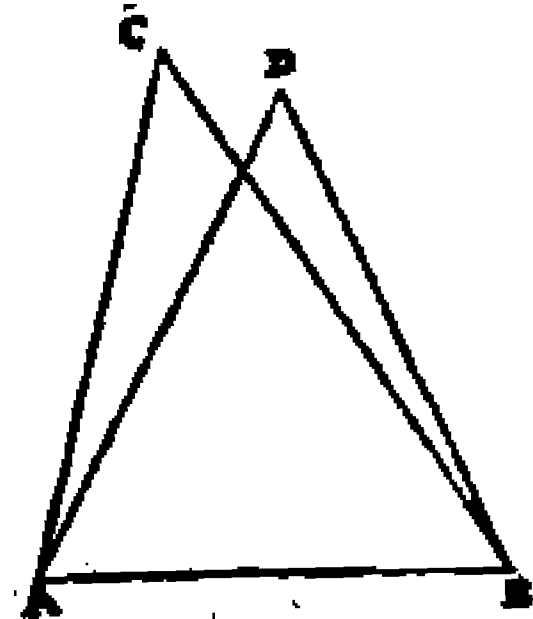
triangulo ACD , latera AC, AD , ponantur æqualia, erunt anguli ACD, ADC , supra basim CD , æquales: Ac proinde cū angulus ADC , minor sit angulo BDC , pars toto, erit & angulus ACD , minor eodem angulo BDC . Quare multo minor erit angulus BCD , pars anguli ACD , angulo eodem BDC . Rursus, cū in triangulo BDC , latera BC, BD , ponantur æqualia, erunt anguli BCD, BDC , super basim CD , æquales: Est autem iam ostensum, angulum BCD , multo esse minorem angulo BDC . Idem igitur angulus BCD , & minor est angulo BDC , & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo æquales sunt inter se AC, AD , & inter se quoque BC, BD . Quare super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

FIERI potest, ut dua linea AD, BD , æquales sint duabus AC, BC , vtrique vtrique, ut AD , ipsi BC , & BD , ipsi AC , ut vltima figura indicat. Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto linea illa, quæ sunt æquales inter se, ut constat. Sola enim AC, AD , eundem litem possident A ; Item BC, BD , eundem B ; optimèque demonstratum fuit ab Euclide, fieri non posse, ut AC, AD , inter se sint æquales, ita ut BC, BD , quoque inter se æquales existant. Rectè igitur in propositione appositæ sunt hæc verba: eosdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rursus possunt esse dua linea simul sumpta AD, BD , æquales duabus lineis AC, BC , simul sumptis, ut in eadem figura perspicui potest: Sed hoc non ostendit Euclides fieri non posse: Dixit enim non posse vtramque vtrique esse æqualem, &c.



EADEM ratione possunt ex A , & B , infra AB , basim trianguli ABC , hoc est, ad contrarias partes, duci dua linea rectæ AD, BD , conuenientes ad aliquod punctum, ita ut AD , exiens è puncto A , æqualis sit ipsi AC ; & BD , egrediens ex B , æqualis ipsi BC , ut perspicuum est in appositæ figura. Non igitur sine causa adiecit Euclides: ad easdem partes. Denique esse poterunt dua linea AC, AD , æquales inter se, eundem terminum A , possidentes; Sed hoc posito, fieri nulla ratione poterit, ut reliqua dua BC, BD , terminum habentes eundem B , inter se quoque sint æquales, ut in hac figura apparet, & ab Euclide est demonstratum.



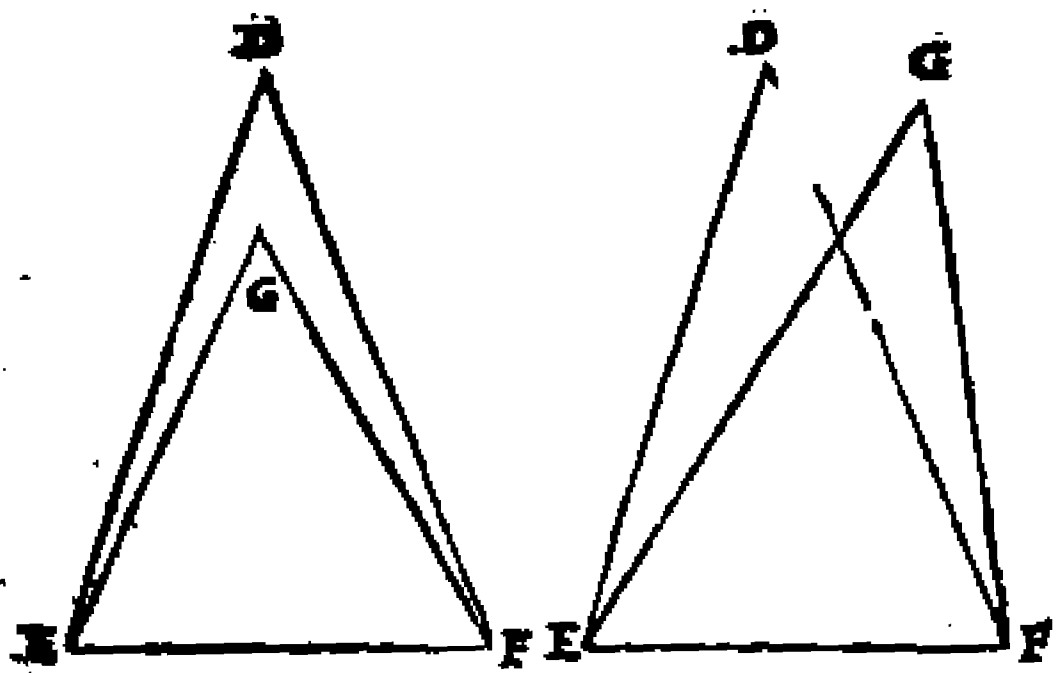
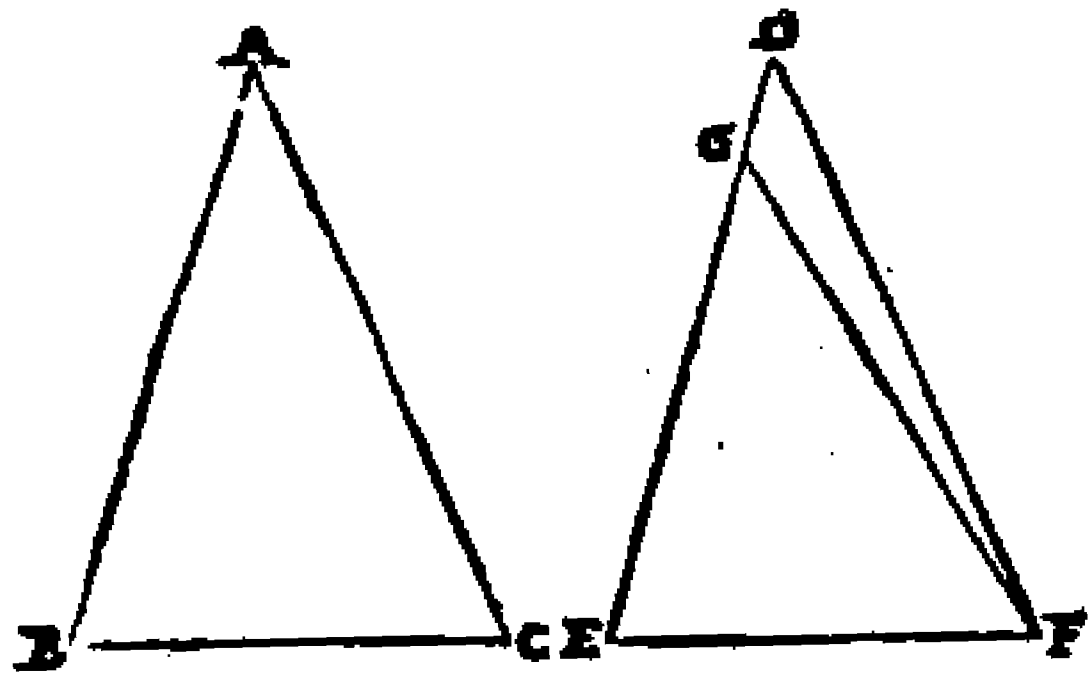
Appositè igitur dictum est in propositione: duabus eisdem rectis lineis alia dua recta linea æquales, vtrique vtrique, &c. Quare ut planè scopus Euclidis in hac propositione propositus intelligatur, diligenter singula verba propositionis sunt ponderanda.

THEOR. 5. PROPOS. 8.

8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia, habuerint verò & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SINT duo latera AB, AC , trianguli ABC , duobus lateribus DE, DF , trianguli DEF , æqualia, vtrumque vtrique, nempe AB , ipsi DE , & AC , ipsi DF ; sit autem & basis BC , basi EF , æqualis. Dico angulum A , æqualem esse angulo D , quorum videlicet vterque dictis lateribus continetur. Nam si mente intelligatur basis BC , superponi basi EF , neutra excedet alteram, sed punctum B , congruet puncto E , & punctum C , puncto F , cū hæc bases ponantur æquales inter se.



Deinde si triangulum ABC , cogitetur cadere super triangulum DEF , cadet punctum A , aut in ipsum punctum D , aut aliò. Si punctum A , in ipsum punctum D , cadat, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cū ponantur æqualia: Ac propterea & angulus A , æqualis erit angulo D , cū neuter alterum excedat. Quod si punctum A , aliò dicatur cadere, ut ad G , quomodocunque id contingat, hoc est, siue in latus ED , siue intra triangulum EDF , siue extra, ut in figuris apparet: erit perpetuò EG , (quæ eadem est, quæ BA), æqualis ipsi ED ; & FG , (quæ eadem est, quæ CA), æqualis ipsi FD , propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponantur lateribus al-

a 7. prim.

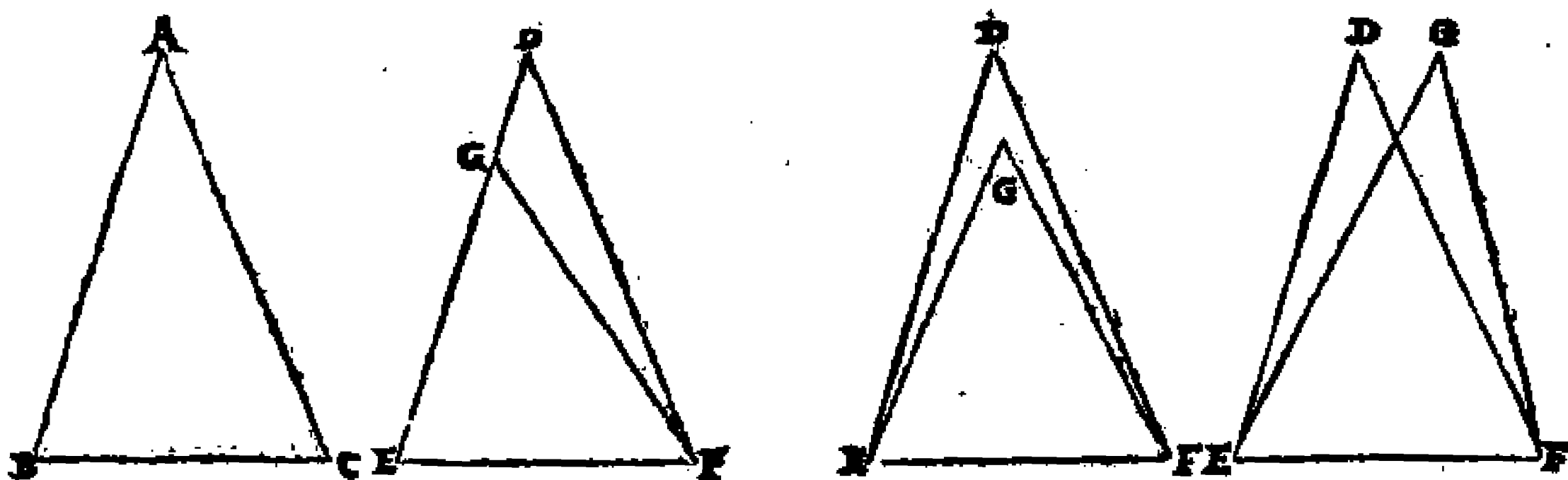
terius. Hoc autem fieri non posse, iam dudum demonstratum est, cum tam rectæ EG, ED , terminum eundem E , quam rectæ FG, FD , eundem limitem F , possideant. Non igitur punctum A , cadet aliò, quam in punctum D : ac propterea angulus A , angulo D , æqualis erit. Quare si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

Ut vides, hac propositio convertit primam partem propositionis quarta. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit basium æqualitas; ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima & tertia parte conclusionis quarta propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita ut theorema proponatur in hanc formam.

Si duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, utrumque utrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrumque utrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosque reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

Si enim basis BC , æqualis basi EF , & angulus B , angulo E , angulusque C , angulo F . Dico latera quoque AB , lateri DE , & lateri AC , lateri DF , æquale esse, angulumque A , angulo D . Nam si basis basi superponatur, & congruent sibi mutuo extrema earum, nec non & linea angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, proptereaque omnia inter sese æqualia erunt. Verum hoc idem theorema à nobis propositum, quod quidem magis propriè convertere videtur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26. ut eo loco monebimus.



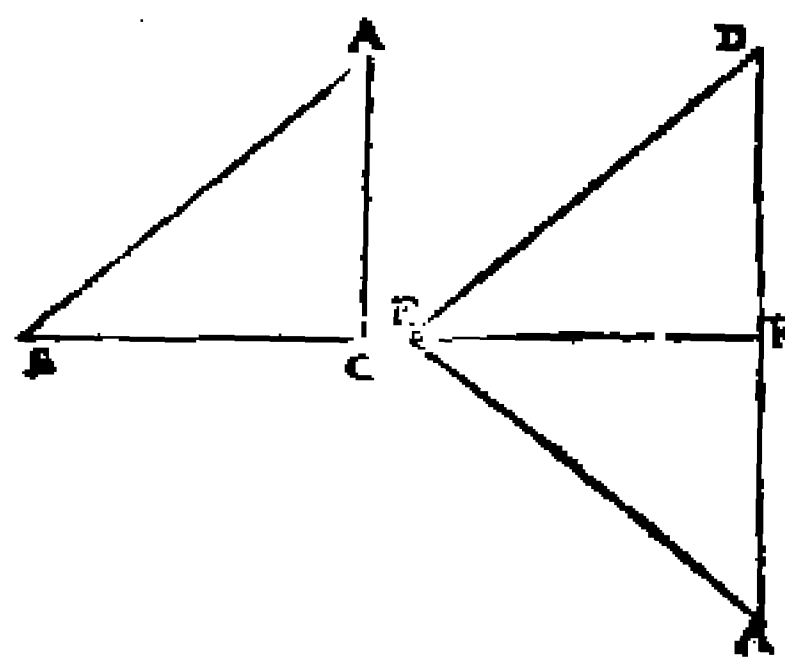
a 8. prop.

perponatur, & congruent sibi mutuo extrema earum, nec non & linea angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, proptereaque omnia inter sese æqualia erunt. Verum hoc idem theorema à nobis propositum, quod quidem magis propriè convertere videtur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26. ut eo loco monebimus.

C O R O L L A R I V M

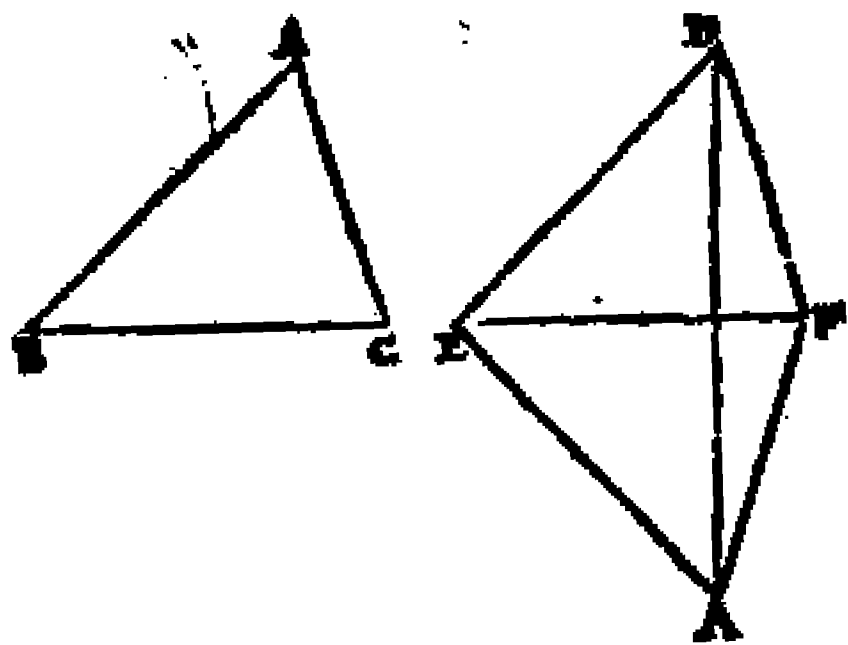
Porro ex antecedente huius octava propositionis, non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, utrumque utrique, ut angulum B , angulo E , & angulum C , angulo F ; immod totum triangulum toti triangulo, ut constet ex eadem superpositione unius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, ut perspicuum est. Quod etiam ex quarta propositione colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, quum latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, ut in propositione quarta demonstratum est.

E X P R O C L O.



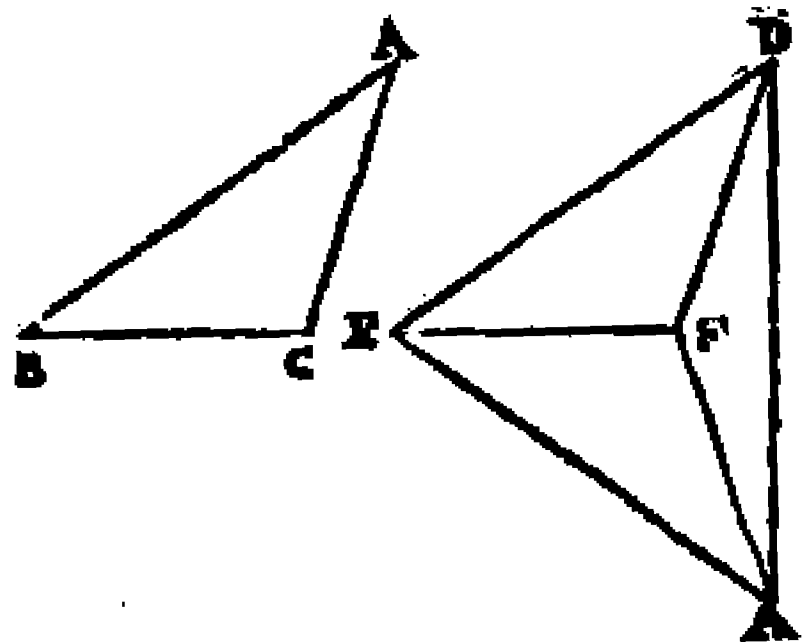
b 5. prim.

PHILONIS familiares hoc idem theorema octavum ostendunt demonstratione affirmativa, hac ratione. Posito enim eodem antecedente, superponi intelligatur basis BC , basi EF , ita ut triangulum ABC , cadat in diversas partes, & non super triangulum DEF , quale est triangulum AEF . Aut igitur duo latera, nempe DF, FA , constituunt unam lineam rectam, quod quidem continget, si duo anguli C , & F , recti existerint, aut non. Si constituent unam lineam rectam, veluti DA , ita propositum concludetur. Quoniam, in triangulo AED , duo latera AE, DE , ponuntur æqualia (est enim nunc AE , recta eadem, qua AB , qua per hypothese recta DE , æqualis est) erunt anguli A , & D , super basin AD , æquales, quod erat ostendendum. Si verò neque DF, FA , neque DE, EA , lineam rectam consiciant, ducatur ex D , ad A , linea recta DA , qua



anguli ad F fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo AED, duo latera AE, DE, ponuntur equalia, erunt anguli EAD, EDA, aequales super basin DA. Eadem ratione, cum duo latera AF, DF, in triangulo AFD, sint per hypothesin equalia, erunt anguli FAD, FDA, super basin DA, aequales. His ergo à prioribus ablati, remanebunt anguli EAF, EDF, aequales; Quod demonstrandum proponebatur.

qua vel cadet intra triangula, vel extra. Cadat primum intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, sunt acuti. Quoniam igitur in triangulo AED, duo latera AE, DE, equalia ponuntur, erunt duo anguli EAD, EDA, aequales ad basin DA. Eadem ratione, cum duo latera AF, DF, equalia sint per hypothesin, erunt duo anguli FAD, FDA, super basin DA, aequales. Si igitur hi aequales illis aequalibus addantur, fient toti anguli EAF, EDF, aequales. Quod erat ostendendum. Cadat deinde recta DA, extra triangula, quod demum fiet, quando



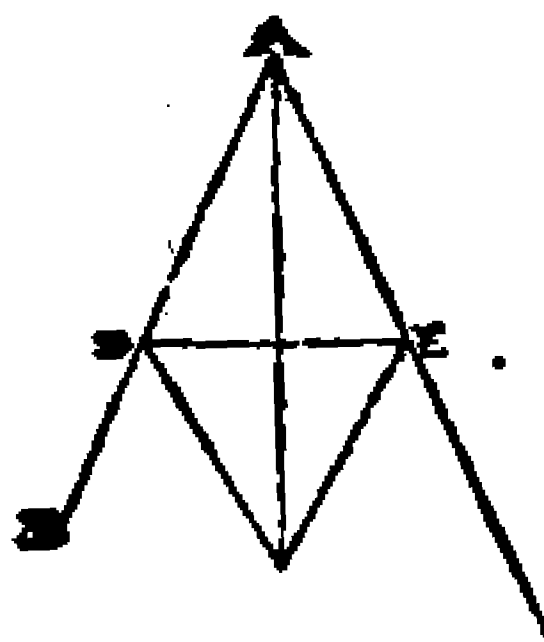
a 5. primi.

b 2. pron.

PROBL. 4. PROPOS. 9.

9.

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.



SIT diuidendus rectilineus angulus BAC, bifariam, hoc est, in duos angulos æquales. In recta AB, sumatur quodcunque punctum D, & recta AD, secetur ex AC, recta AE, æqualis, ducaturq; recta DE. Deinde super DE, constitutur triangulum æquilaterum DFE, & ducatur recta AF, diuidens angulum BAC, in angulos BAF, CAF. Dico hos angulos inter se esse æquales. Cum enim latera DA, AF, trianguli DAF, æqualia sint lateribus EA, AF, trianguli EAF, utrumque utrique, quod DA, ipsi EA, per constructionem, sit æquale, & AF, commune; Sit autem & basis DF, basi EF, æqualis, propterea quod triangulum DFE, constructum est æquilaterum: Erit angulus DAF, angulus EAF, æqualis, ideo-

a 3. primi.

b 1. primi.

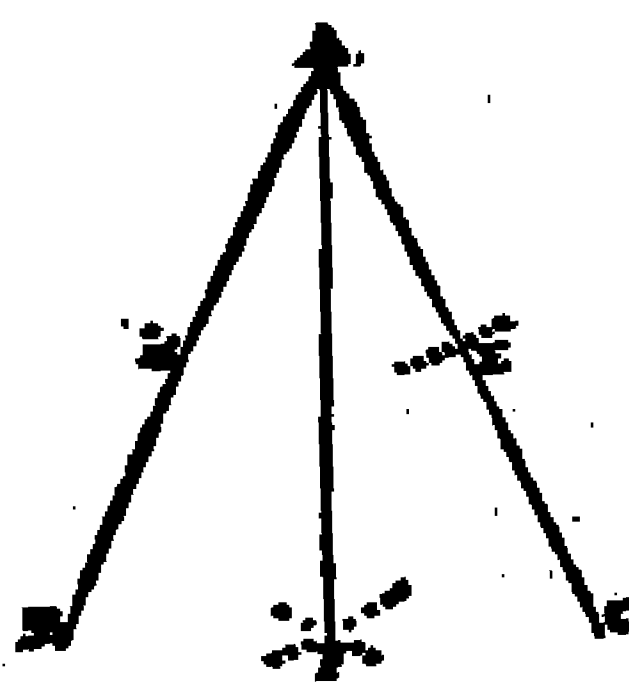
c 8. primi.

que angulus BAC, diuisus bifariam, quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Quod si loco trianguli æquilateri construamus triangulum isosceles, nihilominus idem demonstrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propositionibus, quæ sequuntur, fieri potest.

PRAXIS.

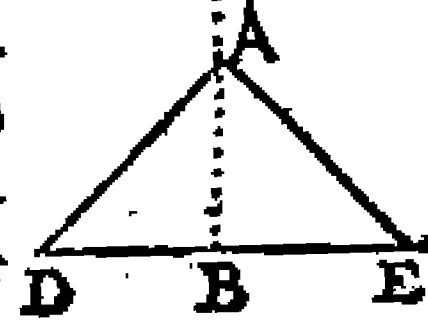


DICTO citius angulus quilibet rectilineus, ut BAC, bifariam secabitur, hoc modo: Ex centro A, circino aliquo abscindantur rectæ equalæ AD, AE, cuiuscunque magnitudinis. Et circino non variato (posset tamen ipsum variare, si velles) ex centro D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta igitur ducta AF, secabit angulum BAC, bifariam. Si enim ducerentur rectæ DF, EF, essent hæ equalæ, nempe semidiametri circulorum equalium. Unde ut prius, demonstrabatur, angulum DAF, æqualem esse angulo EAF. Non descripsimus autem dictas lineas, ut nuda praxis haberetur: Id quod in alijs quoq; praxibus, quoad eius fieri poterit, obseruabimus, ne linearum multitudo tenebras nobis of-



fundat, pariatque confusionem.

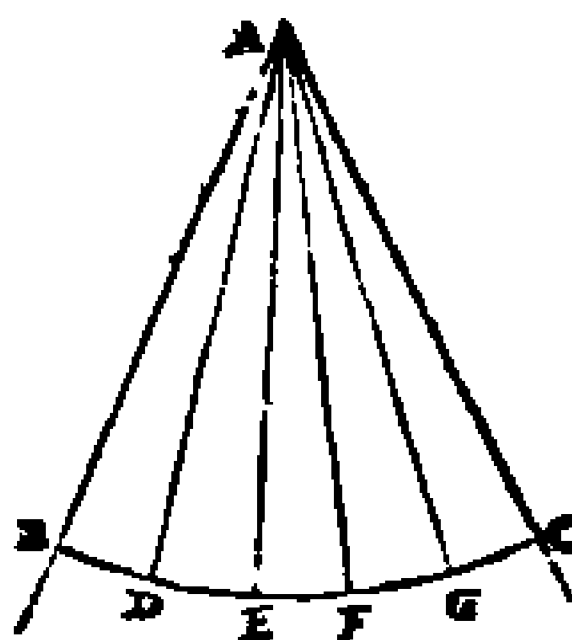
Quod si quando angulus rectilineus breuissimis lineis contentus, & in extremo aliquum plani positus, diuidendus sit bifariam, describemus ex D, & E, duos arcus sese mutuo interfecantes in F, supra angulum A, quia infra puncta D, & E, spatium deest, in quo describi possint. Recta enim ex F, per A, vsque ad B, ducta secabit angulum A, bifariam, ut prius, ut in appositâ figura apparet.



SCHOLIUM.

Hinc aperte colligitur, angulum rectilineum quemuvis diuidi posse etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, semper procedenda per augmentum duplex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuisus, si horum uterq; iterum bifariam secetur, habebimus 4. angulos æquales; Quod si singuli rursus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & sic deinceps. Non docuit autem Euclides vsquam, quanam ratione angulus rectilineus in quoruvis partes æquales possit diuidi, quia id à nemine vsq; ad illum diem fuerat demonstratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebit.

mus, beneficio cuiusdam lineæ curvæ, vel inflexæ ad finem libri 6. Interim verò si quis angulum rectilinum quemcunque propositum in quotvis partes æquales dividere desideret rudi, ut dicitur, Minerva, vti cum necesse erit circino, ut quasi attentando, & sæpius repetendo praxin ipsam ad finem desideratum petueniat, hac ni-



a 13. defn.

b 8. primi.

mirum ratione: Sit angulus rectilinus BAC , dividendus in 5. angulos æquales. Ex A , centro describatur arcus circuli BC , ad quodcunque intervallum secus rectas AB , AC , in B , & C . Deinde hic arcus beneficio circini (eius crura modò dilatando magis, modò restringendo, donec debitam habeant distantiam) dividatur in tot partes æquales, in quot angulus propositus est dividendus, ut in exemplo propositum in quinque partes in punctis D, E, F, G . Si namque ad hæc puncta ex A , rectæ ducantur lineæ, dimisus erit angulus BAC , in quinque æquales angulos. Cum enim circino sumpta sint æqualia intervalla BD, DE , & c. si ducantur rectæ BD, DE , & c. erunt hæc omnes inter se æquales. Quare erant duo latera BA, AD , trianguli BAD , æqualia duob. lateribus EA, AD , trianguli EAD , utrum-

que utrique, cum omnia ex centro egrediantur ad circumferentiam usque. Basis autem BD , basi quoque DE , ut dictum fuit, æqualis est: ^b Angulus igitur BAD , angulo EAD , æqualis existet; Eademq. ratione demonstrabitur, angulum EAD , angulo EAF , æqualem esse, & sic de cæteris. Brevis autem colligetur, omnes angulos ad A , esse inter se æquales, ex 27. propos. tertij libri: propterea quod circumferentia BD, DE , & c. accepta sunt omnes æquales inter sese. Nemo verò miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus pendent. Hæc enim, ut supra ad definit. 10. diximus, eo consilio facimus, ut quoad eius fieri potest, singula proprijs in locis tractentur, divisio nimirum anguli rectilinei cuiusvis in quotlibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet divisionem eiusdem anguli in duas partes æquales. Et divisio lineæ rectæ in quotvis partes æquales, ubi eandem dividit Euclides bisariam, & ita de singulis. Neque enim ad praxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstrationes, sed solum, ut probetur rectè esse per ipsas effectum, quod imperabatur. Quamobrem ù, qui nō contentus nuda praxi demonstrationem requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessariae diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium, quemadmodum & in proxima praxi citavimus propositionem 27. tertij libri.

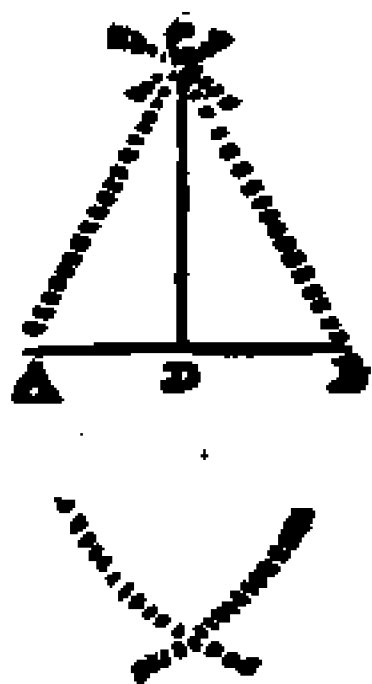
PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam finitam bisariam secare.

a 1. prim.

b 9. primi.

c 4. primi.



SI T recta finita AB , dividenda bisariam, id est, in duas partes æquales. Describatur super AB , triangulum æquilaterum ABC , cuius angulus C , per rectam CD , ^a dividatur bisariam, rectæque CD , rectam AB , secet in D . Dico rectam AB , bisariam esse divisam in D . Quoniam duo latera AC, CD , trianguli ACD , æqualia sunt duobus lateribus BC, CD , trianguli BCD , utrumque utrique, nempe AC , ipsi BC , cum sint ambo latera trianguli æquilateri, & CD , est commune: Est autem & angulus ACD , angulo BCD , æqualis, per constructionem: ^c Erit basis AD , basi BD , æqualis. Datam ergo rectam AB , bisariam secimus in D , quod facere oportebat.

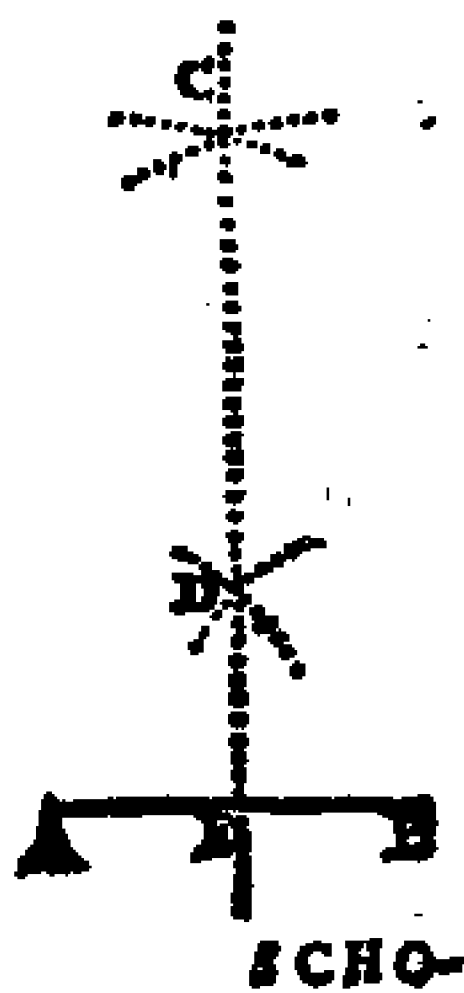
P R A X I S.

Ex centro A , ad quodvis intervallum, quod tamen dimidiam lineæ AB , excedat, describantur duo arcus, unus supernè, alter infernè; Et ex centro B , ad idem intervallum omnino alij duo arcus delineentur, qui priores secant in C , & D . Recta enim ducta CD , secabit rectam AB , in E , bisariam. Si enim ex A , & B , ad C , & D , ducantur quatuor rectæ, erunt hæc omnes inter se æquales, cum ex centris ad circumferentias æqualium circulorum cadant; Nam arcus circulorum descripti sunt eodem intervalllo. Quoniam igitur latera AC, CD , æqualia sunt lateribus BC, CD , utrumque utrique, & basis AD , basi BD , ^a erit angulus ACD , angulo BCD , æqualis. Rursum quia latera AC, CE , æqualia sunt lateribus BC, CE , utrumque utrique, & angulus ACE , angulo BCE , ut ostensum fuit; ^b erit basis AE , basi BE , æqualis.

a 8. primi.

b 4. primi.

ITEM verò si linea bisariam dividenda posita sit in extremo plani cuiuspiam, ita ut infra ipsam locus non sit, in quo commodè duo arcus sese interfecantes possint describi; descriptis supra eam duobus arcibus sese interfecantibus in C , describemus ad easdem partes alios duos arcus sese interfecantes nunc in D , siue hoc fiat intra punctum C , ut in apposta figura, siue supra C . Nam recta per C, D ,educta secabit rectam AB , bisariam in E .



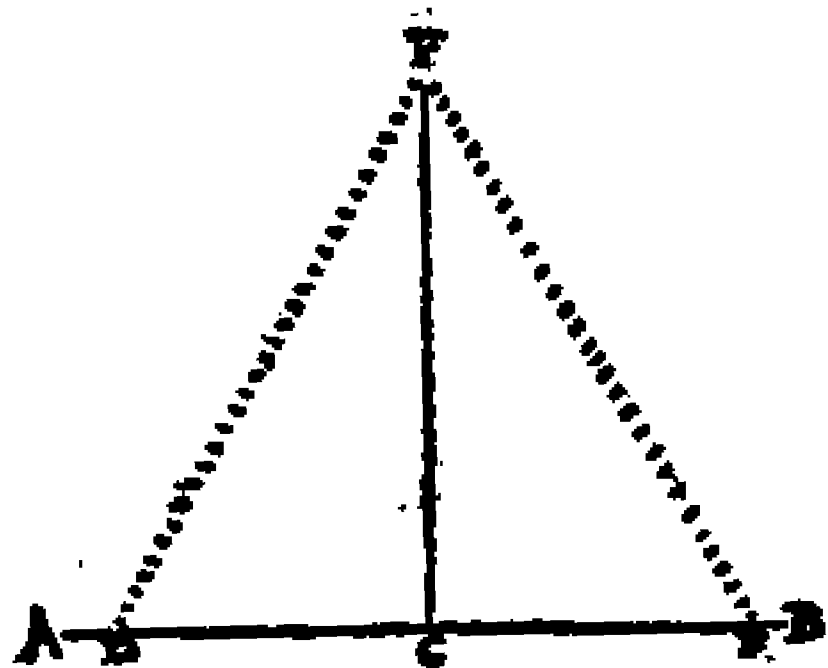
BCHO

SCHOLIUM.

PERSPICUUM est, eodem modo dividi posse eandem lineam rectam AB, in 4. partes aequales, & in 16. in 32. &c. sicuti in propositione precedenti diximus, de divisione anguli rectilinei. Qua vero ratione quavis recta linea proposita dividenda sit in quoruncque partes aequales, vberissime trademus ad propositionem quadragesimam huius libri. Idemque longe facilius postea efficiemus ad propositionem decimam libri d. ubi varias, & non inincundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cum huiusmodi praxes ferè omnes per linearum proportionem facilius demonstrantur. Neq. vero unquam divisione lineam in plures, quam in duas partes aequales ad eum locum usque indigemus.

PROBLEMA 6. PROPOSITIO
vndecima.

DATA recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos erigere.



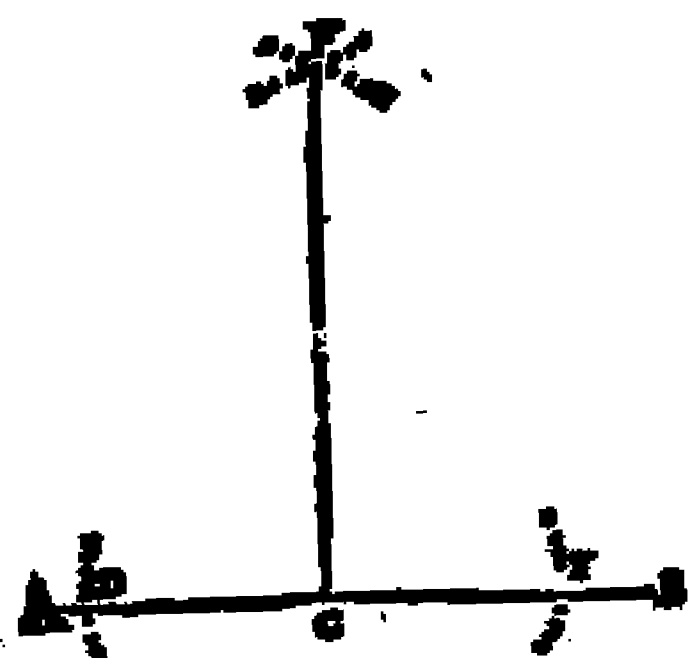
RECTA linea data sit AB, & in ea punctum C, à quo iubemur erigere super AB, lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta CD, cui æqualis auferatur CE. Deinde super DE, constituatur triangulum æquilaterum DEF, atque ex F, ad C, ducatur recta FC, quam dico esse perpendicularem ad AB. Quoniam latera DC, CE, trianguli DCF, æqualia sunt lateribus EC, CE, trianguli ECF, utrumque vtrique, nempe DC, ipsi EC, per constructionem, & CE, commune: Est verò & basis DF, basi EF, æqualis, ob triangulum æquilaterum: Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. Quare dicetur uterque rectus, atque adeò FC, recta, ad AB, perpendicularis. Data igitur re-

cta linea à puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.

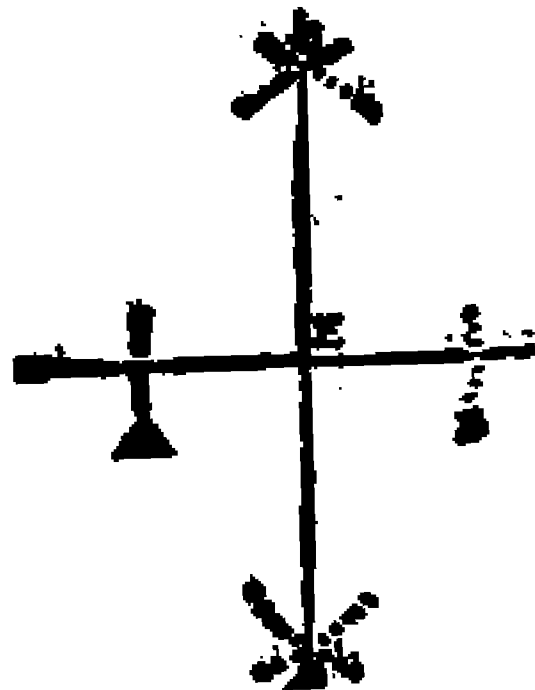
P R A X I S.

Ex puncto C, abscindantur utrinque lineæ æquales CD, CE. Et ex D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta namque ducta FC, erit perpendicularis.

Demonstratio eadem est, quæ Euclidis, si modo ducantur rectæ DF, EF, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, descriptos, qui se intersecant in puncto F. Quod si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, ut ex illo erigatur secundum præxim datam lineam perpendicularis. Ut si linea data fuerit AC, & punctum datum C, extremum, protrahenda erit AC, in B, & sumenda æquales CD, CE, &c. Si verò ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed utraque, id effici-



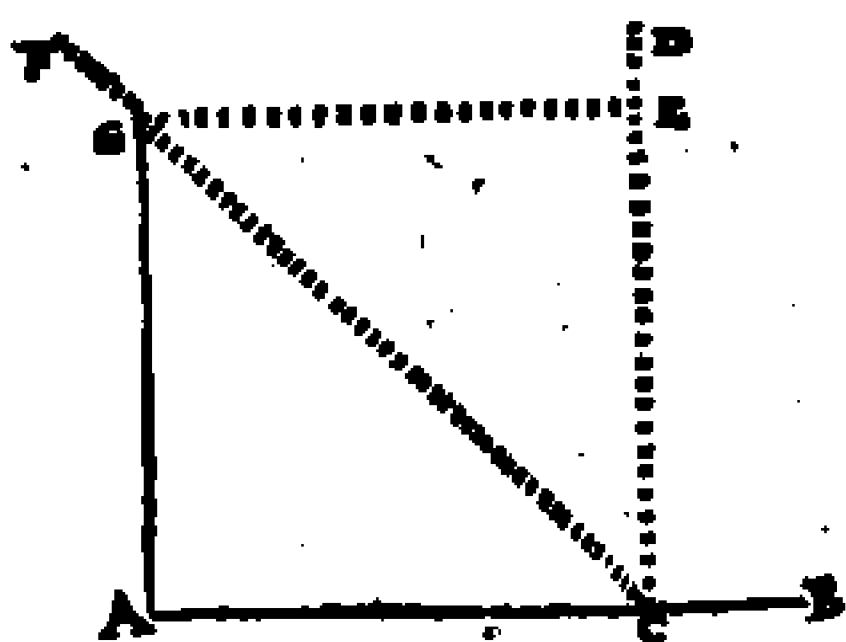
runt hac methodo. Ex duobus punctis A, & B, quibuscunque linea proposita describantur tam superne, quam inferne duo arcus sese intersecantes in C, & D. Nam recta ducta CD, erit perpendicularis ad AB, hoc est, faciet duos angulos ad E, rectos, seu æquales. Quod non aliter probabitur, quam supra præxim, quæ lineam in duas æquales dividentem partes, demonstravimus. Nam per quartam propositionem, erunt anguli ad E, æquales, quippe qui super æquales bases AE, BE, consistant, opposanturque equalibus lateribus AC, BC, quæ ex C, ad puncta A, & B, ducuntur.



EX PROCLO.

Si punctum in linea datæ fuerit extremum, & linea commode produci non poterit, poterimus ex puncto dato

a 9. primi.
b 9. primi.



c 4. primi.

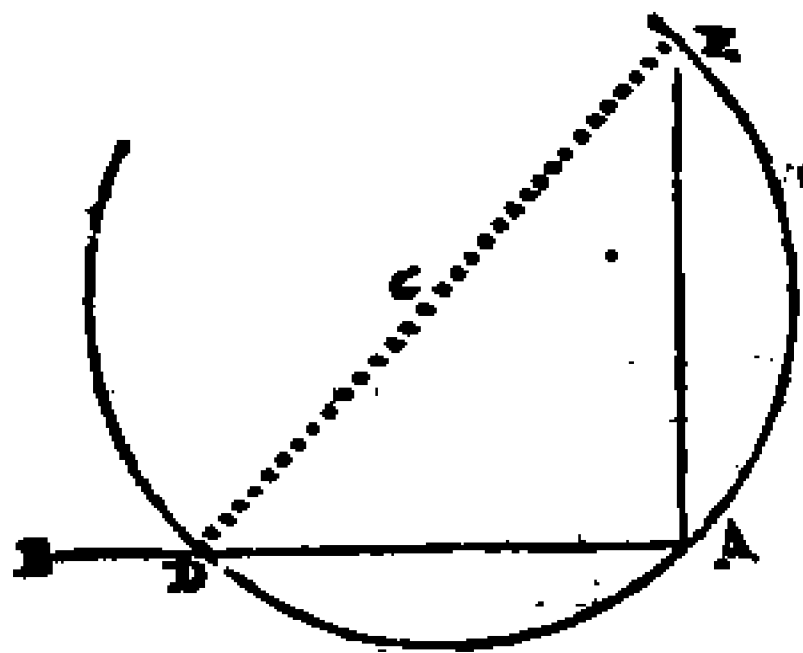
d 10. defin.

Sed E, est rectus per constructionem; igitur & A, rectus erit, ^d ideoq; AG, ad AB, perpendicularis.

SCHOLIUM.

PER 17: lineam perpendicularē erigemus ex puncto dato, siue extremum illud sit, siue non, hoc modo: Sit data linea AB, punctumque in ea A. Ex centro C, extra lineam assumpto, ubi libuerit, (dummodo recta AB, producta cum ipso non conveniat) intervallo vero accepto usque ad A, describatur arcus circuli secans AB, in D. Et ex D, per C, recta ducatur secans arcum in E. Recta enim ducta EA, erit perpendicularis ad AB. Nam angulus A, est rectus, cum sit in semicirculo DAE, ut ostendemus proposit. 31. lib. 3.

ALIAM praxim, quando punctum datum est in extremo lineae, invenies in scholio proposit. 31. huius libri.

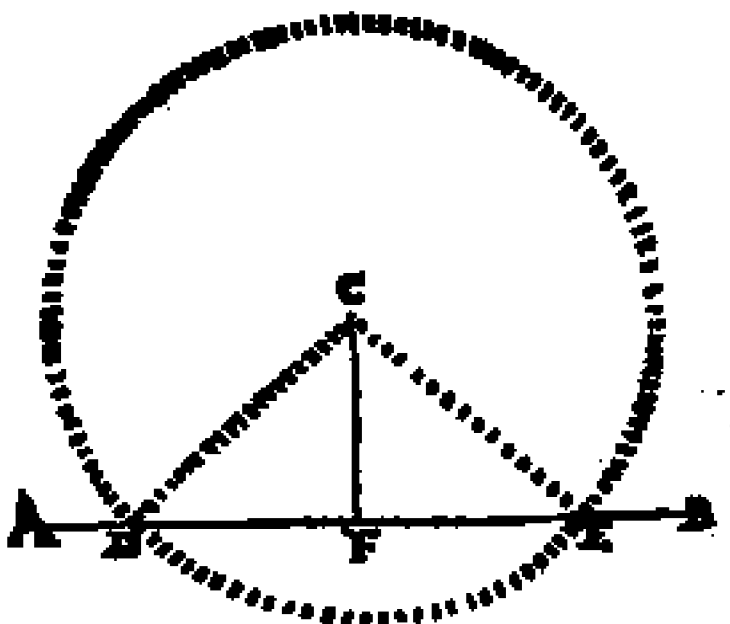


12.

PROBL. 7. PROPOS. 12.

SUPER datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea nō est, perpendicularē rectam deducere.

a 10. primi.



b 8. primi.

pteret uterque rectus. Ducta est igitur CF, perpendicularis, quod faciendum erat.

SCHOLIUM.

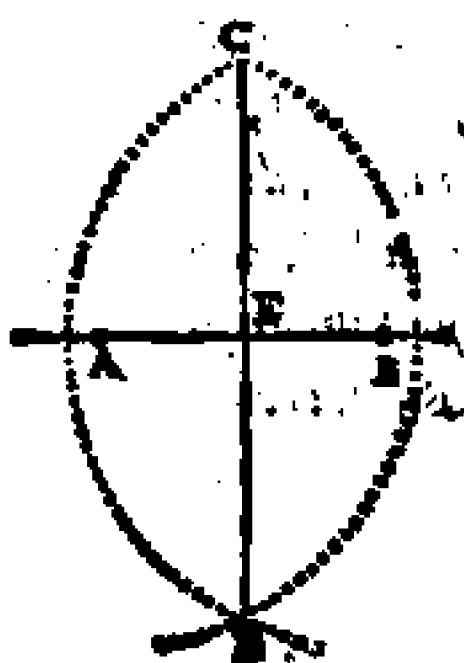
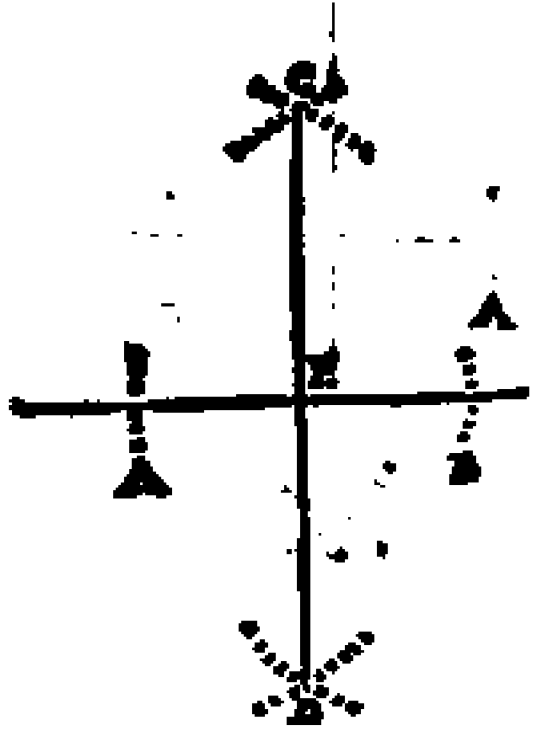
PROBLE appositus Euclides hanc particulam: infinitam. Si enim linea esset finita, non posset semper à puncto dato extra ipsam perpendiculari ad eam deduci. Ut si linea finita esset BE, & punctum C, non posset ex C, describi circulus secans BE, in duobus punctis, quare neque ex C, perpendiculari duci ad BE. Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, nō habere magnitudinem determinatam, ut saltem ad ipsam productam perpendiculari possit deduci. Ita enim fiet hic, si BE, producat, donec circulus ex C, descriptus secet totam BA, productam in D, & E, &c.

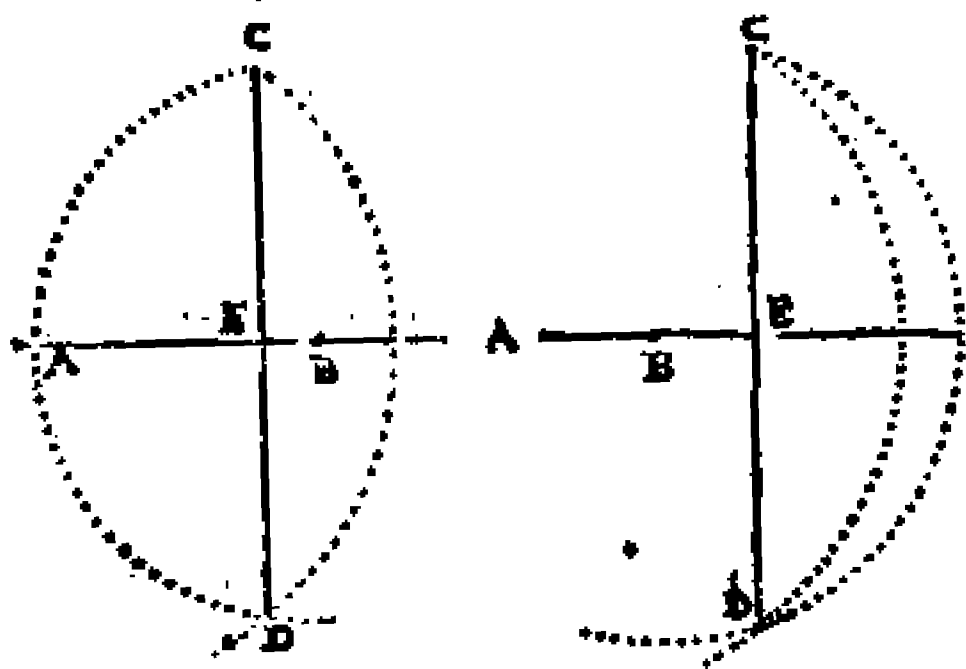
PRAEPRÆ.

CENRO facto C, & intervallo quovis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in A, & B. Deinde ex A, & B, eodemq; intervallo, vel alio, si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in D. Nam ducta recta CD, secans AB, in E, erit perpendicularis ad AB. Demonstratio huius operationis nō differt à demonstratione tradita in praxi proposit. 10. Nam anguli ad E, erunt recti, ^a nempe inter se aequales.

IDEM efficiemus hoc modo: Ex quovis puncto A, in linea data, & intervallo quolibet usque ad C, assumpto, arcus circuli describatur: Deinde, ex quolibet alio puncto B, intervalloque usque ad idem C, alium arcus describatur priorem secans in C, & D: Eritq; ducta recta CD, secans AB, in E, perpendicularis ad AB. Demonstratio eadem est, quæ prior. Non

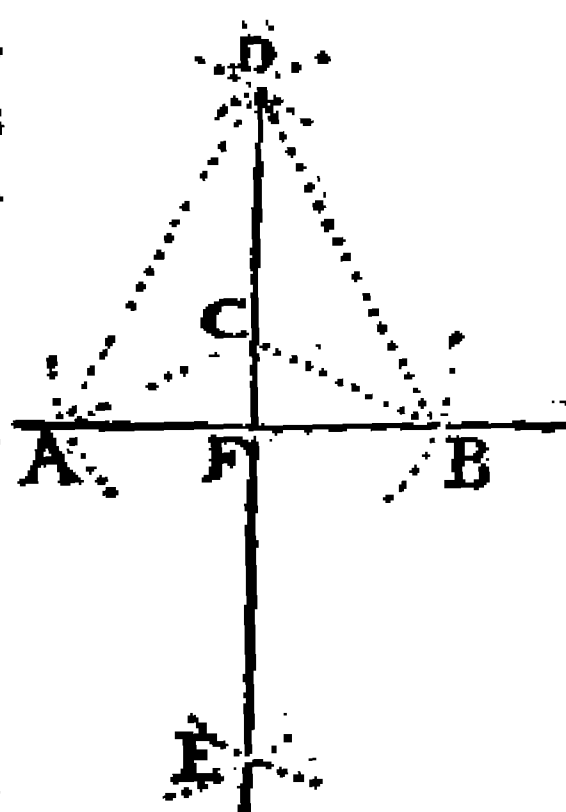
a 4. primi.





est autem necesse, ut interuallum BC , aequale sit interuallo AC , ut in hac figura apparet: Facilius tamen erit, & breuior operatio, si idem semper interuallum accipiat.

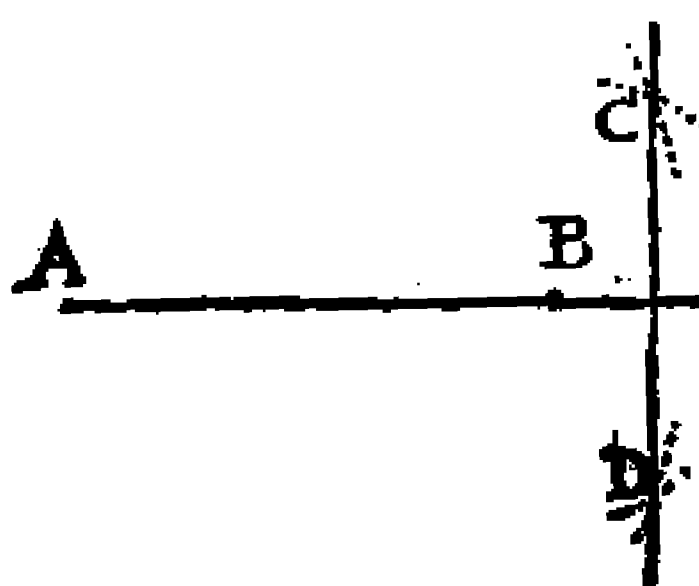
Quod si punctum C , fuerit nimis vicinum rectae AB , ita agendum erit. Centro C , ad quoduis interuallum fecerit recta AB , in duobus punctis A, B , ex quibus ad maius interuallum quodcumque, quam AC , vel BC , bini arcus tam supra, quam infra de-



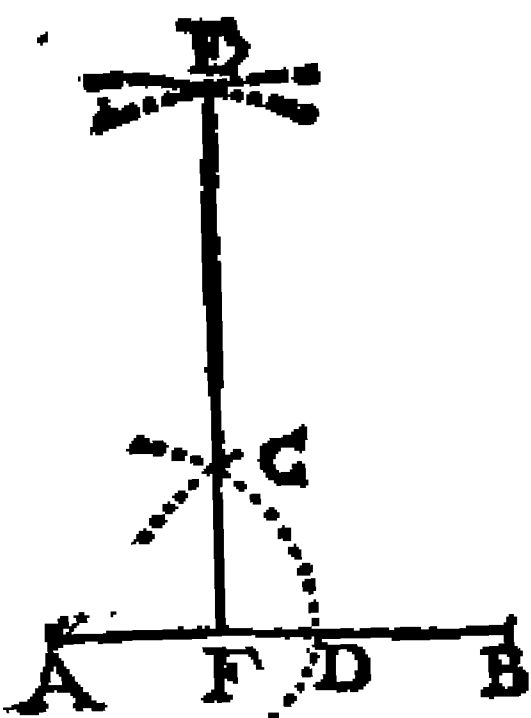
scribantur, se interfecantes in D, E . Nam ducta recta DCF , quae producta necessario per punctum E , transibit, perpendicularis erit ad rectam AB , in F . Quod ita demonstrabimus, ductis rectis AD, BD, AC, BC . Quoniam duo latera DA, DC , trianguli ACD , duobus lateribus DB, DC , trianguli BCD , aequalia sunt, nec non & bases AC, BC , aequales sunt, ^a erunt anguli ad D , aequales. Quare cum duo latera DA, DF , trianguli ADF , duobus lateribus DB, DF , trianguli DBF , aequalia sint, conlineantur, angulos ad D , aequales, ut ostendimus; ^b erunt anguli ad F , aequales, ac proinde recti, &c.

a 8. primi.

b 4. primi.



Si autem punctum datum sit iuxta extremum plani cuiuspiam, ita ut linea data non possit produci, ita agemus. Ex puncto quouis B , quod est regione dati puncti C , videatur quasi esse positum, hoc est, ferè in extremitate linea data AB , describantur duo arcus supra & infra lineam AB , ad interuallum BC . Deinde ex puncto A , aliquantum remoto à puncto accepto B , (Quod autem magis distabunt, inter se puncta A , & B , eo commodius puncta intersectionum arcuum cognoscuntur) alij duo arcus ad interuallum AC , describantur, secantes priores in C , & D . Nam recta CD , perpendicularis erit ad datam rectam AB .



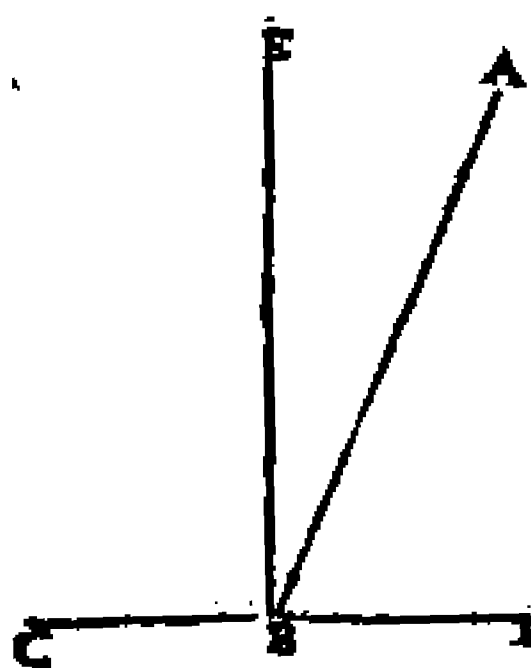
Si autem punctum non prope extremum plani, in quo linea est, dato, linea sit in extremo plani, ut duo arcus infra lineam commodè se interfecare non possint, siue punctum datum C , sit propinquum lineae AB ; siue non, absoluemus problema hoc modo: Ad interuallum AC , ubique punctum A , sumatur, describatur ex C , arcus secans rectam AB , in D ; atque ex A, D , duo arcus describantur versus punctum C , sese interfecantes in E . Recta namque ex E , per C , ducta secans AB , in F , perpendicularis erit ad AB , ut supra demonstratum est, quando punctum C , erat prope lineam AB .

Quo vero modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum est iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum, ita ut neque lineam producere liceat, neque duo arcus commodè se interfecare possint in D , infra datam rectam AB , docebimus in scholio propositionis 31. huius libri.

THEOR. 6. PROPOS. 13.

13.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis aequales efficit.



RECTA linea AB , consistens super rectam CD , faciat duos angulos ABC, ABD . Si igitur AB , fuerit perpendicularis ad CD , ^a erunt dicti anguli duo recti. Si vero AB , non fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulum obtusum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis aequales. ^b Educatur enim BE , ex B , perpendicularis ad CD , ut sint duo anguli $EB C, EBD$, recti. Quoniam vero angulus rectus EBD , ^c aequalis est duobus angulis DBA, ABE , ^d erunt, appposito communi angulo recto $EB C$, duo recti EBD, EBC , tribus angulis DBA, ABE, EBC , aequales. Rursus, quia ^e angulus ABC , duobus angulis ABE, EBC , ^f aequalis est: ^g erunt appposito communi angulo ABD , duo anguli

ABC, ABD , tribus angulis DBA, ABE, EBC , aequales. Sed eisdem his tribus ostendimus, aequales etiam esse duos rectos EBD, EBC ; quæ autem eidem aequalia, & inter se sunt aequalia. Duo igitur anguli ABC, ABD , aequales sunt duobus rectis EBD, EBC . Cum ergo recta linea super rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

a 10. definit.

b 12. primi.

c 19. primi.

d 1. primi.

e 19. primi.

f 2. primi.

g 1. primi.

VIDETUR hac propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus ABC , superat rectum angulum ECB , eo reliquus angulus ABD , superatur ab angulo recto EBD . Nam sicut ibi excessus est angulus ABE , ita hic defectus est idem angulus ABE . Quocirca anguli ABC , ABD , duobus rectis æquales esse conuincuntur: siquidem tantum unus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

14.

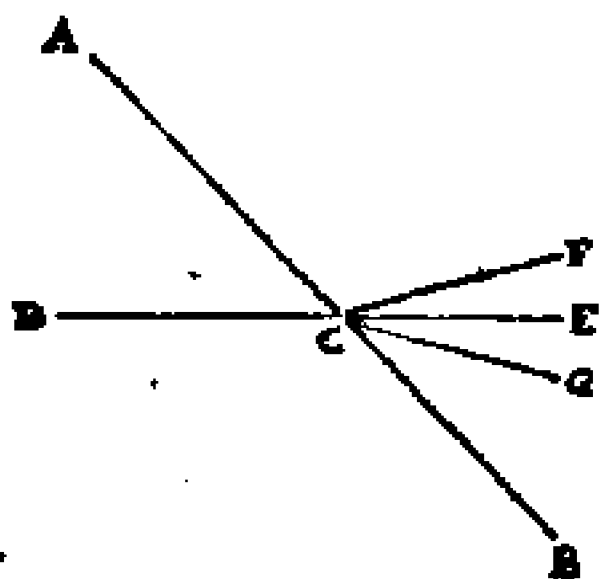
THEOR. 7. PROPOS. 14.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos; qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

a 13. primi.

b 12. pron.

c 3. pronum.



Ad punctum C , lineæ rectæ AB , in diuersas partes ductæ sint duæ rectæ CD , CE , facientes cum AB , duos angulos ACD , ACE , vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas CD , CE , inter se esse constitutas in directum, ita ut DCE , sit vna linea recta. Si enim non est recta DCE , producta DC , ad partes C , in directum & continuum cadet aut supra CE , ut sit recta DCE , aut infra CE , ut sit recta DCG . Si cadit supra, cum AC , consistat super rectam DCE ,^a fient duo anguli ACD , ACE , duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo anguli ACD , ACE , æquales duobus rectis;^b & omnes recti sunt inter se æquales. Quare duo anguli ACD , ACE , duobus angulis ACD , ACE , erunt æquales. Ablato igitur communi angulo ACD ,^c remanebunt anguli ACE , ACE , inter se æquales, pars & totum, quod est absurdum. Non igitur recta DC , producta cadet supra CE ; Sed neque infra cadet. Eadem enim ratione probarentur anguli ACE , ACG , æquales. Igitur DC , producta eadem efficietur, quæ CE ; proptereaque si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

Est hac propositio precedentis conuersa. In ea enim probatum fuit, si DCE , sit recta, angulos ACD , ACE , duobus esse rectis æquales; In hac verò demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis æquales, rectas DC , EC , esse vnā lineam rectam.

EX PROCLO.

RECE Euclides addidit in propositione hac (Et non ad easdem partes.) Quoniam, ut ait Porphyrius, fieri potest, ut ad punctum aliquod linea data ad easdem partes duæ lineæ ducantur facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non constituent vnā lineam, eò quòd non ad diuersas sint ductæ

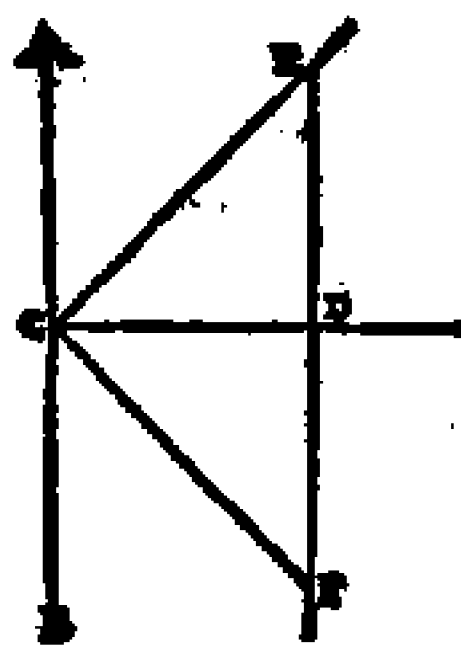
a 11. primi.

b 9. primi.

c 11. primi.

d 3. primi.

e 4. primi.



partes. Sic enim punctum C , in linea AB , datum. Ducatur CD ,^a perpendicularis ad AB ,^b dimidaturque rectus angulus ACD , bisariam per rectam CE . Deinde ex D , quolibet puncto rectæ CD ,^c ducatur DE , perpendicularis ad CD , secans rectam CE , in E . Producta autem ED , ad partes D ,^d sumatur DF , equalis rectæ DE , & ducatur recta FC . Quoniam igitur latera ED , DC , trianguli EDC , equalia sunt lateribus FD , DC , trianguli $FD C$, utrumque utrique, & anguli D , ipsis contenti æquales, nempe recti;^e erit basis EC , basi CF , equalis, & angulus ECD , angulo $FC D$. Sed angulus ECD , dimidium est recti. (Est enim rectus ACD , diuisus bisariam.) Igitur & $FC D$, dimidium erit recti. Quare CF , cum AC , facit angulum ACF , constantem ex recto & dimidio recti; Facit autem CE , cum eadem AC , angulum ACE , dimidium etiam recti; Duo igitur anguli ACF , ACE , quos ad easdem partes faciunt rectæ CF , CE , cum AB , æquales sunt duobus rectis: Et tamen CF , CE , non sunt vna linea recta, propterea quòd non sunt ductæ ad diuersas partes, sed ad easdem.

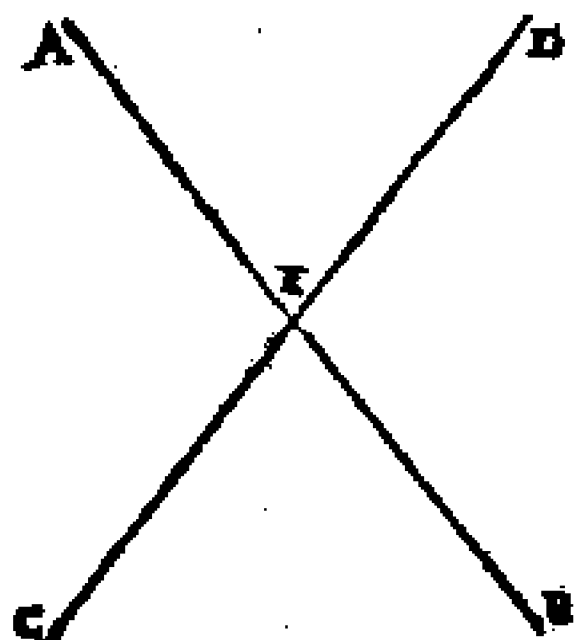
15.

THEOR. 8. PROPOS. 15.

Si duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

a 13. primi.

b 13. pron.



SECENT se duæ rectæ AB , CD , in puncto E , vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E , inter se esse æquales, angulum videlicet AED , angulo $BE C$, & angulum AEC , angulo $BE D$. Quoniam recta DE , consistit super rectam AB ,^a erunt duo anguli AED , DEB , æquales duobus rectis. Rursus quia recta BE , super rectam CD , consistit, erunt eadem ratione duo anguli CEB , $BE D$, duobus rectis æquales. Cum igitur^b omnes recti anguli inter se sint æquales: erunt duo anguli AED , DEB , duobus angulis DEB , $BE C$, æquales. Dempto igitur

igitur communi angulo DEB , ϵ remanebit angulus AED , angulo $BE C$, æqualis. Eadem ratio- ^{a 3. pron.}
ne confirmabitur, angulos AEC , BED , inter se æquales esse. Nam duo anguli AEC , CEB , ^{b 13. primi.}
duobus sunt rectis æquales, æquales erunt duobus quoque angulis DEB , $BE C$, qui duobus re-
ctis sunt æquales. Ablato igitur angulo communi $BE C$, ϵ remanebunt anguli AEC , BED , æ- ^{c 3. pron.}
quales inter se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

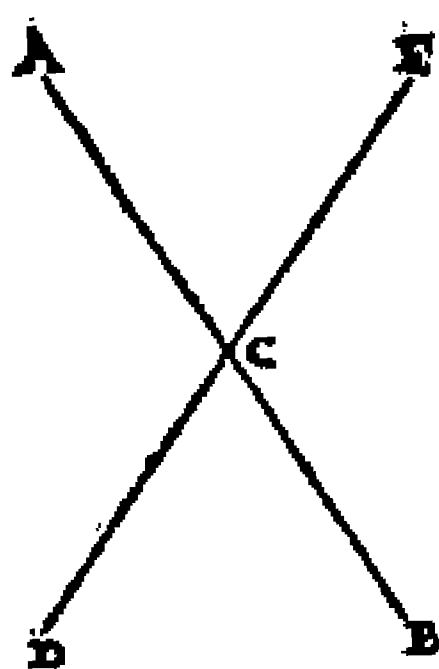
COROLLARIUM I.

Euclides colligit ex demonstratione huius theoremat, (ex sententia Procli, quo-
niam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas lineas rectas se mutuò secantes ef-
ficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demon-
stratione ostensum fuit, tam duos angulos AED , DEB , quàm duos AEC , CEB , duobus esse
rectis æquales, per 13. proposit. Omnes igitur quatuor anguli ad E , constituti, aequipollent bñ
duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

COROLLARIUM II.

Eadem ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos,
quoscunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E , alia lineæ
quoslibet educantur, diuidentur solummodò illi quatuor anguli ad E , constituti in plurimas
partes, ^a quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli aqua- ^{a 19. pron.}
les sint quatuor rectis, ex primo corollario, erunt quoque omnes alij simul sumpti quatuor
tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano cir-
cumsians æquivalere quatuor rectis angulis, ut multi authores asserunt: quia omnes anguli,
qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modò
constat, quoslibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æ-
quales quatuor rectis.

EX PROCLÒ.

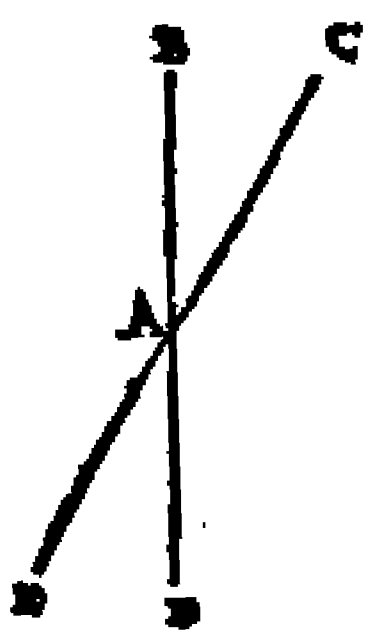


Si ad aliquam rectam lineam, ad eiusq; signum, duæ rectæ lineæ non
ad easdem partes sumptæ angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ
rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.

Ex puncto C , recta AB , in diuersas partes egrediantur duæ rectæ CD , CE , facien-
tes angulos ACE , BCD , inter se æquales: Vel etiam duos ACD , BCE . Dico duas CD ,
 CE , efficere vnâ lineam rectam. Quoniam enim angulus ACE , æqualis est angulo
 BCD ; addito communi angulo BCE , ^b erunt duo anguli ACE , ECB , duobus angulis ^{b 2. pron.}
 DCB , BCE , æquales: Sed ^c anguli ACE , ECB , sunt æquales duobus rectis. Igitur & ^{c 13. primi.}
duo DCB , BCE , duobus erunt rectis æquales. Quamobrem CD , CE , ^{d 14. primi.}
rectæ. Hoc autem, ut vides, conuersum est propositionis decimaquintæ.

EX PELETARIO.

Si quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æ-
quales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi & continuū coniunctæ.



Ex puncto A , quatuor lineæ eductæ AB , AC , AD , AE , faciant duos angulos oppo-
sitos BAE , CAD , inter se æquales: Item duos BAC , DAE , inter se æquales. Dico tam
 BA , AD , facere vnâ lineam rectam, quàm CA , AE . Quoniam æquales sunt anguli
 BAE , CAD , si æquales illis addantur anguli BAC , DAE , ^e erunt duo anguli BAE , ^{e 1. pron.}
 BAC , æquales duobus angulis CAD , DAE . Tam ergo illi, quàm hi dimidium sunt
quatuor angulorum circa punctum A , consistentium: At hi quatuor æquales sunt qua-
tuor rectis, per secundum corollarium præcedentis propositionis. Igitur duo anguli
 BAE , BAC , æquales sunt duobus rectis; ^f atque adeò CA , AE , vnâ efficiunt lineam ^{f 14. primi.}
rectam. Eodem pacto ostendetur, duas BA , AD , vnâ rectam efficere lineam. Nam
eadem ratione erunt duo anguli BAE , EAD , æquales duobus angulis DAC , CAB . Qua-

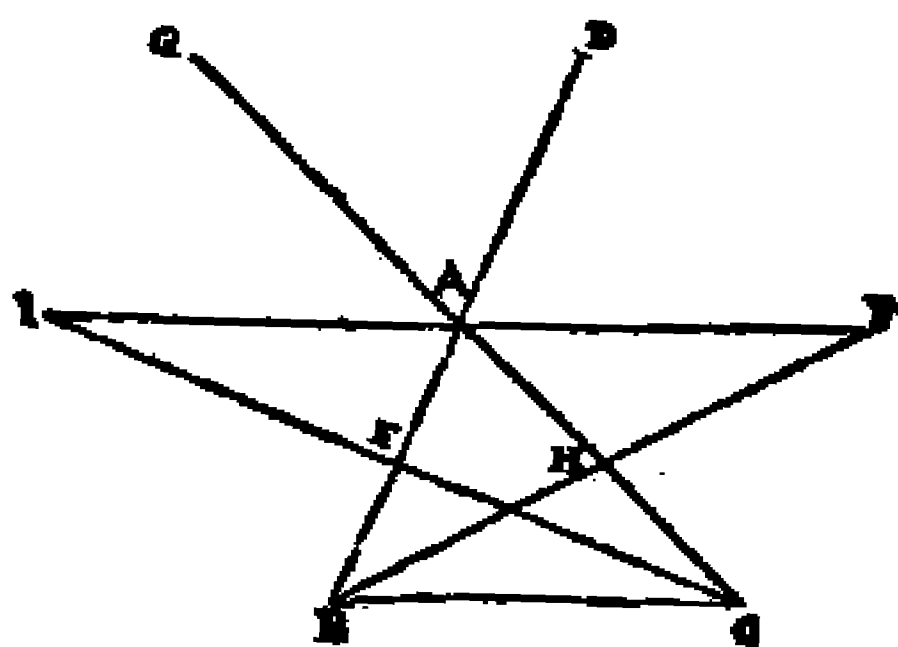
re, ut prius, concludetur propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri
nequit. Nos tamē demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.

16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est.

a 10. primi.
b 3. primi.

c 15. primi.
d 4. primi.



e 15. primi.

TRIANGVLI ABC, latus BA, producatu ad D. Dico angulum externum DAC, maiorem esse interno, & opposito ACB, itemque maiorem interno, & opposito ABC. Diuidatur enim AC, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta BEF, ita vt EF, ^b abscissa sit æqualis rectæ EB; ducaturq; recta FA. Quoniam igitur latera CE, EB; trianguli CEB, æqualia sunt lateribus AE, EF, trianguli AEF, vtrumque vtriusque, per constructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehensi, ^c inter se æquales, cum sint circa verticē E, & oppositi: Erit ^d basis CB, æqualis basi AF, & angulus ECB, angulo EAF: Est autem angulus DAC, externus maior angulo EAF, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus DAC, maior erit interno & opposito angulo ACB. Quod si latus CA, producatu ad G; & AB, diuidatur bifariam in H; extendaturque recta CHI, vt HL, æqualis sit rectæ HC, & ducatur recta IA: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum GAB, maiorem esse interno angulo, & opposito ABC: Est autem ^e angulus DAC, angulo GAB, æqualis, cum lineæ BD, CG, se mutuò secent in A. Igitur & angulus DAC, maior erit interno & opposito angulo ABC. Est autem idem angulus DAC, maior quoque ostensus angulo interno, & opposito ACB. Cuiuscunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.

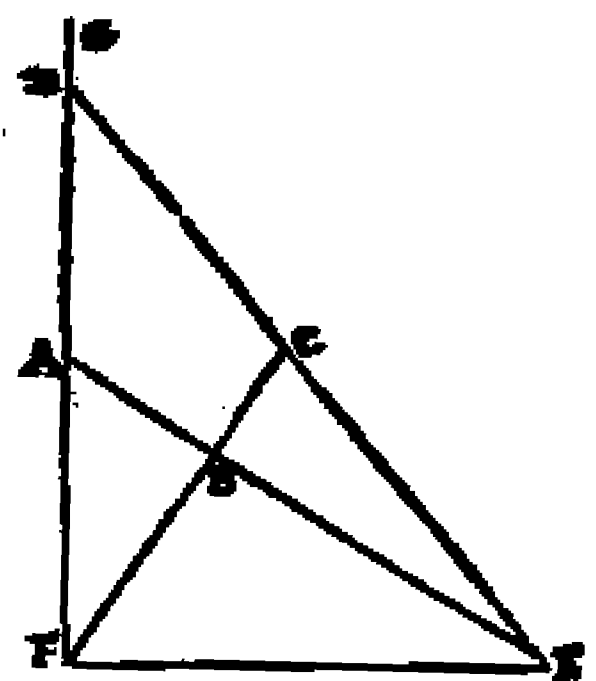
SCHOLIUM.

NON dixit Euclides, angulum externum DAC, maiorem esse angulo BAC, interno, qui sibi est deinceps, sed solum magnitudine superare vtrumlibet ACB, ABC, interiorum, sibiq; oppositorū: quoniam externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est; Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoque erit. Potest & esse minor, quando nimirum est acutus; Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit. Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit internum sibi deinceps; Hic enim necessario acutus existet. Quæ omnia facile colliguntur ex propos. 13. per quā angulus externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.

ID. verò, quod in scholio propos. 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propositionem nō posse conuerti; cum & vno latere figura quadrilatera producto, externus angulus quolibet interno, & opposito possit esse maior; hac ratione absoluemus.

a 16. primi.

b 16. primi.

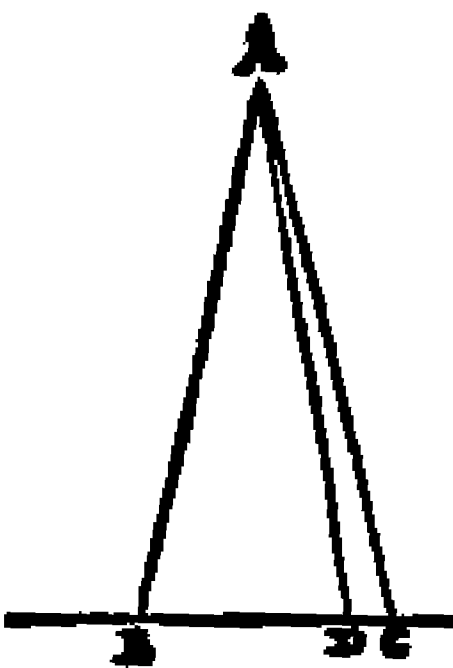


Si figura quadrilatera ABCD, cuius angulus BAD, obtusus, & ABC, rectus constitutatur, hac tamen lege, vt recta AB, DC, producta ad partes B, & C, in puncto E, nec non & recta DA, CB, ad partes A, & B, in puncto F, coeant. Quod quidem fiet, si constitutatur triangulum ADE, obtusangulum, & producta DA, versus A, ducatur ex quouis puncto F, ad AE, perpendicularis FB, secans latus DE, in C. Dico, si AD, producatu ad G, angulum externum CDG, maiorem esse quolibet trium interiorū BAD, ABC, BCD, sibi oppositorum. Cum enim ADE, triangulum sit, ^a erit angulus externus EDG, maior interno opposito DAE. Rursum cum DA, obtusus maior sit recto ABC, maior quoque multo erit EDG, ipse ABC. Postremo quia & in triangulo CDF, ^b angulus externus CDG, maior est interno, & opposito FCD; manifestum est, in quadrilatero ABCD, externum angulum CDG, maiorem esse interno, & oppositis BAD, ABC, BCD. Quam ob rem propos. hac 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocetur, vt demonstratum est.

EX PROCLO.

c 5. primi.
d 5. primi.

e 1. prion.



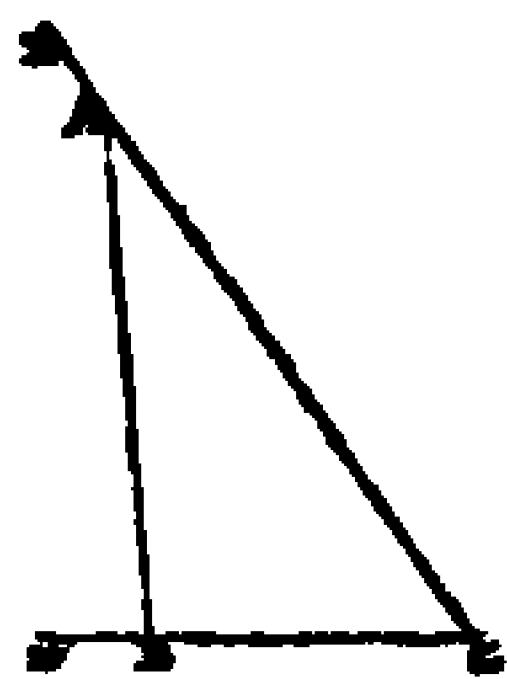
SEQUITVR ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnā eandemq; lineam rectam non posse duci plures lineas rectas, quā duas inter se æquales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam BC, tres lineæ rectæ æquales AB, AC, AD. Quoniam igitur latera AB, AC, sunt æqualia, ^c erunt anguli ACB, & ABC, æquales super basim BC. Rursum quia latera AB, AD, sunt æqualia, ^d erunt anguli ADB, & ABD, super basim BD, æquales. Quare cum vterque angulus ACD, & ADB, æqualis sit angulo ABC, ^e erit angulus ADB, æqualis angulo ACD, externus interno opposito, quod est absurdum, cum per hanc decimam sextam propositionem externus interno maior sit. Non ergo plures lineæ rectæ, quā duas, inter se æquales, ex A, ad BC, possunt duci. Quod est propositum.

THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 17.

17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.



SIT triangulum ABC: Dico duos angulos ABC, & ACB, minores esse duobus rectis: Item duos CBA, & CAB: Itemq; duos BAC, & BCA. Producantur enim duo quouis latera, nempe CB, CA, ad D, & E. Quoniam igitur ^a angulus ABD, externus maior est interno & opposito angulo ACB: si addatur communis angulus ABC, ^b erunt duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis ABC, ACB: ^c Sed ABD, ABC, æquales sunt duobus rectis. Igitur ABC, ACB, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli CBA, & CAB, minores duobus rectis. Nam cum angulus externus ABD, ^d maior sit angulo CAB, interno & opposito: ^e erunt, appositio communi angulo ABC, duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis CAB, CBA. Cum ergo ^f duo illi duobus rectis sint æquales, erunt huiusmodi

a 16. primi.

b 4. pron.

c 13. primi.

d 16. primi.

e 4. pron.

f 13. primi.

duo duobus rectis minores. Non secus ostendemus, duos BAC, BCA, duobus esse rectis minores. Cum enim angulus externus BAE, ^g maior sit interno & opposito angulo BCA: si apponatur communis angulus BAC, ^h erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA, BAC, maiores: ac proinde cum illi duo ⁱ sint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cuiuscunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

g 16. primi.

h 4. pron.

i 13. primi.

EX PROCLO.

A



HINC perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quam vnā. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam BC, duæ perpendiculares AB, AC. Erunt igitur in triangulo ABC, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum sint duo recti, quod est absurdum. ^a Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quam vna, ex A, ad BC, deduci possunt. Quod est propositum.

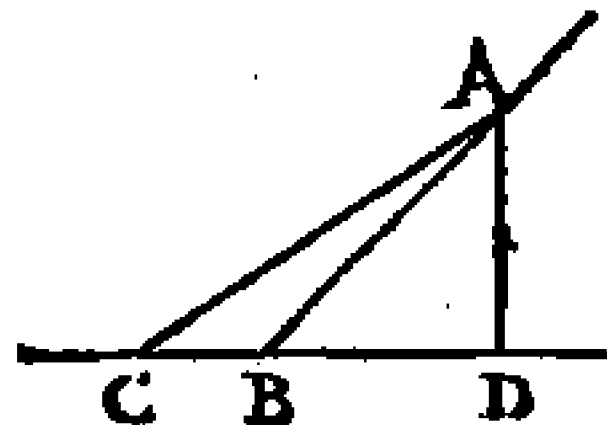
a 17. primi.

COROLLARIUM I.

CONSTAT enim ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus defin. 26. huius libri. Cum enim per hanc propositionē duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunque reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur.

COROLLARIUM II.

SEQVITVR etiam ex hac propositione, si linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum acutum, & obtusum alterū, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demissam cadere ad partes acuti anguli. Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtusum, demittaturq; ex puncto A, quocunque ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD. Nam si non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat, si fieri potest, perpendicularis AC, ad



partes anguli obtusi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB, obtusi, & rectus, in triangulo ABC, maiores sunt duobus rectis: ^b sed & duobus rectis sunt minores, quod est absurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli cadet.

b 17. primi.

COROLLARIUM III.

PARI ratione fit ex hac propositione manifestum, omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli isoscelis supra basin, esse acutos. Nam ^c cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in isoscele supra basin sint inter se æquales; ^d sintq; simul tam illi duo, quam hi duobus rectis minores; erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acutus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut maiores.

c 5. primi.

d 17. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 18.

18.

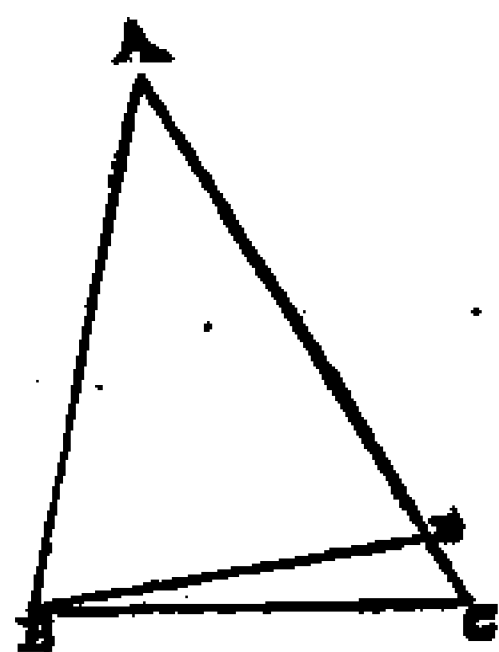
OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

a 3. primi.

b 5. primi.

c 16. primi.

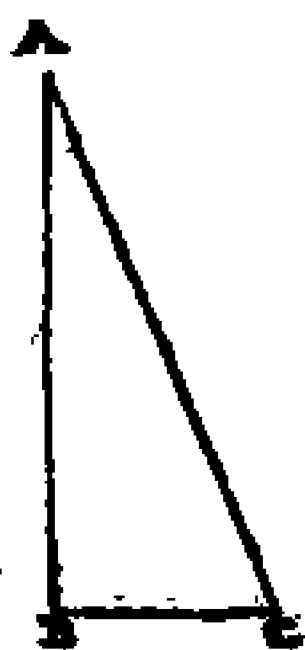
d 9. prop.



rem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.

IN triangulo ABC, sit latus AC, maius latere AB. Dico angulum ABC, subtensum à maiori latere AC, maiorem esse angulo ACB, qui à minori latere AB, subtenditur. Nam ex AC, auferatur AD, æqualis ipsi AB, & ducatur recta BD. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia sunt per constructionem, erunt anguli ABD, ADB, æquales. Est autē angulus ADB, maior angulo ACB. Igitur & angulus ABD, maior erit angulo ACB. Quamobrē cum angulus totus ABC, maior adhuc sit angulo ABD, erit angulus ABC, multo maior angulo ACB. Eadem ratione, si latus AC, maius ponatur latere BC, ostendes angulum ABC, maiorem esse angulo BAC; si nimirum ex CA, abscindatur linea æqualis ipsi CB, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.



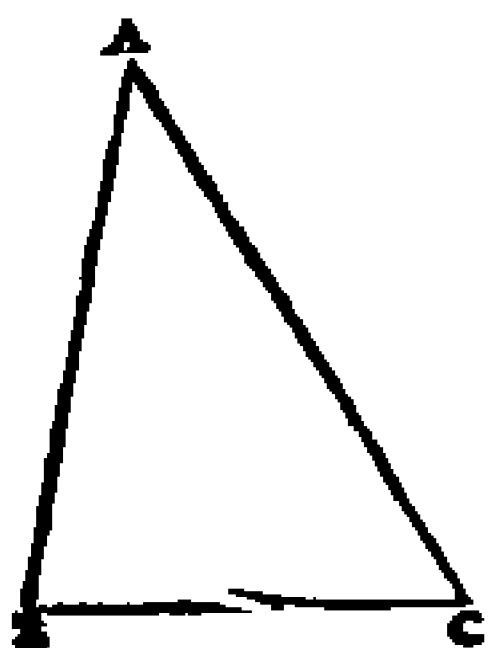
Ex hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales, ut monuimus definitione decimaquinta huius libri. Sit enim triangulum Scalenum ABC, cuius maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus AC, ponatur maius latere AB, erit, per hanc propositionem angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus verò A, & C, medium locum inter utrumque tenens.

18.

THEOR. 12. PROPOS. 19.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.

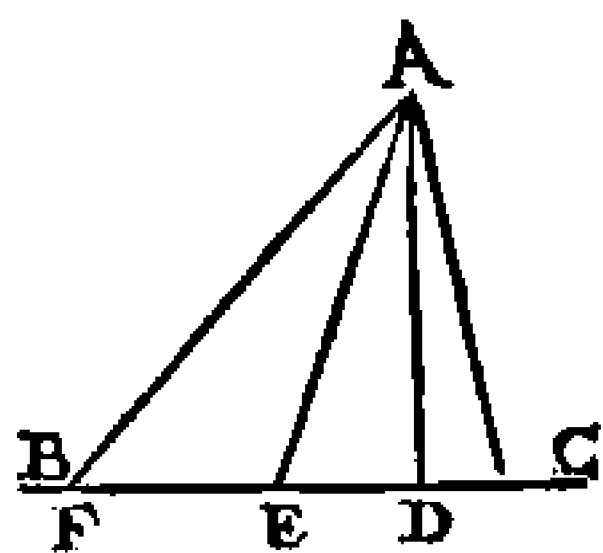
a 5. primi.



lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

IN triangulo ABC, angulus B, maior sit angulo C. Dico latus AC, subtendens maiorem angulum B, maius esse latere AB, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus AC, maius non est latere AB, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur AC, æquale esse ipsi AB, erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem & maior per hypothesein, quod est absurdum. Si verò AC, minus esse dicatur latere AB, erit angulus B, subtensus à minori latere AC, minor angulo C, subtenso à maiori latere AB; Ponitur autem maior, quod magis est absurdum. Latus igitur AC, cum neque æquale sit lateri AB, neque minus eo, erit maius. Eadem ratione probabitur, latus AC, maius esse latere BC, si angulus B, maior esse concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori

COROLLARIUM.



SEQUITUR ex hac propositione, omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, qua perpendicularis est, esse minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam BC, quocunque linea AD, AE, AF, & alia, quarum AD, sola sit perpendicularis ad BC, & nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam sola una perpendicularis duci possit, ut ex Proclo ad propositionem decimam sextam demonstravimus.

a 17. primi. Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli ADE, AED, sint duobus rectis minores, ponaturq; ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare^b maius erit latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas maiores esse recta AD: ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.

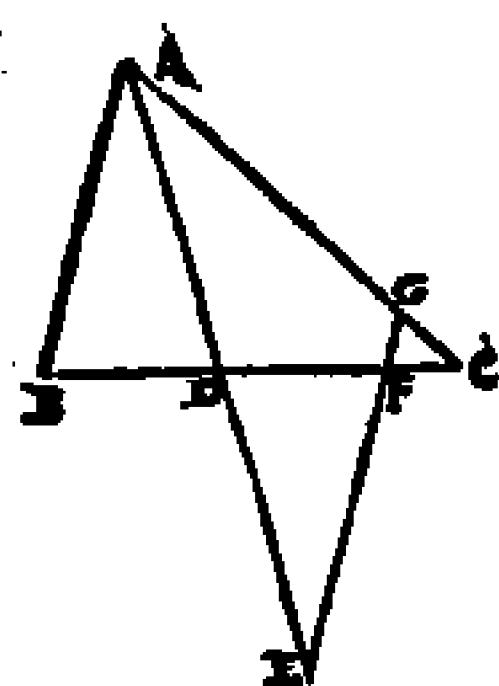
EX PROCLO.

POSSUMVS hoc idem theorema ostendere affirmativa demonstratione, sine adminiculo precedenti, si tamen prius demonstretur hoc sequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansque angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt.

erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus verò, quod cum minori.

TRIANGULI ABC , angulus BAC , diuidatur bifariam per rectam AD , que secet basin BC , in partes inæquales, maiusq; segmentum sit DC . Dico latus AC , maius esse latere AB . Producatur enim AD , ad E ,^a vt sit DE , equalis ipsi AD . Deinde ex maiori segmento DC , auferatur recta DF , equalis minori segmen-



to DB , & per F , ex E , extendatur recta EF G . Quoniam igitur latera AD , DB , trianguli ADB , equalia sunt lateribus ED , DF , trianguli EDF , verumque vtrique, per constructionem; sunt autē &^b anguli ADB , EDF , dictis lateribus contenti equal-
les; ^c Erunt bases AB , & EF , equalēs, & angulo BAD , angulus FED , equalis: Est ve-
rò & angulus CAD , angulo BAD , equalis per hypothēsin; Igitur ^d anguli GAE ,
 GEA , trianguli AGE , equalēs erunt, & ideoq; latera AG , EG , equalia erunt. Est au-
tem recta AC , maior quam AG ; quare & AC , maior erit, quam EG . Et quia EG ,
maior est, quam EF , erit & AC , multo maior, quam EF . Cum igitur demonstratum
sit, rectam EF , equalē esse rectæ AB , erit AC , latus maius latere AB , quod erat
ostendendum.

a 3. primi.

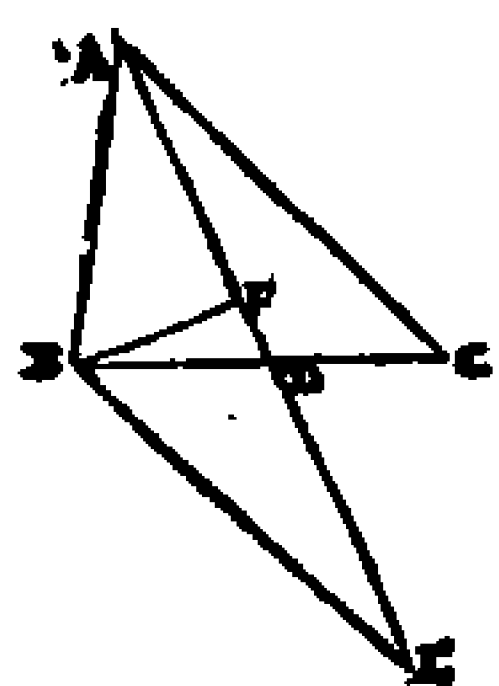
b 15. primi.

c 4. primi.

d 1. pron.

e 6. primi.

Hoc ostēso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo ABC , angulus ABC , maior sit angulo C . Dico latus AC , maius esse latere AB . Diuisa enim recta BC , (super quam constituti sunt dicti an-
guli inæquales,) bifariam in D ; ex A , per D , extendatur recta AD E ,^f vt sit DE , equalis ipsi AD ; ducaturq;



recta BE . Quoniam igitur latera AD , DC , trianguli ADC , equalia sunt lateribus ED ,
 DB , trianguli EDB , verumq; vtriq; per constructionē, & sunt autē & anguli ADC ,
 EDB , dictis cōprehēsi lateribus equalēs: ^h Erunt bases AC , & BE , equalēs, angulusq;
 ACD , angulo EBD , equalis: Et quia angulus ACD , ponitur esse minor angulo ABC ,
erit & angulus EBD , minor eodē angulo ABC ; Ideoq; angulus ABE , per rectam
 BD , diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam secetur per rectam BF , cadet
 BF , supra BD , eo quod angulus ABD , maior est angulo EBD . Quia verò EF ,ⁱ maior
est, quam ED , & ED , posita est equalis ipsi AD , erit EF , maior, quam AD ,^k Sed ad
huc AD , maior est, quam AF ; Multo igitur maior erit EF , quam AF . Itaq; recta
recta BF , diuidens angulum ABE ; bifariam, secat basin AE , inæqualiter in F , estque

f 3. primi.

g 15. primi.

h 4. primi.

i 9. pron.

k 9. pron.

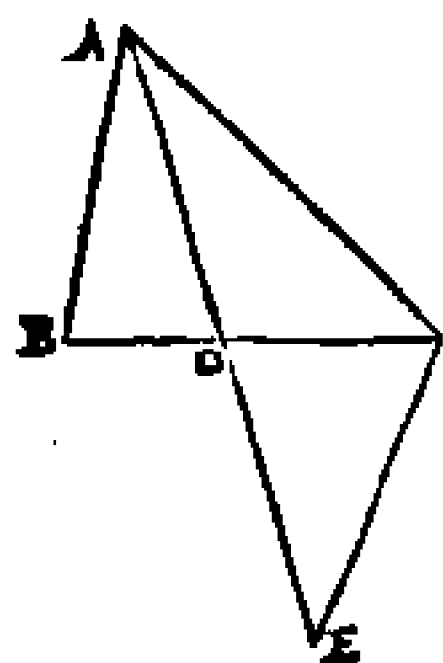
maius segmentum EF , minus autem AF ; erit per theorema à Proclo proxime demonstratum, latus BE , maius latere AB . Ostensum est autem BE , equalē esse lateri AC . Igitur & AC , latus latere AB , maius erit. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

Hæc propositio 19. conuersa est propositionis 18. vt perspicuum est. Campānus autem duarum istarum propositionum ordinem prorsus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contra: Quatum vtramque ostendit ducendo ad id, quod fieri nequit, cum tamen Euclides propositionem 18. directe, & ostē-
sive confirmauerit, vt ex dictis liquidò constet.

POTERIMVS quoq; Theorema à Proclo demonstratum conuerrere hoc modo.

Si trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsius contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusq; segmentum erit prope maius latus.



Dico latera AB , AC , trianguli ABC , sint inæqualia; AC , maius, & AB , minus. Recta autē AD , diuidens angulum BAC , bifariam, secet basin BC , in D . Dico segmen-
tum DC , maius esse segmento DB . Si enim non est maius, erit vel equalē, vel minus. Si
dicatur esse equalē, producatur AD , ad E ,^l vt DE , equalis sit ipsi AD , ducaturq; recta
 EC . Quoniam igitur latera AD , DB , equalia sunt lateribus ED , DC , verumque vtri-
que; AD , videlicet ipsi ED , per constructionem, & DB , ipsi DC , per hypothēsin aduer-
sarij: Sunt autem & ^m anguli ad D , dictis lateribus contenti equalēs: ⁿ Erit basis AB ,
basi EC , equalis, & angulo BAD , angulus CED . Positus autem est & angulo BAD ,
angulus CAD , equalis: Igitur & anguli CED , CAD , equalēs erunt: ^o Ideoq; latus AC ,
lateri EC , equalē. Cum igitur ostēsum sit lateri EC , equalē esse quoq; latus AB ,^p erūt

l 3. primi.

m 15. primi.

n 4. primi.

o 6. primi.

p 1. pron.

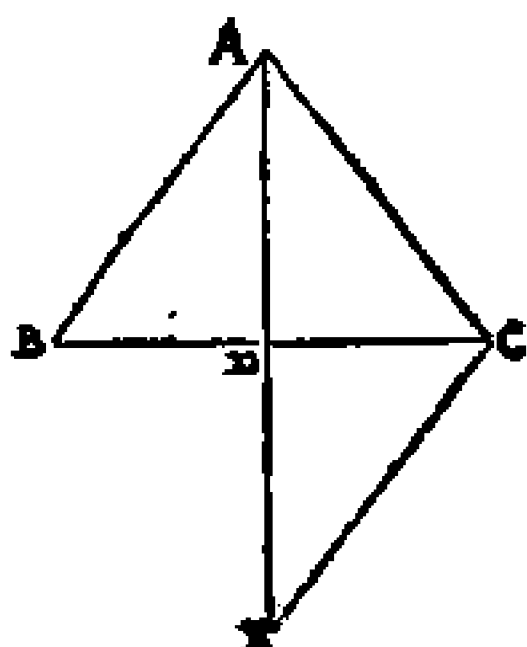
latera AC , AB , equalia: quod est absurdū, quia AC , maius ponebatur, quam AB . Non erit igitur segmentum
 DC , segmento DB , equalē. Quod si DC , dicatur esse minus, & DB , maius: erit, per theorema Praeli, latus
 AB , maius latere AC : Ponebatur autem minus, quod multo magis est absurdum. Non igitur minus erit DC ,
quam DB . Quare erit necessario maius.

Eodem modo demonstrari poterit hoc theorema.

Si trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet, erunt duo latera angulum continentia inter se æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

PRIMUM recta AD , secans angulum BAC , bifariam diuidat quoque basin BC , in D , bifariam. Dico

a 15. primi.
b 4. primi.
c 6. primi.



lateralia AB, AC , inter se equalia esse. Hoc autem demonstrabimus eadem ratione, qua in precedenti theoremate ostensum fuit, latus AC , equalis esse lateri AB , si DC , segmentum segmento DB , equalis ponatur, dummodo figuram eodem modo construas. Cum enim latera AD, DB , equalia sint lateribus ED, DC :^a & anguli ad D , dictis lateribus contenti aequales;^b erunt bases AB, EC , aequales, & angulus CED , angulo BAD , hoc est, angulo CAD , equalis. Quare^c AC , equalis erit ipsi EC , hoc est, ipsi AB .

DEINDE sint latera AB, AC , equalia, & recta AD , secans basin BC , in D , dividat angulum BAC , bifariam. Dico segmentum DC , equalis esse segmento DB . Cum enim latera AD, AB , equalia sint lateribus; AD, AC , verumque utriusque, &

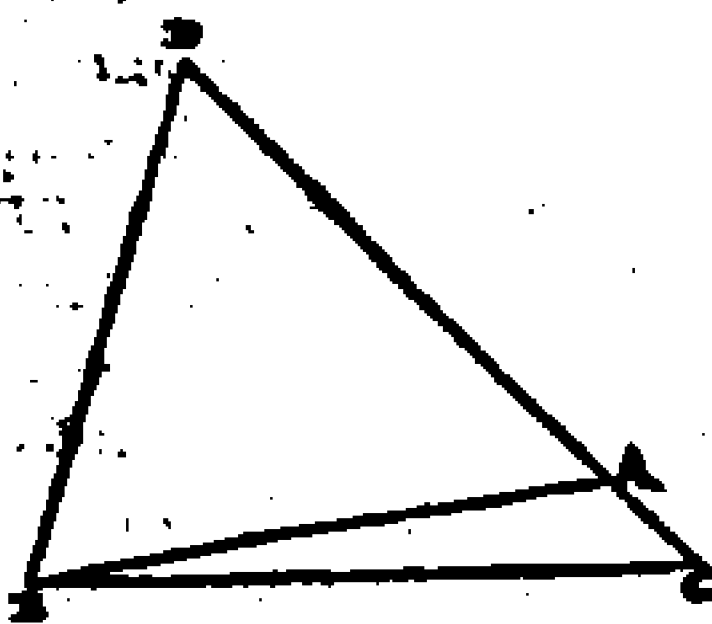
anguli quoque ad A , contenti dictis lateribus aequales per hypothesein,^d erunt bases BD, DC , aequales.

20.

THEOR. 13. PROPOS. 20.

OMNIS trianguli duo latera reliqua sunt maiora, quomodocunque assumpta.

a 3. primi.
b 5. primi.
c 9. primum.
d 19. primi.



e 2. primi.

posita ex AB, AC , & linea composita ex AD, AC , erunt quoque latera AB, AC , simul maiora latere BC . Eodem modo demonstrabitur, quolibet alia duo latera maiora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliqua sunt maiora, &c. Quod demonstrandum erat.

EX PROCLO.

ALITER & hoc theorema, à familiaribus Heronis & Porphyry demonstratur, nullo latere producto, hac ratione: Sit probandum duo latera AB, AC , trianguli ABC , maiora esse latere BC . Dividatur angulus BAC , illis lateribus contentus^a bifariam per rectam AD . Quoniam igitur trianguli CDA , latus CD , protractum est ad B ,^b

a 9. primi.
b 16. primi.



c 19. primi.
d 16. primi.

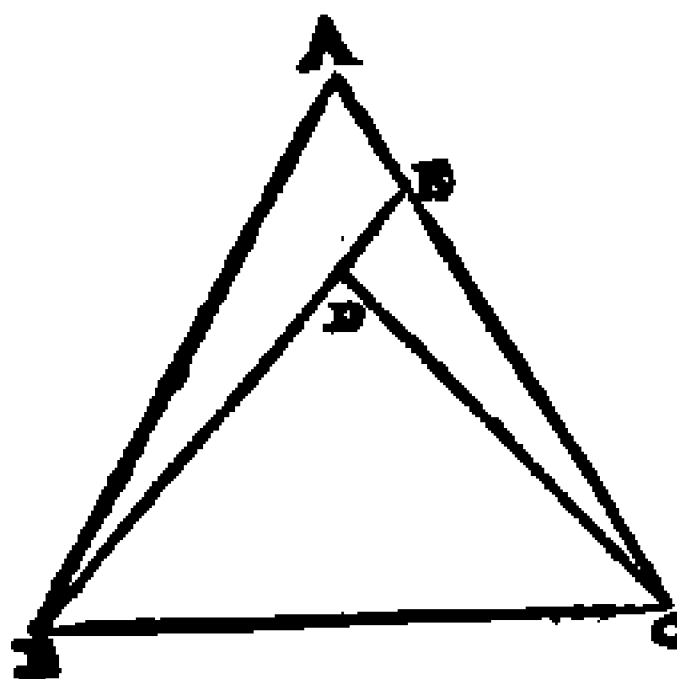
erit angulus externus BDA , maior interno & opposito CAD : Igitur & maior angulo BAD . Quare in triangulo ABD , latus AB , maiori angulo ADB , oppositum^c maius erit latere BD , quod minori angulo BAD , opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus AC , maius esse, quam CD , quia angulus CDA ,^d maior est angulo BAD , hoc est, angulo CAD , &c. Quamobrem duo latera AB, AC , maiora erunt latere BC . Eademque est ratio quorumcumque duorum laterum, si angulus ipsis comprehensus bifariam secetur.

21.

THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interiùs constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.

a 20. primi.
b 4. primum.
c 20. primi.
d 4. primum.
e 16. primi.



IN triangulo ABC , super extremitates B, C , lateris BC , intra triangulum constituentur duæ rectæ lineæ BD, CD , in puncto D , concurrentes. Dico BD, CD , simul minores esse duobus lateribus BA, CA , simul; At verò angulum BDC , maiorem angulo BAC . Producatur enim altera linearum interiorum, nempe BD , ad punctum E , lateris CA . Quoniam igitur in triangulo BAE , duo latera BA, AE ,^a maiora sunt latere BE , si addatur commune EC ,^b erunt BA, AC , maiora, quam BE, EC . Rursus quia in triangulo CED , duo latera CE, ED ,^c maiora sunt latere CD ; si commune apponatur DB ,^d erunt CE, EB , maiora, quam CD, DB . Ostensum verò iam fuit, AB, CA , maiora esse, quam BE, EC . Multò igitur maiora erunt BA, CA , quam BD, CD , quod primò proponebatur. Præterea, quoniam angulus BDC ,^e maior est angulo DEC , externus interno; & angulus DEC , angulo BAC , maior quoque est, eandem ob causam: Erit angulus BDC , multò maior angulo BAC ; quod secundò proponebatur. Si igitur super trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.

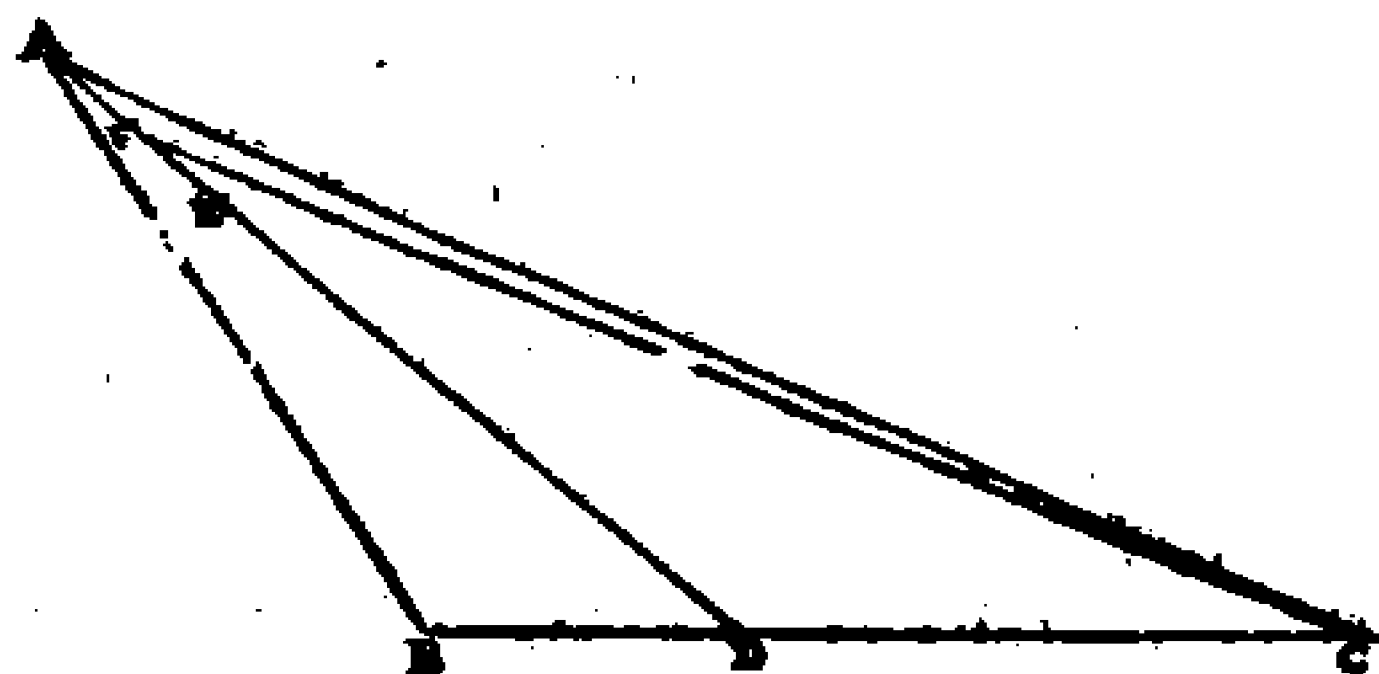
SCHO.

SCHOLIUM.

Quæ uero rectæ Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum constitutas, duci debere ab extremitatibus unius lateris, aperte intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum constitui posse duas lineas super unum latus circa angulum rectum, vel obtusum, quarum quidem una ab extremitate dicti lateris, altera uero à quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, quæ maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulo scaleno eodem modo super maximum latus duas rectas intra triangulum constitui posse, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLIO.

Si γ triangulum habens exempli gratia angulum ABC , obtusum. Dico ab extremo C , & à quouis puncto, nempe à D , prope aliud extremum B , lateris BC , duci posse duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ maiores sint duobus lateribus BA , AC . Ducatur enim recta DA : Et quoniam in

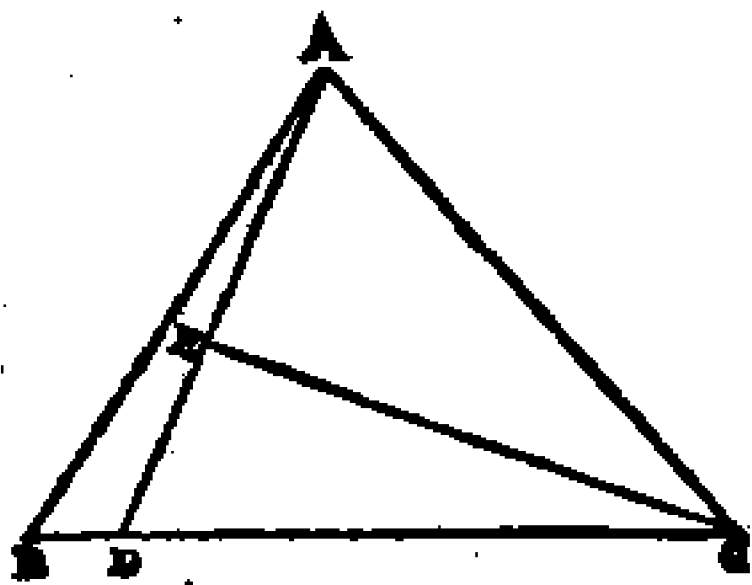


triangulo ABD , duo anguli ABD , ADB , ^a 17. primi. minores sunt duobus rectis; Ponitur autem ABD , maior recto, nempe obtusus; erit ADB , minor recto, ideoque minor angulo ABD . Quare latus AD , ^b maius erit latere AB . Ex DA , ^c b 19. primi. abscindatur recta DE , equalis rectæ AB ; Et ^c 3. primi. reliqua linea AE , ^d bifariam diuidatur in F . ^d 10. primi.

Si igitur ab extremo C , ad F , recta ducatur CF , erunt duæ lineæ rectæ constitutæ CE , DF , intra triangulum maiores duobus lateribus BA , AC . Quoniam enim in triangulo AFG , duæ latera AF , FG , ^e maiora sunt latere AG ; Est autem recta AF , ipsi FE , equalis, ^e 20. primi. per constructionem; erunt CF , FE , maiores quoque latere CA . Si igitur equalia addantur ED , & AB , fient rectæ CF , FD , ^f maiores lateribus CA , AB . Quod est propositum. Quod si ad F , ex B , extremo recta ducere-

tur, essent duæ rectæ constitutæ CF , BF , minores duobus lateribus CA , AB , ut Euclides demonstrauit.

Rursum sit triangulum scalenum ABC , cuius latus maximum BC , minimum AB . Ex BC , ^g auferatur BD , equalis rectæ AB , & ducatur AD , recta, ad cuius punctum quod-



libet, ut ad E , ab extremo C , recta ducatur CE . Constituta igitur erunt intra triangulum duæ lineæ CE , DE , quæ minorem angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera AB , AC . Cum enim duo latera BA , BD , equalia sint, ^h erunt duo anguli BAD , BDA , æquales: Sed BDA , ^h 5. primi. angulus maior est angulo CED . Maior igitur erit & angulus BAD , ⁱ 16. primi. angulo CED . Quare multo maior erit totus angulus BAC , angulo CED ; Quod est propositum. Rectæ igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere ab extremis punctu unius lateris, ut minores quidem sint duobus reliquis trianguli lateribus, maio-

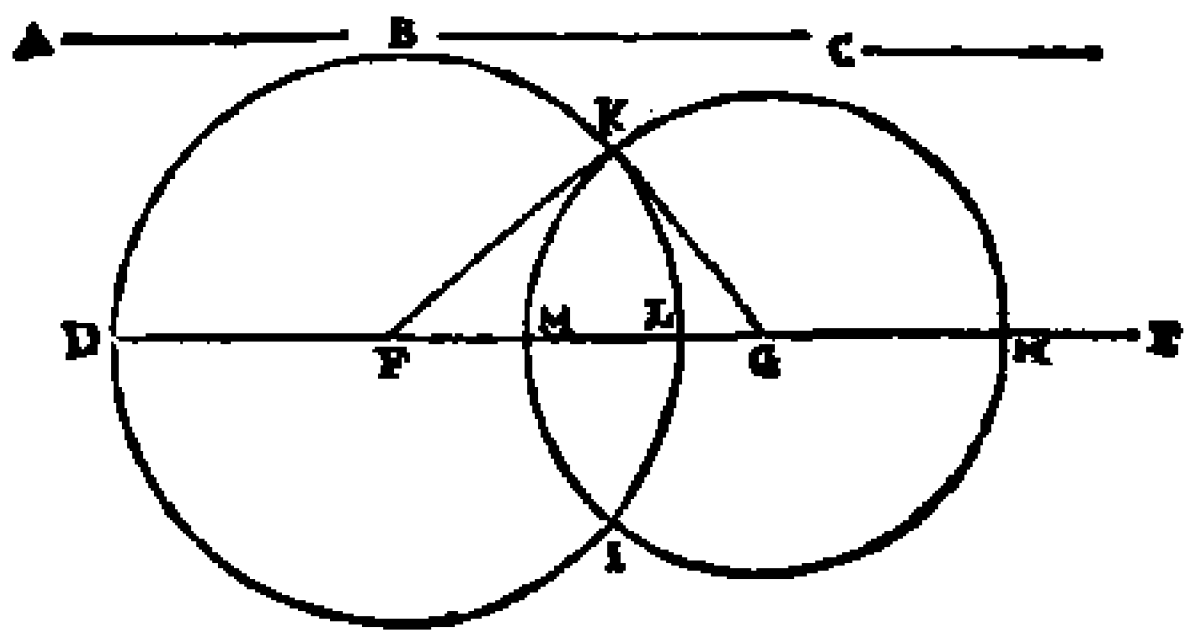
rem uero complectantur angulum. Aliàs enim propositio uera non esset, ut iam est demonstratum.

Uero de constitutione duarum linearum intra triangulum, quæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus, plura ostendemus ex Pappo ad propos. 34. huius libri.

PROBL. 8. PROPOS. 22.

21.

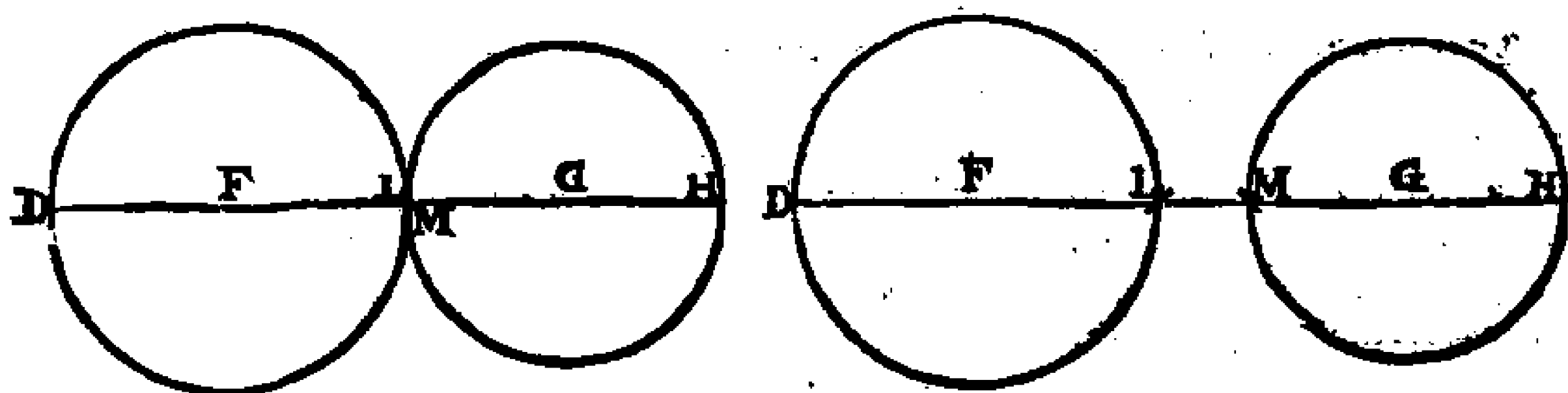
Ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam uniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.



Tres lineæ rectæ datæ sint A , B , & C , quarum quælibet duæ reliquæ sint maiores, (Aliàs ex ipsis non posset constitui triangulum, ut constat ex proposit. 20. in qua ostensum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo esse maiora.) oporteatque construere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex assumpta recta quouis DE , infinitæ magnitudinis ^a ab-

23. primi.

scindatur recta DF , æqualis rectæ A ; Et ex reliqua FE , recta FG , æqualis rectæ B ; & ex reliqua GE , recta GH , æqualis rectæ C . Deinde centro F , intervallo uero FD , circulus describatur DIK : Item centro G , intervallo aut GH , alius circulus describatur HIK , qui necessario priorẽ secabit in punctis I , & K , (cũ enim duæ FD , GH , maiores ponantur rectæ FG , si ex FE , sumatur recta FL , æqualis ipsi FD : & ex GD , recta GM , æqualis ipsi GH , cadet punctum M , inter L , & D .



a 15. defin.
b 1. pron.

Si namq; M, caderet in L, punctum, essent GL, FL, hoc est, GH, & FD, æquales rectæ FG. Si vero M, caderet inter G, & L, essent eadem duæ FL, GM, hoc est, DF, GH, minores rectæ FG; quorū utrumq; est cōtra hypothesin. (Id quod ex appositis figuris apparet.) ex quorū quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta F, G, rectæ KF, KG, factumque erit triangulum FGK, cuius latera dico æqualia esse datis rectis A, B, & C. Cū enim recta FK, æqualis sit rectæ FD, & recta A, per constructionem eidem FD, æqualis^b erit latus FK, rectæ A, æquale. Rursus quia GK, æqualis est ipsi GH, & recta C, eidem GH, erit quoq; latus GK, rectæ C, æquale. Positum autē fuit per constructionem, reliquum latus FG, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera FK, FG, GK, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt. Constituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.

PRAXIS.

Sit *ac* r *r* recta DE, æqualis cuicumque rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basin; Deinde ex D, ad intervallum rectæ A, arcus describatur: Item ex E, ad intervallum rectæ C, alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ DF, EF, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus DF, æquale rectæ A, propter intervallum ipsius A, assumptum: & latus EF, ipsi C, propter assumptum intervallum C; DE, vero latus acceptum est rectæ B, æquale, ab initio.

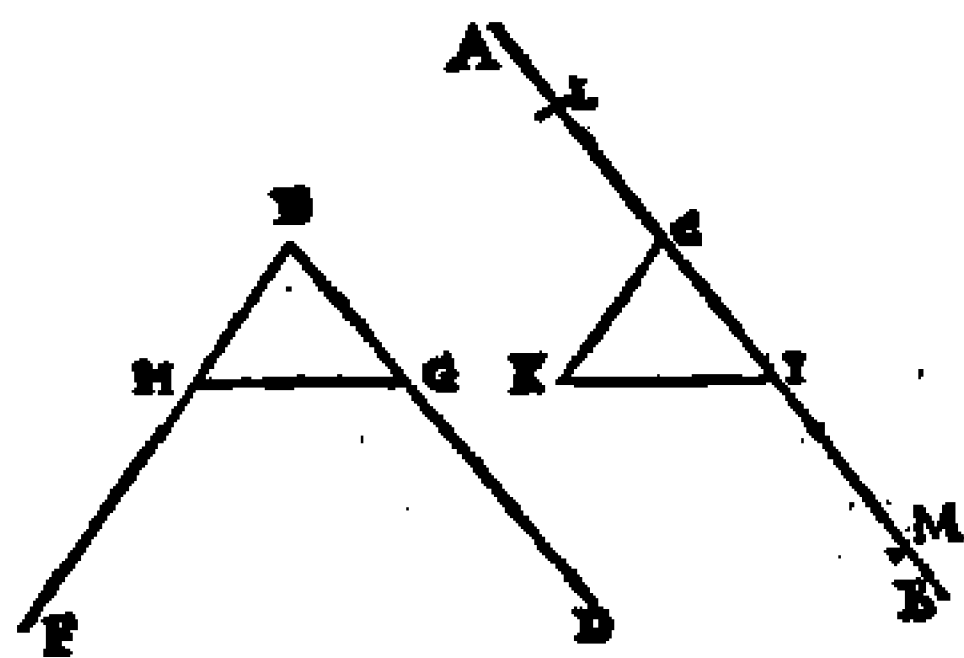
SCHOLIUM.

Hæc arte cuicumque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulosque, & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namque triangulum quodcunque ABC, cui æquale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas AB, BC, CA, quarum quilibet duæ maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam DE, æqualem uni lateri, nempe BC; & ex D, intervallum lateris AB, arcum describo, item alium ex E, intervallum reliqui lateris CA, qui priorem secet in F, &c.

PROBL. 9. PROPOS. 23.

AD datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

a 22. primi.



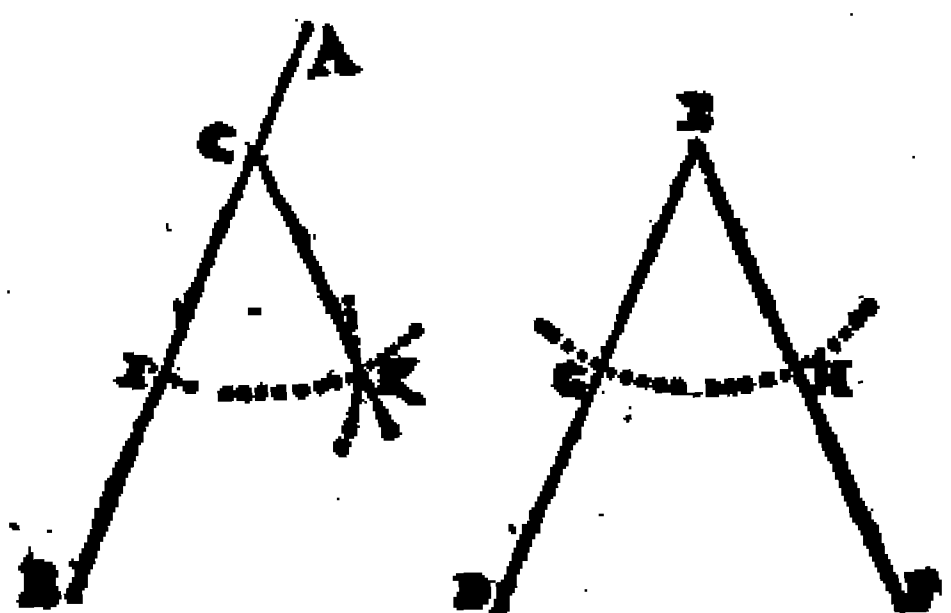
b 1. primi.

secantes sese in K, &c.) Dico angulum C, æqualem esse angulo E. Quoniam enim duo latera CL, CK, æqualia sunt duobus lateribus EG, EH, utrumque utrique, & basis IK, basi GH, per constructionem; ^b erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat.

PRAXIS.

Non differt huius problematis praxis ab illa, quam in precedente problemate tradidimus; propterea quod triangulum constituere oportet æquale alteri triangulo, ut angulus dato angulo æqualis exhibeatur, ut perspicuum est. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data AB, punctumque in ea C, & angulus

gulus datus E. Centro igitur E, & intervallo quouis arcus describatur GH; Eodemque intervallo ex centro C, arcus describatur IK, sumaturque beneficio circini arcus IK, arcui GH, equalis. Recta enim ducta CK, faciet angulum ad C, aequalem angulo E. Nam si ducerentur recte IK, GH, essent ipsa aequales, propterea quod circino non variato, utramque distantiam IK, GH, accepimus. Cum ergo & duo latera IC, CK, aequalia sint duobus GE, EH, ob aequalia intervallos, quibus arcus sunt descripti, erunt anguli ICK, GEH, a 8. primi.



CAETERVM quare ratione ex puncto extra datam rectam proposito recta duci possit, quae cum data recta angulum constituat dato angulo rectilineo aequalem, docebimus ad propositionem 31. huius libri.

CAETERVM quare ratione ex puncto extra datam rectam proposito recta duci possit, quae cum data recta angulum constituat dato angulo rectilineo aequalem, docebimus ad propositionem 31. huius libri.

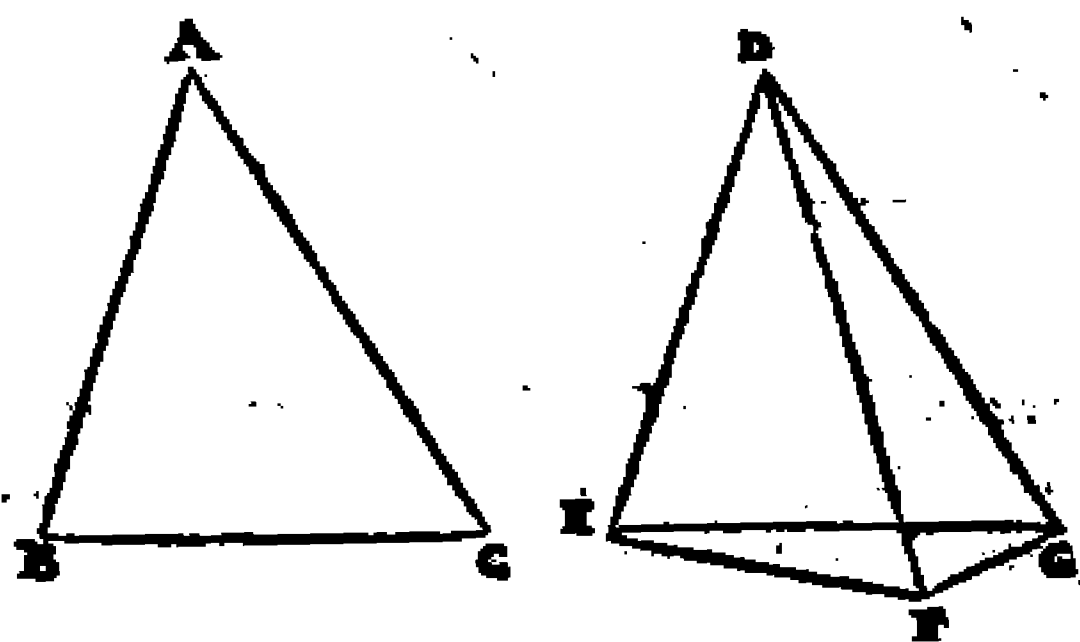
THEOR. 13. PROPOS. 24.

24.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habuerint, utrumque utrumque, angulum verò angulo maiorem sub aequalibus rectis lineis contentum: Et basi basi maiorem habebunt.

Duo latera AB, AC, trianguli ABC, aequalia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, utrumque utrumque, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF: Angulus verò A, maior sit angulo EDF. Dico basin BC, maiorem esse base EF. Ad lineam enim DE, ad eiusque punctum D, constitua-

a 23. primi.



tur angulus EDG, aequalis angulo A: (cadetq; recta DG, extra triangulum DEF, cum angulus EDF, minor ponatur angulo A,) ponaturque DG, aequalis ipsi DF, hoc est, ipsi AC. Ducta deinde recta EG, cadet ea aut supra rectam EF, aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primum supra EF, ducaturq; recta FG. Quia ergo latera AB, AC, aequalia sunt lateribus DE, DG, utrumque utrumque, & angulus A, aequalis angulo EDG, per constructionem: Erit basis BC, basi EG, aequalis. Rursus quia duo latera DE, DG, inter se sunt aequalia, erunt anguli DFG, DGF, aequales. Est autem angulus DGF, maior angulo EGF. Igitur & angulus DFG, eodem angulo EGF, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo EGF. In triangulo igitur EFG, maius erit latus EG, latere EF. Est autem ostensum EG, aequale esse ipsi BC. Maior igitur erit quoque BC, quam EF. Quod est propositum.

b 3. primi.

c 4. primi.

d 5. primi.

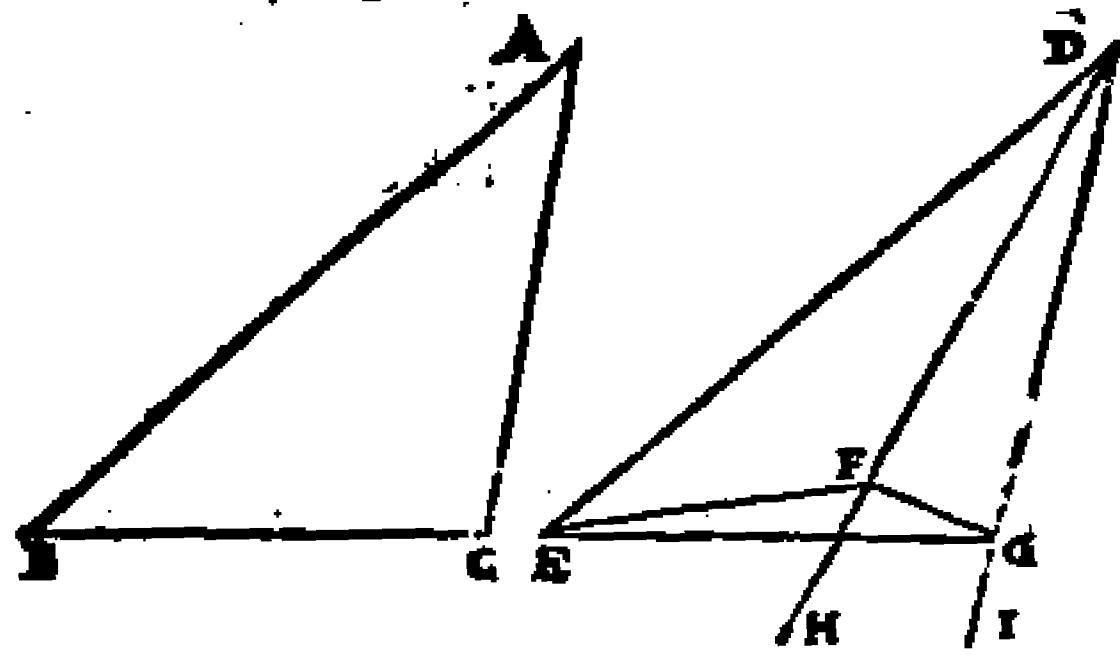
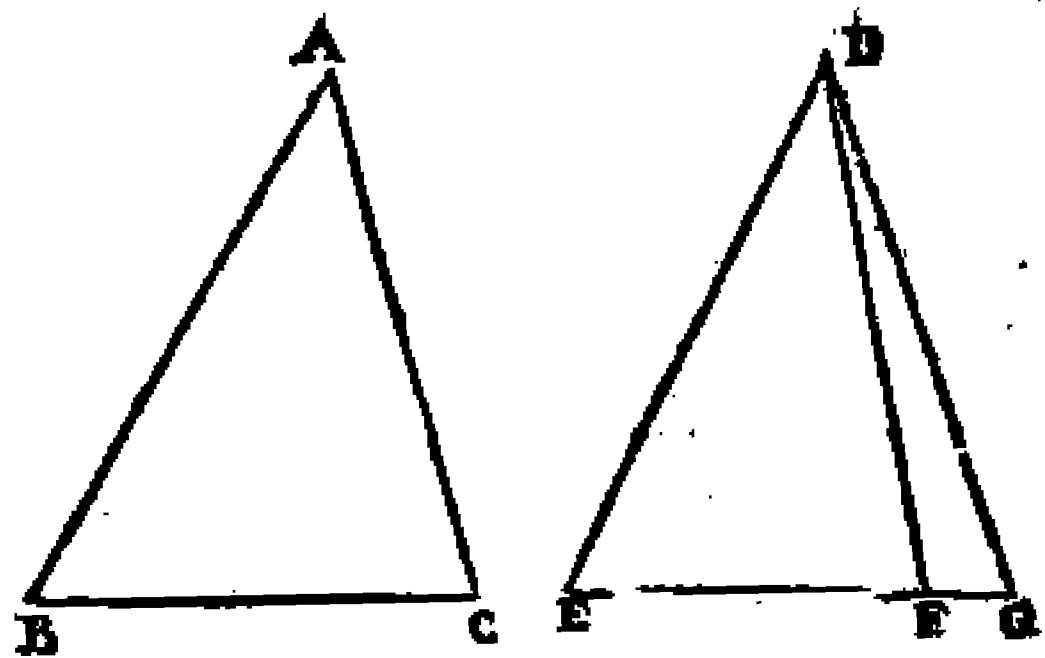
e 9. pronun.

f 19. primi.

CADAT deinde EG, in ipsam EF. Ex quia rursus, ut prius, basis EG, & aequalis est basi BC: Et EG, maior quam EF, erit & BC, maior, quam EF, quod est propositum.

g 4. primi.

h 9. primi.



CADAT tertio EG, infra EF, producatq; rectae DE, DG, usque ad H, & I, & ducatur recta FG. Erit autem rursus, ut prius, basis EG, basi BC, aequalis. Deinde quia duo latera DE, DG, aequalia sunt inter se, per constructionem, & erunt anguli GFH, FGI, infra basin FG, aequales. Est autem angulus FGI, maior angulo FGE. Igitur & angulus GFH, eodem angulo FGE, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo FGE. In triangulo ergo EFG, maius erit latus EG, latere EF. Est autem ostensum EG, aequale esse ipsi BC. Maior igitur erit quoque BC, basi basi EF. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

i 4. primi.

k 5. primi.

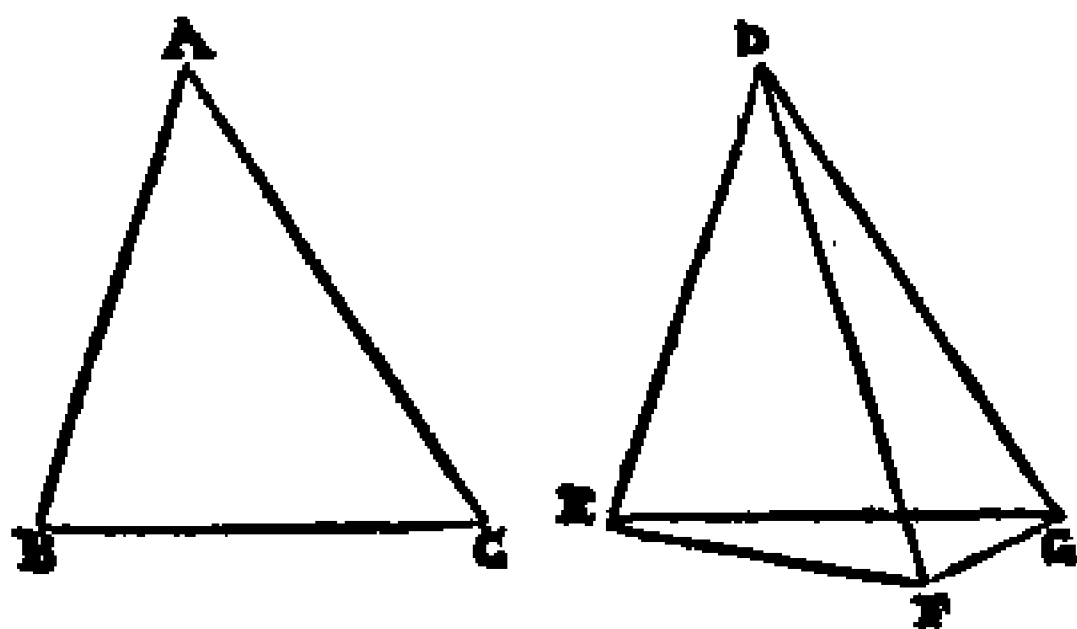
l 9. pron.

m 19. primi.

SCHOLIUM.

Si quis forte roget, cur in 4. proposit. Euclides ex eo quod duo latera unius trianguli aequalia sint duobus lateribus alterius trianguli, utrumque utrumque, & anguli contenti dictis lateribus aequales, concluderet non solum aequalitatem basium, verum etiam triangulorum, & reliquorum angulorum: hic autem ex eo, quod duo latera unius trianguli aequalia sint duobus lateribus alterius trianguli, utrumque utrumque, anguli verò lateribus illis comprehensi inaequales, colligat tantum inaequalitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic respondendum est, necessarium id ab Euclide peritissimo Geometra esse factum. Nam ex antecedente huius theoremati semper consequitur basium inaequalitas, ita ut basis illius trianguli

cuius angulus contentus lateribus assumptis est maior, superet basin alterius, cuius angulus minor existit, ut demonstratum est: non autem necesse est, triangulum illud maius hoc esse. Ut enim clarissime ex Proclo demonstrabimus ad propositionem 37. huius primi libri, Triangulum maiorem habens angulum aliquando æquale est triangulo minori habenti angulum, aliquando verò minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in unum inferri ex eo, quod angulus unus trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiam maius esse, cum modò æquale sit, modò minus, & modò maius. Idem dici potest de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus ABC , minor est semper angulo DEF ; cum angulus DEG , (q. æqualis est per 4. propos. angulo ABC),^a minor sit eodẽ angulo DEF , pars toto. In



a 9. pron.

b 16. primi.

DEF , æqualis, per 4. propositionem. At verò angulus ACB , minor est angulo DFE , cū angulus DFE ,^b maior sit angulo DGF , externus interno, & opposito, & angulus DGF , æqualis sit angulo ACB . In tertia denique

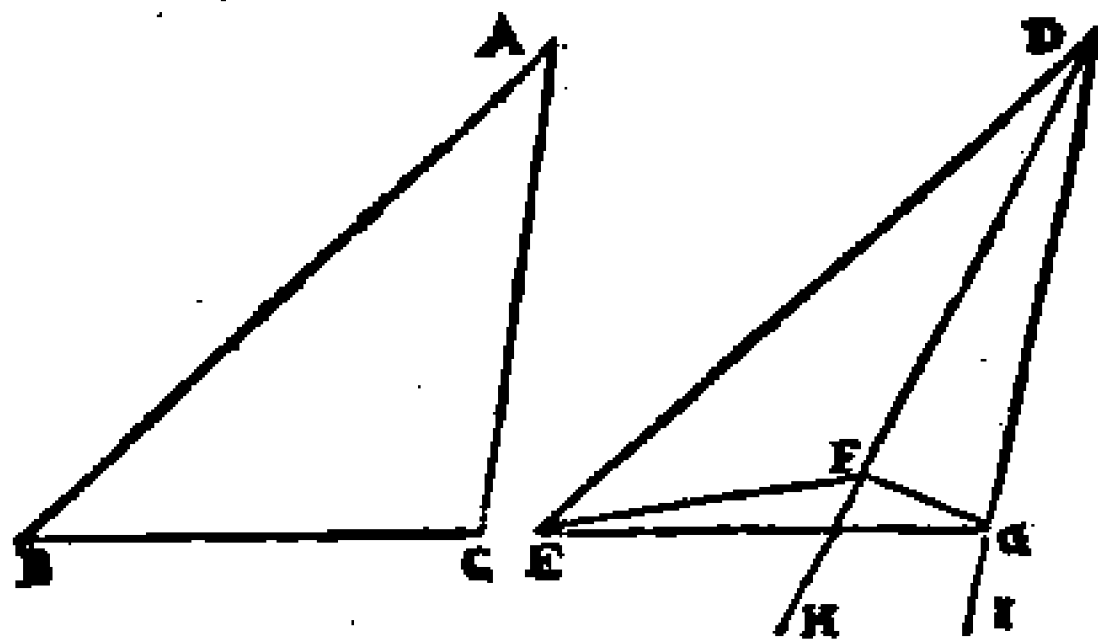
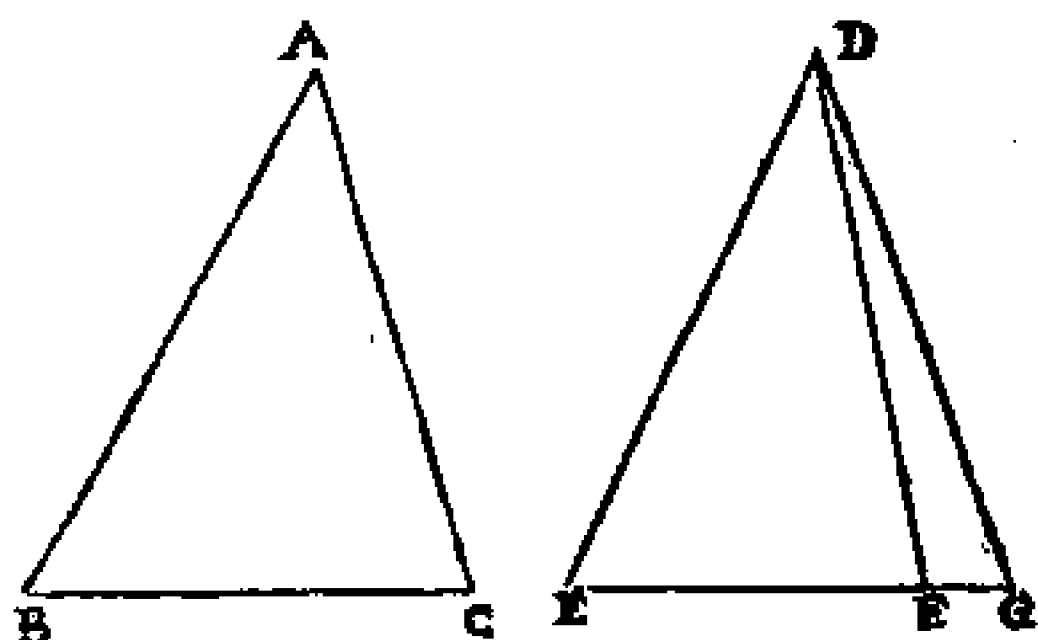
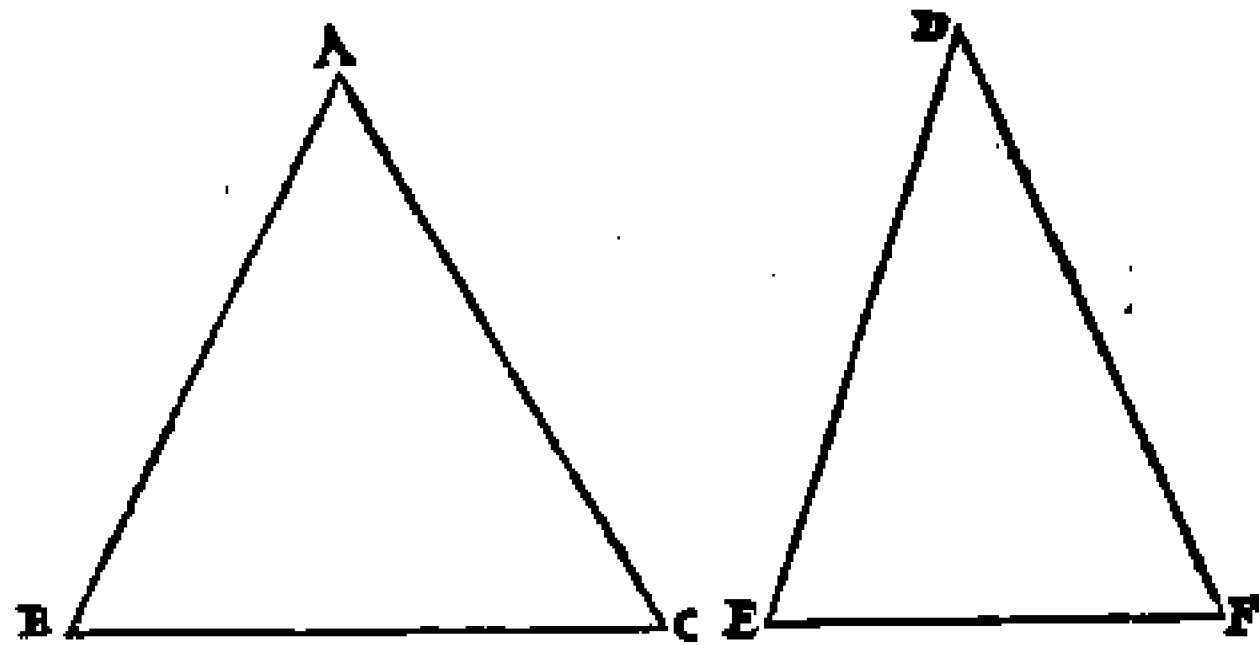


figura angulus ABC , maior quidem est angulo DEF , propterea quod angulus DEG , (æqualis existens per 4. propos. angulo ABC),^c maior est eodẽ angulo DEF , totũ partẽ: Sed angulus ACB , minor est angulo DFE . Nam si recta EF , producatũr secans rectam DG , in K , fiet angulus DFE ,^d maior angulo DKE , externus interno: Est autem & angulus DKE , maior adhuc angulo DGE , externus quoque interno, & opposito. Multò igitur maior erit angulus DFE , angulo DGE , qui per 4. propos. æqualis est angulo ACB . Quod etiã constat ex 2. parte propos. 21. Nam interiores lineæ DF, EF , continent angulum maiorem angulo DGE , quem exteriores lineæ DG, EG , continent. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modò unus altero sit maior, modò minor, & modò æqualis.

25.

THEOR. 16. PROPOS. 25.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin verò basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.



a 4. primi.

b 24. primi.

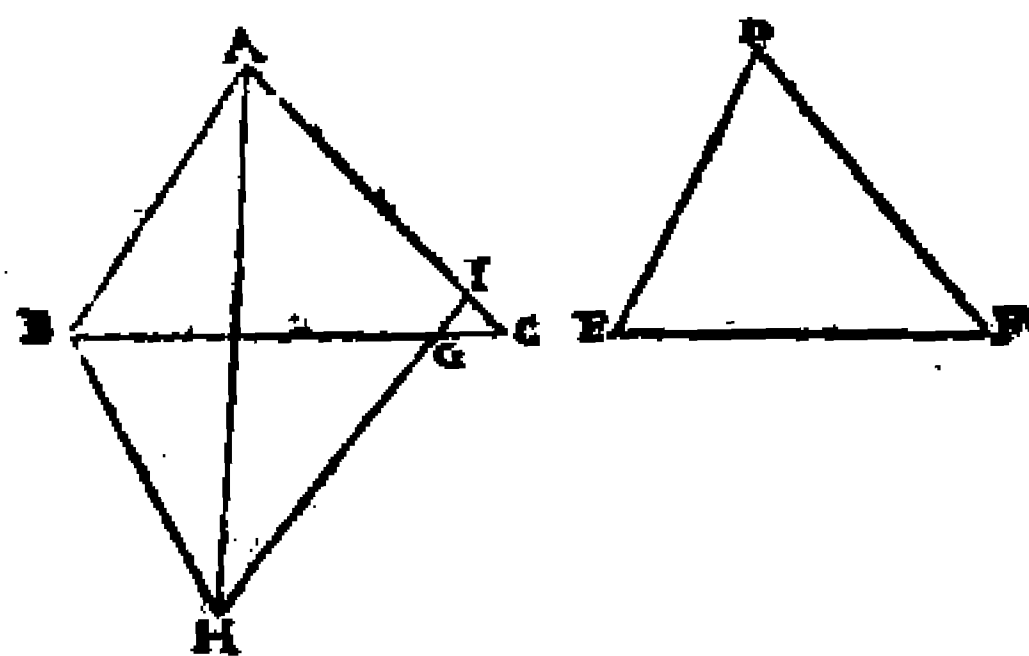
basis BC , base EF , maior: Si verò angulus A , dicatur esse minor angulo D , erit, ppter æqualitatem laterum circa istos angulos, basis EF ,^b maior base BC , qd' magis est absurdũ, cū EF , ponatur esse minor q̃ BC . Quare angulus A , cū neq. possit æqualis esse angulo D , neq. minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

THEOREMA hoc conuersum est præcedenti. In eo enim ex maiori angulo demonstratũ est, basin illi respondentem esse maiorem: In hoc autẽ ex maiori basi ostensũ fuit, angulum illi respondentẽ maiorem esse. Differunt autẽ plurimũ hac duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quæ explicata sunt propos. 18. & 19. Nam in 19. demonstratũ est, in vno eodemq. triangulo maiori angulo maius latus respondere: At in 24. idem ostensũ fuit in duobus diuersis triangulis, quorum duo latera vnius æqualia sunt duobus lateribus alterius, &c. Idemq. discrimen reperies inter propos. 18. & 25.

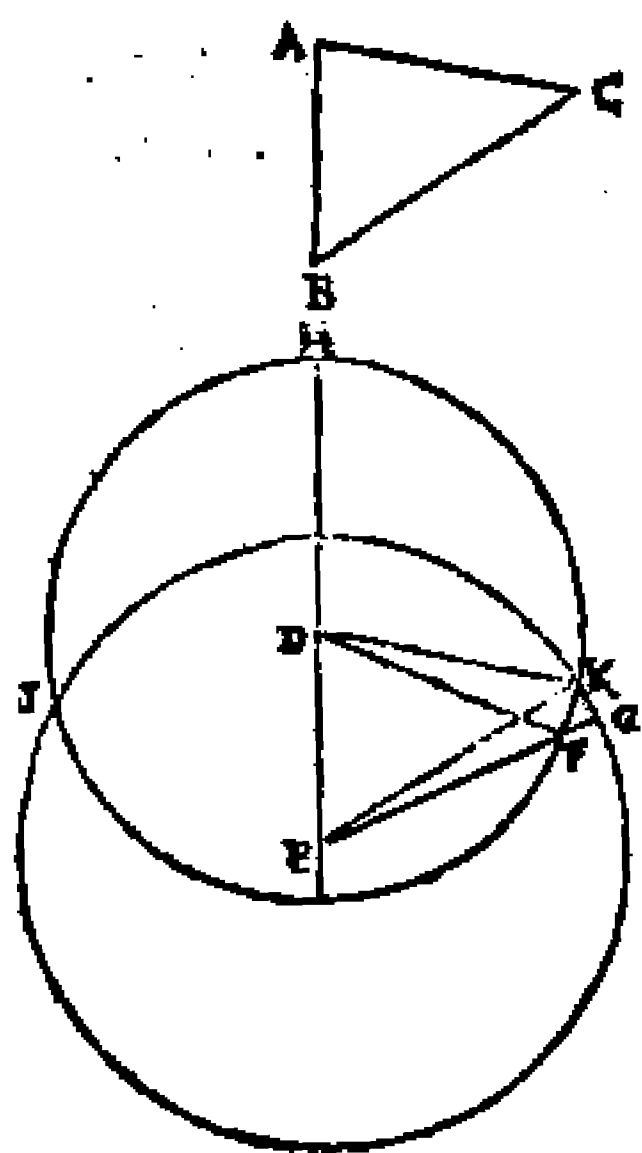
MEKE-

HEXAGONVS Alexandrinus, vt ait Proclus, demonstrat hoc idem theorema ostensum, hac ratione: Positum



eisdem triangulo, ex base maiore BC, abscindatur recta BG, equalis basi minori EF. Fiat quoque angulus GBH, equalis angulo DEF, & sit BH, equalis ipsi BA, atque adeo ipsi DE. Ducta autem recta linea AH, ducatur quoque recta per G, ex H, secans AC, in I. Quoniam igitur duo latera BA, BH, equalia sunt, erunt anguli BAH, BHA, aequales. Rursus quia latera BG, BH, equalia sunt lateribus EF, ED, utrumque utrique, & angulus GBH, equalis angulo DEF, per constructionem; erit basis HG, basi DF, atque adeo ipsi AC, equalis, angulusque GHB, angulo EDF. Et quoniam recta HI, maior est, quam HG, qua est ostensa equalis ipsi AC, erit quoque maior HI, quam AC: Sed AC, & maior est adhuc, quam AI. Multo ergo maior erit HI, quam AI. Quare angulus IAH, maior erit angulo IHA. Additis igitur duobus angulis BAH, BHA, qui ostensi sunt aequales, fiet totus angulus BAC, toto angulo BHG, maior: Sed angulus BHG, demonstratus fuit equalis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus BAC, angulo D, quod est propositum. Quod si quando contingat, rectam AH, cadere extra triangulum, auferendi erunt anguli aequales BAH, BHA, &c. ut reliquum fiat angulus BAC, maior reliquo angulo BHG. Quando autem recta AH, per punctum B, transit, nihil addendum erit, aut demendum, ut perspicuum est.

HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonstrat: Positum eisdem triangulis, producaturs basis minor EF, ad G, ut sit EG, equalis basi maiori BC. Deinde centro D, intervallo autem DF, describatur circulus, producatursque ED, ad H, in circumsferentiam. Quoniam igitur DH, est equalis ipsi DF, erit quoque DH, equalis ipsi AC. Additis igitur equalibus DE, AB, fient AC, AB, simul aequales toti HE: Sed AC, AB, simul maiores sunt, quam BC, atque adeo quam EG. Igitur & HE, maior erit, quam EG. Quare circulus descriptus ex centro E, & intervallo EG, interfecabit rectam EH, atque adeo circumsferentiam prioris circuli in I, & K, punctis; ad K, autem ducantur recte DK, EK. Et quoniam duo latera AB, AC, equalia sunt duobus lateribus DE, DK, utramque utrique, (est enim DK, equalis ipsi DF, per definitionem circuli, DF, autem possumus est equalis lateri AC,) & basis BC, basi EK, equalis: (cum EK, equalis sit ipsi EG, per definitionem circuli; EG, vero recta per constructionem facta sit equalis basi BC.) Erit angulus BAC, angulo EDK, equalis: Sed angulus EDK, maior est angulo EDF. Quare & angulus A, angulo EDF, maior existet. Quod est propositum. Atque hac demonstratio generalior est priore, cum omnibus casibus conveniat.

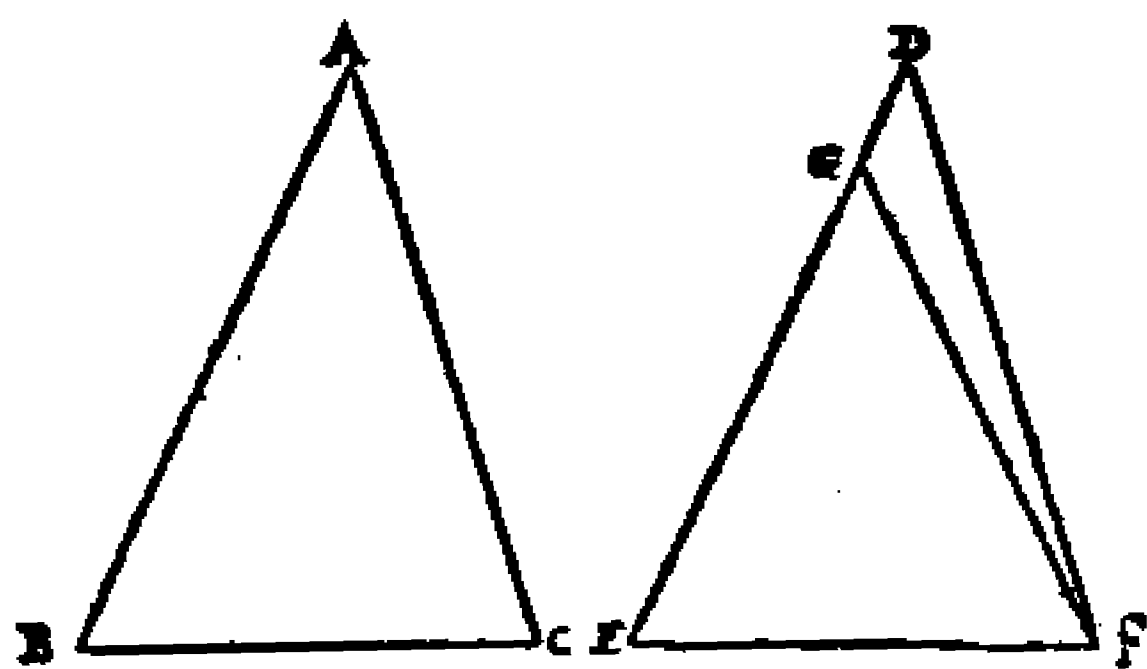


THEOR. 17. PROPOS. 26.

161

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, utrumque utrique, vnumque latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales duobus angulis E, & EFD, trianguli DEF, uterque utrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi EFD.



Sitque primò latus BC, quod angulis B, & C, adiacet, lateri EF, quod angulis E, & EFD, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera AB, AC, reliquis lateribus DE, DF, æqualia esse, utrumque utrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, eam nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur, reliquumque angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus AB, non est æquale lateri DE, sit DE, maius, à quo abscindatur recta linea EG, æqualis rectæ AB, ducaturque recta GF. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus GE, EF, utrumque utrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin: Erit angulus C, æqualis angulo EFG. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo EFD. Quare & angulus EFG, eidem angulo EFD, æqualis erit, pars totius. Quod est absurdum. Nō igitur latus AB, inæquale lateri DE, sed æquale. Quāobrem cum latera AB, BC, æqualia sunt lateribus

a 3. primi:
b 23. primi:
c 3. primi:

d 5. primi:

e 4. primi:

f 9. primi:

g 9. primi:

h 18. primi:

i 4. primi:

k 3. primi:

l 15. primi:

m 2. primi:

n 20. primi:

o 8. primi:

p 9. primi:

a 3. primi:

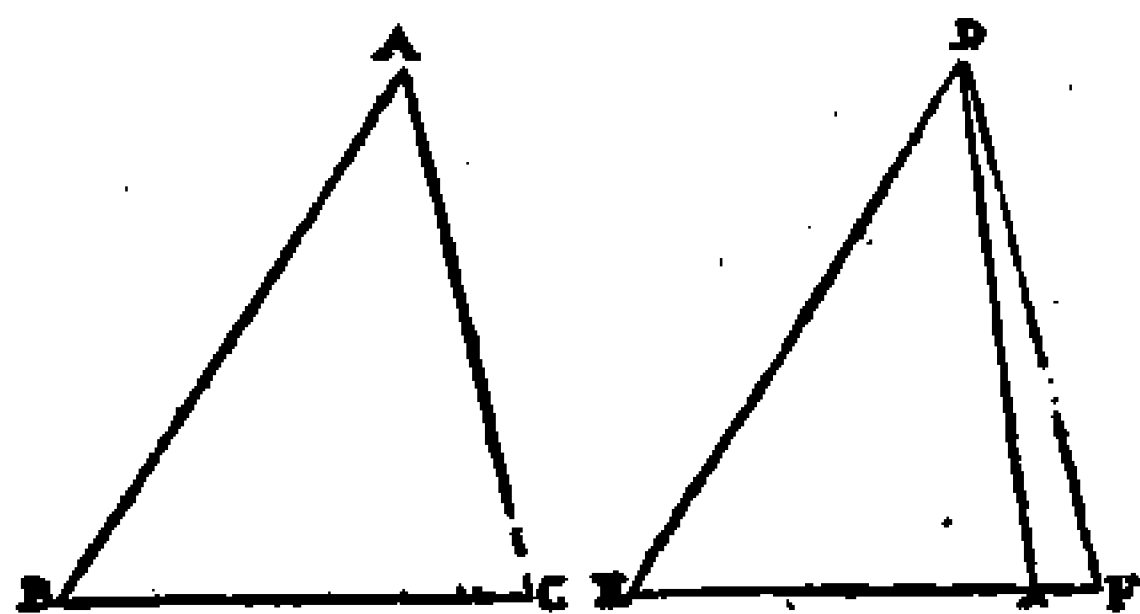
b 4. primi:

a 4. primi. DE, EF, utrumque utrique, & anguli contenti B, & E, æquales: erunt & bases AC, DF, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.

SIN T deinde latera AB, DE, subtendentia æquales angulos C, & EFD, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera BC, CA, reliquis lateribus EF, FD, esse æqualia, utrumque utrique, hoc est,

b 3. primi.

c 4. primi.



BC, ipsi EF, & CA, ipsi FD; reliquumque angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus BC, nō est æquale lateri EF, sit EF, maius: ex quo sumatur recta EG, æqualis ipsi BC, ducaturque recta DG. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus DE, EG, utrumque utrique, & anguli contenti B, & E, æquales, per hypothesin: erit angulus C, angulo EGD, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo EFD, æqualis: igitur & angulus EGD, angulo eidem EFD, æqualis erit, externus interno, & opposi-

d 16. primi. to, quod est absurdum. Est enim maior. Non ergo est latus BC, lateri EF, inæquale. Quocirca, ut prius, colligetur institutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

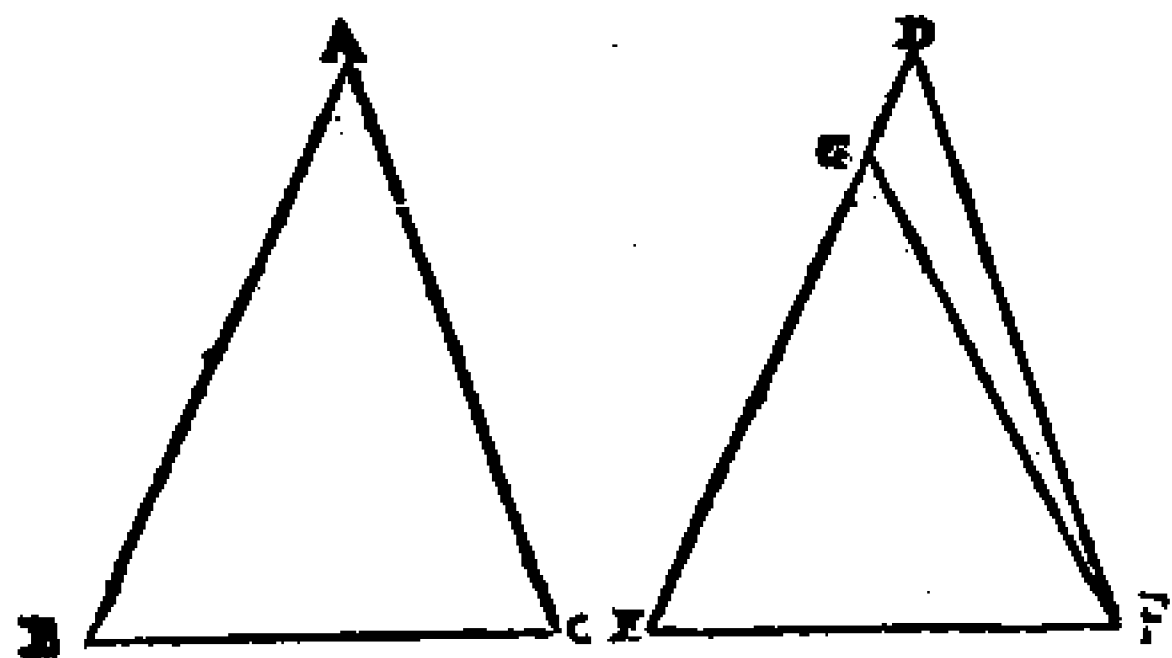
COROLLARIUM.

SEQUITUR ex demonstratione huius theorematum, tota etiam triangula, quoad areas, esse æqualia. Nam si latera AB, BC, lateribus DE, EF, æqualia sint, ut ostensum fuit, conti-

a 4. primi.

neantq; ex hypothesi angulos æquales B, E, erunt tota quoque triangula æqualia inter se.

SCHOLIUM.



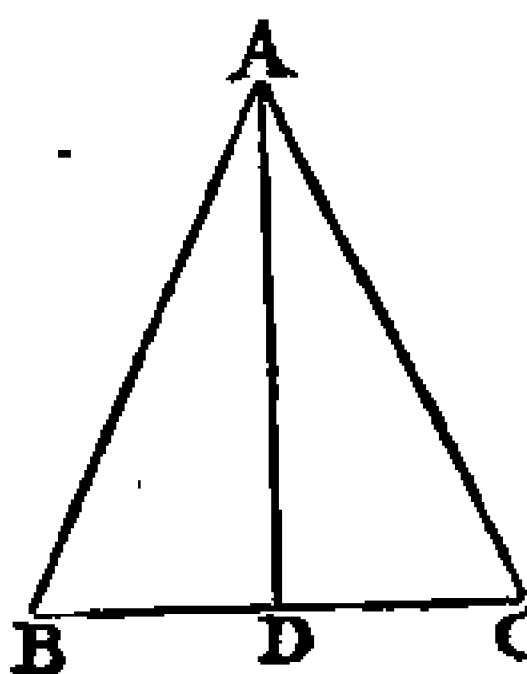
PRIOR huius theorematum pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipsis contentorum, collecta fuit æqualitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematum ex æqualitate basium BC, EF, & angulorum super has bases, demonstratum est, reliqua latera unius trianguli reliquis lateribus æqualia esse, reliquumque angulum reliquo angulo, &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonstrauimus ad propos. 8. huius lib. quemadmodum eo loco monuimus.

Hoc loco demonstrandum est theorema quoddam admodum necessarium, & perutile rebus Geometricis, videlicet.

IN triangulo æquilatere, siue Ifofcele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, diuidensque vel angulum, vel basin bifariam, perpendicularis est ad basin, & siquidem angulum bifariam diuidat, secabit quoque basin bifariam. Si verò basin secet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contrà; linea perpendicularis ad basin ducta diuidit & basin, & angulum bifariam.

b 4. primi.

c 8. primi.



SIN T in triangulo ABC, duo latera æqualia AB, AC, diuidatq; primum recta AD, angulum A, bifariam. Dico rectam AD, esse ad BC, perpendicularem, secareq; basin BC, bifariam. Cum enim duo latera AB, AC, duobus lateribus AD, AD sint æqualia, angulosq; æquales contineant, ex hypothesi, erunt & bases BD, CD, æquales, & anguli ad D, atq; adeo recti.

DIVIDAT deinde recta AD, basin BC, bifariam. Dico rectam AD, ad BC, perpendicularē esse, & angulum A, secare bifariam. Cum enim duo latera BD, DA, duobus lateribus CD, DA, æqualia sint, & basis AB, basi AC, ex hypothesi, erunt quoque anguli ad D, æquales, atq; adeo recti, ac proinde ex corollario propo-

sitionis 8. huius libri, & anguli ad A, æquales erunt.

d 5. primi.

SED iam recta AD, sit ad BC, perpendicularis. Dico & basin BC, & angulum A, secari bifariam. Erunt enim anguli B, C, supra basin BC, æquales. Itaq; quoniam duo anguli D, B, trianguli AED, duobus angulis D, C, trianguli ACD, æquales sunt, uterque utrique, laterisque AD, æqualibus oppositum angulus B, C, cōmune, erunt & reliqua latera BD, CD, æqualia, & reliqui anguli ad A, æquales. Quod erat demonstrādū.

e 26. primi.

SED & hoc theorema verum est.

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basin perpendicularis diuidit vel basin, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et siquidem basis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam secabitur: si verò angulus bifariam secetur, basis quoque diuidetur bifariam.

In eodem triangulo ABC , sit AD , ad BC , perpendicularis, diuidatq; primum basin BC , bifariam. Dico & latera AB , AC , esse equalia & angulos ad A , aequales. Quoniam enim duolatera BD , DA , duobus lateribus CD , DA , equalia sunt, angulosq; comprehendunt aequales, nempe rectos; ^a erunt quoq; & bases AB , AC , & anguli ad A , aequales, quod est primum. a 4. primi.

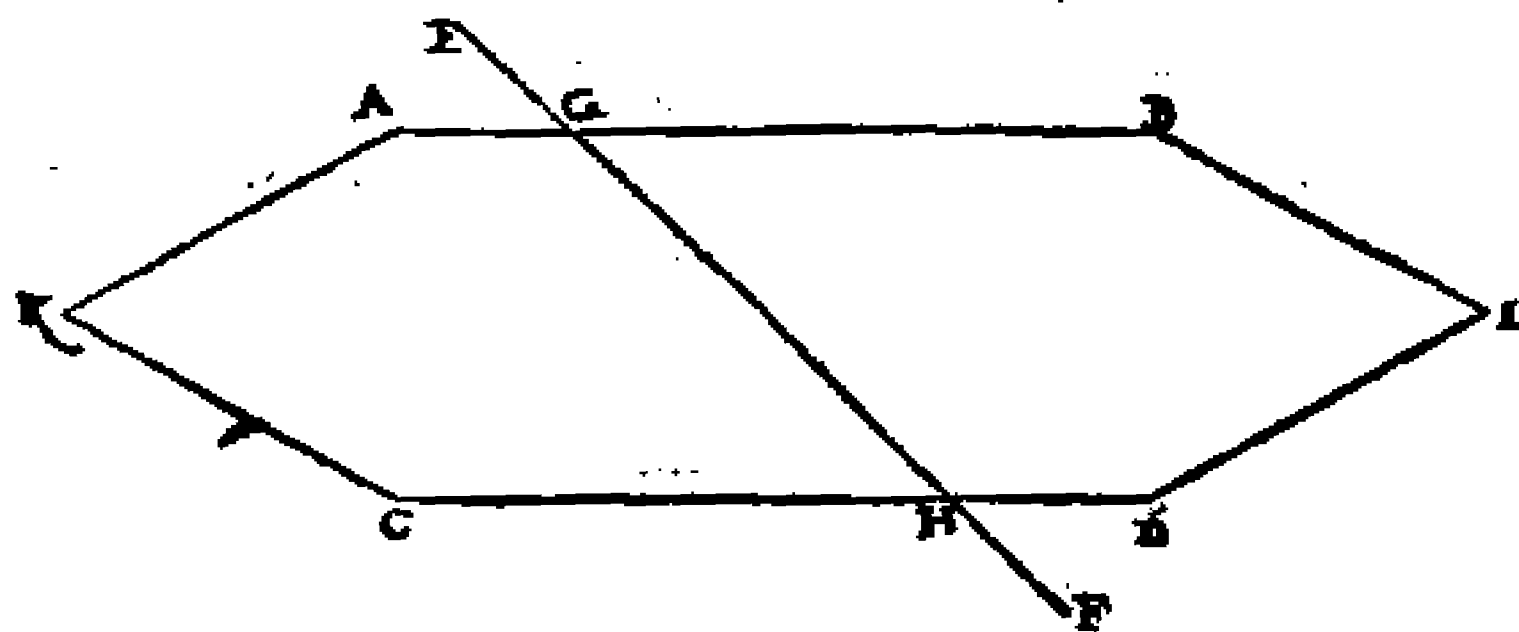
SECEP deinde perpendicularis AD , angulum A , bifariam. Dico & latera AB , AC , equalia esse, & rectas BD , CD . Quoniam enim duo anguli D , A , trianguli ABD , duobus angulis D , A , trianguli ACD , aequales sunt, lateraq; AD , illis adiacens, commune; ^b erunt quoque & latera AB , AC , & latera BD , CD , equalia. b 26. primi. Quod est secundum.

THEOR. 18. PROPOS. 27.

27.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ.

IN duas rectas AB , CD , incidens recta EF , faciat angulos alternatim AGH , DHG , inter se æquales. Dico lineas AB , CD , esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si pro-

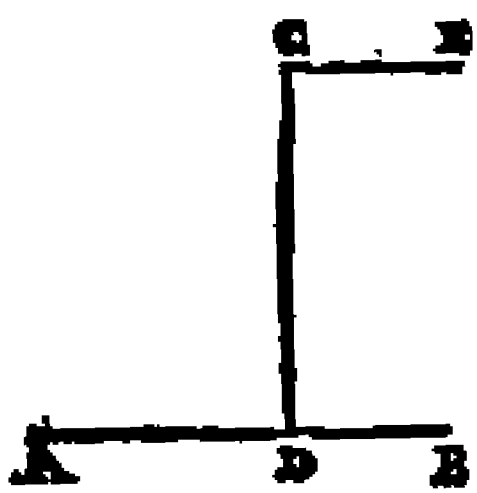


ducantur infinitè. Si namq; non coirent vnquâ, parallelæ essent, ex parallelarû definitione. Conueniant ergo ad partes B , & D , in puncto I . Quoniâ igitur triangulum est GHI , (cûm AB , recta continuata sit, ite recta CD , vsq; ad punctum I .) & angulus AGH , positus est æqualis angulo DHG ; erit externus angulus AGH , æqualis interno, & oppo-

sito DHG ; quod est absurdum; ^a quoniam externus interno maior est. Quod si AB , CD , coire dicantur ad partes A , & C , in puncto K , erit rursus eadem ratione angulus externus DHG , æqualis interno, & opposito AGH , quod est absurdum. Non igitur coibunt lineæ AB , CD . Quare parallelæ erunt. Eodè modo, si ponantur anguli alterni BGH , CHG , æquales, demonstrabitur lineas AB , CD , esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat ostendendum. a 16. primi.

SCHOLIUM.

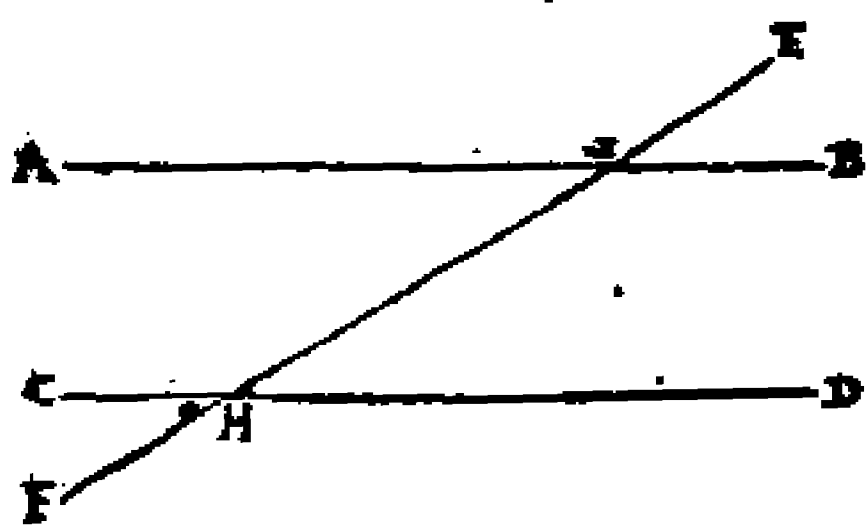
NECESSÈ est, vt linea, quæ dicuntur parallela, in eodem existant plano, vt ex definitione constat: Quæ non satis est duos angulos alternos aequales inter se esse, vt dua lineæ probentur esse parallela, nisi ponatur, eas in vno eodemq; existere plano. Fieri enim potest, vt linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano existentes, faciat alternos angulos aequales. Sit enim CD , perpendicularis ad AB , rectam, quæ in subiecto plano existit; & ex C , in alio plano, ad CD , ducatur alia perpendicularis CE , ita vt punctum E , intelligatur in seblimi. Quo posito, perspicuû est, rectam CD , incidentem in rectas CE , AB , facere duos angulos ECD , ADC , alternos aequales, cûm sint recti; & tamen CE , AB , non sunt parallela, q; non in eodem existant plano. Non apposuit autem Euclides in proposicione hanc conditionem; in eodem plano existentes: sicut neque in subsequentibus; quoniam cûm in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, vt supra diximus, omnia intelligenda sunt necessariò in eodem plano existere. In 11. verò lib. & alijs, qui ipsum sequuntur, monebitur semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diuersis planis; quia in illis libris differitur de solidis, in quibus diuersa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas, & superficies, &c.



PROBL. 19. PROPOS. 28:

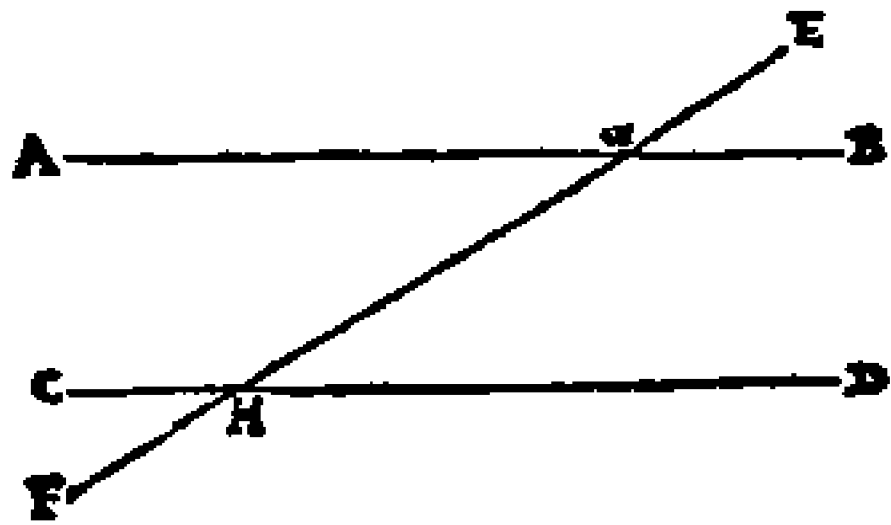
28.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdè partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.



IN duas rectas AB , CD , recta incidens EF , faciat primò externum angulum EGA , æqualem angulo interno, & opposito ad easdè partes GHC . Dico rectas AB , CD , esse parallelas. Quoniam enim angulo EGA , æqualis ponitur angulus GHC ; & eidem angulo EGA , æqualis est angulus HGB ; ^a erunt anguli alterni GHC , HGB , æquales. ^b Quare lineæ AB , CD , parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus EGB , æqualis ponatur interno GHD . a 15. primi. b 1. primi. c 27. primi.

a 13. primi.

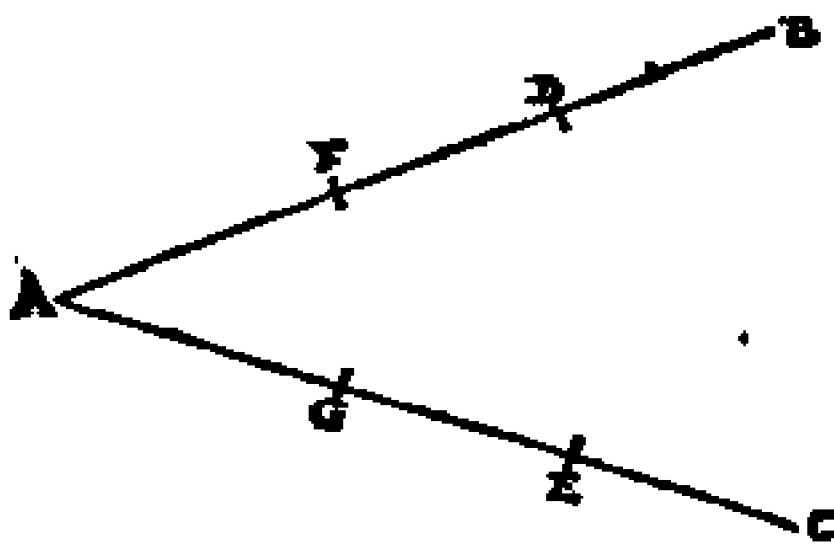


ostensum est, erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I U M.

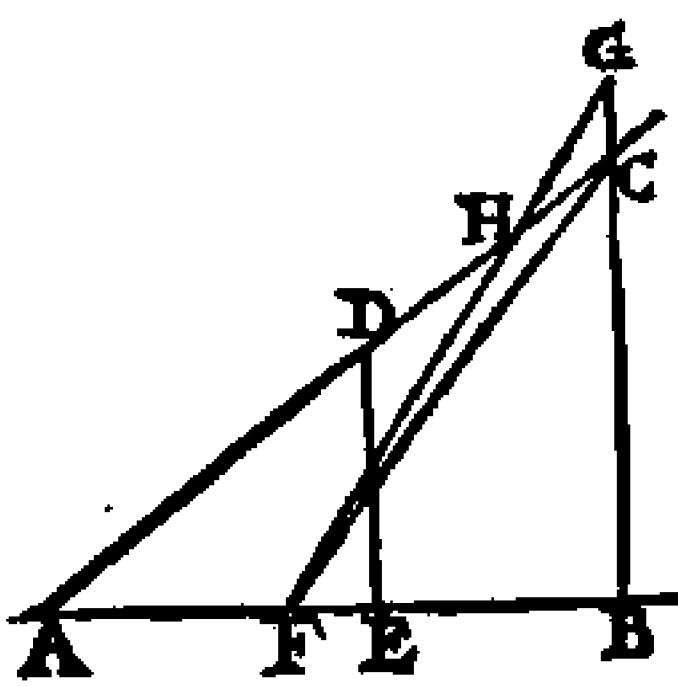
ΛΑΜΒΔΥ ΔΥ Μ pronunciatum tertiumdecimum à Principiorum numero reiecimus. Cùm igitur sequens proposit. 29. cum multis alijs illi ita innitatur, ut sine eius auxilio demonstrari nequeat, opera pretium erit illud hoc loco, ex hæcenus demonstratis theorematibus, atque problematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demonstratione confirmare, ut in expositione dicti Axiomati polliciti sumus. Primo autem loco demonstrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accurate, atque evidentiùs demonstrabimus. Proclus igitur, antequàm illud demonstret, duo pramittit. Primum est:

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè producatur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.



EXEANT à puncto A, duæ rectæ AB, AC, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quàm F, & G: Item puncta B, & C, plus quàm D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra recta lineæ AB, AC, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinitè ipse producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia: igitur & lineæ ipsæ vltra produci, quod est absurdum, cum ponantur infinitè iam esse producta. Quare si dictæ lineæ AB, AC, producantur infinitè, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam. Hoc pronunciatum vsus est & Aristoteles lib. 1. de Cælo, ubi demonstravit, mundum non esse infinitum.

Quod autem rectæ AB, AC, quò longius protrahantur, eò magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cum dixit puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare, quàm F, & G. Item B, & C, plus, quàm D, & E, &c.) hac ratione demonstrabimus. Demittantur ex punctis C, D, utcumque in recta AC, acceptis, ad AB, perpendiculares CB, DE, quæ distantias punctorum C, D, à recta AB, metientur, cum sint minima omnium rectarum ex C, D, ad AB, ductarum, ut in corollario proposit. 19. ostendimus. Dico CB, maiorem esse, quàm DE, ac proinde plus distare rectam AC, à recta AB, in puncto C, remotiore, quàm in puncto propinquiore D. Si enim CB, non est maior, quàm DE, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis, & recta AE, abscindatur æqualis BF, ita ut punctum F, cadat vel inter A, & E, vel in E, vel denique inter E, & B; ducaturq; recta FC. Quoniam igitur duo latera AE, ED, trianguli AED, duobus la-



- a 4. primi. teribus FB, BC, trianguli FBC, æqualia sunt, utrumque vtrique, angulosq; continet æquales, utpote rectos: erunt & bases AD, FC, & anguli DAE, CFB, inter se æquales. Igitur externus angulus CFB, interno DAE, æqualis erit. ^b quod est absurdum. Vel cum externus angulus CFB, interno DAE, æqualis sit, ^c parallelæ erunt AC, FC. quod etiam absurdum est, cum in C, concurrant.

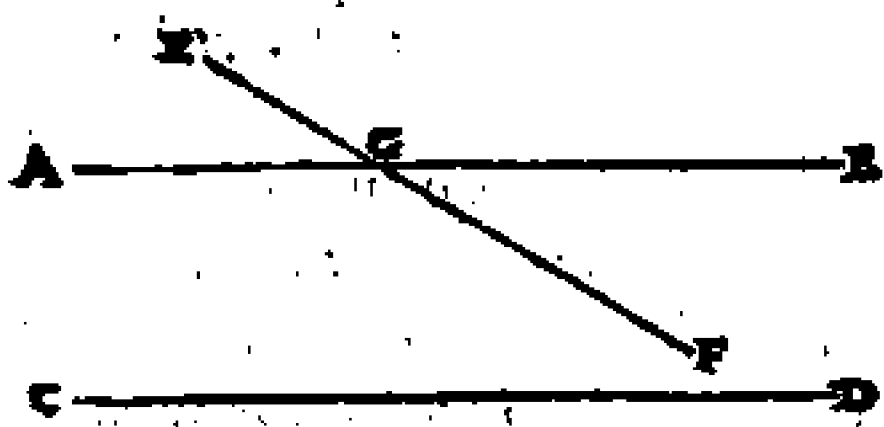
- b 16. primi. Si r deinde CB, minor quàm DE, si fieri potest, & producta BC, fiat BG, ipsi DE, æqualis, iungaturq; recta FG. Quia igitur duo latera AE, ED, trianguli AED, duobus lateribus FB, BG, æqualia sunt, utrumque vtrique, angulosq; continet æquales, puta rectos, ^d erunt & bases AD, FG, & anguli EAD, BFG, inter se æquales. Igitur externus angulus BFG, interno EAD, æqualis erit. quod est absurdum. Vel cum externus angulus BFG, interno EAD, æqualis sit, ^e erunt AC, FG, inter se parallelæ, quod absurdum etiam est, cum se mutuò secent in H. Quocirca BC, ipsa ED, maior erit, cum neque æqualis, neque minor esse possit, ut demonstratum est.

SECUNDUM, quod Proclus pramittit, huiusmodi est:

Si duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit.

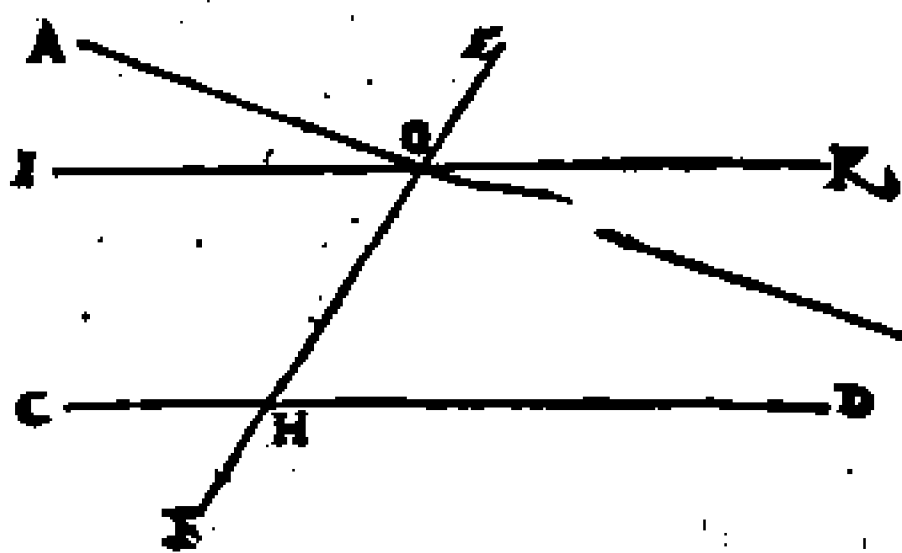
Si n r duæ parallelæ AB, CD, & recta EF, secet ipsam AB, in G. Dico rectam EF, si producat, secaturam

tam



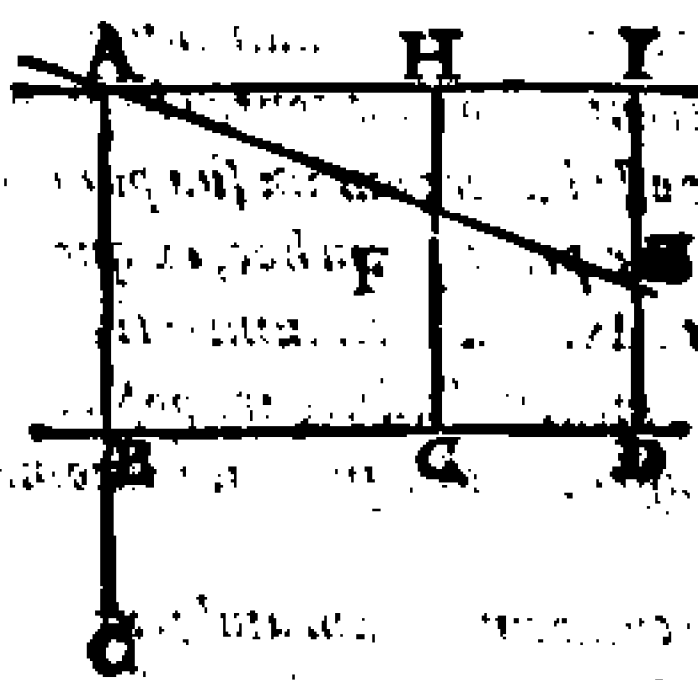
ram esse quoque ipsam CD . Quoniam duae rectae GB, GF , in puncto G , angulum faciunt, si producantur infiniter, excedent omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela AB , a parallela CD , distat, cum hac distantia sit finita, alias enim non essent lineae parallelae. Quare quando distantia GB , a GF , maior iam fuerit ea, qua inter parallelas est, necesse est rectam GF , productam secuisse rectam CD . Nam quamdiu GF , continebitur inter duas parallelas, minori distantia a GB , remquebitur, quam CD , ab eadem GB , ut constat. His igitur ita expositis, facile demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, tertium-decimum pronunciaturum.

Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ sibi mutuò incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



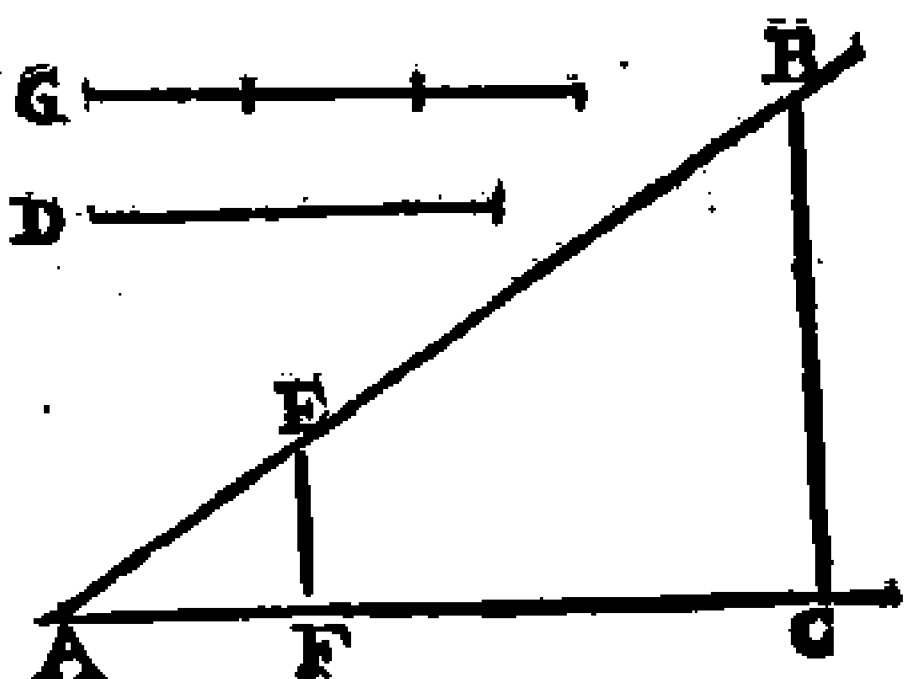
IN rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat internos angulos ad partes B, & D, ut B G H, D H G, duobus rectis minores. Dico rectas AB, CD, coire ad easdem partes B, & D. Quoniam enim duo anguli B G H, D H G, minores ponuntur esse duobus rectis; Sunt autem duo anguli D H G, D H F, ^a duobus rectis a 13. primi: quales: Erunt duo anguli D H G, D H F, maiores duobus angulibus D H G, B G H. Ablato ergo communi angulo D H G, remanebit angulus D H F, ^b maior angulo B G H. Si igitur ad rectam b 5. pron.

angulo DHF , cadet GK , supra GB ,^a secabitq; producta rectam AB . Quoniam igitur in duas rectas IK, CD , recta incidens EF , facit angulum externum DHF , aequalem interno, & opposito KGH ;^c Erunt recta IK, CD , parallela. Secat autem recta AB , ipsam IK , in G ; Producta igitur secabit quoq; ipsam CD , ut demonstratum est. Quare AB , cum CD , conueniet ad partes B , & D , nimirum in puncto L . quod est propositum.



re, si longius protendantur. Distantia nihilominus semper minor erit, quam recta AB , hoc est, quam perpendicularis ex recta AI , ad rectam BD , demissa, cum inflexa linea AE , ad rectam BD , nunquam perveniat, ut demonstratum est à Nicomede.

§c 10 principium illud Procli in lineis rectis esse verissimum, & quod facili negotio, si omnes demonstrationes Euclidis, quæ ex axioma 13. pendunt, concedantur, demonstrari possit hoc modo: Contineant duæ rectæ AB, AC , angulum A , & data sit recta D , cuius sui magnitudi-



a 4. sexti.

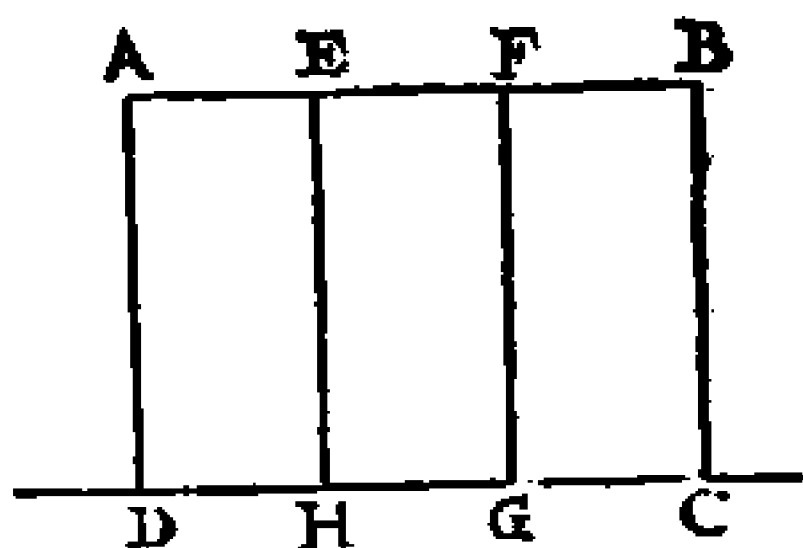
b28. primi.

gula ABC, AEF similia sint, ob rectas BC, EF , quæ^b parallele sunt.) Et permutando, ut AB , ad AE ; ita BC , ad EF : erit ita multiplex BC , ipsius EF , ut multiplex est AB , ipsius AE , hoc est, ut multiplex est G , ipsius EF . Cum ergo BC , & G , æquæ multiplices sint ipsius EF , ipsæ erunt inter se æquales. Est autem, ex constructione, maior G , quam D . Igitur & BC , distantia puncti B , à puncto C , maior erit, quam recta D , data. quod est propositum.

VERVM demonstratio hæc sine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axioma illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13. demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Quæ cum ita sint, sedulo dedimus operam, ut illud ipsum Euclidis axioma demonstrarem ex his solum, quæ ante propositionem 29. primi libri demonstrata sunt. Ante enim propositionem 29. vsus illius axiomatici apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationem illam legendi, etsi obnixè illud iterum atque iterum ab eo, qui cum Euclide Arabicum possidet, flagitavi. Quare hanc, quæ sequitur, excogitavimus. Primum autem præmittenda quoque sunt nonnulla, quæ licet ad id, quod proponimus, demonstrandum requiratur necessario, multò tamen evidentiora sunt, ac faciliora axioma illo Euclidis, ita ut omni dubitatione exclusa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi.

I.

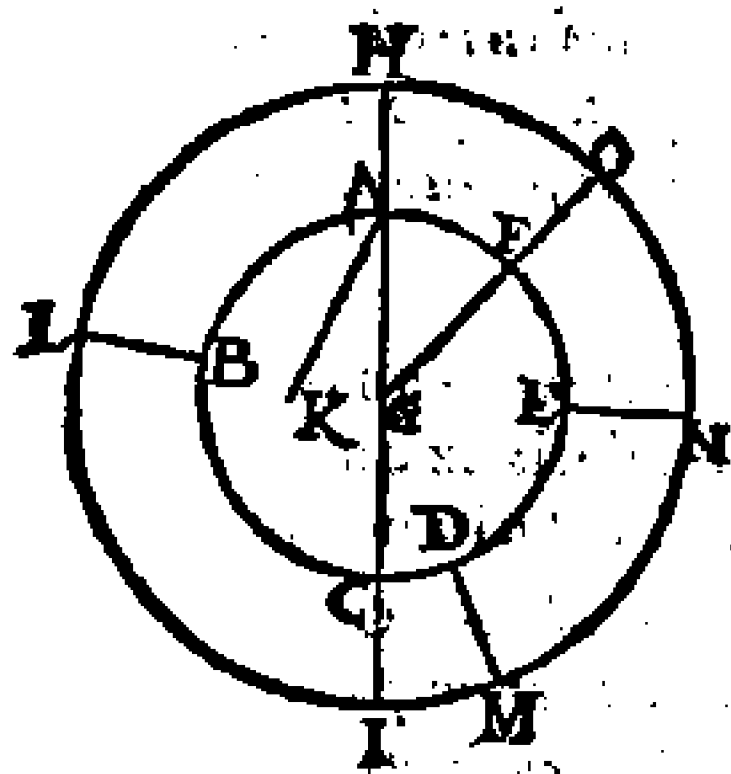
LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.



UT si omnia puncta linea AB , à recta DC , æqualiter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt AD, EH, FG, BC , ad DC , demissa æquales sint, (perpendicularis enim qualibet, cum sit omnium ex eodem puncto ad rectam DC , ductarum minima, ex corollario propositionis 19. huius libri, distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit AB , linea recta. Hoc autem ex definitione lineæ rectæ liquido constare potest. Nam si omnia puncta lineæ AB , æqualiter distant à recta DC , ex quo sua interiacebit puncta, hoc est, nullum

in ea punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo susultabit, nihilq; in ea flexuosum reperietur, sed æqualiter semper inter sua puncta extendetur, quemadmodum recta DC . Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta DC , distantiam haberent, quod est contrarium hypothese. Neque verò cogitatione apprehendi potest, aliam lineam præter rectam, posse habere omnia sua puncta à recta linea, quæ in eodem cum illa plano existit, æqualiter distantia. Est sane principium hoc, ex quo solo concessio, una cum his, quæ vsque ad propositionem 29. huius libri ostensa sunt, axioma decimumtertium demonstrabimus, adeo clarum, ut lumine naturali cognitum sit, nemodq; sane tanti illud negare possit. Aut certe circa omnem controuersiam est eiusmodi, ut longe facilius ei quilibet assentiatur, quam illi axioma decimotertio Euclidis.

IDEM prorsus in linea circulari contingit. Nam etiam linea inflexa circulem lineam ambiens, cuius omnia puncta æqualiter à circulari distant, id est, à qua omnes rectæ in circulem lineam ad æquales angulos incidentes æquales sunt, circularis quoque est; ita ut naturam circularis lineæ, à qua æquali semper distantia abest, induat: quemadmodum linea æqualiter semper à recta linea distans, naturam lineæ rectæ, cui semper æquidistat, induit, propterea quæ recta est, ut diximus. Quod autem inflexa illa linea circa lineam circulem sit quoque perfecte circularis, facile ostendemus, si prius demonstremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos æquales; & contra, rectam, quæ æquales cum circumferentia angulos constituat, per centrum transire.



Si igitur circulus $ABCEBF$, cuius centrum G . Dico rectam GE , ex centro ductam efficere tam angulos internos GCB, GCE , quam externos ICB, ICD , inter se aequales. Producta enim IG , vsque ad A , si semicirculus ABG , circa diametrum AC , intelligatur circumuerti, congruet is semicirculo AEC , cum semicirculi eiusdem circuli sint inter se aequales. Quod si quis dicat, vnum semicirculum alterum interfecisse, ducenda erit recta linea ex centro G secans vtramque circumferentiam, colligendamque partem toti esse aequalem, nimirum semidiametrum vsque ad interiorem circumferentiam, semidiametro ad exteriorem vsque circumferentiam ducta. quod absurdum est. Anguli igitur ad C , tam interni, quam externi inter se congruent, ac proinde aequales erunt. Efficiat iam

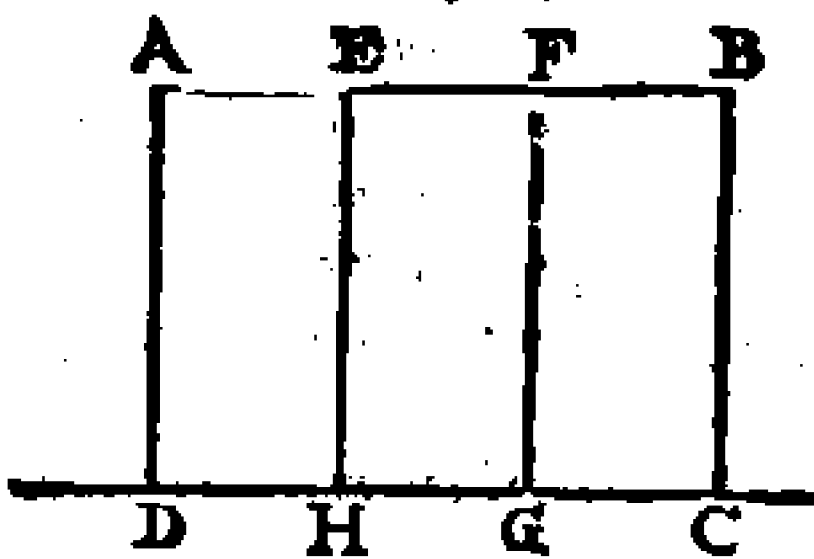
recta HAK , aequales angulos ad A . Dico eam per centrum transire. Si enim non transeat, ducatur ex centro G , ad A , recta GA , qua ex proximè demonstratis angulos GAB, GAF , constiuet aequales. Non ergo aequales sunt KAB, KAF . Quod est contra hypòthesin.

Hoc ostenso, ambiat inflexa linea $HLIMNO$, circulem lineam, $ABCEBF$, omniūque eius puncta ab hac aequaliter absint, id est, omnes rectae ab ea linea in circulem lineam cadentes, efficientesq; angulos aequales, sint inter se aequales, cuiusmodi sunt HA, LB, IC, MD, NE, OF . Ha enim cum, ut demonstratum est, per centrum transeant, erunt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O , in conuexam peripheriam cadentium, minima; (Hoc enim demonstratum est ab Euclide propositione 8. libri 3. qua solum ex propositionibus, quae 29. huius libri antecedunt, pendet, ut iure optimo huc transferri possit) atque adeo eorum distantias a subiecta linea circulari metientur. Dico lineam $HLIMNO$, esse circulem. Cum enim omnes, ut proximè ostendimus, per centrum G , transeant, si aequalibus HA, OF , addantur aequales AG, FG , erunt totae HG, OG , aequales, eademq; ratione omnes aliae ex linea inflexa $HLIMNO$, ad G , ductae aequales erunt, & rectis HG, OG , & inter se. Ex definitione circuli igitur linea inflexa circularis est. Quod erat demonstrandum. Ex hoc primo, quod praemisimus, sequitur secundum, videlicet.

I I.

Si recta linea super aliam rectam in transversum moueatur, constituens in suo extremo eum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremum lineam quoque rectam.

Ut si in priore figura recta AD , ad DC , perpendicularis moueatur in transversum super rectam DC , constituens cum ea in D , semper rectos angulos, hoc est, non titubans, aut vacillans, sed aequaliter semper incedens, describet extremum A , rectam quoque lineam, nempe AB . Constat hoc ex eo, quod primo loco praemisimus, propterea quod omnia puncta linea AB , descripta aequaliter a recta DC , distant, nimirum per rectam AD . Ex quo fit, ipsam lineam rectam esse, cum, ut ibi dictum est, eius media ab extremis non subsultent, sed aequaliter inter ipsa iaceant, quippe cum nullum eorum magis aut minus a recta DC , abscedat sursum, aut deorsum vergendo, quam aliud. Patet hoc etiam ex iis, quae ad definitionem lineae rectae scripsimus. Cum enim



duo puncta D, A , similibus prorsus moribus ferantur, (quod recta AD , in suo motu non titubet, aut vacillet, sed puncta D, A , aequè velociter incedant, aequaliterq; semper inter se distent.) describent vtrique lineas similes, ut in eadem definitione docuimus. Cum ergo punctum D , rectam DC , describat, erit quoque linea AB , quam punctum A , describit, recta. Neque verò imaginari quis poterit, si linea recta in transversum moueatur uniformiter sine vlla titubatione huc atque illuc, duo puncta eius extrema describere duas differentes inter se lineas; sed qualem vnum extremum describit, talem quoque ab altero extremo describi necesse est, propter uniformem illum, aequalēque motum vtriusque puncti extremi. Est principium hoc aequè clarum, & euident, atque antecedens.

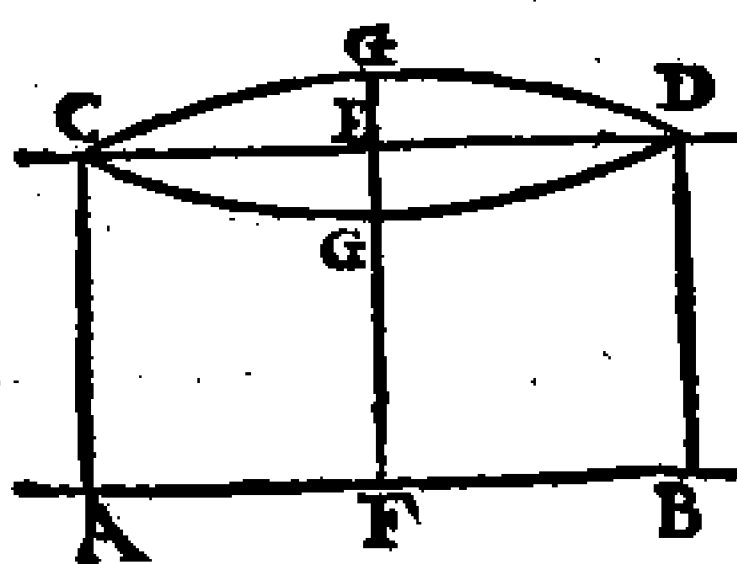
CONTINGIT autē idem omnino in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea super lineam circulem in transversum fluens aequaliter, constituens nimirum in suo extremo cum circulari aequales semper angulos, non vacillando, aut deflectendo huc atque illuc, circulem lineam altero suo extremo describit, ita ut naturam circularis lineae subiectae, a qua aequaliter semper distat, linea illa descripta induat: quemadmodum linea recta AD , super rectam DC , in transversum fluens aequaliter, constituens nimirum cum ea in suo extremo D , angulos semper rectos, ita ut nusquam declinet, huc atque illuc deflectendo, aut titubando, lineam rectam AB , altero extremo A , delineat: adeo ut linea descripta AB , naturam induat rectae lineae subiectae DC , a qua aequaliter semper recedit. Rectam autem, qua super lineam circulem in transversum fluit aequaliter, describere altero suo extremo lineam quoque circulem, facile demonstrabimus. Moueatur enim in figura posteriore recta HA , in transversum super peripheriam $ABCEBF$, aequaliter, faciens semper in extremo A , cum ea angulos aequales. Dico lineam $HLIMNO$, ab altero extremo H , descriptam esse quoque circulem. Cum enim recta HA , in omni situ motus illius imaginari faciat aequales angulos cum peripheria

Huc pertinet prima huius paginae figura.

$AB C D E F$, sit ut ea producta in centrum G , cadat, ut supra ostendimus. Quare additis rectis aequalibus $H A$, $O F$, ad rectas aequales $A G$, $F G$, fient tota recta $H G$, $O G$, & oēs alia, inter se aequales: ac propterea ex definitione circuli $H L I M N O$, circumferentia circuli erit. Quod ostendendum erat. Hinc sequitur tertium.

I I I.

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quovis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.

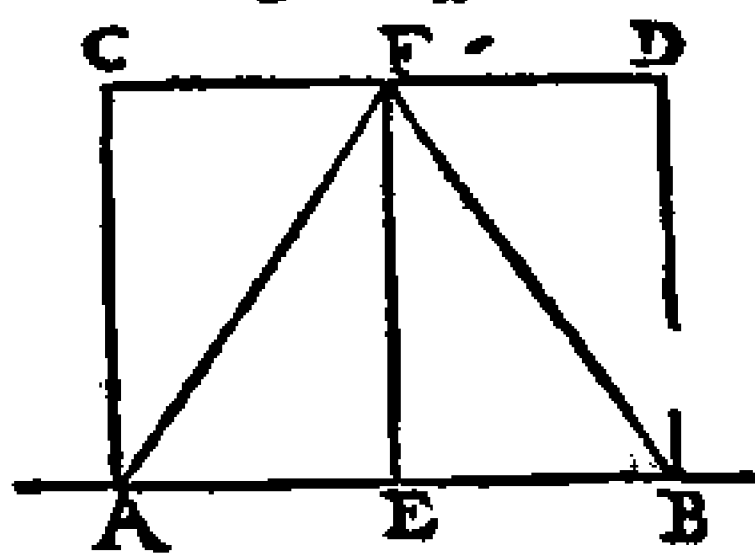


Si nunc ad rectam $A B$, erecta duæ perpendiculares $A C$, $B D$, inter se æquales: Et ducta recta $C D$, demittatur ex quolibet eius puncto E , ad $A B$, perpendicularis $E F$. Dico $E F$, vtrique $A C$, $B D$, esse æqualem. Si namque æqualis non est, erit vel maior, vel minor. Abscissa ergo æquali $F G$, si intelligatur recta $A C$, moveri intransversum per rectam $A B$, faciens cum ea angulos semper rectos, describet punctum C , lineam rectam per G , transcurrentem, ut supra ostensum est, qualis est $C G D$. Duæ ergo rectæ $C E D$, $C G D$, superficiem claudunt. Quod est absurdum. Æqualis igitur est $E F$, vtrique $A C$, $B D$. Quod erat ostendendum. Ex hoc quartum, quod sequitur, demonstrabimus.

I V.

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum utraque perpendiculari angulum rectum.

Si nunc ad rectam $A B$, erecta duæ perpendiculares $A C$, $B D$, æquales inter se, ducaturque recta $C D$. Dico vtrumque, angulum C , D , rectum esse. Secta namque recta $A B$, bisariam in E , excutetur in E , ad $A B$, perpendicularis $E F$, iunganturque rectæ $A F$, $B F$. Quoniam igitur duo latera $A E$, $E F$, trianguli $A E F$, duobus lateribus $B E$, $E F$, trianguli $B E F$, æqualia sunt, vtrumque, vtrique, angulosque, continent æquales, puta rectos, erunt quoque, & bases $A F$, $B F$, & tam anguli $F A E$, $F B E$, quam $A F E$, $B F E$, inter se æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis $F A E$, $F B E$, ex rectis æqualibus $C A E$, $D B E$, reliqui erunt æquales anguli $C A F$, $D B F$. Itaque, cum duo latera $C A$, $A F$, trianguli $C A F$, duobus lateribus $D B$, $B F$, trianguli $D B F$, æqualia sint, angulosque, complectantur æquales, ut ostendimus, erunt quoque, & bases $C F$, $D E$, & tam anguli C , D , quam $C F A$, $D F B$, inter se æquales. Si ergo æqualibus angulis $C F A$, $D F B$,



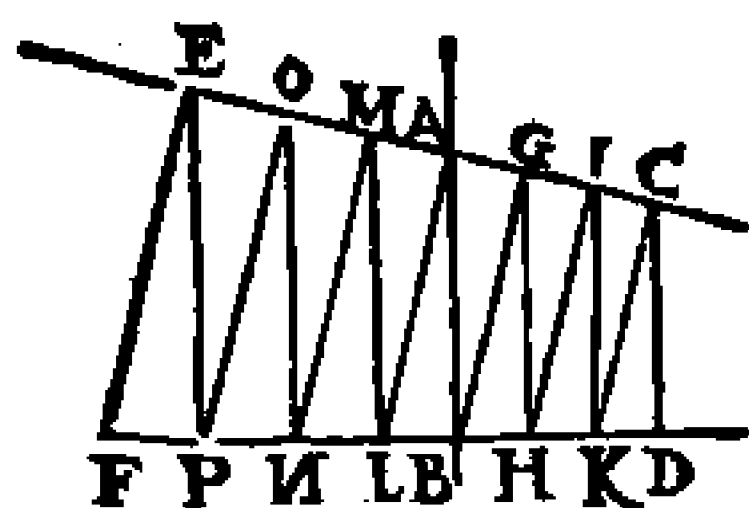
a 4. prim.

b 4. prim.

addantur anguli $A F E$, $B F E$, ostensi æquales, fient toti anguli $C F E$, $D F E$, æquales, ac proinde recti. Quia vero perpendicularis $E F$, vtrique, $A C$, $B D$, æqualis est, ut proximo theoremate ostendimus, erunt duæ rectæ $A C$, $E F$, ad $A E$, perpendiculares, inter se æquales. Quare, ut de angulis C , D , proxime probatum est, anguli C , & $E F C$, æquales inter se erunt. Est autem $E F C$, ostensus rectus. Igitur & C , rectus erit, ac proinde & angulus D , qui ostensus est ipsi C , æqualis, rectus erit.

CÆTERVM angulos C , D , rectos esse, demonstrabimus alio modo, hoc prius theoremate premisso.

Si in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minus semper inter se distabunt ad eas partes; vbi est angulus acutus, ex altera vero parte semper inter se magis distabunt.



c 12. prim.

RECTA linea $A B$, in rectas $A C$, $B D$, incidens faciat angulum $A B D$, rectum, & $B A C$, acutum. Dico rectas $A C$, $B D$, minus semper inter se distare versus C , D , productas, magis vero, si versus E , F , producantur. Ducatur enim ex B , ad $A C$, perpendicularis $B G$, quæ ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli $B A C$, cadet, ac propterea angulus $G B D$, pars recti anguli $A B D$, acutus erit. Demissa ergo ex G , ad $B D$, perpendicularis $G H$, cadet quoque, ad partes anguli acuti $G B D$, ex eodem coroll. angulusque, propterea $H G C$, pars recti anguli $B G C$, acutus erit. Rursum

ergo ducta perpendicularis $H I$, ad $A C$, per idem corollat. ad partes acuti anguli $H G C$, cadet, ideoque, angulus $I H D$, pars recti anguli $G H D$, acutus erit. Atque ita deinceps in infinitum, si ex I , ad $B D$, perpendicularis $I K$, ducatur, & ex K , perpendicularis $K C$, ad $A C$, & ex C , ad $B D$, perpendicularis $C D$, & c. cadent omnes ad partes angulorum acutorum, vna post aliam. Quoniam igitur in triangulo $A B G$, angulus $B A G$, acutus est, &

d 19. prim.

$A G B$, rectus, erit recta $A B$, maior quam $B G$; & in triangulo $B G H$, recta $B G$, angulo recto $G H B$, opposita, maior quam $G H$; & in triangulo $G H I$, recta $G H$, maior quam $H I$: Atque ita deinceps erunt semper rectæ, quæ ipsi $A B$, propiores sunt, maiores illis, quæ remotiores sunt, & nunquam finis erit huius decrementi perpendicularium, cum nunquam possit esse finis ducendarum perpendicularium. Quapropter recta $A C$, in G , minus distabit à recta $B D$, quam in A , & in I , minus, quam in G , & in C , minus, quam in I , & c. quandoquidem perpendicularis

Ex his demonstratis, facile iam Axioma 13. demonstrabimus hoc modo.

V.

● ●

tertiam duplam in dato exemplo, existere ultra punctum B. Accipiatur quoque in recta AC, recta EK, ipsi AB & KL, ipsi AK, & LC, ipsi AL, aequalis, ita ut tot sint partes in recta AC, quot in recta AL; ducanturque rectae KG, LH, CL, producanturque una cum EF, ut EM, KN, LO, ipsi EF, KG, LH, fiant aequales, ac tandem rectae iungantur, MK, NL, OC. Haec, quoniam duo latera KE, EM, trianguli KEM, duobus lateribus AE, EF, trianguli ABE, per constructionem aequalia sunt, utrumque utriusque, angulosque ad verticem E, continet aequales, erit & basis MK, basi AF, & angulus M, angulo F, aequalis. Est autem & EG, eidem AF, aequalis, & angulus F, rectus, ex constructione. Igitur & MK, FG, aequales inter se erunt, & angulus M, quoque, rectus. Quare cum ad FM, excitata sint due perpendiculares aequales FG, MK, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursum ergo, quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus AK, KG, trianguli AKG, aequalia sunt, ex constructione, angulosque comprehendunt aequales ad K, verticem, erit & angulus NL, basi AG, & angulus N, angulo G, aequalis. Est autem & GH, ex constructione, eidem AG, aequalis, & angulus G, rectus, ut proximè demonstratum est. Igitur & NL, GH, inter se erunt aequales, & angulus N, quoque, rectus. Quocirca per precedentem theorema, erit etiam angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, rectum esse: atque ita deinceps, si plures essent partes rectae AB. Est autem & angulus B, per hypothesis, rectus. Igitur rectae IC, BD, & parallelae sunt, ac propterea BD, producta rectam AC, secabit supra punctum C; atque adeo in puncto illo sectionis rectae AC, BD, coibunt. Quod erat demonstrandum.

a 15. primi.

b 4. primi.

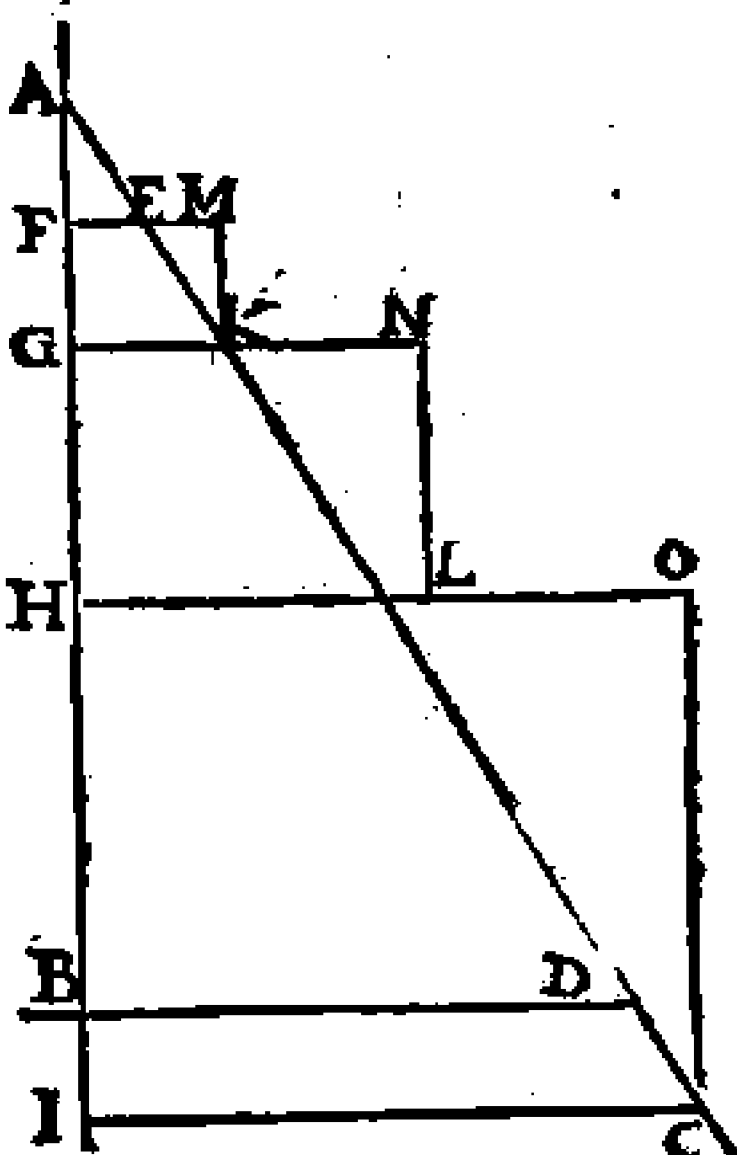
c 1. pron.

d 15. primi.

e 4. primi.

f 1. pron.

g 28. primi.

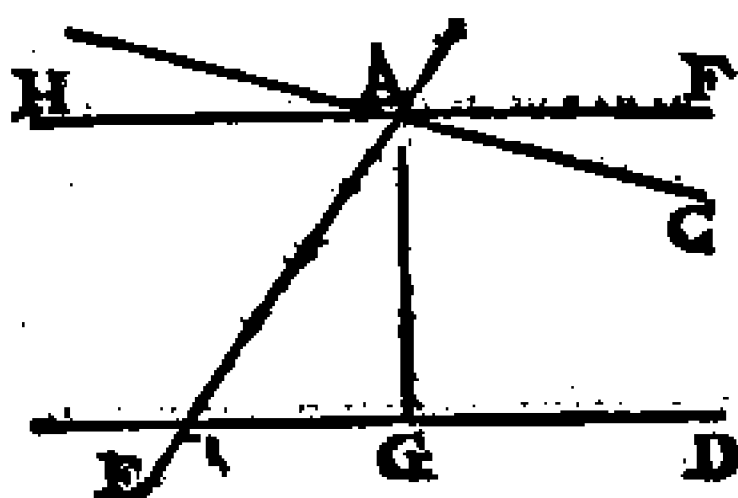


h 13. primi.

i 23. primi.

k 28. primi.

l 12. primi.



Si r deinde neuter angulorum ABD, BAC, rectus, sed ABD, quidem acutus, & BAC, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli ABD, BAC, duobus rectis ponantur minores; sunt autem duo anguli ABD, DBE, duobus rectis aequales: erunt hi duo illi duobus maiores. Ablato ergo communi ABD, maior erit reliquus DBE, reliquo BAC. Constituat in A, ad rectam AB, angulus BAF, angulo DBE, aequalis: Cadetque recta AF, supra rectam AC; cum AF, maiorem angulum cum AB, constituat, quam AC. Quia igitur externus angulus DBE, interno BAF, ex eadem parte opposito aequalis est, erunt rectae AF, BD, inter se parallelae. Demittatur quoque, ex A, ad BD, perpendicularis AG, quae ex corollario 2. propof. 17. huius lib. ad partes acuti anguli ABD, cadet: Eritque, angulus quoque, GAF, rectus. Nam si acutus esse dicatur, efficiet recta AG, in rectam AF, BD, incidens angulum AGD, rectum, & GAF, acutum, ac proinde, ut proximè demonstravimus, rectae AF, BD, ad partes F, D, productae coibunt tandem: Quod est absurdum: Offensa enim sunt parallelae. Si autem angulus GAF, dicatur esse obtusus, erit GAH, acutus. Quare ex proximè demonstratis, coibunt rectae AF, BD, ad partes H, B, productae, quod est absurdum, cum parallelae sint ostensa. Non est ergo angulus GAF, acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde eius pars GAC, acutus. Quoniam igitur recta AG, in rectis AC, BD, incidens facit angulum G, rectum, & GAC, acutum, concurrent rectae AC, BD, ad partes C, D, productae, ut proximè demonstravimus. Si igitur recta AB, in rectas AC, BD, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum ABD, BAC, rectum, ipsa recta, AC, BD, ad partes C, D, productae conveniunt. Quod erat ostendendum.

Quia autem, concessio principio nostro, optime à nobis demonstratum sit 13. hoc Axioma, & à Proclo etiam, si eius principium difficilior quidem, quam nostrum, admittatur, ut iure optime inter theorematum, & non inter principia possit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, utemur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendunt, tanquam pronunciato. Sed iam ad seriem propositionum Euclidis revertamur.

THEOR. 20. PROPOS. 29.

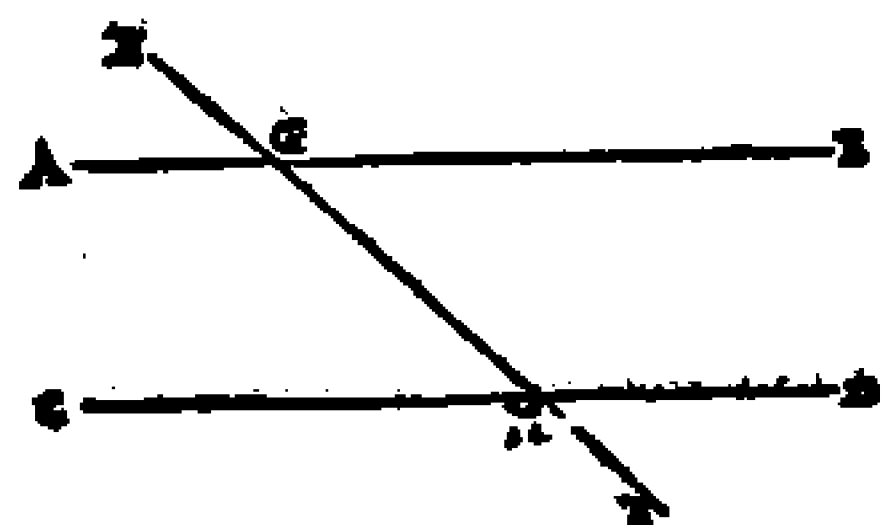
29.

IN parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se aequales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes aequalem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis aequales facit.

a 4. pron.

b 13. primi.

c 13. pron.



IN parallelas AB, CD, recta incidat EF. Dico primum angulos alternos AGH, DHG, inter se esse aequales. Si enim non sunt aequales, sit alter, nempe AGH, maior. Quoniam igitur angulus AGH, maior est angulo DHG, si addatur communis angulus BGH, erunt duo AGH, BGH, maiores duobus DHG, BGH: At duo AGH, BGH, aequales sunt duobus rectis. Igitur duo DHG, BGH, minores sunt duobus rectis. Quare cum sint interni, & ad easdem partes B, & D, coibunt lineae AB, CD, ad eas partes, quod est absurdum, cum ponantur

ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus AGH , maior angulo DHG : Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A , & C . Igitur æquales erunt anguli alterni AGH, DHG . Eademque est ratio de angulis alternis BGH, CHG .

Dico secundo, angulum externum AGE , æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito CHG . Quoniam enim angulo BGH , æqualis est alternus CHG , ut ostensum est: & eidem BGH , æqualis est angulus AGE . Erunt anguli AGE, CHG , inter se quoque æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum BGE , æqualem esse angulo DHG .

a 15. primi.
b 1. pronun.

Dico tertio, angulos internos ad easdem partes AGH, CHG , æquales esse duobus rectis. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum AGE , æqualem esse angulo CHG , interno; si addatur communis AGH , erunt duo AGE, AGH , duobus CHG, AGH , æquales: Sed duo AGE, AGH , æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli CHG, AGH , æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli BGH, DHG , duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

c 2. pron.
d 13. prima

S C H O L I V M.

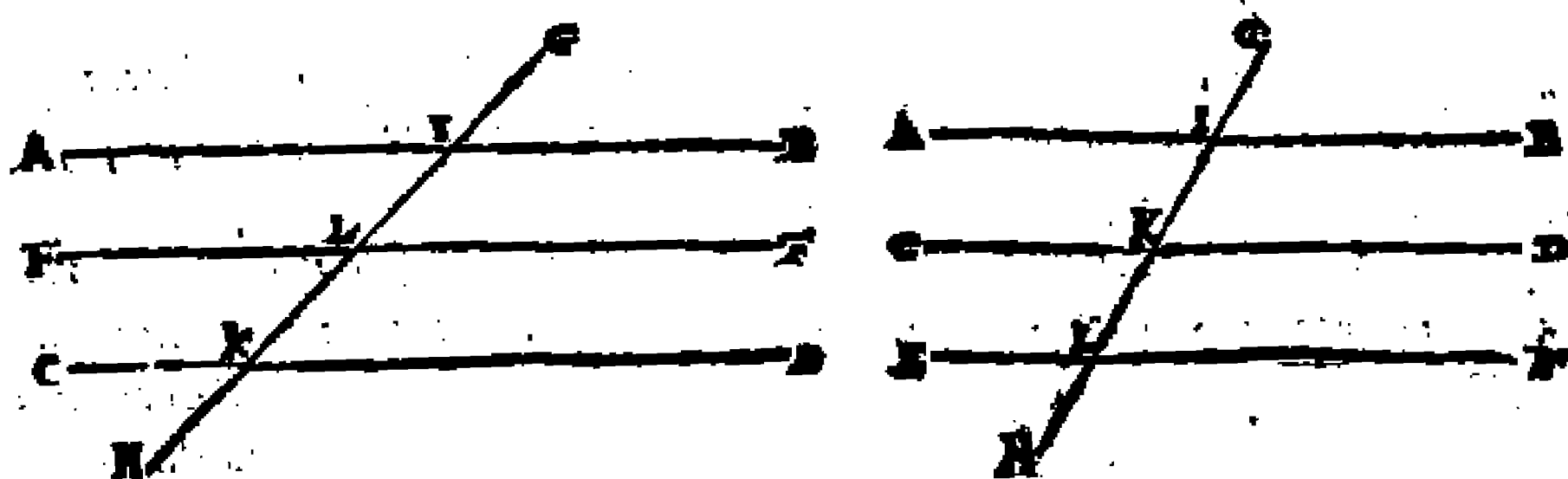
CONVERTITUR autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, ut perspicuum est.

THEOR. 21. PROPOS. 30.

30.

QUA AB eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectæ AB, CD , eidem rectæ EF , parallelæ. Dico & ipsas AB, CD , esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. libri II. agitur de



lineis in diuersis planis) ducta recta GH , secabit omnes, nimirum AB , in I, K , & CD , in L . Quia igitur AB , ponitur parallela ipsi EF , erit angulus AIE , alternus FLI , æqualis.

a 29. primi.

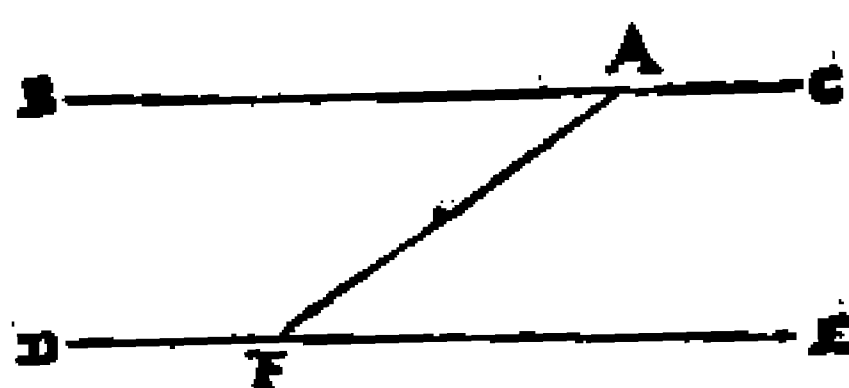
Rursum quia CD , ponitur etiam parallela ipsi EF , erit angulus DKI , eidem angulo FLI , nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli AIE, DKI , æquales inter se quoque erunt. Cum igitur sint alterni, erunt rectæ AB, CD , parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.

b 29. primi.
c 1. pronun.
d 27. primi.

S C H O L I V M.

QUOD si quis dicat, duas rectas AI, BI , parallelas esse rectæ CD , & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendum est, duas AI, BI , non esse duas lineas, sed partes eandem unius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinite esse productas; Constat autem AI , productam coincidere cum BI . Quamobrem propositio hac generalius ita poterat proponi.

QUA AB eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certè, quando inter se coeunt, vnam eandemque lineam constituunt.



SINT enim duæ rectæ AB, AC , coeuntes in A , parallela ipsi DE . Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto enim A , ducatur recta AF , secans DE , in F , utcumque. Quoniam igitur AB, DE , sunt parallelæ, erunt anguli alterni BAF, AFE , æquales. Addito ergo communi angulo CAF , erunt duo anguli ad A , æquales duobus angulis CAF, AFE . Sed hi duo æquales sunt duobus rectis, cum sint interni inter duas parallelas AC, DE . Igitur & duo anguli ad A , duobus erunt re-

a 29. primi.

b 2. pron.

c 29. primi.

d 14. primi.

ctis æquales; ac propterea in rectum erunt constituta ipsa AB, AC . Quod est propositum.

PROBL. 10. PROPOS. 31.

31.

A DATO puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.



Ex puncto A , ducenda sit linea parallela lineæ BC . Ducatur ex A , ad BC , linea AD , utcumque, faciens angulum quemcunque ADB . Cui ad A , æqualis constituitur EAD . Dico rectam EA , extensam ad F , quantumlibet, parallelam esse ipsi BC . Cum enim anguli alterni ADB, DAE , æquales sint per constructionem: Erunt rectæ BC, EF , parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

a 23. primi.

b 17. primi.

S C H O L I V M.

DEBEET autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, ut hac producta cum illo non conueniat. Quod quidè aperte colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est

linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quomodo autem ab uno, eodemque puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quam una, ducuntur, ut ostendimus propof. 17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, data recta plures parallela, quam una, duci nequeunt. Si enim dua ducerentur, convenirent ipsa in puncto illo eodem, quod est absurdum, cum sint parallela inter se, propterea quod uni & eidem, cui parallela dicuntur duci, sunt parallela.

e 30. primi.

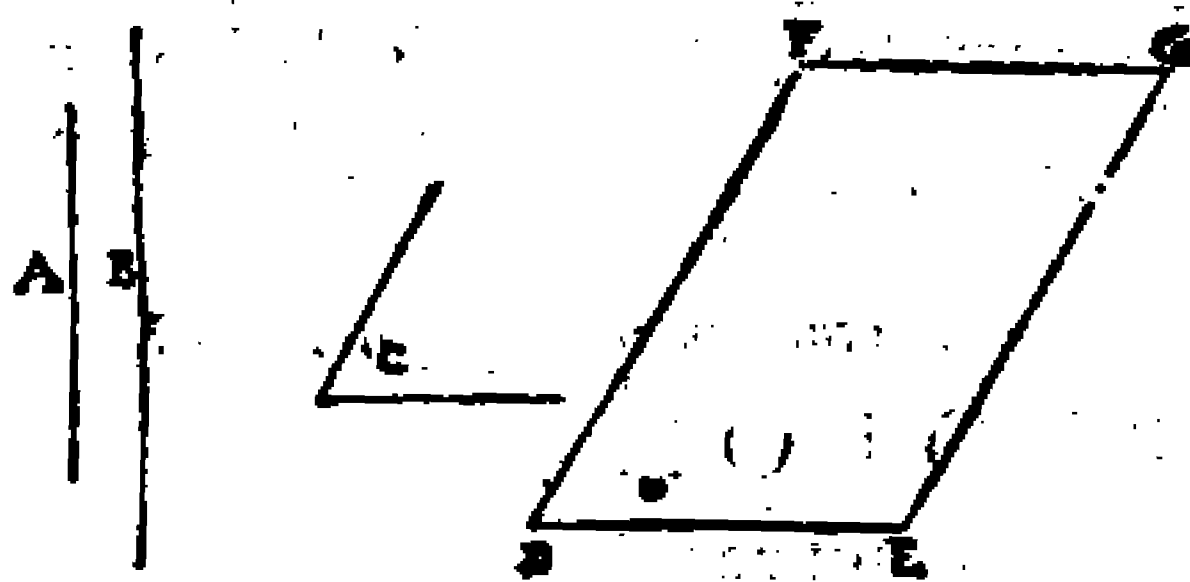
Ex hoc portò problemate, & illo, quod propof. 23. continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cuius unus angulorum aequalis sit, dato angulo rectilineo, latera quoque angulum illum comprehendencia danti duabus rectis lineis aequalia.

b 23. primi.

c 3. primi.

d 31. primi.

e 35. defin.



Si enim data recte AB, oporteatque constituere parallelogrammum habens angulum aequalem dato angulo rectilineo C, latera quoque circa illum angulum rectis AB, aequalia. Sumpta recta DE, quae recta A, sit aequalis, fiat angulus EDF, angulo C, & recta DF, recta B, aequalis. Deinde per E, agatur recta EG, ipsi DF, parallela, & per F, recta FG, ipsi DE, parallela secans EG, in G. Quoniam ergo & latera DF, EG, & DE, FG, parallela sunt, ex constructione; parallelogrammum erit DEFG. Quod cum ex constructione, habeat angulum D, angulo dato C, aequalem, & latera DE, DF, circa dictum angulum D, datis rectis AB, aequalia; factum erit, quod proponitur.

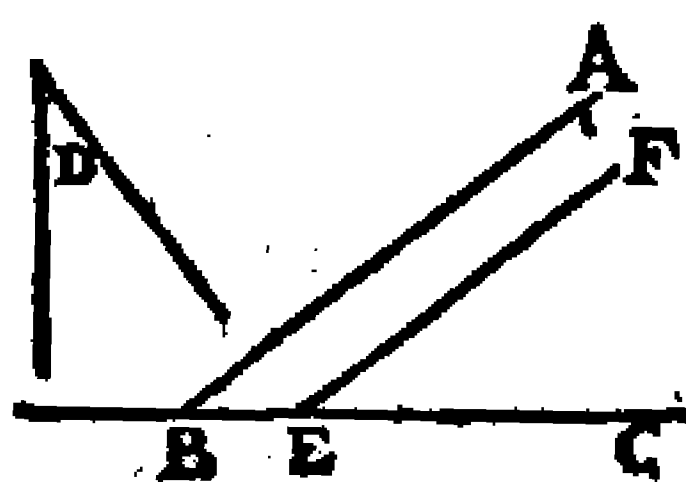
PAR 1 ratione ex hoc problemate, & propositione 23. ducemus à puncto extra datam rectam lineam proposito lineam rectam, qua cum data recta angulum efficiat, dato angulo rectilineo aequalem, ut ad propositionem 23. polliciti sumus.

f 23. primi.

g 31. primi.

h 29. primi.

i 1. pion.

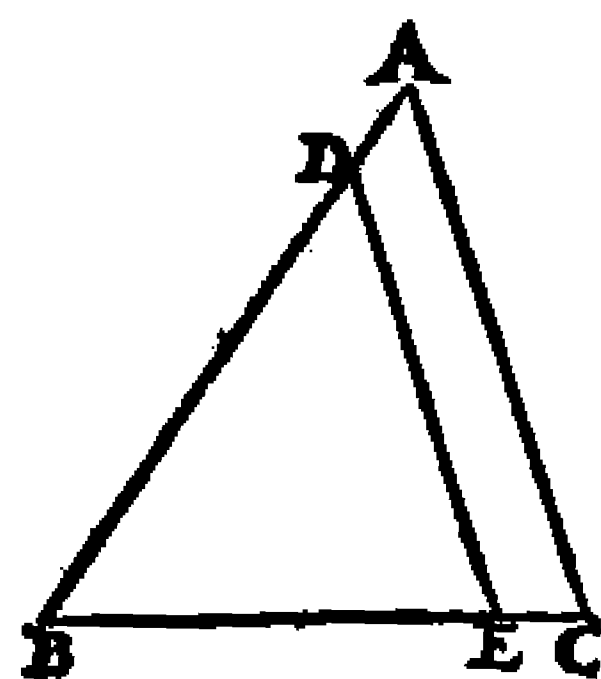


Si enim datum punctum A, extra rectam BC, & datum angulus rectilineus D, oporteatque, ex A, ad rectam BC, ducere lineam rectam, qua cum ea angulum, dato angulo D, aequalem comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, in linea BC, constituatur in eo angulus CEF, angulo D, aequalis. Si igitur recta EF, per datum punctum A, transeat, factum erit, quod iubetur. Si vero non transeat per A, & ducatur per A, recta AB, ipsi EF, parallela secans BC, in B. Dico angulum ABC, angulo D, aequalem esse. Cum enim parallela sint AB, EF, erit angulus CEF, externus interno ABC, ex eadem parte oppositus, aequalis. Cum ergo & angulus D, angulo E, per constructionem sit aequalis, aequales inter se erunt anguli ABC, & D, quod est propositum.

Non videtur autem alienum ostendere hoc loco, recte Euclidem propof. 26. ut demonstraret aequalitatem laterum in duobus triangulis, ex aequalitate duorum angulorum, & unius lateris præcepisse, latum illud vel adiacere debere angulis aequalibus, vel certe subendere angulum aequalem. Nam nisi altera harum conditionum adsit, nihil colligetur.

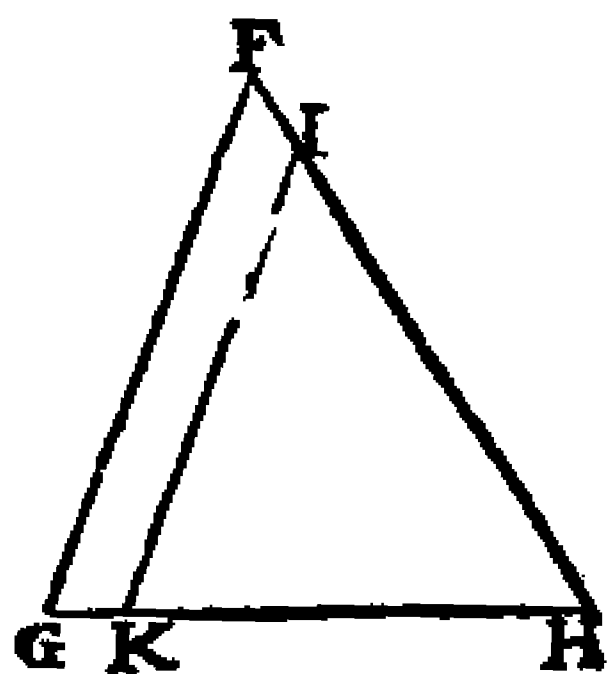
k 31. primi.

l 29. primi.



m 31. primi.

n 29. primi.



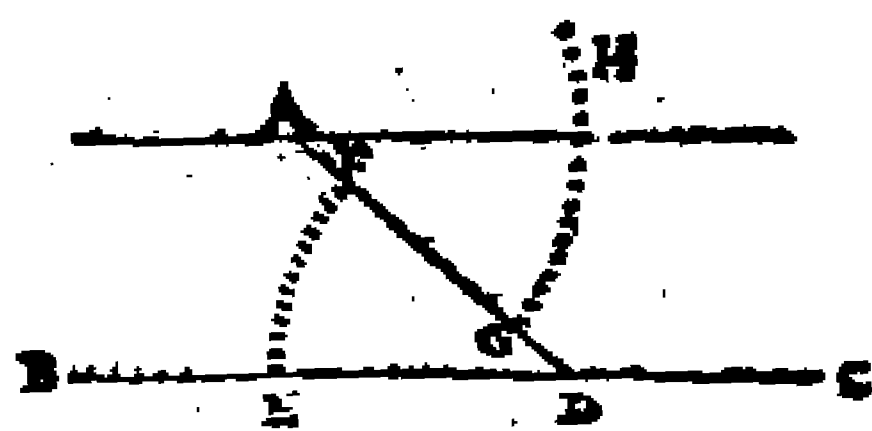
Si enim triangulum ABC, sintque latera AB, AC, latere BC, maiora. Abscindatur BD, aequalis ipsi BC, & ducaturque DE, ipsi AC, parallela. eritque angulus BED, angulo C, aequalis. Quare duo anguli B, C, trianguli ABC, duobus angulis B, E, trianguli DBE, aequales sunt, uterque utrique, latiusque BC, lateri DB, aequale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus aequalia non sint. Est enim BE, minus, quam BC, atque adeo neque lateri AC, neque lateri AB, aequale esse potest, quod hac latera maiora ponantur latere BC. Causa huius rei est, quod latus BC, in triangulo ABC, adiacet angulo dicto, at latus DB, in triangulo DBE, opponitur uni angulorum dictorum, nimirum angulo DEB, qui angulo C, aequalis est.

Si rursus triangulum FGH, sintque latera FG, FH, latere GH, maiora, & FH, maius, quam FG. Abscindatur HI, ipsi FG, aequalis, & ducaturque IK, ipsi FG, parallela. eritque angulus HKI, angulo G, aequalis. Sunt ergo duo anguli H, G, trianguli FGH, duobus angulis H, K, trianguli IKH, aequales, uterque utrique, latiusque FG, lateri IH, aequale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus aequalia non sint. Est enim HK, minus, quam HG, atque adeo neque lateri HG, neque lateri FH, aequale esse potest, quod latus FH, maius etiam ponitur, quam GH. Ratio huius rei est, quod latus FG, in triangulo FGH, opponitur angulo H, at latus IH, opponitur angulo K, in triangulo IKH, qui non ponitur aequalis angulo H, sed angulo G, est aequalis, qui

maior est angulo H, propterea quod latus FH, maius posuimus latere FG. Distulimus hanc demonstrationem hunc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.

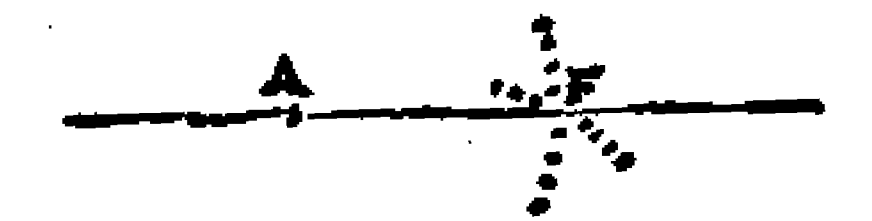
PRAXIS.

P R A X I S.

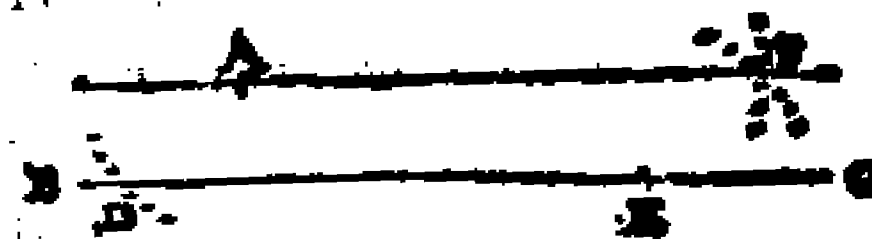


Si r ducenda parallela ipsi BC , per punctum A . Ducatur recta AD , utrunque ad BC , & ex D , & A , ad idem intervallum quodlibet describantur duo arcus ad diversas partes, unus ad partes B , alter ad partes C : Deinde beneficio circini arcui EF , abscindatur ex arcu altero arcus GH , aequalis. Si igitur ex A , per H , recta ducatur, erit hac parallela ipsi BC . Nam alterni anguli EDF , HAG , sunt aequales, ut constat ex praxi propof. 23. & c.

227. primi.



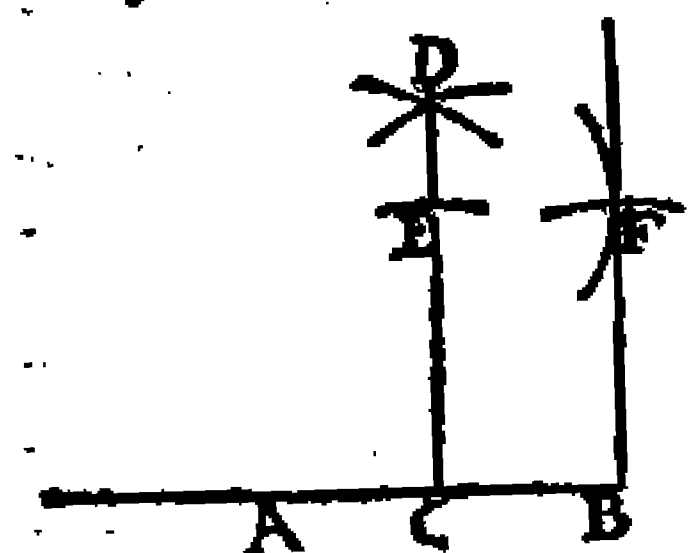
ALIO modo ducetur per idem punctum A , datum linea parallela linea data BC , hac arte: Ex centro A , ad quodvis intervallum describatur arcus secans BC , in puncto D ; & eodem intervallum ex D , sumatur punctum E , in eadem recta BC : Deinde eodem intervallum ex A , & E , describantur duo arcus secantes sese in F . Nam ducta recta AF , erit parallela recta BC . Quoniam enim propter idem intervallum assumptum recta AF , aequalis est recta DE , & recta AD , recta EF , si ducerentur haec lineae; erit AF , opposita DE , parallela, ut postea demonstrabimus propof. 34.



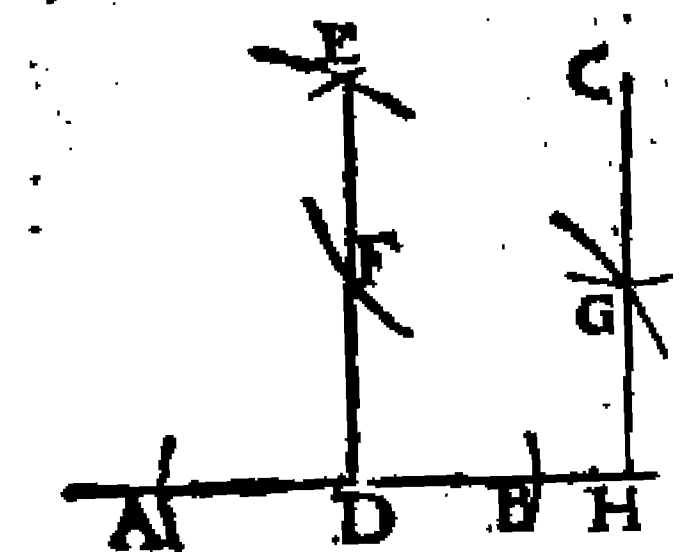
Quod si punctum A , vicinum fuerit recta BC , commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A , sumatur punctum D , in BC , ad quodvis intervallum; Ex ex quovis puncto eiusdem rectae BC , nempe E , quod tamen aliquantulum distet a puncto D , (Quo enim maior fuerit distantia inter D , & E , eo facilius, & accuratius parallela ducatur) eodem intervallum arcus describatur ad partes A : Deinde ex A , intervallum DE , alter arcus descriptus secet priorem arcum in F . Recta namque ducta AF , erit parallela recta BC , ut prius; quia recta AF , aequalis est recta DE , ob idem intervallum; & recta AD , recta EF , si haec recta ducta essent, & c.

Ex his facile ducemus ex puncto extremo alicuius lineae perpendicularē lineam ad ipsam datam lineam, etiam si linea produci non possit, quod in scholio propositionis 11. promissimus. Sic enim recta AB , ex cuius extremo puncto B , educenda sit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quovis C , abscindatur recta CB , aequalis CA , & ex A , & B , ad quodvis intervallum duo arcus describantur secantes sese in D , ducaturq; recta DC , quae ad AB , perpendicularis erit, ut ad propositionem 11. scripsimus. Deinde per B , ducatur ipsi CD , parallela, hoc modo, secundum praxim huius 31. propositionis proximè explicatam. Ex CD , abscissa recta quancunque CE , describatur ex B , ad intervallum CE , arcus, quem in F , secet alius arcus ex E , ad intervallum CB , descriptus, ducaturq; recta BF . Haec namque ipsi CD , parallela erit, ut ex praxi huius propositionis 31. liquet. Igitur cum angulus ACD , aequalis sit interno CBF , sit autem ACD , rectus, erit & CBF , rectus, ac pròinde BF , ad AB , perpendicularis erit.

b19. primi.



SIMILITER si data sit recta AB , & punctum extra ipsam C , in extremo ferè plani, in quo recta illa iacet, ducemus ex C , ad AB , perpendicularē, neque producta linea, neque extenso plano infra rectam AB , ut polliciti sumus ad propositionem 12. hoc modo: Sumpto puncto D , utrunque in linea AB , abscindantur utrinque inter se aequales DA , DB , & ex A , & B , ad quodvis intervallum duo arcus describantur, secantes sese in E , ducaturq; recta ED , quae ex praxi propositionis 11. ad AB , perpendicularis erit. Deinde per C , ducatur ipsi DE , parallela, hoc modo, secundum praxim huius propositionis 31. Ex dato puncto C , ad quodvis intervallum describatur arcus secans rectam DE , in F : eodemque intervallum ex D , versus C , alius arcus describatur, quem in G , interfecet alius arcus ex C , ad intervallum DF , delineatus. Recta namque ducta ex C , per G , secans AB , in H , parallela erit recta DE , ex praxi huius propositionis 31. Quare, ut proximè scripsimus, CH , ad AB , perpendicularis erit, sicuti & ED , ad eandem perpendicularis est.



propositionis 31. Quare, ut proximè scripsimus, CH , ad AB , perpendicularis erit, sicuti & ED , ad eandem perpendicularis est.

THEOR. 22. PROPOS. 32.

12.

CUIVSCUNQUE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est aequalis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt re-
ctis aequales.

PRODUCATUR in triangulo ABC , latus BC , ad D . Dico primò, angulum externum ACD , aequalē esse duobus internis, & oppositis simul A , & B . Ducatur. n. ex C , linea CE parallela rectae AB , a 31. primi.

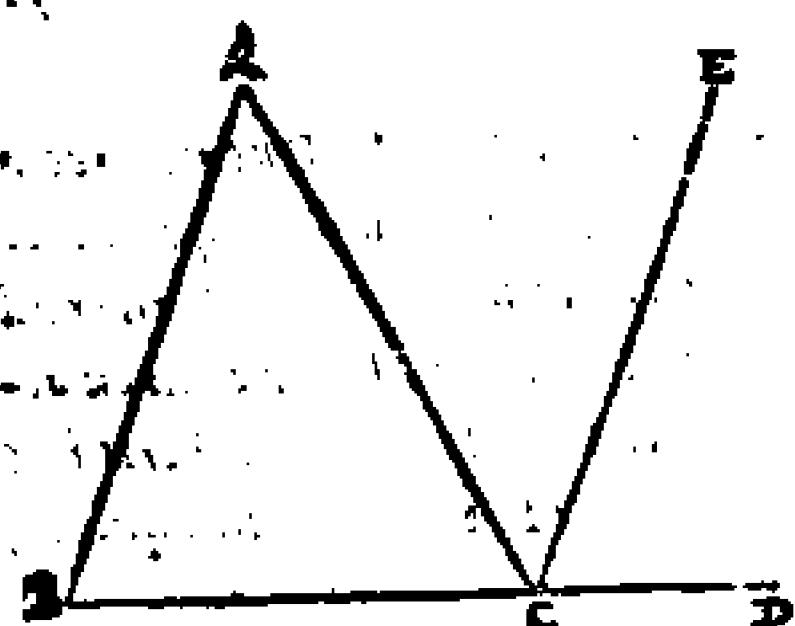
a 29. primi.

b 29. primi.

c 2. prom.

d 1. prom.

e 13. primi.



ACB, æquales tribus A, B, & ACB: Sed duo ACD, ACB, æquales sunt duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, ACB, duobus sunt rectis æquales. Quare cuiuscunque trianguli vno latere protracto, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

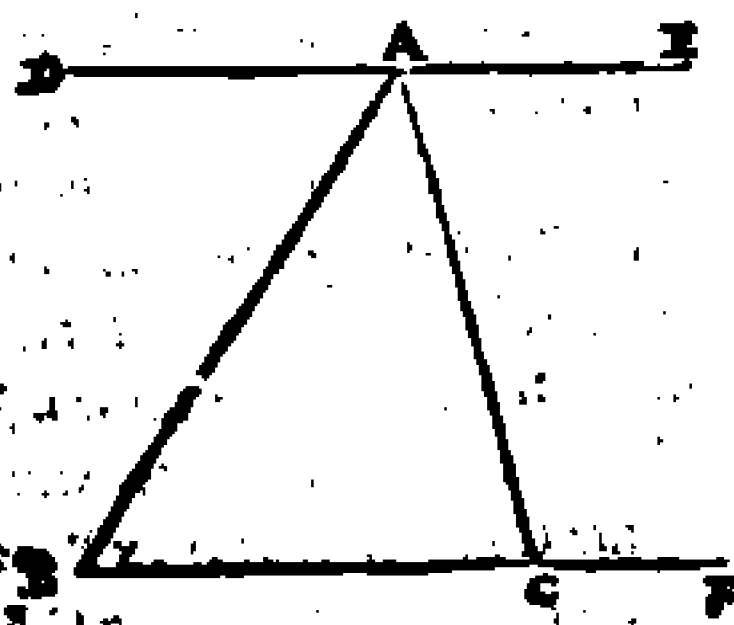
Ex M. demonstratum fit, propositione 16. angulum externum cuiusvis trianguli maiorem esse vtralibet interno, & opposito, hic autem, eundem externum eisdem internis simul esse æqualem, perspicuum est, alterutrum internorum, & oppositorum superari ab externo, reliquo interno angulo opposito. Vt in triangulo proposito angulus A, internus superatur ab angulo externo ACD, angulo B, interno: Et angulus B, internus superatur ab eodẽ externo angulo ACD, angulo A, interno, quandoquidem angulus ACD, duobus angulis A, & B, est ostensus hoc loco æqualis. Rursum, quia demonstratum est propositione 17. duos angulos cuiuslibet trianguli quomodocunque sumptos, duobus esse rectis minores, hic vero omnes tres duobus rectis æquales esse, manifestum est, duos a duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, a duobus rectis deficiunt angulo ACB, &c.

a 21. primi.

b 29. primi.

c 2. prom.]

d 1. primi.



e 13. primi.

f 3. prom.

Huc pertinet prima

huius pagi

na figura.

g 2. prom.

h 32. primi.

OMNE porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, ut refert Eudemus, Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum ABC, & per punctum A, ducatur recta DE, parallela BC. Quoniam igitur anguli alterni DAB, & ABC, æquales sunt, si addantur æquales EAC, & ACB, (sunt enim & hi alterni) erunt duo anguli DAB, EAC, duobus ABC, ACB, æquales. Addito ergo communi angulo BAC, erunt tres anguli DAB, BAC, CAE, æquales tribus angulis ABC, BAC, ACB. Sed anguli DAB, BAC, CAE, æquales sunt duobus rectis, ut constat ex propositione 13. Igitur & in triangulo ABC, anguli ABC, BAC, ACB, duobus sunt rectis æquales, quod est propositum. Ex hoc autem facile concludemus, angulum externum ACF, si latus BC, sit protractum, æqualem esse duobus internis, & oppositis ABC, BAC. Quoniam enim anguli ABC, BAC, ACB, æquales sunt duobus rectis, ut ostensum fuit. Sunt autem & anguli ACF, ACB, duobus rectis æquales. Erunt anguli ABC, BAC, ACB, angulis ACF, ACB, æquales. Dempso igitur communi angulo ACB, remanebit angulus ACF, duobus angulis ABC, BAC, æqualis.

FACILE etiam converteri poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, ut angulus externus æqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur CD, recta, sitq, angulus ACD, æqualis duobus angulis ABC, BAC. Dico, rectas BC, CD, in directum iacere. Cum enim angulus ACD, æqualis sit angulis ABC, BAC, si addatur communis angulus ACB, erunt anguli ACD, ACB, æquales angulis ABC, BAC, ACB. Sed ABC, BAC, ACB, æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli ACD, ACB, duobus erunt rectis æquales. Quare BC, CD, vnam lineam rectam constituent.

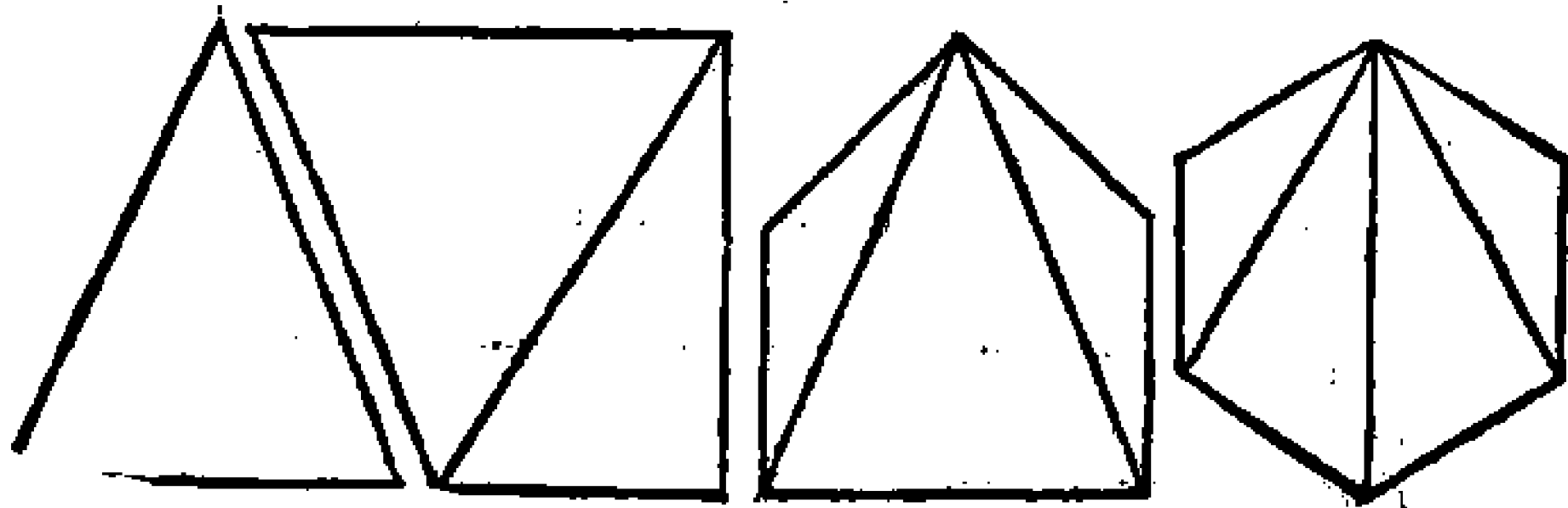
QUOT ANGLIS RECTIS AEQVALEANT anguli omnes interni cuiuscunque figuræ rectilinae.

DE OBS modis ex hac propositione 32. colligemus, quotnam rectis angulis æqualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilinae, quorum primus hic est.

OMNES anguli figuræ rectilinae cuiusvis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilinas.

Hoc est, Omnes anguli prima figuræ rectilinae æquales sunt bis vni recto, id est, duobus rectis. Anguli vero secunda figuræ rectilinae æquales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis. Anguli quæ tertia figuræ rectilinae æquales sunt bis tribus rectis, sex videlicet rectis. Et sic de reliquis. Etenim

autem locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam dua linea recta superficiem non concludunt, unde nec figuram constituunt, sed cum minimum tres recta linea ad figuram constitutionem requiruntur. Ex quo fit, triangulum, quia habet tria latera, totidemque angulos, esse primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus, relinquitur vnum. Sic erit figura habens 20. latera, seu angulos, inter figuras rectilineas decima octaua cum binarius subtractus ex 20. relinquat 18. Idem iudicium de alijs figuris est habendum. Itaque figura contenta 20. lateribus, cum sit decima octaua, habebit angulos 20. aequivalentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, ut dictum est. Ita quoque omnes 10. anguli figura 10. lateribus contenta, aequivalent 16. angulis rectis, cum talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipsa est inter figuras, seu quot ipsa habet angulos laterum, binario dempto. Nam a quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt linea recta, solum ad duos propinquos angulos non possunt duci. Quare in tot triangula distribuetur, quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non posse diuidi in alia triangula: quadrangulum vero in duo



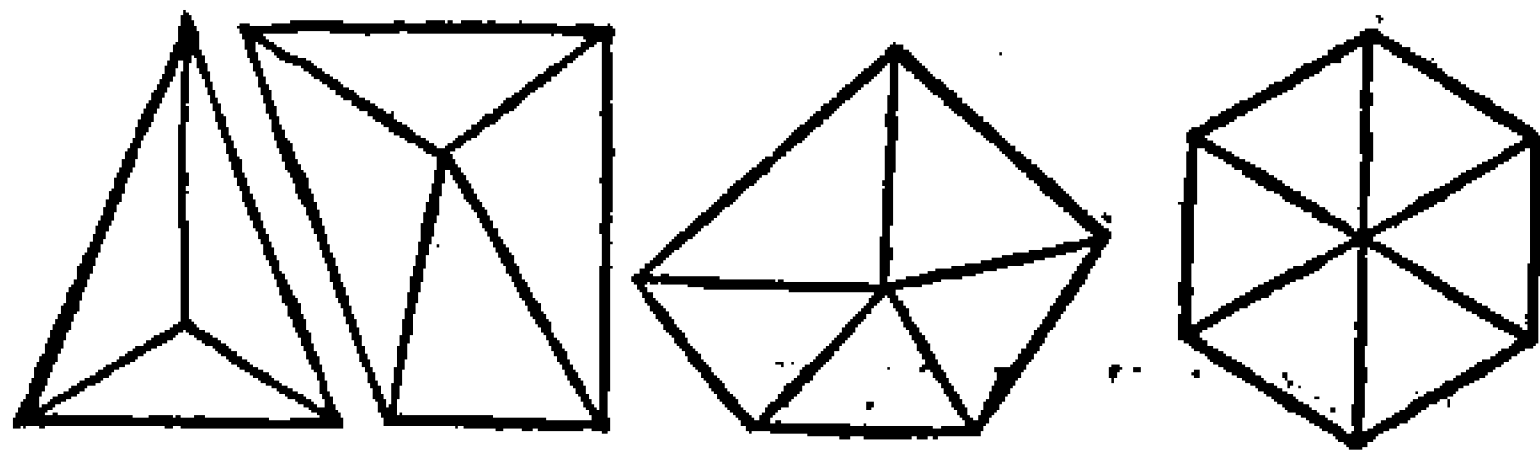
secari: quinquangulum in tria: sexangulum in quatuor, &c. Cum igitur anguli horum triangularum constituant omnes angulos rectilineae figurae propositae, & omnes anguli cuiuslibet triangu-

li aequales sint duobus rectis: perspicuum est omnes angulos figurae cuiusvis rectilineae aequales esse bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc est, quota ipsa est inter rectilineas figuras. Quod quidem manifeste perspicitur in propositis figuris.

SECUNDVS modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figurae rectilineae, hic est.

OMNES anguli figurae rectilineae cuiusvis, aequales sunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

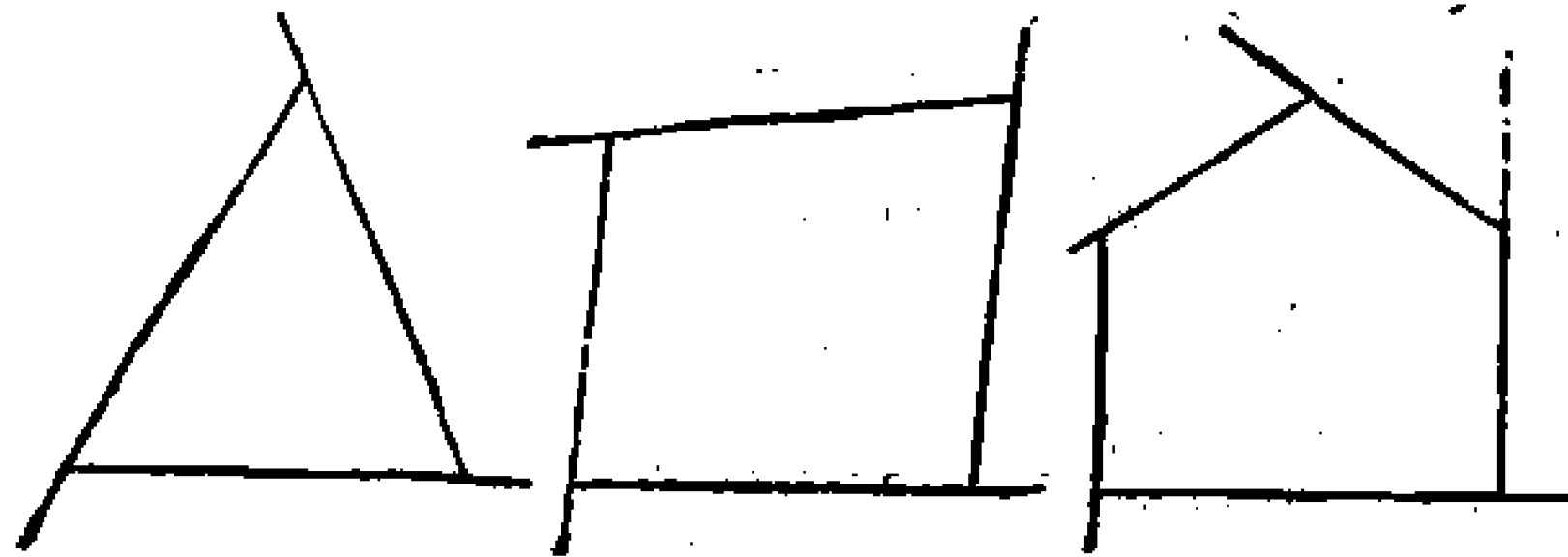
HOC est, anguli cuiuslibet trianguli aequales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figurae contenti 20. latera aequivalent bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36.



rectis angulis, &c. Demonstratio autem huius rei talis est: Si a quouis puncto intra figuram assumpto ad omnes angulos recta linea ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulorum figurae ipsa continet. Cum igitur anguli cuiusvis trianguli aequales sint duobus rectis, e-

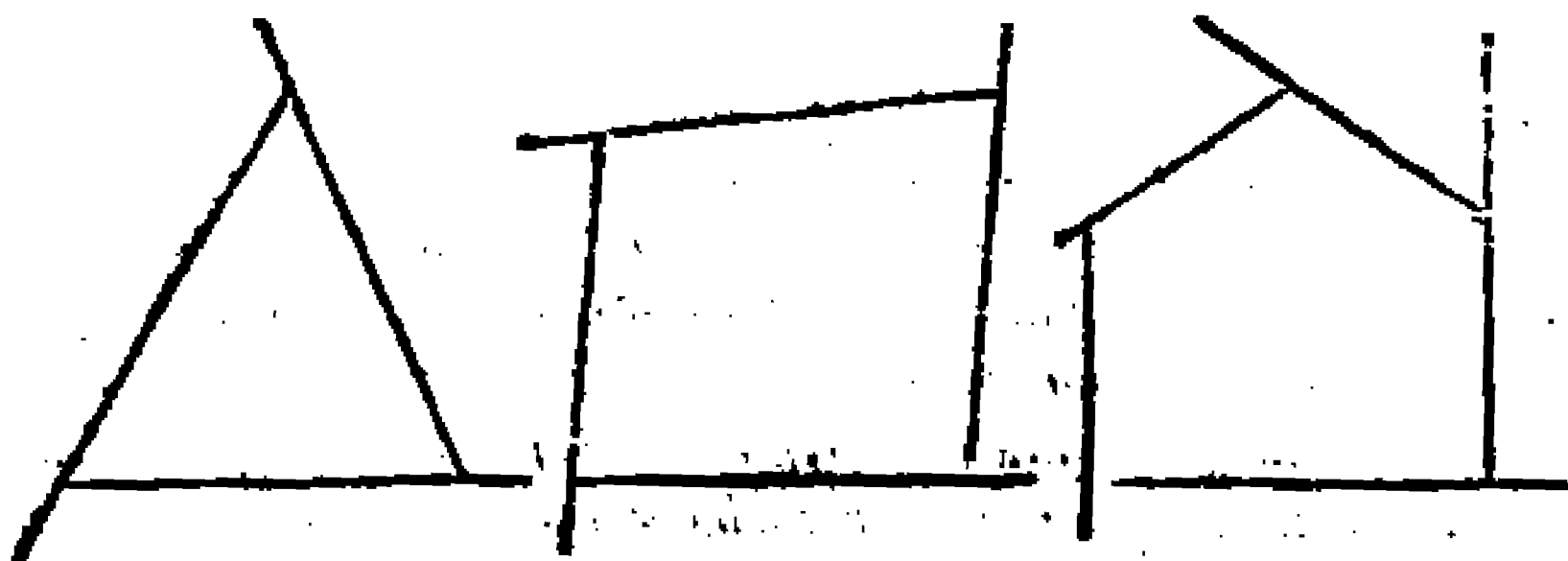
vunt omnes anguli illorum triangulorum aequales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum intra figuram assumptum consistentes non pertinent ad angulos figurae rectilineae propositae, ut constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli constituentes angulos figurae propositae, bis quoque tot rectis aequales, demptis illis circa punctum assumptum constitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot sunt, circa dictum punctum existentes aequales 4. rectis tantummodo, ut collegimus ex proposit. 15. Quamobrem anguli cuiusque figurae bis tot rectis sunt aequales, ablati quatuor, quot ipsa figura continet angulos, seu latera, quod est propositum.

Ex hoc porro secundo modo liquet, si singula latera figurae cuiusvis rectilineae producantur ordinatim versus eandem partem, omnes angulos externos aequales esse quatuor rectis. Nam quilibet externus, & ille deinceps internus, aequantur duobus rectis; atque adeo omnes externi una cum omnibus internis aequales erunt bis tot rectis, quot latera, angulorum figurae continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis aequales, minus



quatuor, ut demonstramus. Si igitur interni auferantur, remanebunt externi 4. tantum rectis aequales, qui nimirum desunt internis angulis, ut interni & externi simul bis tot rectos efficiant, quot latera figuram propositam ambiunt. Exemplum: In triangulo quouis, anguli interni et c.

a 32. primi.



terni simul aequales sunt sex rectis. Cum igitur interni ^a duobus sint rectis aequales, erunt soli externi aequales quatuor ^b unitatibus rectis. In quadrilatero anguli externi & interni simul aequales sunt octo rectis. Cum igitur interni soli aequales sint quatuor rectis, ut ostendimus, erunt & soli externi quatuor etiam rectis

aequales. In pentagono, seu quinquangulo, anguli interni & externi sunt aequales 10. rectis. Quoniam vero interni adaquantur sex rectis, ut demonstravimus, remanebunt externi aequales quatuor tantum rectis. Quae omnia in appositis figuris conspiciuntur. Eademq; est ratio in alijs omnibus figuris.

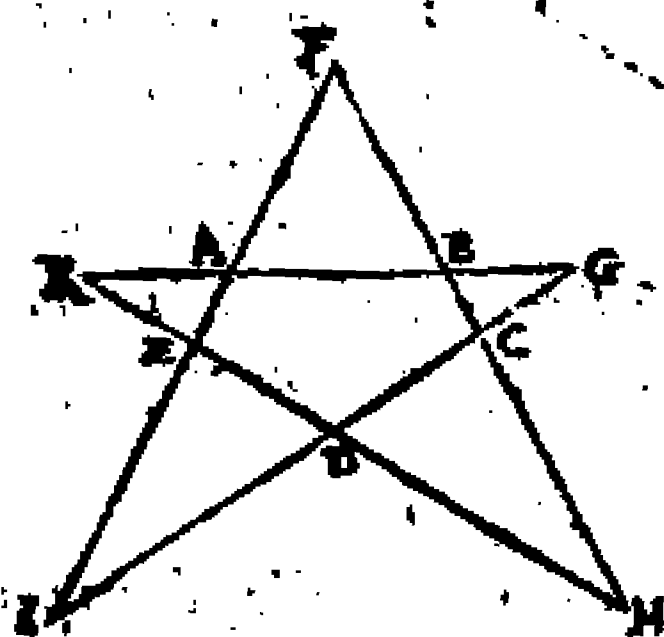
EX CAMPANO.

Si pentagoni singula latera producantur in partem utramque, ita ut quilibet duo extrapentagonum coeant, efficietur quinque anguli ex lateribus coeuntibus aequales duobus solum rectis.

b 32. primi.

c 2. pron.

d 32. primi.



In pentagono $ABCDE$, latera in utramque partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K . Dico quinque angulos F, G, H, I, K , aequales tantum esse duobus rectis. In triangulo enim BHK , cum latus HB , sit protractum ad F ,^b erit externus angulus FBK , duobus internis, & oppositis H, K , aequalis. Eadem ratione in triangulo AIK , erit externus angulus FAK , aequalis duobus internis, & oppositis I, G . Quare duo anguli FBA, FAB , aequales sunt quatuor angulis G, H, I, K . Addito igitur communi angulo F ,^c erunt tres anguli A, B, F , trianguli ABF , aequales quinque angulis F, G, H, I, K . Sed anguli A, B, F , trianguli ABF ,^d aequales sunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli F, G, H, I, K , duobus rectis sunt aequales. Quod est propositum.

COROLLARIUM I.

Ex hac propos. 32. colligitur tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos aequales esse tribus angulis cuiusque alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, ^e aequales sunt duobus angulis rectis. Unde si duo anguli unius trianguli fuerint aequales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus unus reliquo huius aequalis, equiangulaque erunt ipsa triangula.

COROLLARIUM II.

Constat etiam in omni triangulo isoscele, cuius angulus lateribus aequalibus comprehensus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam reliqui duo simul conficiunt unum rectum, cum omnes tres sint aequales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare & cum duo reliqui inter se sint aequales, erit quilibet eorum semirectus. At vero si angulus aequalibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt uno recto, &c. Si denique dictus angulus existeret acutus, quoque reliquorum maiorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul maiores erunt uno recto, &c.

f 32. primi.

g 5. primi.

COROLLARIUM III.

Perpendicularis quoque est, quemcumque angulum trianguli aequilateri esse duas tertias partes unius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti,^h quibus aequales sunt tres anguli trianguli aequilateri, divisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes unius recti.

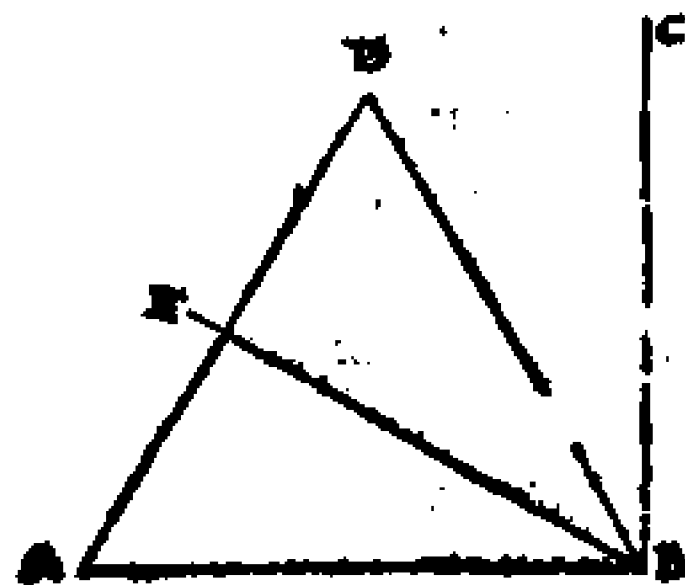
h 32. primi.

COROLLARIUM IV.

Quare etiam si ab uno angulo trianguli aequilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, consistunt duo triangula scalena, quorum unumquodque habet unum angulum rectum prope perpendicularem, aliud duas tertias partes unius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli aequilateri; reliquum denique tertiam partem unius recti.

SCHO-

S C H O L I V M.

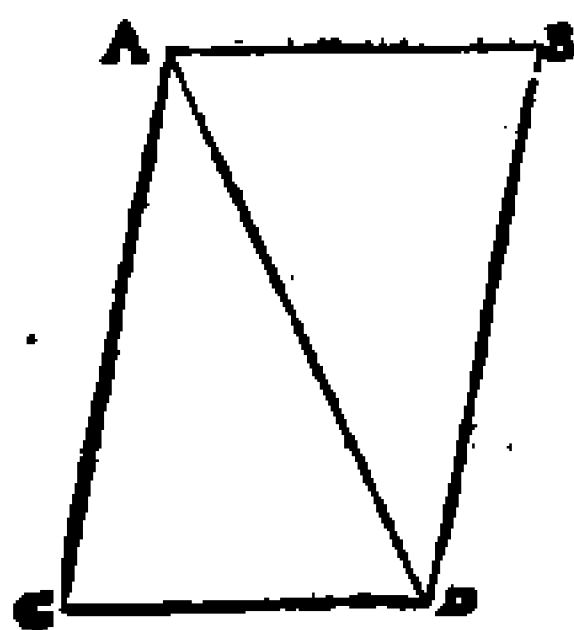


PORRO ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus re-
ctus in tres angulos aequales diuidatur. Sit enim angulus rectus ABC . Su-
per rectam AB , ^a constituatur triangulum aequilaterum ABD . Et quia ^{a 11. primi.}
per corollarium tertium angulus ABD , facit duas tertias partes anguli
recti ABC ; erit angulus CBD , pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur an-
gulo ABD , ^b bifariam, per rectam BE , erit uterque angulus ABE , EBD , ^{b 9. primi.}
tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus ABC , diuisus est in tres an-
gulos aequales. Quod est propositum.

THEOR. 23. PROPOS. 33.

33.

RECTAE lineae, quae aequales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungunt;
& ipsae aequales, & parallelae sunt.



SINT rectae lineae AB , CD , aequales, & parallelae; Ipsas autem con-
iungant ad easdem partes rectae AC , BD . Dico AC , BD , aequales quo-
que esse, & parallelas. Ducatur enim recta AD . Quoniam igitur AD ,
incidit in parallelas AB , CD , ^a erunt anguli alterni BAD , CDA , ^{a 29. primi.}
aequales. Quare cum duo latera BA , AD , trianguli BAD , aequalia sint
duobus lateribus CD , DA , trianguli CDA , utrumque utrique, &
anguli quoque dictis lateribus inclusi aequales; ^b erunt bases BD , AC , ^{b 4. primi.}
aequales, & angulus ADB , angulo DAC , aequalis. Cum igitur hi an-
guli sint alterni inter rectas AC , BD , ^c erunt AC , BD , parallelae; Pro-
batur autem iam fuit, easdem esse aequales. Rectae ergo lineae, quae a-
equales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum. ^{c 27. primi.}

S C H O L I V M.

DIXIT Euclides, lineas aequales, & parallelas ad easdem partes debere coniungi, ut ipsae coniungentes
sint & aequales, & parallelae. Nam si ad partes diuersas coniungerentur, ut ad A , & D . Item ad B , & C , neque
coniungentes linea essent parallela vnquam, sed perpetuo se inuicem secarent, neque essent aequales, nisi raro
admodum, ut ex sequenti propositione constabit.

THEOR. 24. PROPOS. 34.

34.

PARALLELOGRAMMORVM spatiorum aequalia sunt inter se, quae ex aduer-
so, & latera, & anguli; atque illa bifariam secant diametrum.

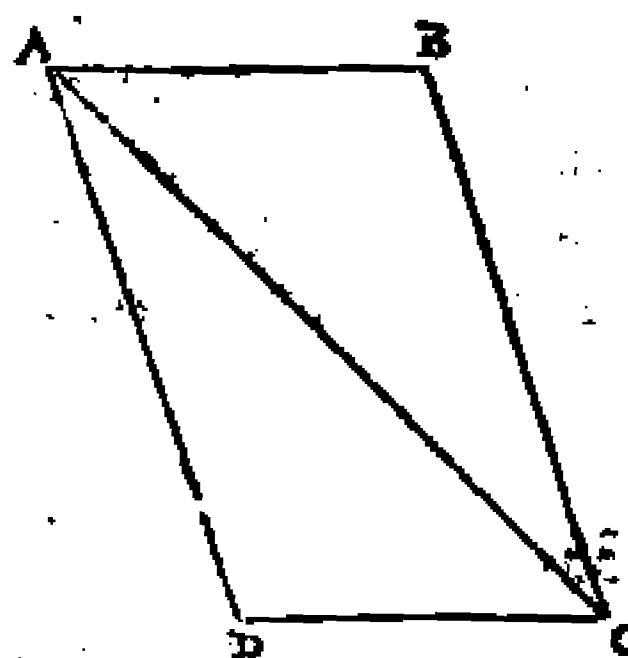
SIT parallelogrammum $ABCD$, quale definitur in definitione 35. Dico latera opposita AB ,
 DC , inter se esse aequalia, nec non latera opposita AD , BC . Item angulos oppositos B , & D , a-
equales inter se esse, nec non & angulos oppositos DAB , & DCB . Denique ducta diametro AC ,
parallelogrammum ipsum bifariam secari. Cum enim AB , DC , sint parallelae, ^a erunt anguli al- ^{a 29. primi.}
terni BAC , DCA , aequales. Rursus quia AD , BC , sunt parallelae, ^c ^{c 29. primi.}
erunt & anguli alterni BCA , DAC , aequales. Itaque cum duo anguli
 BAC , BCA , trianguli ABC , aequales sint duobus angulis DCA ,
 DAC , trianguli ADC , uterque utrique, & latus AC , dictis angulis
adiacens, commune utrique triangulo; ^f erit recta AB , aequalis oppo- ^{f 26. primi.}
sitae rectae DC , & recta BC , oppositae rectae AD . quod est primum. E-
rit rursus eadem de causa angulus B , angulo D , aequalis. Et quia si aequa-
libus angulis BAC , DCA , addantur aequales anguli DAC , BCA ,
toti quoque anguli BAD , BCD , ^g ^{g 1. primi.}
sunt aequales; constat secundum,
angulos nimirum oppositos esse aequales. Quoniam vero duo latera AB ,
 BC , trianguli ABC , aequalia sunt duobus lateribus CD , DA , trianguli
 CDA , utrumque utrique, & angulus B , angulo D , aequalis, ut iam ostendimus; ^h ^{h 4. primi.}
erunt triangula ABC , CDA , aequalia, ideoque parallelogrammum $ABCD$, diuisum erit bifariam a diametro AC ,
quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorum aequalia sunt inter se, quae
ex aduerso, &c. Quod ostendendum erat.

S C H O L I V M.

APPOSITI dixit Euclides, solummodo parallelogramma a diametro diuidi bifariam, non autem &
angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat anguli etiam bifariam diuiduntur a diametro: At in figu-
ra Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inaequales. Quae omnia perspicua erunt, si prius ostende-
f

vimus, quatuor hasce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.



a 8. primi.

b 4. primi.

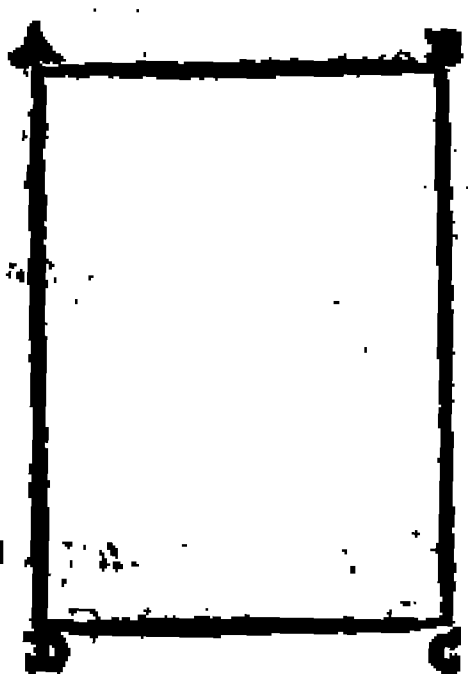
c 27. primi.

SINT in quadrilatero $ABCD$, latera opposita AB, DC , æqualia; Item opposita latera AD, BC . Dico $ABCD$, esse parallelogrammum: hoc est, lineas AB, DC , esse parallelas: Itemque lineas AD, BC . Ducta enim diametro AC , erunt duo latera AB, BC , trianguli ABC , æqualia duobus lateribus CD, DA , trianguli CDA , utrumque utrique, & basis AC , communis. Igitur^a erit angulus B , angulo D , æqualis. Rursus quia latera AB, BC , æqualia sunt lateribus CD, DA , utrumque utrique, & anguli B, D , ostensi æquales; ^b erit angulus BAC , angulo DCA , alterno æqualis, & angulus BCA , alterno angulo DAC . Quare^c erunt AB, DC , parallelæ: Item AD, BC , quod est propositum.

HINC constat, Rhombum & Rhomboidem esse parallelogramma: quoniam opposita eorum latera sunt inter se æqualia, ut manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se æqualia, per eius definitionem. Convertitur autem hoc theorema primam partem propositionis 34. ut patet.

SECUNDUM theorema tale est.

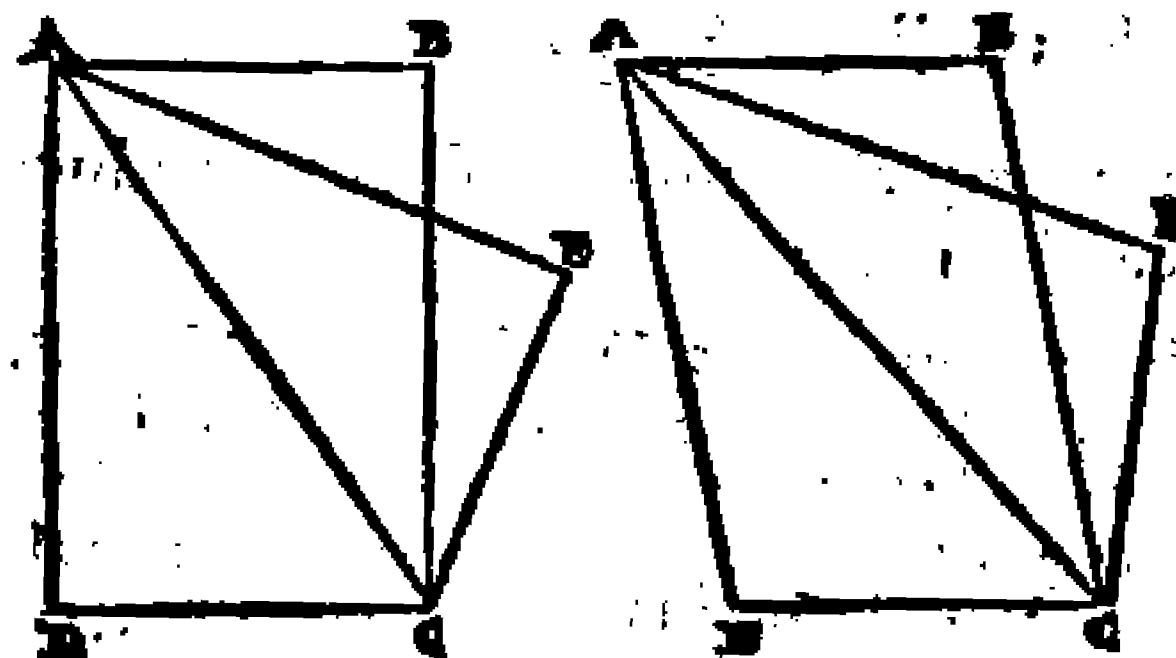
OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.



d 2. prob.

e 18. primi.

SINT in quadrilatero $ABCD$, anguli oppositi A, C , æquales: Item oppositi anguli B, D . Dico $ABCD$, esse parallelogrammum, hoc est, lineas AB, DC , esse parallelas: Itemque lineas AD, BC . Nam si æqualibus angulis A, C , addantur æquales anguli B, D :^d erunt duo anguli A, B , duobus angulis D, C , æquales, & idcirco anguli A, B , dimidium facient quatuor angulorum A, B, C, D . Cum igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, ut ad propositionem 32. demonstravimus, erunt duo A, B , duobus rectis æquales. Quare AD, BC , parallelæ sunt. Eadem ratione erunt AB, DC , parallelæ. Erunt enim duo quoque anguli A, D , duobus angulis B, C , æquales, &c. Quod est propositum. Ex hoc etiam manifestum est, Rhomboidem esse parallelogrammum, cum eius anguli oppositi æquales sint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppositi æquales, cum sint recti, ex eorum definitionibus.



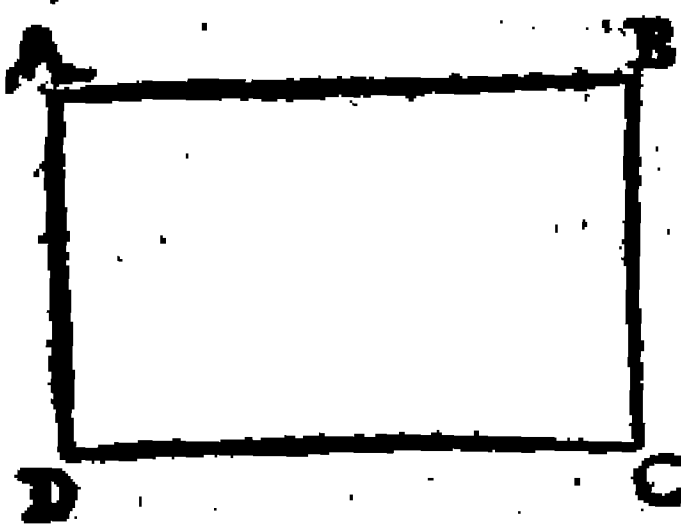
f 34. primi.

INTUS fiatq; trapezium $AECD$. Quoniam vero triangulum ABC , triangulo ADC , æquale est, quod diameter AC , bisariam secet parallelogrammum DB : Erit & triangulum AEC , triangulo ADC , æquale: ac proinde trapezium $AECD$, bisariam dividetur à diametro AC .

QUOD si quadrilaterum aliquod dividatur bisariam ab utraque diametro, illud parallelogrammum erit, ut ostendimus ad propos. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri potest.

TERTIUM theorema huiusmodi est.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.

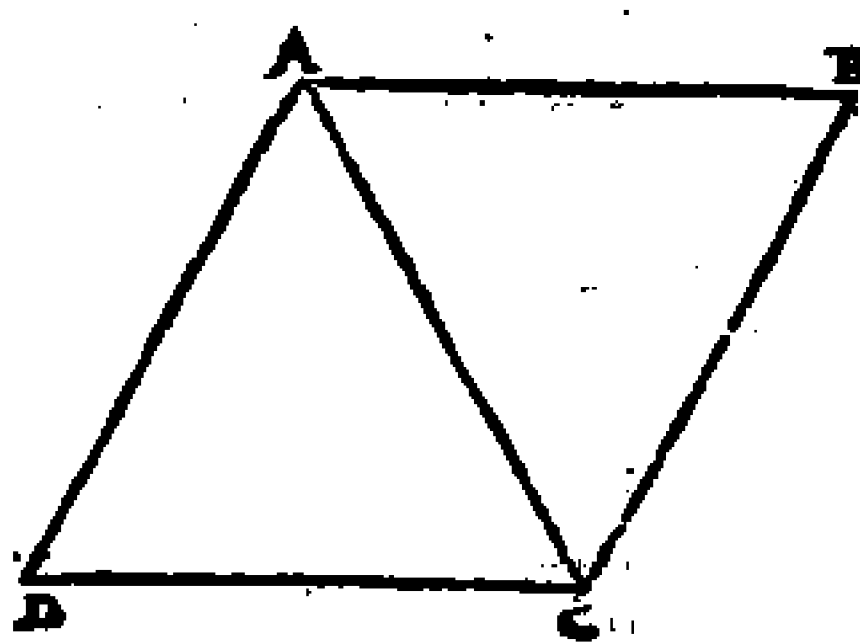
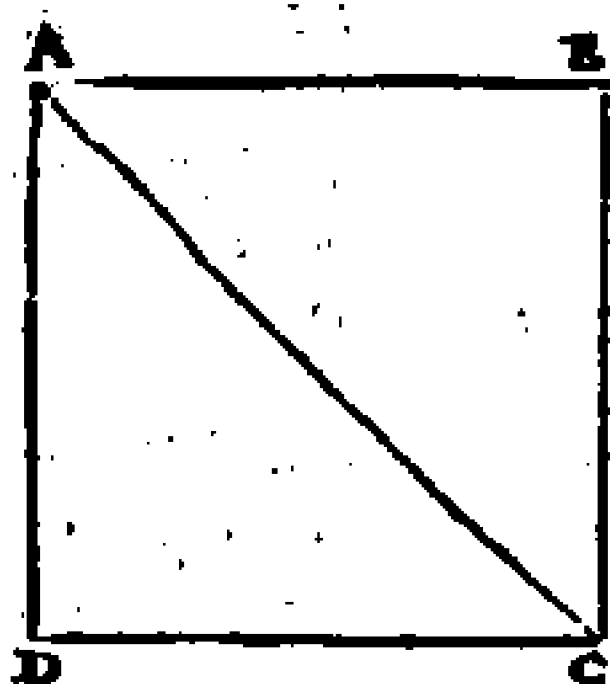


g 18. primi.

SINT in quadrilatero $ABCD$, omnes quatuor anguli recti. Dico ipsum esse parallelogrammum: hoc est, lineas AB, DC , esse parallelas: Itemque AD, BC . Quoniam enim duo anguli A, B , æquales sunt duobus rectis, cum sint duo recti, erunt AD, BC , parallelæ. Eodem modo erunt AB, DC , parallelæ: atque adeo $ABCD$, parallelogrammum. quod est propositum.

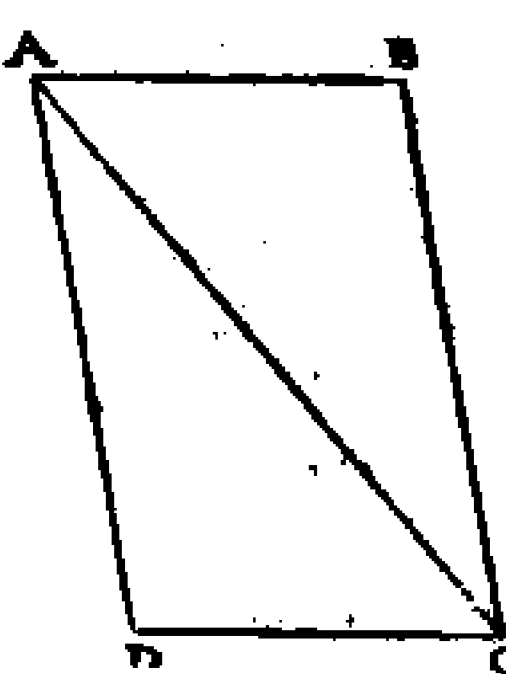
HINC rursus constat, Quadratum, & Altera parte longius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant recti, ut liquet ex eorum definitionibus.

HIS in hunc modum demonstratis, Quadratum scilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma, facile ostendimus, angulos Quadrati, & Rhombi, bisariam secari à diametro. Angulos

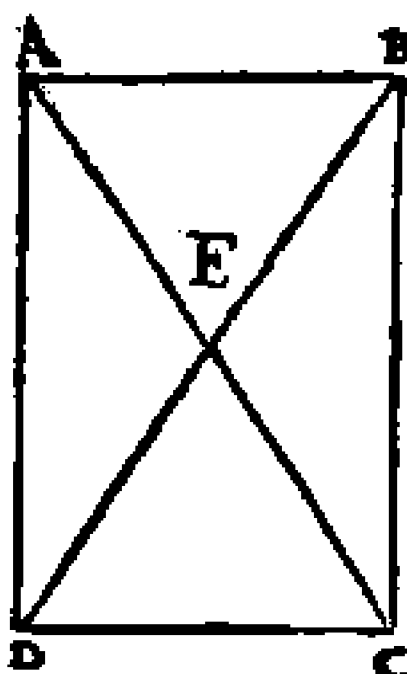
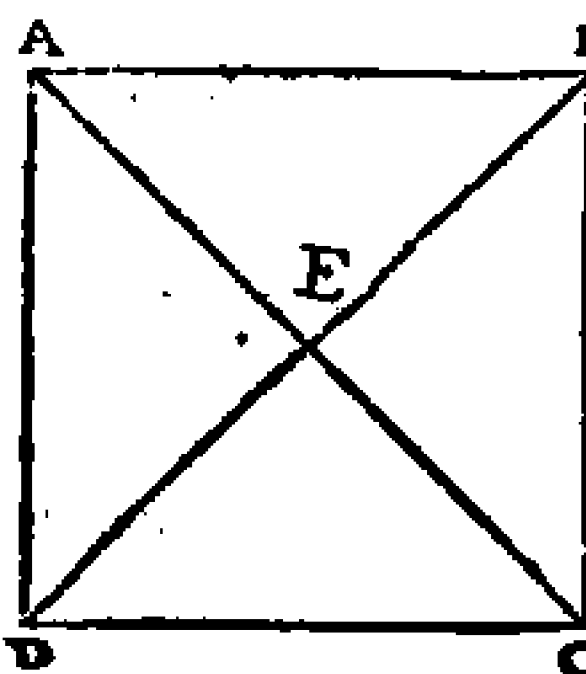


Angulos verò figura Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, vt paulò ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus $ABCD$, in quo diameter AC . Quoniam igitur duo latera BA , AC trianguli BAC , equalia sunt duobus lateribus DA , AC , trianguli DAC , vtrumque vtrique, & basis BC , basi DC ; (sunt enim ha figura equila-

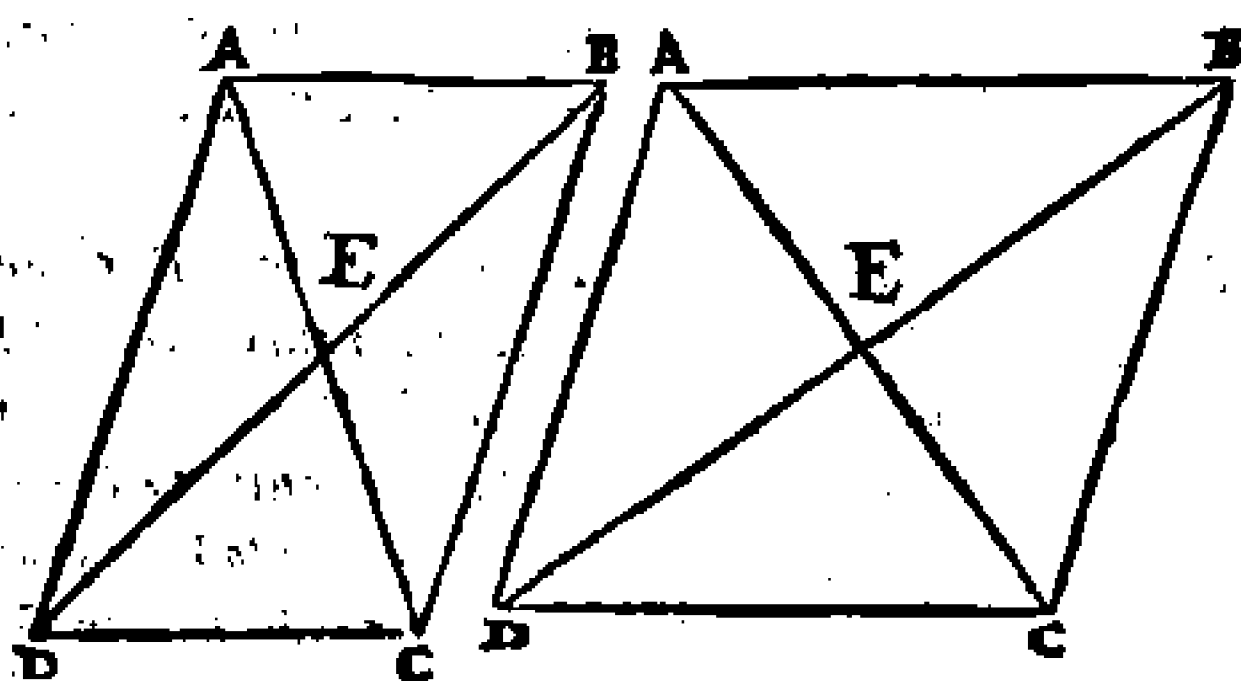
tera) ^a erunt anguli BAC , DAC , aequales. Quare angulus BAD , diuiditur bifariam. Eodem modo demon- a 8. primi.
strabimus, reliquos angulos bifariam secari à diametro.



Si rursus Altera parte longius, vel Rhomboides $ABCD$, in quo diameter AC sitq; maius latus AB . Quoniam igitur in triangulo ABC , latus AB , maius est latere BC , ^b e- b 18. primi.
rit angulus BCA , maior angulo BAC . Est autem angulus BCA , ^c equalis angulo DAC , alterno; q; BC , AD paralle- c 29. primi.
la sint. (Est enim $ABCD$, ostensum, esse parallelogrammū.) Igitur & angulus DAC , maior erit angulo BAC . Atq; pro-
pterea angulus BAD , inaequaliter diuiditur à diametro AC . Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem ap-
posite Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, so-
lum parallelogramma bifariam à diametro secari, non autem & angulos.



Eodem fere pacto ostendemus, duas diagonas in Quadrato, & Altera parte longiore aequales esse: At verò in Rhombo, & Rhomboides inaequales, maiorem quidem eam, qua angulos acutos, minorem verò eam, qua obtusos angulos dispersit. Sit enim quadratum, vel altera parte longius $ABCD$, in quo diagoni AC , BD , quas dico esse aequales. Cum enim duo latera AB , BC , trianguli ABC , equalia sint duobus lateribus AB , AD , trianguli BAD , vtrumque vtrique, & angulus ABC , angulo BAD , quia vterque rectus; ^d erit basis AC , ba- d 4. primi.
si BD , equalis: Ac proinde diagoni in quadrato, & figura altera parte longiore aequales sunt.



Si rursus Rhombus, vel Rhomboides, $ABCD$, in quo diagoni AC , BD : sitq; angulus BAD , maior ABC , minor. Non enim aequales sunt, quia alias vterque esset rectus, cum ambo ^e c 29. primi.
aequales sint duobus rectis: quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi & Rhomboidis. Dico diametrum BD , maiorem esse diametro AC . Quoniam enim duo latera AB , AD , trianguli BAD , equalia sunt duobus lateribus AB , BC , trianguli ABC , vtrumque vtrique, & angulus

BAD , angulo ABC , maior existit: ^f erit basis BD , maior base AC , quod est propositum. Ex quo manife- f 24. primi.
stum est, cur in propositione trigesima tertia Euclides afferuerit, eas tantum lineas, qua coniungunt paral-
lelas aequales ad easdem partes, aequales esse, vt ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboides recte
 AC , BD , inaequales sunt, licet coniungant parallelas aequales AB , DC : quia non ad easdem partes ipsas con-
iungunt, vt perspicuum est.

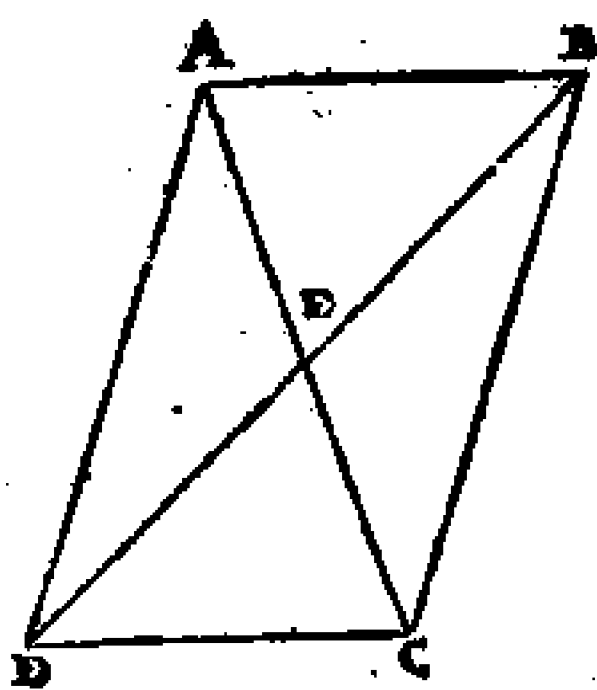
In omni tamen parallelogrammo diagoni se mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli EAD , EDA , trianguli AED , & aequales sint alternis angulis ECB , EBE , trianguli BEC , vterque vtrique; & ^h g 29. primi.
latus AD , aequale lateri BC , opposito in parallelogrammo $ABCD$, quorum vtrumque equalibus adiacet an- h 34. primi.
gulis; ⁱ Erit & AE , recta recta CE , & recta DE , recta BE , equalis. Quare vtraque diameter bifariam di- i 26. primi.
uiditur in puncto E .

Huius autem, quod modò diximus, conuersum etiam demonstrabimus, nimirum.

Omne quadrilaterum, in quo diagoni se mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum est.

In quadrilatero enim $ABCD$, diagoni AC , BD , se mutuo bifariam diuidant in E . Dico $ABCD$, pa- f 2

e 17. primi.
b 4. primi.
c 17. primi.

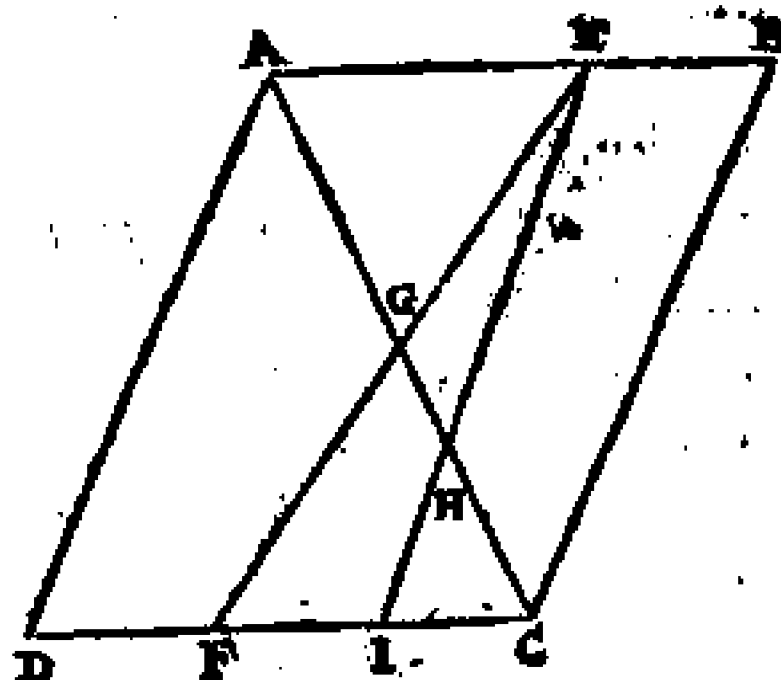


parallelogrammum esse. Cum enim latera AE, EB , trianguli AEB , aequalia sint lateribus CE, ED , trianguli CED , & anguli contenti ad verticem E ,^a æquales quoque;^b erunt & bases AB, CD , æquales, & angulus ABE , angulo alterno CDE , æqualis.^c Quare rectæ AB, CD , parallelae sunt. Eadem ratione parallela ostenduntur AD, CB . Parallelogrammum ergo est $ABCD$.

Hæc quoque referri potest hoc theorema.

RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, dividit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea dividens parallelogrammum bifariam quovis modo, secat quoque diametrum bifariam.

d 19. primi.
e 15. primi.
f 26. primi.



g 4. primi.
h 2. pron.
i 34. primi.

IN parallelogrammo $ABCD$, diametrum AC , bifariam fecit recta EF , in puncto G . Dico parallelogrammum dividi bifariam. Quoniam enim angulus EAG ,^d æqualis est angulo alterno FCG , & angulus EGA , angulo FGC : Est autem & latus AG , lateri CG , æquale, per hypotesin, quæ ambo aequalibus angulis adjacent;^e erunt & latera EG, FG , æqualia. Quare cum latera AG, GE , æqualia sint lateribus CG, GF , & anguli quoque contenti æquales: Erunt triangu-
la AGE, CGF , æqualia. Addita igitur communi quantitate $BCGE$,^f erit triangelum ABC , trapezio $BCFE$, æquale: Sed trian-
gulum ABC ,^g dimidium est parallelogrammi $ABCD$. Igitur & tra-

pezium dimidium erit eiusdem parallelogrammi, ideoque recta EF , parallelogrammum bifariam secat.

SECEr iam EF , parallelogrammum bifariam: Dico & diametrum AC , bifariam secari in G . Si enim diameter AC , non bifariam dividitur in G ,^h dividatur bifariam in alio puncto, ut in H , per quod ducatur recta EHI . Erit ergo, ut iam demonstravimus, $EICB$, trapezium dimidium parallelogrammi $ABCD$, atque adeo æquale trapezio $EFCE$, quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars cori, quod est absurdum. Dividitur igitur AC , bifariam in G , & non in alio puncto, quod erat propositum.

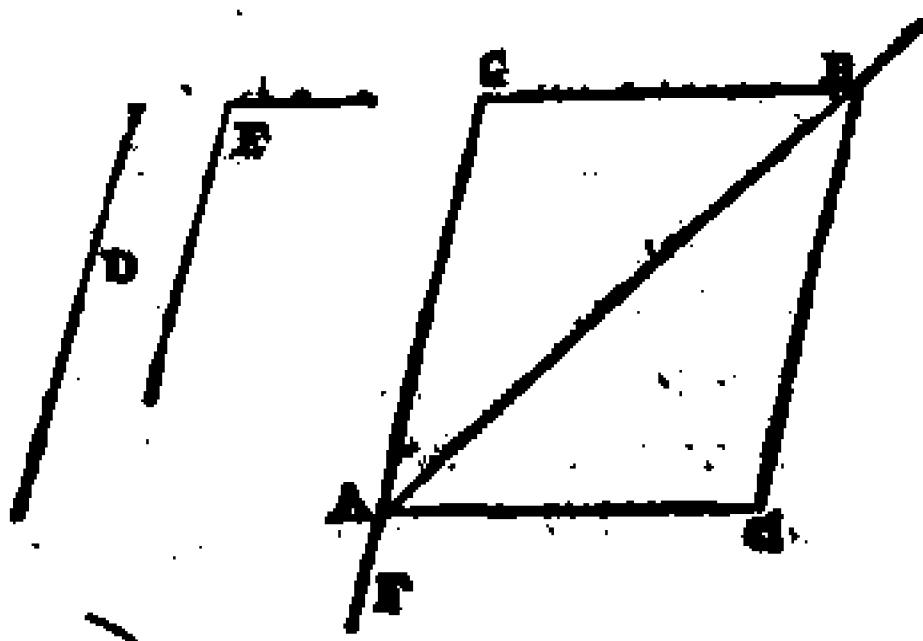
Hinc facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cuiusque punctum signetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non sit in diametro, nisi ipsum secet diametrum bifariam: qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, quæ parallelogrammum bifariam secet. Si enim diameter ducatur, & à puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Ut si punctum sit E , in latere AB , ducenda est recta EF , per G , punctum, in quo diameter AC , bifariam dividitur: & sic de aliis punctis.

DEMONSTRAT quoque hic Peletarius problema non iniucundum, videlicet.

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuius angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores esse duobus rectis.

DE recta infinita AB, AC , continet angulum BAC , sitque data recta finita quæcumque D , & angulus datum E , hac lege, ut duo anguli E , & BAC , minores sint duobus rectis. Oportet igitur inter rectas AB, AC , collocare rectam æqualem quidem rectæ D , eum alterutra

l 23. primi.
m 3. primi.
n 31. primi.



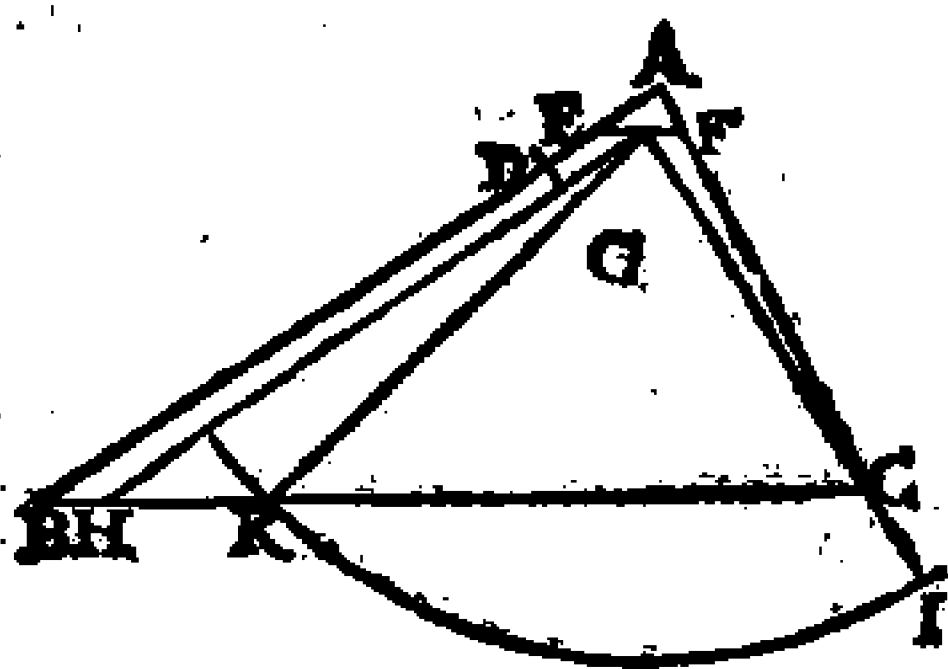
o 34. primi.

p 29. primi. rit. Rursus quia^p angulus BAC , angulo alterno CAF , æqualis est: & eidem angulo CAF , æqualis est, per constructionem, angulus E : erunt anguli E , & BAC , æquales. Quod est propositum. Ceterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangelum ABC , si anguli BAC , & BCA , æquales essent duobus rectis, vel maiores, ut constet ex propositione 17. vel 32.

SCHOLIUM II.

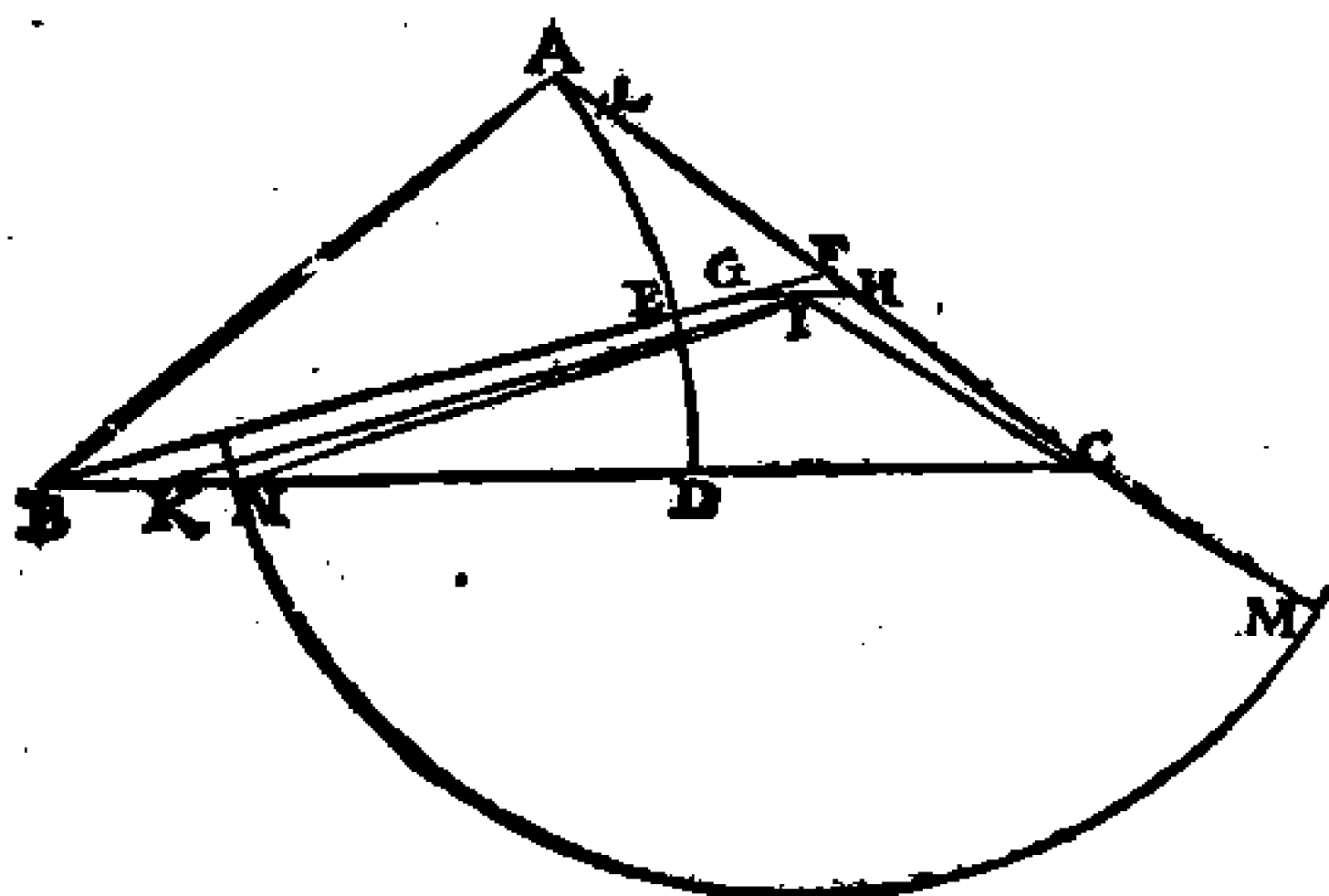
Non alienum erit à nostro instituto, adijcere quædam hoc loco ad lineas intra triangelum constitutas pertinentia, quæ à Pappo Alexandrino lib. 3. Mathematicarum collectæ. demonstrantur: quemadmodum facturos nos recepimus ad propos. 21. Primum igitur in omni triangelo, quod non sit æquilaterum, vel isosceles habens basin latere

latere minore non solum à duobus punctis basis constitui possunt duæ rectæ intra triangulum, quæ simul sumptæ maiores sint duobus lateribus simul sumptis, ut à Proclo in triangulo rectangulo, vel obtusangulo ostensum est ad propof. 21. sed etiam æquales.



Si igitur primum triangulum ABC , habens latus AB , latere AC , maius, sitq; BD , dimidium utriusque lateris AB, AC , simul: Sumpto autem inter AD , puncto E , utcumque, agatur EF , ipsi BC , parallela; & ex quouis puncto G , lateri AB , parallela ducatur GH , rectaq; iungatur GC . Et quoniam EA, AF , ^{210. primi.} maiores sunt, quàm EF : Item CF, FG , maiores quàm GC ; erunt EA, AC, FG simul maiores, quàm EF, GC simul: ablataq; communi FG , erunt EA, AC simul maiores, quàm EG, GC simul; ac proinde multo maiores, quàm GC , sola. Producaturs ergo GC , fiatq; GI , ipsi EA, AC simul æqualis. Quia verò BE , maior est,

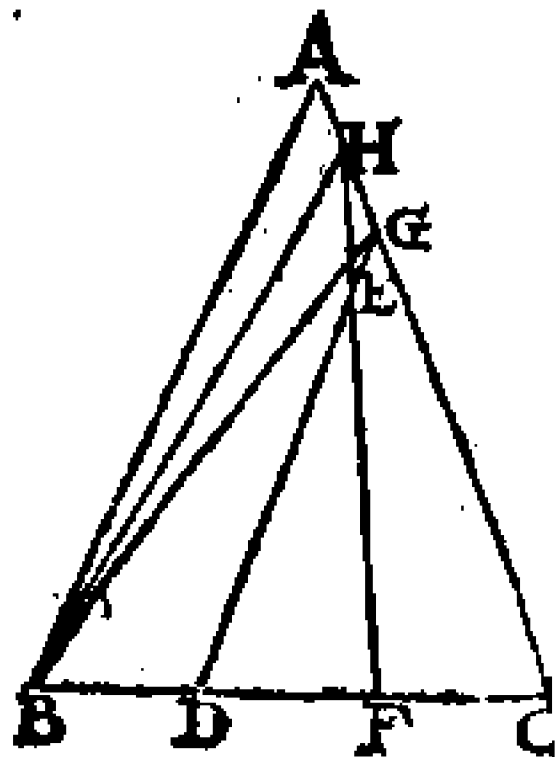
quàm utraque EA, AC simul, quòd BE , superet BD , dimidium utriusque BA, AC simul, at EA, AC simul deficiant à dimidio earundem; nimirum ab utraque DA, AC simul; erit quoq; BE , maior, quàm GI , quæ ipsi EA, AC simul est æqualis. Cum igitur ^{234. primi.} ipsi BE , æqualis sit GH , in parallelogrammo $BEGH$; erit quoque GH , maior, quàm GI . Si igitur centro G , & intervallo GI , circulus describatur, secabit ut rectam GH , ac propterea & ipsam CH , prius secabit in K . Connectatur GK . Dico utramque GH, GK , simul æqualem esse utriq; AB, AC simul. Id quod ex constructione perspicuum est. Nam GH , ipsi BE , æqualis est, & GI , hoc est, GK , ipsi EA, AC simul. Atque hoc infinitis modis fieri potest, prout punctum E , remotius à D , sumptum fuerit, & punctum G , à puncto B ; hoc est, prout tam AD , quàm EF , infinitis in punctis secari potest.



Si igitur deinde isosceles ABC , habens basim BC , utriusque latere maiorem. Descripto ex centro B , per A , arcu AD , secante rectam BC , in D , ducatur utcumque recta BF , secans arcu in E , & latus AC , in F ; & in EF , per quodcumque punctum G , ipsi BC , parallela agatur GH , & per quodcumque eius punctum I , ipsi BF , parallela ducatur IK , rectaq; iungatur IC ; atque ipsi EG , æqualis abscindatur AL . Erit igitur BG , ipsi AB, AL simul æqualis, at LC , minor quàm BE , siue AB , & ob id multo minor, quàm BG . Et quia ipsi BG , ^{234. primi.} æqualis est IK , in parallelogrammo $BGIK$; erit quoq; IK , ipsi AB, AL simul æqualis, maior autem, quàm LC .

Itaq; ^{220. primi.} quia GF, FH , maiores sunt, quàm GH ; & HC, HI , maiores, quàm IC ; erunt GF, FC, HI simul maiores, quàm GH, IC ; & ablata communi HI , erunt reliquæ GF, FC simul maiores, quàm GI, IC simul; ac proinde appositæ communi BG fient BF, FC simul maiores, quàm BG, GI, IC simul. Sed ipsi BF, FC , ^{220. primi.} maiores sunt BA, AC simul. Ergo multo maiores erunt BA, AC simul, quàm BG, GI, IC simul. Cum ergo BG , ipsi BA, AL simul æqualis sit, erit reliqua LC , maior, quàm reliqua GI, IC simul, ac proinde multo maior, quàm IC , sola. Ponatur IM , (producta IC), ipsi LC , æqualis. Et quia IK , ostensa est maior, quàm LC , hoc est, quàm IM ; si ex centro I , per M , arcus circuli describatur, secabit ut rectam IK , ac proinde prius ipsam CK , secabit in N . Connectatur IN . Dico utramque IK, IN simul æqualem esse utrique AB, AC simul. Id quod ex constructione patet. Est namque IK , ipsi AB, AL simul æqualis, & IN , hoc est, IM , ipsi LC , æqualis. Atq; hoc infinitis modis fieri potest: cum BF , infinitis modis duci possit, & tam EF , quàm GH , infinitis modis secari.

CONSTAT autem, si intra idem triangulum ABC , ducantur duæ rectæ, quæ rectas HG, GK , in priori triangulo, vel rectas KI, IN , in posteriori includant, eas maiores fore simul sumptas lateribus AB, AC simul sumptis: quippe quæ ^{221. primi.} maiores foret rectis HG, GK , in priori triangulo, vel rectis KI, IN , in posteriori.



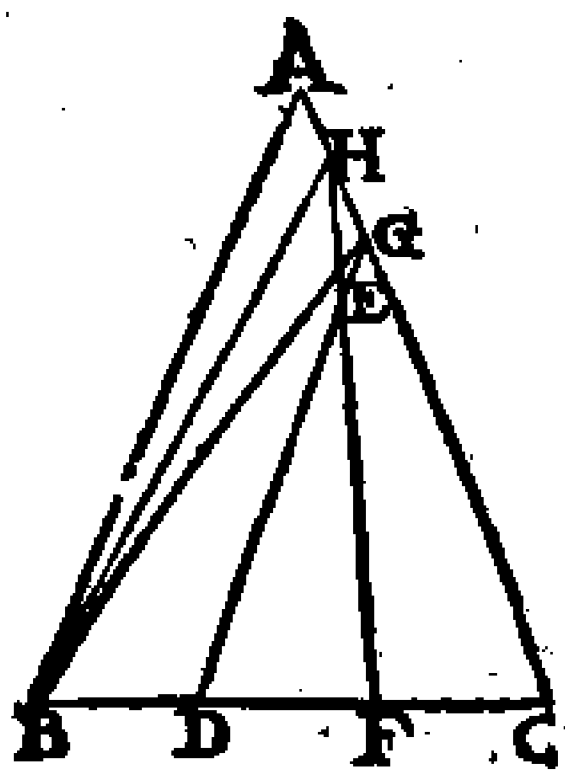
At verò in triangulo æquilatere, vel isoscele habente basim utriusque latere minorem, non posse intrinsecus constitui duas lineas maiores, vel æquales simul sumptas duobus lateribus simul sumptis, sed quasunque interiores esse minores, ita ostendi potest. In triangulo enim ABC , cuius duo latera AB, AC , æqualia, & basis BC , non maior, sed vel æqualis, vel minor: ita ut angulus A , maior non sit, quàm angulus B , vel C ; sed vel æqualis, vel minor: constituantur duæ rectæ DE, EF , utcumque, quas dico minores esse simul sumptas duobus lateribus AB, AC , simul sumptis. Producaturs enim DE , secans latus AC , in G , iungaturq; recta GB . Quoniam igitur ^{225. primi.} duo anguli ABC, C , æquales sunt, estq; ABC , maior

a 16. primi.

b 19. primi.

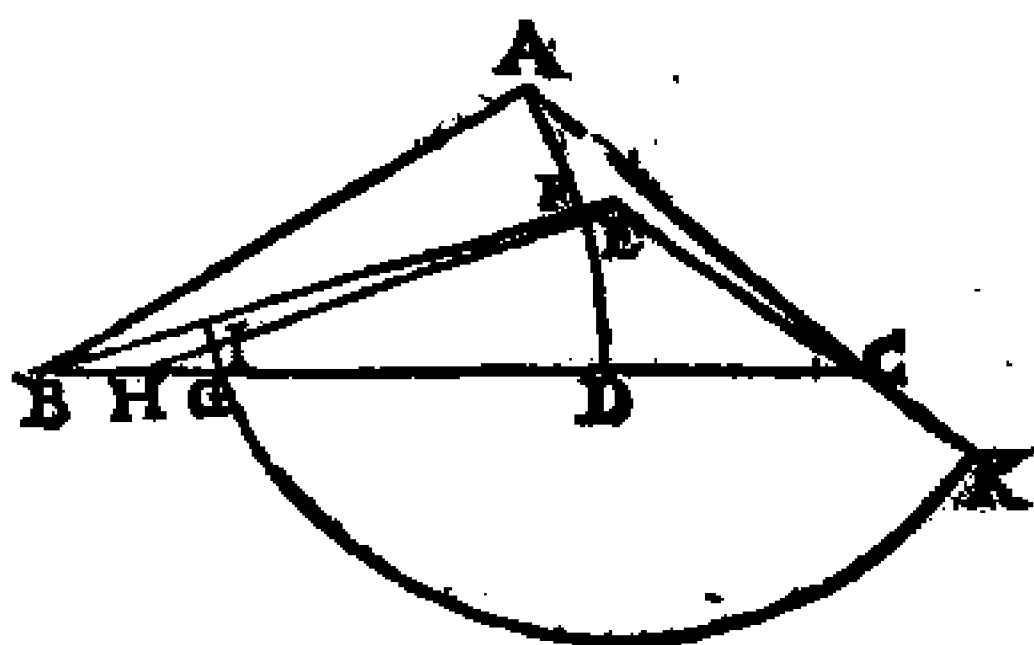
c 16. primi.

d 19. primi.



modo, latus AC, maius esse recta EF.

Ita vero si admirabile videatur illi, qui Geometria ignari sunt, in illis, quæ diximus, triangulis duci posse lineas interiores, quæ simul sumptæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus simul sumptis: admirabilior sane erit, intra eadem illa triangula constitui posse duas lineas, quarum singule singulis lateribus maiores sint,



e 21. primi.

quàm EB: describaturq; ex E, per K, arcus circuli, qui rectam EB, secabit, ac proinde & ipsam CB, prius secabit in G. Sumpto denique inter B, & G, quouis puncto H, iungatur recta EH, secans arcum in I: factumque erit, quod proponitur. Nam BE, maior est, quàm BA, & EH, maior, quàm EI, hoc est, quàm EK, vel AC.

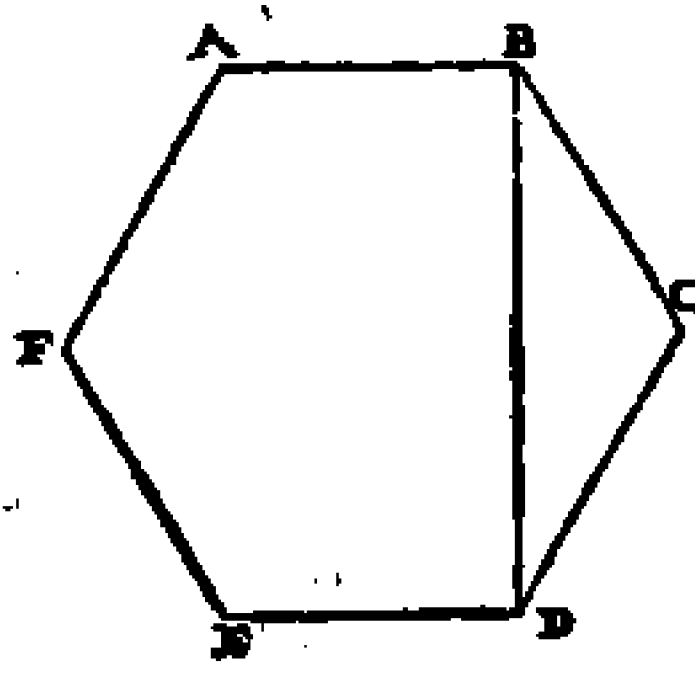
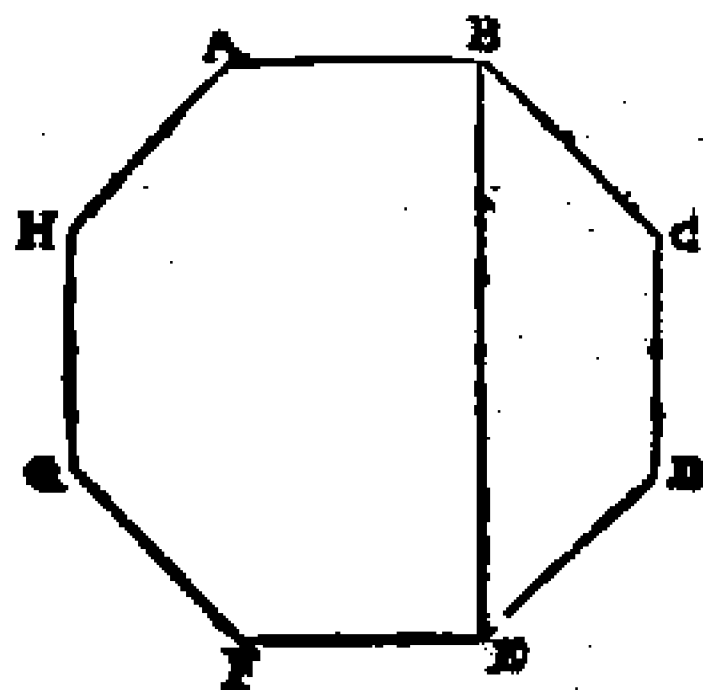
DEINDE sint singule lineæ singulis lateribus æquales constituende intra idem triangulum: factumq; eodem constructio, dempta linea EH, sed arcus KG, secet rectam EB, in H. Et latus BA, latere AC, ponatur maius, eritq; BE, recta maior, quàm AB, cum maior sit, quàm BF, quæ æqualis est ipsi AB. Sumpta igitur EI, æquali ipsi AB, cadet punctum I, inter B, & H: quandoquidem EB, maior est, quàm AB, & EH, minor, quàm AB. Ex E, per I, describatur arcus circuli secans BC, in L, iunganturq; rectæ EL, EG: factumq; erit, quod proponitur. Nam EI, ipsi AB, hoc est, ipsi AB, æqualis est, & EG, ipsi EK, hoc est, ipsi AC.

PRÆTER hæc demonstrat Pappus, intra eadem, quæ diximus, triangula constitui posse duas rectas duobus lateribus maiores, & quæ habeant ad eadem latera proportionem datam, quæ tamen dupla proportionem minor sit: quod incredibile cuipiam videri possit. Quæ res hoc loco demonstrari non potest, cum ex proportionibus pendeat.

EX PROCLO.

IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, siquidem fuerit æquilatera, & æquiangula: erunt duo quælibet latera opposita, parallela inter sese.

LATERA opposita dicuntur illa duo, quæ ex utraque parte laterum habent æqualia numerum: ut in he-



kagono ABCDEF, latera opposita erunt AB, ED: quoniam tam ad partes A, & E, duo sunt latera, quàm ad partes B, & D. In octogono vero ABCDEFGH, latera opposita erunt AB, FE, quia tam ad partes A, & F, tria sunt latera, quàm ad partes B, & E. Et sic in alijs figuris æquilateris parium laterum, ex utraque parte oppositorum laterum, erunt tot latera, quot sunt in dimidio numero laterum, minus uno. Ut in quadrangulo erit unum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono qua-

tuor,

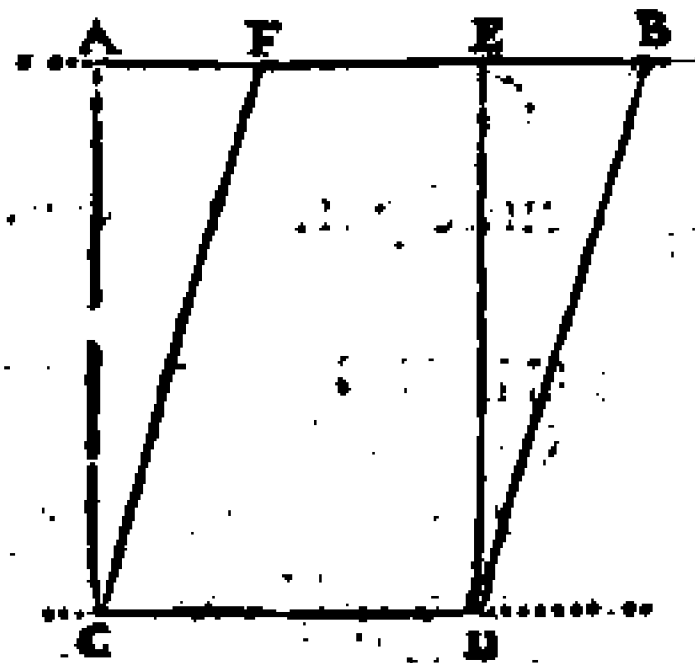
enon, in figura duodecim laterum, quinque, &c. Dico igitur qualeslibet latera opposita esse parallela: A B, nimirum ipsi E D, in hexagono: & A B, ipsi F E, in octogono, & sic de ceteris. Coniungantur enim duo extrema oppositorum laterum ad easdem partes linea recta, qualis est in hexagono B D, & in octogono B E. Et quoniam, ut ad 32. propos. demonstrauimus, sex anguli hexagoni aequales sunt octo rectis, erunt tres anguli B, C, D, eiusdem hexagoni aequales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur aequales: Sunt autem anguli B C D, C B D, C D B, trianguli B C D, ^a duobus rectis aequales. Reliqui igitur anguli A B D, E D B, duobus rectis aequales erunt. Quare ^b parallela erunt A B, & E D. Rursus quia octo anguli octogoni aequales sunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, sex rectis aequales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri B C D E, aequales quatuor rectis. Igitur duo reliqui anguli A B E, F E B, duobus erunt rectis aequales, ^c atque adeo A B, F E, parallela erunt. Eodem modo demonstrabitur, in omnibus aliis figuris huiusmodi, angulos duos ad lineam rectam extrema oppositorum laterum coniungentem existentes, duobus esse rectis aequales. Nam in decagono auferet ea linea pentagonum, cuius anguli aequales sunt sex rectis: At quinque anguli decagoni aequales sunt octo rectis. Ablatis igitur sex, relinquuntur duo recti. In figura equilatera, & equiangulari duodecim laterum eadem linea abscindet hexagonum, cuius anguli sunt octo rectis aequales: At sex anguli totius figurae aequales sunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.

Quia autem omnis figura equiangularis parium laterum habeat latera opposita parallela, ut ostendimus: tamen sola quadrilatera figura latera opposita habens parallela, ab Euclide, & alijs Geometris parallelogrammum dici consuevit, propterea quod in definitionibus Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.

THEOR. 35. PROPOS. 35.

35.

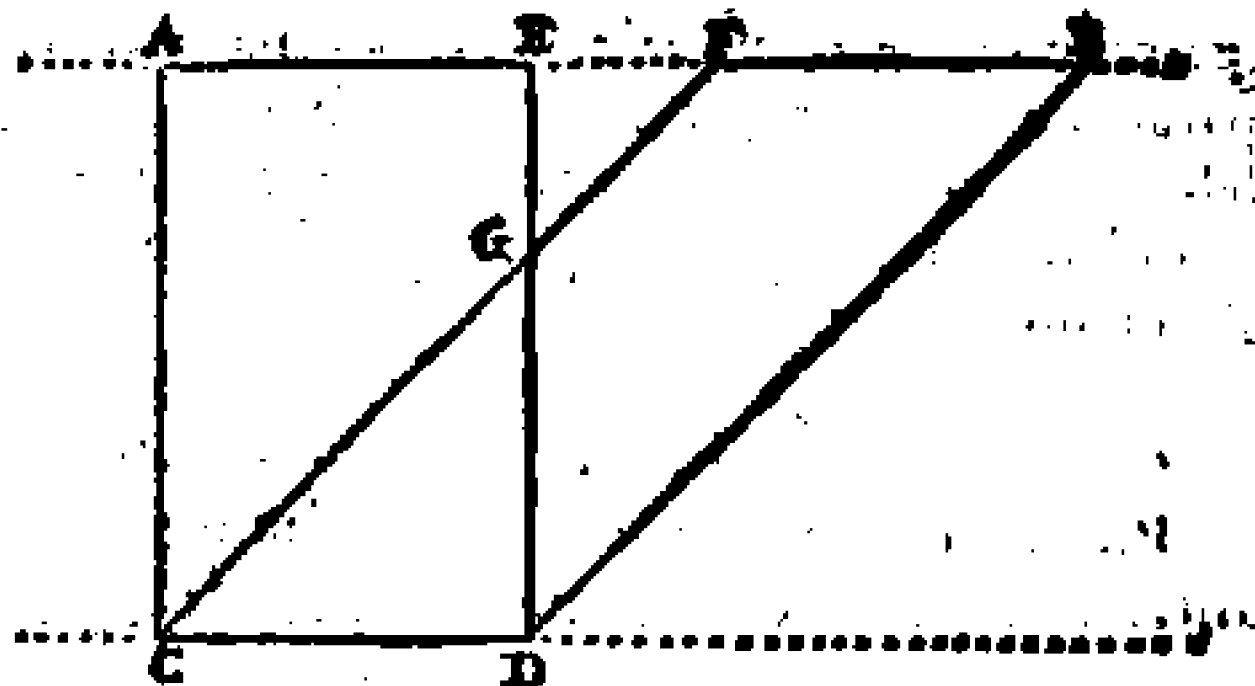
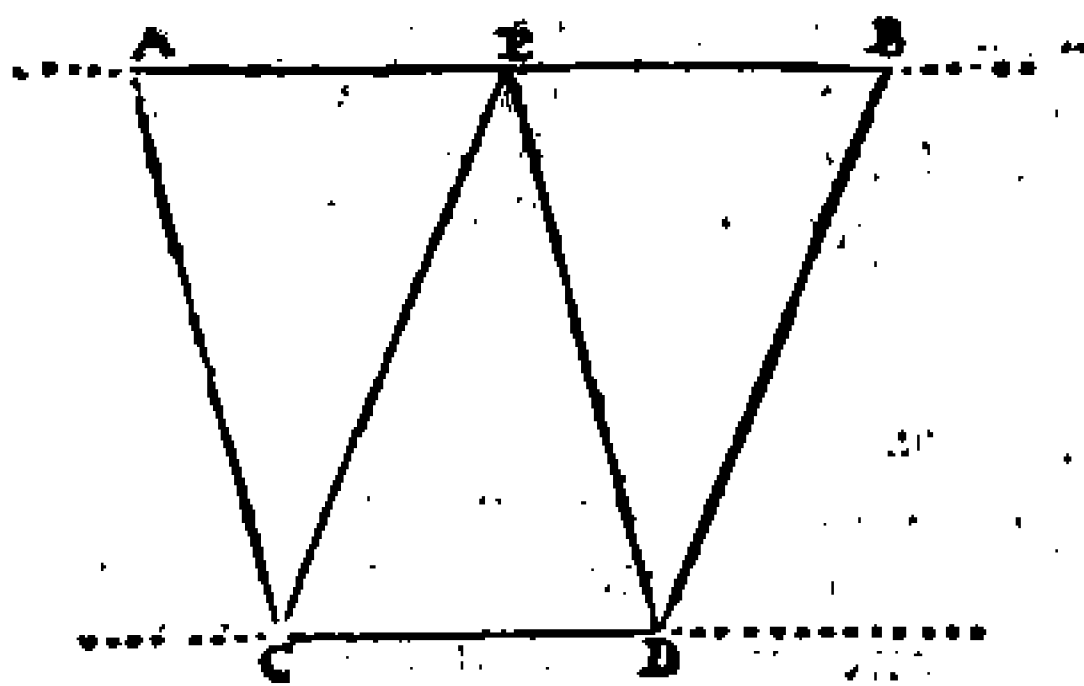
PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt aequalia.



INTER duas parallelas A B, C D, super basi C D, existant duo parallelogramma C D E A, C D B F. Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis, quando duo latera opposita partes sunt parallelarum, ut in exemplo proposito cernitur. Dico ipsa parallelogramma inter se esse aequalia, non quoad angulos & latera, sed quoad aream, seu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelogrammo C D E A, recta A E, ^a aequalis est rectae C D, oppositae: & eidem C D, aequalis est F B, in parallelogrammo C D B F, opposita: Erunt A E, F B, ^b inter se aequales. Demptis igitur comuni F E, ^c remanebit A F, ipsi E B, aequalis: ^d Et autem & A C, ipsi E D, oppositae aequalis in parallelogrammo

C D E A, & angulus B E D, angulo F A C, externus interno. Quare triangulum F A C, triangulo B E D, aequale erit. Addito igitur communi trapezio C D E F, fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, aequale. Quod est propositum.

CADAT secundo punctum F, in punctum E. Dico rursus parallelogramma C D E A, C D B E, aequalia esse. Erunt enim, ut prius, rectae A E, E B, aequales, nec non & anguli B E D, E A C: atque adeo ^e triangu- ^f la E A C, B E D, aequalia. Addito igitur communi triangulo C D E, ^g fiet parallelogramma C D E A, C D B E, aequalia.



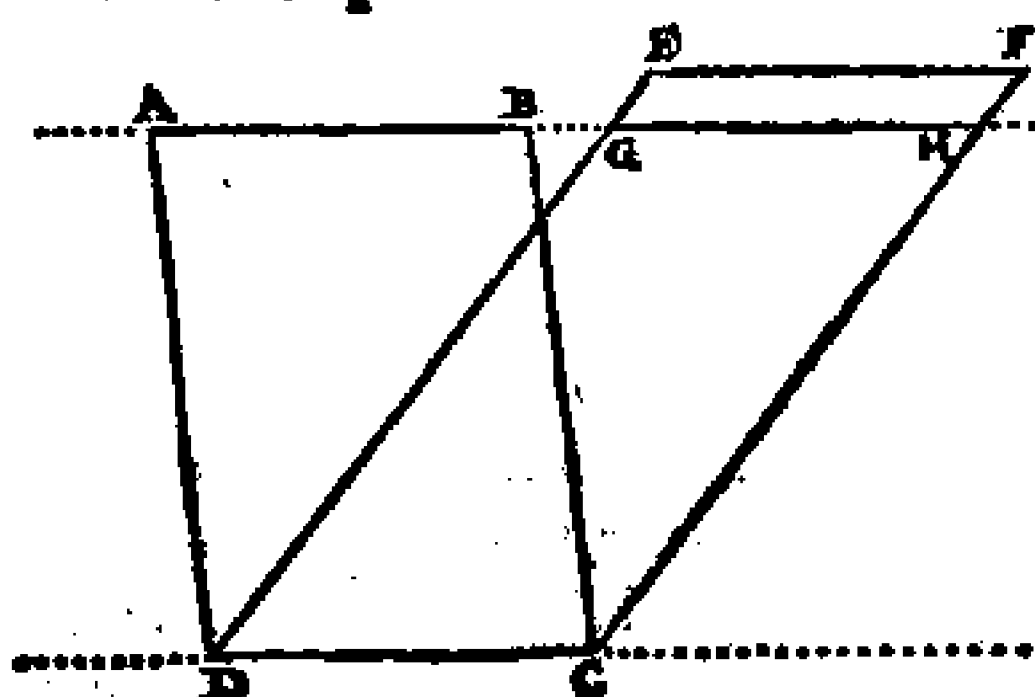
CADAT tertio punctum F, ultra E, ita ut recta C F, secet rectam D E, in G. Quoniam igitur, ut prius, rectae A E, F B, sunt aequales: si communis addatur E F, erit tota A F, toti E B, aequalis, nec non & anguli B E D, F A C, aequales erunt: atque adeo ^h triangulum F A C, triangulo B E D, aequale. Ablato ergo communi triangulo E G F, ⁱ remanebit trapezium A E G C, trapezio F G D B, aequale. Quocirca addito communi triangulo C D G, fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, aequale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt aequalia. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM

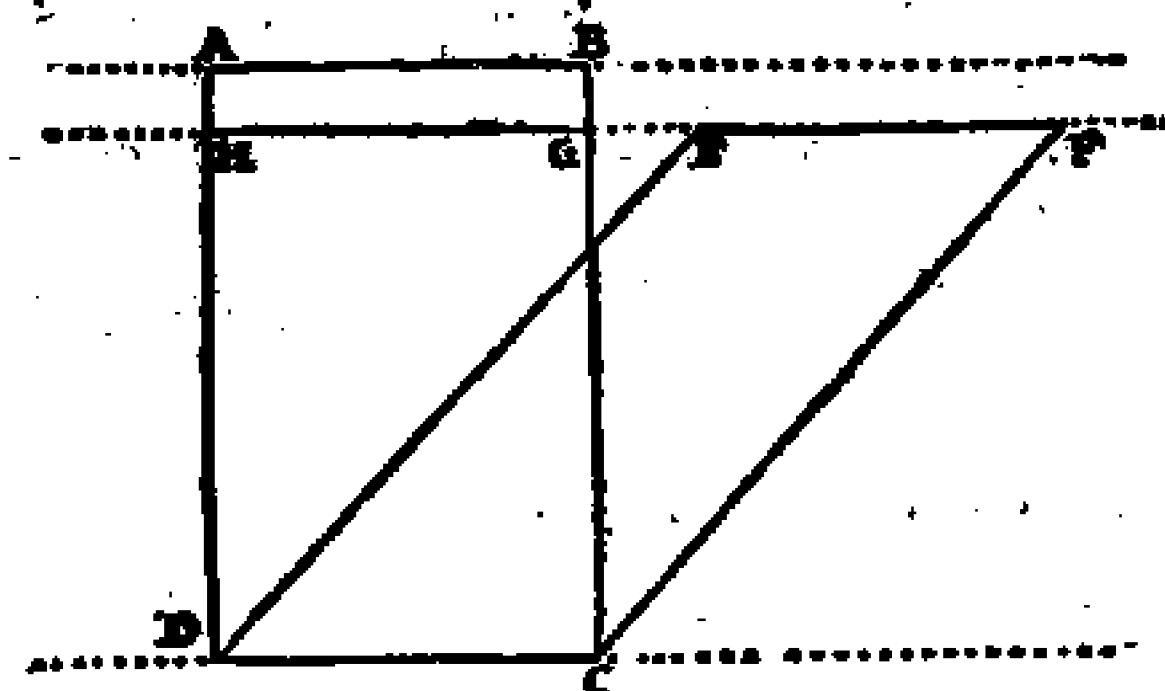
CONVERTEMUS facile hanc propositionem, hoc modo:

Parallelogramma æqualia super eandem basin, ad easdemque partes constituta, erunt inter easdem parallelas.

35. primi.



est absurdum. Non ergo cadet AB, infra EF.



Parallelogramma ABCD, CDEF, in eisdem sunt parallelis.

SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, CDEF, super eandem basin CD, & ad easdem partes. Dico rectam AB, productam in directum iacere ipsi EF, & propterea ipsa parallelogramma inter easdem esse parallelas. Alias enim AB, producta vel cadet infra EF, vel supra. Cadat primò infra, qualis est AH. Erit igitur parallelogrammum CDGH, æquale parallelogrammo ABCD: Ponitur autem eidem parallelogrammo ABCD, æquale parallelogrammum CDEF. Quare parallelogramma CDEF, CDGH, æqualia erunt, totum & pars, quod

est absurdum. Non ergo cadet AB, infra EF. CADAT secundò AB, producta supra EF. Cadet igitur FE, protracta infra AB. Quare, ut prius, erunt parallelogramma ABCD, CDHG, æqualia. totum & pars, quod est absurdum. Idem absurdum consequeretur, si CE, DE, producerentur usque ad AB, protractam. Eademq; demonstratio conveniet omnibus casibus, qui occurrere possunt, hoc est, sine punctum E, sit ultra B, sinonon, ut perspicuum est. Non ergo cadet AB, supra EF; sed nec infra, ut demonstratum est: ergo producta in directum iacet ipsi EF; ac proinde paral-

36.

THEOR. 26. PROPOS. 36.

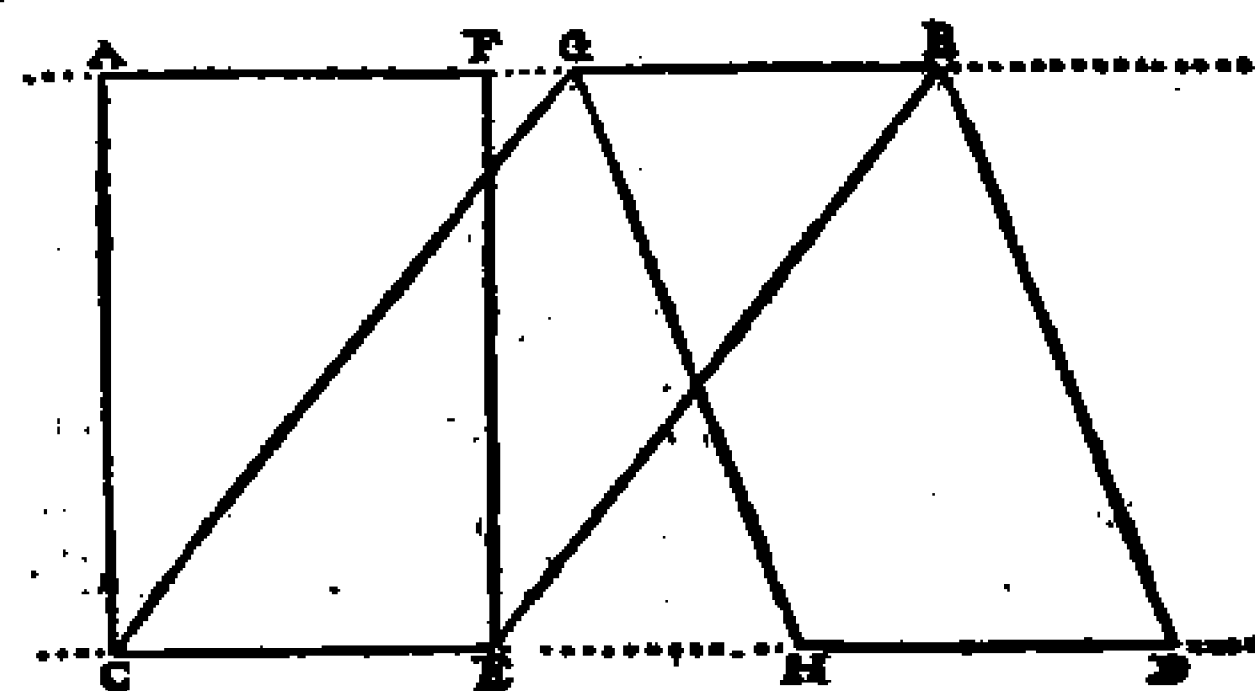
PARALLELOGRAMMA super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

SINT duo parallelogramma ACEF, GHDB, super æquales bases CE, HD, inter easdem parallelas AB, CD. Dico ea esse æqualia. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad eas-

e 34. primi.
b 1. pron.

e 33. primi.]

d 35. primi.

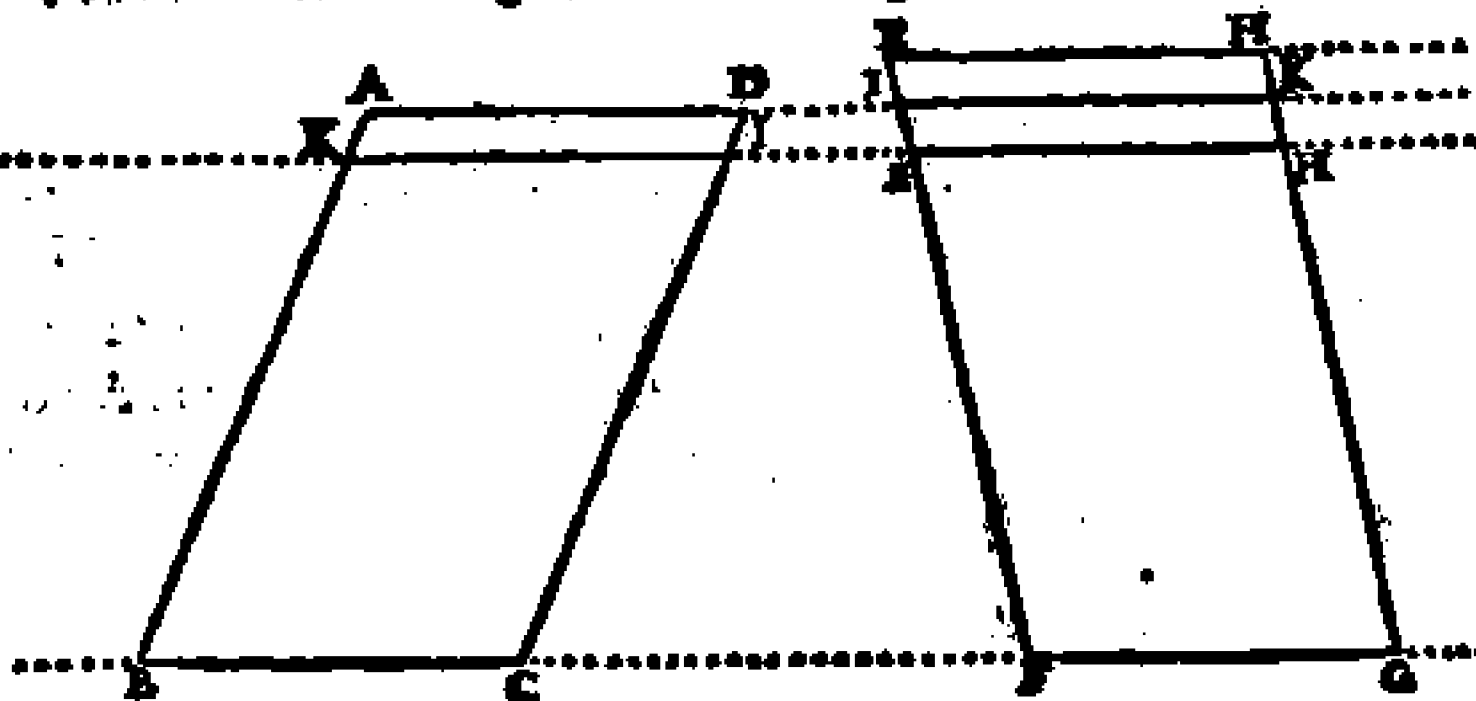
e 35. primi.
f 1. pron.

dem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, & eidem HD, æqualis est GB, in parallelogrammo GHDB, oppositæ erunt CE, GB, æquales inter se: Sunt autem & parallelæ, per hypothesin. Quare & CG, EB, ipsas coniungentes, parallelæ erunt, & æquales, ideoque CEBG, parallelogrammum erit. Itaq; cum parallelogramma ACEF, GCEB, sint inter easdem parallelas, & super eandem basin CE, erit parallelogrammum ACEF, parallelogrammo GCEB, æquale. Rursus quia parallelogramma GCEB, GHDB, sunt inter easdem parallelas, & super eandem basin GB, erit quoque parallelogrammum GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, inter se æqualia erunt. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

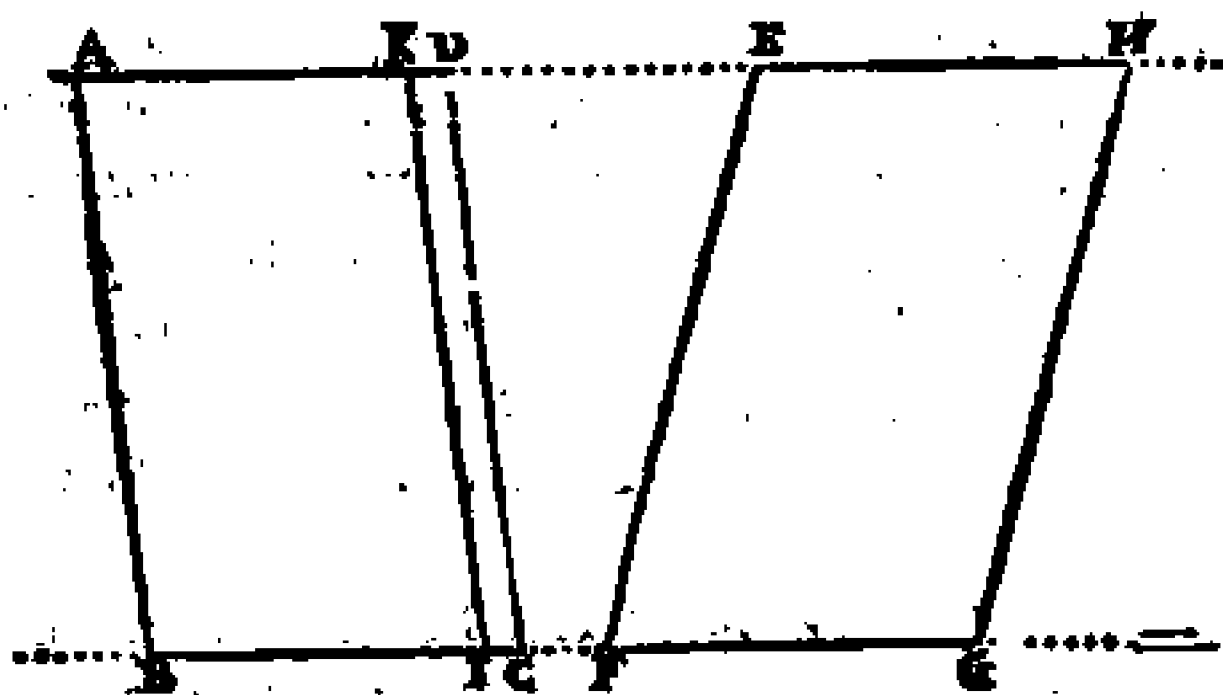
CONVERSUM huius theoremati duplex est, ad hunc modum.

PARALLELOGRAMMA æqualia super bases æquales, & ad easdem partes constituta, inter easdem sunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basin, super æquales bases sunt constituta.



SINT primum duo parallelogramma æqualia ABCD, EFGH, super bases æquales BC, FG, & ad easdem partes constituta. Dico ea esse inter easdem parallelas, hoc est, AD, protractam coire in directum cum EH. Nam alias cadet aut infra EH, aut supra. Quo posito, sequitur, totum & partem esse æqualia, quemadmodum in converso

communis præcedenti propositionis est dictum, & figura facile demonstrat. Intelligenda sunt autem bases æquales data in eadem linea recta BG.



SINT secundò eadem parallelogramma æqualia inter easdem parallelas AH, BG. Dico bases BC, FG, esse æquales. Si enim altera, nempe BC, dicatur maior, ^a abscindatur BI, æqualis rectæ FG, & ^b ducatur IK, parallela ipsi CD. Erit ergo parallelogrammum ABIK, ^c æquale parallelogrammo EFGH; & ideo parallelogrammo ABCD, pars toti, quod est absurdum. Non ergo BC, maior est, quàm FG. Eadem ratione neque minor erit. Quare bases BC, FG, æquales sunt.

d 3. primi.
b 31. primi.
c 36. primi.

BE & EN & quoque theorema facile hinc demonstrabitur.

Si duo parallelogramma inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contrà, si duo parallelogramma sint inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit.

SINT enim in posteriori figura parallelogramma BD, FH, inter parallelas AH, BG, sitq; basis BC, maior base FG. Dico parallelogrammum BD, parallelogrammo FH, maius esse. ^d Auferatur enim recta BI, ipsi FG, æqualis, & ducaturq; IK, ipsi AB, parallela. Erunt ergo ^e parallelogramma BH, FK, supra æquales bases BI, FG, æqualia. Cum igitur BD, & maius sit, quàm BK, erit idem BD, maius, quàm FH.

d 3. primi.
e 31. primi.
f 36. primi.

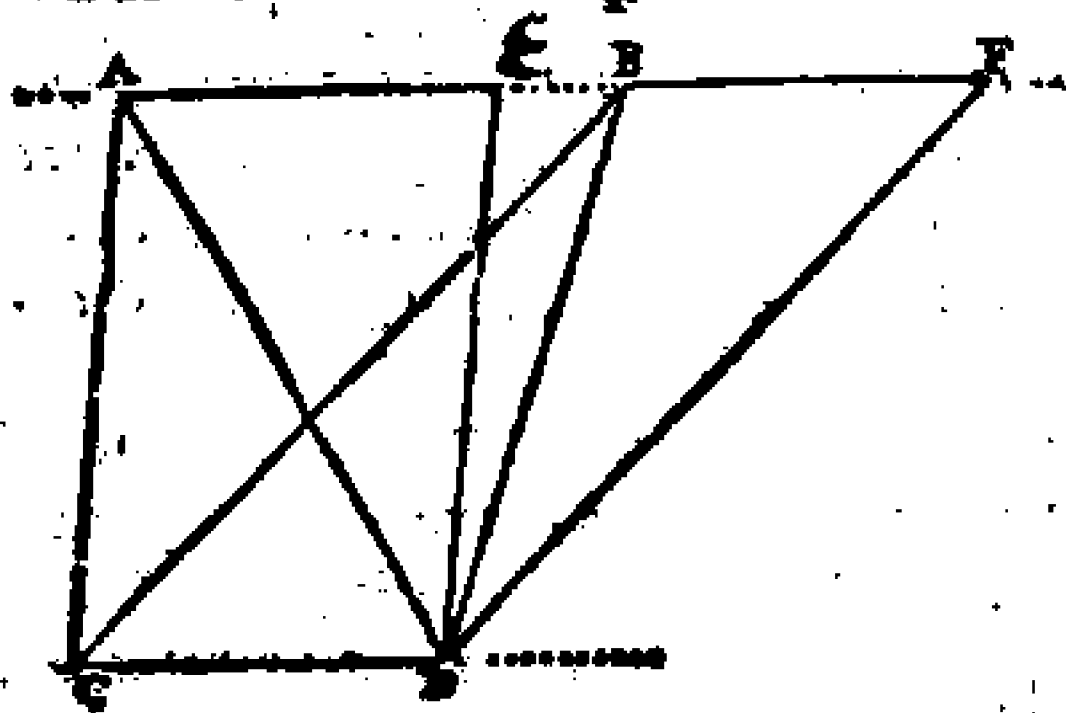
SINT rursum parallelogramma BD, FH, inæqualia, & BD, maius. Dico basim BC, maiorem esse base FG. Nam si foret æqualis, ^b essent parallelogramma æqualia, quod est absurdum, cum BD, ponatur maius. Si autem esset minor foret parallelogrammum FH, maius, quàm BD, ut proximè ostendimus. quod multò magis est absurdum, cum BD, maius ponatur, quàm FH. Basis ergo BC, cum neq; æqualis sit ipsi FG, neq; minor, erit maior, quàm FG. quod est propositum.

g 9. pron.
h 36. primi.

THEOR. 27. PROPOS. 37.

37.

TRIANGULA sup eadē basi constituta, & in eisdē parallelis, inter se sunt æqualia.



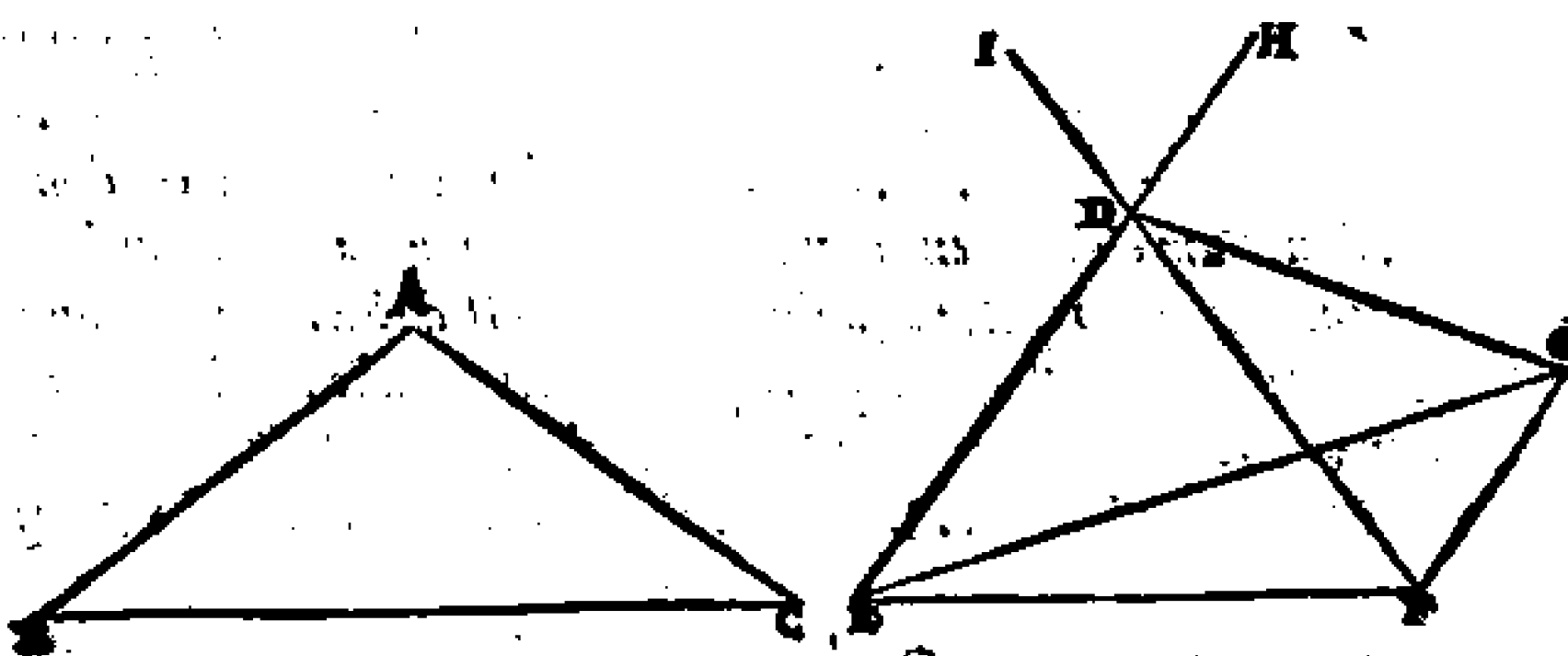
INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, sint constituta duo triangula ACD, BCD. Dicitur autē triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quādo basis est pars vnius, & angulus oppositus alteram attingit. Dico ea triangula esse æqualia. Per D, enim ^a ducatur DE, parallela rectæ AC, & DE, parallela rectæ BC. ^b Erunt igitur parallelogramma ACDE, BCDF, æqualia. Sunt enim super eandem basin CD, & inter easdem parallelas. Sed horum dimidia sunt triangula ACD, BCD; ^c quod AD, BD, diametri bifariam secant

d 31. primi.
e 35. primi.

parallelogramma ACDE, BCDF. Igitur & triangula ACD, BCD, ^d æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

CONVERSÆ huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porro ex hac propositione facile cum Proclo demonstrabimus, Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius,



utrumque utriusq; & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquādo esse æqualia, & aliquando inæqualia: Id quod ad propos. 24. polliciti sumus. SINT enim duo triangula ABC, DEF, & latera AB, AC, æqualia lateribus DE, DF, & angulus A, maior angulo EDF, sintq; pri-

e 34. primi.
d 7. pronum.

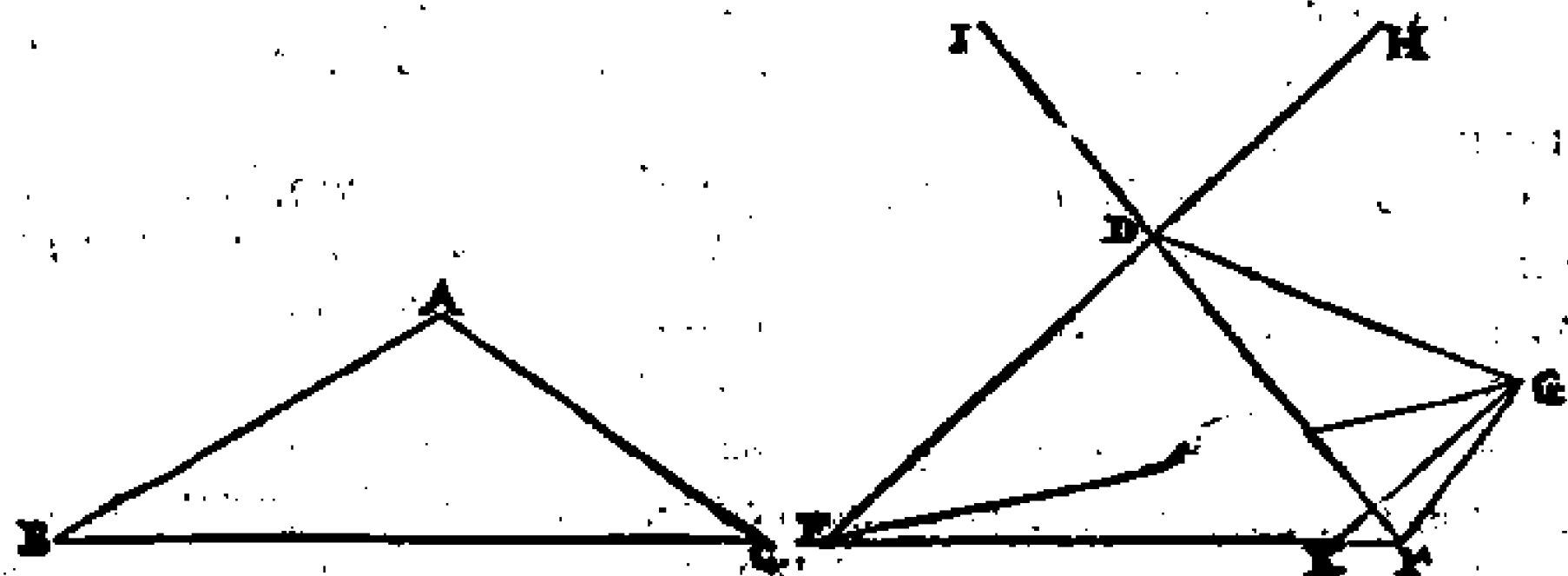
mum hi duo anguli duobus rectis æquales. Dico triangula esse æqualia. Producaturs enim ED, ad H, & FD, ad I; ^a fiatque angulus EDG, æqualis angulo A, ^b & recta DG, recta DF, seu AC; ducanturque rectæ EG, GF. Quoniam igitur dup anguli A, & EDF, ponuntur æquales duobus rectis, & angulus EDG, æqualis factus est angulo A; erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli EDG, GDH, ^c duobus rectis æquales: Igitur anguli EDG, EDF, anguli EDG, GDH, æquales erunt,

d 23. primi.
b 3. primi.
c 13. primi.

23. pron. Quare ablato communi angulo EDG , remanebit angulus EDF , equalis angulo GDH : Est autem eodem
 b 15. primi. angulo EDF , equalis angulus HDI . Igitur & anguli GDH , HDI , aequales erunt: atq; adeo angulus GDH ,
 c 5. primi. dimidium erit totius anguli GDI . Rursus quia latera DF , DG , sunt equalia in triangulo DFG : erunt an-
 d 32. primi. guli DFG , DGF , aequales; qui cum a aequales sint externo angulo GDI , erit uterlibet eorum, nempe DGF ,
 e 7. pron. dimidium anguli GDI : Ostensum est autem, angulum GDH , dimidium quoq; esse eiusdem anguli GDI .
 f 27. primi. Quare anguli GDH , DGF , aequales erunt. Et quia sunt alterni inter EH , FG , erunt EH , FG , parallela.
 g 37. primi. Quamobrem & triangula DEG , DEF , equalia erunt, cum habeant eandem basin DE , sintq; inter easdem
 h 4. primi. parallelas DE , FG . Quoniam vero triangulum DEG , b equale est triangulo ABC , propterea quod latera
 DE , DG , equalia sunt lateribus AB , AC , & angulo A , equalis angulus EDG : erit & triangulum ABC , trian-
 gulo DEF , equale. quod est propositum.

- SINT deinde anguli A , & EDF , duobus rectis maiores. Dico triangulum ABC , quod maiorem habet
 i 23. primi. angulum, minus esse triangulo DEF . Producatur enim ED , ad H , & FD , ad I : fiatq; angulus EDG , equa-
 k 3. primi. lis angulo A , & recta DG , recta DF , seu AC , equalis, ducanturq; recta EG , GF . Quoniam igitur anguli
 A , & EDF , ponuntur
 maiores duobus rectis,
 erunt & anguli EDG ,
 EDF , duobus rectis
 maiores: Sunt autem
 anguli EDG , GDH ,
 1 aequales duobus rectis.
 Igitur anguli EDG ,
 EDF , maiores sunt an-
 gulis EDG , GDH .

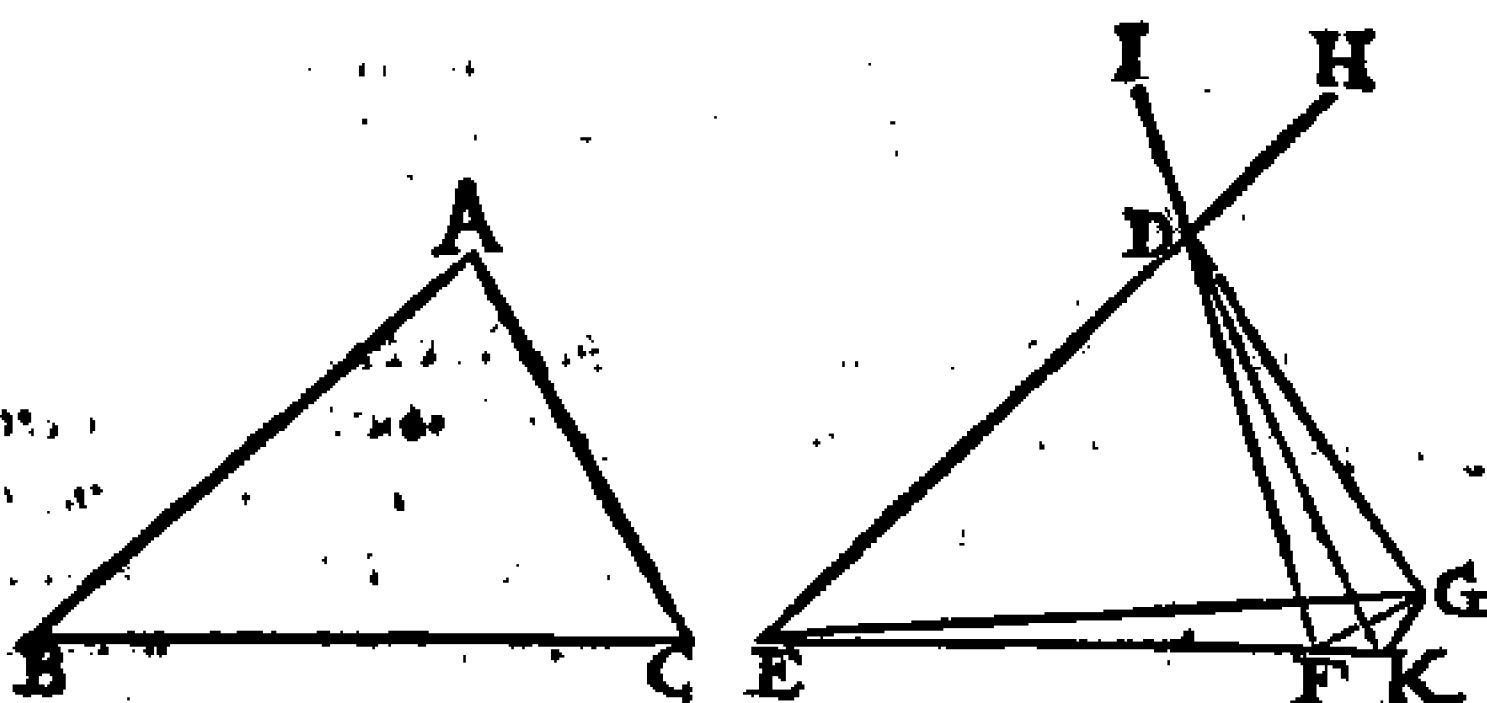
l 13. primi.



- mis. primi. Quare ablato communi EDG , remanebit angulus EDF , maior angulo GDH . Quoniam vero m angulus
 EDF , angulo HDI , equalis est, erit quoq; HDI , maior, quam GDH ; atq; adeo GDH , minor, quam dimi-
 n 5. primi. dium anguli GDI . Rursus quia latera DG , DF , equalia sunt: n erunt anguli DFG , DGF , aequales: qui
 o 32. primi. cum sint o aequales externo GDI , erit uterlibet eorum, nempe DGF , dimidium anguli GDI : Ostensum est
 autem, angulum GDH , minorem esse dimidio eiusdem GDI . Quare DGF , maior erit, quam GDH . Abscin-
 p 23. primi. datur ex angulo DGF , angulus DGK , p equalis angulo alterno GDH . Erit ergo GK , q parallela ipsi DE ,
 q 27. primi. secabitq; GK , rectam BF . Ducatur ex D , ad K , ubi GK , secat rectam EF , recta DK . Erit igitur triangulum
 r 37. primi. DEG , r equale triangulo DEK . Quoniam autem triangulum DEG , s equale est triangulo ABC propterea
 s 4. primi. quod latera DE , DG , equalia sunt lateribus AB , AC , & angulo A , angulus EDG , equalis, erit & triangu-
 t 9. pron. lum ABC , triangulo DEK , equale. Cum igitur DEK , t minus sit triangulo DEF ; erit quoq; ABC , trian-
 gulum triangulo DEF , minus. Quod est propositum.

- SINT tertio anguli A , & EDF , duobus rectis minores. Dico triangulum ABC , quod maiorem habet
 u 23. primi. angulum, maius esse triangulo DEF . Producatur ED , ad H , & FD , ad I : fiatq; angulus EDG , equalis an-
 x 3. primi. gulo A , & recta DG , recta DF , seu AC ; ducanturq; recta EG , GF . Quoniam igitur anguli A , & EDF ,
 ponuntur minores duobus rectis, erunt
 quoq; anguli EDG , EDF , duobus re-
 ctis minores: Sunt autem anguli EDG ,
 GDH , duobus rectis equaliter. Igitur
 EDG , EDF , minores sunt, q̃ EDG ,
 GDH ; demptioq; communi EDG , re-
 manebit EDF , minor, quam GDH .
 Est autem EDF , z equalis ipsi HDI .
 Quare & HDI , minor erit, q̃ GDH ;
 atque adeo GDH , maior est dimidio
 anguli GDI . Quoniam autem DGF , dimidium est eiusdem anguli GDI , ut iam supra ostensum fuit; e-
 rit GDH , maior, quam DGF . Fiat igitur angulus DGK , a equalis angulo GDH , ducta recta GK , que se-
 cabit rectam EF , protractam in K , & ducatur recta DK . Erit ergo, ut prius, GK , b parallela ipsi DE ; & trian-
 gulamque DEG , triangulo DEK , equale: Est autem iterum DEG , c equale ipsi ABC . Igitur & ABC ,
 d equale est ipsi DEK . Quocirca cum DEK , e maius sit, quam DEF , erit & ABC , maius, quam DEF . Quod
 demonstrandum erat.

y 13. primi.



z 15. primi.

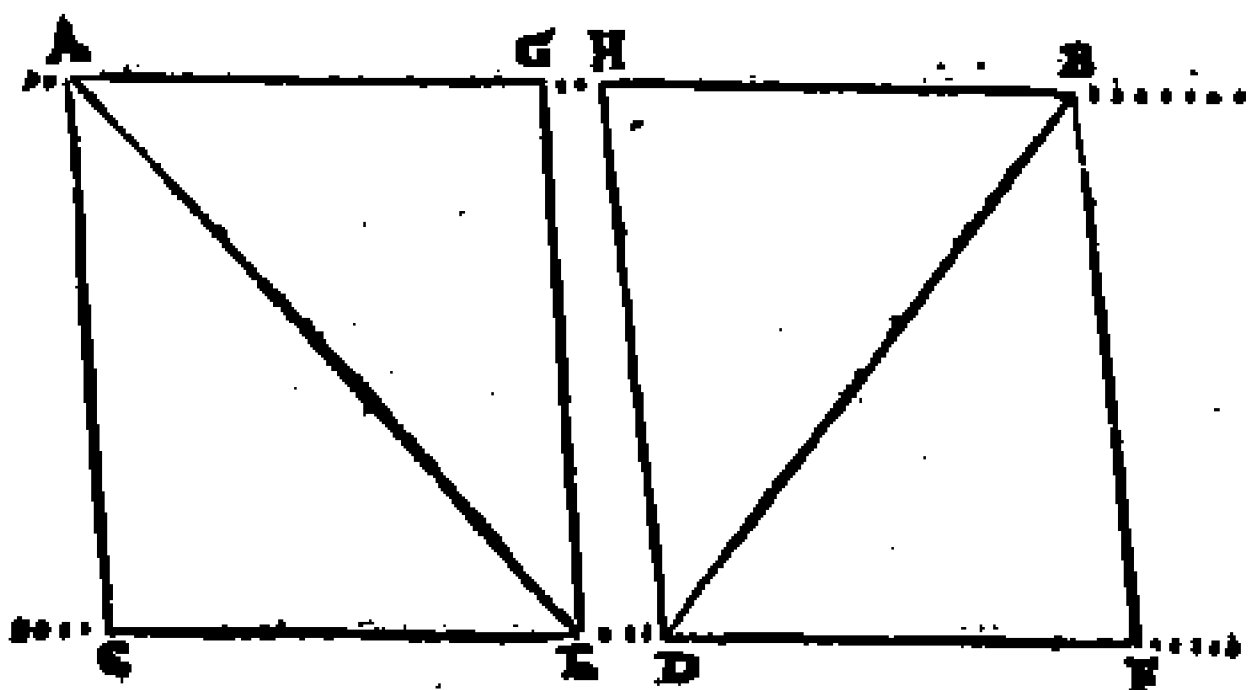
23. primi. Ex his perspicuum est, cur Euclides in proposit. 24. solum collegerit inaequalitatem basium, non autem
 b 27. primi. triangulorum, ut ibidem admonuimus.

- c 37. primi. Ex his perspicuum est, cur Euclides in proposit. 24. solum collegerit inaequalitatem basium, non autem
 d 4. primi. triangulorum, ut ibidem admonuimus.

THEOR. 28. PROPOS. 38.

TRIANGULA super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, in-
 ter se sunt æqualia.

INTER



INTER parallelas AB, CD, & super æquales bases CE, ED, sint constituta triangula ACE, BFD. Dico ipsa esse æqualia. ^{a 31. primi.} Ducatur enim EG, parallela ipsi AC, & DH, ipsi BF: Eruntq; ^{b 36. primi.} parallelograma ACEG, ^{c 34. primi.} BFDH, æqualia. Cum igitur horum ^{d 7. pron.} dimidia sint triangula ACE, BFD, erunt hæc inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

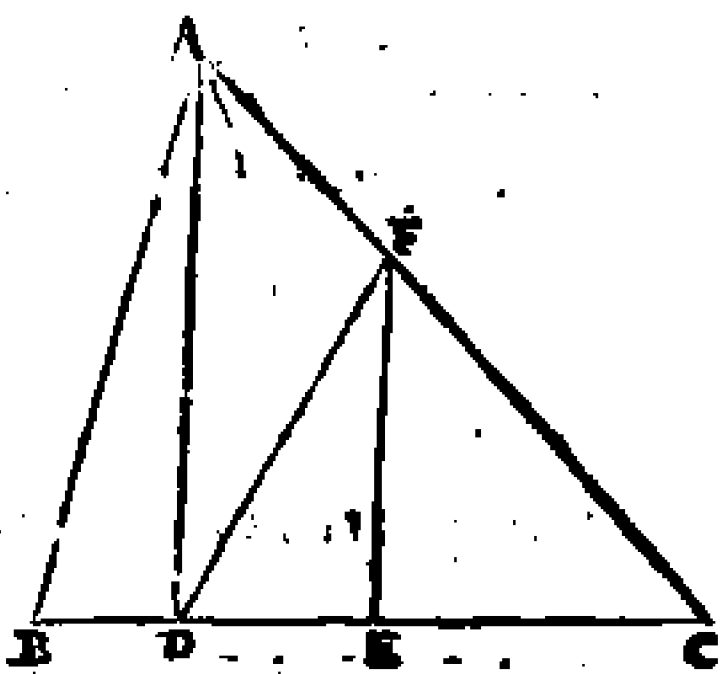
CONVERSA huius ostendetur ab Euclide propof. 40.

COLLIGITVR autem ex hac propositione, si a quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo ABC, ex angulo A, recta AD, diuidens bifariam latus BC, in D. Dico triangulum ABC, bifariam quoque secari. Si enim per A, ducatur parallela ipsi BC, erunt duo triangula ABD, ADC, inter easdem parallelas, & super æquales bases. Quare æqualia erunt.

a 38. primi.

EX PLEETARIO.

A puncto quouis dato in vno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quæ bifariam fecerit triangulum datum.

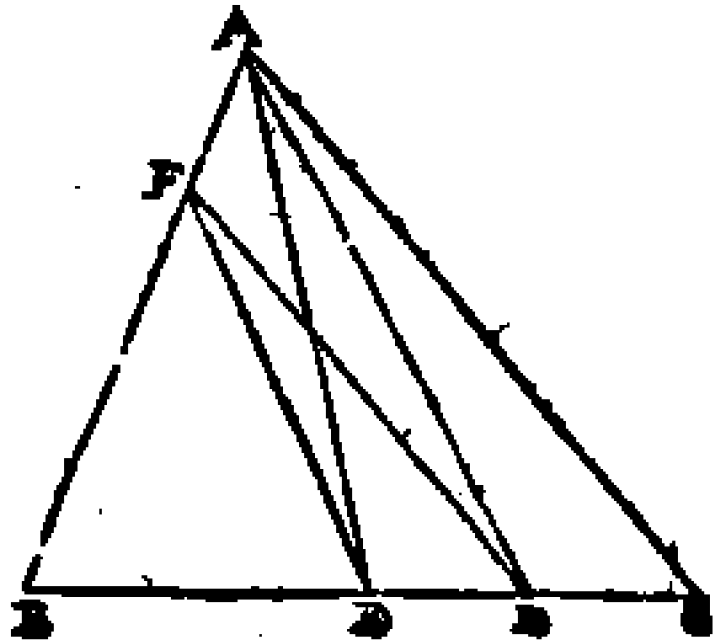


Si r triangulum ABC, & punctum datum D, in latere BC. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum. Quod si punctum D, diuidat latus BC, bifariam, recta DA, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, vt in hoc scholio est ostensum: Si verò D, non diuidit BC, bifariam, ^{b 10. primi.} secetur BC, bifariam in E. Deinde ex D, ad ^{c 31. primi.} angulum oppositum A, ducatur recta DA, & per E, ^{d 38. primi.} parallela EF, ipsi DA, secans AC, in F. Si igitur ducatur recta DF, erit triangulum diuisum bifariam a linea DE. Nam ducta recta EA, erunt triangula EFA, EFD, æqualia, cum sint super eandem basin EF, & inter easdem parallelas EF, AD. Addeat igitur comuni

e 2. pron.

EFE, erunt tota triangula AEC, CDF, æqualia: EF autem AEC, dimidium totius ABC, vt iam fuit ostensum. Igitur & CDF, dimidium est eiusdem trianguli ABC. quod erat probandum.

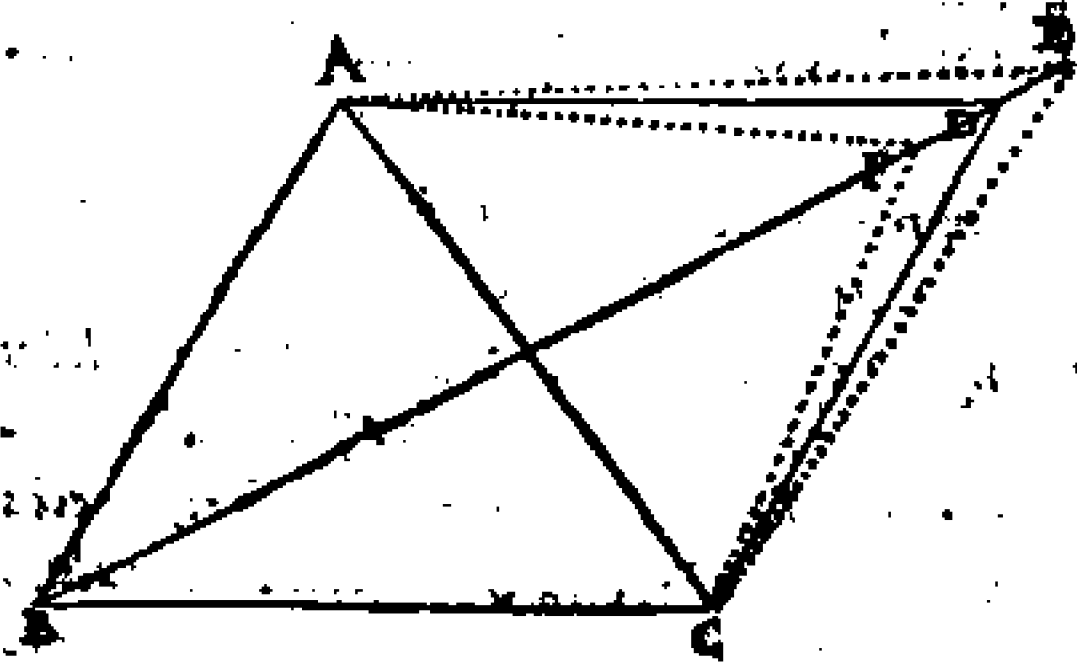
Quod si punctum D, fuerit in altera medietate EC, eodem modo problema conficiemus: sed tunc triangulum abscindetur ad partes B, trapezium verò ad partes C, vt figura præfens satis indicat. Demonstratio autem eadem erit, si in ea mutetur litera B, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multò nos vniuersalium proponemus ad finem sexti libri.



THEOR. 29. PROPOS. 39.

39.

TRIANGULA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta, & in eisdem sunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia ABC, DBC, super eandem basin BC, & ad easdem partes. Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam AD, parallelam esse ipsi BC. Si enim non est, ^{a 31. primi.} ducatur ex A, parallela ipsi BC, quæ vel cadet supra AD, vel infra. Cadat primum supra, qualis est AE, coeatque cum BD, protracta in E, & ducatur recta EC. Quoniam igitur parallelæ sunt AE, BC, ^{b 37. primi.} erit triangulo ABC, triangulum EBC, æquale: Est autem per hypothefin, triangulum quoque DBC, æquale eidem triangulo ABC. Igitur ^{c 1. pron.} erunt trian-

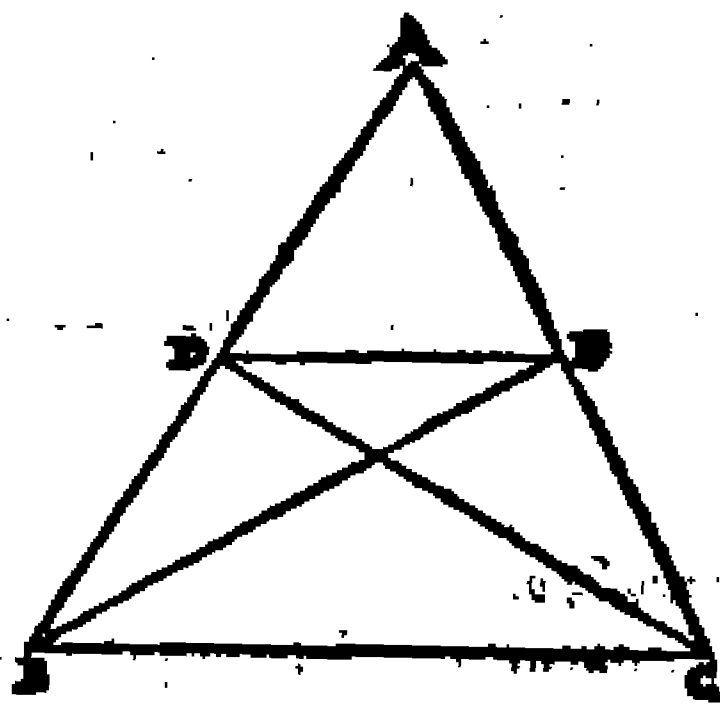
gula DBC, EBC, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis est AF, ducta recta FC, erunt eadem ratione triangula BFC, BDC, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Erit igitur AD, parallela ipsi BC. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

Ex his infer Campanus sequens hoc theorema.

Linea recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

a 38. primi.

b 1. pron.
c 39. primi.

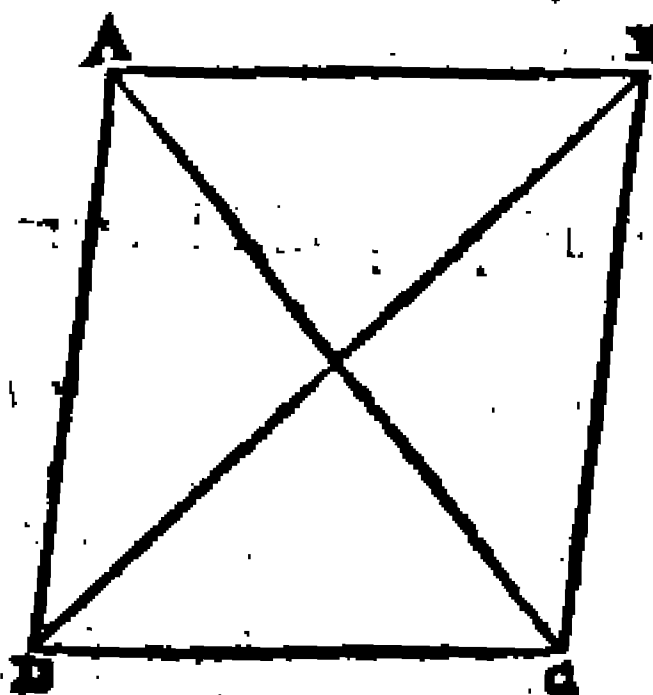


SECT linea DE, latera AB, AC, trianguli ABC, bifariam in D, & E. Dico DE, parallelam esse lateri BC. Cum enim triangula ADE, BDE, sint super aequales bases AD, DB, & inter easdem parallelas; (si per E, ducatur parallela ipsi AB,) erit triangulum BDE, triangulo ADE, aequale: Eadem ratione erit triangulum CED, eidem triangulo ADE, aequale. Quod etiam constat ex scholio precedentis propositionis. Recta enim ED, secabit triangulum AEB, bifariam, & recta eadem DE, triangulum ADC, bifariam etiam, quod bases AB, AC, secte sint bifariam à recta DE, ex hypothesis. Igitur triangula DBE, CED, aequalia erunt: Habent autem eandem basin DE, & sunt ad easdem partes constituta. Quare inter easdem

erunt parallelas, & idcirco DE, BC, parallela erunt. Quod est propositum.

Id autem, quod ad finem secundi theoremati in scholio propositionis 34. polliciti sumus, facile ex hac propositione demonstrabimus. Videlicet.

d 7. pron.
e 39. primi.



OMNIA quadrilaterum, quod ab utraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum est.

NAM quadrilaterum ABCD, diuidatur bifariam ab utraque diametro AC, BD. Dico ipsum esse parallelogrammum. Cum enim triangula ADC, BDC, dimidia sint eiusdem quadrilateri ABCD, & ipsa inter se aequalia erunt. Quare cum eandem habeant basin DC, ad easdemque partes sint, & ipsa in eisdem parallelis erunt; Atque idcirco recta AB, DC, parallela sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse AD, BC. Parallelogrammum igitur est ABCD. Quod est propositum.

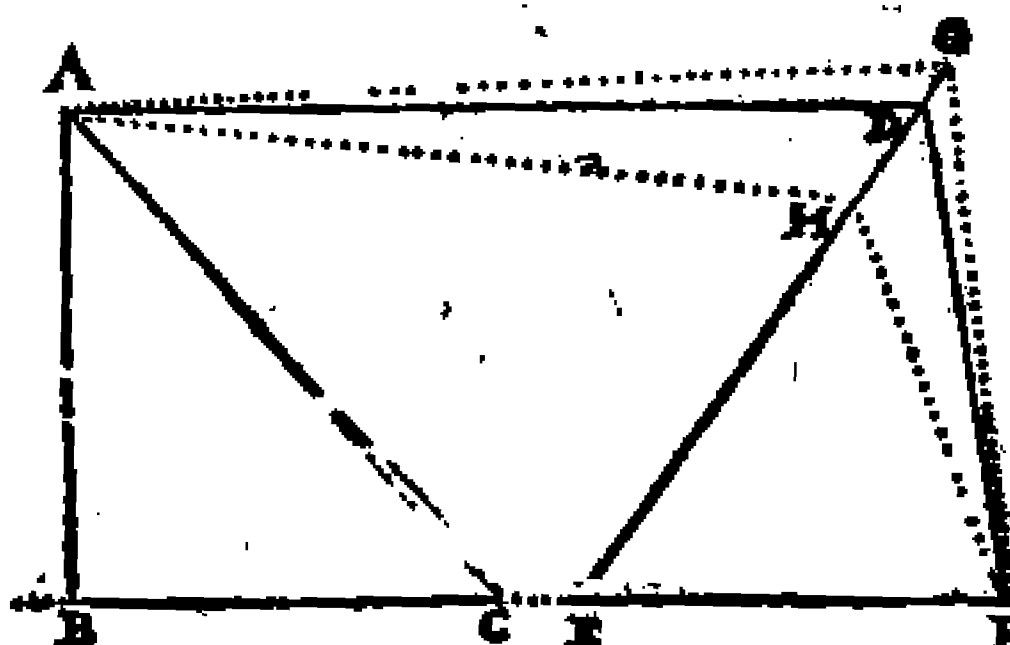
40.

THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGULA aequalia super aequalibus basibus, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

a 38. primi.

b 1. pron.



qualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis est AH, ducta recta HF, erunt eadem argumentatione triangula HEF, DEF, aequalia, pars & totum, quod est absurdum. Est igitur AD, parallela ipsi BF. Quare triangula aequalia super aequalibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.

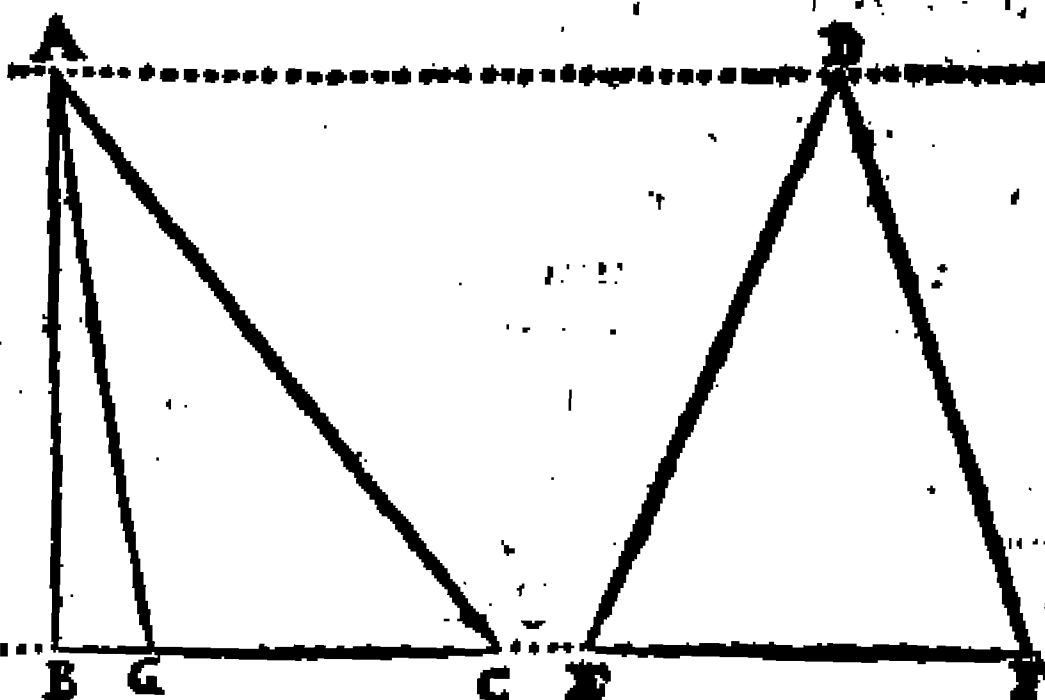
SCHOLIUM.

HAE C propositio conuertit vno modo propof. 34. Alio autem modo conuerri potest, quemadmodum propositionem 36. conuertimus in eius scholio, nimirum.

TRIANGULA aequalia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basim, super aequales bases erunt constituta.

a 3. primi.
b 38. primi.

c 1. pron.



SIN TRIANGULA aequalia ABC, DEF, inter parallelas AD, BF, & super bases BC, EF, quas dico esse aequales. Si enim non sunt aequales, sit BC, maior. Abscissa ergo recta CG, aequali ipsi EF, & ducta recta GA; erit triangulum AGC, triangulo DEF, aequale. Ponitur autem & triangulum ABC, eidem triangulo DEF, aequale. Igitur triangula AGC, ABC, aequalia erunt, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo inaequales sunt bases BC, EF, sed aequales. Quod est propositum.

SEPTEN.

SE QVINT etiam theorema facili negotio demonstrabitur.

Si duo triangula inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contrà, si duo triangula sint inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit.

SINT enim in proxima figura inter parallelas AD, BE , triangula ABC, DEF , sitq; basis BC , base EF , maior. Dico triangulum ABC , maius esse triangulo DEF . Ablata enim recta CG , ^a equali ipsi EF , ducta q; recta AG ; ^b erunt triangula AGC, DEF supra æquales bases GC, EF , æqualia. Cum ergo ^c triangulum ABC , triangulo AGC , maius sit, erit idem triangulum ABC , maius, quàm DEF . a 3. primi.
b 38. primi.
c 9. pron.

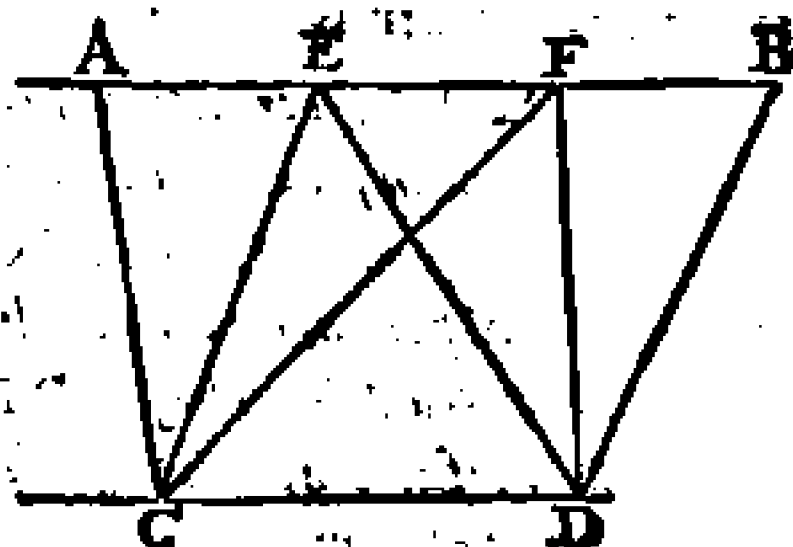
SINT rursus triangula ABC, DEF , inæqualia, & ABC , maius. Dico basin BC , base EF , maiorem esse. Si enim dicatur æqualis, ^d erit triangulum ABC , triangulo DEF , æquale. quod est absurdum; cum maius ponatur. Si vero credatur esse minor, erit triangulum DEF , maius triangulo ABC , ut proxime ostendimus, quod multo magis est absurdum, cum ABC , ponatur maius, quàm DEF . Recta igitur BC , maior erit, quàm EF , cum neque æqualis sit ostensa, neque minor. Quod est propositum. d 38. primi.

QVARE porro hæcenus de parallelogrammis, triangulisq; inter easdem parallelas constitutis demonstrata sunt, facile quoque demonstrari possunt de trapezys inter easdem parallelas descriptis, eodem ferme ordine hoc modo.

I.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases inter se æquales sint, sunt inter se æqualia: Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas æquales.

DICUNTUR trapezia in eisdem esse parallelis, quando latera duo opposita parallela sunt, partēsque sunt earundem parallelarum.



INTER parallelas igitur AB, CD , super eadem basi CD , constituta sint duo trapezia $ACDE, FCDB$, quorum bases oppositæ AE, FB , æquales sint. Dico ipsa inter se esse æqualia. Ductis enim rectis EC, FD , ^a erunt tam triangula ECD, FCD , super eadem basi CD , & in eisdem parallelis, inter se æqualia, ^b quàm triangula ACE, FDB , super æqualibus basibus AE, FB , & in eisdem parallelis. Si igitur æqualibus ECD, FCD , addantur æqualia ACE, FDB , ^c erunt totæ trapezia $ACDE, FCDB$, inter se æqualia. a 37. primi.
b 38. primi.
c 1. pron.

SINT iam trapezia $AGDE, FCDB$, æqualia. Dico bases oppositas AE, FB , æquales quoque esse. Erunt enim rursus, ^d triangula ECD, FCD , æqualia. Si igitur ex trapezys æqualibus auferantur, ^e æqualia erunt reliqua triangula ACE, FDB . Quare, ut in hoc scholio ostendimus, bases AE, FB , æquales erunt. d 37. primi.
e 1. pron.

II.

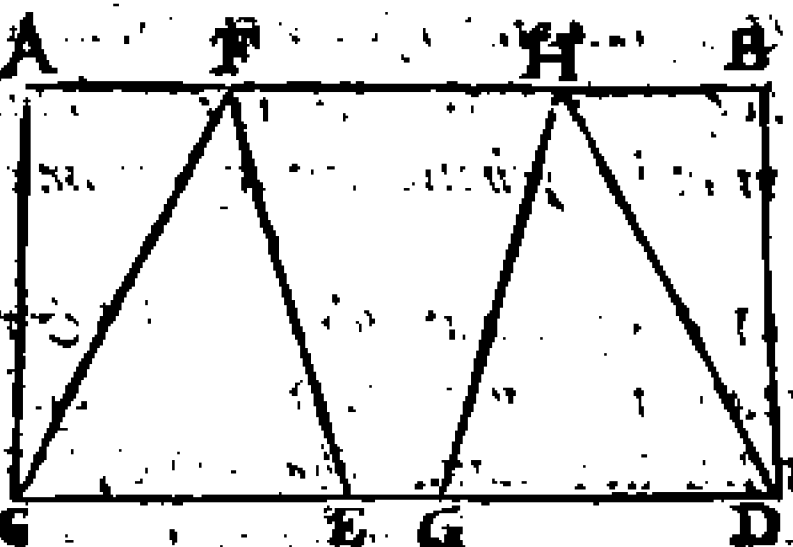
TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusque est illud, cuius basis maior est; Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.

UT in eadem figura, si basis AE , dicatur esse maior base FB ; Dico trapezium $ACDE$, maius esse trapezio $FCDB$. Erunt enim rursus triangula ECD, FCD , æqualia: At triangulum ACE , triangulo FDB , maius, ut in hoc scholio demonstravimus. Totum ergo trapezium $ACDE$, toto trapezio $FCDB$, maius erit. k 37. primi.
l 4. pron.

REVERSA si trapezium $ACDE$, dicatur esse maius trapezio $FCDB$; Dico basin AE , base FB , maiorem esse. Erunt enim rursus triangula ECD, FCD , æqualia. Quare reliquum triangulum ACE , reliquo triangulo FDB , ^m maius erit: ac proinde, ut in hoc scholio ostensum est, basis AE , maior erit base FB . Quod ostendendum erat. m 37. primi.
n 5. pron.

III.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint æquales, æqualia sunt: Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent bases oppositas æquales.



INTER parallelas AB, CD , super æquales bases CE, GD , constituta sint duo trapezia $ACEF, HGD B$, quorū bases oppositæ AF, HB , æquales quoque sint. Dico ipsa trapezia æqualia esse. Ductis enim rectis FC, HD , ^a erunt tam triangula FCE, HGD , super æqualibus basibus CE, GD , quàm ACF, BDH , super basibus æqualibus AF, BH , inter se æqualia. Totæ ergo trapezia æqualia erunt. o 38. primi.
p 2. pron.

SINT iam trapezia $ACEF, HGD B$, æqualia super bases æquales CE, GD . Dico bases oppositas AF, BH , æquales quoque esse. q 38. primi.

23. pron. Erunt namque rursus triangula FCE, HGD , super aequales bases CE, GD , equalia: quibus ablati extrapezibus aequalibus, reliqua triangula ACF, BDH , equalia erunt; ac proinde, ut paulò ante in hoc scholio ostendimus, bases AF, BH , equales erunt.

IV.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super aequalibus basibus, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusque est illud, cuius basis maior est: Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super aequalibus basibus, habent oppositas bases inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.

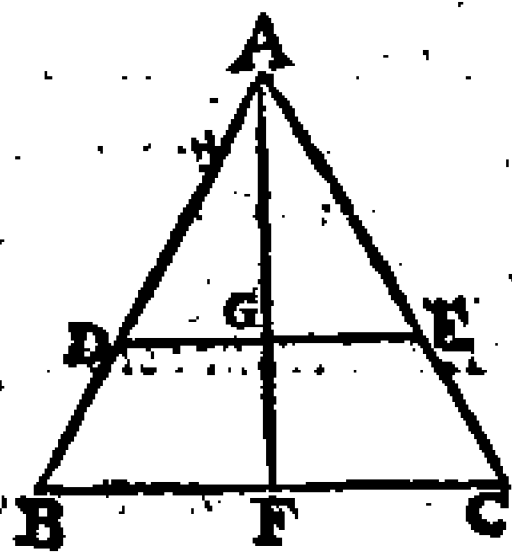
638. primi. *UT in eadem figura, si basis AF , dicatur esse maior base BH , erit trapezium $ACEF$, trapezio $HGDB$, maius.* Et sunt enim rursus triangula FCE, HGD , super aequales bases CE, GD , equalia: Ad triangulum ACF , maius triangulo BDH , ut supra ostensum est, quod basis AF , maior ponatur base BH . Totum ergo trapezium $ACEF$, totò trapezio $HGDB$, maius erit.

638. primi. *RURSUM si trapezium $ACEF$, maius ponatur trapezio $HGDB$, erit basis AF , base BH , maior.* Et sunt enim rursus triangula FCE, HGD , super aequales bases CE, GD , equalia: quibus ablati extrapezibus inæqualibus, reliquum triangulum ACF , reliquo triangulo BDH , maius erit; ac proinde, ut in hoc scholio ostensum fuit, basis AF , base BH , maior erit. Quod erat ostendendum.

65. pron. PORRO non videtur hic omittendum theorema sequens, per quod facili negotio lineam rectam quamcunque in quorvis partes æquales dividemus: quod nos in scholio propositionis 10. huius libri facturos hoc loco recepinus. Quamvis enim idem demonstrari possit, & quidem facilius, per proportionem linearum, ut libro 6. ostendimus, incundum tamè est intelligere, nullo labore idem absolui posse per propositiones hactenus demonstratas, sine proportionum adiumento. Theorema ergo est huiusmodi.

Si in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, dividensque alterutram parallelarum bifariam, dividit quoque alteram bifariam.

619. primi.



In triangulo ABC , æquidister DE , ipsi BC , & recta AF , secet alterutram BC, DE , bifariam in F , vel G . Dico alteram quoque bifariam secari. Sint enim primum anguli ad F , recti. Quo posito, & anguli ad G , recti erunt. Si igitur BC , dividitur bifariam, dividetur bifariam quoque angulus A , per ea, quæ in scholio propositionis 26. huius libri demonstravimus, ac proinde recta AG , ab basim DE , trianguli ADE , perpendicularis, dividensq; angulum A , bifariam, dividet bifariam quoq; basim DE , ut ibidem ostendimus, quod est propositum.

Si vero D , ponatur dividi bifariam, dividetur, per idem scholium propositionis 26. huius libri, angulus quoque A , bifariam: ac proinde recta AF , ab basim BC , perpendicularis, dividensq; angulum A , bifariam, basim quoq; BC , bifariam secabit, quod est propositum.

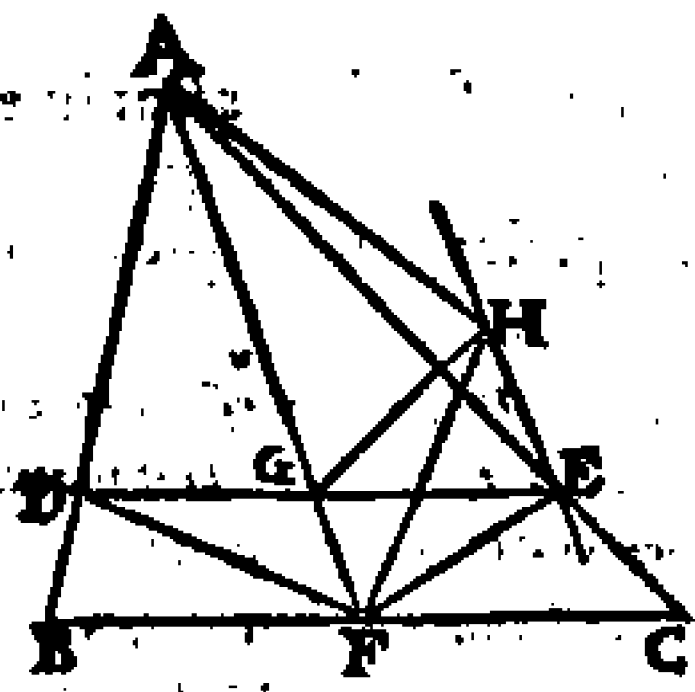
619. primi.

623. primi.

13. primi.

638. primi.

13. pron.



64. primi.

613. primi.

64. primi.

62. pron.

61. pron.

639. primi.

637. primi.

623. primi.

623. primi.

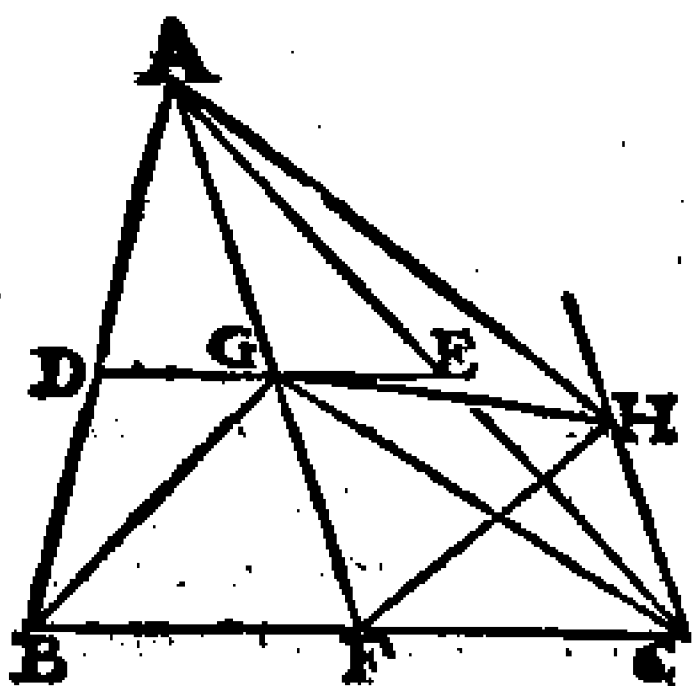
638. primi.

62. pron.

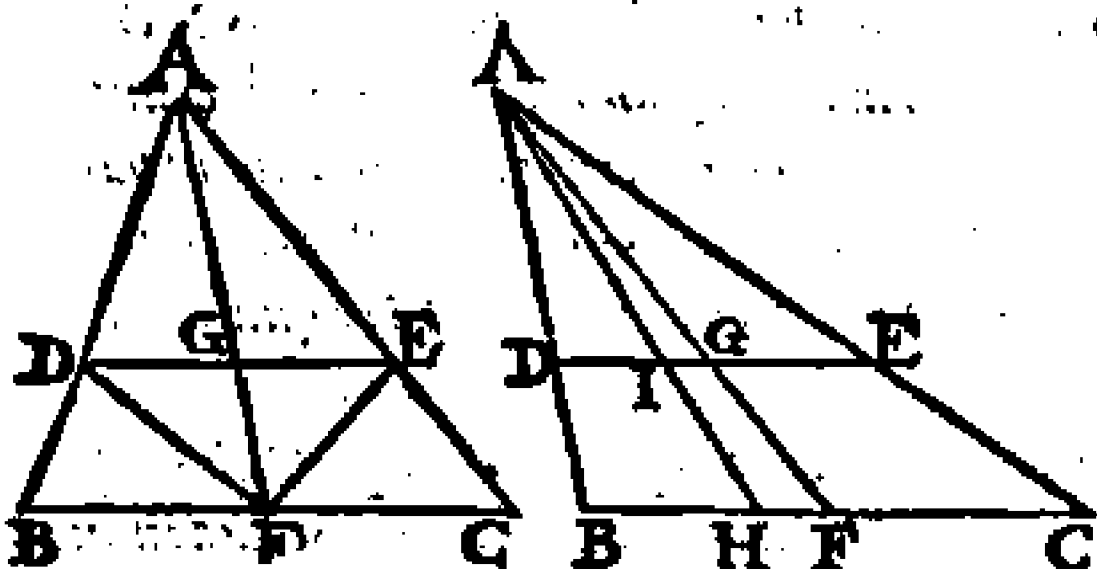
que triangula AGD, AGH , equalia. Pariter ratiōe, quia duo latera DG, GF , duobus lateribus HG, GF , equalia sunt, ex constructione, angulosque continent æquales DGF, HGF , (cū enim per constructionem anguli AGD, AGH , æquales sint, erunt quoque reliqui duorum rectorum DGF, HGF , æquales.) erunt quoque triangula DGF, HGF , equalia: & ac proinde & tota triangula ADF, AHF , equalia erunt. Est autem eisdem triangulo ADF , æquale ostensum triangulum AEF . Itaque & inter se equalia erunt triangula AHF, AEF : ac propterea inter duas easdem erunt parallelas, hoc est, ducta recta EH , erit basi AF , communis parallela. Igitur & triangula HGF, EGF , inter easdem parallelas, & super eadem basi FG , equalia inter se erunt. Est autem triangulum HGF , triangulo DGF , ostensum æquale. Igitur triangula quoque DGF, EGF , equalia inter se erunt: proptereaque basis quoque DG , basi GE , æqualiteris, ut in hoc scholio demonstratum est, quod est propositum.

Si vero D , ponatur dividi bifariam, constituatur angulo acuto AFB , equalis angulus AH , & recta FH , recta FB , ducanturq; recta AH, HG, GB, GC . Quoniam igitur tam triangula AGD, AGE , ex scholio propositionis 38. huius libri equalia sunt, quam triangula DGB, EGC , ob æquales bases DG, EG ; erunt tota etiam triangula AGB, AGC , equalia. Rursus quia duo latera AF, FB , duobus lateribus AF, FH , equalia

equalia



equalia inter se erunt triangula GFC, GFB ; ideoq; ut in hoc scholio demonstrauimus, & bases FC, FB , a-
quales erunt. Quod est propositum.

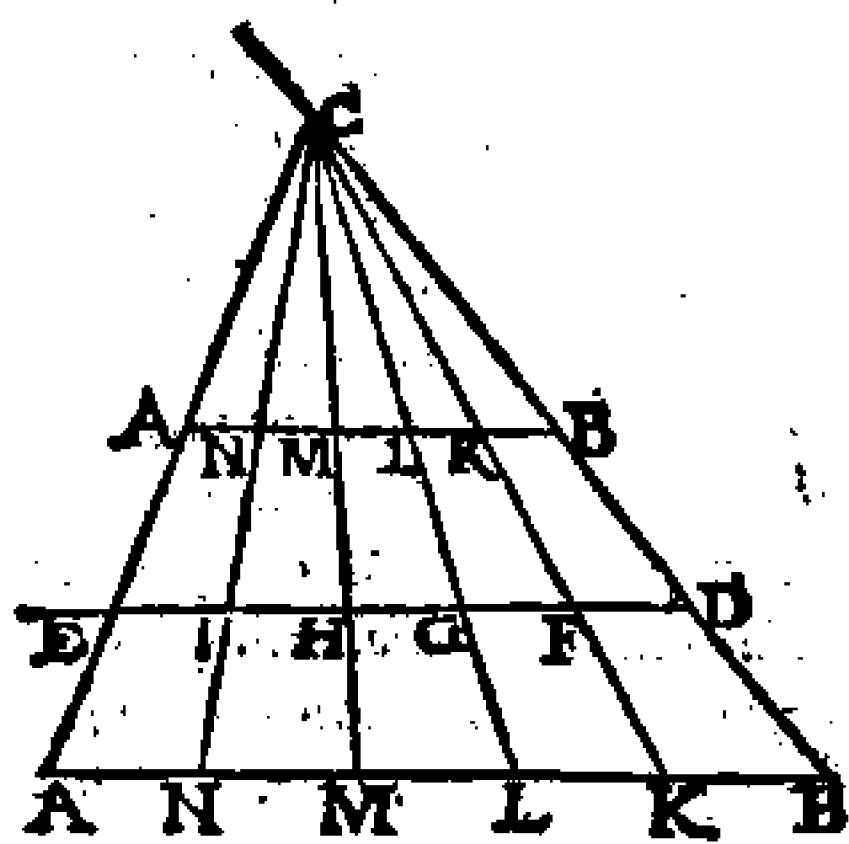


pter bases aequales BF, CF , aequalia sunt, fiet totum triangulum ABF , toto triangulo ACF , maius; ac proinde, ut in hoc scholio monstrauimus, basis BF , base FC , maior erit: Sed & aequalis ponitur. Quod est absurdum. Bisariam ergo secta est DE , in G . Quod est propositum.

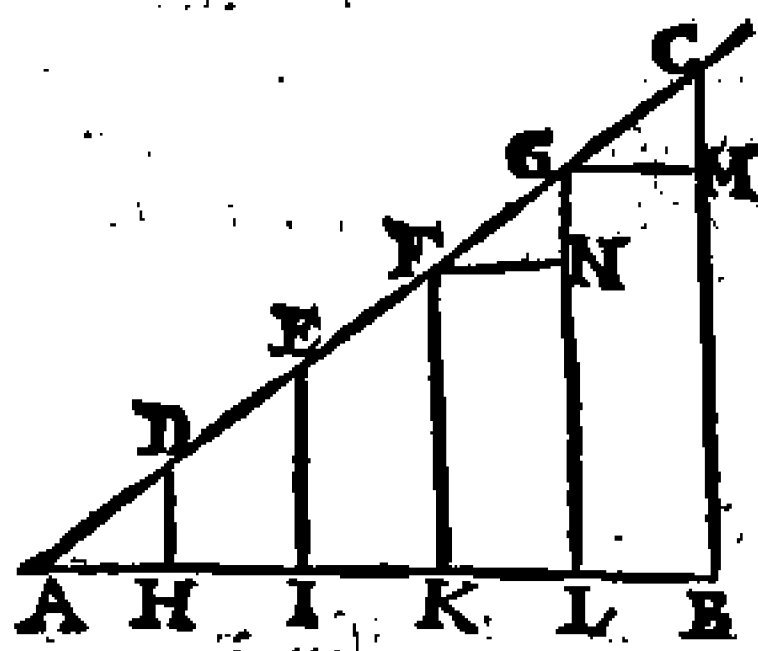
Si iam DE secta bisariam in G . Dico & BC , diuidi bisariam in F . Sin minus, diuidatur BC , in H , bisariam, ducaturq; recta AH , secans DE , in I . Quoniam igitur AH , secat BC , bisariam in H , secabit eadem ipsam DE , quoque bisariam in I , ut proximè ostendimus. Quod est absurdum, cum bisariam secta esse ponatur in G . Sequeretur enim partem toto esse maiorem. Nam si DI , equalis est ipsi IE , cum IE , maior sit, quam GE , erit quoque DI , maior, quam GE , hoc est, quam DG , qua ipsi GE , equalis ponitur. Diuiditur ergo BC bisariam in F . Quod erat demonstrandum.

Hoc ostenso theoremate, ad diuisionem lineæ rectæ in quotuis aequales partes iam veniamus.

DATAM rectam lineam finitam in quolibet partes æquales secare.



BL , in K , ut in proximo theoremate demonstrauimus. Eademq; ratione recta KM , in L , secta erit bisariam, quemadmodum & FH , in G , bisariam secta est. Sunt ergo tres partes BK, KL, LM , inter se aequales sicuti tres DF, FG, GH , atq; ita de cæteris.



duobus angulis G, F , trianguli GFN , aequales sunt, uterque utriusque, laterisque illis adiacentia CG, GF ,

equalia sunt, continentq; angulos aequales AFB, AFH , ex constructione; erunt triangula quoq; AFB, AFH , aequalia. Pari ratione, quia duo latera GF, FB , duobus lateribus GF, FH , aequalia sunt, aequalesq; continet angulos GFB, GFH , ex constructione; erunt quoq; aequalia triangula GFB, GFH : quibus deptis ex equalibus AFB, AFH ; aequalia erunt reliqua triangula AGE, AGH : Est autem eidem triangulo AGB , ostensum aequale triangulum AGC . Igitur & triangula AGC, AGH , inter se erunt aequalia, Quare & inter easde parallelas erunt, hoc est, ducta recta GH , ipsi AF , parallela erit; ac proinde aequalia inter se erunt triangula GHE, GFE . Fuit autem ostensum triangulum GHE , triangulo GFB , æquale. & igitur & triangula GFE, GFB , aequalia erunt. Quod est propositum.

ALITER. Diuisa sit primam BC , bisariam in F . Dico & DE , bisariam esse diuisam in G . Si enim DG, GE , non sunt equalia, sit maior DG , ducanturque rectæ FD, FE . Erit igitur per ea, qua in hoc scholio demonstrauimus, tam triangulum ADG , triangulo AEG , quam triangulum FDG , triangulo FEG , maius. Totum ergo triangulum ADF , toto triangulo AEF , maius erit: quibus si addantur triangula DBF, ECF , qua propter bases aequales BF, CF , aequalia sunt, fiet totum triangulum ABF , toto triangulo ACF , maius; ac proinde, ut in hoc scholio monstrauimus, basis BF , base FC , maior erit: Sed & aequalis ponitur. Quod est absurdum. Bisariam ergo secta est DE , in G . Quod est propositum.

Si t data recta AB , secanda in quinque partes aequales. Per extremum punctum B , ducta recta BC , utcumque, & assumpto in BC , puncto quocunque D , siue infra B , siue supra, ducatur per D , ipsi AB , parallela DE , ex qua abscindantur quinque partes inter se aequales, DF, FG, GH, HI, IE , hac tamen lege, ut existente puncto D , infra B , recta DE , ex quinque partibus aequalibus composita maior sit, quam data AB , minor vero, existente puncto D , supra B , ut nimirum recta AC , per alterum extremum A , & per E , ducta cum BD , concurrere possit in puncto aliquo, ut in C : A quo si per puncta F, G, H, I , rectæ ducantur, secta erit data recta AB , in quinque partes aequales BK, KL, LM, MN, NA . Quoniam enim in triangulo ABL , recta DG , ipsi BL , est parallela; vel in triangulo CDG , recta BL , ipsi DG ; sectaq; est DG , bisariam in E , secta quoque erit bisariam

ALITER. Ad extremum A , linea AB , secanda in quinque partes aequales, constitutur angulus rectilineus quicumque A , & ex recta AC , abscindantur quinque partes quacunque inter se aequales AD, DE, EF, FG, GC : ductaq; recta CB , agantur ei parallela GL, FK, EI, DH . Dico rectam AB , sectam esse in quinque partes aequales. Ductis enim per G, F , ipsi AB , paralleli GM, FN ; qua inter se etiam parallela erunt, & ipsis BL, LK , aequales in parallelogrammis GB, FL ; & ipsis CB , quam anguli CGM, GFN , externus & internus in paralleli GL, FN , aequales inter se. Quoniam igitur duo anguli C, G , trianguli CGM , duobus angulis G, F , trianguli GFN , aequales sunt, uterque utriusque, laterisque illis adiacentia CG, GF ,

a 26. primi. aequalia per constructionem; ^a erunt quoque latera GM, FN , aequalia: qua cum ostensa sint aequalia rectis BL, LK , erunt quoque BL, LK , inter se aequales. Eademq; ratione ostendemus KL, KI , aequales esse, necnon IK, HI , & HI, LH ; ac propterea recta AB , in quinque aequales partes diuisa erit. Quod est propositum.

ALITER. Ad extrema puncta A, B , linea AB , in quinque partes aequales diuidenda constituantur duo
b 27. primi. aequales anguli in diuersas partes ABC, BAD . Et in vtraque linea BC, AD , ^b qua ob alternos angulos aequa-
c 3. primi. les A, B , parallela inter se sunt, ^c sumantur quatuor partes inter se omnino aequales, tot nimirum, vna minus,

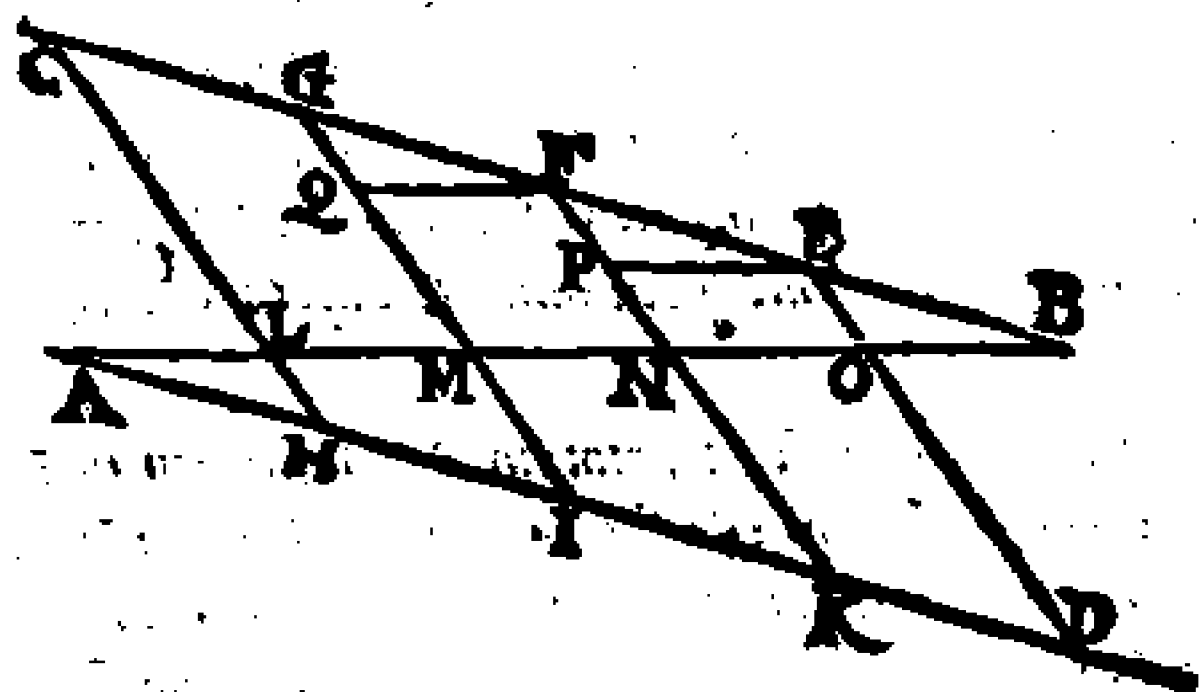
d 33. primi.

e 31. primi.

f 30. primi.

g 34. primi.

h 29. primi.

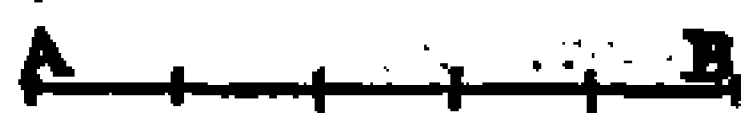


in quot partes linea secunda est, cuiusmodi sunt $BE, EF, FG, GC, AH, HI, IK, KD$, iunganturque recta CH, GI, FK, ED , ^a quae inter se erunt parallela, cum coniungant extrema parallelarum aequalium. Dico rectam AB , in quinque partes aequales sectam esse. ^b
Ductis enim per E, R , ipsi AB , parallelis ER, FQ , ^c quae inter se quoque parallela erunt, & ipsi NO, MN , aequales in parallelogrammīs EN, FM , ^b erunt tam anguli EFQ, FGQ , externus, & internus in parallelis FK, GI , quam anguli GFQ, FEP , externus & internus in parallelis QF, PE , inter se aequales. Itaque quoniam duo anguli G, F , trianguli FGQ , duobus angulis F, E , trianguli EFQ , aequales sunt, uterque verti-
i 16. primi. que, lateraque illis adiacentia FG, EF , aequalia, per constructionem, ^c erunt quoque latera FQ, EP , inter se aequalia: qua cum ostensa sint aequalia rectis MN, NO , erunt etiam MN, NO , inter se aequales. Eademque ratione aequales inter se erunt OD, NO, MN, LM, AL , propterea q; recta AB , in quinque aequales partes diuisa erit. Quod est propositum.

k 33. primi. PRAXIS hac breuius ita demonstrabitur. ^k Quoniam recta ED, FE, GI, CH , parallela sunt, quod coniungant extrema aequalium & parallelarum; secabitur recta BL , in quatuor partes aequales, necnon & recta AO , ut in precedenti praxi ostendimus. Omnes ergo quinque partes AL, LM, MN, NO, OB , aequales erunt.

ALITER. Paretur instrumentum diuisionibus linearum in partes aequales accommodatum, hoc modo.
l 3. primi. Ductis duabus parallelis satis magno spatio inter se distantibus CD, EF , ^l sumantur in vtraque partes omni-
no inter se aequales quotcunque, tot videlicet in vna, quot in altera, & modica quantitate, punctaque re-

m 33. primi.



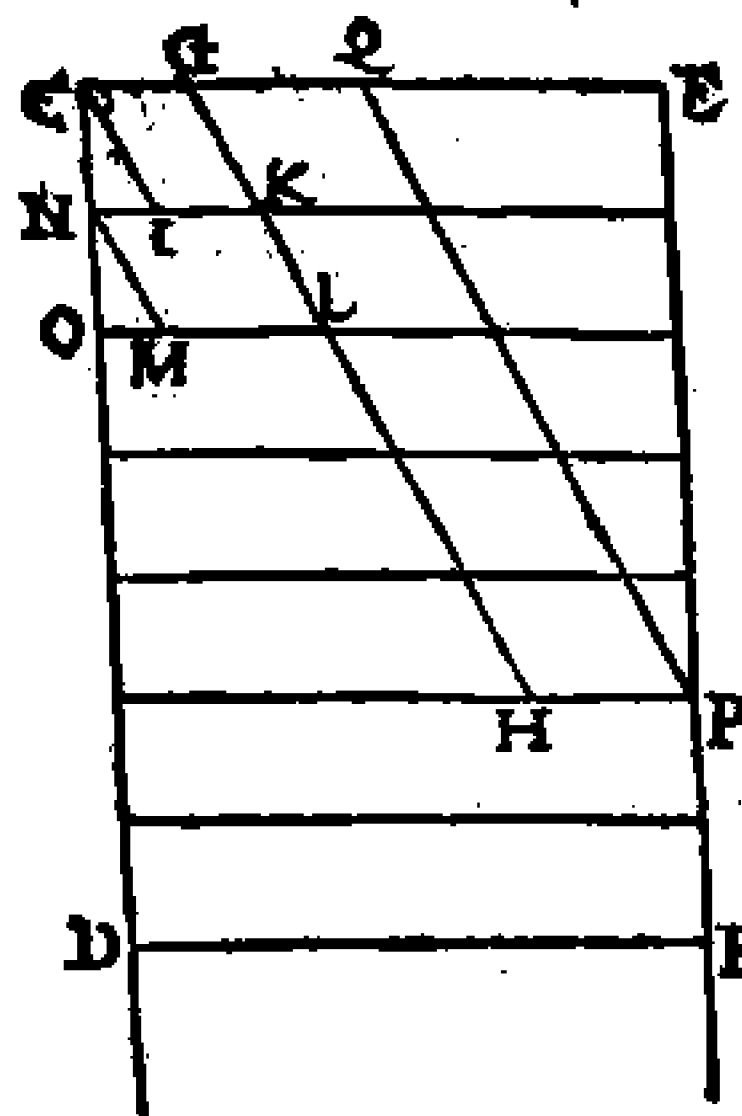
n 3. primi.

o 30. primi.

p 34. primi.

q 29. primi.

r 16. primi.



spondentia lineis rectis iungantur, ^m quae parallela inter se erunt, cum coniungant extrema parallelarum aequalium. Si igitur beneficio circini recta AB , in quinque diuidenda partes aequales transferatur ex quouis puncto G , vsque ad punctum H , ita ut quinque spatia parallelarum inter G , & H , includantur, diuisa erit ducta GH , ab illis parallelis in quinque partes aequales, quibus partibus si in data AB , ⁿ sumantur partes aequales, diuisa quoque erit AB , in quinque aequales partes. Sectam autem esse GH , in quinque partes aequales, ita demonstrabitur. Ductis ex C, N , ipsi GH , parallelis CI, NM , ^o quae inter se quoque parallela erunt, & ipsi GK, KL , aequales in parallelogrammīs $GLKM$; ^q erunt tam anguli CNI, NOM , externus & internus in parallelis NK, OL , quam anguli ONM, NCI , externus & internus in parallelis NM, CI , aequales inter se. Igitur cum duo anguli N, C , trianguli CNI , duobus angulis O, N , trianguli NOM , aequales sint, uterq; utriusque, lateraq; illis adiacentia CN, NO , aequalia, ex constructione, ^r erunt quoque latera CI, NM , inter se aequalia: qua cum ostensa sint aequalia rectis GK, KL , erunt quoque GK, KL , inter se aequales. Eademque ratione omnes partes recta GH , ostendentur aequales, ac proinde recta GH , in quinque partes aequales erit diuisa.

PRAXIS etiam hac breuius demonstrabitur, si hoc modo fiat. Sumptis quinque internis rectis EF , ab E , vsque ad P , transferatur recta AB , beneficio circini ex P , ad aliquod punctum rectae CE , ut ad Q . Erit enim hac ratione ducta recta PQ , diuisa a parallelis in quinque partes aequales, ut in secunda praxi demonstratum est. Quare si partes rectae PQ , quae data recta AB , aequalis est, ex constructione, transferantur in datam rectam AB , diuisa quoque erit AB , in quinque partes aequales. Quod est propositum.

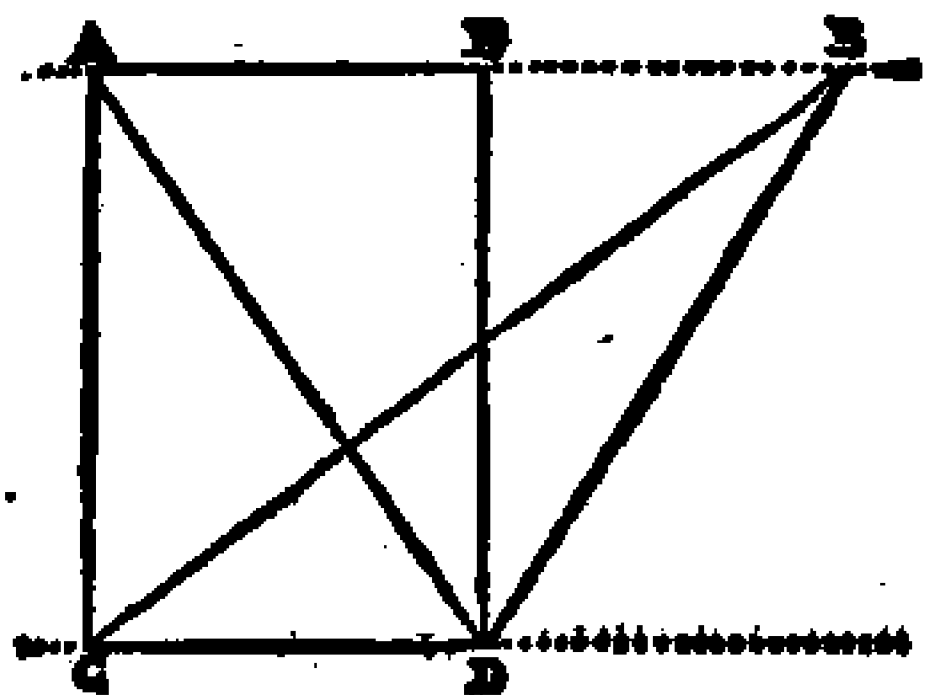
PLEXIVS describitur hac praxi lib. 6. in scholio propof. 10.

41.

THEOR. 31. PROPOS. 41.

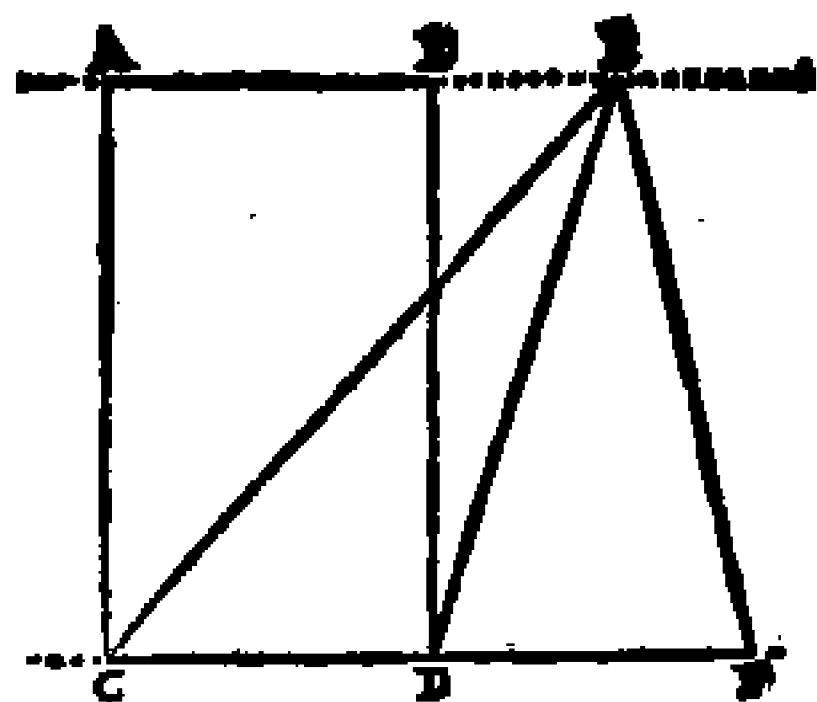
SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemq; fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

INTBB



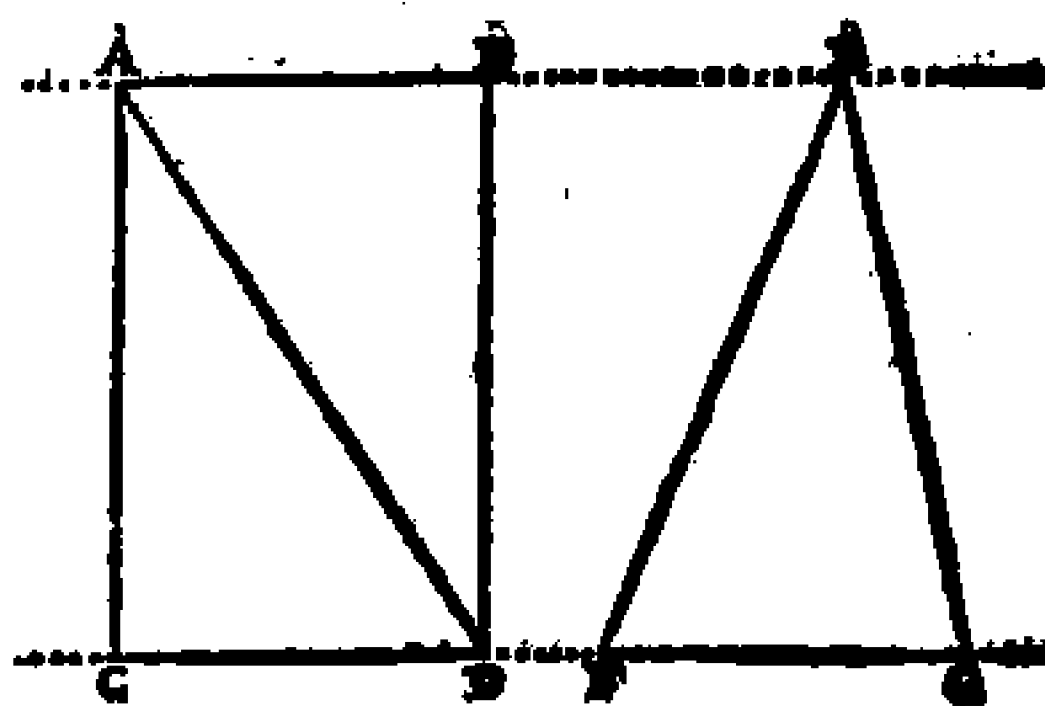
INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, consti-
tuantur parallelogrammū ACDE, & triangulum BCD.
Dico parallelogrammum esse duplum trianguli BCD.
Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, ^a erunt
triangula ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum
ACDE, duplum est trianguli ACD; ^b quod triangula
ACD, ADE, æqualia quoque inter se sint. Igitur & trian-
guli BCD, ^c duplum erit idem parallelogrammū ACDE.
Quamobrem si parallelogrammum cum triangulo, &c.
Quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.



Hic sequitur, si triangulum duplam habuerit basin, fue-
ritq; in eisdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum pa-
rallelogrammo æquale fore. Nam si basis CD, producat̃ur ad F, vt
sit DF, æqualis ipsi CD, ducat̃urque recta FB, erit triangulum
BCF, duplum trianguli BCD, ^a quod triangula BCD, BDF, æ-
qualia sint: Est autem & parallelogrammum ACDE, ^b duplum
eiusdē trianguli BCD. ^c Igitur æqualia erūt triangulum BCF,
& parallelogrammum ACDE.

IDEM hoc
theoremā Eu-
clidis demonstrari potest eodem modo, si parallelogram-
mum & triangulum æquales habuerint bases, & non ean-
dem, fuerintq; in eisdem parallelis, vt cerni in parallelo-
grammo ACDE, & triangulo BFG, quorum bases CD,
FG, æquales sunt. Ducta enim diametro AD, in parallelo-
grammo, ^d erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur
parallelogrammū ACDE, duplū sit trianguli ACD; ^e
quod diameter AD, secet parallelogrammū ACDE, bifa-
riam; ^f erit quoq; idem trianguli BFG, duplum. Eadem ratione si basis FG, duplicaretur, & recta ad B, du-
ceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc & esset duplum etiam trian-
guli BFG, &c.

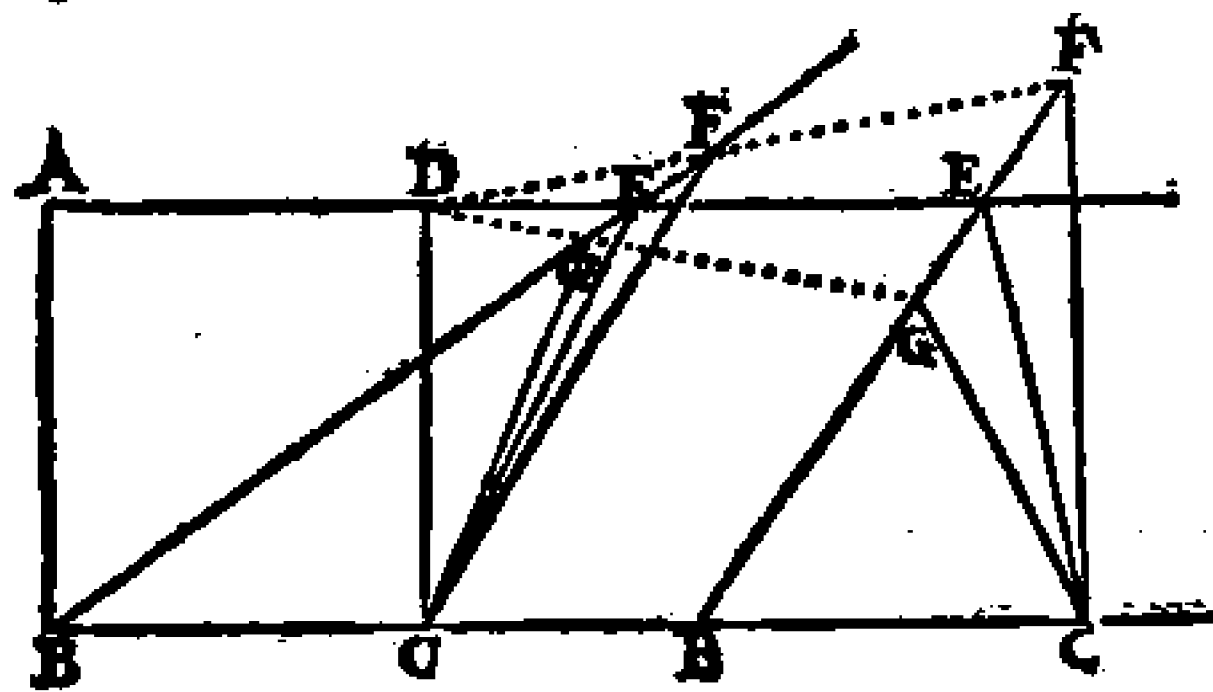


d 38. primi.
e 34. primi.

f 6. pron.
g 38. primi.

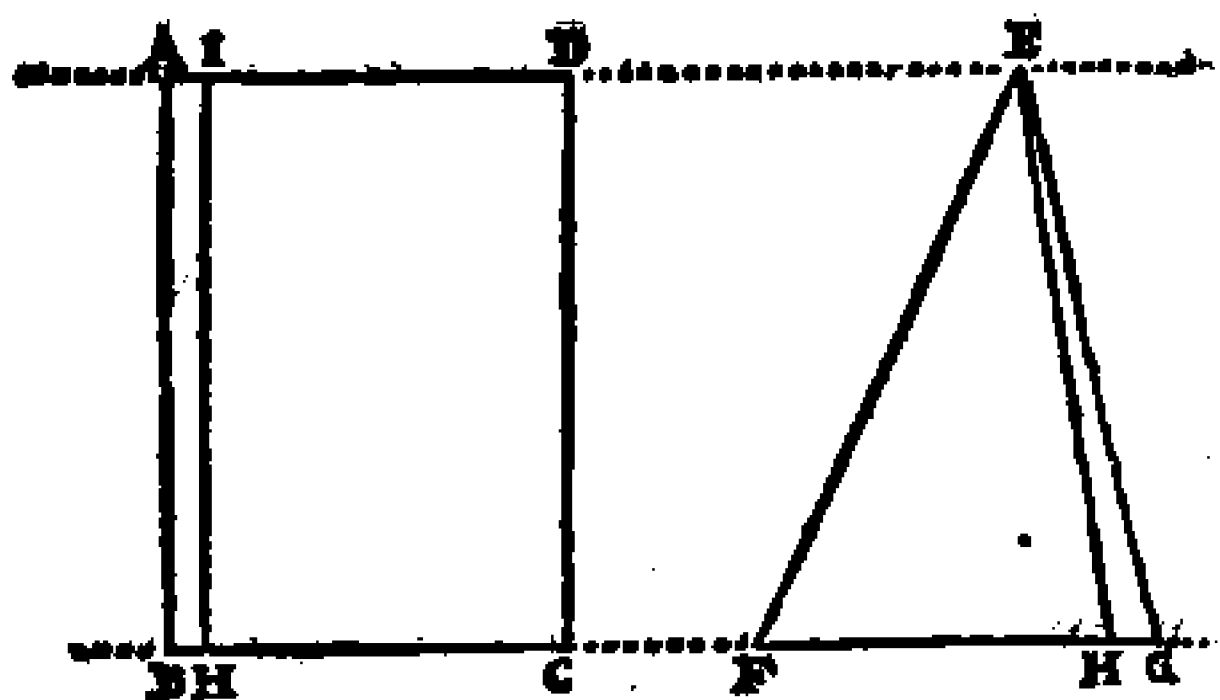
CONVERSVM huius theorematis duplex est, hoc modo.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; habuerint basin, vel æqua-
les, & ad eandem partes constituta; Erūt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum
duplum fuerit trianguli, in eisdemque parallelis; erunt bases æquales, si non sit eadem.



Si T parallelogrammum ABCD, duplum trian-
guli BEC, siue eandem habeant basin, siue æquales.
Dico parallelam AD, productam cadere in E, pun-
ctum. Nam aliās cadet aut supra E, aut infra. Vnde,
vt in 39. vel 40. propositione, ostendetur pari æqualis
roti, vt & figura indicat. ^h Nam erit quoq; paral-
lelogrammum ABCD, trianguli BEC, vel BGC,
duplum. ⁱ Quare triangula BEC, FBC, vel trian-
gula BEC, GBC, æqualia erunt, pari & toti. Quod
est absurdum.

h 41. primi.
i 6. pron.

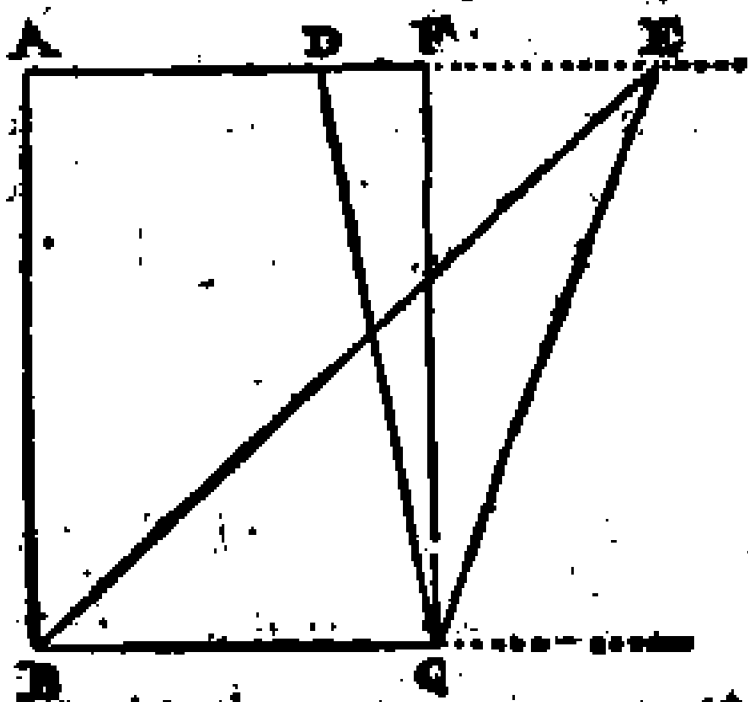


Si T deinde parallelogrammū ABCD, duplum
trianguli EFG, in eisdemque parallelis. Dico bases
BC, FG, esse æquales. Nam si altera, nempe BC, sit
maior, abscissa æquali CH, & ^k ducta HL, parallela
ipsi AB, demonstrabimus parallelogrammū ABCD,
IHCD, esse æqualia, totū & partem; (quia vtrum-
que duplum est trianguli EFG; illud quidem p hy-
pothesin, hoc verò per 41. proposic.) Quod est absur-
dum. Idem ostendemus, si basis FG, maior dicatur.
Si enim abscindatur ipsi BC, æqualis FH, ducat̃urq;
recta HE, erunt triangula EFH, EFG, æqualia; pars & totum; (Nam vtrumque dimidium est parallelo-
grammū ABCD; illud quidem per proposic. 41. hoc verò per hypothesin.) Quod est absurdum.

k 31. primi.

EX PROCLO.

Si triangulum, & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapeziū maius duplo trianguli.



a 33. primi.
b 41. primi.

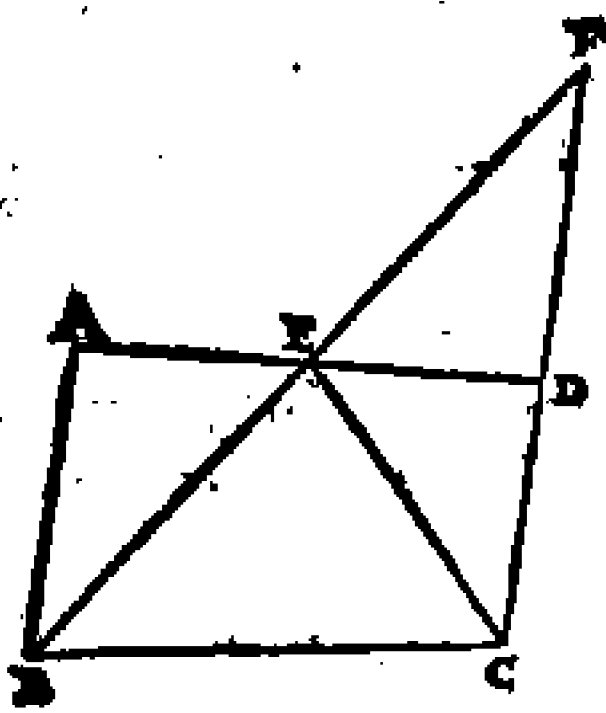
INTER lineas parallelas AE, BC, sint cōstituta trapeziū ABCD, & triangulum EBC, super basim BC, eandem, quæ sit tamen maior, q̃ altera linea AD, parallela in trapezio dato. Dico trapeziū ABCD, minus esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, minor ponatur quàm BC, sumatur AF, equalis ipsi BC, & ducatur recta CF, quæ erit parallela ipsi AB; atque adeo parallelogrammum erit ABCF, quod duplum est trianguli EBC. Quare trapeziū ABCD, cum sit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiusdem trianguli EBC. quod est propositum.

SINT rursus trapeziū, & triangulum, ut prius, sed basim BC, sit minor, quàm reliqua linea parallela AD, in trapezio dato. Dico trapeziū ABCD, maius esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, maior sit, q̃ BC, abscindatur DF, equalis ipsi BC, & ducatur recta BF, quæ erit parallela ipsi CD; atque adeo parallelogrammum erit BCDF, quod duplum est trianguli EBC. Quare totum trapeziū ABCD, quod superat parallelogrammum BCDF, maius erit duplo eiusdem trianguli EBC. quod est propositum.

c 33. primi.
d 41. primi.

ID EM concludetur, si trapeziū, & triangulum constituta fuerint super aequales bases, ita tamen, ut nunc quidem basis trapezij sit maior latere opposito parallelo, nunc vero minor.

TRAPEZIUM habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basim habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem verò in medio puncto lateris oppositi.



e 29. primi.
f 15. primi.
g 16. primi.

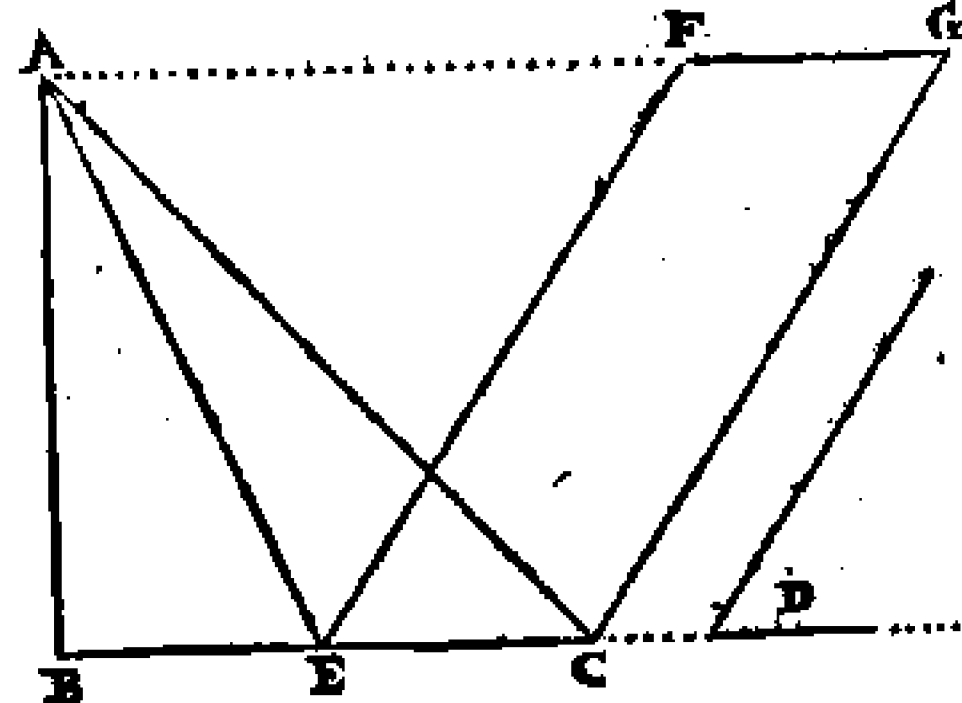
SIT trapeziū ABCD, cuius duo latera opposita AB, DC, sint parallela, & super basim BC, constitutur triangulum EBC, verticem E, habens in medio puncto E, lateris AD. Dico trapeziū ABCD, duplum esse trianguli EBC. Producatum enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe BE, donec coeat cum CD, protrahito in F. Et quia parallela sunt AB, CF, erunt anguli alterni BAE, FDE, æquales: Sunt autem & anguli AEB, DEF, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus AE, trianguli ABE, lateri DE, trianguli DEF, æquale, per hypothesin. E igitur & reliqua latera AB, BE, reliquis lateribus DF, FE, æqualia erunt, utrumque utriusque, & reliqui anguli ABE, DFE, æquales: atque idcirco triangula ABE, DFE, ex corollario

h 2. pron.
i 38. primi.
k 1. pron.

propof. 26. huius libri, æqualia erunt. Quare addito cōmuni triangulo CDE, erunt triangulo CEF, æqualia triangula simul ABE, CDE. Est autem & triangulum BCE, eidem triangulo CEF, æquale, q̃ bases BE, EF, ostense sint æquales, & ipsa triangula inter easdem sint parallelas, si per C duceretur parallela ipsi BF. Igitur triangulum CBE, æquale erit triangulis ABE, CDE, & propterea CBE, triangulum dimidium erit trapezij ABCD, quod est propositum.

PROBL. II. PROPOS. 42.

42. DATO triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilino.



a 10. primi.
b 23. primi.
c 31. primi.

DATUM triangulum sit ABC, & datus angulus rectilinus D. Oportet igitur construere parallelogrammum æquale triangulo ABC, habens angulum æqualem angulo D. Dividatur latus vnum trianguli, nempe BC, bifariam in E, & fiat angulus CEF, æqualis angulo D, prout libet, hoc est, siue angulus CEF, vergat ad partes C, siue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Ducatur item per A, recta AF, parallela ipsi BC, quæ secet EF, in F. Rursus per C, vel B, ducatur ipsi EF, parallela CG, occurrens rectæ AF, productæ in G. Eritque in angulo CEF, qui dato angulo rectilino D, factus est æqualis, constitutum parallelogrammum CEFG, quod dico esse æquale triangulo ABC. Ducta enim recta EA, quoniam parallelogrammum CEFG, duplū est trianguli AEC, & triangulum ABC, duplum

41. primi.

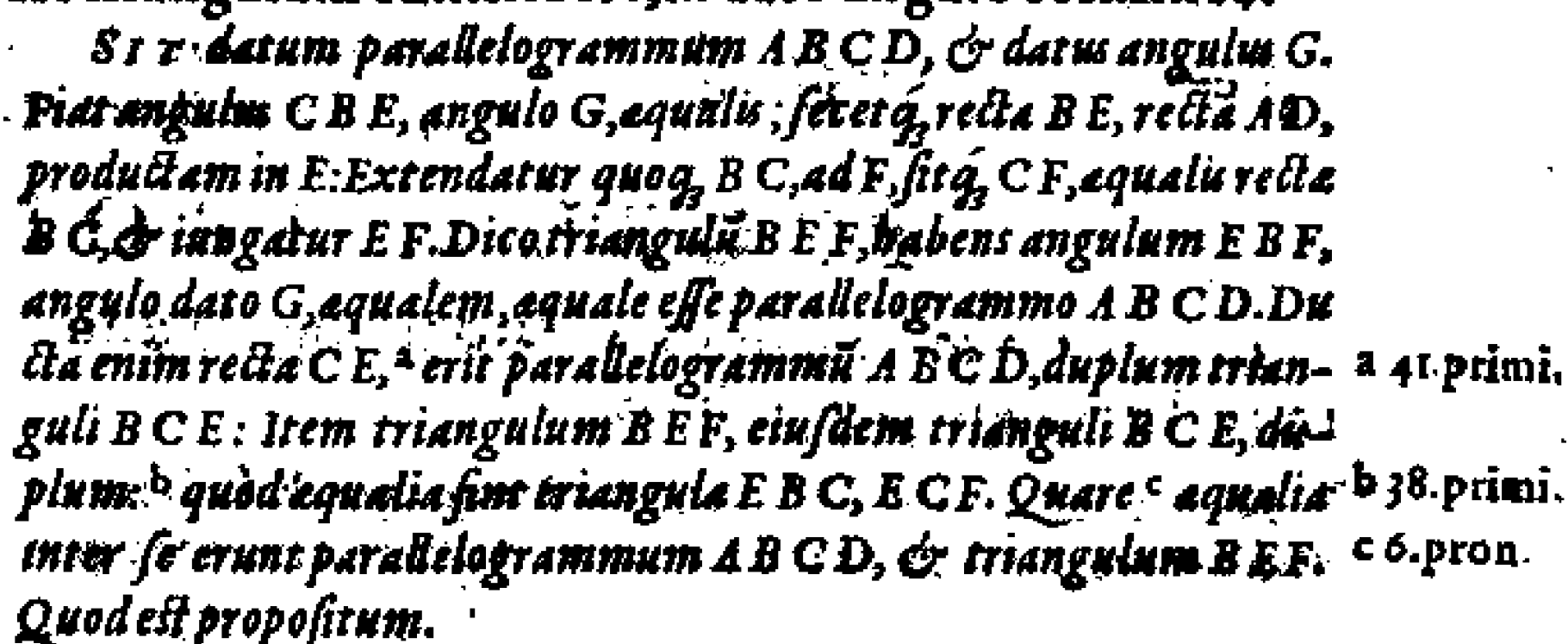
a 38. primi.
b 6. prem.

S C H O L I V M.

PRAESENTIS huius problematis facillima est ex ipsa constructione.

SVBIVNGIT autem hoc loco Petrarus subsequens problema, quod huius propos. conuersum est.

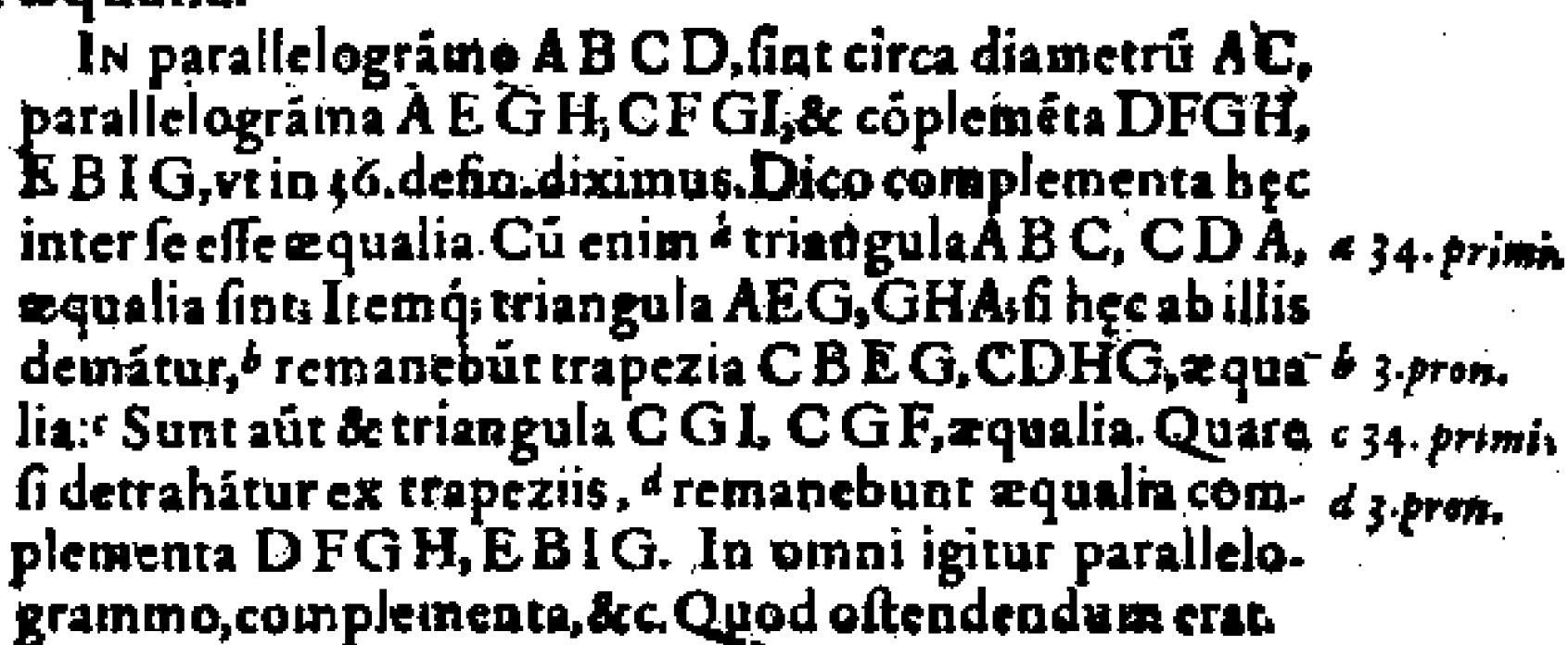
D A T O parallelogrammo æquale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo



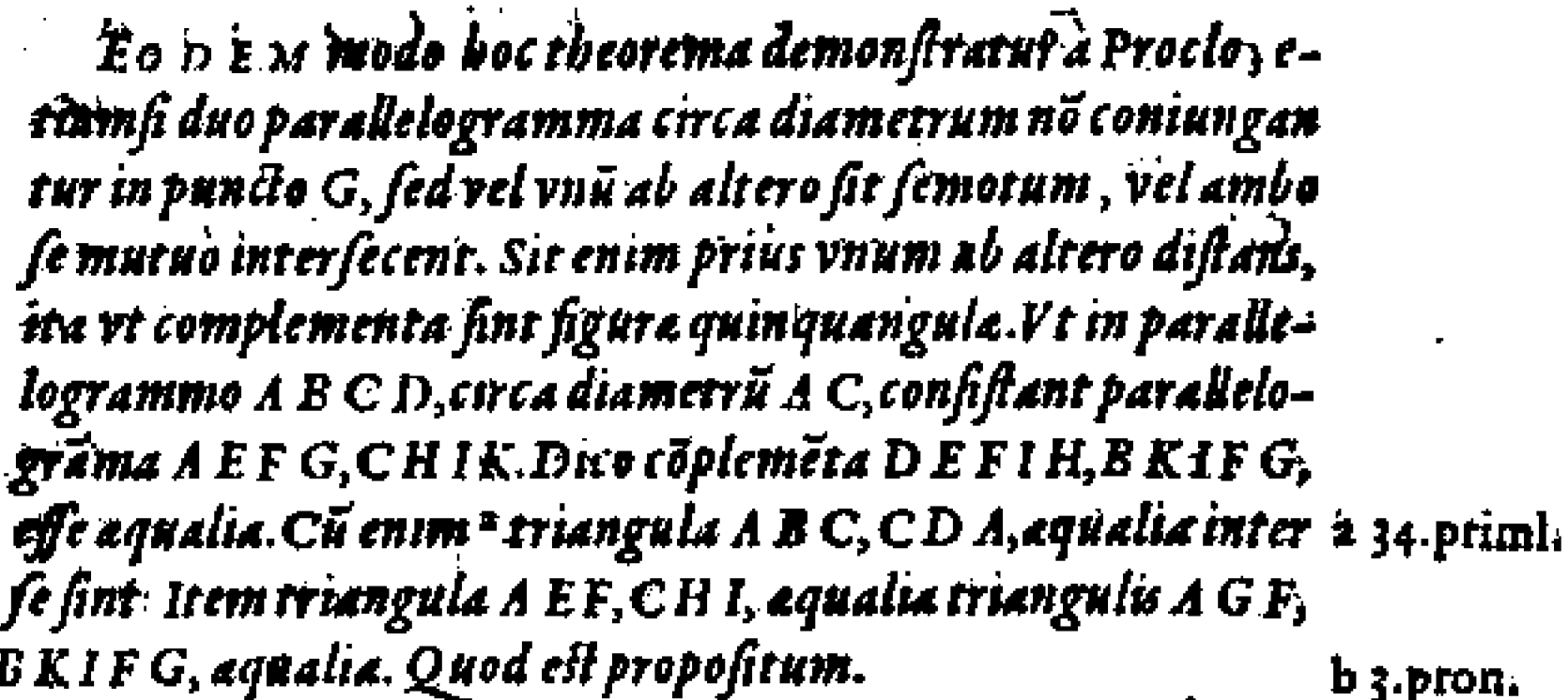
PRAXIS quoque huius problematis Peletarij ex ipsa constructione perfacilis est.

43.

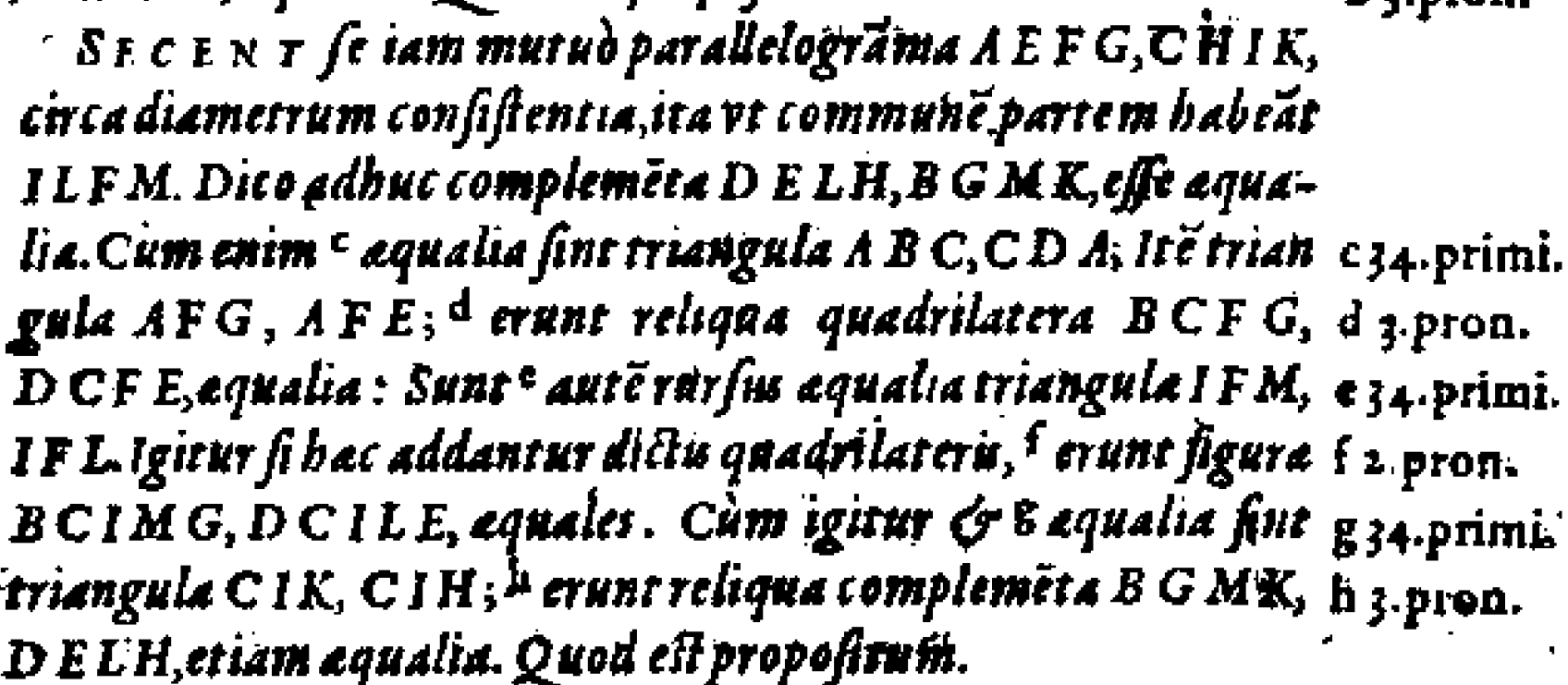
IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.



S C H O L I V M.



CKI;^b erunt reliqua complementa DEF IH, BK IF G, aequalia. Quod est propositum.

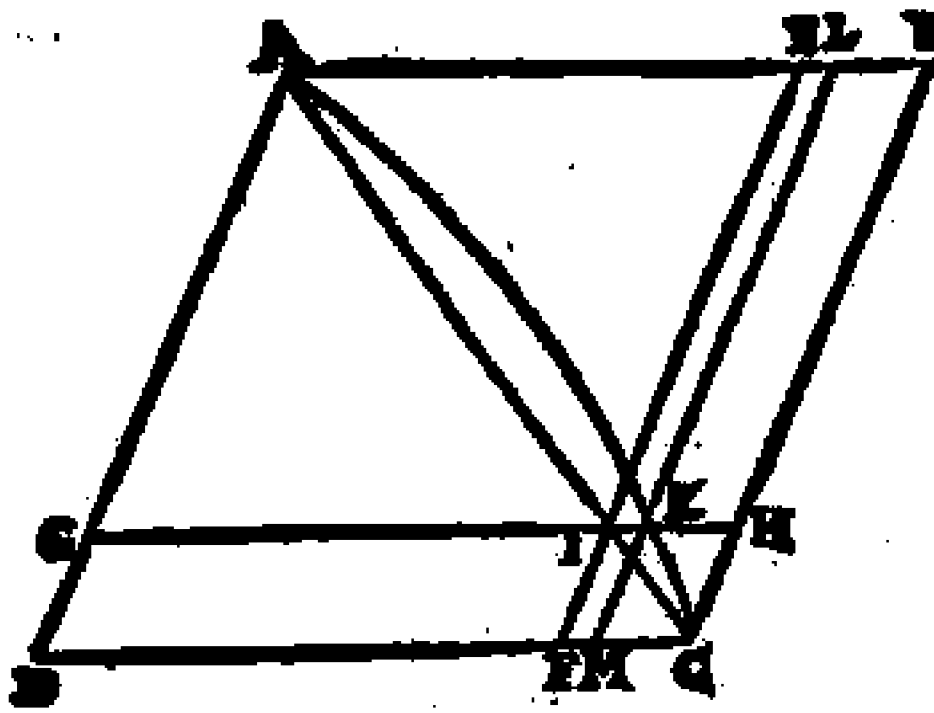


CONVERSVM quoque huius theoremati cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

Si parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduersa sint æqualia; consistent reliqua duo circa diametrum.

DEUTERIS duabus rectis EF, GH, que sint parallele rectis BC, CD, seq^q secant in I, divisum sit parallelogrammum ABCD, in quatuor parallelogramma, quorum aduersa duo BEIH, DFI G, sint equalia. Dico

a 31. primi.
b 43. primi.
c 9. pron.
d 1. pron.



reliqua duo ABIG, CFIH, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum à puncto C, ad punctum A, ducta transire per punctum I. Si enim non transiret, secet diameter CK A, rectam GH, in K, si fieri potest, & per K, ^a ducatur LM, parallela ipsi BC. ^b Erunt igitur complementa BHKL, DGM, aequalia. Est ^c autem DGM, maius quam DGI. Quare & maius erit BHKL, quam DGI. Cum ergo DGI, aequale ponatur ipsi BEIH, ^d erit etiam BHKL, maius quam BEIH, pars quam totum. Quod est absurdum. Non ergo diameter AC, rectam GH, in K, secat, sed per punctum I, transiret. Quod est propositum.

44.

PROBL. 12. PROPOS. 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & unum

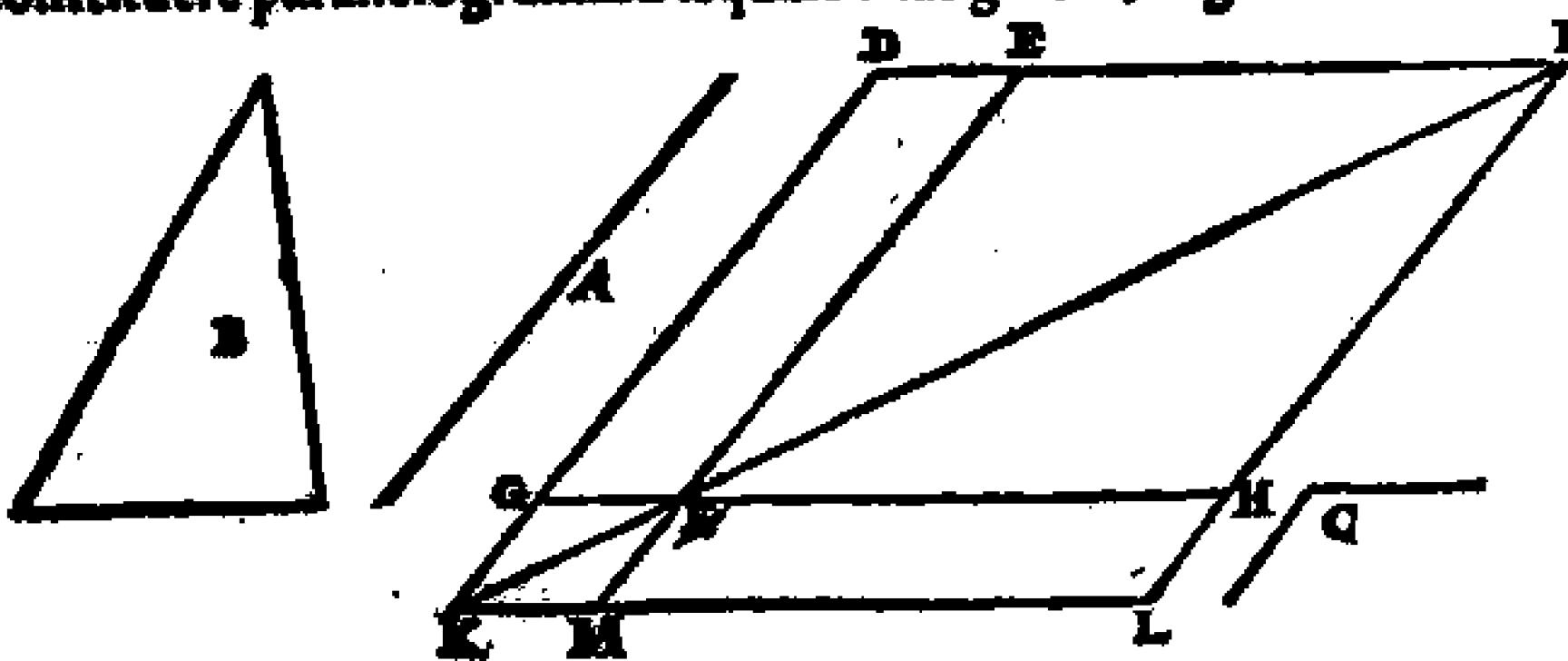
a 42. primi.

b 31. primi.

c 31. primi.

d 15. primi.

e 43. primi.



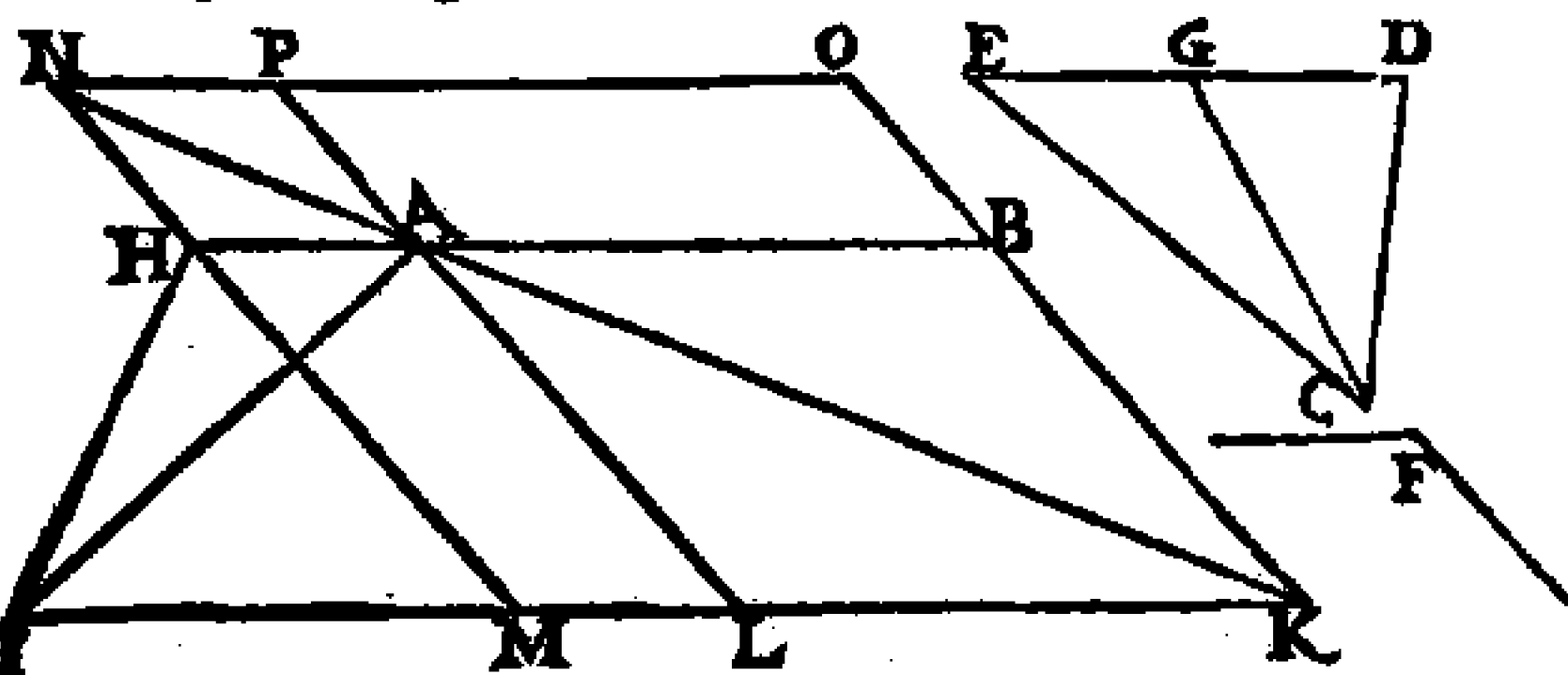
latus æquale rectæ A. Constituaturs triangulo B, æquale parallelogrammum DEFG, habens angulum EFG, angulo C, æqualem, producatursque GF, ad H, ut FH, sit æqualis rectæ A, & per H, ^b ducatur HI, parallela ipsi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectæ DG, productæ in K, & per K, ducatur KL, parallela ipsi GH, secans IH, protractam in L, producatursque EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, esse id, quod queritur. Habet enim latus FH, æquale datæ rectæ A, & angulum HFM, angulo dato C, æqualem, ^d cum angulus HFM, æqualis sit angulo EFG, qui factus est æqualis angulo C: Denique parallelogrammum LMFH, æquale est triangulo B, ^e cum æquale sit complemento DEFG, quod factum est æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Quod si quis optet, lineam ipsam A, datam, esse unum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum FM LH, ad rectam A, ex illa, qua in scholio propositionis 31. huius libri docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo MFH, & sumatur recta NO, æqualis rectæ

FM, compleaturque parallelogrammum, cui in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod queritur.

SE D fortassis magis ex sententia Euclidis problema hoc consiciemus, si super ipsam rectam datam construamus parallelogrammum, non autem super æqualem, cuiusmodi fuit recta FH, &c. Sit ergo rursus data recta AB, datum triangulum CDE, & datus angulus F, oporteatque, super rectam AB, constituere parallelogrammum æquale triangulo CDE, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto uno latere trianguli, ut DE,



bisariam in G, ductaque recta CG, secante ex scholio propositionis 38. huius lib. triangulum CDE, bisariam, producaturs recta AB, versus eam partem, ubi parallelogrammum construendum debet habere angulum dato angulo F, æqualem, ut hic versus A, fiatque AH, æqualis ipsi EG, di-

a 23. primi. midio lateris DE. Deinde in A, ^a constituatur angulus HAI, angulo E, æqualis, deorsum quidem, si parallelogrammum versus superiorem partem sit construendum, sursum vero, si versus inferiorem. Posita autem recta AI, æquali ipsi EG, iungatur recta HI. Et quia duo latera HA, AI, duobus lateribus GE, EC, æqualia sunt, utrumque utrique, angulosque, continent æquales, ^b erunt trianguula AHI, EGC, æqualia. Post hac, ^c ducta per I, ipsi HB, parallela IK, ^d constituatur in A, versus hanc parallelam angulus HAI, angulo dato F, æqualis, secusque AL, rectam IK, in L. ^e Ducta quoque, per H, ipsi AL, parallela HM, secante IK, in M, ^f erit parallelogram-

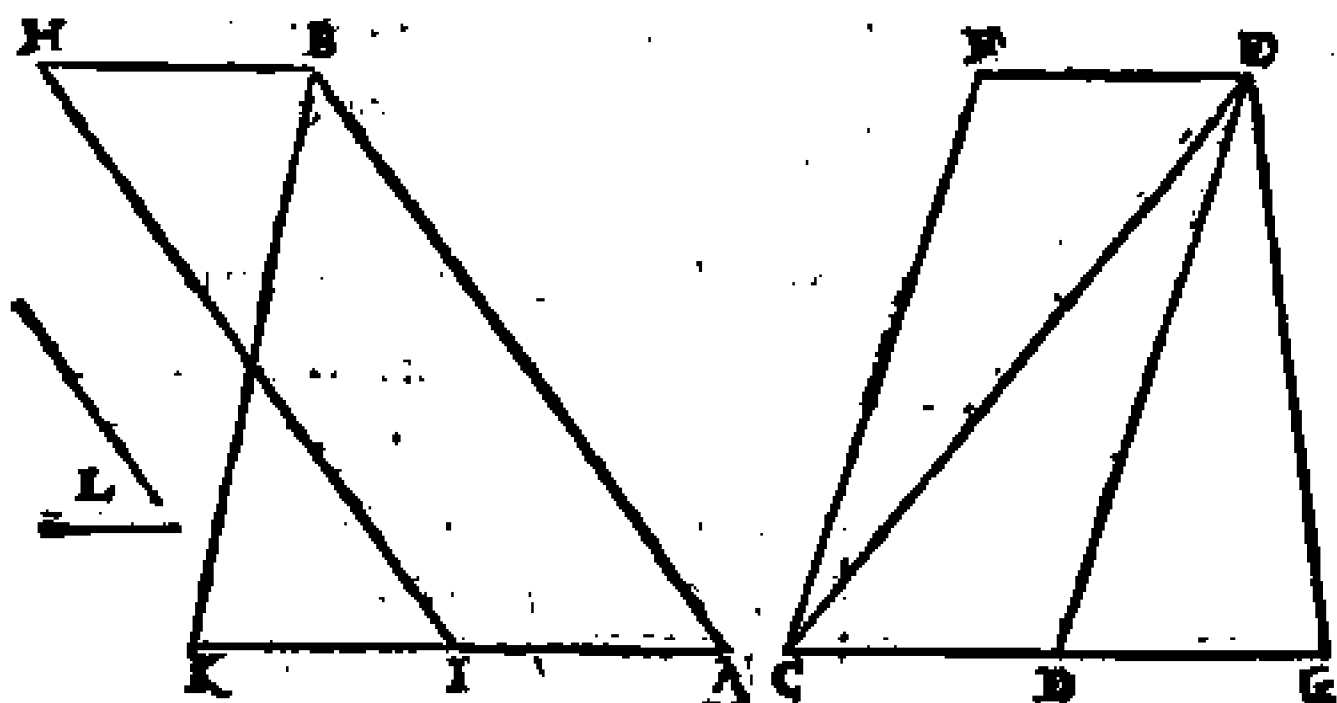
mum

num $AHML$, trianguli AHI , duplum: Est autem & triangulum CDE , trianguli EGC , duplum, quod a-
qualia ostensa sint triangula EGC , DGC . Igitur cum equalia sint demonstrata triangula AHI , EGC ,^a e- 27. pron.
runt equalia parallelogrammum $AHML$, & triangulum CDE . Iam vero; sumpta recta LK , data recta
 AB , equali, ducatur recta KA , producatursq; donec cum MH , producta coeat in N , & per N , agatur ipsi HB ,
parallela NO , donec in O , coeat cum KB , protracta, ac tandem LA , producaturs vsque ad P , in recta NO .
Dico parallelogrammum $ABOP$, esse id, quod queritur. Est enim constitutum super datam rectam AB , ha- b 15. primi.
berque angulum BAP , data angulo F , aequalem, cum equalis sit angulo HAL , qui angulo F , factus est a- c 43. primi.
qualis. Denique aequale est dato triangulo CDE , & cum aequale sit parallelogrammo $AHML$, quod trian-
gulo CDE , ostensum fuit aequale.

P R A X I S vero huius problematis a constructione ipsa non differt, nisi quod recta HI , duci non debet,
neq; recta CG . Ha enim propter demonstrationem tantum ductae sunt.

A D D I T hic aliud problema Ptolemaeus, hoc modo.

Ad datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere aequale triangulum, in
dato angulo rectilineo.



S I T data recta AB , datum parallelogram-
mum $CDEF$, & datus angulus L . Produca-
tur CD , ad G , ut DG , equalis sit ipsi CD , &
iungatur GE , recta: Eritq; triangulum CEG ,
parallelogrammo $CDEF$, aequale, ut demon-
strauimus scholio propof. 41. d Fiat iam super d 44. primi
data recta AB , parallelogrammum $ABHI$,
aequale triangulo CEG , hoc est, parallelogram-
mo $CDEF$, habens angulum A , angulo L , a-
qualem; & producaturs AI , ad K , ut sit IK , a-

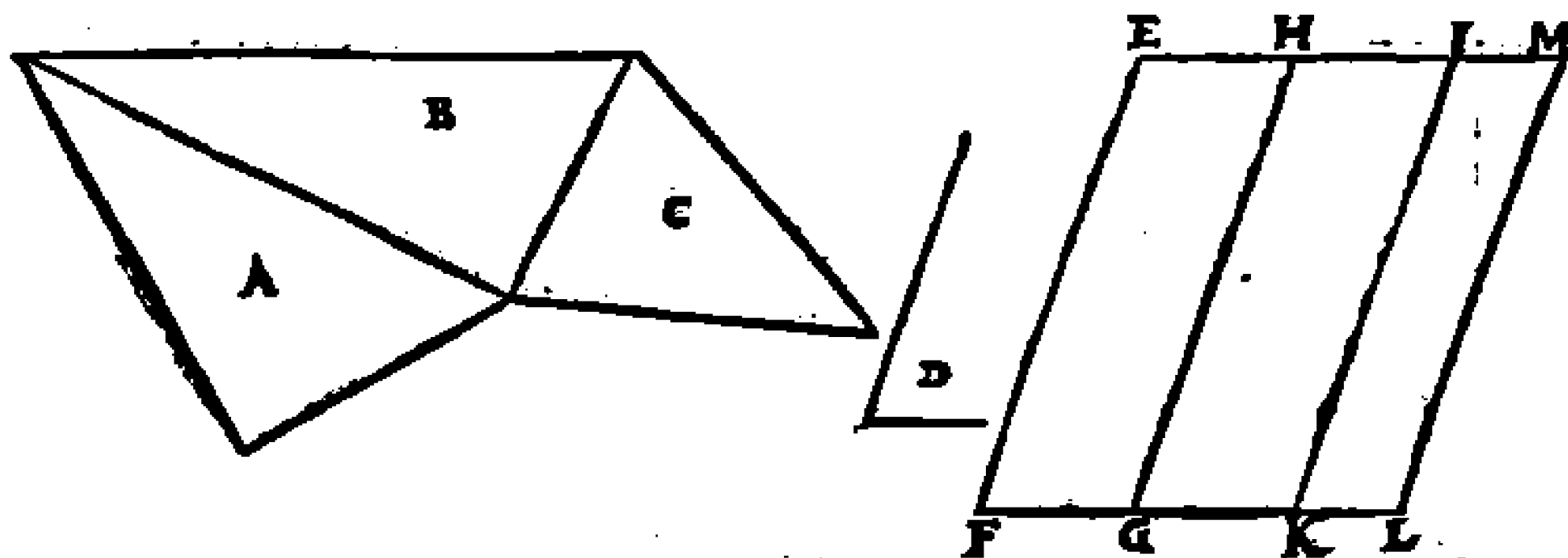
qualis ipsi AI . iungaturq; recta BK . Dico triangulum ABK , constitutum super datam rectam AB , habensq;
angulum A , aequalem dato angulo L , aequale esse dato parallelogrammo $CDEF$. Cum enim triangulum ABK ,
aequale sit parallelogrammo $ABHI$, ex scholio propofit. 41. quod aequale est constitutum parallelogrammo
 $CDEF$, constat propositum.

P R A X I S huiusce problematis a constructione non differt: difficiliusq; non est, si adhibeatur praecedens
praxis, qua triangulo ECG , parallelogrammum $ABHI$, super data recta AB , in dato angulo A , construitur.

PROBL. 13. PROPOS. 45.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo aequale parallelogrammum consti-
tuere, in dato angulo rectilineo.

Q V A M V I S Euclides proponat hoc problema absolute, non astringendo nos ad certam aliquam
rectam lineam datam, ut in praecedenti propositione 44. fecerat, tamen quia in frequentibus fre-
quenter vsarpatur in data recta linea, placuit ipsum proponere vnâ cum data recta linea. Sit ergo



recta data EF ,
rectilineum A -
 BC , & datus
angulus D . O-
portet igitur
construere ad
datam rectam
 EF , parallelo-
grammum a-
quale rectili-
neo ABC , qd

habeat angulum aequalem angulo D . Resoluatur rectilineum in triangula A , B , & C . Deinde trian-
gulo A , aequale parallelogrammum constituatur $EFGH$, super rectam EF , habens angulum F ,
angulo D , aequalem. Item super rectam GH , parallelogrammum $GHIK$, aequale triangulo B , ha-
bens angulum G , aequalem angulo D . Item super rectam IK , parallelogrammum $IKLM$, aequale
triangulo C , habens angulum K , aequalem angulo D : Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint
triangula in dato rectilineo; factumq; erit quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa,
quae quidem aequalia sunt rectilineo dato ABC , conficiunt totum vnâ parallelogrammum, qd
sic demonstratur. Duo anguli EFG , HGK , inter se sunt aequales, cum vterque aequalis sit angu- b 1. pron.
lo D . Addito igitur communi angulo FGH , erunt duo anguli EFG , FGH , qui duobus rectis a- c 19. primi.
quivalent, & aequales duobus angulis HGK , FGH , ideoq; hi anguli duobus etiam rectis aequales d 2. pron.
erunt. Quare FG , GK , vnâ rectam lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, EH , HI , vnâ e 14. primi.
rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli EHG , HIK , aequales inter se sunt, (f cum sint f 34. primi.
aequales oppositis angulis aequalibus EFG , HGK .) & duo anguli HIK , IHG , duobus sunt re- g 29. primi.

a 39. primi. Et si æquales, &c. Cum igitur EL, FK , sint parallelæ: Itemque EF, IK , quod utraque parallelæ sit rectæ HG : Parallelogrammum erit $EFKL$. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum $IKLM$, adiunctum parallelogrammo $EFKL$, constituere totum unum parallelogrammum $EFLM$. Ad datam ergo rectam lineam EF , dato rectilineo ABC , constituimus æquale parallelogrammum $EFLM$, habens angulum F , æqualem angulo D , dato. Quod erat efficiendum.

S C H O L I V M.

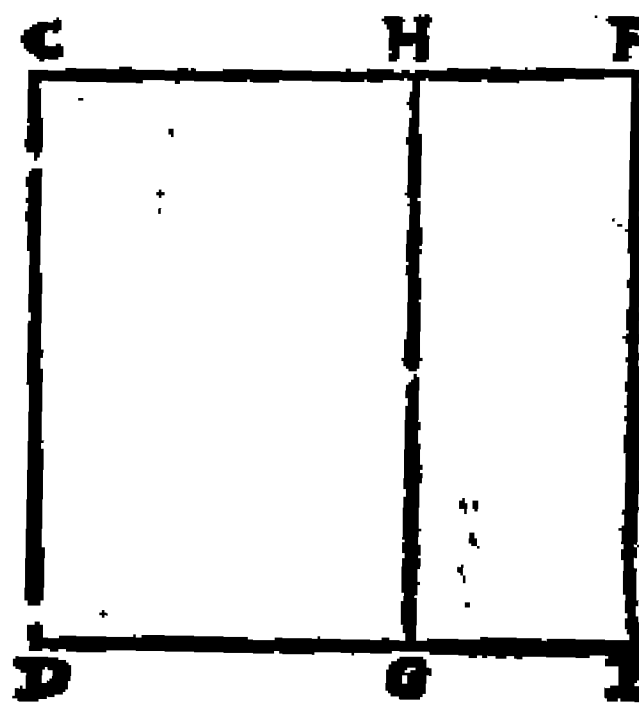
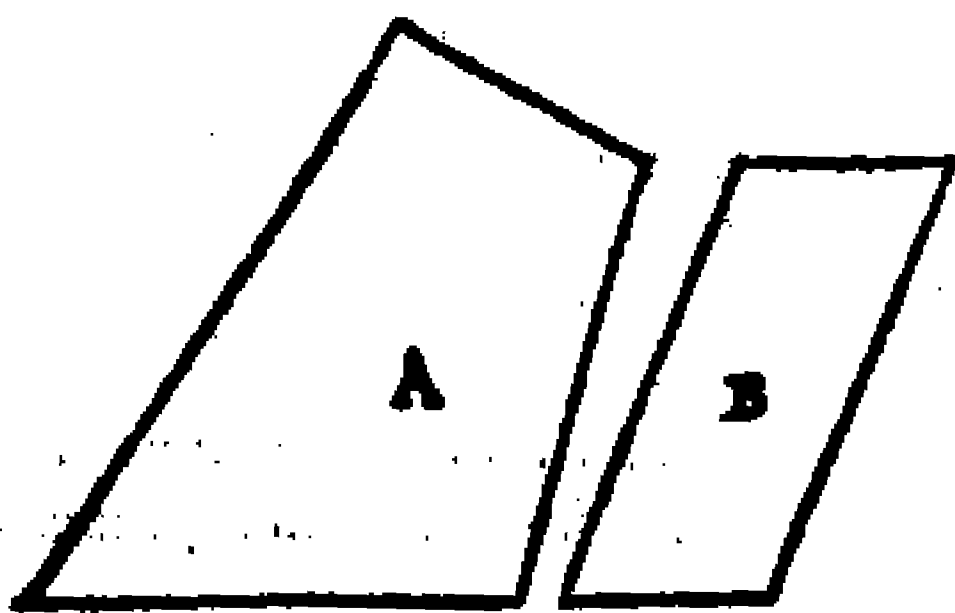
P A R I ratione, propositis quocunque rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale, si omnia resoluantur in triacula, quibus equalia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per propositionem 44. veluti factum est in hoc problemate. Nam cum omnia hæc parallelogramma efficiant unum parallelogrammum, uti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita AB, C , Atque AB , resolvat in triacula A, B , singulisq; triangulis A, B, C , singula parallelogramma EG, GI, IL , super rectas EF, HG, IK , iuxta artem huius problematis, equalia constituentur, ex propositione 44. erit constructum parallelogrammum totum $EFLM$, æquale duobus rectilineis AB, C . Et sic de pluribus.

P R A X I S autem huius problematis ex praxi precedentis propositionis sæpius repetita petenda est.

H V C referri poterit problema utilissimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & breviori demonstrabimus in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.

a 45. primi.



S I N T data rectilinea A, C , sitq; A , maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A , superet rectilineum B .
Fiat parallelogrammum $CDEF$, in quocunque angulo D , æquale maiori rectilineo A . Et super rectam CD , parallelogrammum $CDGH$, in eodem angulo D , æquale rectilineo minori B . Quoniam igitur

parallelogrammum $CDEF$, superat parallelogrammum $CDGH$, parallelogrammo $EFHG$, superabit quoque figura A , figuram B , eodem parallelogrammo $EFHG$. Quod est propositum.

45.

PROBL. 14. PROPOS. 46.

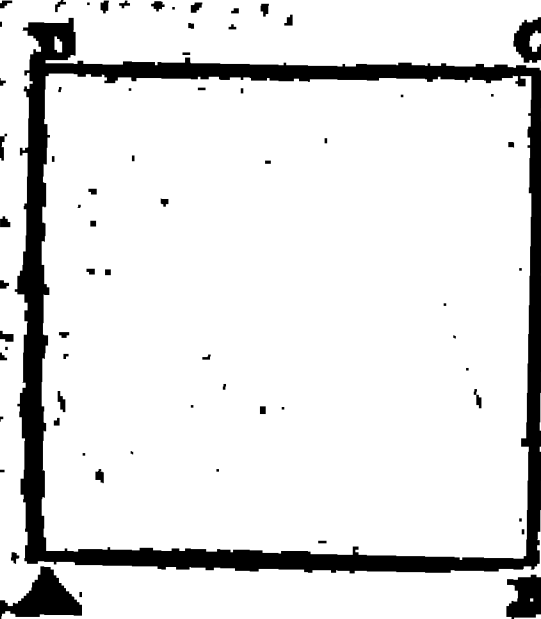
ADATA recta linea quadratum describere.

a 11. primi.

b 28. primi.

c 33. primi.

d 34. primi.



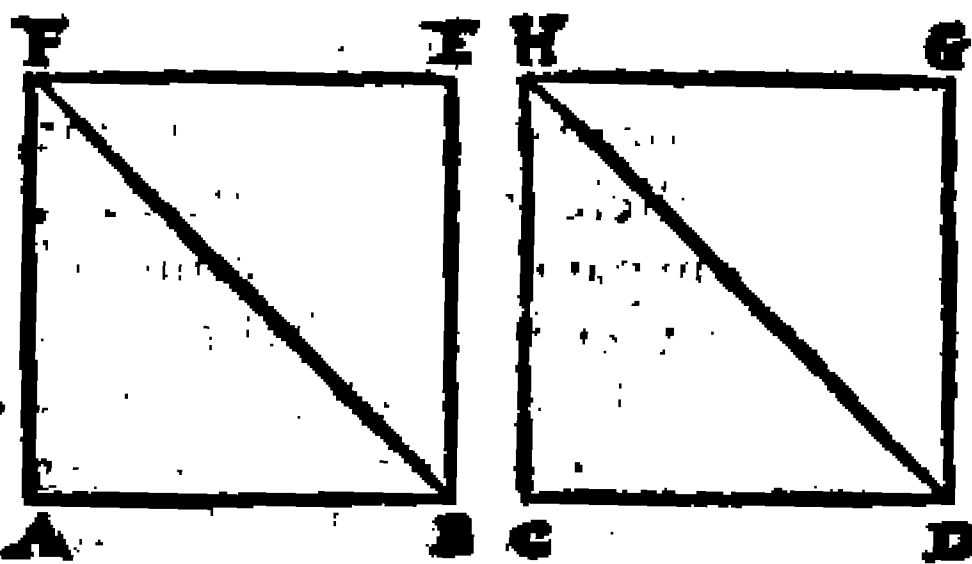
S I T data recta AB , super quam oporteat quadratum describere. Ex A, B , educantur AD, BC , perpendiculares ad AB , sintque ipsi AB , æquales, & connectatur recta CD . Dico $ABCD$, esse quadratum. Cum enim anguli A, B , sint recti, erunt AD, BC , parallelæ: Sunt autem & æquales, quod utraque æqualis sit ipsi AB . Igitur & AB, DC , parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammum est $ABCD$, in quo cum AD, DC, CB , æquales sint ipsi AB , omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, D , æquales sint oppositis rectis A, B . Quadratum igitur est $ABCD$, ex definitione: Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.

E X P R O C L O.

LINEARUM æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorum æqualium æquales sunt lineæ.

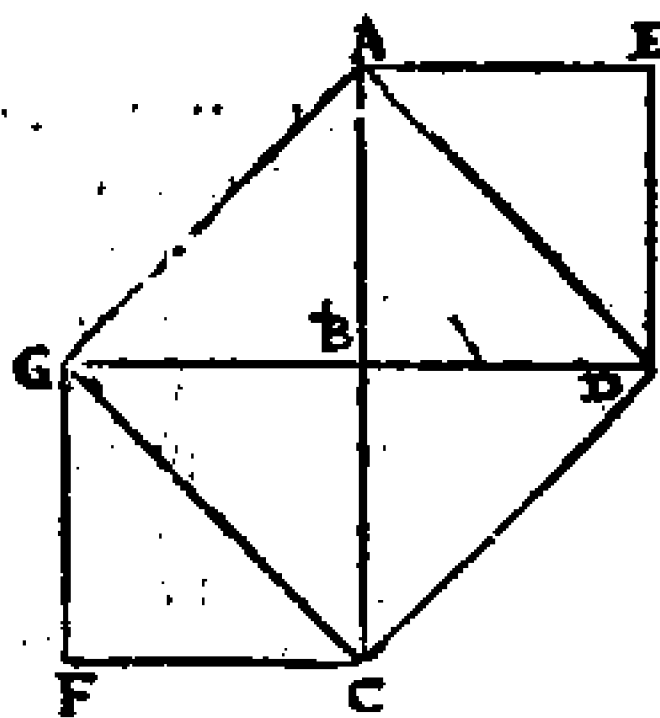
a 4. primi.

b 34. primi.



S I N T primum recta AB, CD , æquales. Dico earum quadrata $ABDE, CDFG$, equalia quoque esse. Ductis enim diagonalibus BE, DH , erunt duo latera BA, AF , trianguli BAF , duobus lateribus DC, CH , trianguli DCH , equalia, utrumque utrique, cum ex definitione quadrati recta AF, CH , æquales sint rectis AB, CD . Sunt autem, & anguli A, C , æquales, nempe recti. Igitur triacula BAF, DCH , equalia erunt. Quæ cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota equalia. Quod est propositum.

S I N T deinde quadrata $ABDE, BCFG$, equalia. Dico lineam quoque ipsam AB, BC , æquales esse. Coniungantur



iungantur enim quadrata ad angulum B, ut recta AB, BC, in directum consti-
tuantur. Et quoniam anguli ABG, ABD, sunt recti, erunt & recta GB, BD, in
directum constituta. Ducantur diametri AD, CG, iunganturq; recta AG,
CD. Quoniam igitur quadrata ABD, BCG, equalia sunt, erunt & trian-
gula ABD, BCG, eorum dimidia, equalia. Addito ergo communi triangulo
BCD, fiet totum triangulum ACD, toti triangulo GDC, equale. Quare
triangula ACD, GDC, cum eandem habeant basin CD, ad easdemq; sint
partes, in eisdem sunt parallelis: ideoq; parallela sunt AG, CD. Et quoniam,
ut in scholio propos. 34. ostendimus, diameter in quadrato secat angulos qua-
drati bisariam, erunt anguli DAC, GCA, alterni semirecti, ideoq; equalis.

Quamobrem, & parallela sunt AD, CG. Igitur parallelogrammum est ADCG; ac propterea recta AD, GG, equalis. Quoniam ergo in triangulis ABD, BCG, latera AD, CG, equalia sunt, & anguli, quibus ea la-
tera adiacent, inter se etiam equalis, cum sint semirecti, ut in scholio propos. 34. ostensum fuit; erunt reli-
qua latera equalia, nempe AB, ipsi BC, &c. Quod est proposuimus.

S C H O L I V M.

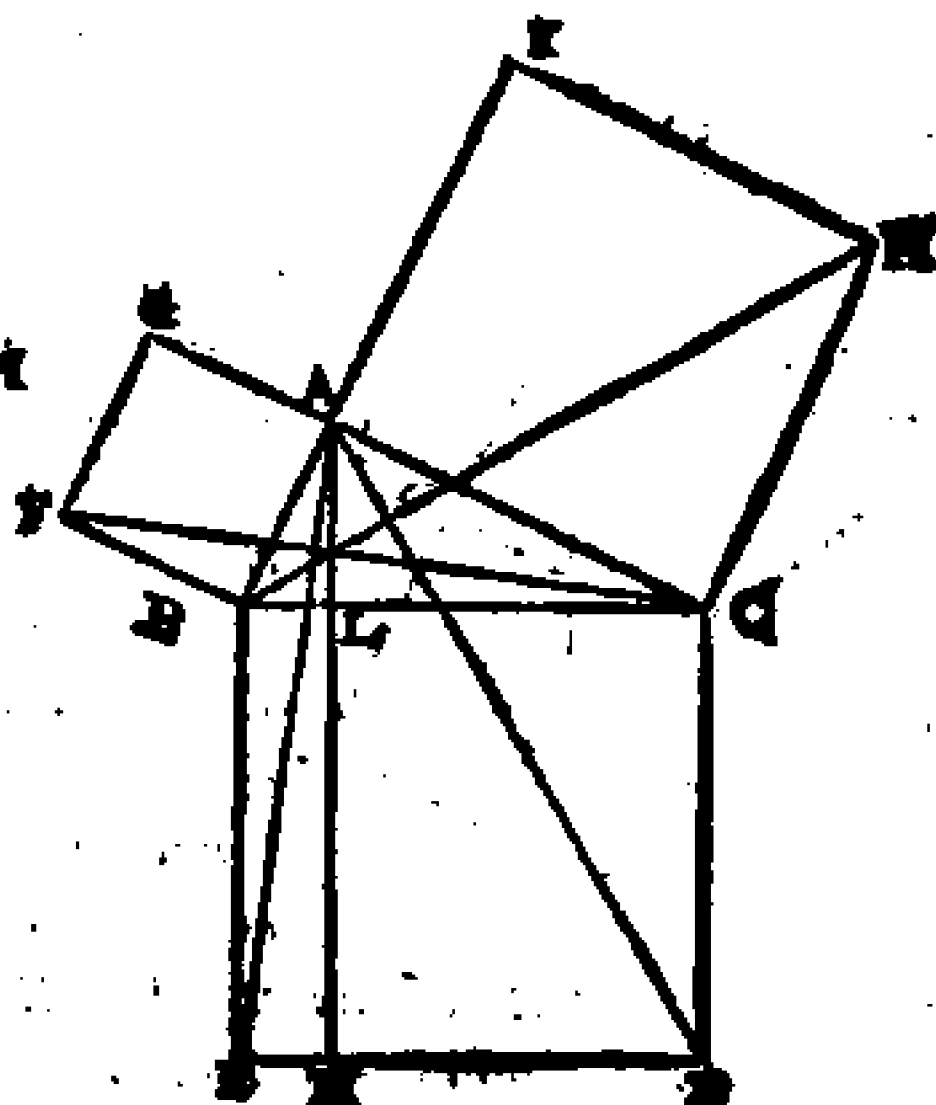
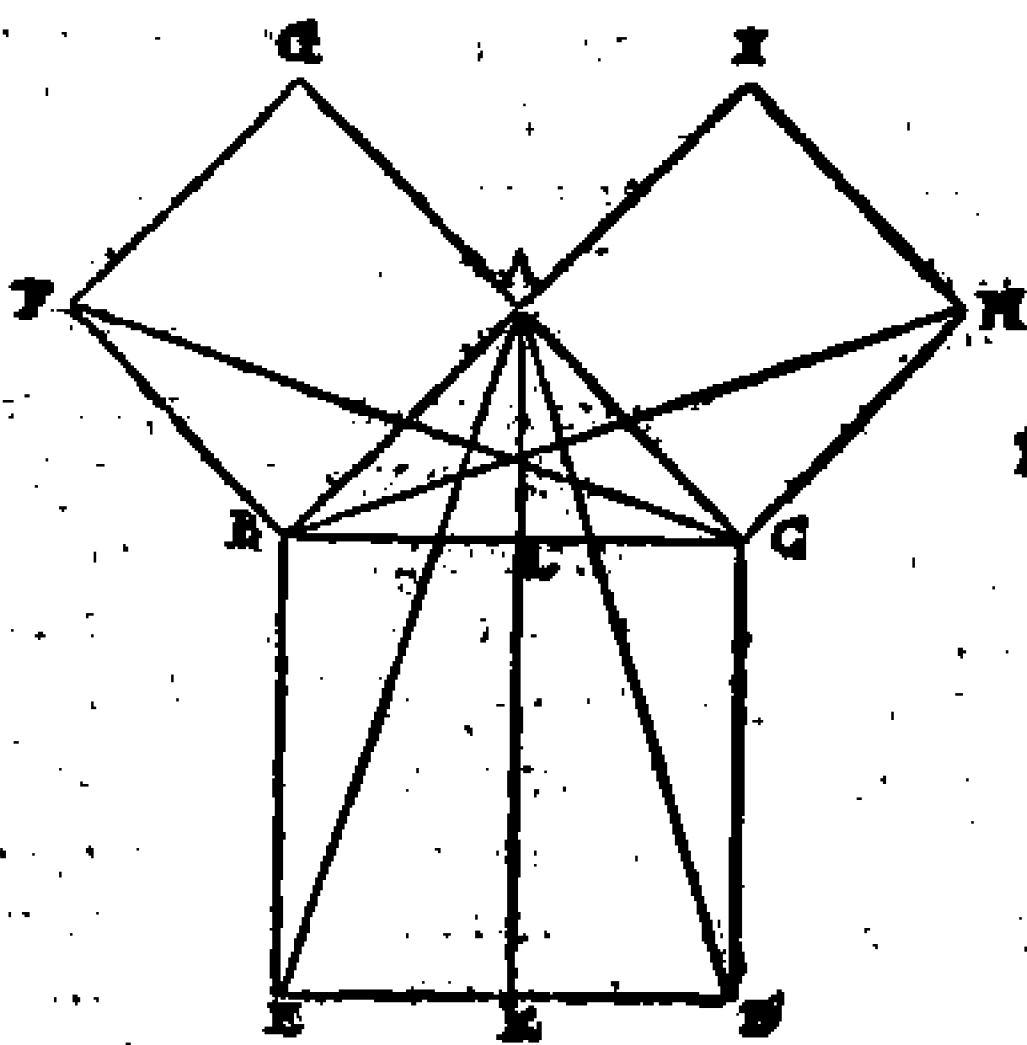
Posse et hac omnia modo brevius probari per superpositionem quadrati unius super aliud. Nam si
linea sint equalis, si una alteri superponatur, congruent ipse inter se. Cum ergo & anguli sint equalis, nem-
pe recti, conuenient quoq; ipsi inter se, ideoq; totum quadratum toti quadrato congruet. Quod si quadrata
sint equalia, congruent ipsa inter se, propter aequalitatem angulorum. Igitur & linea: alias unum quadra-
tum alio maius esset.

Per AXIS autem huius problematis perfacilius est. Si namque ad datam rectam AB, in altero extremo-
rum, ut in A, erigatur perpendicularis AD, ipsi data recta AB, equalis, & ex B, & D, ad internallam eiusdem
AB, duo arcus describantur sese in C, interfecantes, iunganturq; recta BC, DC, constructum erit quadratum,
Nam ABCD, cum ex constructione sit figura equalium laterum, atq; adeo latera opposita habeat equalia,
parallelogrammum erit, ut ad initium scholii propos. 34. demonstrauimus. Existente ergo angulo A, recto, erunt & B, D, recti, nec non & oppositus angulus C, &c.

THEOR. 33. PROPOS. 47.

46.

IN rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subten-
dente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus
describuntur, quadratis.

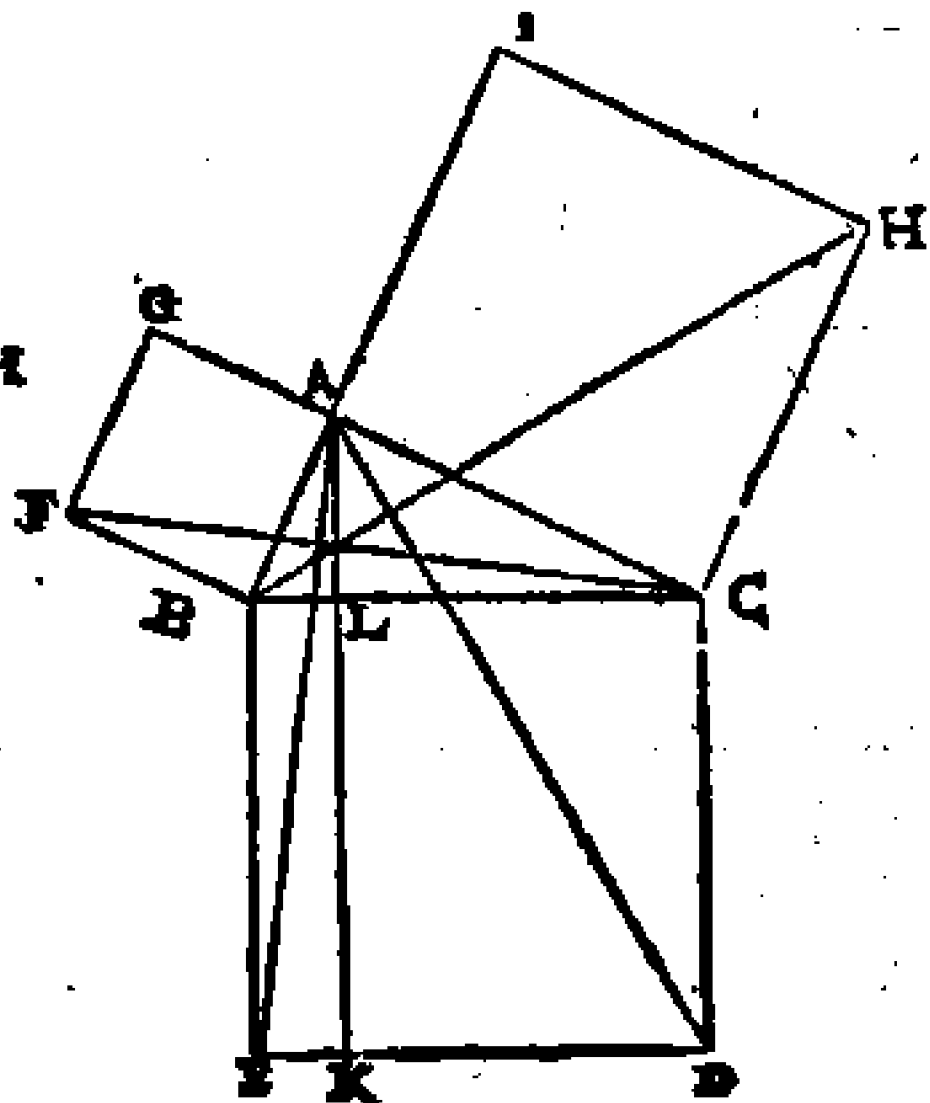
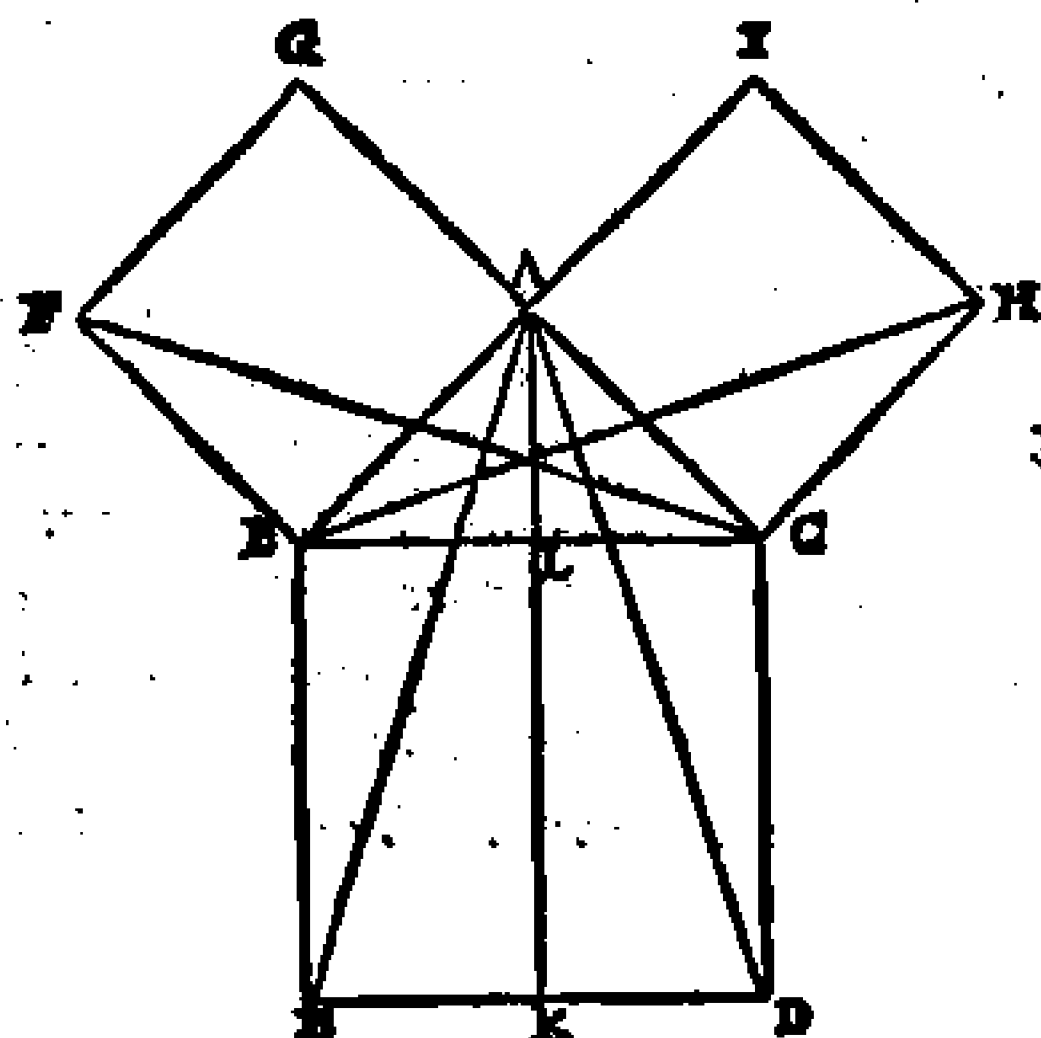


IN triangulo
ABC, angulus
BAC, sit rectus, describanturque
super AB, AC,
BC, quadrata
ABFG, ACHI,
BCDE. Dico
quadratum BC-
DE, descriptum
super latere BC,
quod angulo re-
cto opponitur, æ-
quale esse duobus
quadratis ABFG,
ACHI, quæ
super alia duo la-

tera sunt descripta, siue hæc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta AK, parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo
anguli BAC, BAG, sunt recti, erunt rectæ GA, AC, una linea recta: eodemque modo LA, AB, una recta linea erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt equalis, cum sint recti, si addatur com-
munis angulus ABC, fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; similiterque totus an-
gulus BCH, toti angulo AGD. Quoniam igitur duo latera AB, BE, trianguli ABE, æqualia sunt
duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, utrumque ytriq; ut constat ex definitione quadrati:
Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, ut ostendimus: Erunt trian-
gula ABE, FBC, æqualia. Est autem quadratum, seu parallelogrammum ABFG, duplum trian-
guli FBC, cum sint inter parallelas BF, CG, & super eandem basin BF: Et parallelogrammum
BEKL, duplum trianguli ABE, quod sint inter parallelas BE, AK, & super eandem basin BK.

a. 6. prop. 11.

b. 4. primia.



Quare $\square$ equalia erunt quadratum ABFG, & parallelogrammum BEKL. Eadem ratione ostendimus, $\square$ equalia esse quadratum ACHI, & parallelogrammum CDKL. $\square$ Erunt enim rursus triângula ACD, HCB, $\square$ equalia, ideoq; totum dupla, parallelogrammum videlicet CDKL,

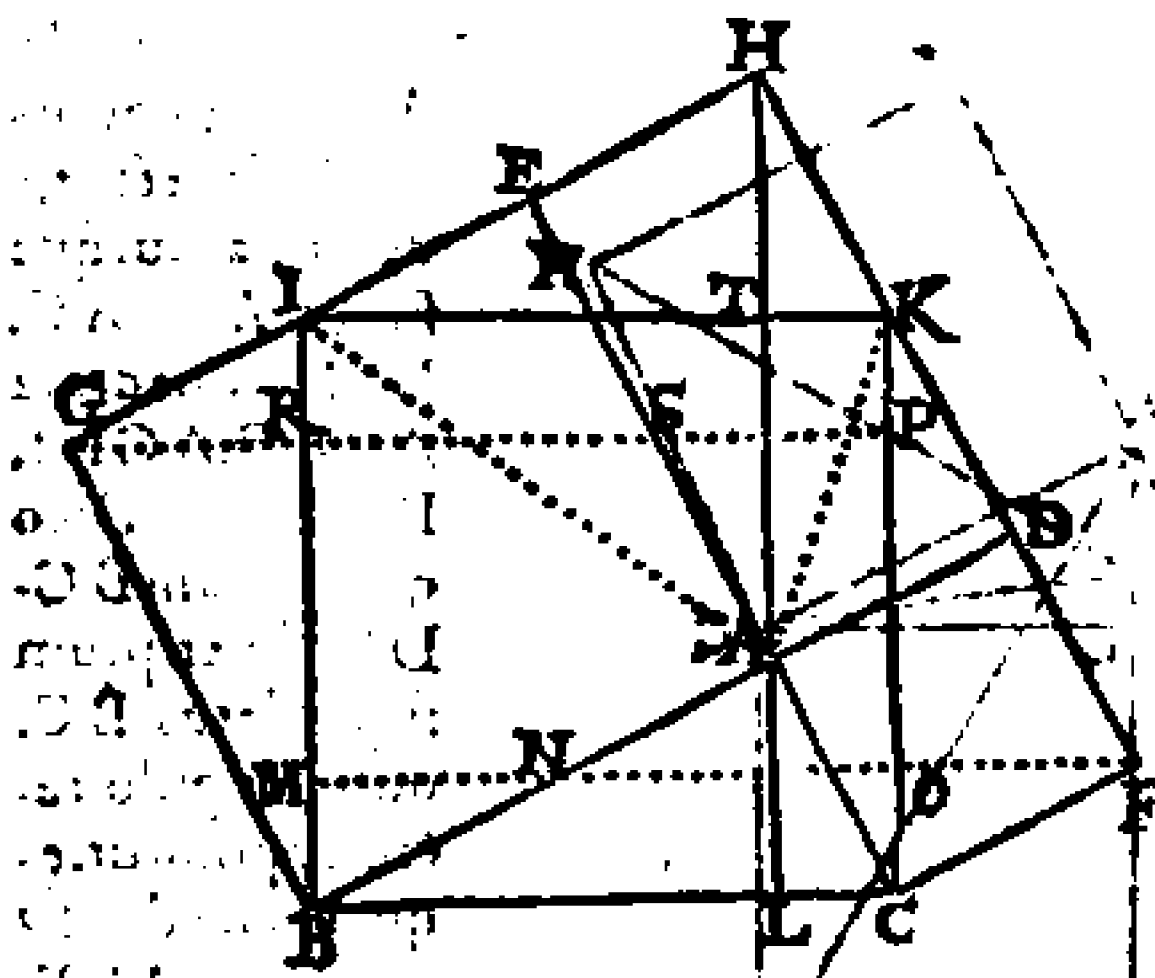
& quadratum ACHI, $\square$ equalia erunt. Quamobrem totum quadratum BCDK, quod componitur ex duobus parallelogrammibus BEKL, CDKL, $\square$ equalis est duobus quadratis ABFG, ACHI. In rectangulis ergo triángulis, quadratum, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I U M.

Facile ex theoremate isto quiu intelliget, in triángulo amblygonio quadratum lateris obuso angulo oppositi maius esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: In quouis autem triángulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppositi minus esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum. Nam si angulus coarctaretur, donec fieret rectus, manentibus iisdem lateribus cum ambientibus, euaderet latius oppositum minus: Si autem acutus angulus dilaretur, donec fieret rectus, manentibus iisdem lateribus cum ambientibus, fieret latus oppositum maius, ut patet. Cum ergo quadratum lateris angulo recto oppositi $\square$ quale sit hic ostensum duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: perspicuum est, quadratum lateris obuso angulo oppositi esse maius duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: quadratum verò lateris angulo acuto oppositi esse minus duobus quadratis simul aliorum duorum laterum reliquorum. Quamò autem illud maius sit, & quanto hoc minus, demonstrabit Euclides lib. 2. prop. 12. & 13.

Quoniam verò theorema hoc pulcherrimum est, vtilitatesq; habet insignes, opera pretium iudicauit censare, num illud aliis viis demonstrari possit, varia a aliquantulum constructione; quod Peletarius sine

proportionibus fieri posse negauit. Sit ergo rursus triángulum ABC, cuius angulus BAC, rectus sit, productiq; lateribus BA, CA, ad partes anguli recti, fiant AD, AE, ipsis AC, AB, aequales; & per C, D, B, E, ipsis AB, AC, parallela agantur, coeuntes in F, G. Et quia in parallelogrammibus CD, BE, $\square$ iam latera DF, FC, oppositis lateribus AC, AD, quàm latera EG, GB, lateribus oppositis AB, AE, $\square$ equalia sunt, erit utrumque parallelogrammum aquilaterum: Sed & anguli omnes recti sunt. Nam F, G, oppositi recti DAC, EAB, aequales sunt, ideoq; recti: Anguli autem C, D, B, E, recti sunt, quòd vteruq; C, D, cum recto DAC, & vteruq; B, E, cum recto EAB, $\square$ equalis sit duobus rectis. Quadrata ergo sunt CD, BE, laterum AC, AB. Productis etiam lateribus FD, GE, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad B C perpendicularis BI, CK, secantes GH, FH, in I, K, iungaturq; recta IK. Et quia, si à recto angulo IBC, ABG, auferatur communis angulus ABI, reliqui ABC, GBI, aequales sunt; sunt autem & recti anguli BAC, BGI, aequales, erunt duo anguli A, B, triánguli ABC, duobus angulis G, B, triánguli GBI, aequales, vterque vterque: Sunt autem & latera AB, GB, idu adiacentia equalia, ob quadratum BE. $\square$ Igitur & tam latera BC, BI, quàm AC, GI, equalia erunt, & reliqui anguli C, I, aequales. Non aliter in triángulo HABC, FKC, equalia erunt tam latera BC, CK, quàm AB, FK, & anguli B, K: propterea quòd duo anguli A, C, triánguli ABC, duobus angulis F, C, triánguli FKC, aequales sunt, (cū AF, recti sunt, & duo anguli C, reliqui duorum rectorum, depro communem AOK,) & latera AC, CF, illis adiacentia equalia, ob quadratum CD. Quare recta BI, CK, inter se etiam aequales erunt. Cum ergo sint quoq; parallela, & erunt etiam



a. 34. primi.

b. 34. primi.

c. 19. primi.

d. 16. primi.

e. 1. pron.

f. 18. primi.

g. 33. primi.

h. 34. primi.

BC, IK, aequales & parallela. Quadratum igitur est BCKI, lateris BC, cum quatuor eius latera sint equalia, & omnes anguli recti, quòd anguli I, K, oppositi rectis C, B, aequales sint. Dico ergo, quadratum CI, duobus quadratis BE, CD, $\square$ equalis esse. Ducta enim ex H, per A, recta HT AL, ipsis BI, CK, parallela erit: Nam quia GE, ipsi BA, equalis est, & EH, ipsi AD, hoc est, ipsi GI, quia ipsi AC, sine AD, ostensa fuit equalis, erit

& addita communi EI, tota HI, tota GE, hoc est, ipsi AB, equalis. Cum ergo HI, AB, sint etiam parallela, a 33. primi. erunt quoque BI, AH, parallela & aequales. Eodemque modo AH, ipsi CK, parallela ostenderur, & equalis. Quoniam igitur b tam quadratum BE, parallelogrammo BH, super eandem basin AB, quam parallelogrammum BT, eidem parallelogrammo BH, super eandem basin BI, aequale est, c erit quoque quadratum BE, parallelogrammo BT, aequale. Sic etiam quia tam d quadratum CD, parallelogrammo CH, super eandem basin AC, quam parallelogrammum CT, eidem parallelogrammo CH, super eandem basin CK, aequale est, e erit quoque quadratum CD, parallelogrammo CT, aequale. Totum ergo quadratum BCKI, ex duobus parallelogrammis BT, CT, compositum, duobus quadratis BE, CD, aequale est. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Loco recte HTAL, iungantur duae rectae AI, AK, & per A, ipsis BI, CK, parallela ducatur TAL. Quoniam ergo f tam quadratum BE, (ostendemus enim ut prius, BK, BE, CD, quadrata esse laterum BC, AB, AC.) trianguli ABI, super eandem basin AB, quam parallelogrammum BT, eiusdem trianguli ABI, super eandem basin BI, duplum est, g erit quadratum BE, parallelogrammo BT, aequale. Pari ratione, quia h tam quadratum CD, trianguli ACK, super eandem basin AC, quam parallelogrammum CT, eiusdem trianguli ACK, super eandem basin CK, duplum est, i erit quoque quadratum CD, parallelogrammo CT, aequale. Quam ob rem, ut prius, totum quadratum BCKI, ex parallelogrammis duobus BT, CT, constatum, duobus quadratis BE, CD, aequale est. Quod erat ostendendum.

ALITER. Loco rectarum HTAL, AI, AK, ducantur per F, G, ipsis BC, IK, parallela FM, GP, secantes AB, CK, in N, O, & BI, CE, in R, S. Eritque BR, ipsi KO, equalis. Quoniam enim k anguli O, R, recti sunt, & OKF, RBG, aequales, quod uterque angulo ABC, supra ostensus sit equalis; erunt duo anguli O, K, trianguli FKO, duobus angulis R, B, trianguli GBR, aequales, uterque utrique: Sunt autem & latera FK, BG, illius adiacentia equalia, quod utrumque supra sit ostensum ipsi BC, aequale. l Igitur & latera KO, BR, equalia erunt. Itaque quoniam m tam parallelogramma BCFN, BCMO, super eandem basin BC, quam parallelogramma BCSG, BCPR, super eandem basin BC, equalia sunt, estque parallelogrammum BCPR parallelogrammo IKOM, aequale, ob rectas BR, KO, ostensus aequales; (Nam hinc fit, ut si vnum alteri superponatur, sibi mutuo congruant, propter laterum, angulorumque, aequalitatem) erunt ambo parallelogramma BCFN, BCSG, totum quadrato BCKI, ex duobus parallelogrammis BCMO, IKOM, composito equalia. n Cum ergo o tam quadratum CD, parallelogrammo BCFN, super eandem basin CF, quam quadratum BE, parallelogrammo BCSG, super eandem basin BG, aequale sit, erunt quoque ambo quadrata CD, BE, eidem quadrato BCKI, equalia. Quod demonstrandum erat.

Atque in hunc modum aliae demonstrationes excogitari poterunt. Video demonstrationem Euclidis simpliciore esse, & magis expeditam, sed non iniucundum tamen est intelligere, variis demonstrationibus eandem veritatem posse confirmari.

INVENIO. porro admirabilis, atque pulcherrimi huius theoremati ad Pythagoram refertur, qui, ut scribit Vitruvius lib. 9. hostias Musis immolavit, quod se in tam praclaro inuenso adiunxit. Sunt qui putent eum immolasse centum boues: si tamen Proclo credendum est, vnum tantum modo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, ut nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit, ut theorema hoc inuestigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidissetque quadratum numeri maioris equalem esse quadrato numerum reliquorum, composuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in partes aequales, minimū in 3. eiusdem magnitudinis, & reliquū in 4. Quo facto, considerauit angulum sub his duobus lateribus contentum, inuenitque eum esse rectum. Idque in quamplurimis alijs numeris, ut in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c. obseruauit. Quare inquirendum esse iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis aequale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebant vnum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinuenit, firmamque ratione demonstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 8. propos. 31. ubi demonstrauit, non solum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, aequale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figuram quamlibet rectilineam super latus recto angulo oppositum constructam siue ea sit triangulum, siue quadrangulum, &c. aequalem esse duabus figuris, quae super reliqua latera describuntur, dummodo prior sit similes, similiterque descripta, ut ibidem ostendemus.

CAETERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximus quadratum aequale est quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiusmodi numeri inueniantur. Habent igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. si ydem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcumque alij, si primi illi tres per quemcumque multiplicentur numerum. Traduntur tamen a Proclo duae regulae, quibus inueniuntur praedicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima ascribitur Pythagora, & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicumque numerus impar, ut 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, ut hic ex 25. rejice unitatem. Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur unitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum aequale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribui-

tur Platoni, quæ talis est. Accipiantur numerus quicumque par, nempe 6. Ex huius dimidiij quadrato, nimirum 9. detrahe unum, eidemq, adde unum, habebisq, reliquos duos numeros 8. & 10. primus autem est 6 nimirum numerus par acceptus. Hac regula si accipiantur par 10. reperientur alij duo 24. & 26.

COLLIGUNTUR ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quàm problemata, è quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ utilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc sumentes.

I.

Si in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

IN quadrato $ABCD$, ducatur diameter AC . Dico quadratum AC , duplum esse quadrati $ABCD$. Cum enim in triangulo ABC , angulus B , rectus sit, ^a erit quadratum lateris AC , æquale duobus quadratis laterum AB , BC . Cum igitur quadrata linearum AB , BC , æqualia sint, quod linea AB , BC , sint æquales; erit quadratum linea AC , duplum cuiuslibet illorum, ut quadrati linea AB , hoc est, quadrati $ABCD$. Quod est propositum.

I I.

QUADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.

IN altera parte longiori $ABCD$, ducatur diameter AC ; & quia in triangulo ABC , angulus B , est rectus, ^b erit quadratum lateris AC , æquale duobus quadratis laterum inæqualium AB , BC . Quod est propositum.

I I I.

Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterum unius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.

TRIANGULORVM ABC , DEF , anguli A , & D , sint recti, lateraque opposita BC , EF , æqualia. Dico duo quadrata laterum AB , AC , simul sumpta æqualia esse duobus quadratis laterum DE , DF , simul sumptis. Nam quadrata linearum BC , EF , æqualia inter se sunt, cum & ipsa

^c 47. primi. linea inter se ponantur æqualis: Quadrato autem linea BC , ^a æqualia sunt quadrata linearum AB , AC . Et quadrato linea EF , æqualia sunt quadrata linearum DE , DF . ^d Quadrata ergo rectarum AB , AC , quadratis rectarum DE , DF , æqualia sunt: Quod est propositum.

I V.

DVOBUS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis.

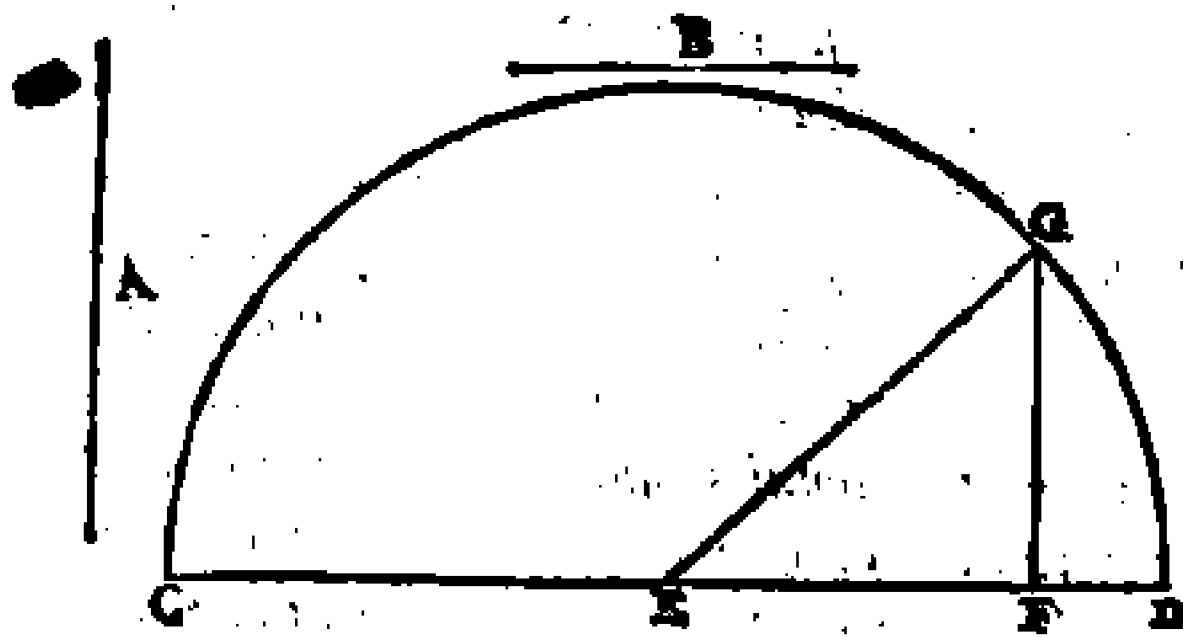
SI N. & B , latera duorum quadratorum inæqualium. Erit angulus rectus DCE , sitq, DC , recta æqualis rectæ B , & rectæ CE , rectæ A . Ducta deinde recta DE , coniungente duo puncta D , E , constituentur super ipsam duo anguli semirecti DEF , EDF , ^e cœquantq, recta DF , EF , in F . Quoniam igitur in triangulo FDE , anguli FDE , FED , æquales sunt: ^f erunt & latera DF , EF , æqualia, idèque & quadrata eorundem laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearum DF , EF , æqualia esse quadrato linearum A , & B , hoc est, quadratis linearum CE , & CD . Nam cum in triangulo DEF , anguli FDE , FED , faciant unum rectum: & erit reliquus angulus F ,

^g 31. primi. rectus. ^h Quamobrem erunt quadrata linearum DF , EF , æqualia quadrato lineæ DE : ⁱ Sed eidem quadrato lineæ DE , æqualia sunt quoque quadrata linearum CD , CE . Igitur quadrata linearum DF , EF , ^k æqualia sunt quadratis linearum DC , EC . Quod est propositum.

V.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, q̃ minor.

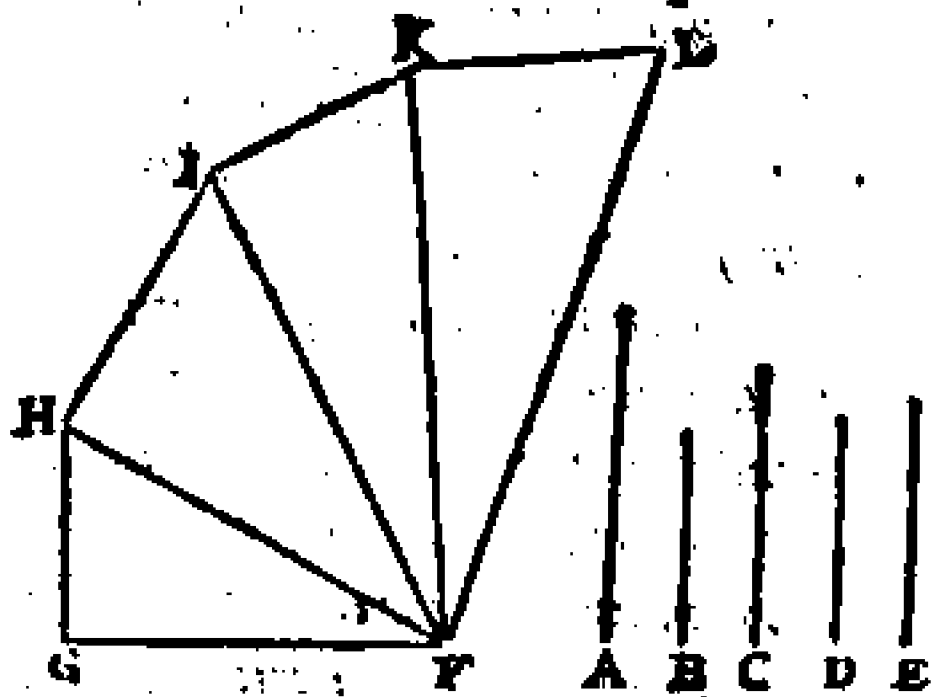
P O T E S T



quadratum recta B, hoc est, recta EF, sibi equalis, quadrato recta FG. Ducta enim recta EG, ^a erit eius quadratum aequale quadrato rectarum EF, FG, hoc est, quadratum recta EC, illi aequale, superabit quadratum recta EE, quadrato recta FG. Quod est propositum. a 47. primi.

V I.

PROPOSITIS quocunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

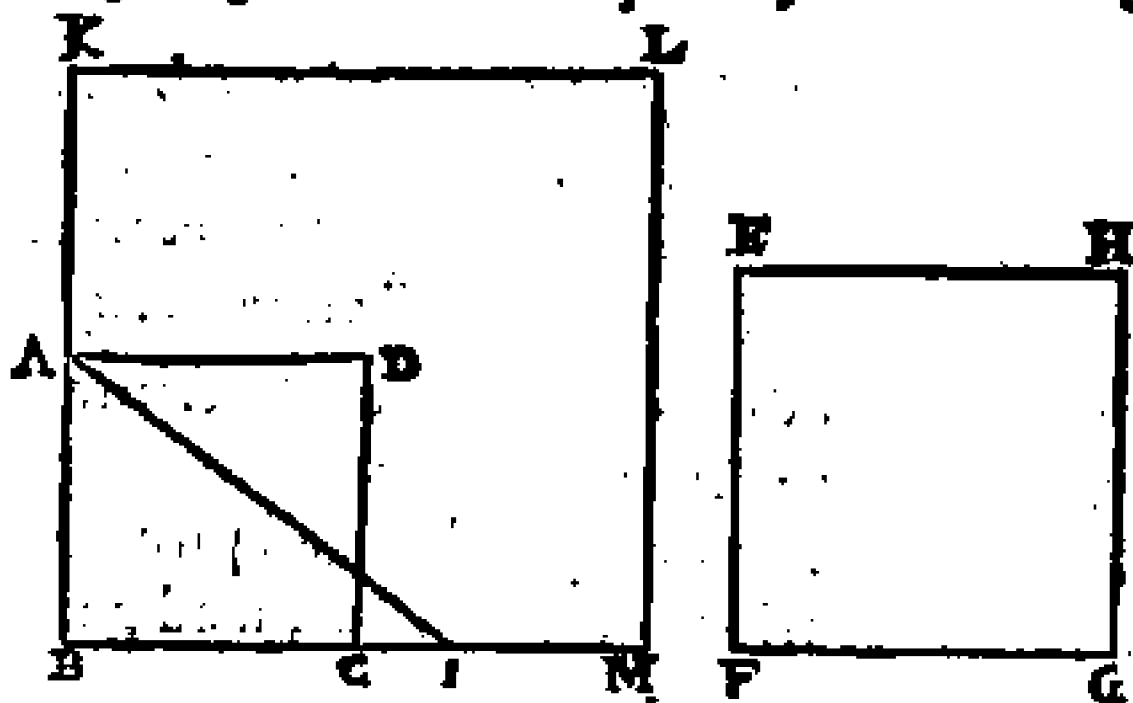


SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. Oporteatq; inuenire quadratum æquale omnibus illis quinque. Fiat angulus rectus FGH, sitq; recta FG, æqualis recta A, & recta GH, recta B. Ducta deinde recta HF, fiat angulus rectus FHI, sitq; HI, æqualis recta C. Ducta rursus recta IF, fiat angulus rectus FIK, sitq; IK, æqualis recta D. Ducta denique recta KF, fiat angulus rectus FKL, sitq; KL, æqualis recta E, ducaturq; recta FL. Dico quadratum recta FL, æquale esse quinque quadratis propositis. Quadratum enim recta FH, ^b æquale est quadrato rectarum FG, GH, hoc est, quadrato rectarum A, & B. Rursus quadratum re-

cta FI, ^c æquale est quadrato rectarum FH, HI, & idcirco quadrato rectarum A, B, & C. Item quadratum recta FK, ^d æquale est quadrato rectarum FI, IK, ideoq; quadrato rectarum A, B, C, & D. Denique quadratum recta FL, ^e æquale est quadrato rectarum FK, KL, ac propterea quadrato rectarum A, B, C, D, & E. Quod c 47. primi.
d 47. primi.
e 47. primi. est propositum.

V I I.

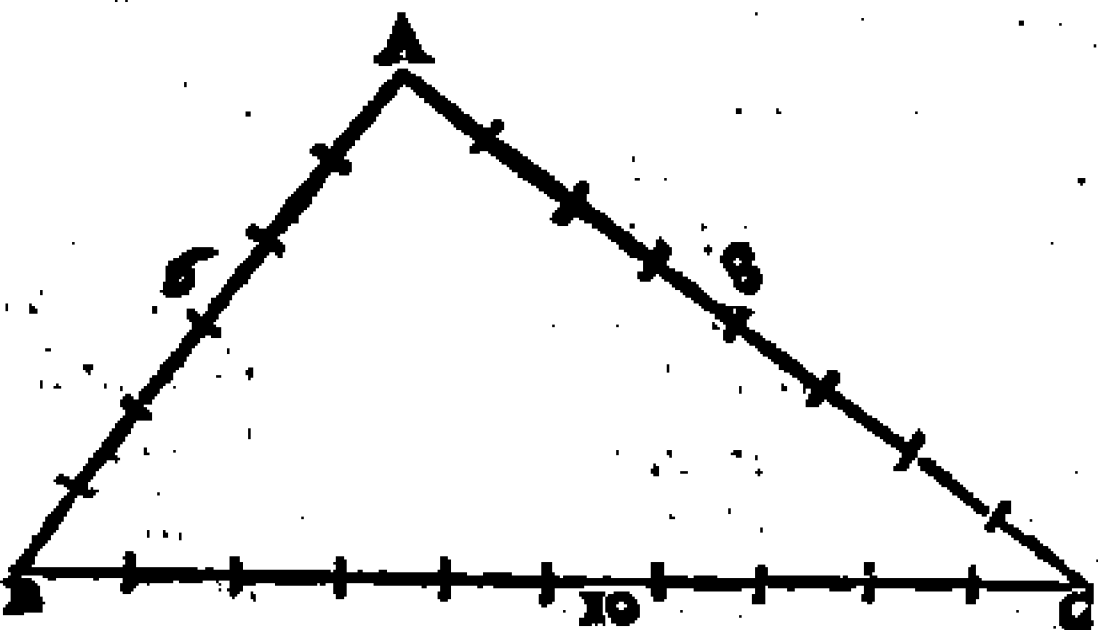
PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figurā, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita ut tota figura composita sit etiam quadrata.



hoc est, quadrato ABCD, EFGH: si auferatur commune quadratum ABCD, & remanebit figura ADCK, æqualis quadrato EFGH. Quod est propositum. f 47. primi.
g 3. prop.

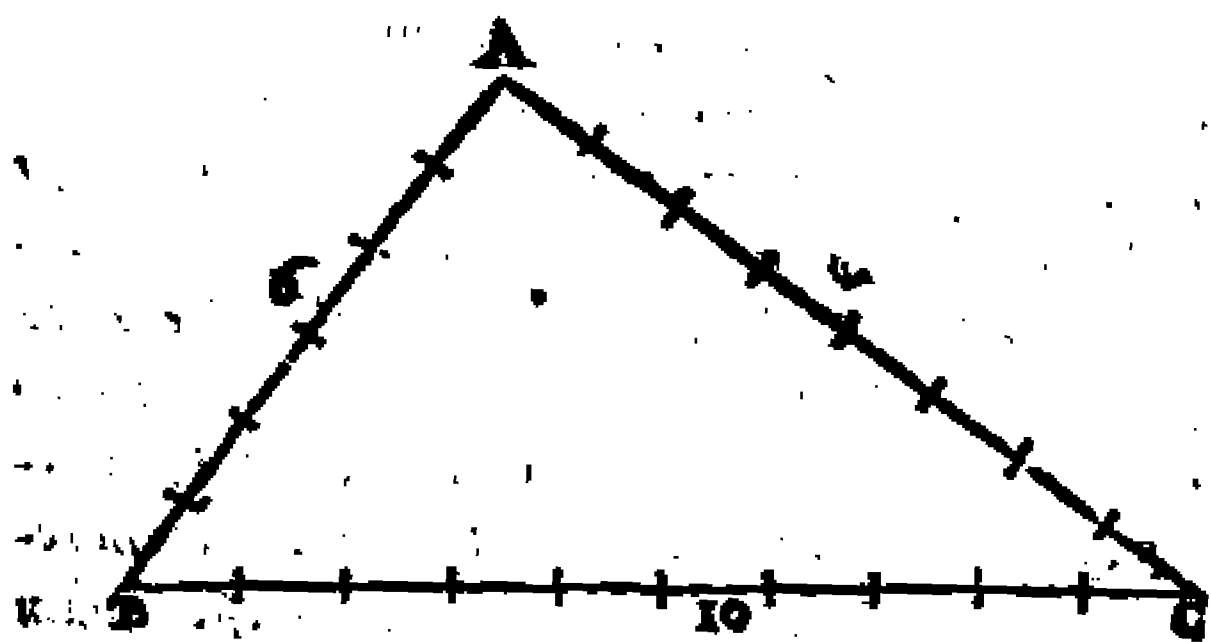
V I I I.

COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.



SIT angulus A, rectus in triangulo ABC, sitq; primum cognita latera AB, AC, circa angulum rectum, quorum AB, ponatur 6. palmarum, & AC, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC, nempe quadrati palmi 36. & 64. ^b æqualia sunt quadrato recta BC, si illa cō iungantur simul, efficietur hoc quadratorum palmarum 100. Latius ergo BC, continebit 10. palmos. Tantum enim est latius, seu radix quadrata 100. palmarum, ut perspicuum est apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera AB, BC, sitq; AB, 6. palmarum, & BC, 10. Quoniam b 47. primi.

a47. primi.



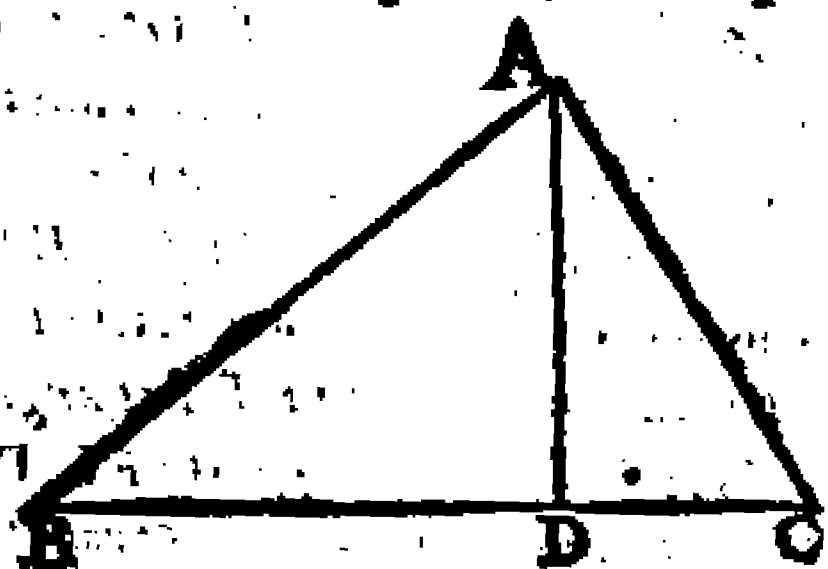
nequit, nisi per radicem surdam, quam vocant. Sed de his alias.

igitur quadrata rectarum AB, AC ,^a aequalia sunt quadrato recte BC ; si quadratum recte AB , quod continet palmos 36, detrahatur ex quadrato recte BC , quod est palmorum 100, remanebit quadratum recte AC , 64, palmorum. Latus ergo AC , continebit 8 palmos. Tanta enim est radix quadrata, seu latus 64, palmorum. Quod est propositum. Ceterum non semper hac arte inveniuntur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicemque quadratam, ut notum est apud Arithmeticos. Unde latus inuentum saepe numero exprimi

I X.

Si ex angulo à duobus lateribus inæqualibus trianguli comprehenso ad basin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, secabitur basis in partes inæquales, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, si basis à perpendiculari secetur non bisariam, erunt duo latera inæqualia, maiusque illud erit, quod maiori basi segmento adiacet.

b47. primi.



CADAT primam in triangulo ABC , cuius latus AB , maius sit latere AC ; perpendicularis AD , ad BC , demissa intra triangulum, quod tum datum continget, quando uterque angulus B, C , acutus est, ut ex corollario 2. propof. 17. constat. Dico segmentum BD , esse maius segmento CD . Quoniam enim^b tam quadratum ex AB , quadratis ex AD, BD , quam quadratum ex AC , quadratis ex AD, CD , aequale est: Est autem quadratum ex AB , maius quadrato ex AC , quod latus AB , latere AC , ponatur maius; erunt quoque duo

quadrata ex AD, BD , maiora duobus quadratis ex AD, CD : Et ablato communi quadrato recte AD , reliquum quadratum ex BD , reliquo quadrato ex CD , maius erit. Quare & recta BD , maior erit, quam recta CD . quod est primum.

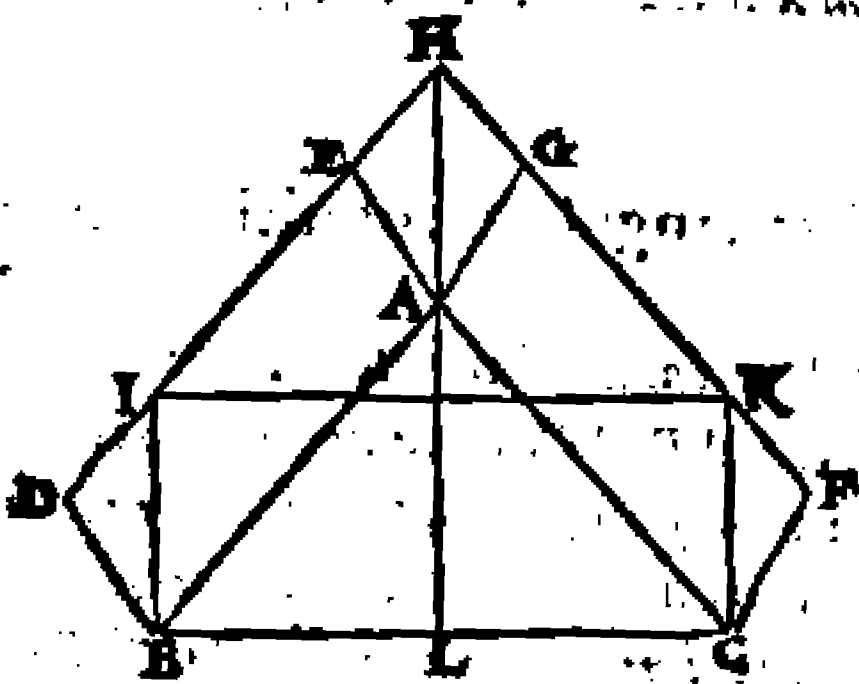
a47. primi.

Fit etiam^c deinde perpendicularis AD , segmentum BD , maius segmento CD . Dico latus AB , maius esse latere AC . Erit enim quadratum ex BD , quadrato ex CD , maius. Addendo quadrato communi ex AD , duo quadrata ex BD, AD , duobus quadratis ex CD, AD , maiora erunt. Cum ergo^c tam quadratum ex AB , quadratis ex BD, AD , quam quadratum ex AC , quadratis ex CD, AD , aequale sit, erit quoque quadratum ex AB , quadrato ex AC , maius: propterea, & latus AB , latere AC , maius erit. Quod est propositum.

Atque in hunc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagora colligi possunt: qua consilio, ne Lectoris molesti simus, hic omittenda censuimus, & in alium locum differenda.

THEOREMA TE porro hoc Pythagoreo multum vniuersalius est illud, quod à Pappo demonstratur in omni triangulo sine illud rectangulum sit, siue non, & de quibuscunque parallelogrammis super latera trianguli constructis tam rectangulis, quam non rectangulis, etiamsi non sint inter se equiangula. Quod nos informam theorematibus redigentes, clarius hoc modo proposuimus, & meo iudicio generalius adhuc, quam Pappus.

In omni triangulo, parallelogramma quaecunque super duobus lateribus descripta, aequalia sunt parallelogrammis super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum recte ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conveniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producantur.



d34. primi.

e30. primi.

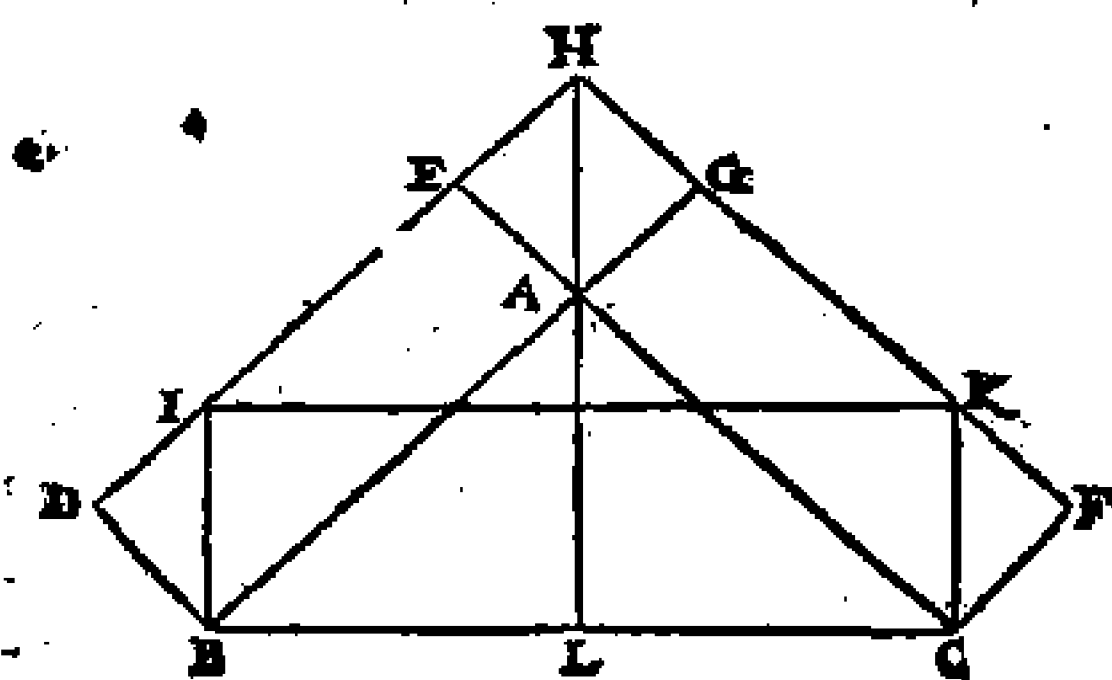
f33. primi.

g35. primi.

h35. primi.

Si r triangulam quodcunque ABC , constituamus, super latera AB, AC , parallelogramma quacunque AD, AF, BI, CK , quorum latera DE, FG , qua lateribus AB, AC , assumptis in triangulo oppositam produxis, ad partes anguli A , ductis lateribus AB, AC , comprehensi, conveniant in H , ducaturque recta AH . Dico parallelogramma AD, AF , aequalia esse parallelogrammo super latus BC , descripto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum recte AH . Producta enim HA , secet BC in L , & per B, C , agantur BI, CK , parallela ipsi AH , iungaturque recta IK . Quoniam igitur parallelogramma sunt BI, HA, CK, HA ,^d erit utraque, BI, CK , ipsi AH , æqualis; atque, aded

& inter se æquales erunt BI, CK ,^e quæ cum sint etiam parallela, & eidem AH , parallela sint: & erunt quoque, BC, IK , parallela, & æquales. Quare parallelogrammum est $BCKI$, super latus BC , habens alterum latus BI , recte AH , æquale, & parallelum: Cui quidem æqualia ostendenda sunt parallelogramma AD, AF . Quia ergo æqualia sunt parallelogramma AD, AB, IH , quod eandem habeant basin AB , in eisdemque sint parallelis AD, IH ,^f Est autem AB, IH , parallelogrammum IL , æquale, quod illud cum hoc etiam eandem habeat basin



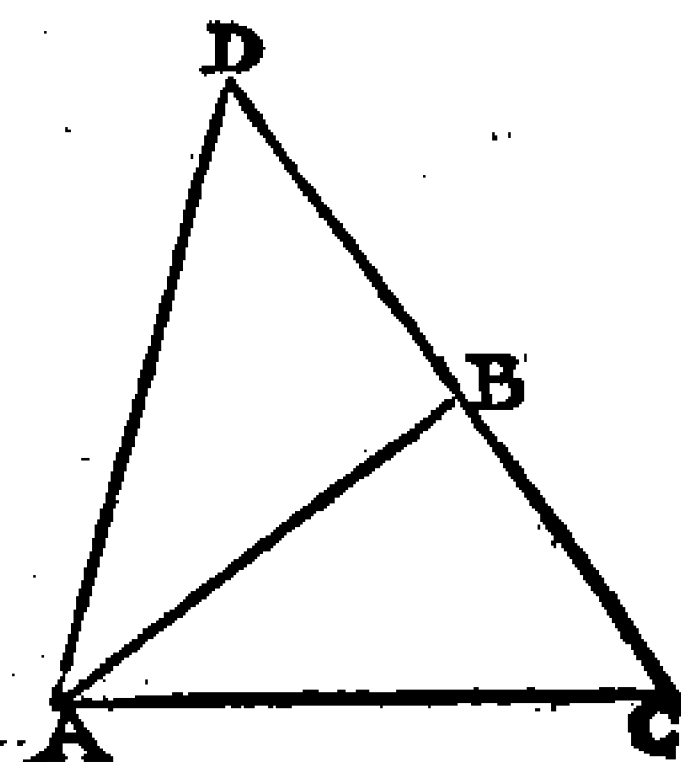
basin BI , in eisdemq, sit parallelus BI, LH : Erit quoq, AD , eidem IL , aequalis. Non aliter ostendemus, AF , ipsi KL , esse aequalis. Quare parallelogramma AD, AF , parallelogrammo BK , aequalia sunt. Quod est propositum.

P A P P U S construit figuram aliter. Nam sumit rectas AC, AE, & AB, AG, in directum positas, ita ut parallelogramma AD, AF, sint equiangulara, habentia angulos AED, AGF, angulo BAC, ²internos externo aequales, cum 229. primi. hac eius figura indicat. Sed nos vniuersaliter rem proposuimus, ut manifestum est.

THEOR. 34. PROPOS. 48.

47.

Si quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.



DE TVR triangulum ABC , sitque quadratum lateris AC , æquale quadratis reliquorum laterum BA, BC . Dico angulum ABC , esse rectum. Ducatur namque BD , perpendicularis ad BA , & æqualis rectæ BC , connectaturque recta AD . Quoniam igitur in triangulo ABD , angulus ABD , rectus est; ^a erit quadratum rectæ AD , æquale quadratis rectarum BA, BD : Est autem quadratum rectæ BD , quadrato rectæ BC , æquale, ob linearum æqualitatē. Quare quadratum rectæ AD , quadratis rectarum BA, BC , æquale erit. Cum ergo quadratum rectæ AC , eisdem quadratis rectarum BA, BC , æquale ponatur; ^b erunt quadrata rectarum AD, AC , inter se æqualia, ac propterea & rectę ipsę AD, AC , æquales. Quoniam igitur latera BA, BD , trianguli ABD , æqualia sunt lateribus BA, BC , trianguli ABC ; & basis

A D, ostensa est æqualis basi A C, erunt anguli A B D, A B C, æquales: Est autem angulus A B D, ex constructione rectus. Igitur & angulus A B C, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab uno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I V M.

CONFIRM est autem theorema hoc pracedens theoremati Pythagorici, ut perspicuum est.

Triangulorum comparationes.

NOVEM modis duo triangula inter se comparavit Euclides hoc libro. Primum quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, utrumque utrique, continentque angulum angulo æqualem, collegit æqualitatem basium, reliquorum angulorum, atque ad eò totorum triangulorum. d 4. primi.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, basisq; basi æqualis, intulit æqualitatem angulorum illis lateribus comprehensorum. Vbi nos *8. primi.* conclusimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, tota q̃ue triangula probauimus esse æqualia.

Terzio, cum duo latera duobus lateribus sunt æqualia, utrumque utriusque, comprehendunt autem angulos inæquales, ostendit basim maiori angulo oppositum esse maiorem basem minori angulo oppositam. *f. 24. prim.*

QUARTO, cum duo latera duobus lateribus æqualia sunt, utrumque utrique, at bases inæquales, & demonstravit angulum maiori basi oppositum esse maiorem angulo minori *g 25. primi.*
basi opposito.

QVINTO, quando duo anguli duobus angulis æquales sunt, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus angulis adiacet, siue quod vni æqualium angulorum opponitur, probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius esse æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus, sequi etiam, tota triangula esse æqualia. h 26. prim.

1) Si x r o demonstravit, duo triangula super eandem basin, & inter easdem parallelas i 37. princ. constituta, esse æqualia.

SEPTIMO ostendit, duo triangula super æquales bases, & inter easdem parallelas $\angle 38.$ *prim.* constituta, æqualia esse.

39. primi.

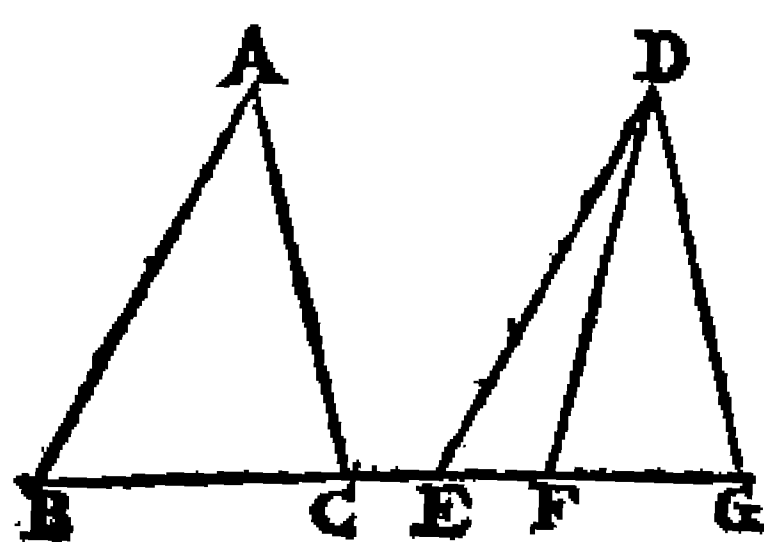
OCTAVO^a docuit, duo triangula æqualia super eandem basim, & versus eandem partem constituta, esse inter easdem parallelas.

40. primi.

NONO denique^b probavit, duo triangula æqualia super æquales bases in eadem linea, in eandemque partem constituta, esse inter easdem parallelas.

ATQUE his modis argumentandi in duobus triangulis propositis univèrsa ferè Geometria niti videtur, ut propterea diligenter memoria mandandi sint. Quemadmodum autem à propos. 26. in scholio propos. 31. exclusimus duas comparationes, quando nimirum duo anguli duobus angulis æquales sunt, & unum latius uni lateri æquale, non quidem, quod æqualibus adiacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum opponitur in utroque triangulo; sed quod in uno quidem angulis æqualibus adiacet, in altero verò uni æqualium angulorum opponitur: vel quod in uno opponitur uni æqualium angulorum, in altero verò alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas hasce comparationes exclusimus, quòd ex ijs non sequatur reliquorum laterum æqualitas, ut in scholio propos. 31. demonstravimus: Ita quoque à propos. 4. excludenda sunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri potest basium æqualitas.

PRIMUM enim quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, utrumque utrique, & unus angulus uni angulo, qui uni æqualium laterum opponitur, bases æquales esse nequeunt, nisi quando angulus in utroque triangulo alteri lateri æquali oppositus, vel est minor recto, vel non minor recto.



Si enim Isosceles DFG, habens latera DF, DG, æqualia, & producta base GF, usque ad E, iungatur recta ED, & triangulo DEG, æquale triangulum construaturs ABC, cuius latera AB, AC, lateribus DE, DG, æqualia sint, & basis BC, basi EG. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DG, æqualia, utrumque utrique, angulusq; B, E, æqualibus lateribus AC, DF, oppositi æquales: & tamen bases BC, maior est base EF, quòd B C, ipsi EG, æqualis sit. Ratio est, quòd angulus C, acutus est,

25. primi.

17. primi.

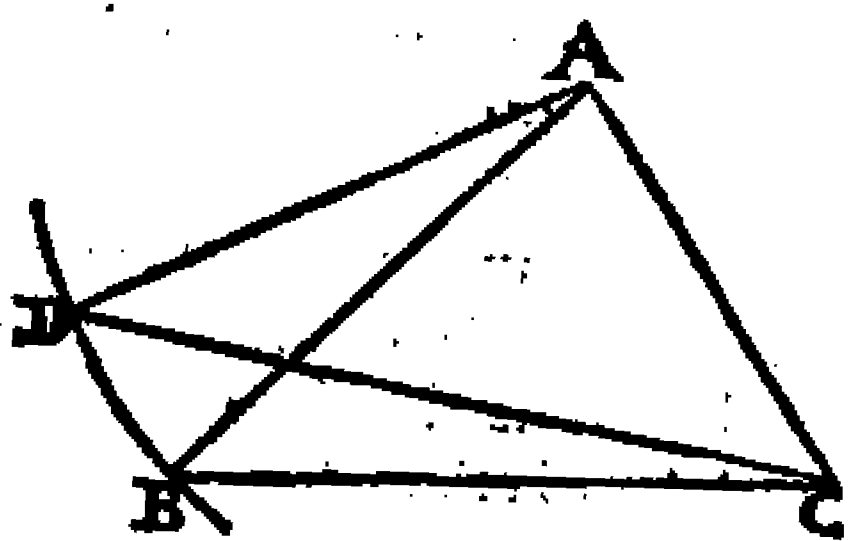
13. primi.

at DFE, obtusus. Nam cum^a anguli DFG, & G, æquales sint, & simul sumpti minores duobus rectis; erit uterque minor recto, ac proinde DFE, recto maior: quandoquidem^a duo anguli ad F, æquales sunt duobus rectis. Quòd si duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DG, sint æqualia, angulusq; B, angulo E, & uterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor; tum demum sequitur, bases BC, EG, æquales esse, &c. Nam si basis BC, minor esset, quàm EG; si AB, ipsi DE, superponeretur, congrueret quidem BC, ipsi EG, propter æqualitatem angulorum B, E, sed punctum C, citra G, caderet, ut in F. Quia igitur latera DF, DG, æqualia sunt, quòd DF, idem sit, quòd AC, ipsi DG, æquale; & erunt anguli DFG, & G, æquales, ac propterea^a uterque minor recto; quòd ambo minores sint duobus rectis. Cum igitur^a duo anguli ad F, sint duobus rectis æquales, erit DFE, hoc est, C, qui à DFE, non differt, recto maior. Non ergo uterque angulus C, & G, minor est, aut non minor recto, sed G, quidem acutus, & C, obtusus, quòd est contra hypothèsin. Eodem modo, si basis BC, dicatur esse maior base EF, (positis lateribus AB, AC, æqualibus ipsis DE, DG, & angulo B, æquali ipsi E, & utroque angulo C, & F, vel minore recto, vel non minore.) cades punctum C, ultra F, ut in G; eritq; rursum angulus quidem C, hoc est, G, acutus, & DFE, obtusus, quòd est contra hypothèsin.

5. primi.

17. primi.

13. primi.

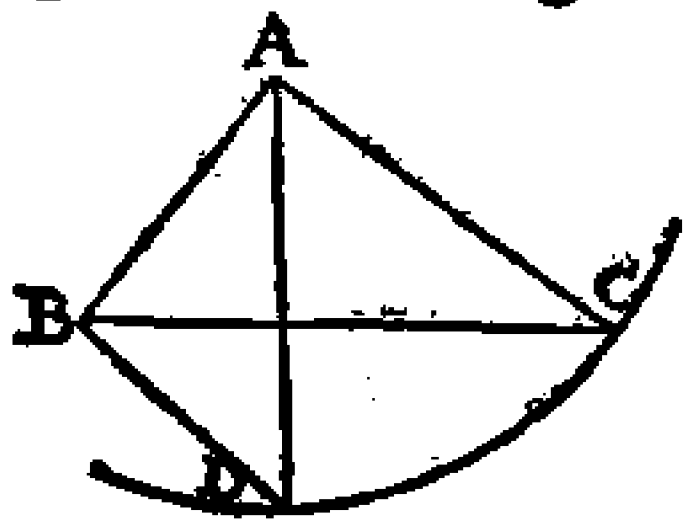


18. primi.

DEINDE quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, utrumque utrique, & unus angulus uni angulo, ita ut unus uni æqualium laterum, & alter alteri oppositus, nihil etiam colligi potest. Nam sit triangulum ABC, cuius latus AB, maius sit latere AC. Erit ergo angulus ACB, maior angulo ABC. Fiat angulus ACD, angulo ABC, æqualis; cadetq; CD, supra CB. Describatur quoque ex A, per B, arcus circuli secans CD, in D, iungaturq; recta AD. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus AD, AC, æqualia, utrumque utrique, & angulus ABC, lateri AC, oppositus, æqualis angulo ACD, lateri AD, opposito: Et tamen bases BC, DC, æquales non sunt. Si enim æquales essent, essent tam duæ rectæ AB, AD, quàm duæ CB, CD, æquales,

quales, ^a quod est absurdum. Vel etiam anguli BAC, DAC , ^b aequales essent, pars & totum. ^a 7. primi. ^b 8. primi.

POSTREMO, quando duo latera duobus lateribus aequalia sunt, utrumque utrique, & angulus in uno triangulo illis lateribus comprehensus, aequalis angulo, qui in altero triangulo



to opponitur uni illorum laterum, nihil etiam potest inferri. Sit namq. triangulum ABC , cuius utrumque latus AC, CB , maius sit latere AB ; & BC , maius quā AC . Erit ergo angulus BAC , maior angulo ABC . Si igitur fiat angulus ABD angulo BAC , aequalis, cadet BD , infra BC . Describatur quoq. arcus circuli ex A , per C , qui infra BC , cadet, secabitq. BD , in D . Iuncta igitur re

cta AD ; erunt duo latera AB, AC , duobus lateribus AB, AD , aequalia, utrumque utrique, angulusq. BAC , illis lateribus AB, AC , comprehensus, aequalis angulo ABD , qui lateri AD , opponitur: Et tamen bases, BC, BD , aequales non sunt. Alias tam recta AC, AD , quā BC, BD , aequales essent. ^a quod est absurdum. Vel etiam anguli BAC, BAD , ^b aequales essent, totum & pars. quod est absurdum. ^a 7. primi. ^b 8. primi.

RECTE igitur Euclides propos. 4. praecepit angulum illis lateribus comprehensum in uno triangulo debere esse aequalem angulo alterius trianguli, qui illis quoq. lateribus comprehenditur: quandoquidem sine hac conditione nihil colligere licet, ut demonstravimus.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EUCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.



DEFINITIONES.

I.

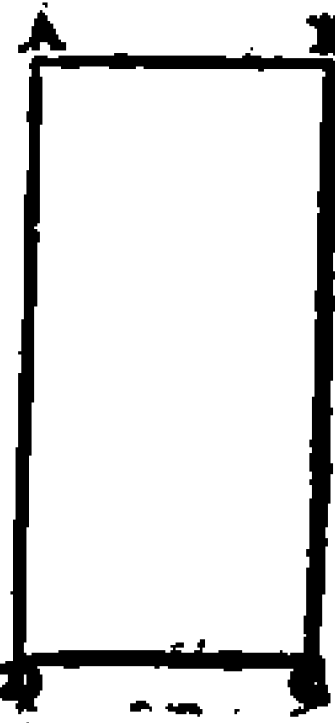
OMNE parallelogrammū rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.



GI T Euclides secundo hoc libro de potentia linearum rectarum, inquirendo quantā sint, & quadrata passim cuiuslibet lineæ rectæ diuise, & parallelogramma rectangula sub partibus eiusdem lineæ diuise comprehensa, tam inter se, quā comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod ut commodè exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt, recte intelligenda maxime necessaria.

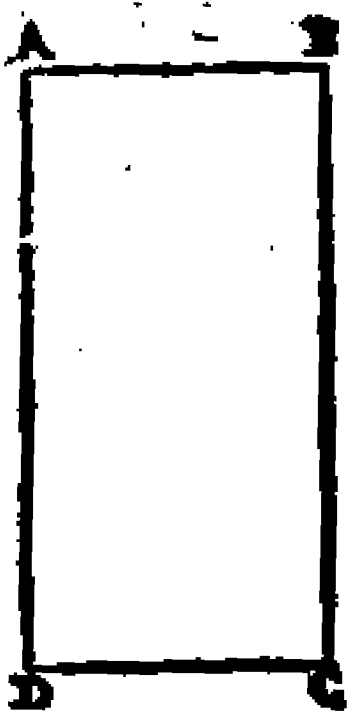
PRIO R definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcumque rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod ut intelligatur, explicandum primum est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti. Cuius quidem duo tantum sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, ut perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si unus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessarii recti. Sit enim in parallelogrammo $ABCD$, angulus A , rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D , rectos quoq. esse. Nam cum parallela sint AD, BC , erunt anguli A, B , interni duobus rectis aequales: At angulus A , rectus est, ex hypothesi. Igitur & B , rectus erit. Quoniam vero & quilibet suo opposito est aequalis, ut angulus A , angulo C , & angulus B , angulo D ; erunt & anguli C, D , recti.

DICIT itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub



f 19. primi.

g 34. primi.



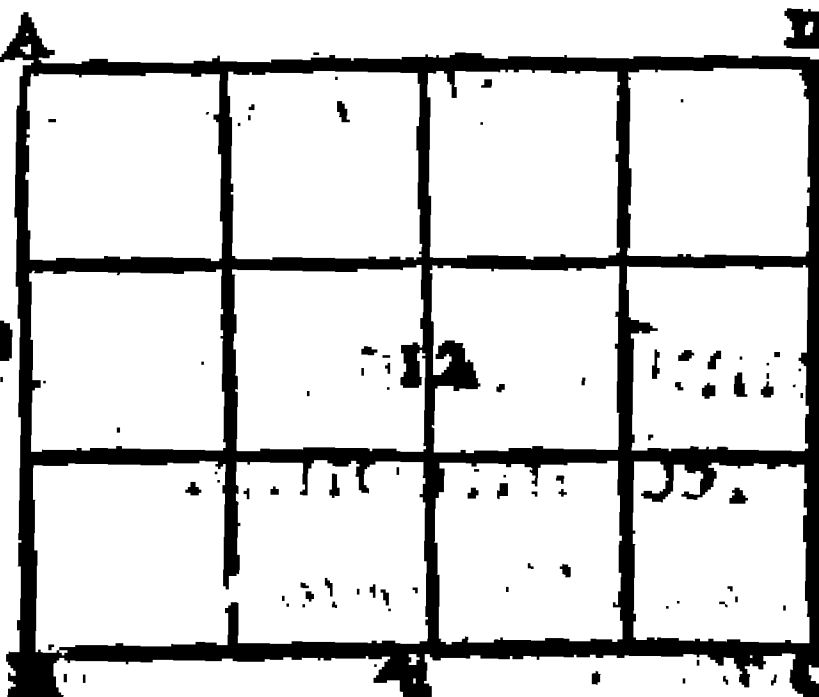
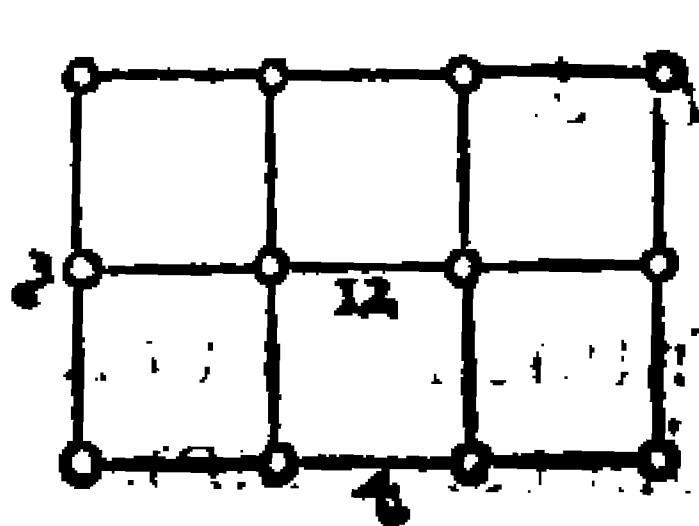
duabus rectis lineis, quæ unum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum $ABCD$, contineri dicitur sub duabus lineis rectis AB , AD ; vel sub AD , DC ; vel sub DC , CB , vel denique sub AB , BC : quoniam qualibet huiusmodi duæ lineæ expriment totam parallelogrammi magnitudinem, una quidem, vt AB , vel DC , eius longitudinem, altera verò, vt AD , vel BC , eius latitudinem. Vnde expressæ duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius lineæ in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta AB , deorsum secundum rectam AD , moveri in transversum, ita vt semper angulum rectum cum AD , constituat, donec punctum A , ad punctum D , & punctum B , ad punctum C , perveniat, descriptum erit totum parallelogrammum $ABCD$. Idem fiet, si AD , ponatur moveri in transversum secundum rectam AB , &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.

Ita AEF parallelogrammum rectangulum, quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cuius duæ latera circa unum angulum rectum equalia sunt duabus illis rectis lineis, utrumque utrique. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E , & F , contentum, erit idem, quod parallelogrammum $ABCD$: quoniam latus AB , æquale est rectæ E , & latus AD , rectæ F .

PERSPICUUM autem est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis aequalibus esse quadratum. Cum enim qualibet illarum linearum æqualium æqualis sit lineæ oppositæ, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera equalia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

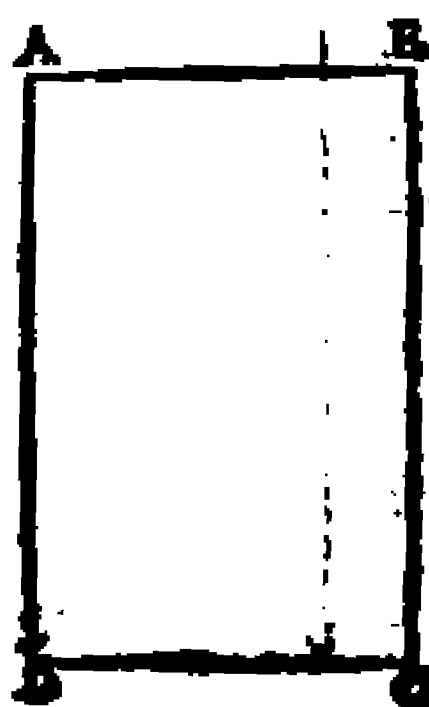
Item manifestum est si duæ rectæ lineæ æquales duabus rectis lineis æquales fuerint, utraq; utrique, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius equalia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tam facile hac etiam ratione demonstrari potest. Sint rectæ AB , BC , æquales rectis DE , EF , utraq; utrique. Dico parallelogrammum rectangulum $ABCG$, contentum sub AB , BC , æquale esse parallelogrammo rectangulo $DEFH$, contento sub DE , EF . Ductis etenim diagonibus AC , DF , cum latera AB , BC , trianguli ABC , æqualia sint lateribus DE , EF , trianguli DEF , & anguli B , & E , æquales, nempe recti; erunt triangula ABC , DEF , æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula AGC , DHF . Quare tota parallelogramma $ABCG$, $DEFH$, æqualia erunt.

HABET autem comprehensio hac parallelogrammi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnam affinitatem cum multiplicatione vnius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producit numerus



12. qui in formam parallelogrammi constituitur, vnde & contineri dicitur sub 3. & 4. Ita quoque parallelogrammum $ABCD$, comprehensum sub duabus rectis AB , BC , quarum illa sit 3. palmorum, hac autem 4. constat 12. palmorum quadratis, quæ quidem ex ducta lineæ AB , 3. palmorum in lineæ BC , 4. palmorum

producentur, vt figura indicat, nōdumq; est Arithmeticus, atque Geometricus, demonstraturque a Ioanne Regiomontano libro 1. de Triangulis, propof. 16. Hinc fit, vt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proximè antecessor parallelogrammum ex ductu lineæ AB , in lineam BC , vel (quod idem est) ex ductu lineæ BC , in lineam AB . Idem enim parallelogrammum procreatur, siue minor lineæ in maiorem, siue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem producit numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propof. 16. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quam ex 4. in 3. producit numerus 12.

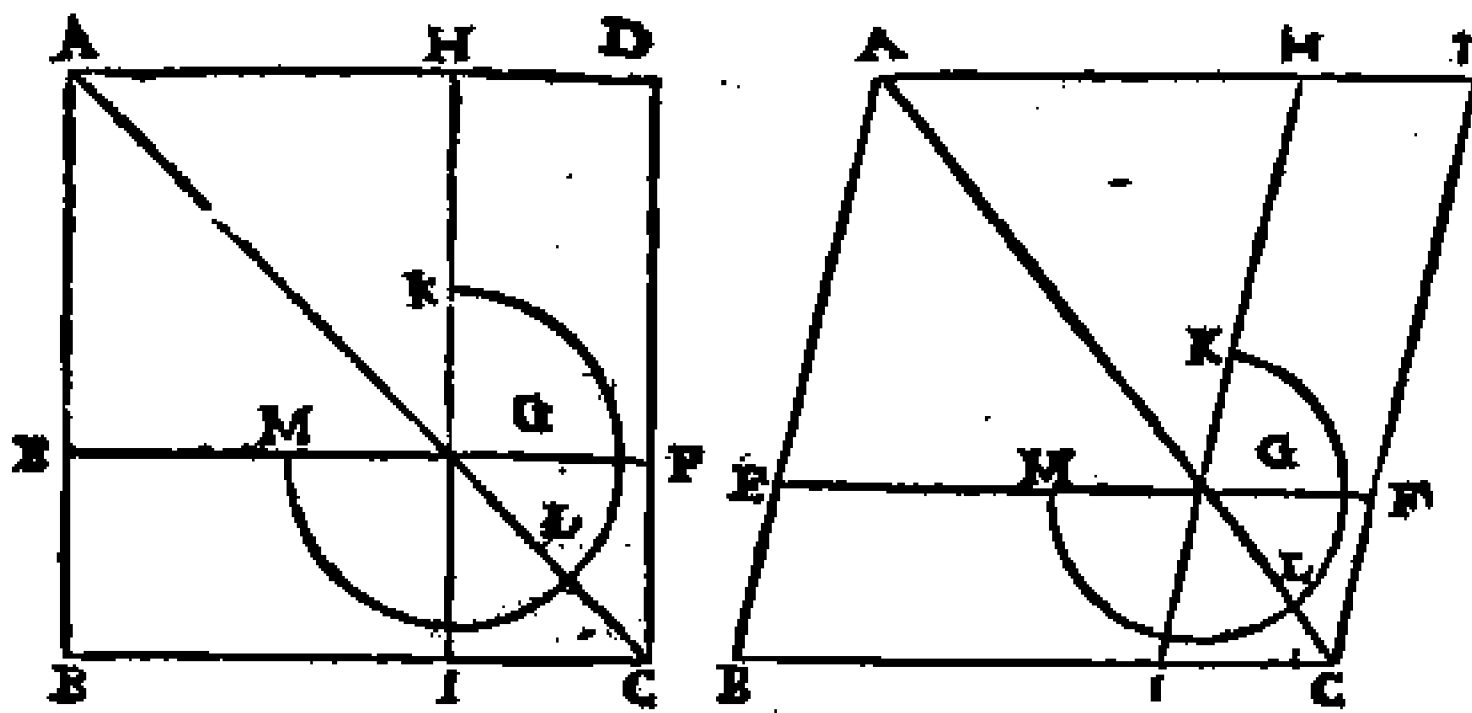


Quia ita quoque, monendum mihi Lector videtur, Euclidem in hoc secundo libro, & in aliis, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam ceteri Geometra observant, ita vt nomine rectanguli perpetuò intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eadem littera repetantur, solent Geometra exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat litteris, quæ per diagonem opponuntur. Vt appositum parallelogrammum appellant AC , vel BD .

I I.

IN omni parallelogrammo spatio, vnum quodlibet eorū, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN Parallelogrammo $ABCD$, siue rectangulam illud sit, siue non, ducatur diametrum AC , ex cuius puncto



quolibet G , ducantur rectæ EF, HI , parallele lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammū diuisum sit in quatuor parallelogramma, quorum duo EH, IF , dicuntur esse circa diametrum, alia verò duo BG, GD , complementa, vt manifestum est ex vltima definitione primi libri. Itaque figura composita ex parallelogrammo vtolibet circa diametrum, vt ex IF , vnā cū duobus com-

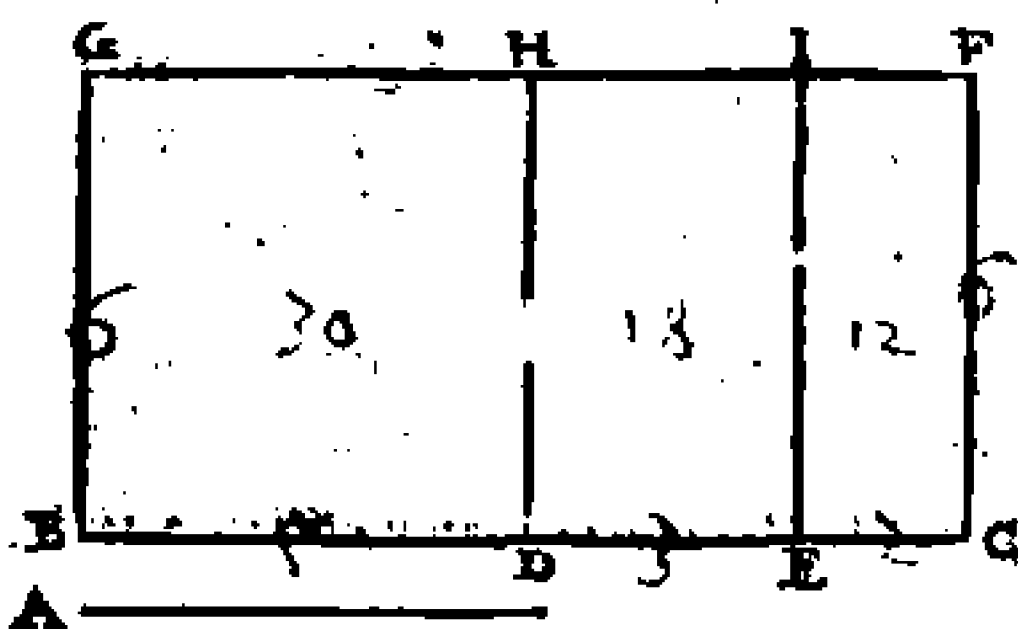
plementis BG, GD , qualis est figura $EBGDHGE$, quam complectitur circunferentia KLM , dicitur Gnomon. Eadem ratione figura $FDABIGF$, composita ex parallelogrammo EH , circa diametrum, & duobus complementis BG, GD , Gnomon appellabitur.

SED iam ad propositiones secundi huius libri veniamus, in quibus sanè opera pretium fuerit, multum laboris in eis exquisitè intelligendis ponere, propter multiplicem earum vsum, cū in rebus Geometricis, tum in humanis commerciis. Nam ex nonnullis harum propositionum demonstrantur regulæ illæ admirabiles Algebra, quibus vix credo in disciplinâ humanâ præstari aliquid reperiri, quippe cū miracula quadam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abstrusa, ac recondita, vt facultas illa omnem caput humanum superare videatur, tanta nihilominus facilitate, atque voluptate, vt facilius videatur esse nihil. Ex aliis deinde propositionibus huius libri eliciuntur demonstrationes, quibus inter se adduntur, subtrahuntur, multiplicantur, atque diuiduntur numeri surdi, (quos dicunt) hoc est, qui nullo modo exprimi possunt; cuiusmodi sunt radices numerorum non quadratorum, aut non cubicorum, quæ neq; per Diuinâ potentiam in numeris possunt exhiberi, quod hæc res contradictionem implicet, vt Philosophi, atq; Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Qui enim credat, per demonstrationem sciri posse, quid producat ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratam numeri 18. adiecta, cū vtræque radix incognita sit, & nulla ratione exprimi queat, q̃ illa paulo minor sit, quàm 3. hæc verò paulo maior, quàm 4? Et tamen summa, quæ ex vtræque sit, colligitur ex vi propositionis 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulo maior est, quàm 7. Præterea ex propositione 12. & 13. eiusdem huius lib. area, & quantitas cuiusvis trianguli exquisitissimè cognoscitur, ex qua cognitione rursus dimensio omnium magnitudinum fluit, atq; dimanat. Postremò vltima propositio huius libri omnem figuram rectilineam irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt verè autem dici mereatur hic liber, cū mole quidem sit perexiguus, vtilitates verò cōtineat præp̃ infinitas.

THEOR. I. PROPOS. I.

SI fuerint duæ rectæ lineæ seceturque ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub infecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ $A, & BC$, quarum BC , secetur quomodo cunque in quolibet segmenta BD, DE, EC . Dico rectangulum sub $A, & BC$, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A , & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub $A, & BD$; Item sub $A, & DE$; Item sub $A, & EC$, comprehenso.



RECTANGVLVM enim BF , comprehendatur sub $A, & BC$, hoc est, recta GB , æqualis sit rectæ A . Quod quidem fiet, si erigantur ad BC , duæ perpendiculares BG, CF , æquales rectæ A , ducaturque recta FG . Nam rectæ BG, CF , & parallele erunt, ob rectos angulos B, C : Sed & æquales inter se sunt, quod vtræque rectæ A , æqualis ponatur. Igitur erunt quoque GF, BC , parallele & æquales inter se: ac proinde rectangulum erit BF , contentum sub A , siue $GB, & BC$, ex defn. i. huius libri: Deinde ex $D, & E$, ducantur rectæ DH, EI , parallele ipsi BG , vel CF . Itaque $DH,$

EI , cū parallele sint ipsi BG , inter se quoque parallele erunt. Rursus eadem, cū ex constructione parallelogramma sint BH, BI , æquales erunt rectæ BG , ac propterea rectæ A . Quoniam igitur recta BG , æqualis est rectæ A , erit rectangulum BH , comprehensum sub infecta linea A , &

a 28. primi.

b 1. pron.

c 33. primi.

d 30. primi.

e 34. primi.

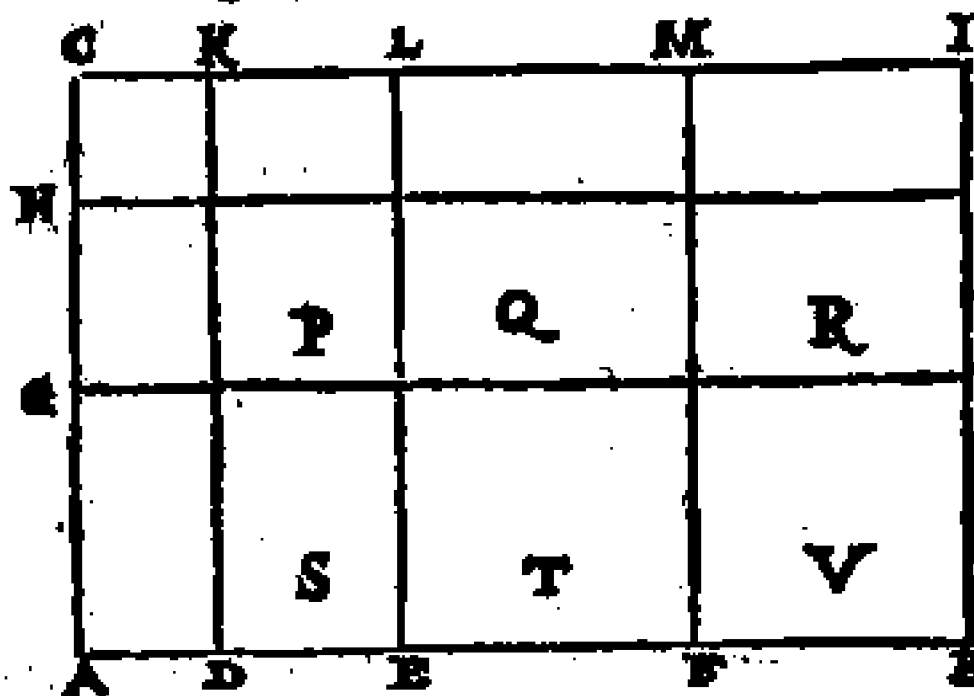
segmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DI, comprehensum sub A, & segmento DE. Item rectangulum EF, sub A, & segmento EC. Quare cum rectangula BH, DI, EF, æqualia sint toti rectangulo BF, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub A, & BC, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, & segmentis BD, DE, EC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I V M.

Q U O N I A M lib. 9. propos. 14. decem priora theoremat a secundi huiuslibri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si diuidantur, ut lineæ; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri unius in alterum respondeat ductui unius lineæ in alteram, ut supra diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunque ut 6. & 10. diuidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur: id quod perspicuum est.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremat a, quæ iam sequuntur.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ in quocunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur rectangulis.



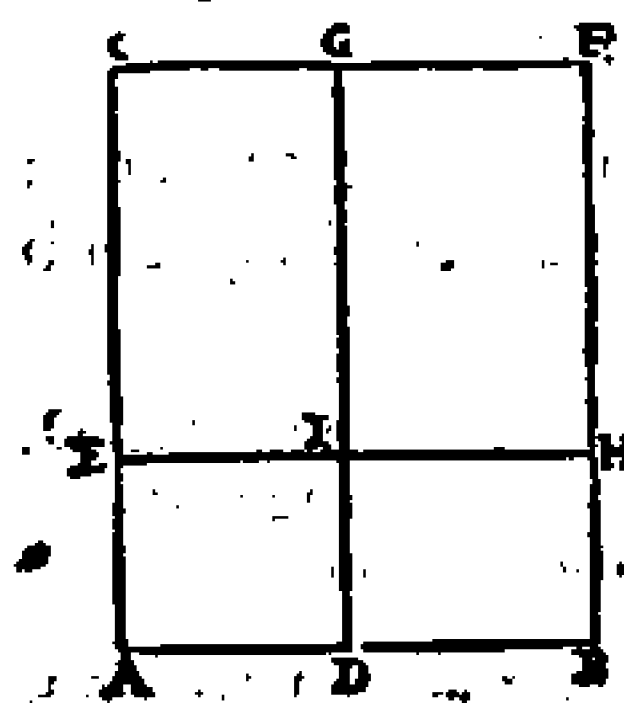
S I N T duæ rectæ AB, AC, rectum angulum A, continentes, quæ secantur in partes AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. Dico rectangulum sub rectis AB, AC, comprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub AD, AG; AD, GH; AD, HC; DE, AG; DE, GH; DE, HC; EF, AG; EF, GH; EF, HC; FB, AG; FB, GH; FB, HC, continentur. Compleatur rectangulum AI, ducanturque DK, EL, FM, parallela ipsi AC, vel BI: Item HN, GO, parallela ipsi AB, vel CI, quæ secant priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum AS, continetur sub AD, AG; & GP, sub AD, GH;

a 34. primi.

b 34. primi.

& HK, sub AD, HC; (* quæ rectæ GS, HP, ipsi AD, sint æquales:*) Item rectangula DT, SQ, PL, continentur sub DE, AG; DE, GH; DE, HC; (* quæ rectæ DS, SP, PK, ipsi AG, GH, HC, æquales sint, & ST, PQ, ipsi DE. *) Et eadem ratione rectangula EV, TR, QM, continentur sub EF, AG; EF, GH; EF, HC: Nec non rectangula FO, VN, RI, sub FB, AG; FB, GH; FB, HC: perspicuum est, rectangulum sub AB, AC, æquale esse rectangulis sub singulis partibus AD, DE, EF, FB, & quolibet segmentorum AG, GH, HC, comprehensum. Quod est propositum.

Si sint duæ rectæ lineæ, secanturque ambæ vtrunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, vnâ cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vnâ cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.



S I N T duæ rectæ AB, AC, angulum continentes rectum A, quæ secantur vtrunque in D, & E. Dico rectangulum comprehensum sub AB, AC, vnâ cum rectangulo comprehenso sub partibus AD, EC, æquale esse rectangulo continetur sub AB, EC; AC, AD: vnâ cum rectangulo sub DB, AE, comprehenso. Compleatur enim rectangulum AF, agaturque per D, recta DG, ipsi AC, vel BF, parallela; nec nõ per E, recta EH, secans DG, in I. parallela ipsi AE, vel CF. Quoniam igitur rectangulum AF, æquale est rectangulis EF, DH, AI, si addatur commune EG, erunt rectangula AFE, EGH, nempe sub tota AB, AC, & partibus AD, EC, comprehensa, æqualia rectangulis EF, AG, DH, sub AB, EC; AC, AD, DB, AE, comprehensis æqualia. Quod est propositum.

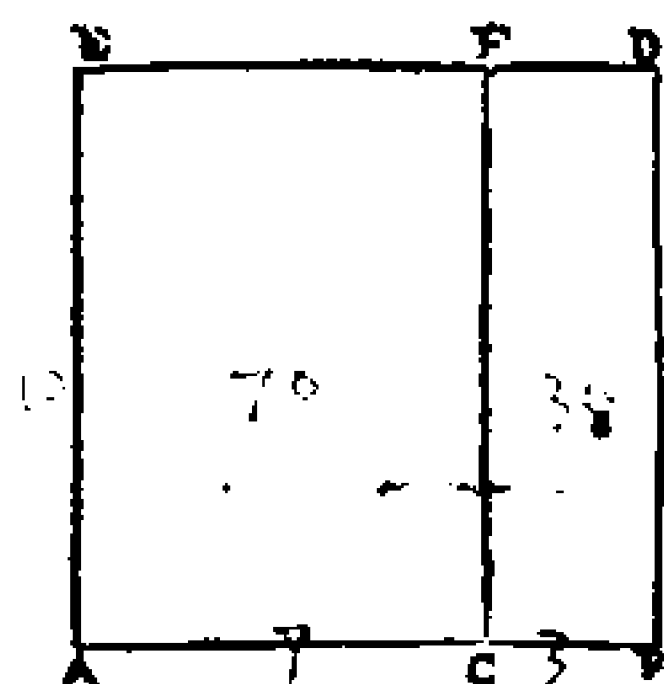
I N numeris etiam hæc eadem perspicua sunt. Propositum enim duobus hisce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2. 3. 5. posterior vero in duas, 3. 5. diuidatur, perspicuum est, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem esse sex numeris 6. 10. 9. 15. 15. 25. qui productur ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partem 3. 5. efficiuntur, simul additi 80. ut volebat theorema 1. Federici.

R E S P E C T U 5, si iidem numeri secantur vtrunque, prior quidem in 3. 7. posterior autem in 2. 6. manifestum quoque est, 80. numerum productum ex 10. in 8. vnâ cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem esse tribus numeris 60. 24. 14. qui productur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 2. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. ut theorema 2. Federici optabat.

T H E O R E M A 2. P R O P O S. 2.

Si recta linea secata sit vtrunque: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota sit, quadrato.

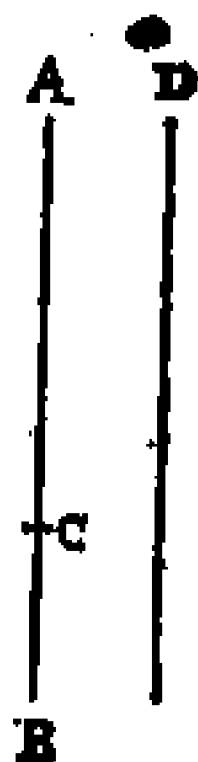
R E C T A



RECTA linea AB, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehensa sub tota AB, & segmentis AC, CB, simul sumpta, æqualia esse quadrato totius lineæ AB. Describatur enim AD, quadratum lineæ AB, & ex C, ducatur CF, parallela rectæ AE, vel BD, quæ æqualis erit rectæ AE, hoc est, rectæ AB, cui æqualis est recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis est rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Similiter erit rectangulum CD, comprehensum sub tota AB, & segmento CB. Quare cum rectangula AF, CD, æqualia sint quadrato AD, perspicuum est, rectangula

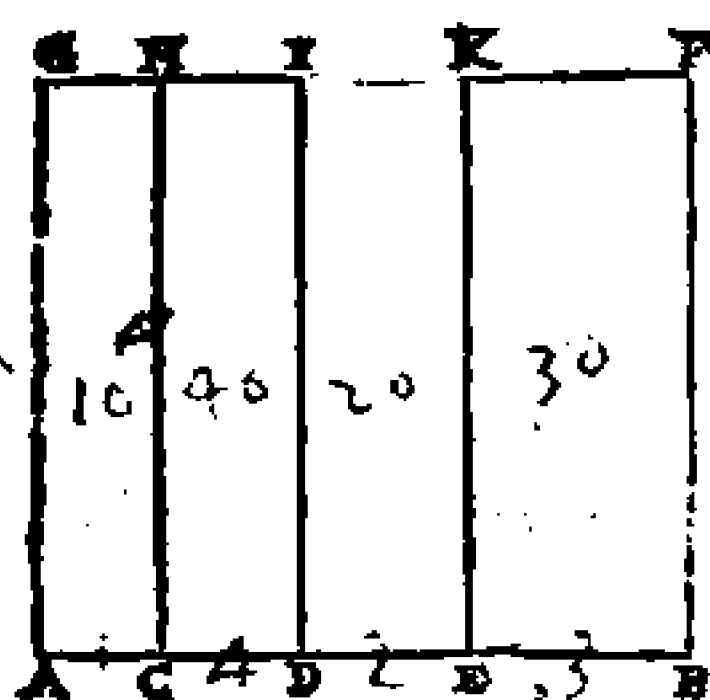
comprehensa sub AB, & segmentis AC, CB, æqualia esse quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ AB. Quoniam igitur AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub infecta D, & recta AB, hoc est, quadratum rectæ AB, æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, infecta, hoc est, sub AB, & singulis segmentis AC, CB. quod est propositum.



b 1. secund.

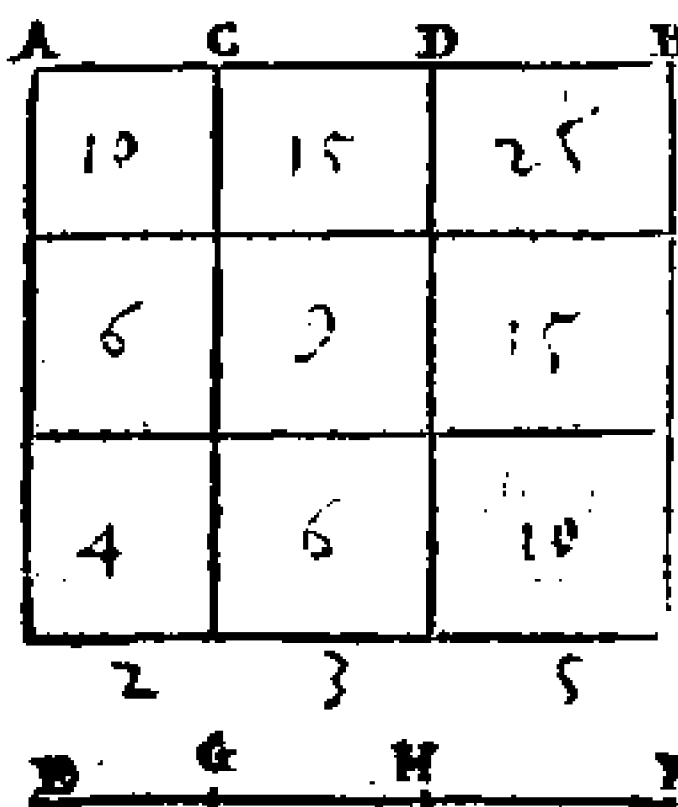
SCHOLIUM.



QUAERITUR An Euclides secundum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodo partes vtcunque, idem tamen eisdem medijs demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunque partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris vero idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales esse 100. quadrato ipsius numeri 10. vt manifestum est. Simili modo, si numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. generati ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.

SIMILITER modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

Si linea recta secetur in quotcunque segmenta: Quadratum, quod à tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur rectangulis.



Si recta AB, diuisa in partes quotcunque AC, CD, DB. Dico quadratum ex AB, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus AC, CD, DB, & quolibet segmentorum AC, CD, DB, comprehenduntur: hoc est, rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB, comprehensis. Sumpta enim recta EF, quæ æqualis sit ipsi AB, diuisa que in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, æquales. Erit ex his, quæ ad propositionem primam huius libri, demonstrauimus. rectangulum sub AB, EF, hoc est, quadratum ipsius AB, æquale rectangulis sub AC, EG; AC, GH; AC, HF: CD, EG: CD, GH: CD, HF: DB, EG: DB, GH: DB, HF. Cum igitur partes AC, CD, DB, partibus EG, GH, HF, sint æquales: erit quoque quadratum ex AB, æquale rectangulis sub AC, AC; AC, CD: AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD: DB, DB. Quod est propositum.

IN numeris idem est manifestum. Sit enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis huic noui numeri 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perspicuum est.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

Si recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.

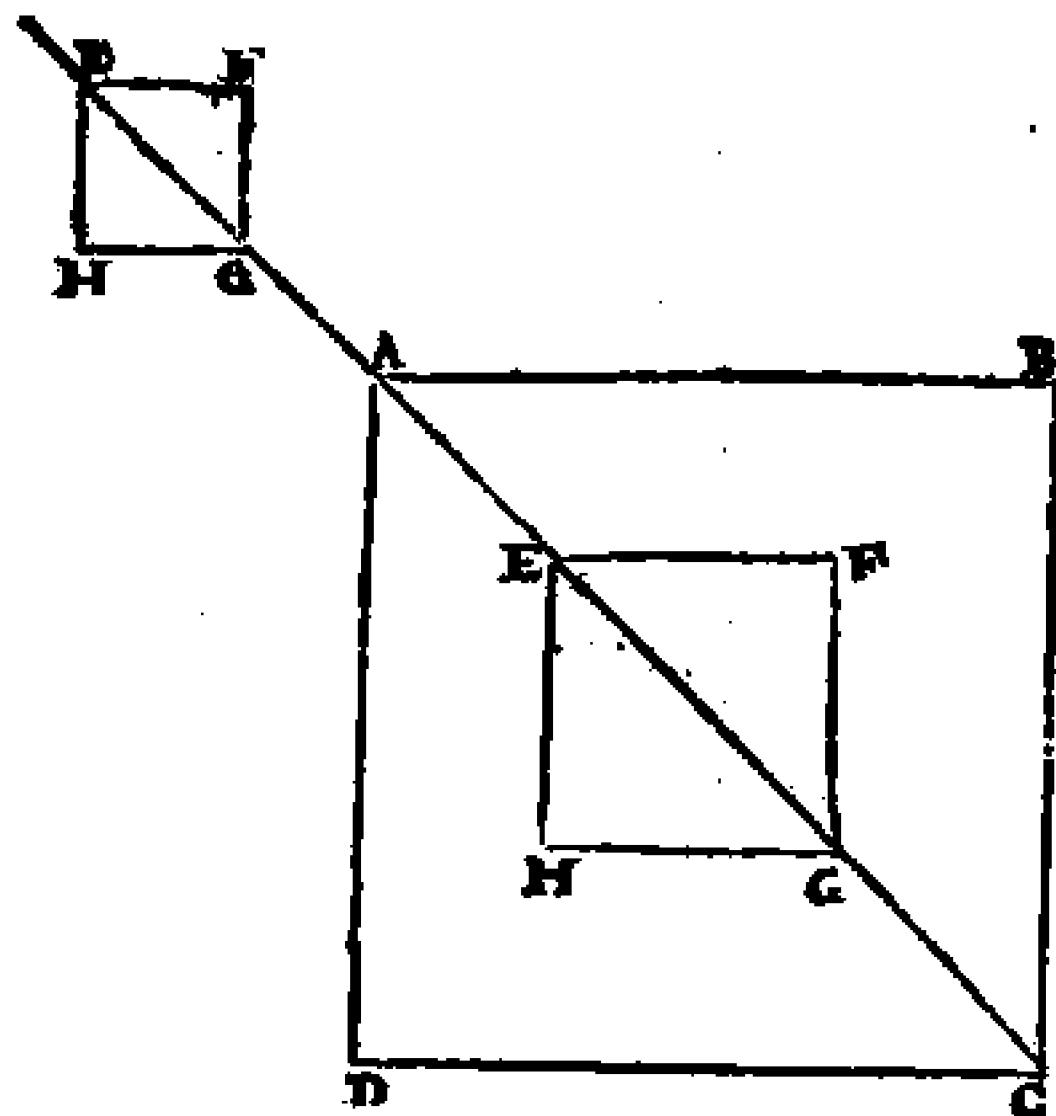
LINEA recta AB, diuisa sit vtcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & vtriusque segmento, vt AC, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehenso, & quadrato prioris segmenti, assumpti AC. Constituatur enim quadratum dicti segmenti AC, quod sit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipsi

segmenti AC: Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, AC, comprehenso, & quadrato segmenti CB. Igitur quadratum rectæ AB, æquale etiam est quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulis sub AC, CB, & sub CB, AC. Quod est propositum.

COROLLARIUM I.

Hinc manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

CONSTR. hoc ex prioribus theorematibus demonstratione, in qua ostensum est, rectangula CI, FH, quæ sunt circa diametrum BE, esse quadrata. In omnibus enim aliis quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammīs circa diametrum quadrati, quæ communem



aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma CI, FH. Illud enim angulum habet ABD, communem cum quadrato, hoc vero angulum AED. Idem nihilominus verum est de quibuscunque parallelogrammīs circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamvis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum AC, quadrati BD, consistat parallelogrammum FH, siue intra quadratum, siue extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati BD, parallela. Dico FH, esse quadratum. Cum enim parallela sint AB, EF, erunt anguli BAC, FEG, æquales, interni, & externi: atque eadem ratione anguli BCA, FGE, æquales erunt: Sunt autem anguli BAC, BCA, semirecti, ut ostensum iam fuit. Igitur & anguli FEG, FGE, semirecti erunt: ^b proptereaq; late-

a 29. primi.

b 6. primi.

c 32. primi.

d 34. primi.

ra EF, FG, illis opposita, æqualia, ^c & angulus F, rectus. Quare cum EF, FG, latera ^d æqualia sint oppositis lateribus GH, HE, æquilaterum erit parallelogrammum FH: Sed & rectangulum est, ex his, quæ ad definitionem: huius libri ostendimus, propterea quod angulus vnus F, rectus est demonstratus. Igitur FH, quadratum erit. Quod est propositum.

COROLLARIUM II.

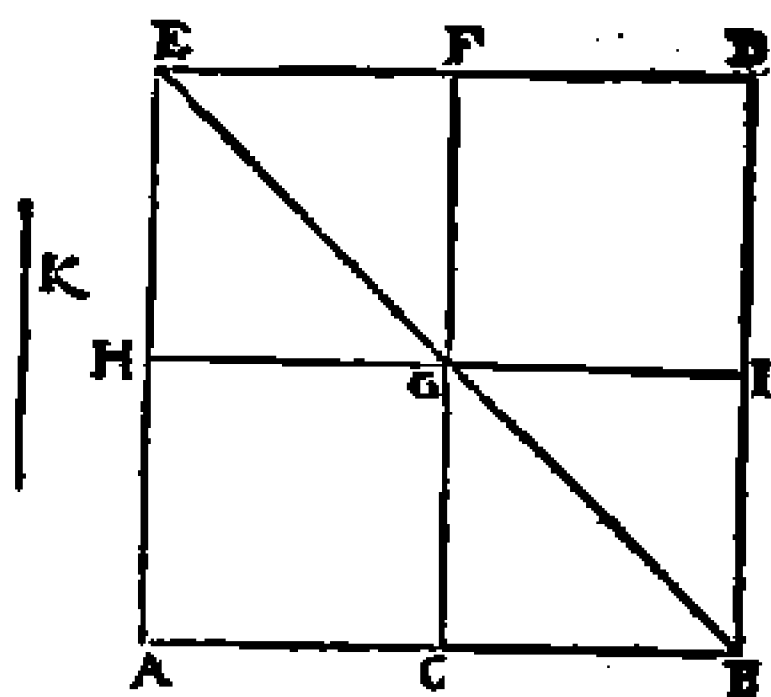
SEQVITVR etiam ex demonstratione huius propof. 4. diametrum cuiusvis quadrati dividere eius angulos bisariam. Probatum enim fuit, angulos AEB, DEB, esse semirectos, &c. Id quod etiam ad propof. 34. lib. 1. demonstravimus.

SCHOLIUM.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. diuisus vtrunque in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale esse 49. & 9. quadratis partium 7. & 3. vna cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis sumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PERFACILE autem erit ex hoc theoremate 4. demonstrare hoc aliud theorema.

SI linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptum, quadruplum est quadrati ex hac descripti. Et si quadratū quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum est lateris huius.



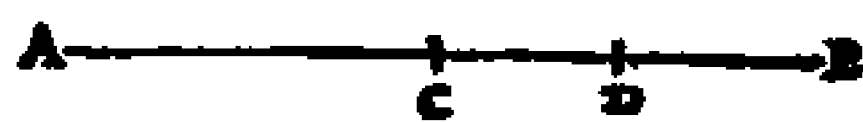
SI T enim primum linea AB, dupla linea K. Dico quadratum rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ K. Nam diuisa AB, bisariam in C, si fiat constructio, ut in 4. hoc theoremate, erunt 4 parallelogramma AG, CI, IF, FH, quadrata, atq; inter se æqualia, cum omnia eorum latera sint æqualia, omnesq; anguli recti, ut facile demonstrari potest ex propositione 34. libri 1. Quare cum quadratum AD, æquale sit quatuor quadratis AG, CI, IF, FH, erit quadratū linea AB, quadruplum quadrati lineæ AC, hoc est, lineæ K, quæ æqualis est ipsi AC. Est enim vtraque dimidium lineæ AB.

BREVIVS. ^a Quadratum rectæ AB, æquale est quadrati rectæ.

c 4. secūdi.

rum AC, CB, & rectangulo sub rectis lineis AC, CB, bis comprehenso. Cum igitur quadrata rectarum æqualium AC, CB, æqualia sint; & rectangulum sub æqualibus AC, CB, quadratum quoq; sit, atq; æquale quadrato rectæ AC; Constat quadratum rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ AC; cum æquale sit quatuor quadratis, quorum vnumquodque quadrato rectæ AC, æquale est.

SI T deinde quadratum rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus AB, duplum esse lateris K. Nam diuisa recta AB, bisariam in C, ut AB, dupla sit ipsius AC: erit, ut iam demonstratum est, quadratum rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ AC: Ponitur autem & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur æqualia



b3. secūdi.

c. l. secūdi.

d 5. secūdi.

E contrariò reperiemus numerum quadratum, à quo si datus quivis numerus subtrahatur, reliquus fiat numerus quoque quadratus. Nam si ad datum numerum adiciatur 1. erit dimidium compositi numeri latus quadrati quaesiti. Vt si rursus numerus 15. datus sit. Addita 1. erit compositi numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quaesiti. Si enim demas datum numerum 15. reliquus fiet quadratus numerus 49. cuius latus 7. perpetuò minus est vna unitate, quàm latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perspicua quoque est ex eadem figura huius propos. 5. Nam si rectangulum AH , quod ex quadrato CF , ablatum relinquit quadratum KG , statuatur 15. sicut datus numerus; & quadratum DI , ponatur 1. atque adeò & DB , eius latus 1. erit tota AB , 16. & eius dimidium CB , 8. & c.

6.

* 34. primi.

636. primi.

c 43. primi.

circa cūm gnomon MNO , & quadratum KG , quadrato CE , sint æqualia: erit & rectangulum AI , vnā cum eodem quadrato KG , eidem quadrato CE , æquale. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

a 4. secūdi.

b 1. secūdi.

c 5. secūdi.

ALITER. Quia quadratū ex CD ,^a æquale est quadrato ex CB , BD , vnā cū rectangulo bis sub DB , CB , hoc est, quadrato ex CB , BD , vnā cū rectangulo sub BD , CE , & sub DB , AC : (sumpta AC , semel pro CB , qua illi æqualis ponitur.) Est autem rectangulis sub DB , AC : DB , CB : & sub DB , DB , (quod est quadratum ex DB ,)^b æquale rectangulum sub DB , & tota AD . Igitur quadratum ex CD , æquale est reliquo quadrato ex CB , vnā cum rectangulo sub DB , AD : Hoc est, rectangulum sub AD , DB , vnā cum quadrato ex CB , æquale est quadrato ex CD . Quod demonstrandum erat.

CÆTERVM si rem attentius considerare velimus, com-
periemus propositionem hanc 6. per precedentem 3. facillime posse
demonstrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitissimus, Mauricius
Brescius Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum disciplinarum in Academia Parisiensi
Professor, animaduertit. Sit enim recta AB , secta in C , bifariam, & ei addita recta quantacunque
 BD . Dico rectangulum comprehensum sub tota AD , composita, & adiecta BD , vnā cū quadrato di-
midia CB , æquale esse quadrato recte CD , ex dimidia, & adiecta composita. Addita namque recta
 AD , ex altera parte recte AE , qua adiecta BD , æqualis sit, erit recta ED , secta in C , æqualiter, & in B ,
inaqualiter, quod $E A$, $A C$, ipsi DB , BC , æquales sint. Recta quoque EB , recta AD , æqualis erit, quod $E A$, ipsi
 DB , sit æqualis, & AB , vtrique communis. ^c Rectangulum igitur sub partibus inæqualibus EB , BD , vnā cum
quadrato intermedia sectionis CB , hoc est, rectangulum sub AD , BD , vnā cum quadrato dimidia CB , æqua-
le erit quadrato dimidia CD , hoc est, quadrato recte ex dimidia CB , data recta AB , & ex adiecta BD , com-
posita. Quod est propositum.

SECTVM iam numerus 10. bifariā, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturq;
ei numerus 2. Vides igitur numerū 24. qui producit ex toto numero composito 12. in adiectum 2. vnā cum 25.
quadrato dimidia numeri, æquale esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

Ex hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis Arithmetice proportionalitatis, qua consi-
stet in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim AD , superet CD , magnitudine
 AC , hoc est, CB . & CD , superet BD , eadem magnitudine CB : habebunt tres lineæ AD , CD , BD , proportio-
nalitatem Arithmetice, quandoquidem prima AD , superat secundam CD , eodē excessu AC , siue CB , quo
secunda CD , tertiam BD , superat. Quare cum ostensum sit, rectangulum sub extremis AD , BD , vnā cū qua-
drato excessus CB , æquale esse quadrato lineæ mediæ CD : perspicue colligitur, in omni proportionalitate Ari-
thmetice trium linearū, rectangulum sub extremis contentum, vnā cum quadrato excessus, æquale esse qua-
drato lineæ mediæ. Semper enim tres lineæ Arithmetice proportionales ita inter se coniungi poterunt, vt cō-
stant vnā lineam bifariam diuisam, (qua nimirum æqualis sit excessui inter primā & tertiam) cui tertia,
siue minor addita sit in rectum, mediāq; composita sit ex dimidio excessus inter primā & tertiam, & ex ter-
tia. Vt patet, si tres recte sint data AD , CD , BD . Si namq; ex prima AD , abscindatur DC , æqualis mediæ, &
ex mediā hac DC , auferatur tertia DB , erit AB , (excessus inter primā & tertiam) secta bifariam in C , cūq;
addita tertia BD . Cum enim CB , excessus sit inter mediā CD , & tertiam BD , qui æqualis esse debet, ob
proportionalitatem Arithmetice, ipsi AC , nempe excessui inter primā AD , & mediā CD , erit necessa-
rio AB , secta in C , bifariam. Eademq; ratio est in alijs. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent
excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10.
vnā cum 9. quadrato excessus 3. æqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

d 6. secūdi.

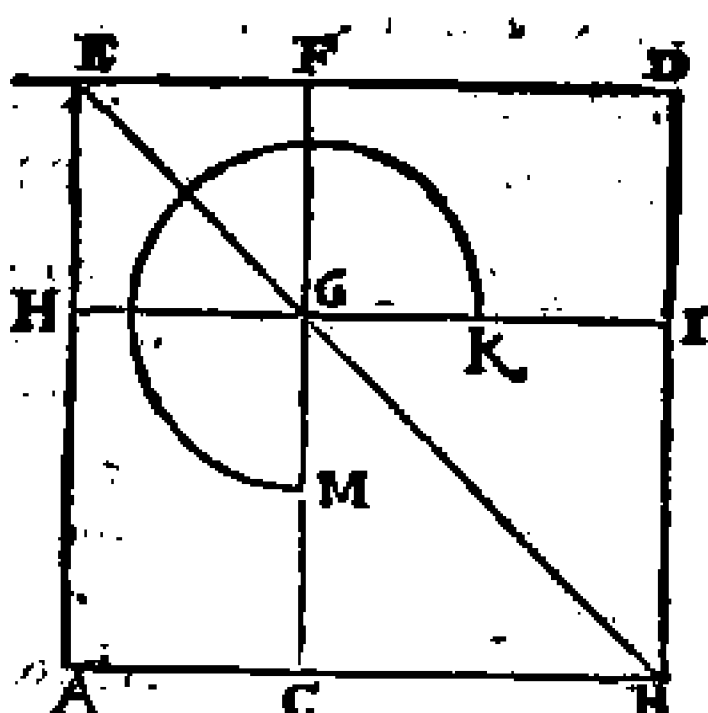
Ex hac etiam propos. 6. reperiemus, vt ex 4. propos. numerum quadratū, cum quo datus quiuus numerus
quadratum quoq; numerū componat. Nam si ex dato numero dematur 1. & reliquus numerus bifariam sece-
rur, erit quadratus huius dimidia 15. qui queritur. Vt si datus numerus sit 15. Dempta 1. relinquitur 14. cuius di-
midium 7. dabit numerum quadratū 49. queritum. Nam 15. cū 49. facit quadratū numerum 64. cuius latus
8. vna vnitate minus est latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifesta est ex hac 6. propos. Cum enim
rectangulum AI , cum quadrato KG ,^a æquale sit quadrato CE : si rectangulum AI statuatur 15. at quadra-
tum BI , ideoq; & latus BD , 1. erit tota linea AD , 15. vt nimirum multiplicata in BD , 1. producat rectangu-
lum AI , 15. Ablata igitur 1. BD , remanet AB , 14. cuius dimidium 7. dabit CB , latus quadrati KG , queriti.

NECESS E autem etiam hic est, datum numerum esse imparem, vt fracti numeri videntur, vt videlicet
dempta 1. bifariam possit diuidi.

VERS A vice inueniemus numerū quadratū, à quo datus numerus detractus quadratū etiam numerum
relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1. & reliqui numeri dimidio adiciatur rursus 1. conficietur latus
quadrati queriti. Vt si datus sit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus
quadrati queriti 8. Nam si ex eius quadrato 64. subducas datum numerum 15. reliquus erit quadratus nu-
merus 49. cuius latus 7. semper vna vnitate minus est latere inuento 8. Ratio est, quia si rectangulum AI , quod
ex qua-

7.

7.



434. primi.

SCHOLIVM.

24. fecundi.

b 3. secūdi.

EX FEDERICO COMMANDINO.

qua GE , reliqua DC , equalis erit: Ac proinde, cum & IE , ipsi DC , sit equalis, erunt GE, IE , aequales: ideoque IG , quadratum erit ab excessu DC , descriptum. Quoniam verò rectangula AI, DH , continentur sub paribus AC, CB , (Est enim AC , utrique linea AF, DB , & CB , utrique AD, BH , equalis) manifestum est, qua-

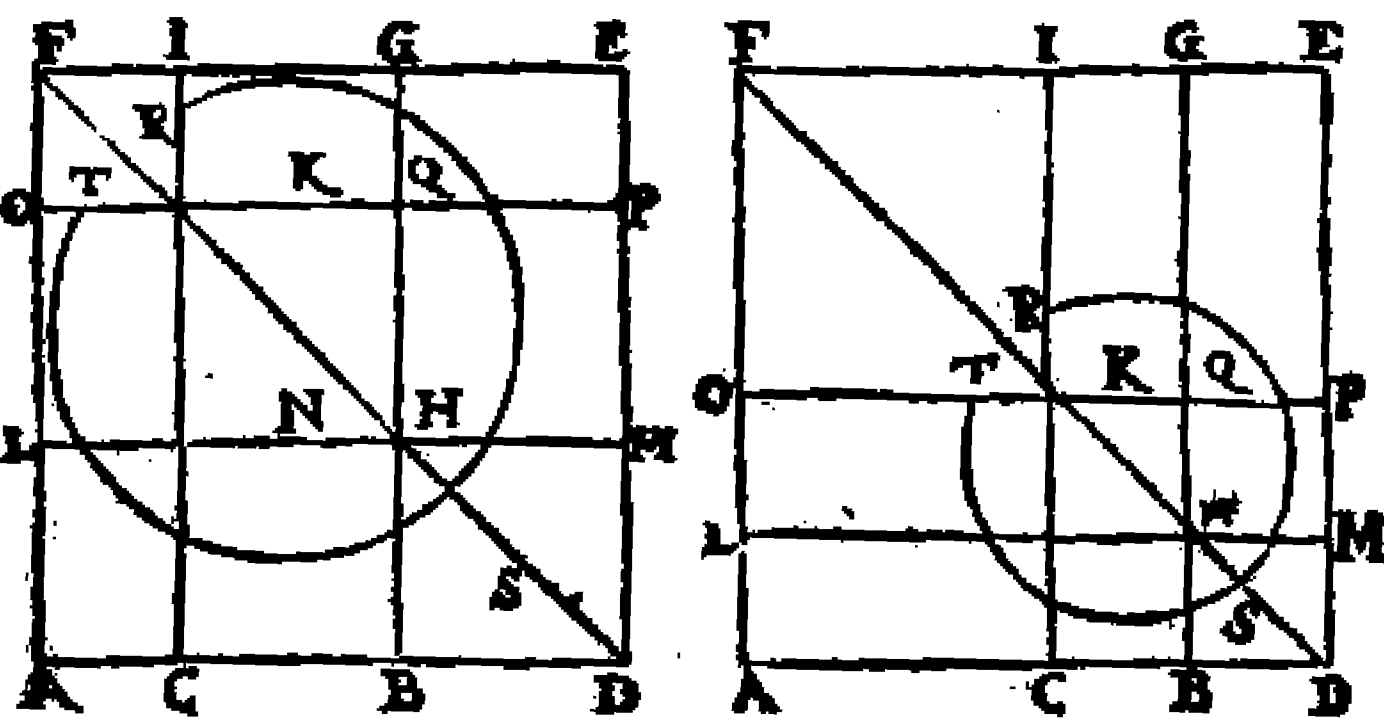
drasa $\Delta E, CH$, partium AC, CB , aequalia esse rectangulis AI, DH , quae continentur sub partibus AC, CB , vna cum quadrato IG , excessus DC . Quod est propositum.

S C H O L I V M.

In numeris. Secetur numerus 10. inaequaliter in 4. & 6. ita ut maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. aequales esse numero 24. qui ex 4. in 6. fit, bis sumpto, vna cum 4. quadrato excessus 2. ut volebat theorema.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

Si recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.



Si T recta AB , in C , diuisa vtcunque. Dico rectangulum quater comprehensum sub AB , & segmento siue maiore, siue minore CB , vna cum quadrato reliqui segmenti AC , æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta AB , & dicto segmento CB , componitur. Producat enim AB , versus dictum segmentum CB , ad D , fitq; BD , recta æqualis segmento CB ; & super tota AD , quadratum describatur AE .

a 34. primi.

b 34. primi.

c 34. primi.

d 34. primi.

Dræta autem diametro DE , ducantur BG, CI , parallele ipsi DE , secantes diametrum in H, K , punctis, per quæ ducantur LM, OP , parallele ipsi AD , quæ fecerint priores parallelas in N, Q . Erunt igitur per corollarium 1, propof. 4. huius lib. OI, NQ, BM, LG, CP , circa diametrum DE , quadrata. Et quia OK , æqualis est rectæ AC , erit OI , quadratum segmenti AC . Rursus quia NH , æqualis est rectæ CB , erit NQ , quadratum segmenti CB , ideoq; quadrato BM , æquale, cum rectæ CB, BD , æquales sint. Quare rectæ BH, HQ , æquales sunt segmento CB ; atque adeo duo rectangula AH, LQ , comprehensa erunt sub AB , & segmento CB , cum LH , sit æqualis rectæ AB . Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE , comprehensa sub AB , & CB , cum NH, HM , rectæ æquales sint rectis CB, BD ; & rectæ GH, EM , rectæ FL , hoc est, rectæ LH , hoc est, rectæ AB . Et quia quadrata NQ, BM , æqualia sunt; si addatur commune KG , erunt BM, KG , simul æqualia rectangulo NG . Quapropter quinque rectangula AH, LQ, HE, BM , & KG , gnomonem RST , componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB , & segmento CB . Cum igitur gnomon RST , & quadratum OI , æqualia sint quadrato AE ; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB , & segmento CB , vna cum quadrato reliqui segmenti AC , æquale quadrato lineæ AD , compositæ ex AB , & dicto segmento CB . Quamobrem, si recta linea secetur vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I V M.

a 4. secundi.

b 7. secundi.

ALITER. Quia quadratum ex AD , æquale est quadrato ex AB, BD , vna cum rectangulo sub AB, BD , bis, hoc est, quadrato ex AB, BC , vna cum rectangulo bis sub AB, BC ; At quadrata ex AB, BC , æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC , vna cum quadrato ex AC ; Erit quadratum ex AB , æquale rectangulo quater sub AB, BC , vna cum quadrato ex AC . Quod demonstrandum erat.

SECETUR iam numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numerus 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. ut constat. Eodem modo, numerus 140. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. ut perspicuum est.

POTEST propositio hac & ita etiam proponi.

Si linea recta secetur vtcunque, eique in rectum adiciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta siue dicto segmento, vna cū quadrato alterius segmenti.

NAM recta AB , secata est in C , vtcunque, eiq; adiecta BD , segmento CB , æqualis, demonstrandumq; est, quadratum totius AD , æquale esse rectangulo quater comprehenso sub data linea AB , & adiecta BD , siue dicto segmento CB , vna cum quadrato alterius segmenti AC .

Item sic.

Si linea recta secetur bifariam, eiq; in rectum adiciatur recta alia quaterunque. Quadratum

dratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & sub dimidia, vnâ cum quadrato adiectæ.

NAM recta DC, secta est bisariam in B, eiq; addita CA, probatumq; fuit, quadratum totius AD, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub AB, composita ex BC, dimidia, & adiecta AC, & sub dimidia CB, vnâ cum quadrato adiectæ AC.

Item verò ex hac quoque propositione 8. inueniemus aliam rationem numerum quadratum, cum quo datus quilibet numerus conficiat numerum similiter quadratum. Nam si ex quarta parte numeri dati dematur 1. reliquum erit latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 32. Tollatur 1. ex eius quarta parte 8. Reliquum enim numerus 7. dabit quadratum 49. cum quo datus numerus 32. efficit quadratum 81. Cuius latus 9. est semper vna vnitate minus quarta parte dati numeri. Facili est huiuscere ratio. Quoniam enim rectangulum AH, quater sumptum, cum quadrato OI, æquale est quadrato AE. si rectangulum AH, ponatur 2. nempe quarta pars dati numeri, at verò quadratum CH, adeoq; & CB, eius latus, 7. erit linea AB, 8. vt ducta in CB, 1. faciat 8. Ablata ergo 1. reliquum erit AC, latus quadrati OI, 7. quod queritur.

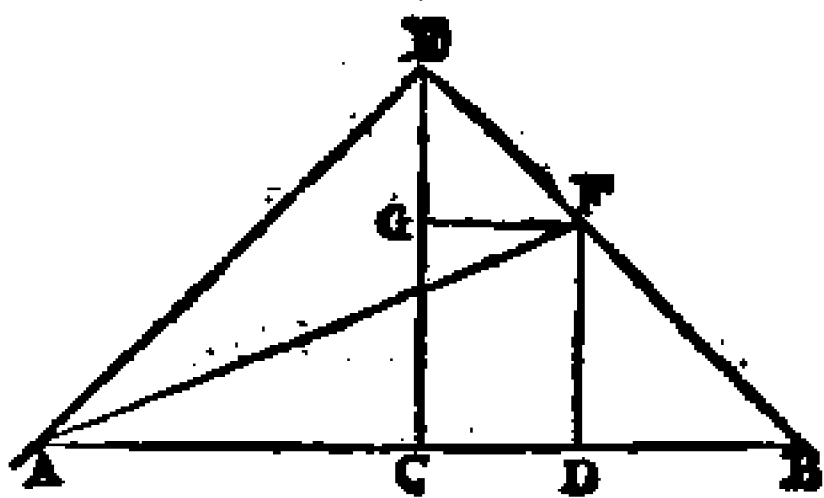
Vt autem fractiones vitentur, necesse est, datam numerum diuidi posse in quatuor partes æquales, ita vt à 4. numeretur.

CONTRA, inueniemus quoque numerum quadratum, à quo datus numerus subtractus relinquat numerum etiam quadratum. Si namque ad quartam partem numeri dati addatur 1. constabitur latus quadrati quæsiti. Vt si datus rursus sit numerus 32. si ad quartam eius partem 8. adiciatur 1. fiet latus 9. à cuius quadrato 81. si detrahatur datus numerus 32. remanebit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper est vna vnitate minus quarta parte dati numeri. Ratio est, quia si quarta pars gnomonis RST, qui ex quadrato AE, sublatu relinquit quadratum OI, hoc est, si rectangulum AH, quod gnomoni RST, quartam partem esse demonstrauimus, statuatur 8. quarta pars dati numeri 32. at quadratū BM, adeoq; & latus eius BD, 1. erit linea AB, 8. vt dictum est, at proinde totum latus AD, 9. ex cuius quadrato AE, quod est, 81. si auferatur gnomon RST, quem posuimus esse 32. reliquum fiet quadratum OI, 49. cuius latus AC, est 7. quandoquidem AB, erat 8. & CB, hoc est, BD, illi æqualis, 1. quod quidem latus AC, perpetuò vna vnitate minus est quarta parte numeri dati 32. vt dictum est.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt, & eius, quod à dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.



SECTVR recta AB, bisariam in C, & non bisariam in D.

Dico, quadrata segmentorum inæqualium AD, DB, simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia AC, & ex intermedia sectionum CD. Educatur enim ex C, ad AB, perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB; ducanturque rectæ EA, EB. Deinde ex D, ducatur quoque ad AB, perpendicularis DF, secans EB, in puncto F, per quod ducatur FG, parallela ipsi AB, secans CE, in G, ducaturq; tandem AF. Quoniam igitur in triangulo ACE, latera CA, CE, æqualia sunt; erunt anguli CAE, CE A, æquales: Est autem angulus ACE, rectus: Reliqui igitur anguli alium re-

45. prim.
632. prim.

ctum facient, ideoq; AEC, semirectus erit. Eadem ratione angulus BEC, semirectus erit: ac propterea totus AEB, rectus. Rursus, quia trianguli FGE, angulus EGF, æqualis est recto ECB, externus interno; erunt reliqui duo anguli vni recto æquales. Ostensum autem est, angulum FEG, esse semirectum. Igitur & EFG, semirectus erit, proptereaque anguli EFG, FEG, æquales erunt, ideoque & latera EG, GF, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse æqualia. Nam angulus FDB, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE, angulus C, rectus sit, erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum AC, CE: Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia, quod & lineæ AC, CE, æquales sint. Igitur quadratum lateris AE, duplum erit quadrati lateris AC. Rursus quia in triangulo EGF, angulus G, rectus est, erit quadratum lateris EF, æquale duobus quadratis laterum EG, GF: At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum EG, GF. Igitur quadratum lateris EF, duplum erit quadrati lateris FG, hoc est, quadrati lineæ CD. Est enim CD, recta rectæ FG, æqualis cum CF, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum AE, EF, dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum AC, CD: Sunt autem duo quadrata rectarum AE, EF, æqualia quadrato rectæ AF, & quadratum rectæ AF, æquale duobus quadratis rectarum AD, DF. Igitur & duo quadrata rectarum AD, DF, dupla sunt duorum quadratorum rectarum AC, CD: Atqui quadratum rectæ DF, æquale est quadrato rectæ DB. Ostensum

29. prim.

32. prim.

6 prim.

47. prim.

47. prim.

34. prim.

47. prim.

enim est, rectas DF, DB , esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum AD, DB , segmentorum inæqualium dupla sunt quadratorum rectarum AC, CD , dimidiæ lineæ, & intermediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

a 4. secūdi.

B

b 7. secūdi.

D

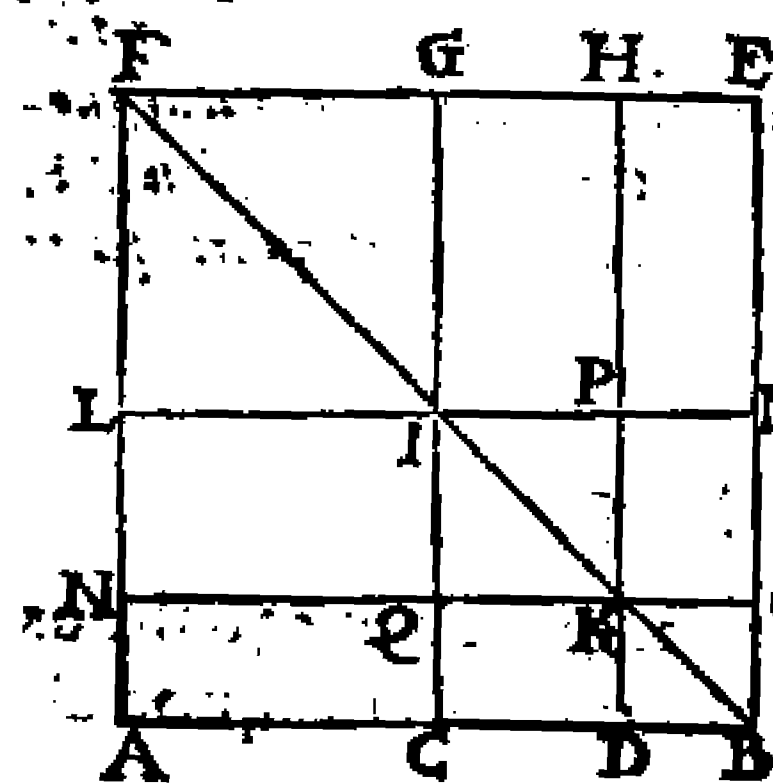
c 4. secūdi.

A

ALITER. Quia quadratum ex linea recta AD , descriptum, æquale est quadratis descriptis ex AC, CD , una cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis AC, CD , comprehenso: si continue apponatur quadratum ex DB , erunt duo quadrata ex AD, DB , equalia tribus quadratis ex AC, CD, DB , una cum rectangulo bis sub AC, CD , vel sub BC, CB . Atqui quadrato ex DB , una cum rectangulo bis sub BC, CD , equalia sunt quadrata ex BC , seu AC , & ex CD . Quadrata igitur ex AD, DB , equalia sunt bis quadratis ex AC, CD : Ac propterea quadrata ex AD, DB , dupla sunt quadratorum ex AC, CD . Quod ostendendum erat.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam AC , ipsi CB , equalis est, & superat CB , ipsam CD , recta DB : superabit quoque AC , ipsam CD , eadem recta DB . Quare, ut ad 7. propos. huius libri demonstramus, quadrata rectarum AC, CD , equalia sunt rectangulo sub AC, CD , bis, una cum quadrato rectæ DB : Ac propterea quadrata rectarum AC, CD , & rectangulum sub AC, CD , bis, una cum quadrato rectæ DB , dupla sunt quadratorum ex AC, CD : Sed quadratis rectarum AC, CD , una cum rectangulo sub AC, CD , bis, est æquale quadratum rectæ AD . Igitur & quadrata rectarum AD, DB , dupla sunt quadratorum ex AC, CD .

Item vero rursus numerus 10. diuidatur aequaliter in 5. & 5. Itē inæqualiter in 7. & 3. ut sit intermedia sectio numerus 2. cuius in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inæqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, ut manifestum est.



d 34. primi.

Quod si libeat, demonstrabimus & hanc 9. proposit. ex ipsa constructione, ut precedentes, hoc modo. Describo quadrato AE , totius lineæ AB , ductaq; diametro BF , ducantur per C, D , lateribus AF, BE , parallela CG, DH , secantes diametrum BF , in punctis I, K , per quæ lateribus AB, FE , parallela agantur LM, NO secantes CG, DH , in Q, P . Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius libri quadrata sunt LG, QP, DO, CM, NH , estq; LI , ipsi AC , & QK , ipsi CD , & NK , ipsi AD , equalis: erunt NH, DO , quadrata partium inæqualium AD, DB , & LG, QP , quadrata dimidiæ lineæ AC , & intermedia sectionis CD . Dico illa horum esse dupla. Quoniam enim quadrata NH, DO , superant quadrata LG, QP , quadrato DO , & rectangulo NI, IH . Sunt autem quadratum DO ,

e 36. primi.

f 34. primi.

g 36. primi.

h 34. primi.

i 34. primi.

k 36. primi.

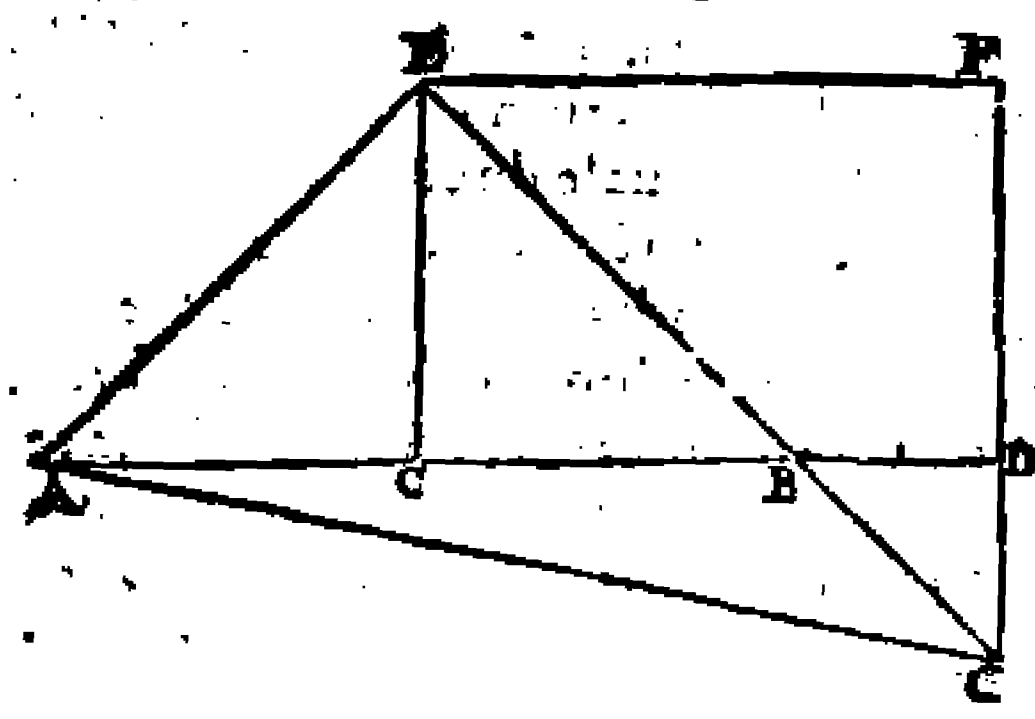
l 34. primi.

& rectangula NI, IH , equalia quadratis LG, QP , ut mox demonstrabitur: liquidò constat, quadrata NH, DO , quadratorum LG, QP , esse dupla, cum hæc bis in illis contineantur. Quod autem tria hæc rectangula DO, NI, IH , equalia sint quadratis LG, QP , ita ostendetur. Rectangulum NI , æquale est rectangulo QM , quod recta NQ, QO , æquales sint equalibus AC, CB . Igitur NI , complectitur quadratum QP , & insuper EM . Si ergo KM, DO, IH , equalia sint quadrato LG , erunt necessario DO, NI, IH , equalia duobus quadratis LG, QP . Esse autem KM, DO, IH , equalia quadrato LG , sic demonstrabimus. Rectangula KM, DO simul equalia sunt ipsi PE , quod recta BM, ME , æquales sint, cum BM , equalis sit ipsi CB , ob quadratum CM , & ME , ipsi FL , hoc est, ipsi BI , ob quadratum LG , hoc est, ipsi AC . Adde ergo communi IH , erunt KM, DO, IH , equalia ipsi IE , hoc est, quadrato LG : quod IE, LG , equalia sint, ob rectas LI, IM , quæ equalibus AC, CB , æquales sunt. Quod est propositum.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

10.

Si recta linea secetur bifariam, adiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, utraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod à composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab una, descriptum sit, quadrati.



a 29. primi.

SECTVR recta AB , bifariam in C , & ei in rectum addatur BD . Dico duo quadrata rectarum AD, BD , simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis AC, CD , describuntur. Super AB , enim ex C , erigatur perpendicularis CE , quæ sit æqualis dimidiæ AC , vel CB , & iungantur rectæ AE, EB . Per D , deinde educatur DE , ipsi CE , parallela, occurrens rectæ EB , protractæ in G : & per E , ducatur rectæ CD , parallela EF , secans DE , in F , iungaturque recta AG . Ostendetur iam, angulum AEB , esse rectum, ut in precedenti propositione, & CEB , semirectum: ideoque eius alternum EGF ,

E G F, semirectum quoque: ^a Est autem angulus E, rectus, cum in parallelogrammo C F, recto angulo C, opponatur. ^b Igitur & reliquus F E G, semirectus erit, & propterea ipsi E G F, æqualis. Quare ^c rectæ E F, F G, angulis F E G, E G F, oppositæ, æquales quoque erunt. Eadem arte ostendens, rectas B D, D G, esse æquales, propterea quod angulus B D G, sit rectus, & B G D, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, ^d æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium A G, O E: erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C. Rursus quia quadratum rectæ E G, ^e quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F G, æquale est: erit quoque quadratum rectæ E G, duplum quadrati rectæ E F, hoc est, rectæ C D, ^f cum C D, recta æqualis sit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G, æquale est quadratum rectæ lineæ A G: & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis A D, D G, describuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum. Cum igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D: erunt quoque quadrata rectarum A D, D B, dupla quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

S C H O L I V M.

ALITER. Quia quadratum ex A D, ^a æquale est quadratis ex A C, C D, una cum rectangulo bis sub A C, C D, vel sub B C, C D: si commune addatur quadratum ex B D, erunt duo quadrata ex A D, B D, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, B D, una cum rectangulo bis sub B C, C D. ^b Sed quadrato ex B D, una cum rectangulo bis sub B C, C D, æqualia sunt quadrata ex C D, B C, hoc est, quadrata ex A C, C D. Igitur quadrata ex A D, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C D, bis: Ac proinde quadrata ex A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D: Quod erat demonstrandum.

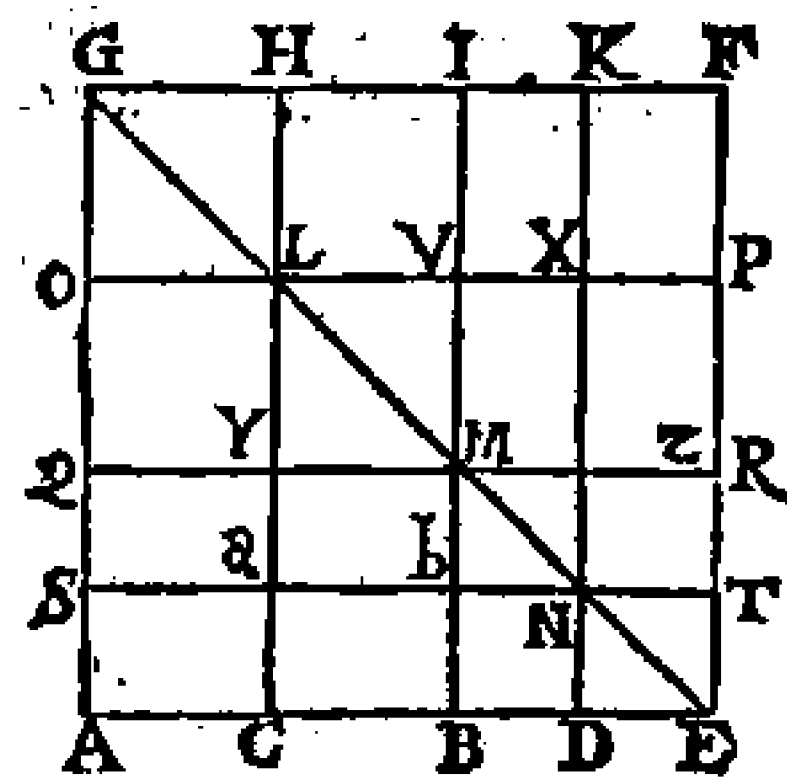
ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, est æqualis, & superat C D, ipsam C B, recta B D: superabit quoque C D, ipsam A C, eadem recta B D. Quare, ut ad 7 propos. huius libri ostendimus, quadrata ex A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, una cum quadrato rectæ B D: Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis, una cum quadrato rectæ B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D: Atqui quadratis rectarum A C, C D, una cum rectangulo sub A C, C D, bis, ^c æquale est quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.

NUMERVS 10. bifariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quini 3. ut totus numerus compositus sit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorum 13. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, ut perspicuum est.

SED & hac propos. 10. facile ex precedente 9. demonstrabitur, quemadmodum supra demonstrata sunt 6. ex 5. Sit enim recta A B, secta bifariam in C, eiq; addita recta quantacunque B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, simul dupla esse duorum quadratorum rectarum A C, C D;

simul. Addita namque recta A D, ad partes A, recta A E, que adiuncta B D, æqualis sit; erit tota E D, secta in C, bifariam, & in B, non bifariam, quod E A, A C, ipsi D B, B C, æquales sint. Recta quoque E B, recta A D, æqualis erit, quod E A, ipsi D E, sit æqualis, & A B, utrique communis. ^d Quadrata igitur rectarum E B, B D, hoc est, rectarum A D, B D, dupla erunt quadratorum rectarum E C, C B, hoc est, rectarum C D, A C, quod est propositum.

Q U O D si lubeat eandem hanc propositionem 10. demonstrare ex ipsa constructione, quemadmodum precedentem 9. ostendimus, fiet id hoc modo. Producta A D, ad E, ut D E, sit adiuncta lineæ B D, æqualis, describatur quadrato A F, totius lineæ A E, ducantur per C, B, D, lateribus A G, E F, parallele C H, B I, D K, secantes diametrum E G, in L, M, N, punctis, per quæ lateribus A E, G F, parallele agantur O P, Q R, S T, secantes

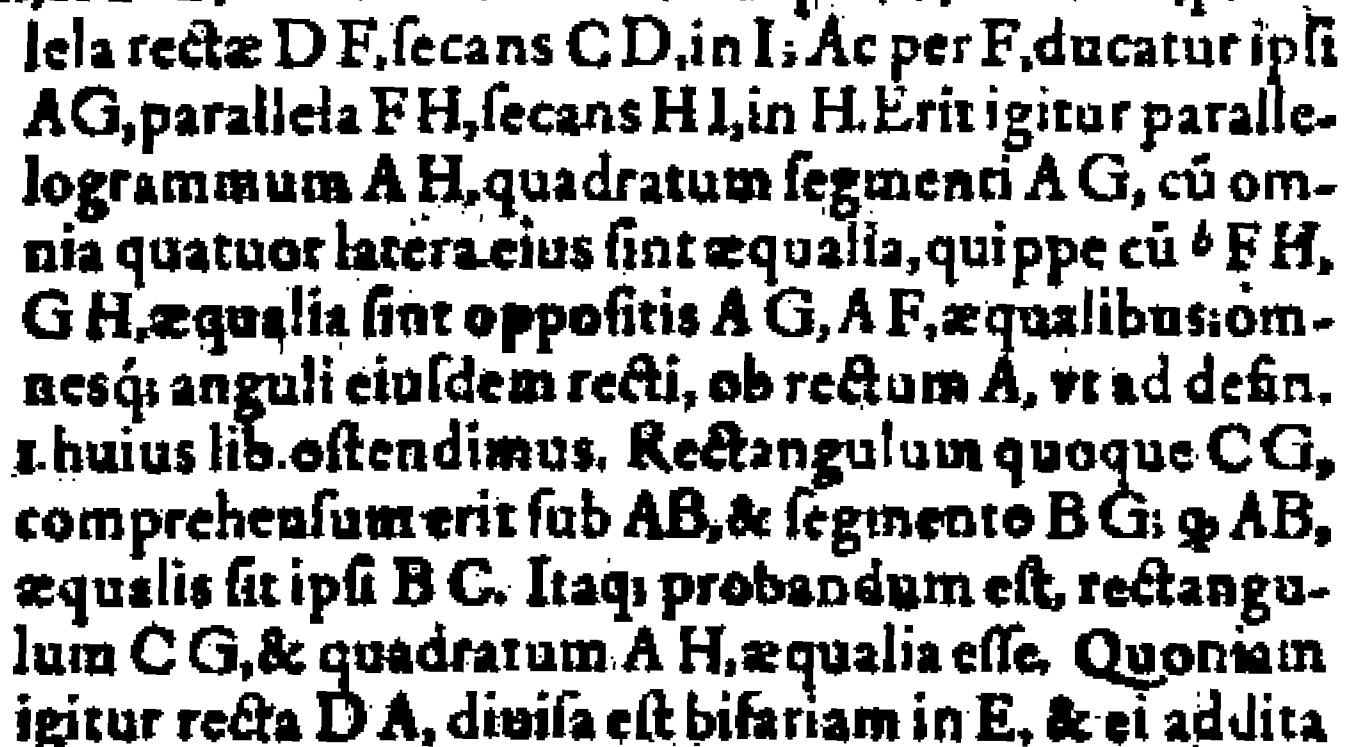


prioribus in V, X, I, Z, a, b. Quoniam igitur ex corollario 1. propos. 4. huius libri omnia rectangula circa diametrum E G, quadrata sunt, ^e estq; S N, ipsi A D, æqualis, & O L, ipsi A C, & a N, ipsi C D: erit S K, quadratum rectæ A D, & D T, quadratum rectæ D E, sine B D, & O H, a X, quadratum rectarum A C, C D. Dico quadrata S K, D T, simul dupla esse quadratorum O H, a X, simul. Quoniam enim quadrata S K, D T, superat quadrata O H, a X, quadrato D T, & rectangulo S L, L K: Sunt autem quadratum D T, & rectangula S L, L K, æqualia quadratis O H, a X, ut mox demonstrabitur: liquidum constat, quadrata S K, D T, quadratorum O H, a X, dupla esse, cum hac in illis contineantur bis. Quod autem tria hac rectangula D T, S L, L K, quadratis O H, a X, æqualia sint, ita patebit. Rectangulum Q L, ^f æquale est quadrato O H, ob lineas Q O, O B, quæ æquales sunt; & propterea quod Q O, ipsi

I L, æqualis est, & I L, ipsi O G, ob æqualia quadrata T V, O H, æqualium laterum O L, L V. Item ^h S T, ipsi a M, & L I, ipsi I V, & V K, ipsi V Z, & D T, ipsi b Z. Igitur quinque rectangula Q L, S T, L I, V K, D T, hoc est, tria rectangula D T, S L, L K, æqualia sunt quinque rectangulis O H, a M, I V, V Z, b Z, hoc est, duobus quadratis O H, a X. Quod est propositum.

II.

DATA sit recta AB, quam secare oportet in duas partes, ita ut rectangulum comprehensum sub tota AB, & altero eius segmento, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirum maioris. Describatur ex AB, quadratum AC, & diuiso latere AD, quod cum linea data AB, angulum rectum efficit, bisariam in E, tangatur recta EB, cui ex E A, producta æqualis sumatur EF, & ipsi AF, abscindatur ex recta AB, data æqualis AG. Est enim AB, maior, quam AF. Nam cum EB, sit æqualis ipsi EF, ex constructione: sint autem latera AE, AB, maiora latere EB, erunt quoque sectæ EA, AB, maiores recta EF: & proinde ablata communi AE, reliqua AB, maior erit, quam reliqua AF. Dico rectam AB, sectam esse in G, ita ut rectangulum comprehensum sub AB, BG, æquale sit quadrato rectæ AG, adeo ut AG, sit maius segmentum, & BG, minus. Ducatur enim per G, recta HI, paral-



6 *secūdi.* In rectum A F: erit rectangulum sub D F, F A, hoc est, rectangulum D H, (cūm F H, sit æqualis ipsi F A;) vñā cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc est, quadrato rectæ E B, quæ rectæ E F, æqualis est: Est autem quadratum rectæ E B, æquale quadratis rectarum A E, A B. Quare rectangulum D H, vñā cum quadrato rectæ A E, æquale quoq; est quadratis rectarum A E, A B. Dempto ergo communi quadrato rectæ A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc est, quadrato A C. Ablato igitur rursus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam A B, secimus, &c. Quod erat faciendum.

- . Hoc theorema nullatatione accommodari potest numeris. Non enim numerus vltus in duos potest nume-
ros diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partē equalis sit quadrato alterius partis, vt demonstra-
bimus ad propof. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius libri de numeris demonſtramus.
Clarior autem idem oftendimus ad propof. 29. eiuſdem lib. 9.

¶ *Præterea autem huiusce problematis non est difficile. Nam ad extremum A, ubi terminari debet maius segmentum lineæ datæ AB, excitata perpendiculari AD, ipsi datæ lineæ AB, æquali, eaq; secunda in E, bisariam; si ad intervallum EB, refeceretur EA, producta in F, erit AF, maiori segmento AG, æqualis, ut demonstratū est.*

THEOR. II. PROPOS. 12.

The image contains two separate geometric diagrams. The left diagram shows a horizontal line segment with points C, E, and B marked from left to right. A point A is located above this line. Lines are drawn from A to C, A to E, and A to B. The right diagram shows a point A on the left. Two lines extend from A to the right, ending at points B and D. A line segment connects B and D. A point C is located above the line segment BD, and a line segment connects A and C.

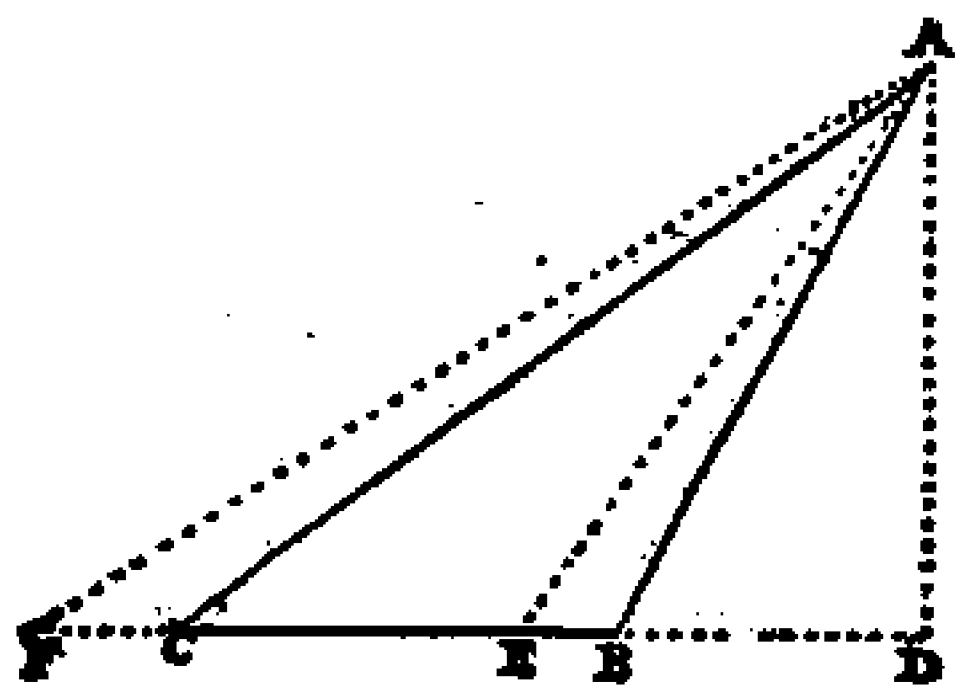
TRIANGVLVM ABC, ha
beat angulum ABC, obtru-
sum, & ex A, in latus CB, ad
partes anguli obtusi, pertractū
cadat perpēdicularis AD. Di-
co quadratum lateris AC, qđ
obtusō angulo opponit̃, ma-
ius esse quadratis laterū AB,
BC, rectangulo bis cōprehen-
so sub CB, BD, hoc est, qua-
dratum lateris AC, æquale es-
se duobus quadratis laterum

• 4. *secundi.* AB, BC, vnâ cū rectangulo sub CB, BD, bis cōprehenso. Cū n̄ recta CD, diuisa sit in B, vteunq; erit quadratū rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehēso bis

bis sub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD: Est autem quadratis rectarum CD, DA, æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Cum igitur quadratis rectarum BD, DA, æquale sit quadratum rectæ AB, erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Quod est propositum. In amblygoniis ergo triangulis, quadratum, quod sit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

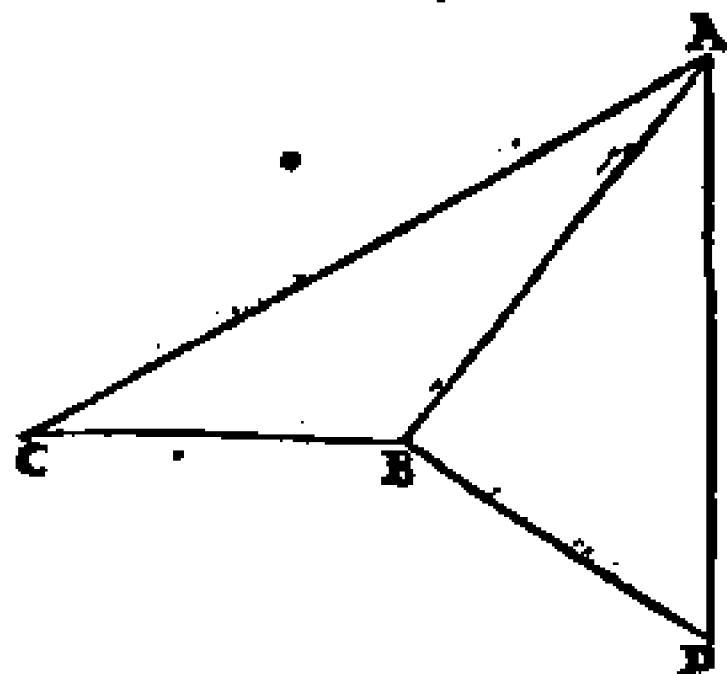
IA in hoc loco demonstrat Euclides, quanto maius sit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuso oppositi, quadratis aliorum duorum laterum: In sequenti autem propos. 13. ostendet, quanto quadratum lateris acuto angulo oppositi minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, ut ad initium scholij propos. 47. lib. 1. monuimus.



QUONIAM vero assumpto Euclides, perpendicularem ductam ex A, cadere in latere CB, ad partes anguli obtusi protractum, ideo paucis id demonstrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus ABC, obtusus, & latus CB, ad partes B, protractum. Dico perpendicularem ex A, ductam cadere extra triangulum in latus CB, protractum: cuiusmodi est recta AD. Si enim caderet intra triangulum, qualis est recta AE, essent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cum ille sit obtusus, hic vero rectus: Quod est contra propos. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latere CB, protractum ad partes C, qualis est recta AF, essent rursus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est absurdum.

SE D & hoc theorema verum est.

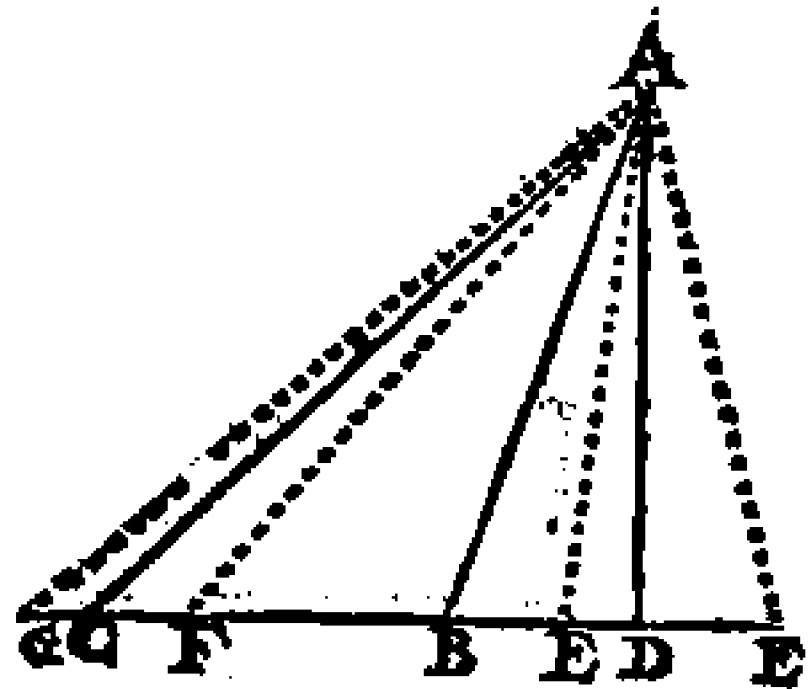
Si in triangulo quadratum unius lateris maius sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, obtusus erit.



IN triangulo ABC, quadratum lateris AC, maius sit quadratis laterum AB, BC. Dico angulum B, quem latus AC, subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad A, perpendicularis BD, linea BC, æqualis, innegaturq, recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD, æquale est quadratis ex AB, BD, hoc est, ex AB, BC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC: Erit quadratum ex AD, minus quadrato ex AC, & idcirco recta AD, minor, quam recta AC. Itaque quia latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus AB, BD, trianguli ABD, utrumque utrique; & basis AC, maior est base AD; Erit angulus ABC, maior angulo ABD: Sed ABD, rectus est. Igitur ABC, recto maior, & obtusus erit. Quod est propositum.

QUONIAM etiam conuersum huius propos. 12. demonstrabimus: nimirum.

Si in triangulo quadratum unius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriori linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.



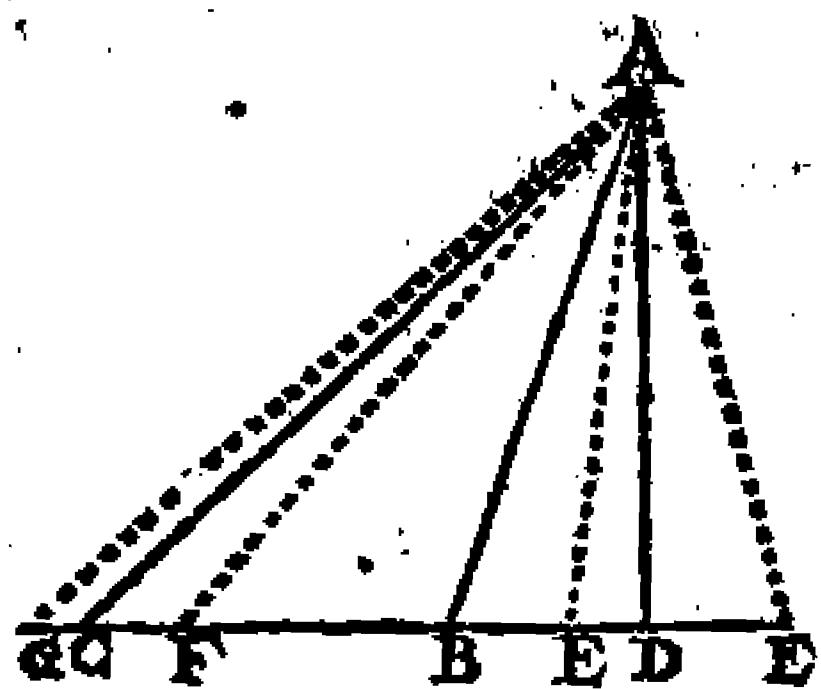
IN triangulo ABC, ad latus CB, protractum demittatur ex opposito angulo A, recta AD, sitq, quadratum lateris AC, maius, quam quadrata laterum AB, BC, rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Dico AD, ad CD, esse perpendicularem, & angulum ABC, obtusum. Si enim AD, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad CB, perpendicularis, quæ dico cadere necessario in CB, productam ad partes B. Cadat enim, si fieri potest, in B, ita ut AB, sit ad CB, perpendicularis. Erit igitur quadratum ex AC, æquale quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in CB, demissa in punctum B.

CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa in latus BC, qualis est AF. Erit igitur quadratum ex AC, æquale quadratis ex AF, FC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC. Igitur & quadrata ex AF, FC, maiora erunt quadratis ex AB, BC, quod est absurdum. Sunt enim quadrata ex AB, BC, maiora quadratis ex AF, FC, quod recta AB, recto angulo AFB, opposita maior sit, quam

AF, & BC, tota maior parte FC. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadit in CB.

247. primi. CADAT tercio, si fieri potest, perpendicularis ex A, ad latus BC, demissa, in C, ita ut AC, sit perpendicularis. Erit igitur quadratum ex AB, ^a aequale quadratis ex AC, CB, ac proinde quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB, & propterea multo minus quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad BC, demissa non cadit in C.

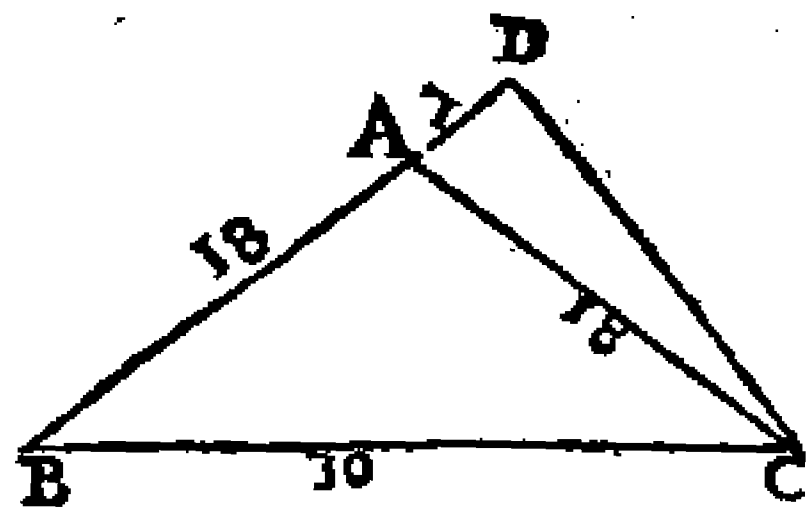
b 17. primi. CADAT quarto, si fieri potest, perpendicularis ex A, in BC, protractam ad partes C, qualis est AG. Quoniam igitur duo anguli AGC, ACG, ^b minores sunt duobus rectis, estq, AGC, rectus; erit ACG, minor recto, ac proinde ACB, obtusus. Recta ergo AB, ^c maior erit, quam AC, & propterea quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB; ac proinde multo minus quadratis, ex AB, BC: sed & maius ponitur, quod est absurdum. Cum ergo perpendicularis ex A, demissa ad CB, non cadat in B, neq, inter C, B, neq, in C, neq, extra C, cadet extra B, qualis est AD, ut demonstrabitur. Quare angulus ABE, ^d acutus erit, & ABC, obtusus, quod secundo loco proponitur demonstrandum. Caterum angulum ABC, esse obtusum, si quadratum recte AC, maius sit quadratis rectarum AB, BC, facilius demonstravimus in proximo theoremate huius scholii: ex quo fit, ut ad initium huius scholii ostensum est, perpendicularem ex A, ad CB, demissam cadere extra triangulum ad partes anguli obtusi.



Q U O D autem AD, sit ad CB, perpendicularis, ita demonstrabimus. Si non est, ducatur AE, ad CB, perpendicularis cadens ultra B, ut ostendimus. Quoniam igitur angulus ABC, ostensus est obtusus, erit quadratum recte AC, maius quam quadrata rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BE: sed & quadratum eiusdem recte AC, maius ponitur quam quadrata earundem rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD. Igitur quadrata ex AB, BC, una cum rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso aequalia erunt quadratis ex AB, BC, una cum rectangulo sub CB, BE, bis comprehenso: & ablati quadratis communibus rectarum AB, BC, rectangulum bis sub CB, BE, comprehensum aequale erit rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, ac proinde & rectangulum sub CB, BE, semel comprehensum aequale erit rectangulo semel sub CB, BD, comprehenso, & recta BE, recta BD, æqualis, pars toti, vel totum parti, quod est absurdum. Est ergo AD, ad CD, perpendicularis, & nulla alia, quod est propositum.

121. primi. I A M vero, quoniam neq, hoc duodecimum theorema, neq, sequens 13. per numeros, quando libet, explicari potest, quod posito vno latere trianguli quolibet partium aequalium, alia latera, eorumq, partes à perpendicularibus lineis facte p'erunque numeris exprimi nequeant, sed sint lineæ illi lateri incommensurabiles: quod in precedentibus propositionibus non accidebat, quippe cum posita diuisa recta linea quolibet partium aequalium, eius partes statui possint pro libito ei commensurabiles, ut in exemplis numerorum adhibitis factum est; prescribemus regulas quasdam, quibus Geometricè triacula amblygonia, atq, oxygonia (quotquot quis optaverit) constituentur eiusmodi, ut omnia latera, partesq, eorum à lineis perpendicularibus facta sint lineæ commensurabiles: atq, adeo veritas vtriusque theoremati in numeris quoq, appareat. Hic autem de amblygoniis triangulis agemus, & in scholio sequentis propositionis de Oxygoniis. Quoniam autem amblygonium triangulum est, vel isosceles, in quo tertium latus semper ^e maius est, quod obtuso angulo opponatur, vel scalenum, (æquilaterum enim esse non potest, ut ad defin. 27. lib. 1. diximus,) & in scaleno linea perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium isosceles laterum commensurabilium, in quo etiam segmentum vtriuslibet laterum aequalium producti inter perpendicularem, & angulum obtusum eisdem lateribus commensurabile sit. Secunda constituemus triangulum amblygonium scalenum laterum etiam commensurabilium, & in quo segmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtusum lateribus eisdem sit commensurabile. Tertia deniq, triangulum amblygonium scalenum proponemus commensurabilium laterum, & in quo segmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtusum angulum eisdem lateribus commensurabile existat.

REGULA I.

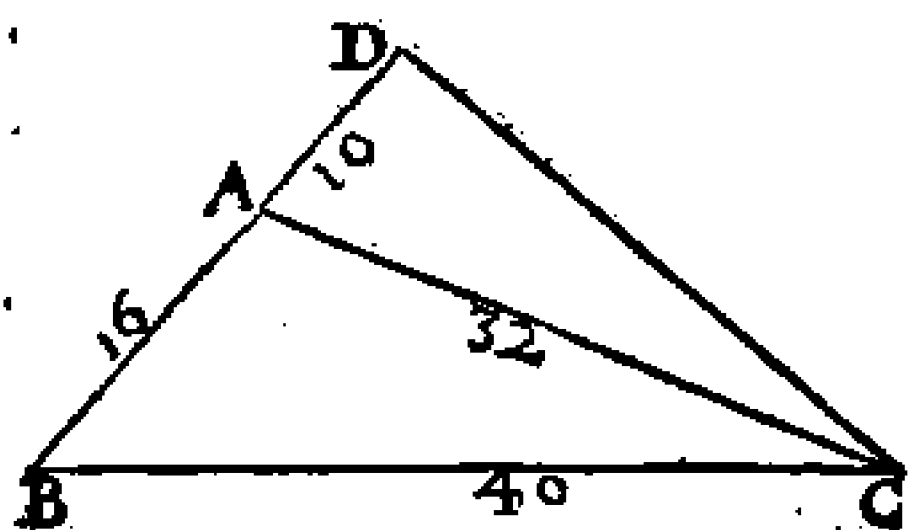


Ad construendum triangulum amblygonium isosceles laterum commensurabilium, in quo segmentum exterioris alterius laterum aequalium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtusum, eisdem lateribus quoque sit commensurabile: statuatur segmentum exteriorum tot partium aequalium, ut earum numerus à 7. numeretur, ut 7. vel 14. vel 21. vel 28. &c. Deinde vtrumvis laterum aequalium ponatur dicti segmenti duplum superquadrupartiens septimas, maximum autem obtuso angulo oppositum eiusdem segmenti quadruplum superbipartiens septimas. Ut in triangulo ABC, ducta sit CD, ad BA, latus productum. Si igitur AD, constituatur partium

7. & utrumvis laterum AB, AC , partium 18. qui numerus habetur, si duplicaueris 7. addideris $\frac{4}{7}$. ipsius: Lat-
tus vero BC , partium 30. quem numerum habebis, si quadruplicaueris 7. adiunxeris $\frac{2}{7}$. ipsius: erit trian-
gulum ABC , quod queritur. In hoc enim triangulo quadratum lateris BC , est 900. cui equalia sunt qua-
drata laterum AB, AC , nempe 324. 324. vna cum rectangulo bis comprehenso sub AB, AD , hoc est, cum 126.
126. Hec enim conficiunt quoque summam 900. Quam obrem, vt in hoc scholio ostendimus, erit ducta CD ,
ad BD , perpendicularis, & angulus BAC , obtusus. Quod si singulos numeros huius trianguli per quemlibet
numerum multiplices, procreabis alias lineas trianguli commensurabiles, prioribus tamen proportionales.
Vt si inuentos numeros duplices, efficies $AD, 14$. & tam AB , quam AC , 36. at BC , 60. Propositum quoque
triangulum reperies, statuendo segmentum exterius AD , quocunque partium, etiam si à 7. non numerentur:
sed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem denique triangulum offendes, statuendo latus
quodcunque, à quo incipere vis, quolibet partium, dummodo maximè fiat segmenti AD , quadruplum superbi-
partiens septimas, utrumvis autem aequalium sit eiusdem segmenti duplum superquadrupartiens septimas.

REGVLA II.

Vt efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commensurabilium, in quo perpendicularis
cadens in minimum latus productum faciat segmentum exterius commensurabile etiam lateribus: statuat
exterius segmentum quodvis partium aequalium à quinque numeratarum, vt 5. vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus si
addas $\frac{2}{5}$. habebis minimum latus. Si vero easdem partes dicti segmenti triplices, addas $\frac{2}{5}$. vel si partes mi-
nimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si denique partes easdem dicti segmenti quadruplices,

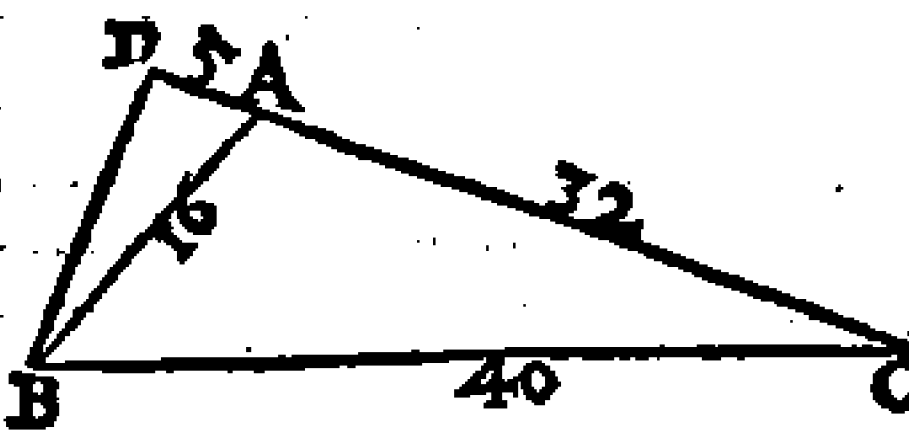


reperies latus maximum. Vt si in apposito triangulo segmentum
 AD , constituatur 10. erit $AB, 16$. $AC, 32$. & $BC, 40$. Vbi etiam vi-
des, quadrato lateris BC , quod est 1600. equalia esse quadrata la-
terum AB, AC , nimirum 256. 1024. vna cum rectangulo bis sub AB ,
 AD , comprehenso, id est, cum 160. 160. Ex quo fit CD , esse ad BD ,
perpendicularem, & angulum BAC , obtusum, vt supra in hoc scho-
lio ostendimus. Iam si singulos numeros inuentos multiplices per
quemvis numerum, gignentur alij numeri illis proportionales, qui

idem prestabunt. Vt si eos duplices, erit latus $AB, 32$. $AC, 64$. & $BC, 80$. qui quidem numeri reperientur ea-
dem arte, si exterius segmentum AD , statuas partium 20. quæ duplam quoque proportionem habent ad prio-
res partes 10. Sic si eosdem numeros triplices, efficies segmentum exterius AD , partium 30. latus $AB, 48$. AC ,
96. $BC, 120$. & sic deinceps.

REGVLA III.

Pro triangulo amblygonio Scaleno commensurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in me-
dium latus productum cadens efficiat quoque segmentum lateribus trianguli commensurabile: accipiat
rursus exterius segmentum quolibet partium à 5. numeratarum, vt in precedenti regula. Quas si triplices,
addas $\frac{2}{5}$. produces minimum latus. Si vero easdem multiplices per 6. adiungas $\frac{2}{5}$. habebis latus medium:



Si denique easdem per 8. multiplices, produces maximum latus.
Vt si in triangulo proposito segmentum AD , fiat partium 5. erit
 $AB, 16$. $AC, 32$. & $BC, 40$. Atque ita quadrato laterum BC , nimirum
1600. equalia existunt quadrata laterum AB, AC , nempe 256. 1024.
vna cum rectangulo bis comprehenso sub AC, AD , hoc est, cum
160. 160. Ac proinde BD , ad CD , erit perpendicularis, angulumque
 BAC , obtusus, vt in hoc scholio supra demonstrauimus. Quod si
numeros inuentos per quemvis numerum multiplices, inuenies

alios numeros laterum illis proportionales, in quibus eadem hac proposit. 12. examinabitur. Vt si eos quadru-
plices, efficies segmentum exterius AD , partium 20. latus $AB, 64$. $AC, 128$. & $BC, 160$. Si vero eosdem illos prio-
res numeros per 10. multiplices, erit segmentum exterius AD , 50. latus $AB, 160$. $AC, 320$. & $BC, 400$. Atque
ita in infinitum.

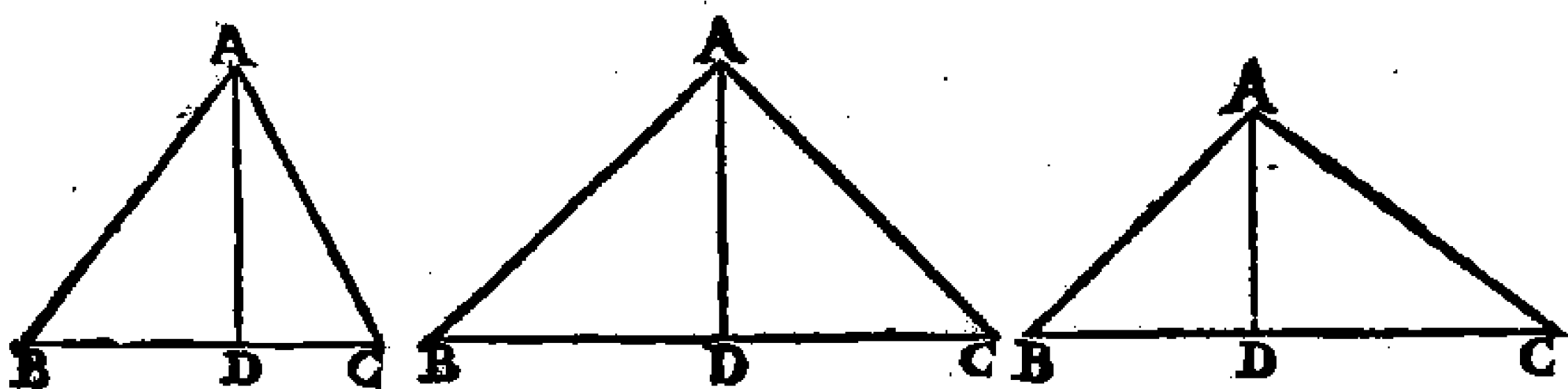
CAV. autem, existimes posito latere aliquo trianguli amblygonij, vel segmento exteriori, quolibet par-
tium aequalium, alia latera cum illo seruare necessarid proportionem illas, quas in regulis predictis explicani-
mus, adeo vt cognico vno, reliqua etiam cognoscantur. Hoc enim falsum est, cum illa variari possint mille mo-
dis, & alias atque alias proportionem habere. Itaque ex tribus prescriptis regulis solim colligendum erit, ex lineis
rectis, quæ dictas proportionem seruent, constitui posse triangulum amblygonium, vna cum segmento exteriori:
re, in quo veritas propositionis 12. possit examinari.

THEOR. 12. PROPOS. 13.

13.

IN oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente mi-
nus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, re-
k

in angulo bis comprehenso, & ab vno lateri, quæ sunt circa acutū angulū, in qd' perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari, ppe acutū angulū.

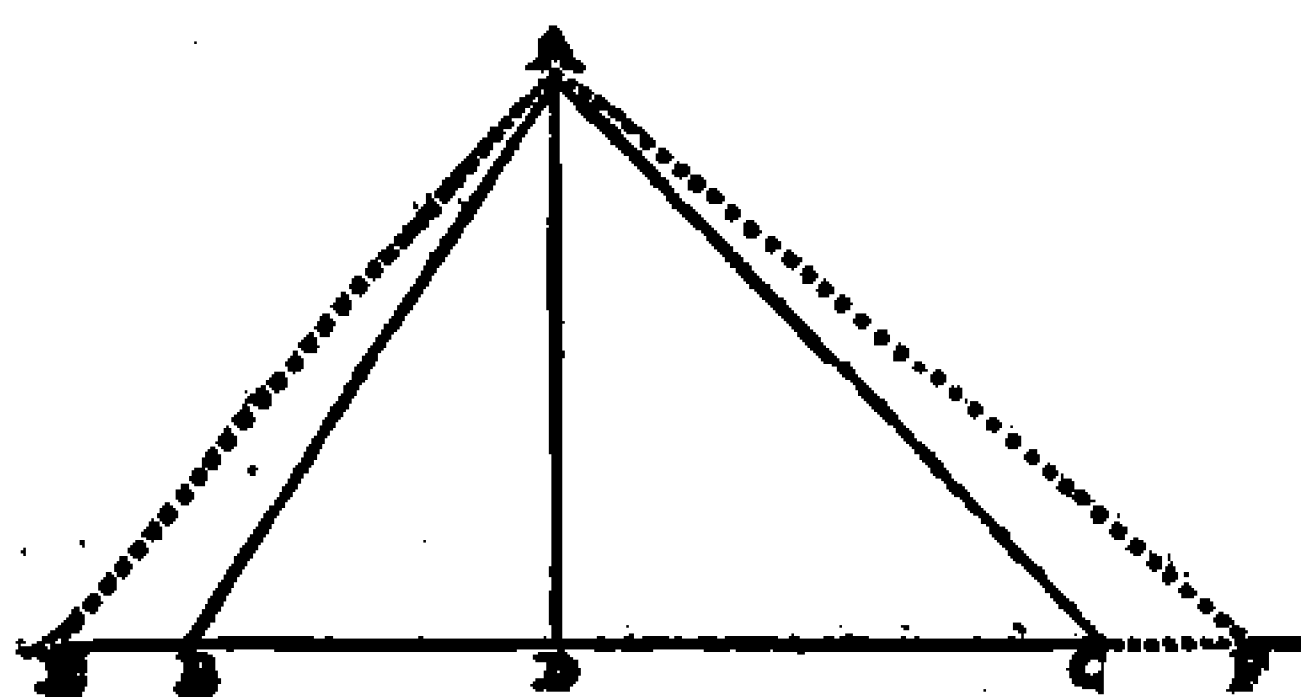


SIN T omnes anguli trianguli ABC , acuti, & ex A , perpendicularis AD , demissa cadat in latus BC . Dico quadratum lateris AB , quod acuto angulo ACB , opponitur, minus esse quadratis laterum AC, CB , circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD , hoc est, quadratum lateris AB , vnā cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD , æquale esse duobus quadratis laterum AC, CB . Cum enim recta BC , diuisa sit in D , vtcunque, erunt quadrata rectarum BC, CD , æqualia rectangulo comprehenso bis sub BC, CD , & quadrato rectæ BD . Addito ergo communi quadrato rectæ DA , erunt tria quadrata rectarum BC, CD, DA , æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC, CD , & duobus quadratis rectarum BD, DA . Duobus autē quadratis rectarum CD, DA , æquale est quadratum rectæ CA . Duo igitur quadrata rectarum BC, CA , æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub BC, CD , & duobus quadratis rectarum BD, DA . Cum ergo duobus quadratis rectarum BD, DA , æquale sit quadratum rectæ AB , erūt duo quadrata rectarum BC, CA , æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC, CD , & quadrato rectæ AB , quod est propositum. Eodem modo ostendetur, quadrata rectarum AB, BC , æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub CB, BD , & quadrato rectæ AC , hoc est, quadratum lateris AC , minus esse quadratis laterum AB, BC , rectangulo comprehenso bis sub CB, BD . In oxygoniis ergo triangulis, quadratum à latere, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I U M.

IT A Q V E ex tribus propositionibus, nempe 47. lib. 1. & 12. atque 13. huius lib. cognoscimus, quantum sit quadratum cuiusvis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempe an sit illis æquale, an maius, minusve, & quanto maius sit, aut minus, prout videlicet angulus assumpto lateri oppositus fuerit rectus, vel obtusus, aut acutus.

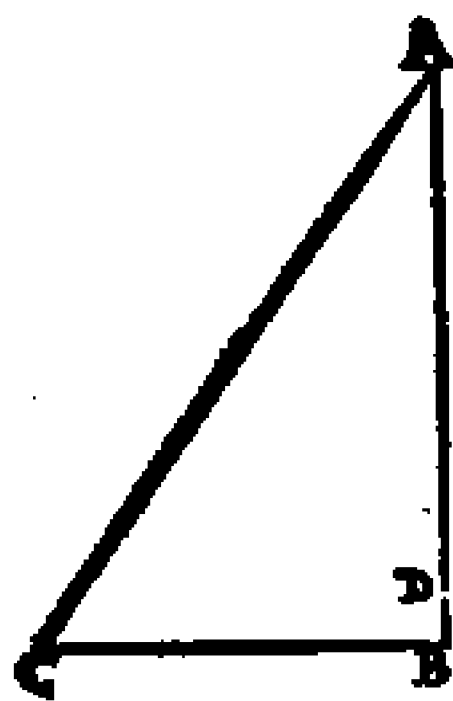
Q V A M V I S autē Euclides theorema hoc proponat de triangulis duntaxat oxygoniis, quæ scilicet omnes angulos habent acutos, idem tamen verum etiā est in triangulis rectangulis, & amblygoniis, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triagulis necessariō duo reliqui anguli acuti, vt perspicue colligi potest ex propo. 17.



vel 32. lib. 1. Hoc solum obseruandū est in triangulo rectangulo, & amblygoniis, perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso, in oxygoniis verō à quolibet. Ita .n. semper cadet perpendicularis intra triangulū, vt Euclides in demonstracione assumpsit. Quod quidē facile demonstrabitur hac ratione. Sint in triangulo ABC , duo anguli ABC, ACB , acuti, angulus verō BAC , rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularē ex A , demissam cadere

intra triangulū. Si enim caderet extra in CB , protrahā ad partes B , cuiusmodi est recta AE , esset in triangulo ABE , angulus exterior ABC , acutus, & maior interno & opposito recto AEB , quod est absurdū. Si verō caderet extra BC , productā ad partes C , qualis est recta AF , in idem incideremus absurdum, vt manifestum est.

ID E M hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiam si perpendicularis AD , nō cadat in latus BC , sed vel eadem sit, quæ latus AB , vt in rectangulis, vel extra triangulum cadat, vt in obtusangulis accidit, cen in scholio propositionis precedentis demonstrauimus: quod tum demū accidet, cū perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

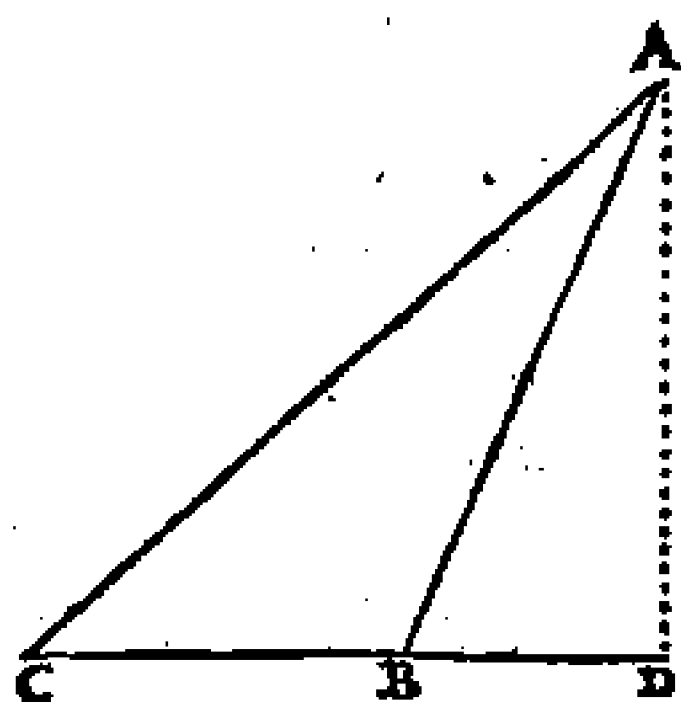


b 47. primi.

S I T triangulum rectangulū ABC , cuius angulus B , sit rectus; & ex angulo A , acuto ad BC , perpendicularis ducatur AD , quæ eadē erit, quæ latus AB , propter angulum rectum B . Dico quadratum lateris AB , acutum angulum C , subtendentū, minus esse, quā quadrata laterum AC, CB , rectangulo bis comprehenso sub latere CB , in quod perpendicularis cadit, & sub linea CD , quæ interuicetur inter perpendicularē AD , & acutū angulum C . Cum enim quadrata ex AB, CB , æqualia sint quadrato ex AC , addito communi quadrato ex CB , erunt tria quadrata, nempe quod ex AB , & duplum eim, quod ex CB , æqualia duobus quadratis ex AC, CB . At quadratum ex CB , idem est, quod rectangu-

rectangulum sub CB, CD . Igitur & quadratū ex AB , vñā cum rectangulo bis sub CB, CD , aequale est quadratis ex AC, CB ; Ac proinde quadratum ex AB , minus est, quā quadrata ex AC, CB , rectangulo bis, sub CB, CD . Quod est propositum.

R V R S V S sit triangulum obtusangulum ABC , cuius angulus B , obtusus; & ex angulo acuto A , ad BC , perpendicularis ducatur AD , extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris AB , acutum angulum C , subtendens minus esse, quā quadrata laterū AC, CB , rectangulo comprehenso bis sub CB , & CD . Quo-



niam enim quadrata ex AD, CD ,^a aequalia sunt quadrato ex AC ; addito quadrato ex CB , communi, erunt tria quadrata ex AD, CD, CB , aequalia duobus quadratis ex AC, CB : At quadratum ex CD ,^b aequale est quadratis ex CB, BD ; & rectangulo bis sub CB, BD . Igitur & duo quadrata ex AD, CB , vñā cum quadratis ex CB, BD , & rectangulo bis sub CB, BD , aequalia sunt quadratis ex AC, CB : Sunt autem quadrata ex AD, BD ,^c aequalia quadrato ex AB . Quare quadratum quoque ex AB , & duplum quadrati ex CE , vñā cum rectangulo bis sub CB, BD , aequalia sunt quadratis ex AC, CB . Atqui quadrato ex CB , vñā cum rectangulo sub CB, BD ,^d aequale est rectangulum sub CD, CB ; Ac propterea

247. primi.

b 4. secūdi.

c 47. primi.

d 3. secūdi.

duplo quadrati ex CB , vñā cum rectangulo bis sub CB, BD , aequale est rectangulum bis sub CD, CB . Igitur & quadratū ex AB , vñā cum rectangulo bis sub CB, CD , aequale est quadratis ex AC, CB ; Ac proinde quadratum ex AB , minus est, quā quadrata ex AC, CB , rectangulo bis sub CB, CD . Quod est propositum.

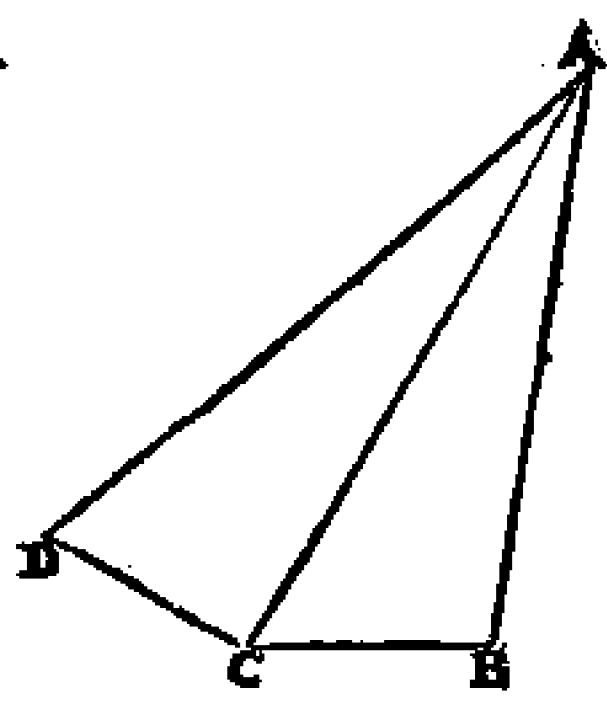
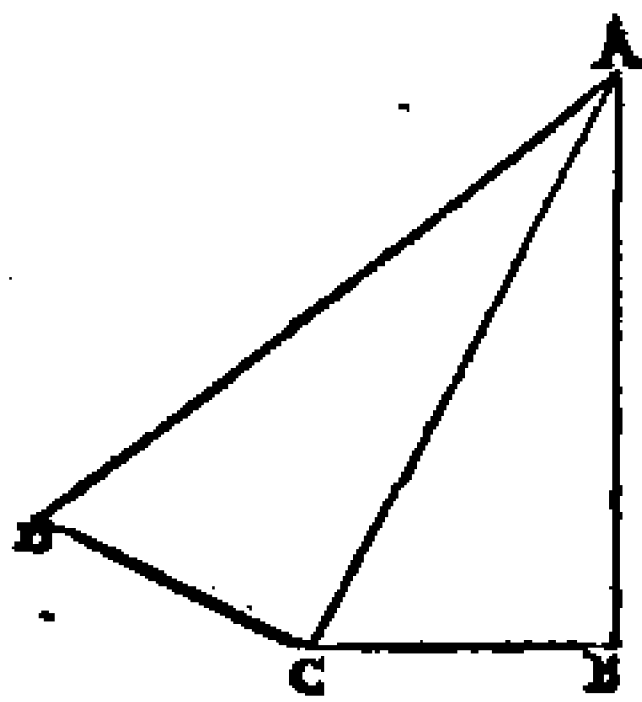
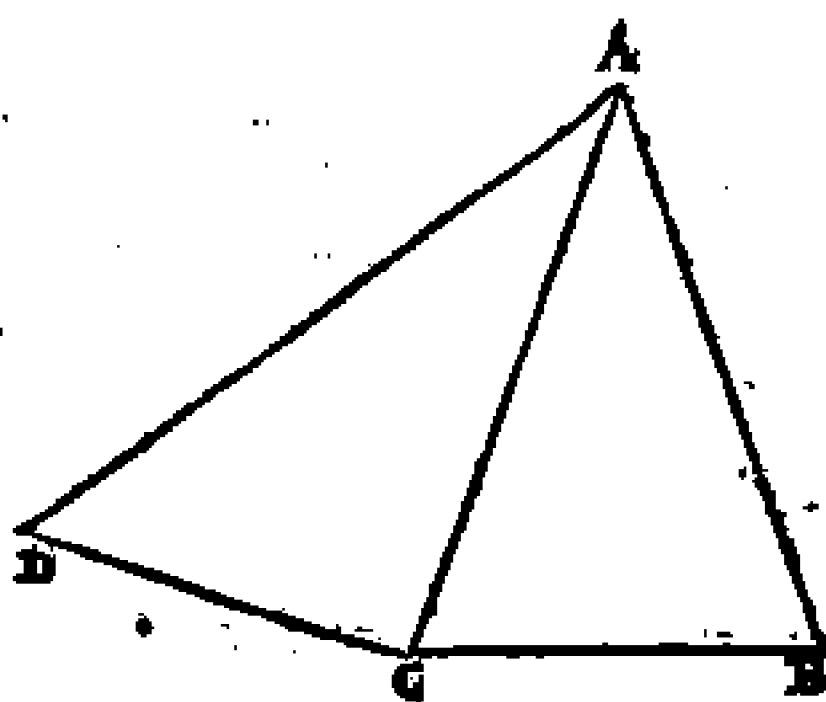
Aliter, & breuius. Quoniam quadratum ex AC ,^e maius est, quā quadrata ex AB, BC , rectangulo bis sub CB, BD , comprehenso, hoc est, quadratum ex AC , aequale est quadratis ex AB, BC , vñā cum rectangulo sub CB, BD , bis comprehenso; erit quadratum ex AB , minus, quā quadratum ex AC , quadrato ex BC , & rectangulo sub CB, BD , bis: Ac proinde si quadrato ex AC , addatur quadratum ex BC , erit quadratum ex AB , minus quā quadrata ex AC, BC , quadrato ex BC , bis sumpto, & rectangulo bis sub CB, BD , comprehenso. Cum ergo quadrato ex BC , vñā cum rectangulo sub CB, BD , contento,^f aequale sit rectangulum sub CB, CD , contentum; erit quoque quadratum ex AB , minus quā quadrata ex AC, CB , rectangulo comprehenso bis sub CB, CD . Quod est propositum.

e 12. secūdi.

f 3. secūdi.

In scholio quodam antiquo demonstratur sequens theorema, instar illius, quod nos in scholio precedenti propositionis secundo loco demonstrauimus. Videlicet.

Si in triangulo quadratum vnus lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit.



In triangulo ABC , quadratum lateris AB , minus sit, quā quadrata laterum AC, CB . Dico angulum C , quem dictum latus subtendit, esse acutum. Ducatur enim ex C , ad AB , perpendicularis CD , linea CB , aequalis, iungaturque, recta AD . Quoniam igitur quadratum ex AD ,^g aequale est quadratis ex AC, CB , hoc est, ex AC, CB : Ponitur autem quadratum ex AB , minus quadratis ex AC, CB ; Erit quadratum ex AD , maius quadrato ex AB ; & ideo recta AD , maior quā recta AB . Itaque quia duo latera AC, CD , trianguli ACD , aequalia sunt duobus lateribus AC, CB , trianguli ACB , vtrumque vtrique; & basis AD , maior base AB ;^h Erit angulus ACD , maior angulo ACB : Sed ACD , rectus est, ex constructione. Ergo ACB , rectus minus; & acutus erit.

g 47. primi.

h 19. primi.

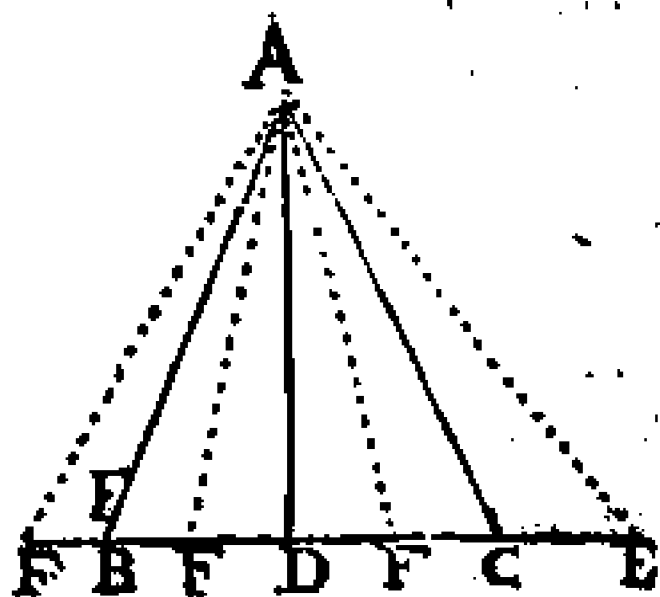
Sed & conuersum huius propos. 13. ostendemus, nimirum.

Si in triangulo quadratum vnus lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterū, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri opposito demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus.

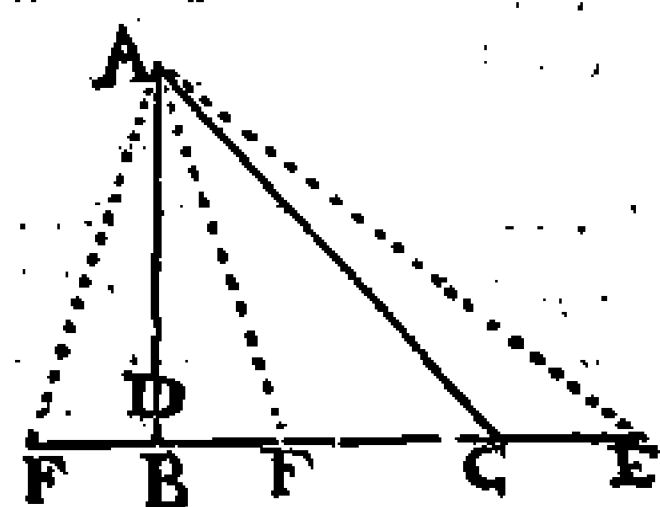
In triangulo ABC , ad latus BC , demittatur ex angulo opposito A , recta AD ; sitque quadratum lateris AB , minus quā quadrata laterum AC, CB , rectangulo sub BC, CD , bis comprehenso. Dico AD , esse per-

k a

s. 47. primi.

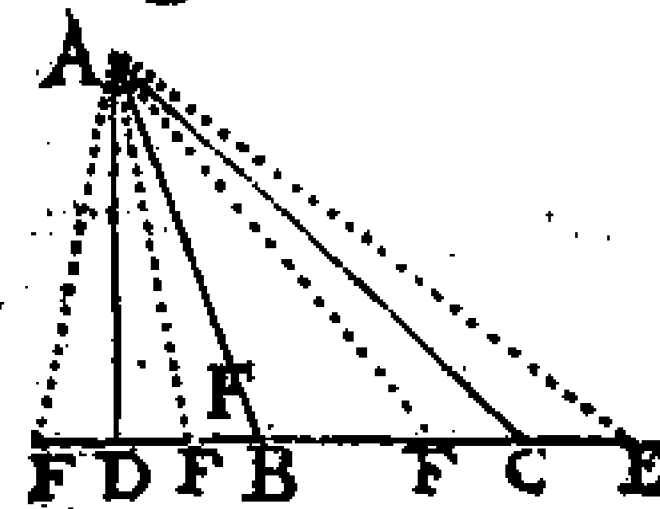


b. 47. primi.



c. 47. primi.

d. 4. secūdi.



e. 17. primi.

pendicularem ad BC , & angulum ACB , acutum. Si namque AD , perpendicularis non est, ducatur ex A , ad BC , perpendicularis, quam dico necessario cadere citra punctum C , versus B , hoc est, vel in latum BC , vel in punctum B , vel in latum BC , versus B , productum. Cadat enim, si fieri potest, in C , ita ut AC , sit ad BC , perpendicularis. Erit igitur ^a quadratum ex AB , aequale quadratis ex AC , CB . quod est absurdum, cum minus ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A , deducta ad BC , in punctum C .

CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A , demissa ultra C , in E , qualis est AE . Erit igitur ^b quadratum ex AB , aequale quadratis ex AE , EB . Ponitur autem quadratum ex AB , minus quadratis ex AC , CB . Igitur & quadrata ex AE , EB , minora erunt quadratis ex AC , CB . Cum ergo quadratum ex AC , ^c aequale sit quadratis ex AE , EC ; erunt quoque quadrata ex AE , EB , minora quadratis ex AE , EC , CB : Et ablato communi quadrato rectæ AE , erit reliquum quadratum ex EB , minus quoque quadratis ex EC , CB . quod est absurdum. Cum enim quadratum ex EB , ^d aequale sit quadratis ex EC , CB , una cum rectangulo bis comprehenso sub EC , CB , maius erit quadratum ex EB , quadratis ex EC , CB . Non ergo perpendicularis cadit ultra C : Sed neque in C , cadit, ut ostendimus. Igitur cadit citra punctum C , qualis est AD , ut demonstrabitur, ac propterea ^e angulus ACB , acutus erit. Quod secundo loco proponitur demonstrandum. Caterum angulum ACB , esse acutum, si quadratum rectæ AB , minus sit quadratis rectarum AC , CB , facilius demonstravimus in

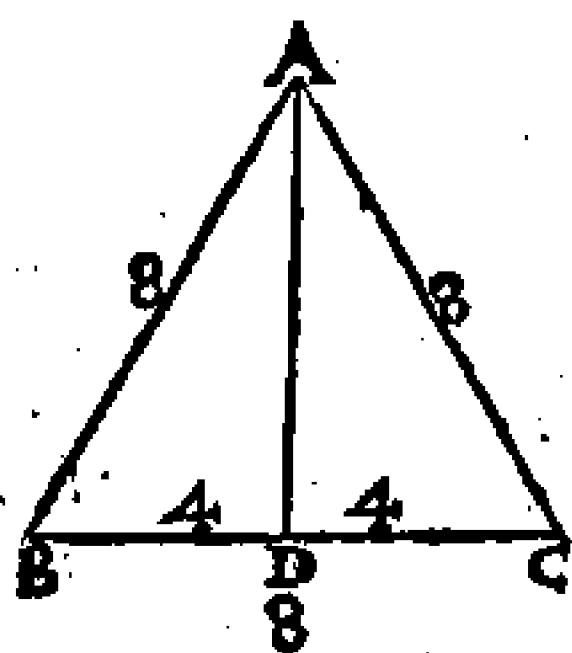
proxime antecedente theoremate huius scholii: ex quo fit, quemadmodum in corollario secundo propositionis 17. libri primi ostensum est, perpendicularem ex A , ad BC , demissam cadere citra angulum ACB , acutum versus B .

Q U O D autem AD , sit ad BC , perpendicularis, ita ostendemus. Si non est, sit AF , ad BC , perpendicularis, cadens citra punctum C , ut probatum est, ubicunque hoc contingat, siue intra triangulum, siue in punctum B , siue extra triangulum. (In secundo tantum triangulo non dicit adversarius, perpendicularem cadere in B , quia eadem esset, qua AD , quod ille negat.) Quia ergo angulus ACB , ostensus fuit acutus, ^f erit quadratum ex AB , minus, quam quadrata ex AC , CB , rectangulo bis comprehenso sub BC , CF , hoc est, quadratum ex AB , una cum rectangulo comprehenso bis sub BC , CF , aequale est quadratis ex AC , CB : Ponitur autem quadratum idem ex AB , minus quoque, quam quadrata ex AC , CB , rectangulo bis comprehenso sub BC , CD , hoc est, quadratum idem ex AB , una cum rectangulo bis contento sub BC , CD , aequale ponitur quadratis ex AC , CB . Igitur quadratum ex AB , una cum rectangulo bis comprehenso sub BC , CD , aequale erit quadrato eidem ex AB , una cum rectangulo comprehenso bis sub BC , CF : Et ablato communi quadrato rectæ AB , rectangulum sub BC , CD , bis comprehensum aequale erit rectangulo bis sub BC , CF , comprehenso; ac proinde & rectangulum semel comprehensum sub BC , CD , aequale erit rectangulo semel comprehenso sub BC , CF , ideoque, & rectæ CD , CF , aequales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Est igitur AD , ad BC , perpendicularis, & non alia. Quod est propositum.

Q U E M A D M O D U M autem in scholio superioris propositionis triacula amblygonia construximus laterum, & linearum commensurabilium, in quibus per numeros veritas propositionis 12. examinari possit, ita hoc loco oxygonia triacula constituemus laterum, atque linearum commensurabilium, in quibus huius 13. propositionis veritas explicetur. Quia verò triangulum oxygonium est vel æquilaterum, vel isosceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam septem regulis. Prima de triangulo æquilatæ oxygonio agit. Secunda de Isoscele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inæquale, siue maius illud sit, siue minus utronque æqualium. Tertia de Isoscele, cuius tertium latus maius est, perpendicularisque in alterutrum æqualium laterum cadit. Quarta de Isoscele, cuius latus tertium minus est, & perpendicularis rursus in alterutrum laterum æqualium cadit. Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus. Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur. Septima denique de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hic de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli supra basin sunt acuti, siue oppositus angulus acutus etiam sit, siue non. De his enim propositio etiam intelligenda est, ut diximus. Quo pacto autem triacula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipsa, vel cum uno laterum coincidit, numerus quoque possint accommodari, docebimus ad finem regularum.

REGULA I.

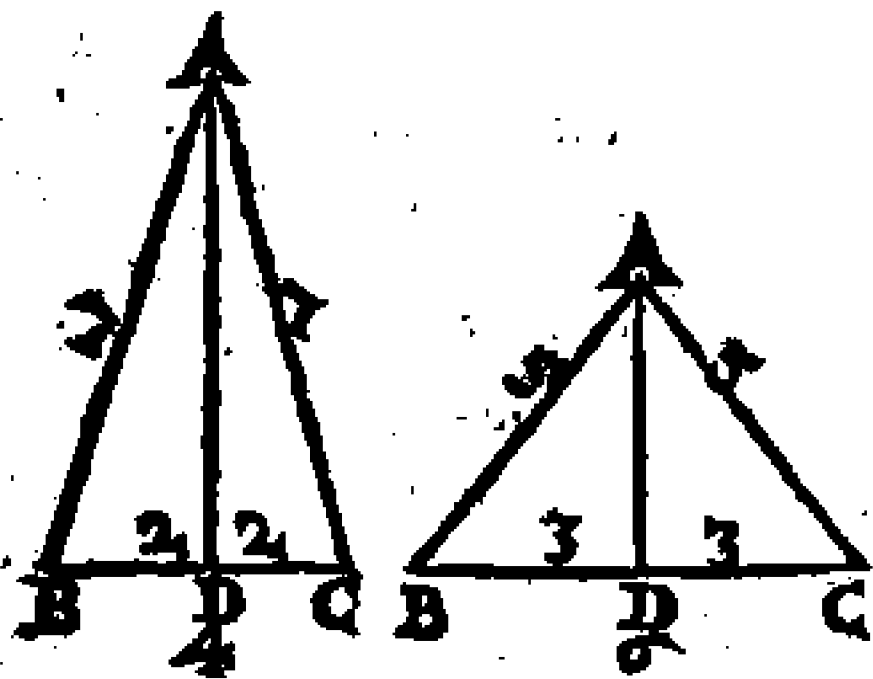
S i quodlibet latus trianguli æquilatæ statuatur quorum parsium æqualium, unum tamen parium, ut fractionem



fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter se, & segmentis à linea perpendiculari factis commensurabilia. Vt in triangulo æquilatere ABC , diuidet perpendicularis AD , oppositum latus BC , bisariam, vt in scholio propositionis 26. lib. 1. demonstrauimus. Quam ob rem posito quolibet latere 8. erunt segmenta $BD, CD, 4, 4$. Vbi videtis quadratum lateris AB , angulo acuto C , oppositi, (omnes enim anguli in triangulo æquilatere acuti sunt, ex corollario 3. propositionis 17. lib. 1.) hoc est, 64. vnà cum rectangulo bis contento sub BC, CD , id est, cum 32. 32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum AC, CB , nempe 64. 64.

REGVLA II.

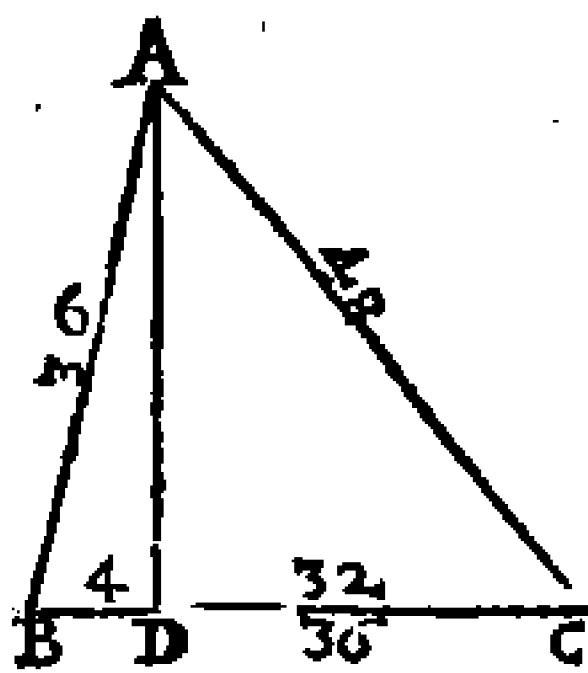
Si verumque laterum æqualium trianguli Isoscelis statueretur quotcumque partium æqualium, tertium autem quolibet partium numero parium, vt fractiones vitentur, siue pauciores partes in hoc latere ponantur, quàm in utroque æqualium, siue plures, dummodò tot nō sint,



quor in utroque simul, aut plures; quia sic nō posset fieri triangulum, propterea quod duo latera æqualia non essent maiora tertio latere, sed vel æqualia, vel minora, quod propositioni 20. lib. 1. repugnat. Si in quā, latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes lineæ trianguli inter se commensurabiles. Vt si in priori horum Isoscelium verumque latus AB, AC , statueretur 7. & $BC, 4$. In posteriori autem verumque latus $AB, AC, 5$. & $BC, 6$. Cum ergo perpendicularis AD , diuidat basim BC , bisariam, ex scholio propositionis 26. lib. 1. erunt segmenta BD, CD , in priori quidem triangulo 2. 2. in posteriori verò 3. 3. Vbi etiam perspicuum est, quadratum lateris AB , angulo acuto C , oppositi, (vterque enim angulus B, C , acutus est, ex corollario 3. propof. 17. lib. 1.) vnà cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD , æquale esse quadratis simul laterum AC, CB , &c.

REGVLA III.

In triangulo Isoscele, in quo tertium latus maius est, & perpendicularis in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope maius latus tertium, maius, vt ad propof. 47. lib. 1. demonstrauimus. Si igitur minus segmentum statuas quotiū partium, easq; per 8. multiplices, habebis segmentum maius: Si verò easdem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo deniq; segmen-

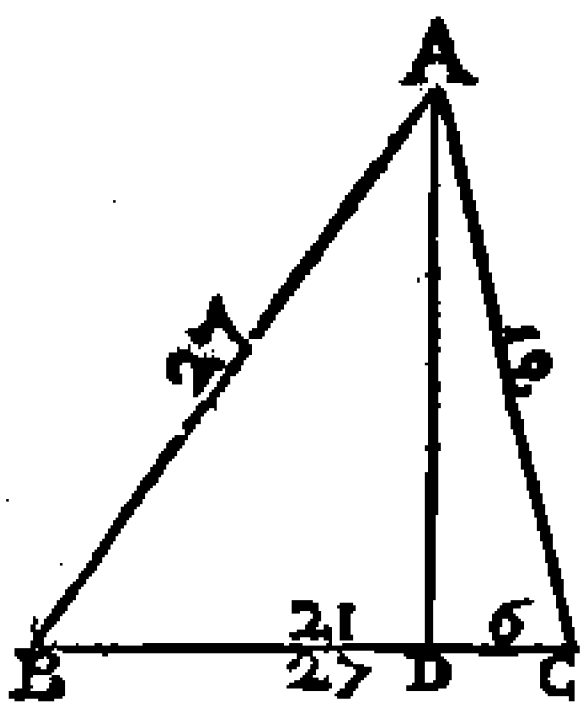


ta simul addita conflabunt verumque laterum æqualium; quod etiam produces ex multiplicatione minoris segmenti per 9. Vt si in Isoscele ABC , segmentum minus BD , ponatur 4. erit maius $CD, 32$. latus verò $AC, 48$. & verumque latus $AB, BC, 36, 36$. Quadratum igitur lateris AB , angulo acuto C , oppositi, nempe 1296. vnà cum eo, quod fit bis ex BC , in CD , id est, cum 1152. 1152. conficit 2448. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex AC, CB , nempe 2304. 1296. Ita quoque quadratū ex AC , nimirum 2304. vnà cum eo, quod bis fit ex CB , in BD , hoc est, cum 144. 144. facit 2448. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum

AB, BC , nimirum ex 1296. 1296. In huiusmodi ergo triangulo segmenta inæqualia proportionē habent octuplam: verumque verò æqualium laterum ad minus segmentum proportionem habet noncuplam: Tertium denique latus maius ad idem segmentum minus habet proportionem duodecuplam.

REGVLA IV.

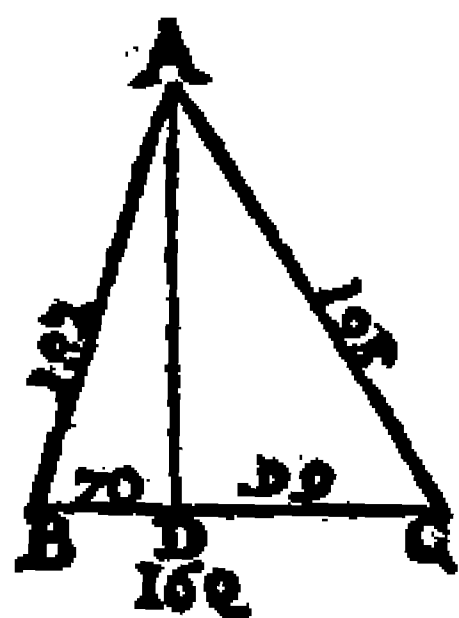
In triangulo Isoscele, cuius tertium latus minus est, & perpendicularis rursus in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope minus latus tertium, minus, vt ad propof. 47. lib. 1. ostensum est. Quod segmentum si statuas quotiū partium numero parium,



vt fractiones fugiantur, easq; per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adicias, vel earum medietatem per 7. multiplices, produces maius segmentum: Si verò easdem partes minoris segmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Verumque denique æqualium laterum componetur ex duobus segmentis: quod etiam ex multiplicatione medietatis minoris segmenti per 9. producet. Vt si in Isoscele ABC , minus segmentū CD , ponatur 6. erit maius $BD, 21$. & latus $AC, 27$. atq; tam AB , quàm $BC, 27$. Quadratum ergo lateris AB , angulo acuto C , oppositi, nimirum 729. vnà cū eo, quod fit bis ex BC , in CD , id est, cū 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterū AC, CB , nempe ex 324. 729. &c.

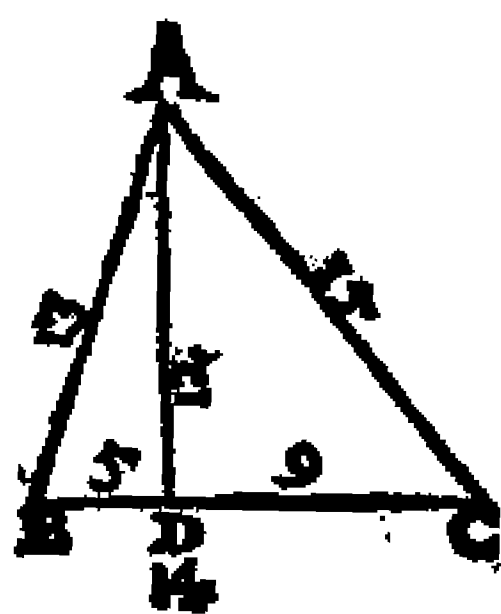
REGVLA V.

In Scaleno triangulo, in quo perpendicularis in minimum latus demittitur, erit segmentum basis iuxta



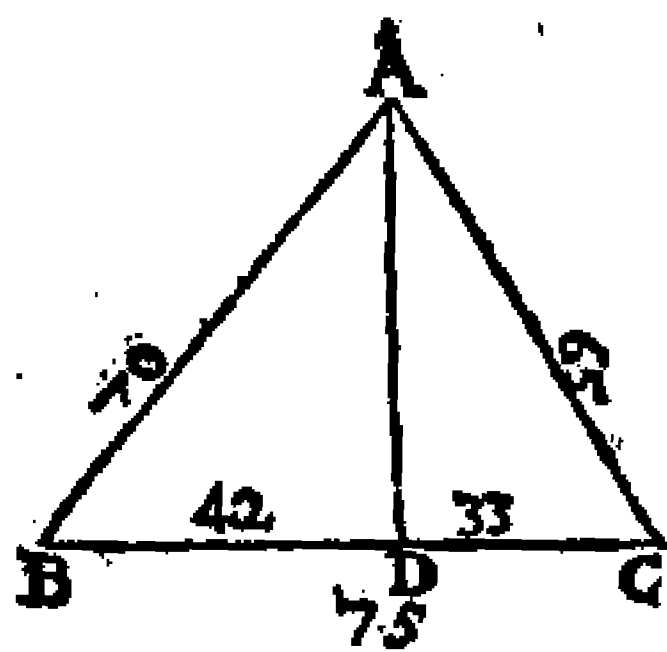
medium latum, minus, ut ad proposit. 47. lib. 1. demonstratum est. Quod segmentum si constituatur tot partium aequalium, ut à 70. numerentur, nimirum partium 70. vel 140. vel 210. &c. cuius addantur eorum $\frac{2}{7}$ confectum erit segmentum maius, & ex additione partium horum segmentorum gignetur minimum latum. Si vero partes minoris segmenti duplicentur; & producto adiciantur $\frac{4}{7}$. hoc est, $\frac{2}{7}$. earundem partium, procreabitur medium latum. Si denique partium eiusdem minoris segmenti duplicentur, producto $\frac{6}{7}$, id est, $\frac{2}{7}$. earundem addantur, componetur latum maximum. Vt in scaleno ABC, si minus segmentum BD, ponatur 70. erit maius CD, 99. & totum minimum latum BC, 169. Medium autem latum AB, 182. & maximum AC, 195. Quadratum ergo lateris AB, acuto angulo C, oppositi, hoc est, 33124. vna cum numero, qui bis fit ex BC, in CD, id est, cum 16731. 16731. conficit numerum 66586. equalem duobus simul quadratis 28025. 28561. laterum AC, CB, &c.

REGULA VI.



In triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latum cadit, erit ex illis, quae ad propositionem 47. lib. 1. ostendimus, minus segmentum minimo lateri adiacens. Quod segmentum si statatur tot aequalium partium, ut à 5. numerentur, ut 5. vel 10. vel 15. &c. cuius addantur $\frac{4}{5}$. confectum erit segmentum maius, & partes horum segmentorum in unam summam collecta componens medium latum. Si autem partibus minoris segmenti duplicatis adiciantur earundem $\frac{2}{5}$. producentur minimum latum. Triplum denique earundem partium minoris segmenti dabit latum maximum. Vt in Scaleno ABC, si minus segmentum BD, fiat 5. erit segmentum maius CD, 9. & totum latum BC, medium, 14. Minimum vero AB, 13. & maximum AC, 15. &c.

REGULA VII.



In Scaleno denique triangulo, ubi perpendicularis ad maximum latum deducitur, erit minus segmentum iuxta latum minimum, ex his, quae ad propositionem 47. lib. 1. scripsimus. Si ergo pro minori segmento sumantur 33. vel quivis alius numerus à 33. numeratus, ut 66. vel 99. &c. cuius addantur $\frac{2}{3}$. hoc est, $\frac{2}{3}$. fiet maius segmentum: quae duo segmenta simul composita maximum latum offerent. Si vero numero minoris segmenti duplicato adiciantur, $\frac{4}{3}$. producentur medium latum. Si denique eidem numero lateris maximum apponantur $\frac{2}{3}$. exhibebitur minimum latum. Vt si in Scaleno ABC, minus segmentum CD, sit 33. erit maius segmentum BD, 42. totumque latum maximum BC, 75. & medium AB, 70. & minimum AC, 65. &c.

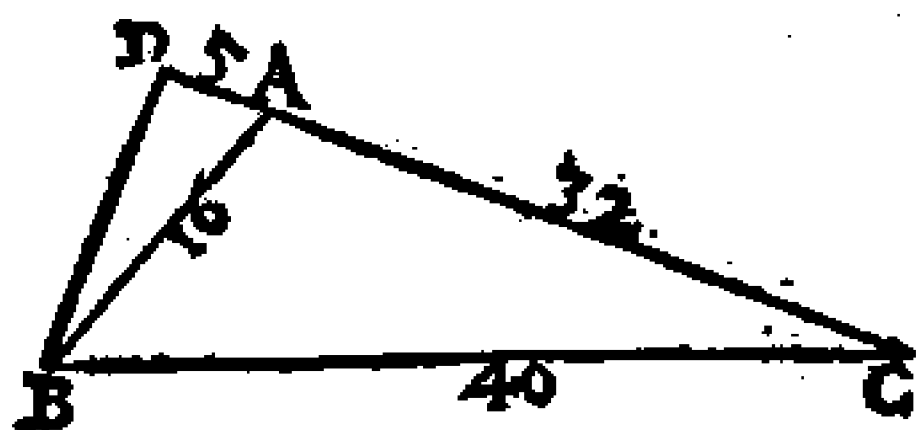
Quod si singulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicumque is sit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Idem etiam numeri reperientur, si minus segmentum, vel maius, vel quodcunque latum statatur quotlibet partium, si modo proportionales serventur, quas supradictis regulis expressimus.

Hic quoque sciendum est, non in omni triangulo oxygenio proportionales praescriptas reperiri inter latera, cum mille modis possint variari eorum proportionales. Neque verò hoc regula illa docens, sed usus eorum in eo solum consistit, ut servatis illis proportionibus, quas explicavimus, triangula oxygenia formari possint, in quibus propositio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodetur.

Idem vero si perpendicularis coincadat cum illo latere, cuius quadratum probandum est minus esse duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita ut triangulum propositum sit rektangulum, querendi sunt tres numeri pro lateribus, ex iis, quae in scholio proposit. 47. lib. 1. scripsimus. Vt in figura regula 6. si in triangulo ABD, minimum latum BD, ponatur 5. erit AD, 12. & AB, 13. Vbi cernit quadratum lateris AD, acuto angulo B, oppositi, nempe 144. vna cum eo, quod fit bis ex BD, in BD, hoc est, cum 25. 25. efficere 169. quantum videlicet conficiunt duo quadrata simul ex AB, BD, nimirum 169. 25. Eadem ratione, si minimum latum BD, statatur partium 6. erit AD, 8. & AB, 10. Vbi etiam vides, quadratum lateris AD, acuto angulo B, subtenfi, nimirum 64. vna cum eo, quod fit ex BD, in BD, bis, hoc est, cum 36. 36. conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum AB, BD, nimirum 100. 36. Ita quoque cernit quadratum numerum lateris BD, acuto angulo A, oppositi, hoc est, 36. vna cum eo, quod fit ex AD, in AD, bis, id est, cum 64. 64. efficere 164. quantum scilicet conficiunt duo numeri quadrati simul laterum AB, AD, nimirum 100. & 64. Denique si in alio triangulo ACD, minimum latum CD, ponas 9. reperies ex his, quae ad proposit. 47. lib. 1. scripsimus, AD, 40. & AC, 41. Vbi manifestum est, quadratum numerum lateris AD, angulo acuto oppositi, nimirum 1600. vna cum numero, qui fit ex CD, in CD, bis; id est, cum 81. 81. facere 1762. qui numerus equalis est quadratis numeris duorum laterum AC, CD, hoc est, duobus numeris 1681. 81. Hi enim conficiunt quoque summam 1762. Quod si minimum latum CD, facias 7. comperies AD, 24. & AC, 25. in quibus numeris idem experieris. Nam quadratum numerus lateris CD, angulo acuto A, subtenfi, id est, 49. vna cum numero, qui bis produ-

Refer huc
ad huius pa-
ginæ figu-
ram.

ducitur ex AD , in AD , hoc est, cum 576.576 . facit 1201 . quantum scilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum AC, AD , hoc est, 625.576 .

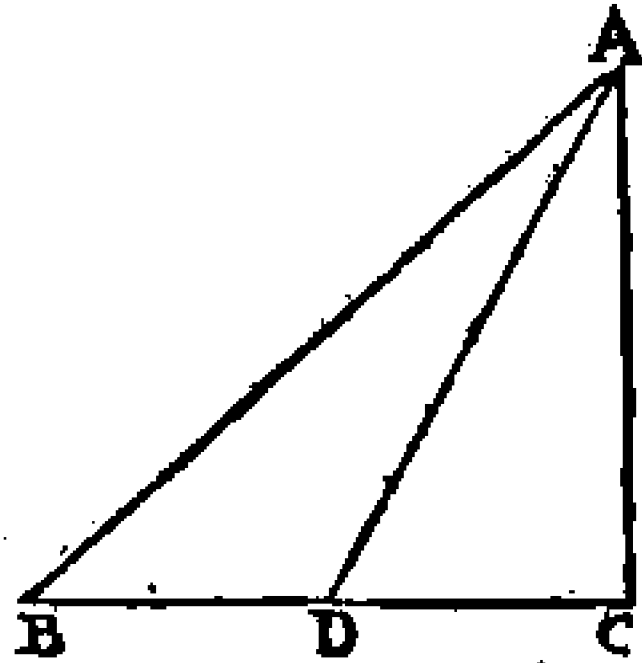
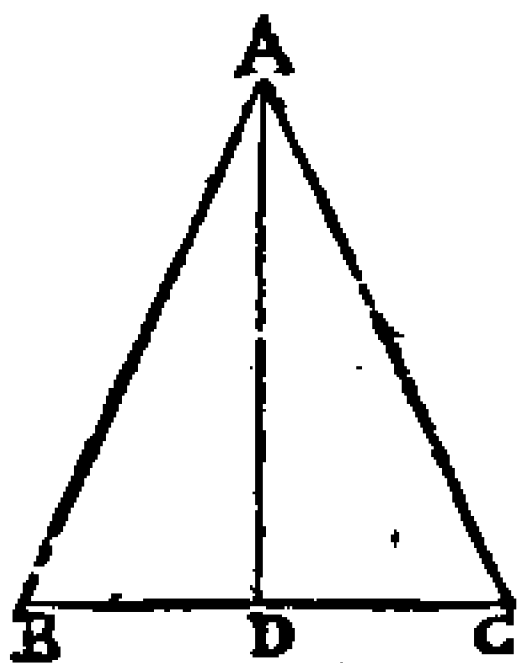


At si perpendicularis cadat extra triangulum, ita ut triangulum sit obtusangulum, querendum erit segmentum exterius, una cum lateribus, ut in tribus regulis scholii precedentis propositionis docuimus. Segmentum namque exterius cum latere producto dabit totum segmentum inter acutum angulum assumptum, & perpendicularem. Ut in figura regula 3. scholii antecedentis propositionis, erit segmentum totum CD , inter angulum acutum C , & perpendicularem BD , cadentem extra triangulum, 37. Vbi perspicuum est, quadratum lateris AB , angulo C , acuto oppositi, hoc est, 256. una cum rectangulo sub AC, CD , comprehenso bu , id est, cum 1184.1184 . componere numerum 26.24 . qui aequalis est duobus quadratis simul laterum BC, AC , nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600.1024 . &c.

Nunc vero alienum putavi hoc loco ex Pappo Alexandrino sequens etiam theorema demonstrare.

Si in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum cum angulum ambientium simul dupla duorum quadratorum simul sumptorum, quorum unum ex linea ducta, alterum vero ex dimidiato latere describitur.

In triangulo ABC , recta AD secet latus BC , bifariam in D . Dico quadrata ex AB, AC : dupla esse quadratorum ex AD, BD . Demittatur enim ex A , ad BC , perpendicularis, qua primum recta AD , congruat, ac proinde triangulum ABC , equilaterum sit, vel isosceles, ut ad proposit. 26. lib. 1. demonstrauimus. ^a Quoniam ^{a 47. primi.}

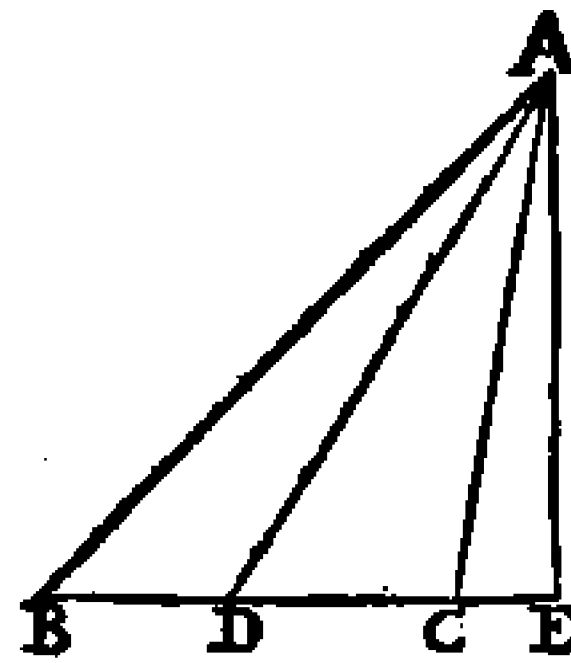
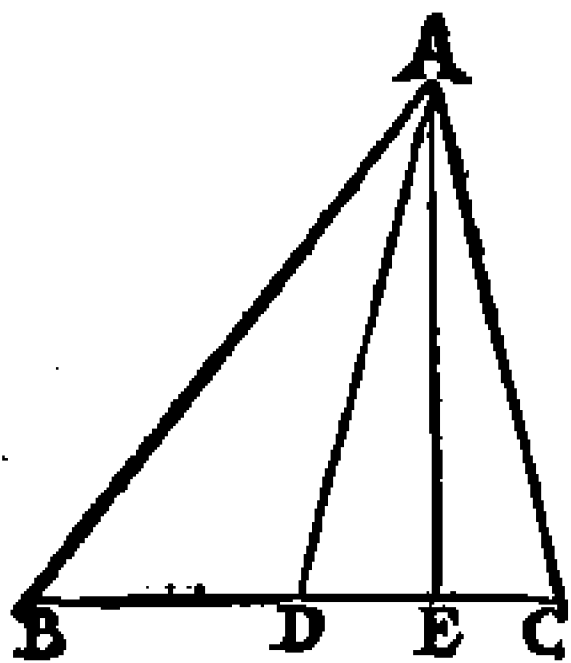


igitur tam quadratum ex AB , aequale est quadrato ex AD, DB , quam quadratum ex AC , quadrato ex AD, DC : erunt duo quadrata ex AB, AC , equalia quadrato ex AD , bis sumpto, una cum quadrato ex DB, DC . Cum ergo quadrata ex DB, DC , equalia sint, si auferantur duo quadrata ex AD, DC , ablatum erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadrati ex AD , bis sumpti, & quadratorum ex DB, DC . Quare duo quadrata ex AB, AC , dupla sunt duorum quadratorum ex

AD, DB , quod est propositum: Quod clarius ita ostendetur. ^b Quoniam quadratum ex AB , duobus quadratis ex AD, DB , aequale est: Sunt autem duo quadrata ex AB, AC , quadrati ex AB , dupla, ob equalitatem linearum AB, AC : erunt quoque quadrata ex AB, AC , dupla quadratorum ex AD, DB . Quod demonstrandum erat. ^{b 47. primi.}

CONGRUAT deinde perpendicularis AC , lateri AC . Et quia quadratum ex BC , quadruplum est tam quadrati ex BD , quam quadrati ex DC , ut in scholio propositionis 4. huius libri ostendimus; erit idem quadratum ex BC , duplum duorum quadratorum ex DB, DC . Sunt autem duo quadrata ex AC, CD , bis sumpta, dupla quoque quadrati ex AD ; quod ^c quadrata ex AC, CD , semel sumpta equalia sint quadrati ex AD . Igitur quadratum ex BC , una cum quadratis ex AC, CD , bis sumptis, duplum erit quadratorum ex DB, DC, AD . Cum ergo & quadratum ex CD , bis sumptum, duplum sit quadrati ex CD ; ^d erit reliquum quadratum ex BC , una cum quadrato ex AC , bis sumpto, duplum quoque reliquorum quadratorum ex DB, AD . Sunt autem ^e quadrata ex BC, AC , equalia quadrato ex AB . Igitur quadrata ex AB, AC , (qua equalia sunt quadrato ex BC , una cum quadrato ex AC , bis sumpto) dupla quoque sunt quadratorum ex AD, DB . Quod est propositum. ^{c 47. primi. d 20. prom. e 47. primi.}

TERCIO cadat perpendicularis AE , intra triangulum inter puncta D, C . Quia igitur ^f quadrata ex BE, EC , dupla sunt quadratorum ex BD, DE : Item quadrata ex AE, DE , bis sumpta dupla sunt quadrati



ex AD ; quod ^g quadrata ex AE, ED , semel sumpta quadrato ex AD , equalia sint, erunt quadrata ex BE, EC , una cum quadrato ex AE, DE , bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD . Cum ergo & quadratum ex DE , bis sumptum, duplum sit quadrati ex DE ; ^h erunt reliqua quadrata ex BE, EC , una cum quadrato ex AE , bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex DB, AD . Quare cum quadratis ex BE, AE , ⁱ aequale sit quadratum ex AB : & qua- ^{g 47. primi. h 20. prom. i 47. primi.}

dratis ex EC, AE , quadratum ex AC ; erunt quoque quadrata ex AB, AC , dupla quadratorum ex AD, DB . Quod est propositum.

a10. secund.
di.

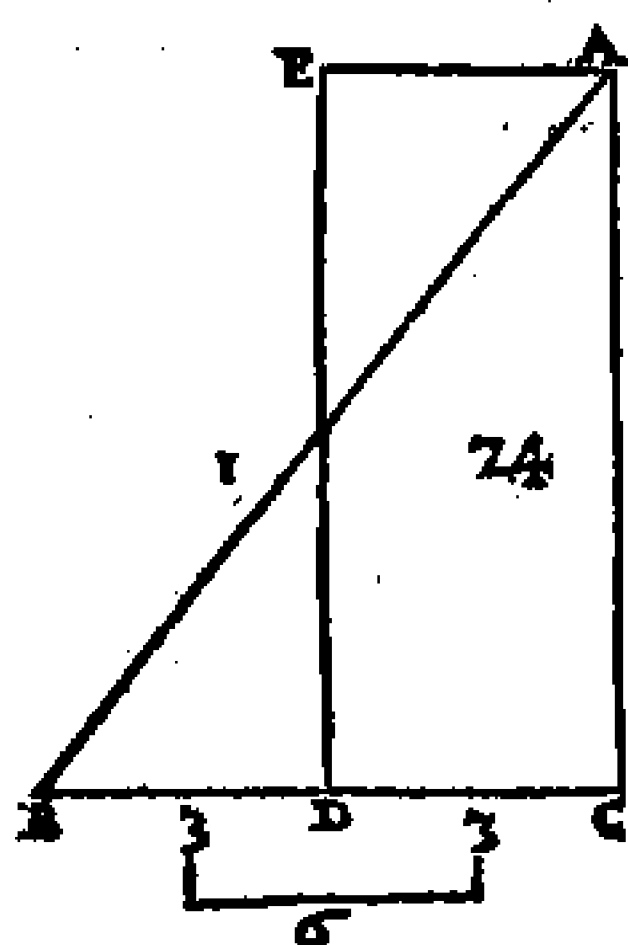
b 47. primi.

c 20. pron.

d 47. primi.

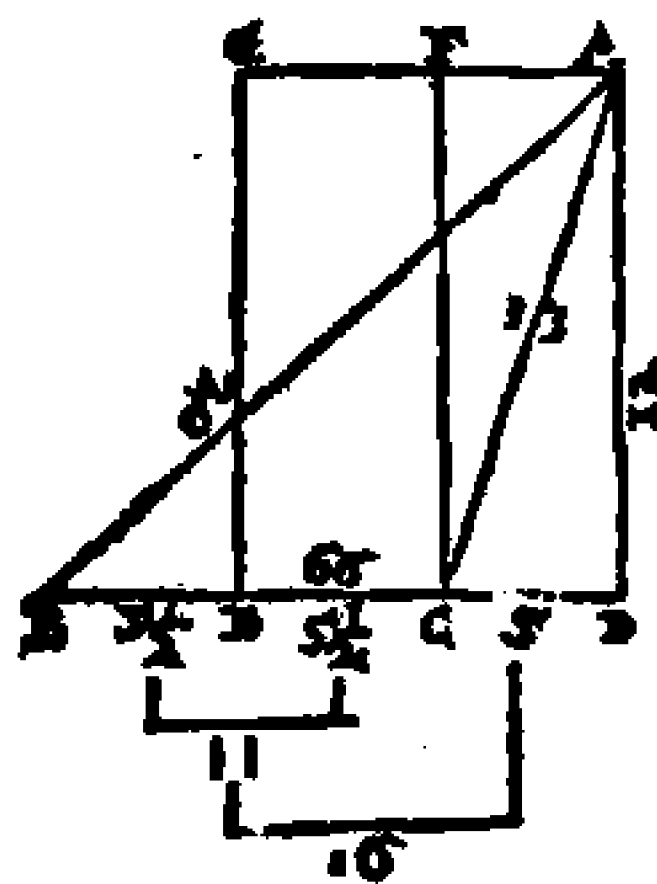
POSTERIOR cadat perpendicularis AE , in latus BC , productum. Quoniam igitur quadrata ex BE , CE , dupla sunt quadratorum ex BD , DE : Item quadrata ex AE , DE , bis sumpta, dupla sunt quadrato ex AD ; quod quadrata ex AE , DE , semel sumpta, equalia sunt quadrato ex AD ; erunt quadrata ex BE , CE , una cum quadrato ex AE , DE , bis sumpta, dupla quoque quadratorum ex BD , DE , AD . Cum ergo quadratum ex DE , bis sumptum, duplum sit quadrato ex DE ; erit reliqua quadrata ex BE , CE , una cum quadrato ex AE , bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex BD , AD . Quare cum quadratum ex BE , AE , aequale sit quadrato ex AB ; & quadratum ex CE , AE , quadratum ex AC ; erunt quoque quadrata ex AB , AC , dupla quadratorum ex AD , DB . Quod erat ostendendum.

NON te moueat autem, quod ad huius theorematum demonstrationem adhibuerimus pronuntiatum 20. quod vniuersaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonstratur lib. 5. proposit. 5. quoniam in dupla proportionem facile concedi potest sine demonstratione, ut in expositione eius principij diximus: Vel propositio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonstrari potest: Vel certe theorema ipsum post librum 5. demonstrari: ita ut circulus in demonstrando nulla ratione committatur; etiam si principium illud demonstraretur lib. 5. quia propositio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.



Ex his autem, quæ proximis duobus theorematibus, & proposit. 47. lib. 1. demonstrata sunt; aream cuiusque trianguli latera habentis nota inuenimus, ut rectè hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonstrat, hac fere ratione. Sit primò triangulum rectangulum ABC , cuius latera nota sint, nempe AB , 10. palmorum; AC , 8. BC , 6. Diuiso latere BC , bisariam in D , ut sint CD , BD , 3. palmorum, perficiatur rectangulum $ACDE$, quod aequale est triangulo ABC , ut in scholio proposit. 41. lib. 1. ostendimus. Quia verò ex ductu CD , trium palmorum in CA , 8. palmorum produciatur area rectanguli CE , 24. palmorum quadratorum, ut ad initium huius libri docuimus; Totidem palmos quadratos continebit triangulum ABC , rectangulo CE , aequale. Quod est propositum.

SIT deinde triangulum obtusangulum ABC , cuius latera sint cognita; AB , 20. palmorum; AC , 13. BC , 11. Primum igitur inuenienda



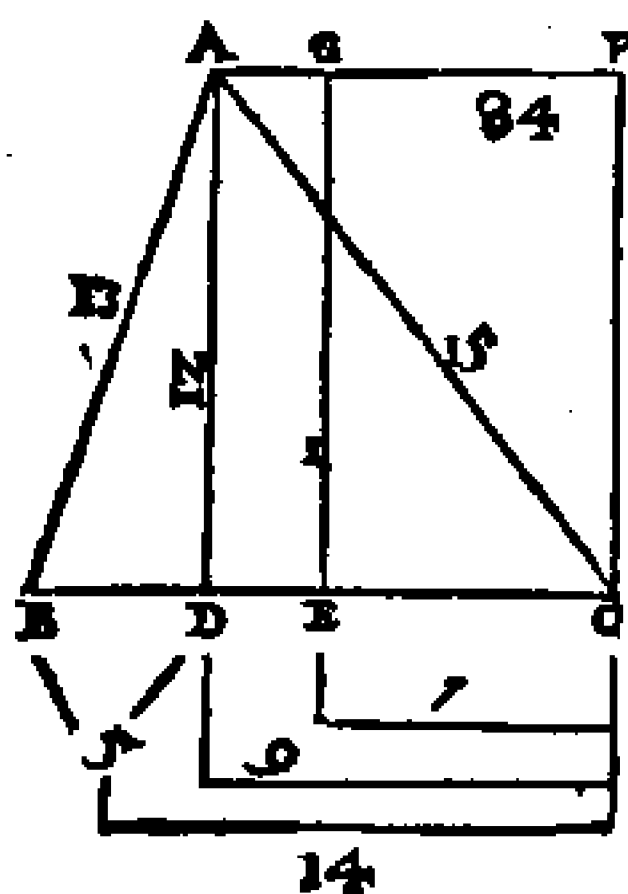
est quantitas perpendicularis linea AD ex A , in latus BC , protractum demissa, hoc modo. Quoniam quadratum lateris AB , maius est, quàm quadrata laterum AC , BC , rectangulo bis comprehenso sub BC , CD ; si quadrata laterum AC , BC , nempe 169. 121. quæ efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris AB , remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenso sub BC , CD , cuius numeri dimidium 55. dabit rectangulum sub BC , CD . Si igitur 55. rectangulum sub BC , CD , diuidatur per 11. latus notum BC , exhibit reliquum latus CD , 5. palmorum, ut Ioan. Regiomontanus demonstrat proposit. 17. lib. 1. de triangulis, & à nobis demonstratum est in lib. de mensurationibus omnium quantitarum.

e 12. secund.
di.

f 47. primi.

g 34. primi.

Quia verò quadrata laterum AD , CD , equalia sunt quadrato lateris AC ; si quadratum 25. palmorum, nempe lateris CD , 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris AC , remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD . Quare latus AD , erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12. Iam verò diuiso latere BC , bisariam in E , educantur ex C , E , ad BD , perpendiculares CF , EG , occurrentes rectæ AG , quæ per A , ipsi BD . parallela ducitur, in punctis F , G . Quibus peractis, si E , C , palmorum quinque cum dimidio, ducatur in CF , 12. palmorum, (Est enim CF , ipsi AD , aequalis,) exurgat area rectanguli CG , 66. palmorum: quod cum aequale sit triangulo ABC , ex scholio proposit. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum CG , & triangulum ABC , in eisdem parallelis, &c.) Erit quoque area trianguli ABC , palmorum quadratorum 66. quod est propositum.

h 13. secund.
di.

i 47. primi.

SIT postremò triangulum acutangulum ABC , latera habens nota: AB , 13. palmorum; AC , 15. BC , 14. Primum igitur hic quoque, repertienda est quantitas perpendicularis AD , ex A , ad BC , demissa, hac ratione. Quoniam quadratum lateris AB , minus est, quàm quadrata laterum AC , BC , rectangulo comprehenso bis sub BC , CD ; si quadratum lateris AB , nimirum 169. detrahatur ex quadrato laterum AC , BC , hoc est, ex 225. 196. quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo comprehenso bis sub BC , CD , cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum sub BC , CD . Si igitur 126. rectangulum sub BC , CD , diuidatur per BC , latus notum, ut per 14; exhibit reliquum eius latus CD , palmorum 9. ut constat ex Ioan. Regiomontano lib. 1. de triangulis proposit. 17. & à nobis demonstratum est in libro de mensurationibus omnium quantitarum. Quoniam autem quadrata ex AD , CD , equalia sunt quadrato ex AC ; si quadratum 81. palmorum, nempe lateris CD , 9. palmorum nuper inuenti, auferatur

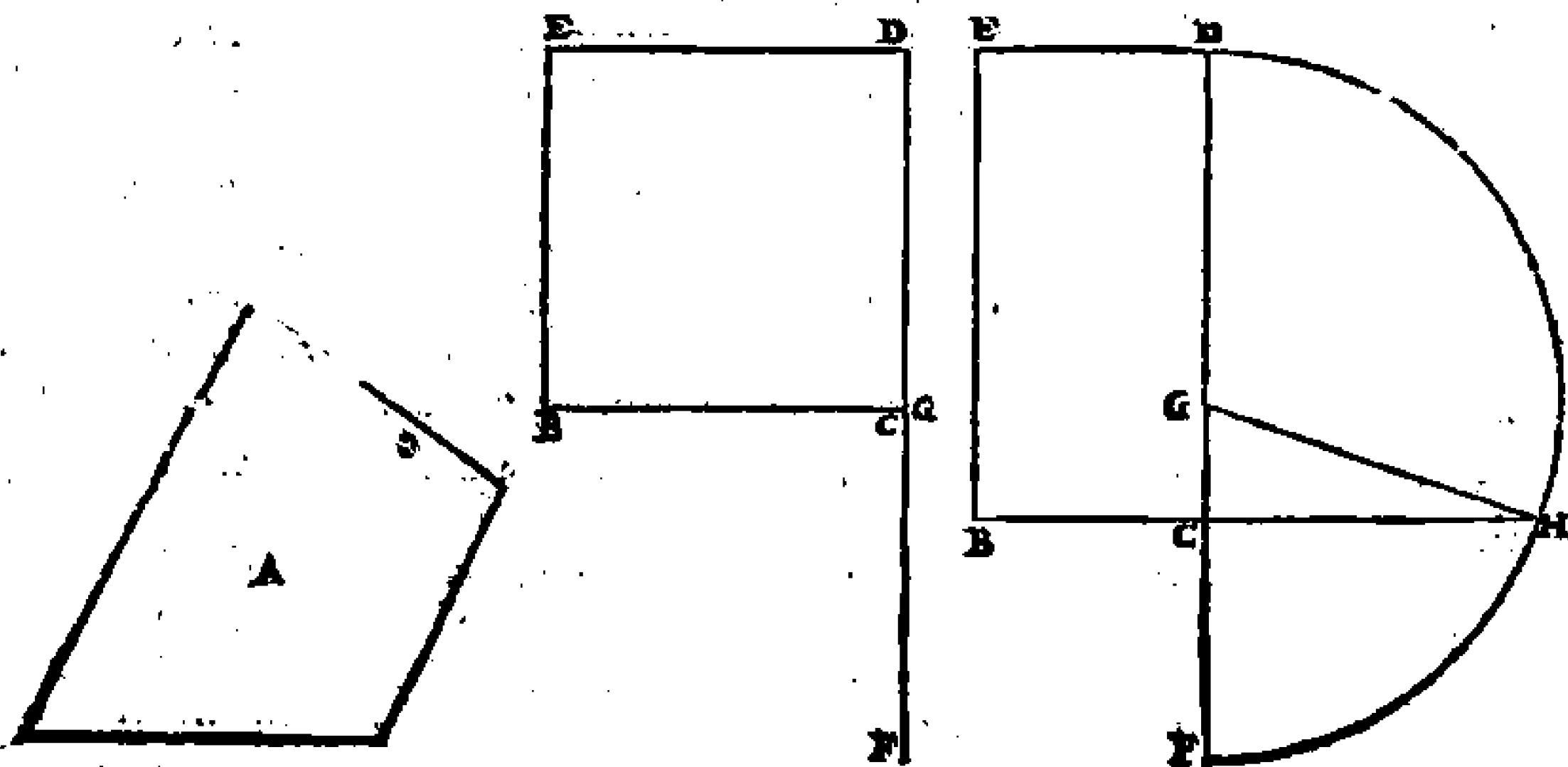
tur ex 225. quadrato lateris AC ; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD . Quare cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12; erit latus AD , 12. palmorum. Iam vero diuiso latere BC , bifariam in E , educantur ex C , E , ad B , C , perpendiculares CF , EG , occurrentes recte AF , quae per A , ipsi BC , parallela ducitur, in punctis G , F . Quibus peractis, si CE , 7. palmorum ducatur in EG , 12. palmorum; (2 est enim EG , recta ipsi AD , aequalis) exurgit area rectanguli EF , palmorum 84. Quod cum triangulo ABC , sit aequale, ex scholio propof. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum EF , & triangulum ABC , in eisdem parallelis, &c.) erit quoque area trianguli ABC , 84. palmorum. Quod est propositum.

Ita $AQVE$ in vniuersum area cuiuscunque trianguli producit ex dimidio basis in perpendicularem, quae a vertice ad basim demittitur, ut in exemplis datis est manifestum. Sed plura hac de re in libro de mensurationibus omnium quantitarum, quem propediem, Deo iuvante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum vno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum vno latere, reliqui anguli, & latera cognoscantur, demonstrauimus in nostris triangulis rectilineis.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

14.

DATO rectilineo aequale quadratum constituere.

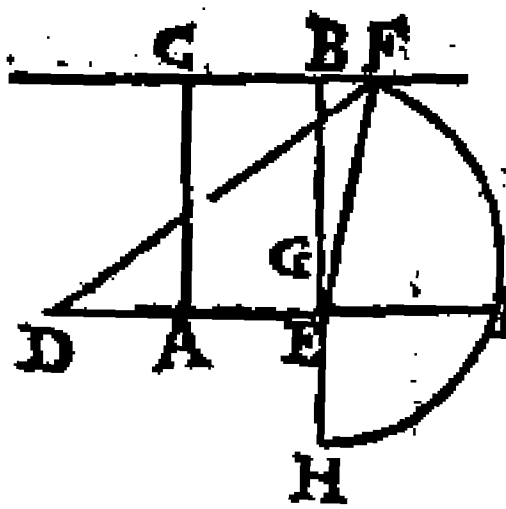
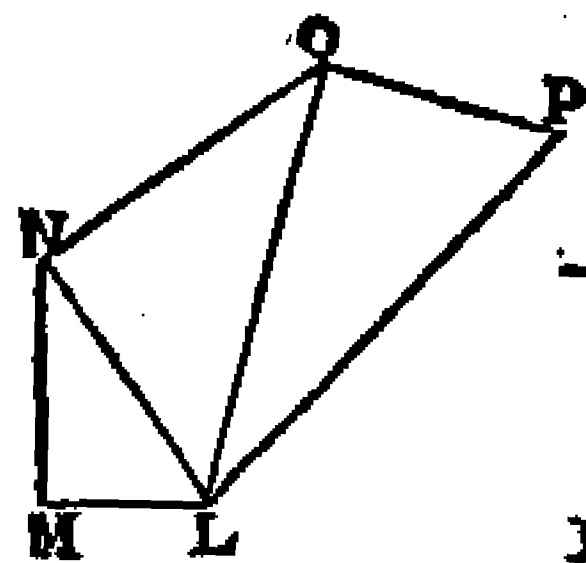
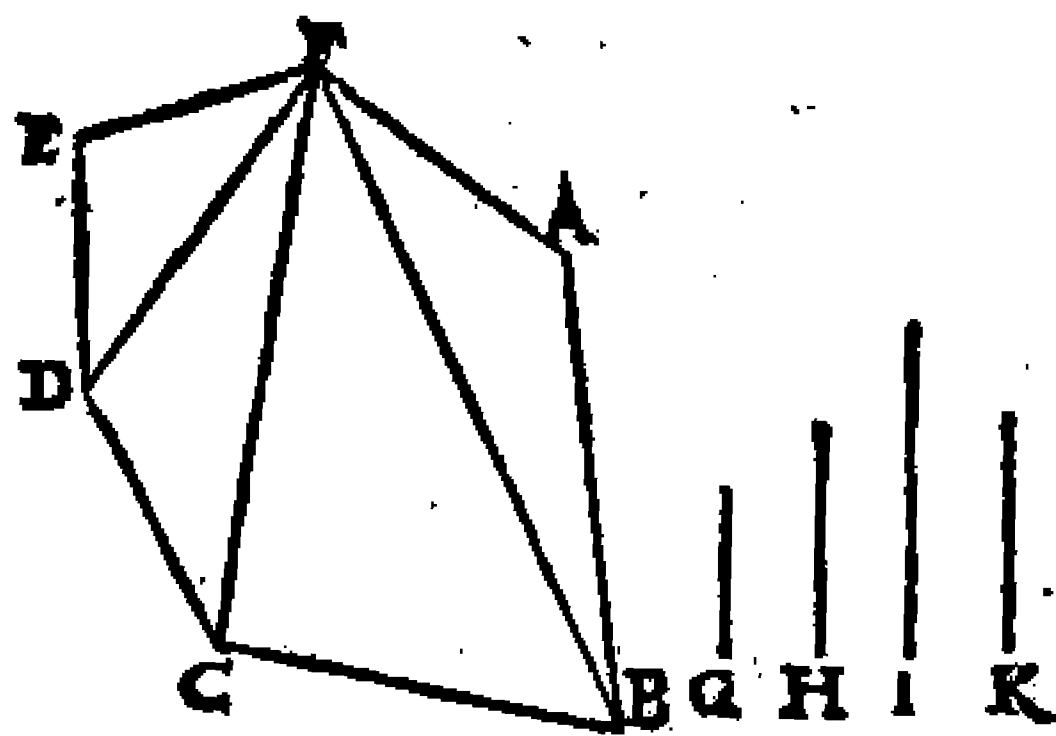


Si r datum rectilineum A , cui quadratum aequale constituendum est. a Constituatur parallelogrammum $BCDE$, aequale rectilineo A , habens angulum rectum, cuius vnum latus, ut DC , producat ad F , sitque CF , recta aequalis rectae BC . Diuidatur quoque DF , bifariam in puncto G , quod cadet aut in punctum C , aut non. Si cadit in punctum C , erit recta BC , (cum aequalis ponatur rectae CF), rectae CD , aequalis. Quare rectangulum BD , erit quadratum, cum latera DE , EB , aequalia sint oppositis lateribus BC , CD ; atque adeo constitutum erit quadratum aequale rectilineo A . Si vero punctum G , non cadit in C ; facto G , centro, describatur intervallo GD , vel GF , semicirculus FHD , producatque BC , donec circumferentiam secet in H . Dico igitur, quadratum rectae CH , esse aequale rectilineo A . Ducta enim recta GH , quia recta DF , diuiditur bifariam in G , & non bifariam in C ; erit rectangulum comprehensum sub DO , CF , hoc est, rectangulum BD , vna cum quadrato rectae GC , aequale quadrato rectae GF , hoc est, quadrato rectae GH ; cum rectae GF , GH , sint aequales: At quadratum rectae GH , aequale est quadratis rectarum GC , CH . Igitur rectangulum BD , vna cum quadrato rectae GC , aequale quoque erit quadratis rectarum GC , CH . Quam ob rem dempto communi quadrato rectae GC , remanebit rectangulum BD , hoc est, rectilineum A , quadrato rectae CH , aequale. Dato ergo rectilineo aequale quadratum constituiimus: Quod facere oportebat.

SCHOLIUM.

VERUM quia laboriosum est, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum construere aequale, quod sapius super datam rectam constituendam sit, ex propositione 44. libri 1. rectangulum aequale triangulo, facilius fortasse describemus quadratum dato rectilineo aequale, si datam figuram rectilineam in triangula resoluamus, & cuilibet triangulo quadratum aequale efficiamus, hoc est, latus quadrati, quod cuius triangulo aequale sit, inuestigemus: quod factum facillimum est, ut mox ostendemus. Nam si per ea, quae in scholio propof. 47. lib. 1. scripsimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod sit omnium inuentorum laterum quadratis aequale, factum erit, quod proponitur.

Ut si datam sit rectilineum $ABCDEF$, resoluemus illud in triangula ABF , FBC , CFD , DEF , inuenimusque latera G , H , I , K , quorum quadrata sint illi ordine equalia. Deinde angulum rectum constituemus M , & lineas LM , MN , lateribus G , H , aequales. Ducta autem recta NL , erigemus ad eam perpendicularem



NO, lateri I, aequalem. Similiter ducta recta OL, excitabimus illi perpendicularem OP, lateri K, aequalem, iungemusque rectam PL. Atque hoc modo progrediemur, donec ultimo lateri sumpta sit perpendicularis linea aequalis, qualis hic fuit perpendicularis OP, ultimo lateri K, aequalis. Nam quadratum rectae PL, postremo lato ducta aequale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, ut ad propof. 47. lib. I. demonstravimus, atque adeo omnibus triangulis ABF, FBC, CFD, DEF, hoc est, data figura rectilinea ABCDEF.

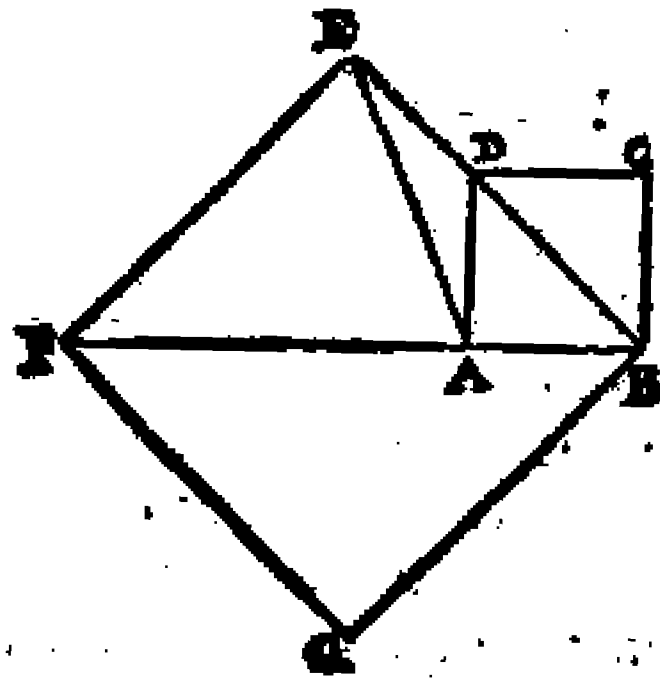
PRÆAXIS autem, quacuius triangulo quadratum aequale inveniatur, facilius est. Sit enim inveniendum quadratum aequale quarto triangulo DEF, data rectilinea figura. Dividatur quodcumque latus, nempe DE, bisariam in A, producaturnque, quantum libet. Ducta deinde per angulum oppositum F, lateri DE, parallela FB, ducatur per E, ad DE, perpendicularis HEB, secans FB, in B, sitque BH, ipsi AE, dimidio lateris DE, aequalis. Postremo divisa tota linea, BH, bisariam in G, describatur ex G, ad intervallum GH, vel GB, arcus secans latus DE, productum in I. Dico quadratum lateris EI, aequale esse triangulo DEF. Si namque compleatur rectangulum AEC, & semicirculus BH, ducaturque recta GI,

ostendemus, ut in hac propof. 14. quadratum ex EI, rectangulo AB, aequale esse. Cum ergo rectangulum AB, triangulo DEF, sit aequale, ex scholio propof. 41. lib. I. quod basis DE, sit dupla basis AE, constat propositum.

QUONIAM vero secundo hoc libro Euclides multa de rectangulis parallelogrammorum, atque quadratis disputavit: recte inferi hic poteris sequens problema de quadrato non iniucundum, ad hunc modum.

DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Invenire latus ipsius quadrati.

EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiusdem recta AB; inveniendumque sit latus illius quadrati. Ex recta AB, describatur quadratum AC, cuius diameter ducta BD, producaturn ad E, ut sit DE, recta



recta AD, aequalis. Dico rectam BE, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus BE, excessu data AB. Ducatur enim EF, perpendicularis ad BE, quae rectam BA, productam secet in F. Quoniam igitur in triangulo BEF, angulus FEB, rectus est, & EBF, semirectus, ex corollario 2. propositionis 4. huius lib. 2. erit & BFE, semirectus. Quare rectae BE, FE, aequales sunt. Si igitur ex F, ducatur FG, parallela ipsi BE; & ex B, recta BG, parallela ipsi EF, occurrens priori in G, constitutum erit quadratum rectae BE. Quod si ducatur recta AE, erunt anguli AED; EAD, aequalibus lineis DE, DA, oppositi aequales. Quare si demantur ex rectis angulis DEF, DAF, remanebunt anguli AEF, EAF, aequales; ideoque rectae EF, AF, aequales erunt. Quoniam vero diameter BF, rectam AF, superat data recta AB; superabit eadem diameter BF, latus quadrati EF, eadem recta AB, quod est propositum.

a 32. primi.

b 6. primi.

c 5. primi.

d 6. primi.

FINIS ELEMENTI SECUNDI.



EVCLI.

E V C L I D I S E L E M E N T V M T E R T I V M.

D E F I N I T I O N E S.

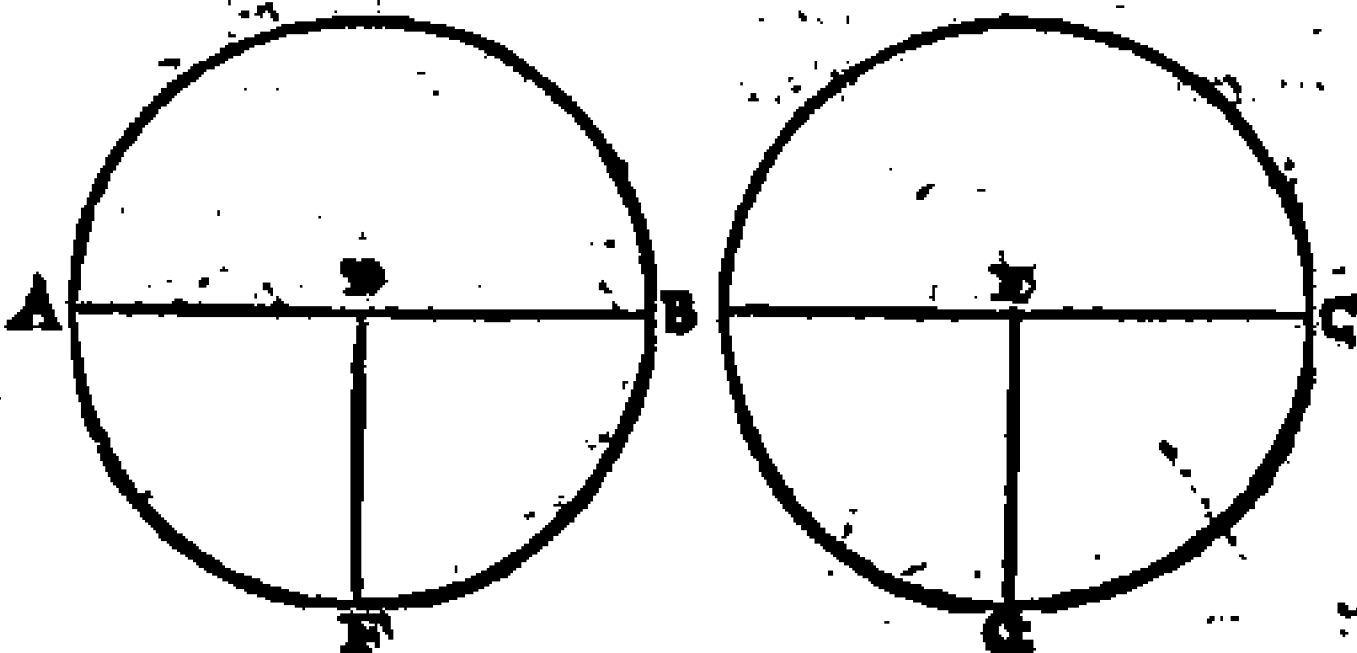
I.

Æ Q V A L E S circuli sunt, quorum diametri sunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ linæ sunt æquales.

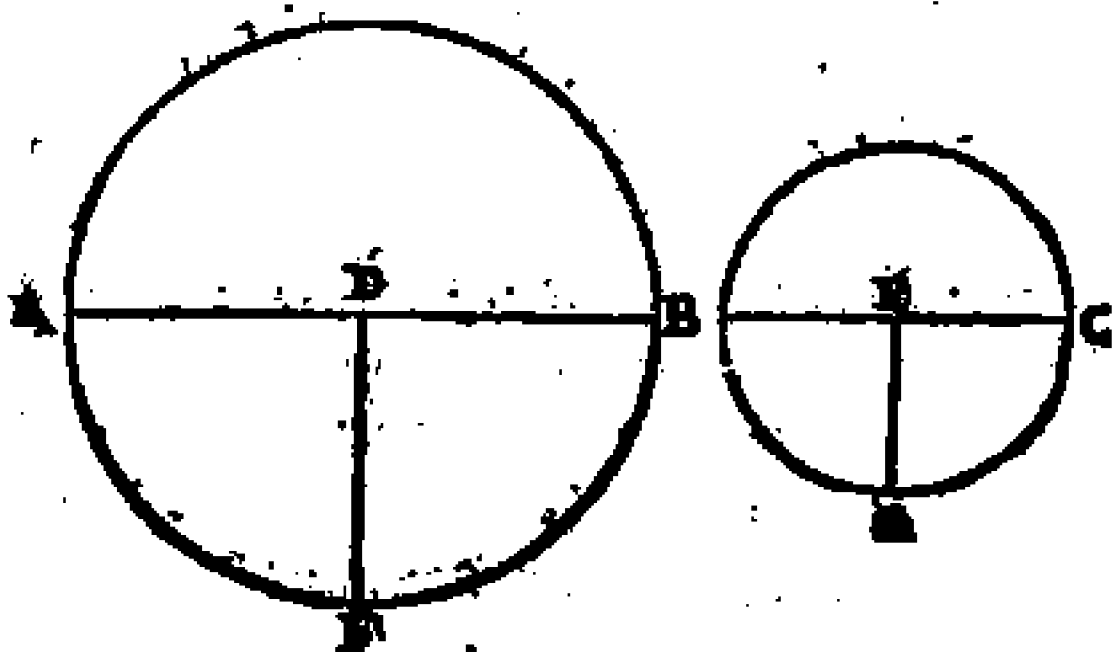


*V*ONIAM Euclydes hoc 3. libro varias circuli proprietates demonstrat, idcirco exemplat prius terminos quosdam, quorum frequens in eo futurum est usus. Primum itaque docet, eos circulos esse æquales, quorum diametri, vel semidiametri æquales sunt.

Cum enim circulus describatur ex circumvolutione semidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, ut libro 1. dicimus, perspicuum est, eos circulos esse æquales, quorum semidiametri, seu rectæ ex centris ductæ, sunt æquales; vel etiam quorum totæ diametri æquales sunt.

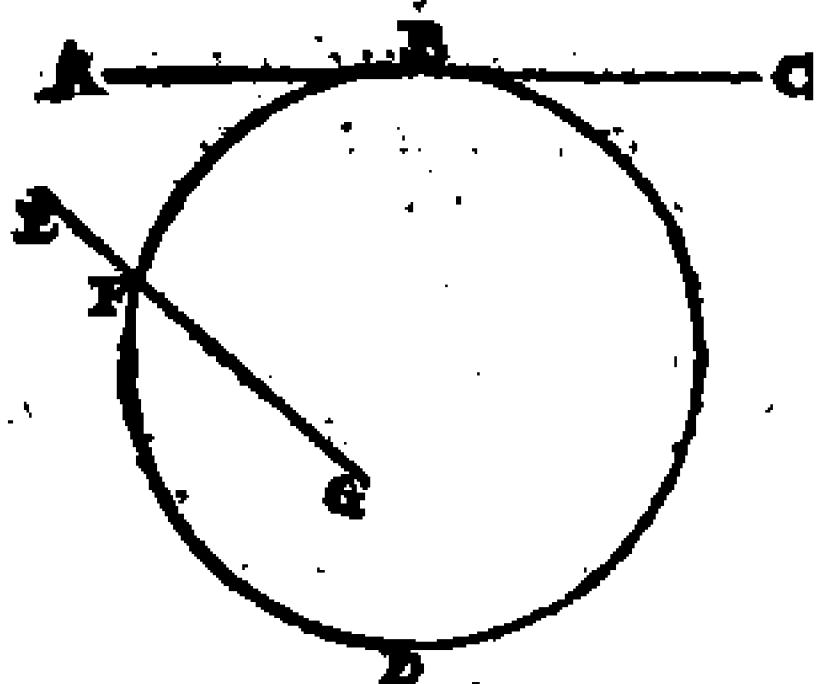


Ut si diametri AB, BC, vel rectæ DF, EG, à centris D, & E, ductæ sint æquales, æquales erunt circuli AFD, & BGC. Sic etiam e contrario, si circuli sint æquales, erunt diametri, vel rectæ à centris ductæ, æquales. Ex his liquet circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales, inæquales esse: atq; aded illi, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, semidiametrosve inæquales esse; maiorem quidem maiorem, & minorem minorem.



II.

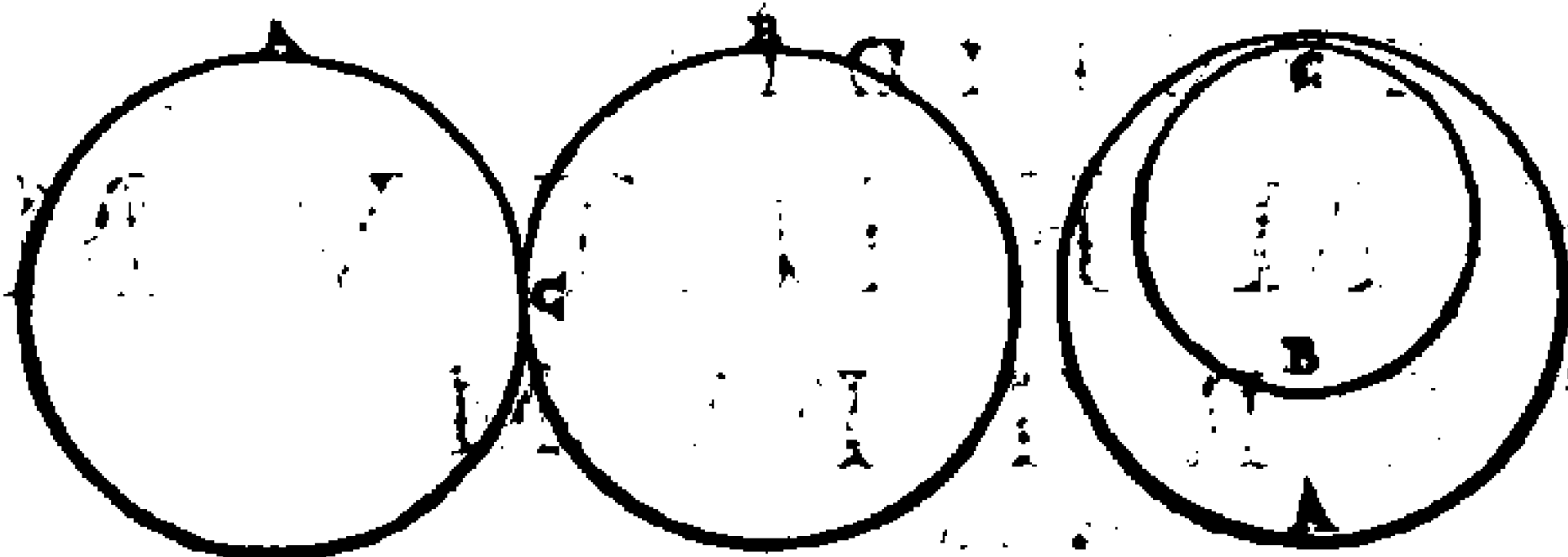
R E C T A linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producat, circulum non secat.



Ut recta AB, si ita circulum BFD, tangat in B, ut producta ad C, nullaratione circulum secet, sed tota luceat extra ipsum, dicetur tangere circulum. At verò recta EF, quia ita eundem circulum tangit in F, ut producta ad G, secet circulum, cadatq; intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.

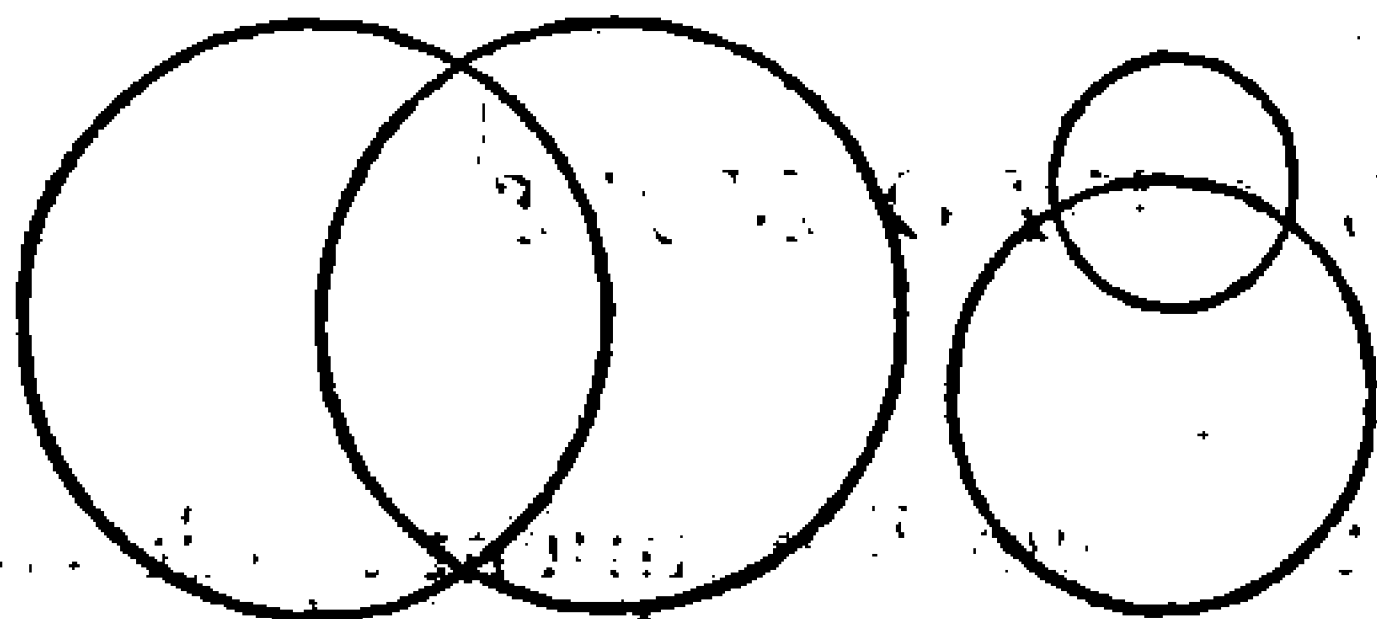
III.

C I R C V L I sese mutuo tangere dicuntur, qui sese mutuo tangentes, sese mutuo non secant.



EODEM modo
duo circuli AC, BC,
se mutuo dicuntur tan-
gere in C, si ita sese co-
tingant in C, ut nem-
ter alterum secet. Est
autem hic contactus
circularum duplex. Aut
enim exterius sese cir-
culi tangunt, ut quan-

do vnus extra alterum est positus; aut in-
terius, quando vnus intra alterum con-
stituitur. Quod si duo circuli ita se mu-
tuo tangant, ut vnus alterum quoque se-
cet, dicentur circuli illi se mutuo secare,
& non tangere.



IV.

In circulo æqualiter distare
à centro rectæ lineæ dicuntur, cū perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur,
sunt æquales. Longius autē abesse illa dicitur, in quâ maior perpendicularis cadit.

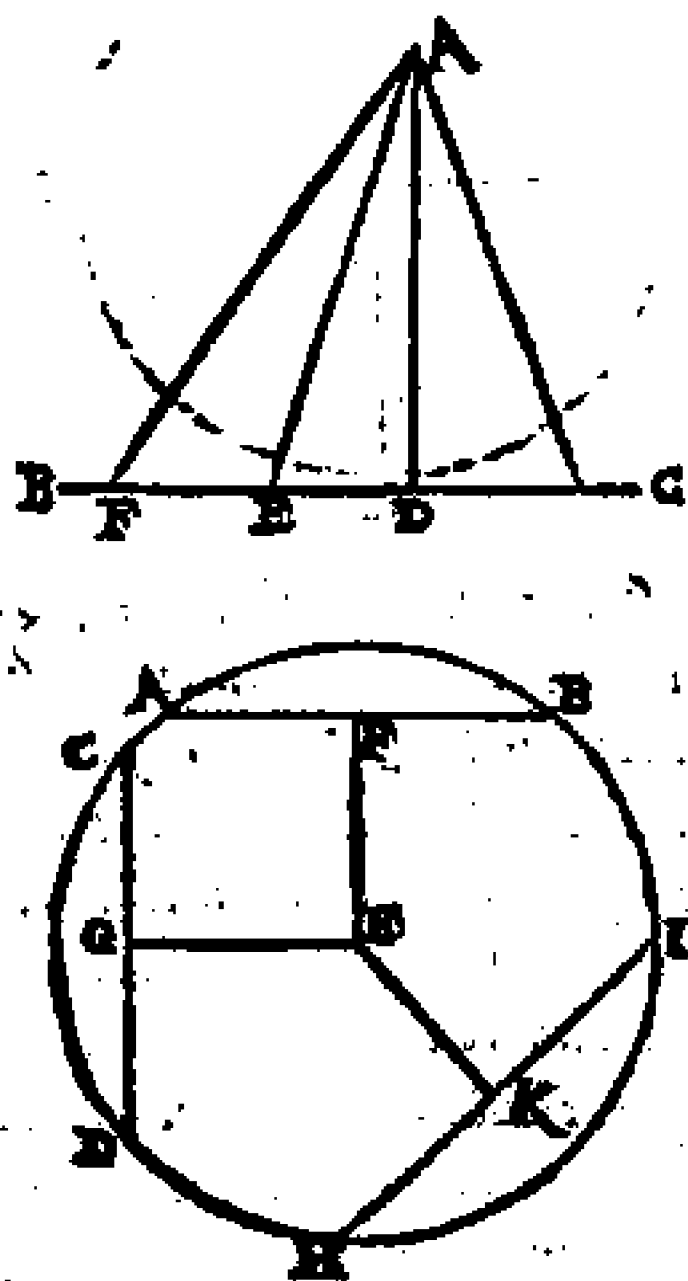
QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur,
breuissima est perpendicularis, & semper eadem; alie verò infinitis modis variari possunt; rectæ distantia il-
lius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt di-
stantia puncti A, à recta BC, dicitur esse perpendicularis AD, non autem
AE, vel AF, vel alia quauis, quæ non perpendicularis est; quia AD, omnibus
est breuior, ex corollario propositionis 19. libri 1. Immo non solum AE, AF,
maiores sunt, quàm AD, sed etiam ipsa inter se inæquales sunt. Est enim
AF, maior, quàm AE, cū angulus AEF, sit obtusus, & AFE, acutus; &
sic de aliis lineis non perpendicularibus. Quod enim AFE, acutus sit, con-
stat ex eo, quod in triangulo ADF, duo anguli ADF, AFD, minores sunt
duobus rectis. Hinc enim fit, cū ADF, rectus sit, angulus AFD, recto esse
minorem. Eadem ratione angulus AED, ostenditur acutus, propterea quod
in triangulo ADE, duo anguli ADE, AED, minores sunt duobus rectis,
& ADE, rectus est. ac proinde, cū ambo AED, AEF, æquales sint duo-
bus rectis, erit AEF, obtusus. Hinc factum est, ut Euclides æqualem distan-
tiam rectarum in circulo ab ipsius centro definiat per æquales perpendi-
culares, & inæqualem distantiam per inæquales. Vt duæ rectæ AB, CD, in
circulo ABCD, æqualiter dicuntur distare à centro E, si perpendiculares EF,
EG, æquales fuerint. At linea CD, longius abesse dicitur à centro E, quàm
linea AB, si perpendicularis EG, maior fuerit perpendiculari EF.

a 19. primi.

b 17. primi.

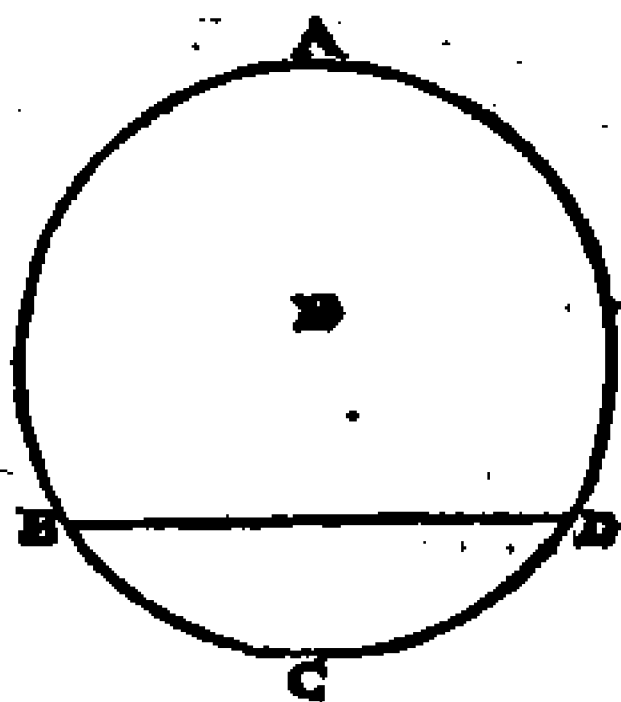
c 17. primi.

d 13. primi.



V.

SEGMENTVM circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria com-
prehenditur.

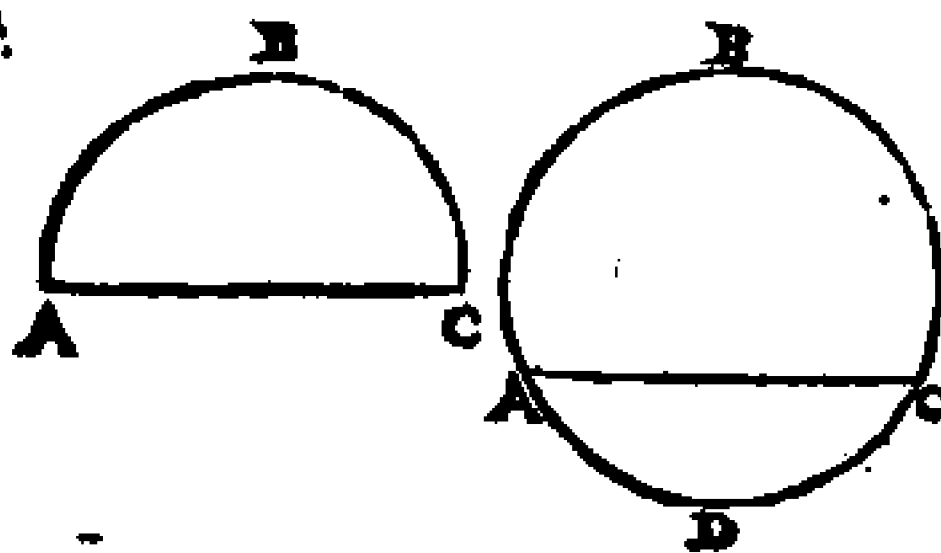


VT si ducatur in circulo ABCD, recta BD, ut cuiusque dicitur tam fi-
gura BAD, contenta circumferentia BAD, & recta BD; quàm figura
BCD, comprehensa recta BD, & circumferentia BCD, circuli segmen-
tum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum, Semicirculus, quando re-
cta BD, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo maius, quando
recta BD, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale
est segmentum BAD; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod cen-
trum circuli constituitur, cuiusmodi est segmentum BCD. Id quod ad de-
finitionem 18. lib. 1. demonstrauimus. Vocatur à plerisque Geometru recta
BD, chorda, & circumferentia BAD, vel BCD, arcus.

VI.

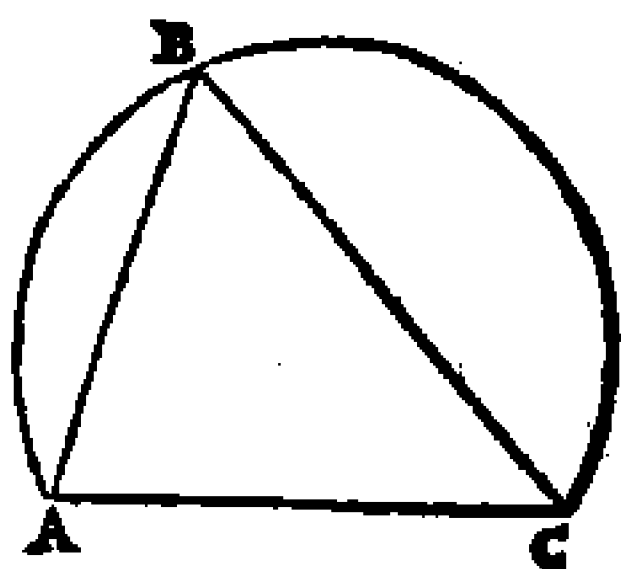
SEMENTI autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria com-
prehenditur.

DEFINITIO



DEFINITION iam Euclides tria genera angulorū, q̄ in circulis considerētur. Primo loco angulum segmenti, dicens, angulum mixtum BAC, vel BCA, contentū sub recta linea AC, & circumferentia ABC, appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi. Si verò segmentum maius semicirculo extiterit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si denique segmentum minus fuerit semicirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.

VII.

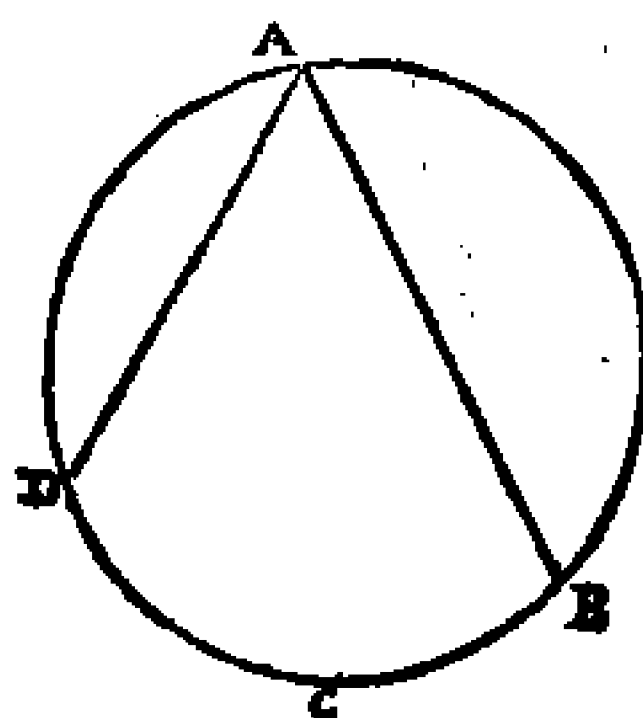


IN segmento aut angulus est, cū in segmenti peripheria sumptū fuerit quodpiam punctū, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is, in quā, angulus ab adiunctis illis lineis cōprehensus.

SI r segmentum circuli quodcunque ABC, cuius basis recta AC. Ex suscepto quolibet puncto B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema basis, recta linea BA, BC. Angulus igitur rectilineus ABC, dicitur existere in segmento ABC.

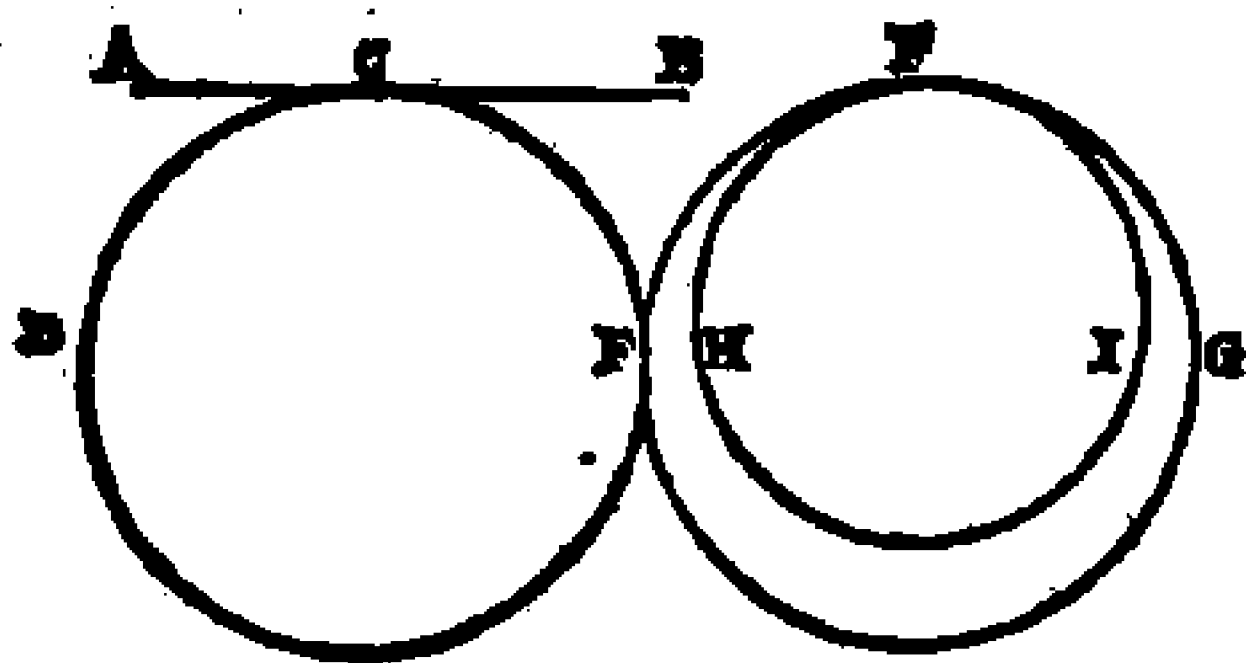
IIX.

CUM verò comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam assumunt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.



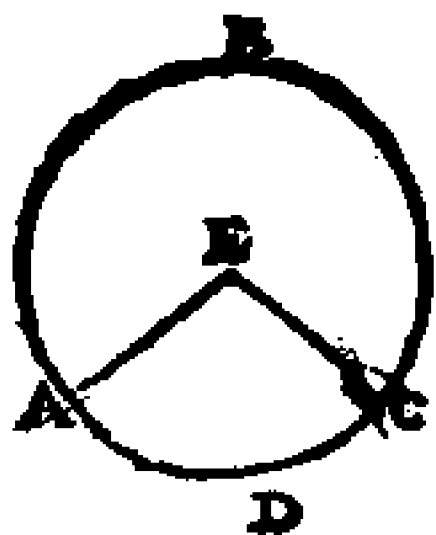
EX puncto A, quolibet suscepto in circumferentia circuli ABCD, ducantur rectæ duæ lineæ AB, AD, ad duo extrema B, & D, circumferentia BCD, cuiusq̄ quā quidē duæ rectæ AB, AD, assumunt. Angulus itaq̄, rectilineus BAD, insistere dicitur circumferentia BCD. Perspicuū autē est, hunc angulum à præcedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus BAD, iuxta præcedentē quidē defin. dicitur esse in segmento BAD, si recta BD, basis ducatur: ex hac verò insistere circumferentia BCD. Non tamē confundendus est angulus in segmento aliquo, cū angulo, q̄ circumferentia insistit, quāvis vnus et idem sit: ad diuersa siquidē referuntur. Angulus enim in segmento, segmentū, in quo existit, angulus autē insistens circumferentia, circumferentiā, quæ basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur segmentū aliquod circuli BCD, in circulo ABCD, nō erit idē angulus in hoc segmento existens, & eius circumferentia insistens. Angulus enim in eo existens, erit BCD; at eius circumferentia BCD, insistēs, erit angulus BAD, q̄ multū ab eo differt. Quæ in re mirū in modū hallucinati sunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nōnulli. Quod aut angulus in segmento, & angulus circumferentia cuiuspiā insistēs, ad diuersos arcus referatur, luce clarius patebit ex vlt. propos. lib. 6. quæ solūm conuenire potest circumferentiis circularū, quibus anguli insistūt, non aut in quibus existunt, vti eo in loco ostendemus. Idem quoq̄, facile cōstat ex verbo Græco βῆναι; quod ascendisse significat. Ascendit. n. angulus DAB, supra circumferentiā BCD.

PRAETER tres dictos angulos consideratur etiā à Geometria angulus contingentia, q̄ continetur linea



recta tangente circuli, & circumferentia circuli, vel certē duabus circumferentiis se mutuo tangentibus, siue hoc exterius fiat, siue interius. Exemplum. Si recta AB, tangat circulum CDE, in C; angulus mixtus ACD, vel BCE, dicetur angulus contingentia, siue contactus: Rursus, si circulus CED, tangat circulum EFG, exterius in E: Itē circulus HFI, circulum EFG, interius in F; appellabitur tam angulus curvilineus CEF, q̄ EFH, vel GFI, angulus contactus, seu contingentia. Sunt itaq̄, vt vides, tres anguli contingentia, vnus quidē mixtus, reliqui verò duo, curvilinei.

IX.



SECTOR autem circuli est, cū ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirū figura, & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

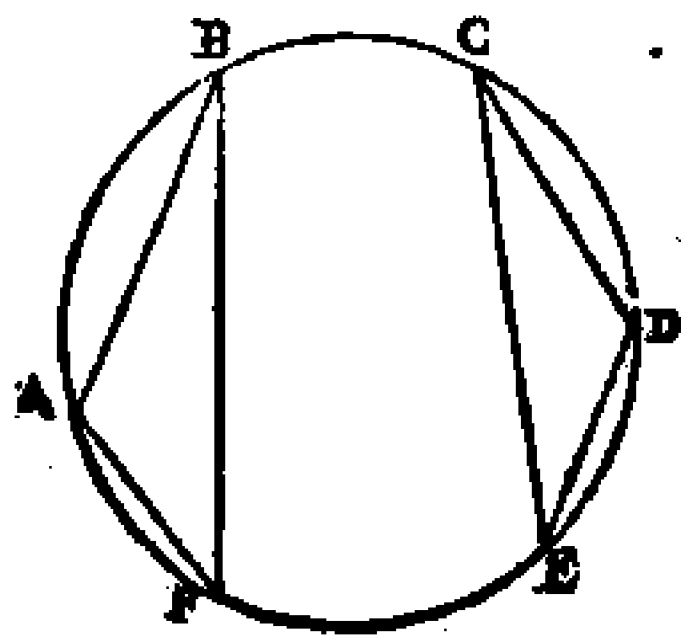
SI in circulo ABCD, cuius centrū E, rectæ AE, CE, constituant angulum AEC, ad centrum E; nominabitur figura AECD, contenta rectis AE, EC, & circumferentia ADC, quam prædictæ lineæ assumunt, Sector circuli. Ex hoc autē perspicuē etiam

colligitur, angulum, qui defn. 8. explicatur, referri ad circumferentiam, quæ ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, ut multi interpretes existimaverunt. Nam sicut in hac defn. Euclides intelligit circumferentiam quæ existit, ut multi interpretes existimaverunt. Nam sicut in hac defn. Euclides intelligit circumferentiam quæ existit, ut multi interpretes existimaverunt. Nam sicut in hac defn. Euclides intelligit circumferentiam quæ existit, ut multi interpretes existimaverunt. Ita quoque in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheria, quam recta linea assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circumferentiam constituti, quandoquidem in utraque defn. vsu est eodem verbo Græco περιφέρεια.

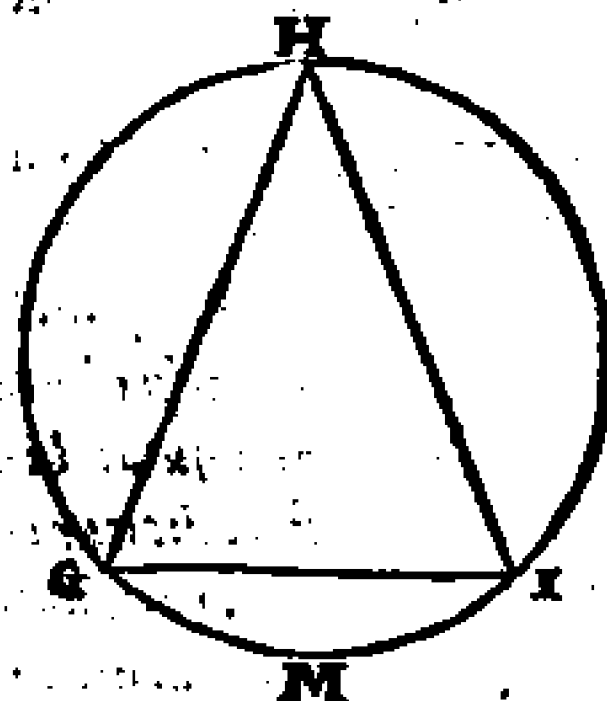
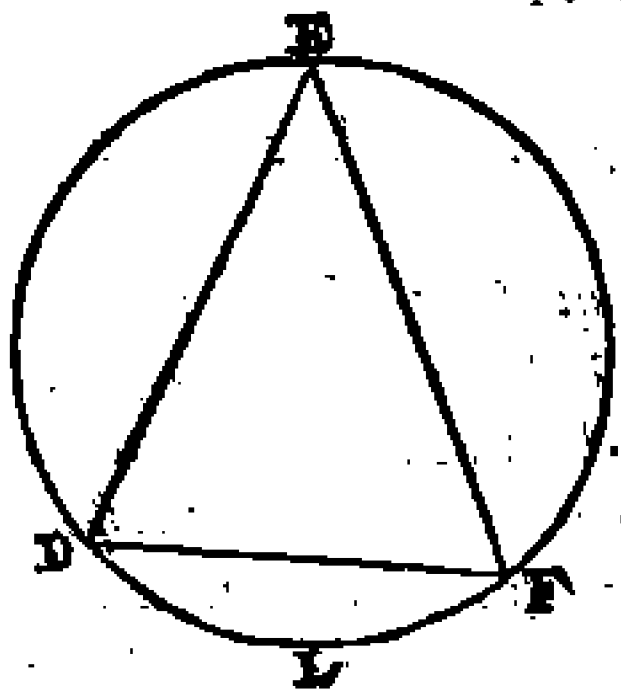
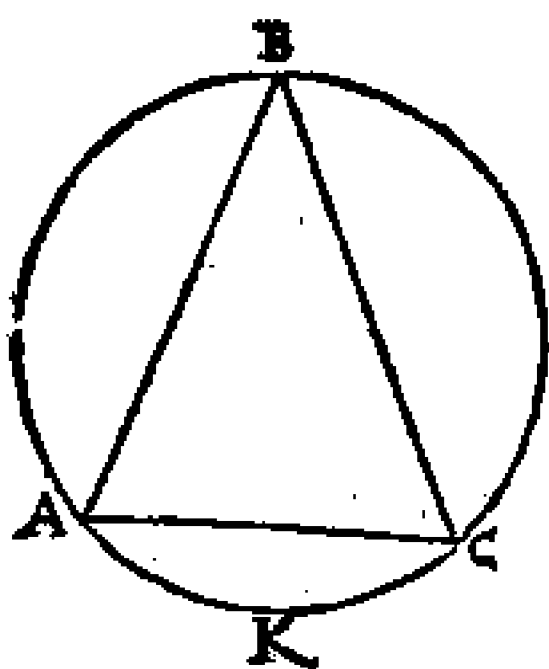
X.

SIMILIA circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

SEGMENTA videlicet $ABDF$, $DCAE$, eiusdem circuli $ABCD$, EF , quæ capiunt hos duos angulos ABF , DCE , æquales: vel, quod idem est, in quibus quidem anguli æquales existunt, iuxta 7. defn. similia dicuntur, & ipsa circumferentia $ABDF$, $DCAE$, similes quoque.



EODEM modo segmenta diversorum circulorum, tam equalium, quàm inequalium, à Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos, vel in quibus æquales anguli existunt. Ut si in circulis $ABCK$, $DEFL$, $GHIM$, anguli ABC , DEF , GHI , fuerint æquales, dicuntur segmenta, seu circumferentia ABC , DEF , GHI , quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes.



Consistit autem hæc segmentorum circumferentiarumve similitudo in eo, quod qualis pars est una circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoque sit altera circumferentiæ, quæ dicitur

huic simili, totius suæ circumferentiæ, ita ut qualis, & quæ pars est circumferentiæ ABC , totius circumferentiæ $ABCA$, talis & tanta quoque pars sit circumferentiæ DEF , totius circumferentiæ $DEFD$; Item talis, & tanta circumferentiæ GHI , totius circumferentiæ $GHI G$. Vel porro segmentorum similitudo in hoc consistit, quod segmenta, seu circumferentiæ similes, ad totas circumferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propof. ult. lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, vel etiam arcus, circumferentiasve appellari similes:

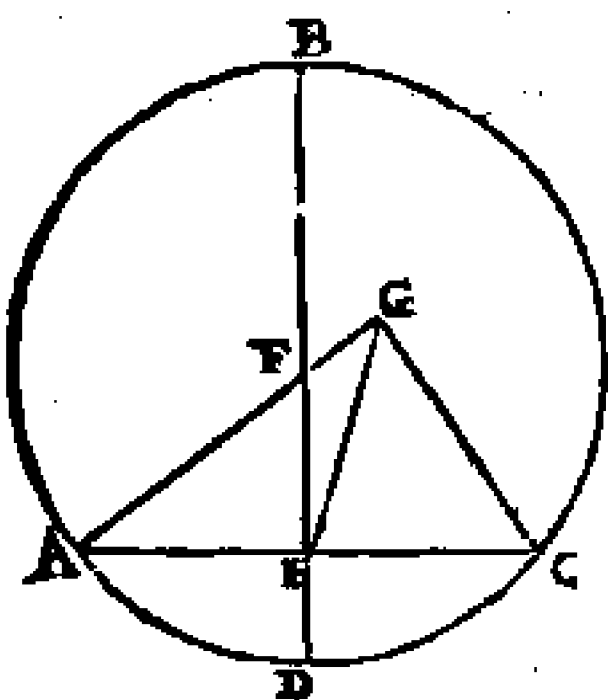
EODEM ratione dicuntur arcus, vel circumferentiæ similes, quibus æquales anguli, iuxta defn. 8. insistant. Ut si in iisdem circulis anguli ABC , DEF , GHI , sint æquales, dicuntur arcus circumferentiæque AKC , DLF , GMI , quibus insistant, similes. Immo si anguli ad centra insistentes arcibus AKC , DLF , GMI , sint æquales, erunt adhuc ipsi arcus similes. Id quod à nobis in scholio propof. 22. huius lib. demonstrabitur.

PROBL. I. PROPOS. I.

I.

DATI circuli centrum reperire.

a 10. primi.



b 8. primi.

Si circulus datus $ABCD$, cuius centrum oportet invenire. Ducatur in eo linea utrunque AC , quæ bifariam dividatur in E , & per E , ad AC , perpendicularis agatur BD , utrinque in peripheria terminata in punctis B , D . Hac igitur bifariam secta in F , dico F esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD , aliud punctum præter F , non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam dividat inæqualiter, quandoquidem in F , divisa fuit æqualiter. Si igitur F , non est centrum, sit punctum G , extra rectam BD , centrum, à quo ducantur lineæ GA , GE , GC . Quoniam ergo latera AB , EG , trianguli AEG , æqualia sunt lateribus CE , EG , trianguli CEG , & basis AG , basi CG , (à centro enim ducuntur) erunt anguli AEG , CEG , æquales, ideoque recti. Erat autem

& angulus AEF , rectus ex constructione. Igitur recti AEE , AEG , æquales sunt, pars & totum, quod est absurdum. Non est ergo punctum G , centrum; eademque est ratio de omni alio. Quare F , centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

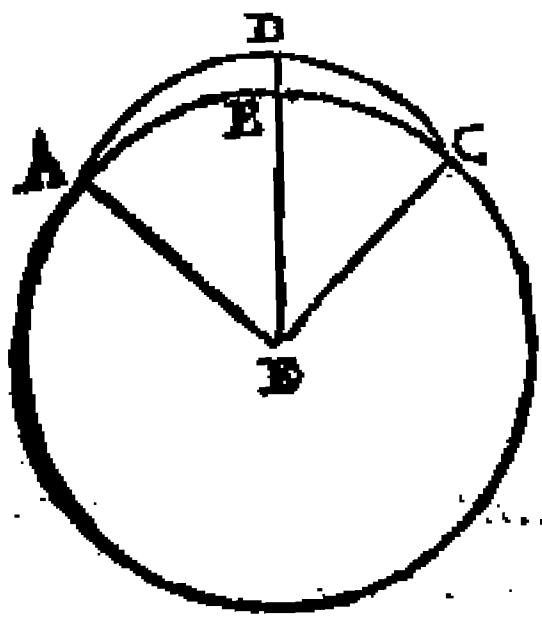
Hinc manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo quod BD , recta rectam AC bifariam secat in E , & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F , necessario esse circuli centrum.

THEOR. I. PROPOS. 2.

2.

Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

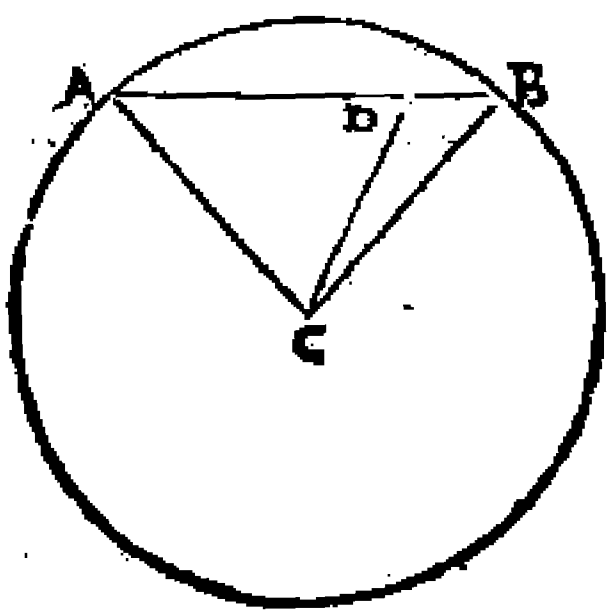
14



IN circulo ABC, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita ut ipsum secet. Si enim nō eadit intra, cadat extra, qualis est linea ADC, recta, ut vult aduersarius. Inuenio igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, necnon ad quoduis punctū D, in recta ADC, lineæ rectæ EA, EC, ED, secetque ED, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera EA, EC, trianguli, cuius basis ponitur recta ADC, æqualia sunt, (ē centro enim ducuntur) erunt anguli EAD, ECD, æquales: Est autem angulus EDA, angulo ECD, maior, externus interno opposito, cum latus CD, in triangulo ECD, sit productum ad A. Igitur & angulo EAD, maior erit idem angulus EDA. Quare recta

E A, maiori angulo ADE, opposita, hoc est, recta EB, sibi æqualis. ^a maior erit, quā recta ED, minori angulo DAE, opposita, pars, quā totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C, nō posse cadere super arcum ABC, ita ut eadē sit, quæ circumferentia ABC. Esset enim recta EA, maior quā recta EB. Quod etiā ex definitione rectæ lineæ patet, cū ABC, arcus sit linea curua, non autē recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I V M.



Idem hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue hoc modo. Recta AB, coniungat duo puncta A, & B, in circumferentia circuli ABC, cuius centrū C. Dico rectā AB, intra circulum cadere, ita ut omniatius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcūq; eius punctū intermedium D, & ex centro educantur rectæ CA, CB, CD. Quoniam igitur duo latera CA, CB, trianguli CAB, æqualia sunt, erunt anguli CAB, CBA, æquales: Est autem angulus CDA, angulo CBA, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD, maior erit, & ob id latus CA, latere CD, maior erit. Quare cum CA, sit ducta à centro ad circumferentiam vsq; non perueniet recta CD, ad circumferentiam, ideoq; punctum D, intra circulum ca-

det. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta AB, intra circulum cadit. Quod est propositum.

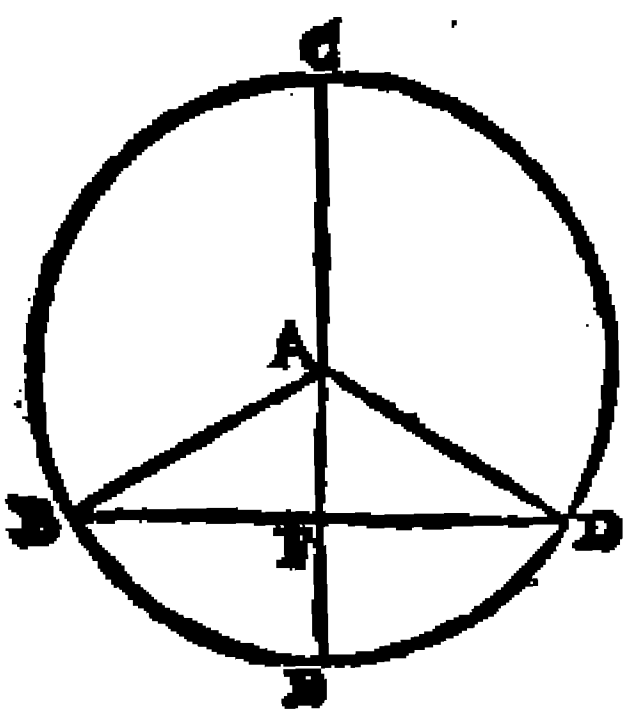
COROLLARIUM.

Hinc est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita ut eum non secet, in uno tantū puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra circulum. Quare circulum secaret, quod est contra hypothesein.

THEOR. 2. PROPOS. 3.

3.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.



PER centrum A, circuli BCD, recta CE, extensa diuidat rectam BD, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & bases AB, AD, æquales. Igitur anguli AFB, AFD, æquales erunt, hoc est, recti. Quod erat primò propositum.

Si iam AF, ad angulos rectos ipsi BD. Dico rectā BD, bifariam secari in F, à recta CE. Ductis enim iterum rectis AB, AD: cū latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF: & latera

AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: erunt latera FB, FD, æqualia. Quod secundò proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

FACILE quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis est ad BD, erit tam quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum AF, FB, quā quadratum rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD. Cum igitur quadratum rectæ AB, æquale sit quadrato rectæ AD, erunt & quadrata rectarum AF, FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto communi quadrato rectæ AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia: atque idcirco & rectæ FB, FD, æquales erunt.

Ex hac demonstratione facile inferemus, in quovis triangulo duorum laterum equalium, siue aquilaterum illud sit, siue isosceles, lineam, quæ basim bifariam secet, perpendicularem esse ad basim: Et contrà, lineam, quæ ad basim sit perpendicularis, basim secare bifariam. Nam in triangulo ABD , cuius duo latera AB, AD , equalia sunt, atq, adeò ex centro A , per B, D , circulus describi potest; ex eo, quòd recta AF , secat basim BD , bifariam, ostensum est, angulos ad F , esse rectos: Et ex eo, quòd anguli ad F , recti sunt, demonstratum est, basim BD , à recta AF , bifariam secari. Sed hoc etiam demonstravimus ad propositionem 26. libri 1. & quidem univèrsalius.

S C H O L I U M.

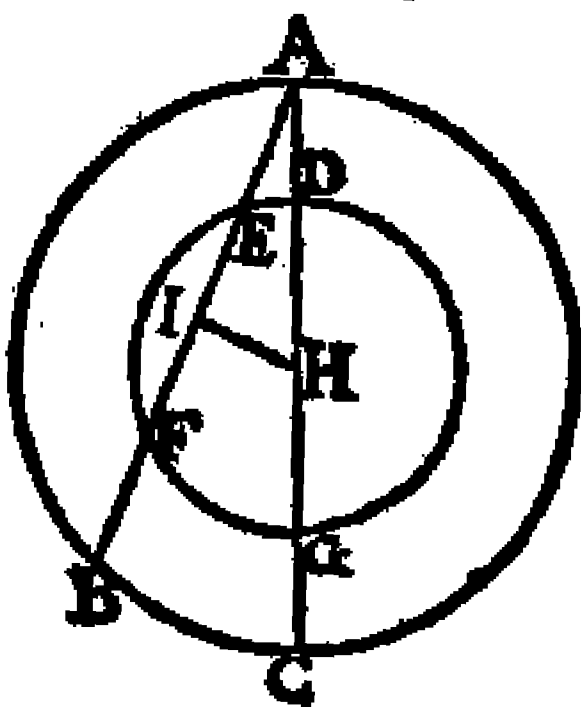
CENŒM ν quoque demonstrandum esse hoc loco sequens theorema, ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

Dv o b v s circulis ex eodem centro descriptis, si ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interioris circumferentiæ secans: erunt eius segmenta inter utramq, circumferentiæ posita, inter se equalia.

a 15. defn.
b 3. pron.

c 12. primi.
d 3. tertij.

e 3. pron.



Dv o circuli $ABC, DEFG$, habeant idem centrum H , & ex puncto A , ducatur primò per centrum H , recta AC , secans circumferentiæ interioris in D, G . Dico rectas AD, CG , equalis esse. Nam si ex HA, HC , quæ equalis sunt, demantur HD, HG , quæ eadem ratione equalis sunt, ν erunt rectæ AD, CG , equalis.

DE I N D E ex eodem puncto A , ducatur recta AB , nò per centrum, secans interioris circumferentiæ in E, F . Dico rursus, rectas AE, BF , esse equalis. ν Ducta enim ex centro H , ad AB , perpendiculari HI , ν secabit hæc tam rectam AB , in circulo ABC , quàm rectam EF , in circulo $DEFG$, bifariam. Ablatis igitur equalibus IE, IF , ex equalibus IA, IB , ν remanebunt AE, BF ,

equalis. quod est proposuim.

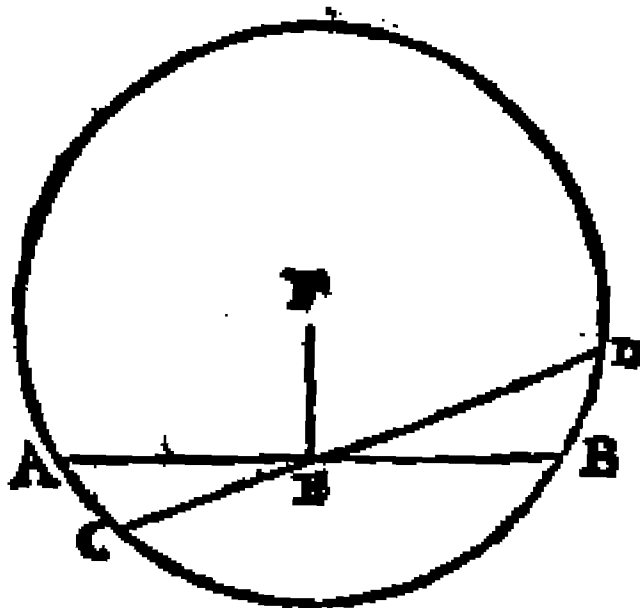
THEOR. 3. PROPOS. 4.

4.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secant non per centrum extensæ; sese mutuò bifariam non secabunt.

a 1. tertij.

b 3. tertij.



Dv a b rectæ AB, CD , se mutuò in E , secant in circulo $ACBD$, non per centrū extensæ. Dico fieri non posse, ut mutuò sese bifariam secant. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solū enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si verò neutra per centrum extenditur, quamvis vna earum nonnunquā bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minimè secabitur bifariam. Divisa enim sit & AB , & CD , si fieri potest, bifariam in E . ν Innèto igitur centro circuli F , ducatur ab eo ad E , recta FE . Quoniam ergo FE , ponitur secare rectā AB , bifariam in E , ν secabit ipsam ad angulos rectos. Eadē ratione secabitur CD , ad angulos rectos, cū ponatur bifariā diuidi in E . Quare rectus angulus FED , recto angulo FEB , equalis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secant, &c. Quod erat demonstrandum.

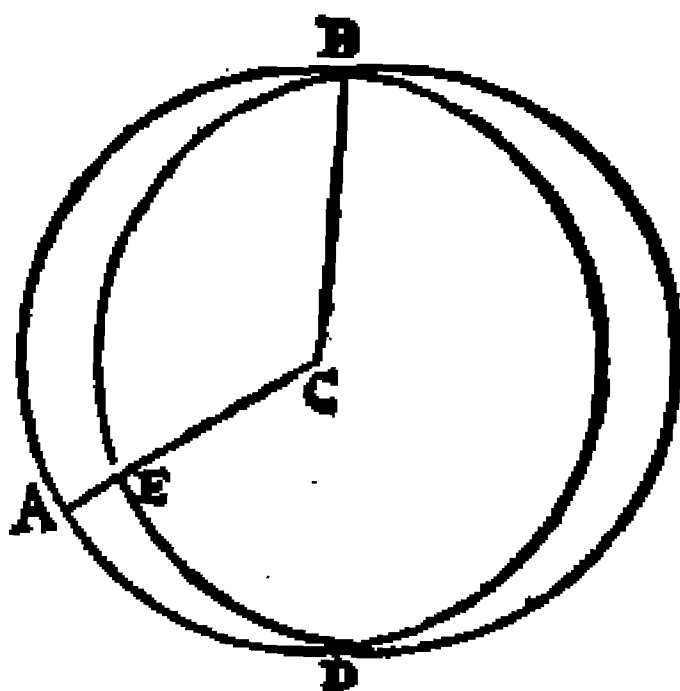
gulus FED , recto angulo FEB , equalis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secant, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 4. PROPOS. 5.

5.

Si duo circuli sese mutuò secant, non erit illorum idem centrum.

a 1. primi



Dv o circuli ABD, EBD , se mutuò secant in B, D . Dico ipsos non habere idem centrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum utriusq, C , à quo duæ rectæ ducantur, CB , quidem ad sectionē B , CA , verò secans utramque circumferentiā in A, E . Quoniam igitur C , centrum ponitur circuli EBD , erit recta EC , rectæ BC , equalis. Rursus quia C , centrum quoque ponitur circuli ABD , erit & recta AC , eidem rectæ BC , equalis. Quare rectæ EC, AC , equalis inter se erūt, pars, & totum, quod est absurdum. Si igitur

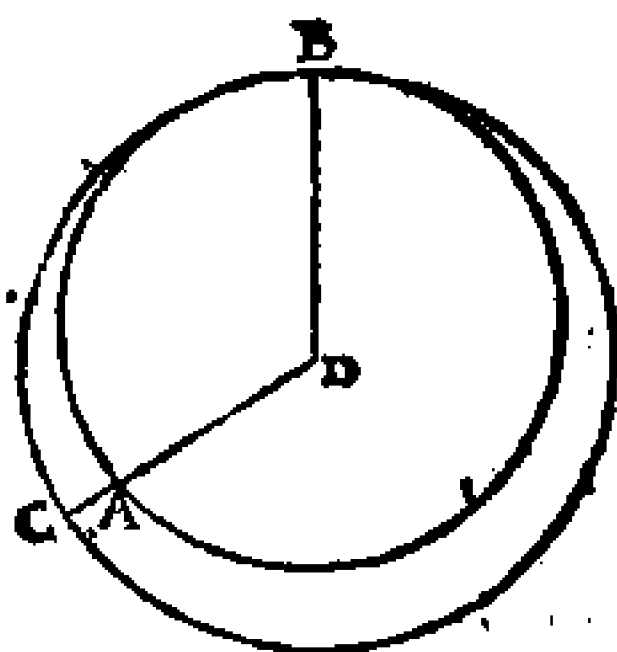
duo circuli sese mutuò secant, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 6.

6.

Si duo circuli sese mutuò interius tangant; eorum non erit idem centrum.

Dv o



Duo circuli AB, BC, se interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habent enim, si fieri potest, idem centrum D, à quo duæ rectæ ducantur DB, quidem ad tactum B; At DC, secans utramque circumferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli AB, erit recta AD, rectæ BD, æqualis. Rursus quia D, ponitur centrum circuli BC, erit recta CD, eidem rectæ BD, æqualis. Quare rectæ AD, & CD, inter se erunt æquales, pars & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuo interius tangant, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I V M.

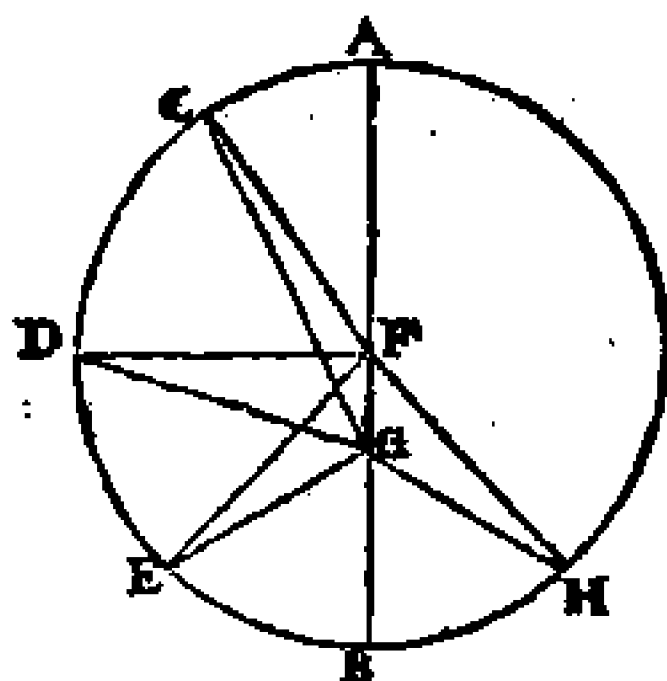
Euclides proposuit theorema hoc de circulis sese interius tangentibus duntaxat, quoniam circulum exterius sese tangentium, cum vnu sit extra alium, non posse esse idem centrum, manifestum est.

THEOR. 6. PROPOS. 7.

7.

Si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliquæ; aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est; Duæ autem solùm rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ, vel maximæ.

In diametro AB, circuli ACDEB, cuius centrum F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrū, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, GE. Dico omnium, quæ



ex G, ad circumferentiam ducuntur, maximam esse GA, in qua est centrum, minimam verò reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ rectæ GA, per centrum ductæ propinquior est, maiorem recta GD, quæ ab eadem GA, plus distat; & eadem ratione GD, maiorem recta GE, atque ita de aliis lineis, si ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad utrasque partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci posse tantummodò duas lineas inter se æquales. Ducantur à centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, b maiora sunt latere GC; Sunt autem rectæ GF, FC, æqua-

b 10. primæ.

les rectis GF, FA, hoc est, toti rectæ GA; erit & GA, maior, quàm GC. Eadem ratione maior erit recta GA, quàm GD, & quàm GE. Quare GA, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.

Deinde, quoniam in triangulo EFG, latus EF, c minus est duobus lateribus FG, GE; Est autem EF, ipsi FB, æqualis; erit & FB, minor duobus rectis FG, GE. Dempta ergo communis, recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quàm GE. Eadem ratione minor erit GB, quàm GD, & quàm GC. Quare GB, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiam cadunt.

Rursus, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia sunt duobus lateribus GF, FD, trianguli GFD; & angulus totus GFC, maior est angulo GFD; d erit basis GC, maior base GD. Eadem ratione maior erit GC, quàm GE. Item maior erit GD, quàm GE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrū ducitur, maior est ea, quæ remotior.

Fit iam angulo BFE, ex altera parte æqualis angulus BFH, & ducatur recta GH. Quoniam igitur latera BF, FG, trianguli EFG; æqualia sunt lateribus HF, FG, trianguli HFG, & anguli his lateribus contenti EFG, HFG, æquales; e erunt rectæ GE, GH, ex utraque parte ipsius lineæ minimæ GB, vel maximæ GA, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quàm GH; si verò cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem GA, per centrum ducta, minor quàm GH, ut ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad utrasque partes minimæ GB, vel maximæ GA, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum.

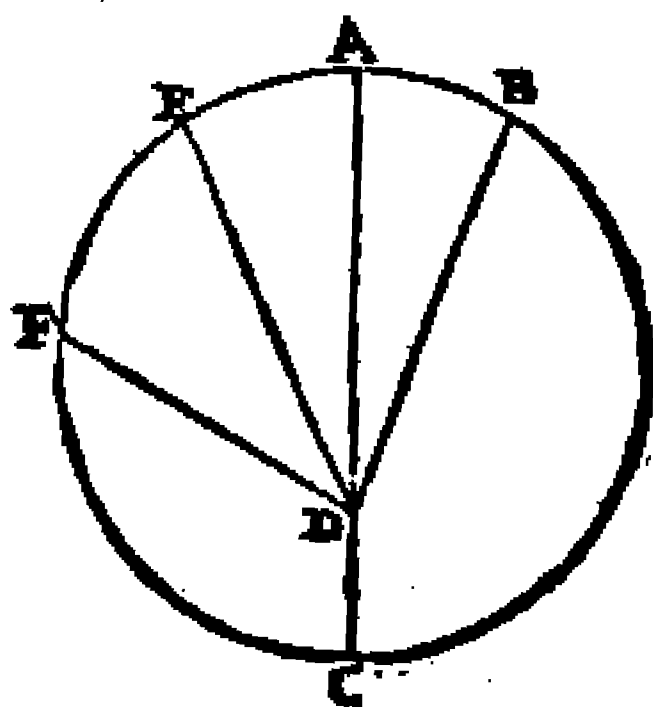
S C H O L I V M.

Quænam autem Euclides solū demonstraverit lineam, quæ propinquior est rectæ per centrū ductæ, remotiore esse maiorem, si amba lineæ ex eadem parte diametri AB, existant: idem tamē verum etiam est, si ad diversas partes ductæ sint. Vt si quis dicat, rectam GD, propinquiorē esse rectæ GA, quàm rectam GH; dico GD, maiorem esse, quàm GH. Si namque ipsi GH, ex altera parte equalis ducatur GE, ut dictum est, nempe si fiat angulus GPH, equalis angulus GFE, &c. cadet punctum E, inter D, & B q. GH, GE, equaliter à GA, distent, ob æqualitatem angulorum GFH, GFE; & GD, ponatur minus distare, quàm GH, at præinde minus, quàm GE: Cum ergo GD, maior sit, quàm GE, maior quoq. erit eadem GD, quàm GH.

a 7. tertij.

H. A. & c. per d. propositionem nonnulli conuertunt hoc modo.

Si intra circulum punctum sumatur, ab eoque puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima sit, vna verò minima; & reliquarum aliarum sint inæquales, aliarum æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima verò erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter distabunt.



a 7. tertij.

In circulo ABC , punctum sumatur D , à quo rectæ quæcunque DA, DC, DE, DF, DB , cadant in circumferentiā, quarum omnium maxima sit DA , minima verò DC ; ipsarum verò DE, DF , maior sit DE ; denique DE, DB , sint æquales. Dico DA , per centrum transire, & DC , reliquam partem esse diametri, hoc est, DC , ipsi DA , esse in directum. Item DE , quæ maior ponitur, quàm DF , propinquior esse maximæ DA , quàm DF . Denique DE, DB , æqualiter ab eadem DA , vel DC , abesse. Primum enim si DA , nō transiret per centrum; ducta ex D , per centrū recta quapiam linea, ^a erit ea omnium ex D , cadentium maxima. Quod est absurdum; cum DA , maxima ponatur. Transit ergo DA , per centrum.

b 7. tertij.

DEINDE si DC , non est in directum ipsi DA ; protracta AD , in directum, ^b erit alia recta, quàm DC , ex D , cadens, nempe pars ipsius AD , protracta, omnium minima; Quod est absurdum; cum DC , minima ponatur. Est ergo DC , reliqua pars diametri.

c 7. tertij.

RURSUS si DE , non est vicinior maximæ DA , quàm DF ; aut æqualiter distabunt ab ea, aut DE , longius ab ea aberit: Si æqualiter utrinque à DA , dicantur distare, ^c ipse erunt æquales; quod est absurdum. Ponitur enim DE , maior. Si verò æqualiter ex eadem parte à DA , distare dicantur, erunt DE, DF , vna eademque linea; atq; adeò DE , maior non erit, quàm DF , quod est contra hypòthesim. Quod si DF , dicatur esse propinquior maximæ DA , ^d ipsa erit maior, quàm DE . Quod magis est absurdum.

d 7. tertij.

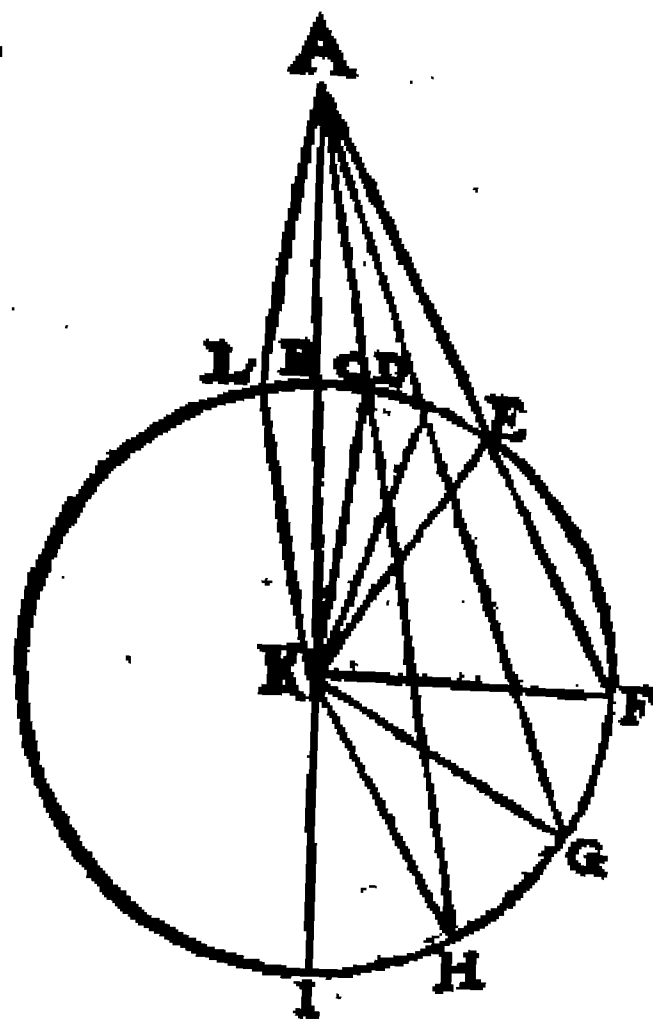
e 7. tertij.

POSTREMO si DE, DB , non æqualiter distant à DA , vel DC , ^e erit ea, quæ magis distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponantur enim æquales DE, DB .

8.

THEOR. 7. PROPOS. 8.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autē propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est; In conuexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autē tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.



a 20. primi.

Ex puncto A , extra circulum BCE , cuius centrum K , lineæ secantes circulum ducantur, quarum AL , per centrum transeat, aliarum verò AH, AG, AF , vtcunque. Dico omnium esse maximam AL , quæ per centrū incedit: Deinde rectam AH , quæ rectæ AL , quæ per centrū ducitur, propinquior existit, maiorem rectam AG , quæ remotior est ab eadem AL : Et eadem ratione AG , maiorem, quàm AF . E contra ratio autem, rectam AB , omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse: Deinde rectam AC , quæ vicinior est minimæ AB , minorem esse rectam AD , remotiore: Et eadē ratione, ipsam AD , minorem, quàm AE . Denique ex A , ad vtrasque partes minimæ lineæ AB , vel maximæ AL , duci possunt tantummodò duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K , ad puncta C, D, E, F, G, H , rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH . Quoniam igitur duo latera AK, KH , trianguli AKH , ^a maiora sunt rectæ AH : Sunt autem rectæ AK, KH , æquales rectis AK, KI , hoc est, toti rectæ AI : erit & AI , maior, quàm AH . Eadem ratione erit AI , maior, quàm AG , & quàm AF . Quare AI , est omnium, quæ ex A , in circulum cadunt, maxima.

b 24. primi.

DEINDE, quoniam latera AK, KH , trianguli AKH , æqualia sunt lateribus AK, KG , trianguli AKG : Et angulus totus AKH , maior est angulo AKG , ^b erit basis AH , base AG , maior. Eadem ratione maior erit AH , quàm AF : Item AG , maior, quàm AF . Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est linea remotiore.

c 20. primi.

RURSUS, quia in triangulo ACK , recta AK , ^c minor est duabus AC, CK ; si auferantur æquales BE, BK ,

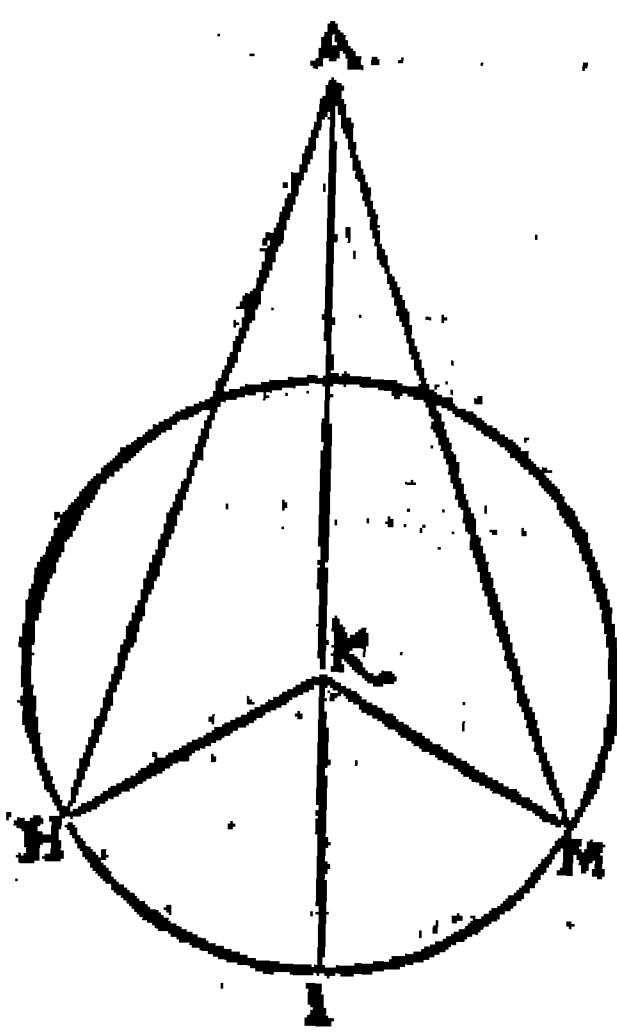
les BK, CK: remanebit adhuc AB, minor, quam AC. Simili ratione erit AB, minor, quam AD, & quam AE. Quare AB, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est.

Rursus, cum intra triangulum ADK, cadant duæ rectæ AC, CK, ab extremitatibus lateris AK: erunt AC, CK, minores, quam AD, DK. Sublatis igitur æqualibus CK, DK, remanebit adhuc AC, minor, quam AD. Pari ratione erit AC, minor, quam AE: Item AD, minor, quam AE. Quare linea propinquior minimæ lineæ AB, minor est, quam remotior ab eadem.

Postremo fiat angulo AKC, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta AL. Quoniam igitur latera AK, KC, trianguli AKC, æqualia sunt lateribus AK, KL, trianguli AKL: Sunt autem & anguli AKC, AKL, dictis lateribus contenti æquales: erunt rectæ AC, AL, ex utraque parte minimæ AB, vel maximæ AL, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens ultra L, erit ipsa, cum sit remotior à minimâ, maior quam AL. Quod si cadat inter B, & L, erit ea, cum sit minimè propinquior, minor quam AL, ut ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad utramque partem minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

EAD E M ratione ab A, in peripheriam concavam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad utramque partem maximæ AL.



FIAT enim angulo AKH, æqualis angulus AKM, iungaturq; recta AM. Quia igitur latera AK, KH, æqualia sunt lateribus AK, KM; sunt autem & anguli AKH, AKM, æquales: erunt bases AH, AM, æquales. Neque verò ulla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quacunque ex A, ducatur ad partes H; ea vel maior erit, vel minor, quam AH, prout citra vel ultra rectam AH, ducta fuerit, ut manifestum est ex demonstratione theorematum.

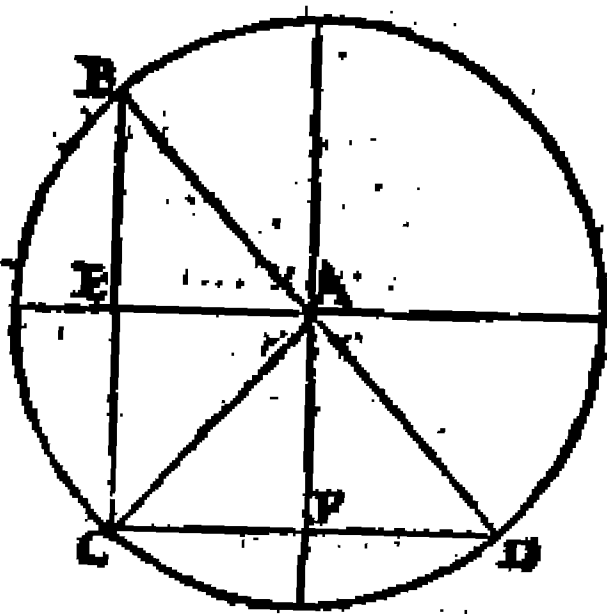
Hæc propositio vera etiam est, quando una linearum ex A, cadentium circulum tangit. Hac enim quæ longius à linea per centrum ducta abest, minor erit omnibus alijs in eandem peripheriam cadentibus, qualis est recta AM, in priori figura. Nam ducta recta KM, ex centro ad contactum, erunt duo latera AK, KM, trianguli AKM, æqualia duobus lateribus AK, KM, trianguli AKM, angulus verò AKM, angulo AKM, maior. Igitur basis AM, maior erit. Eadem ratione maior erit quacunque alia in eandem peripheriam cadens, quam recta AM.

PARI ratione eadem linea tangens AM, maior erit omnibus alijs in concavam peripheriam cadentibus. Nam cum duo latera AE, EK, minora sint duobus lateribus AM, MK; si auferantur æquales rectæ KE, KM, erit reliqua AE, minor quam reliqua AM. Eademq; ratio est de lateribus.

Quædam verò Euclides solum demonstraverit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, maiorem esse remotiore: Item lineam propinquiorem minimæ minorem esse remotiore, si amba lineæ ex eadem parte maxima, vel minima existant: idem tamen verum etiam est, si ad diversas partes ductæ sint. Quod non aliter demonstrabitur, quam idem in scholio præcedenti propositionis de duabus lineis ad diversas partes ductis demonstratum fuit.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

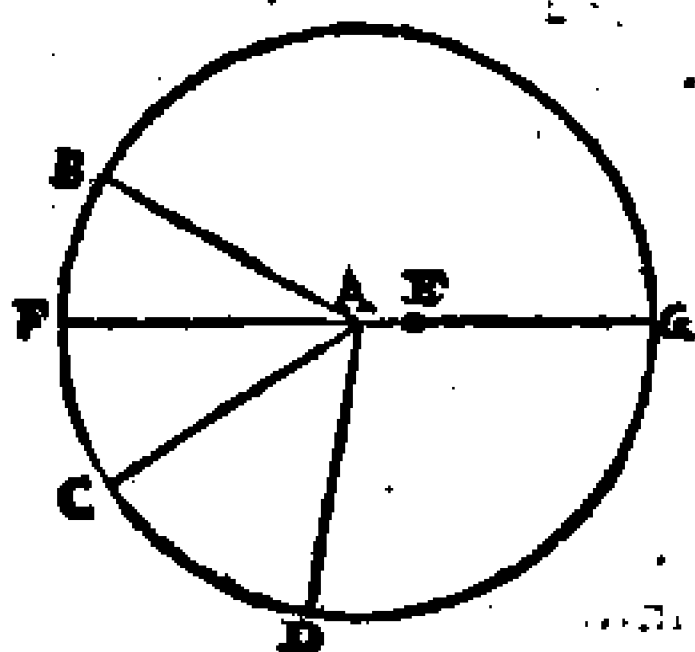
Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.



A puncto assumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ quam duæ AB, AC, AD, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis BC, CD; quibus divisim bisariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ AE, AF. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus AE, EC, trianguli AEC: & bases AB, AC, ponuntur etiam æquales: erunt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ AE, AF, dividant rectas BC, CD, bisariam, & ad angulos rectos, transibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propositionis 1. huius libri. Punctum igitur A, in quo se mutuò secant, centrum est circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 1. scrip.

b 7. scrip.



c 7. scrip.

Et A, cadentium minima, atque adeo minor, quam AB, & AC. quod est absurdum. Ponitur enim utrique æqualis.

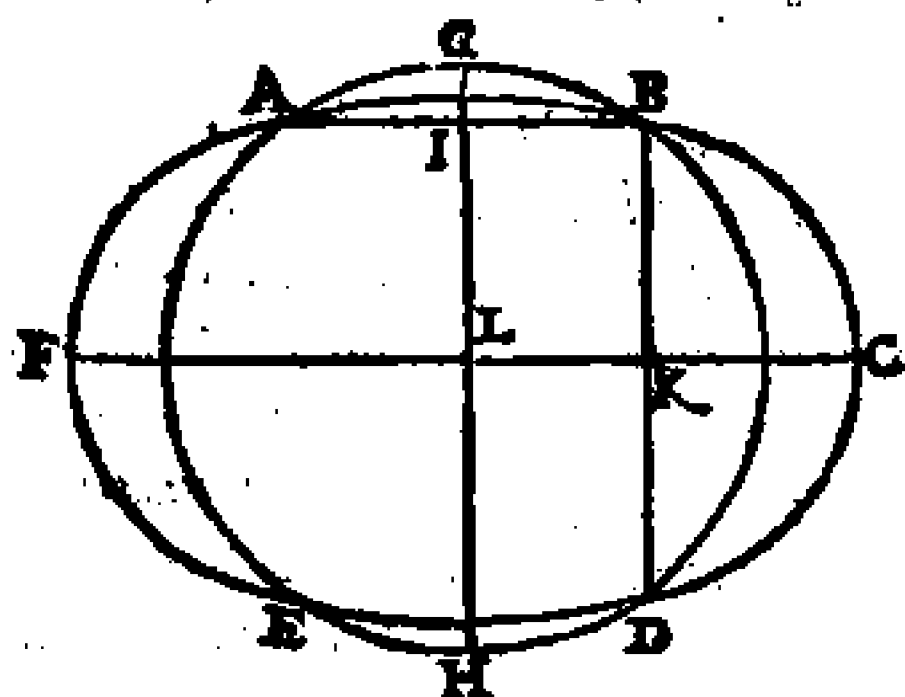
10.

THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCULVS circulum in pluribus,quàm duobus,punctis non secat.

d 10. prim.

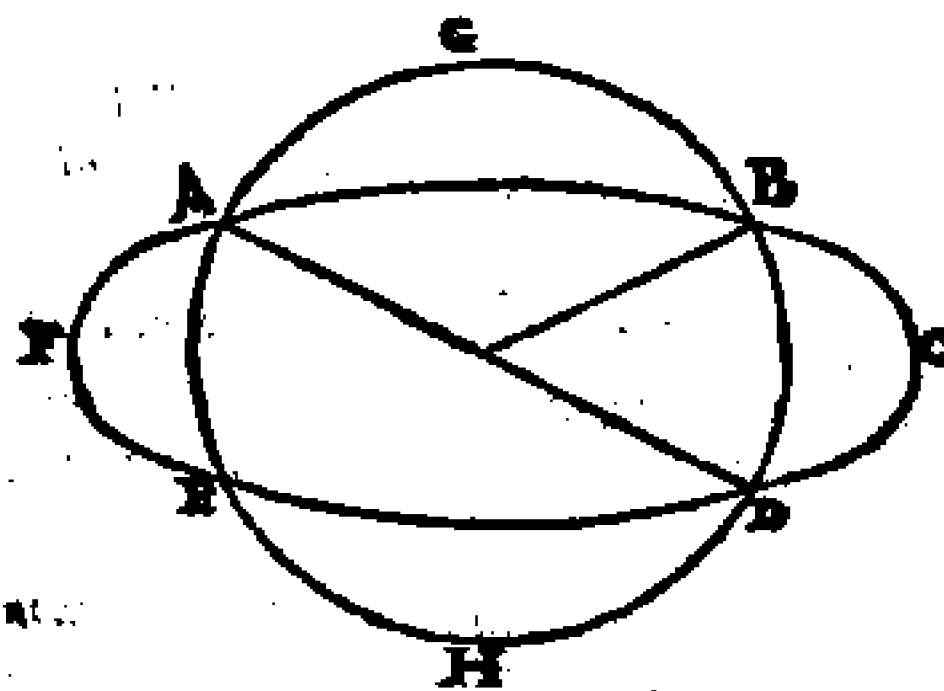
e 11. prim.



f 1. scrip.

Circulus ergo circulum in pluribus,quàm duobus,punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

g 1. scrip.



h 9. scrip.

i 5. scrip.

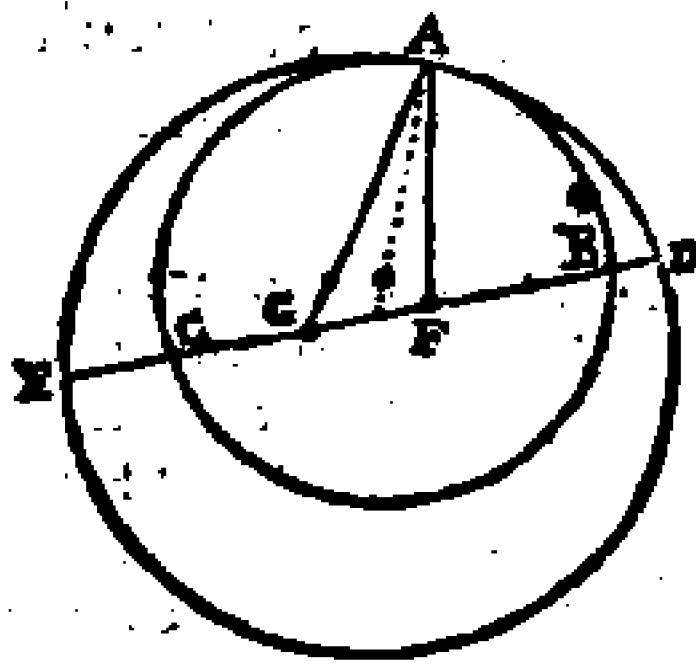
res habent idem centrum. Quod est absurdum.

11.

THEOR. 10. PROPOS. 11.

Si duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

k 6. scrip.



l 10. prim.

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intrus in A, & sit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod necessario ab illo diuersum erit, cum duo circuli interius se tangentes, & non possint idem centrum habere. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet utrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, recte ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, maiora sunt latere GA: Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis (quod G, positum sit centrum circuli ADE,) erunt & GF, FA, rectæ maiores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, maior, quam FD. Quare cum FA, æqualis sit ipsi FB, (quod F, positum fuerit centrum circuli ABC,) erit & FB, minor, quam FD, pars quam totum, quod est absurdum.

m 10. prim.

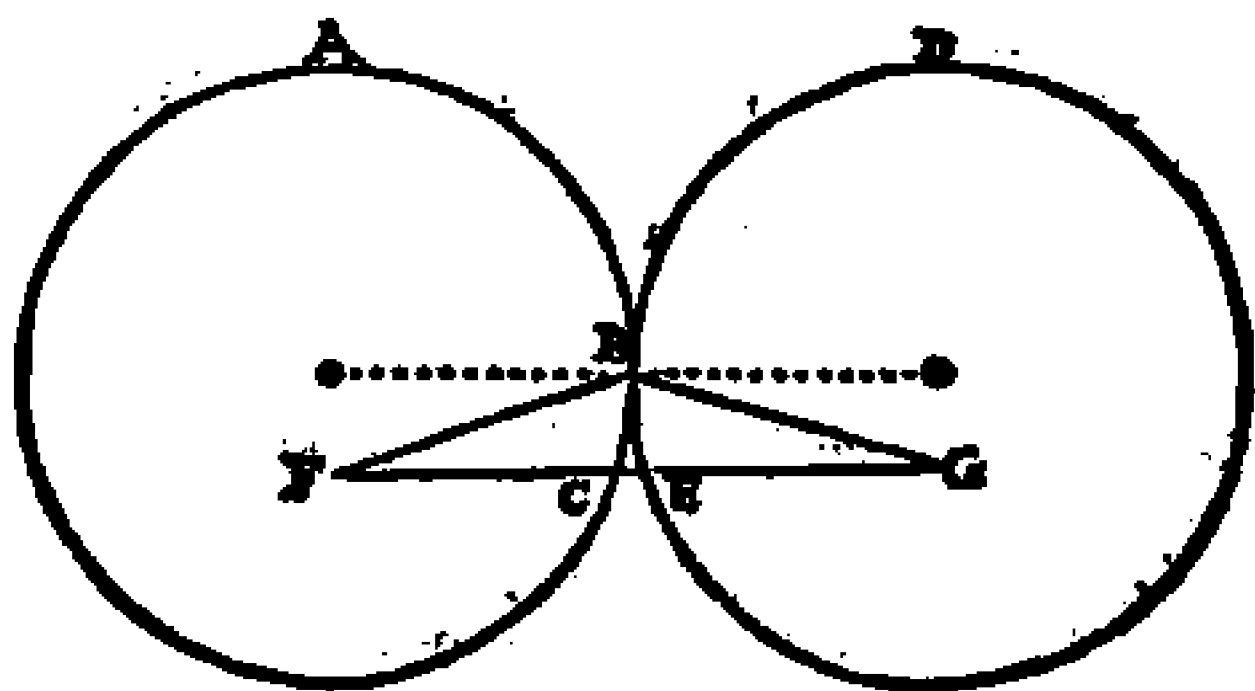
Quod si quis velit contendere F, esse centrum circuli ADE, & G, centrum circuli ABC, insti-
tuetur argumētatio hac ratione. In triangulo AFG, duo latera FG, GA, maiora sunt latere FA: Est autem recta FA, rectæ FE, æqualis (cum F, ponatur centrum circuli ADE.) Igitur rectæ FG, GA, maiores sunt recta FE. Dempta ergo communi FG, remanebit GA, maior, quam GE. Quia igitur GA, æqualis est ipsi GC, (propterea quod G, ponitur esse centrum circuli ABC,) erit quoque

que GC , maior, q̄ GE , pars q̄ totum, quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta FG , extensa vtrumque circum secabit, sed in contactu A , cadet. Quare si duo circuli sese intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. II. PROPOS. 12.

11.

Si duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.



CIRCULI duo ABC , DBE , tangent se exterius in B , & centrum circuli ABC , sit F , circuli verò DBE , centrū sit G . Dico rectam extensam per F , & G , transire per contactū B . Si enim non transit, secet circumferentias in C , & E , ducanturque à centrīs F , G , ad B , contactū rectæ FB , GB . Quoniam igitur in triangulo FBG , latera duo BF , BG , maiora sunt latere FG : Est autem recta BF , rectæ FC , æqualis; (quod F , ponatur centrum circuli ABC ,) & recta GB , re-

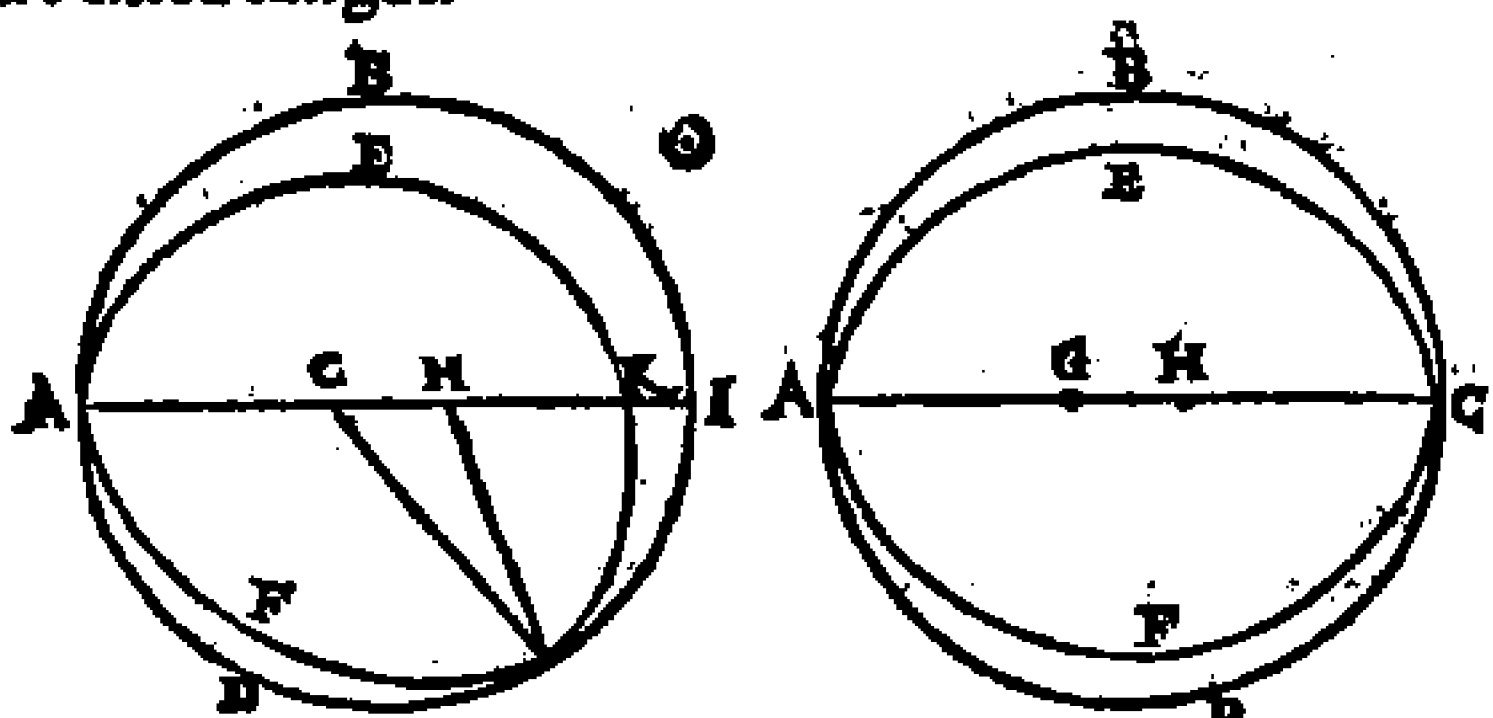
a 10. prim.

ctæ GE , æqualis; (quod G , ponatur centrū circuli DBE ,) erunt & rectæ FC , GE , maiores quàm recta FG , pars quàm totum, (cū FG , contineat præter FC , GE , rectam adhuc CE ,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 12. PROPOS. 13.

12.

CIRCVLVS circum non tangit in pluribus punctis, quàm vno, siue intus, siue extra tangat.



TANGANT sese circuli $ABCD$, $AECF$, intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quàm vno A , & C : Assumantur autem centra horum circulorum G , H , quæ diuersa erunt; per quæ recta GH , in vtramque partem extendatur, quam necesse est cadere in contactus A , & C . Itaque cū G , sit centrū, & recta $AGHC$, diameter, dividetur $AGHC$, bifariam in puncto G . Simili ratione di-

b 6. prim.

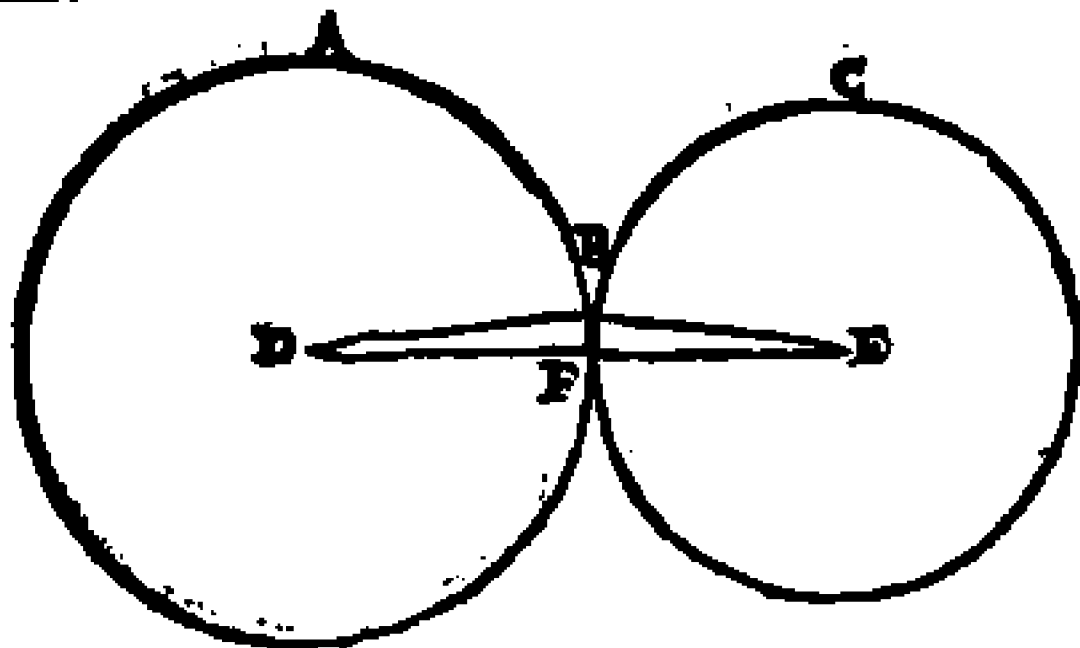
c 11. prim.

videtur eadem AC , bifariam in H , quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto dividitur bifariam. Si namque GC , est dimidium totius AC , erit necessariò HC , dimidio minor, cū sit pars dimidij GC .

Quod si quis dicat rectam GH , extensam ad partes quidem G , cadere in contactum A , At verò ad partes H , minimè pertinere ad contactum C , sed secare vtrumque circum in I , & K , vt in secunda figura perspicuū est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti propositione ostensum esse, rectam per duo centra circulorum sese intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo rectè affirmare poterit, cū demonstratio præcedentis propositionis vtrique contactui conueniat. Sed quidquid dicat aliquis, ostendemus absurdum illud esse.) ducendæ erunt ex centrīs G , H , ad contactum C , rectæ GC , HC . Ponatur igitur primò G , centrum circuli $ABCD$, & H , centrum circuli $AECF$. Et quia in triangulo GHC , duo latera GH , HC , maiora sunt latere GC ; Sunt autem rectæ GH , HC , æquales ipsi GK ; (quod HC , HK , ex centro H , sint æquales, & GH , communis) & recta GC , rectæ GI ; (quod sit ex G , centro) erit quoque recta GK , maior quàm GI , pars quàm totum. quod est absurdum. Ponatur secundo G , centrum circuli $AECF$, & H , centrum circuli $ABCD$. Quoniam igitur rectæ HG , GC , maiores sunt recta HC ; Est autem HC , æqualis rectæ HA ; (cū vtrique ducta sit ex centro H ,) erunt quoque HG , GC , maiores recta HA . Quare dempta communi HG , erit GC , maior quàm GA , quod est absurdum, cū vtraque ex centro G , ducatur. Non igitur circuli intus se

d 10. prim.

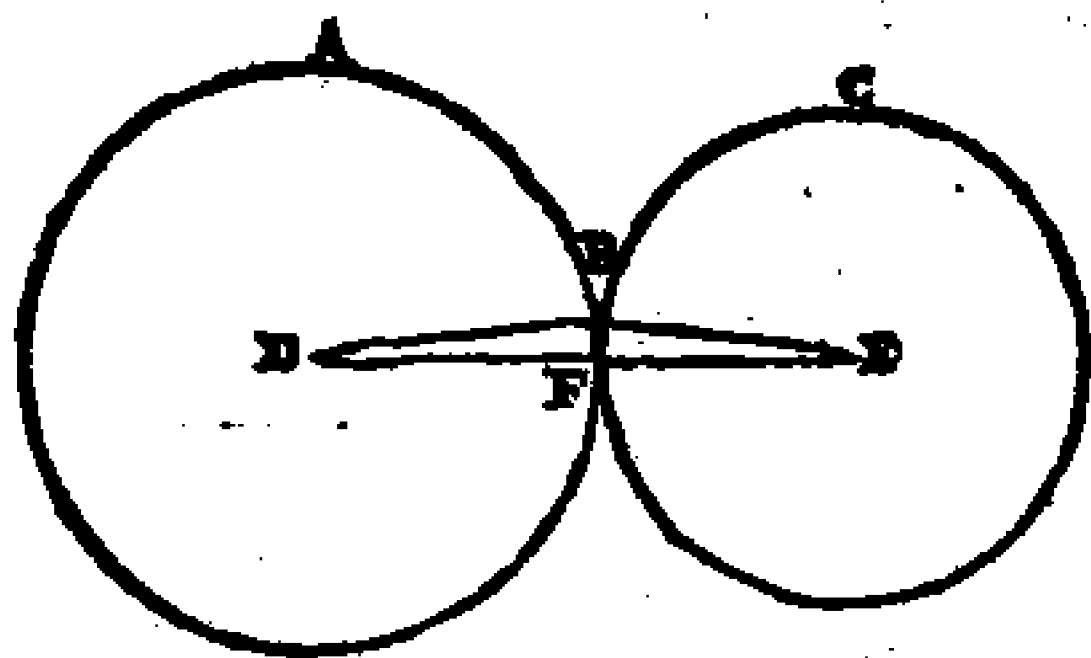
e 10. prim.



TANGANT se iam circuli AB , CB , exterius in pluribus punctis, quàm vno prope F . Ducatur ex D , centro circuli AB , ad E , centrū circuli CB , recta DE , quæ per contactum F , necessa-

f 11. prim.

« 20. прима.



rius transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F , se tangunt, tangant sese in B . Ductis igitur rectis DB, EB , erunt rectæ DB, EB , æquales rectis DF, EF , hoc est, ipsi DE : Sunt autem & maiores, quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, ¶ vno.

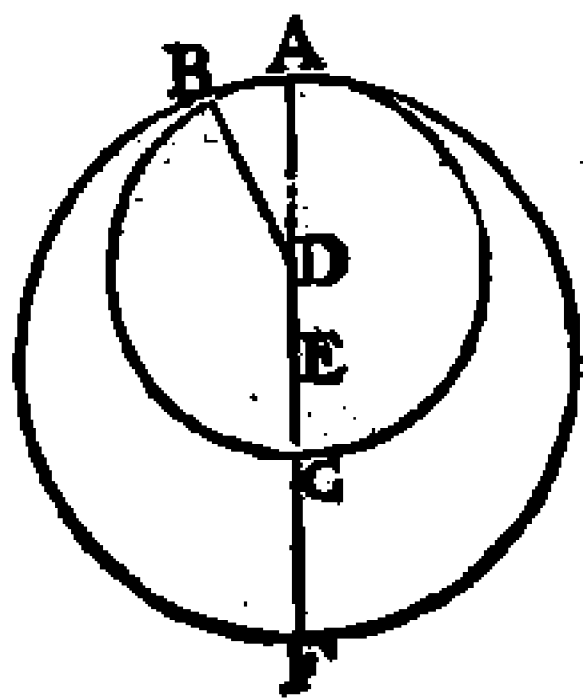
ALITER. Si circuli AB , CB , exterius tetan-
gant in duobus punctis B , & F ; ducta recta BF ,
cadet ipsa intra vnum circularum, per secun-
dam propositionē huius tertij libri, & idē ex-
tra alium, quod est contra eandem propoſitio-

SCHOLIVM,

Si rectè consideretur Euclidis demonstratio, quæ probavit, circulum à circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quàm uno, videtur ea potissimum concludere, circulum non posse tangi à circulo in duobus, vel pluribus punctis, quæ longo intervallo à se distendant, nõ autem eundem contractum plura puncta habere non posse; quamvis facillè hoc ipsum eodem argumento ferè demonstrari possit. Quare ut omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum nõ posse tangere circulum in pluribus punctis, quàm uno, ostendemus breviter,

NON videtur etiam omittendum hoc loco sequens theorema, videlicet.

Si in semidiametro circuli producta punctum ultra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, ut centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, rotusque extra eundem cadet.



Si Γ circulus ABC , cuius centrum D , & in semidiametro AD , producta sumatur punctum quodcunque E , ex quo ad intervallum EA , circulus describatur AF , quem dico circulum ABC , in solo puncto A , tangere. Aut enim punctum E , est intra circulum ABC , aut extra. Si intra, quoniam AE , maior est, quàm AD , hoc est, quàm DC , hoc est, à fortiori, quàm EC ; erit quoque EF , quæ ipsi AE , aequalis est, maior, quàm EC : ac proinde punctum F , extra circulum ABC , existet, circulusq; AF , extra eundem circulum ABC , prope punctum F , existet. Multò magis punctum F , extra circulum ABC , cadet, si E , extra eundem circulum ABC , existet. Si igitur circulus AF , non totus extra circulum ABC , cadat, ita ut eum in solo puncto A , tangat, fecerit,

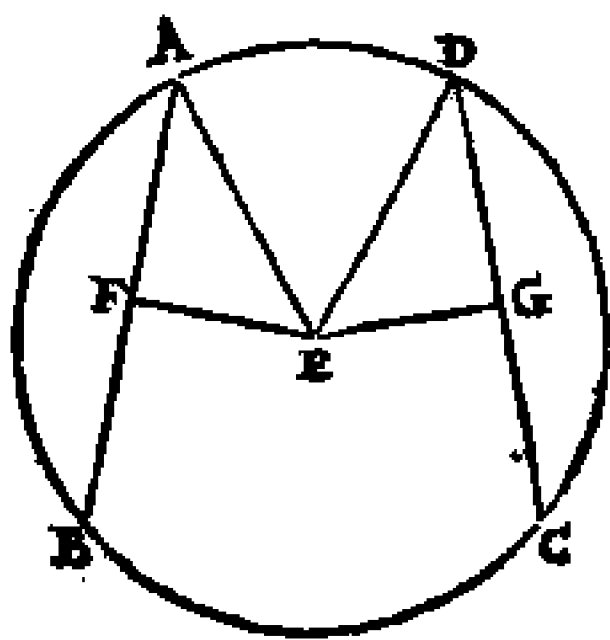
vel tangat circulus AF , circulum ABC , in alio puncto B , si fieri potest, ducaturq; recta DB . Quoniam igitur in diametro circuli AF , sumptum est punctum D , prater centrum E , & erit DA , omnium rectarum ex D , cadentium minima. Minor est ergo DA , quàm DB . quod est absurdum. Sunt enim æquales rectæ DA , DB , cadentes ex centro D , in circumferentiam eiusdem circuli ABC . Non ergo circulus AF ; circulum ABC , secat aut tangit in alio puncto, quàm in A , sed totus extra illum cadit. Quod est propositum.

d 7.terrij.

THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

SINT



SINTE in circulo $ABCD$, cuius centrū E , duæ rectæ æquales AB , CD . Dico ipsas æqualiter distare à centro E . Ducantur enim ex E , centro ad rectas AB , CD , duæ perpendiculares EF , EG , & coniungantur rectæ EA , ED . Secabunt rectæ EF , EG , rectas AB , CD , bisariam. Quare cum totæ AB , CD , æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet AF , DG , æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA , ED , æqualium, inter se sunt æqualia; Quadratum autem rectæ EA , æquale est quadratis rectarum AF , FE ; & quadratum rectæ ED , quadratis rectarum DG , GE : Erunt quoque quadrata rectarum AF , FE , æqualia quadratis rectarum DG , GE . Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF , DG , remanebunt quadrata rectarum FE , GE , æqualia, ideoque & rectæ EF , EG , æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius libri rectæ AB , CD , æqualiter à centro E .

a 3. tercij.

b 47. primi.

manebunt quadrata rectarum FE , GE , æqualia, ideoque & rectæ EF , EG , æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius libri rectæ AB , CD , æqualiter à centro E .

RVRSVS distent rectæ AB , CD , æqualiter à centro E . Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro E , ad AB , CD , perpendiculares EF , EG , quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt: diuidantque rectas AB , CD , bisariam. Ductis igitur rectis EA , ED , erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ EA , æquale quadratis rectarum AF , FE ; & quadratum rectæ ED , æquale quadratis rectarum DG , GE . Igitur & quadrata rectarum AF , FE , æqualia sunt quadratis rectarum DG , GE : ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF , EG , remanebunt quadrata rectarum AF , DG , æqualia; atque adeo rectæ AF , DG , ac propterea earum duplæ AB , CD , æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro, &c. Quod erat demonstrandum.

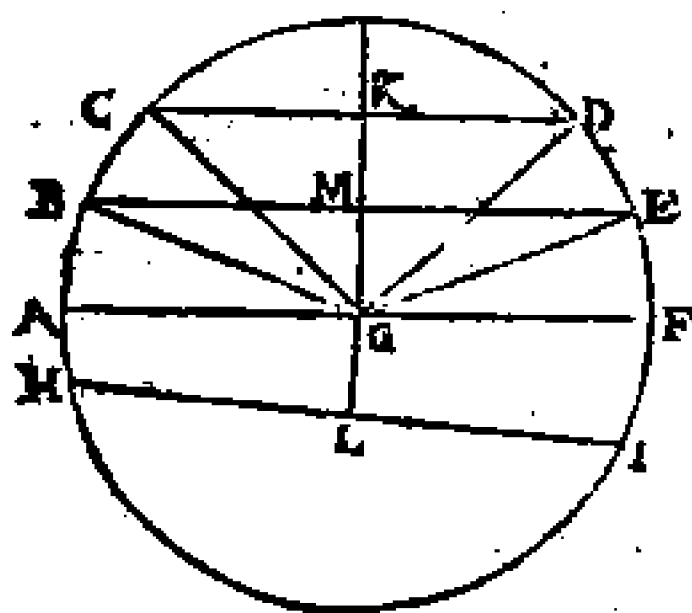
c 3. tercij.

d 47. primi.

THEOR. 14. PROPOS. 15.

14.

IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.



IN circulo $ABCDE$, cuius centrum G , diameter sit AF , & recta ei propinquior HI , remotior autem CD . Dico omnium esse maximam AF , & HI , maiorem, quam CD . Ducantur enim ex G , centro rectæ GK , GL , perpendiculares ad CD , HI . Et quia remotior est CD , à centro, quam HI , erit GK , maior quam GL , per 4. defin. huius libri. Abscindatur ex GK , recta GM , ipsi GL , æqualis, atque per M , educatur BE , perpendicularis ad GK , & connectantur rectæ GB , GC , GD , GE . Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM , GL , æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ BE , HI , à cetro, per 4. defin. huius lib. & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ GB , GE , maiores quidem sunt recta BE , æquales autem diametro

e 14. tercij.

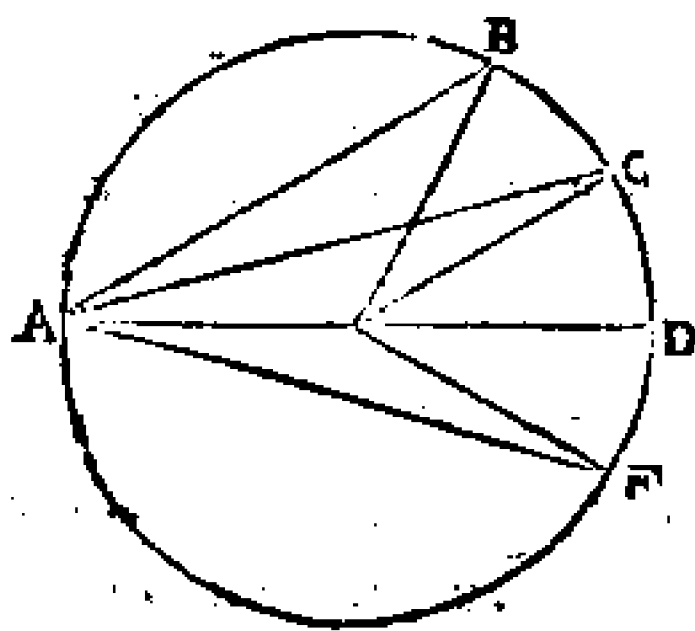
f 20. primi.

g 24. primi.

AF erit & diameter AF , maior, quam BE . Eadem ratione ostendetur AF , maior omnibus aliis lineis. Deinde quia latera GB , GE , trianguli BGE , æqualia sunt lateribus GC , GD , trianguli CGD ; & angulus BGE , maior est angulo CGD ; & erit recta BE , maior, quam CD , atque adeo HI , quæ æqualis ostensa fuit ipsi BE , maior quoque erit, quam CD . In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

EODEM fere modo demonstrabitur theorema: si ab vno, eodemque circumferentia puncto plurimæ lineæ cadant.



CADANT enim à puncto A , plures lineæ AB , AC , AD , quarum AD , per centrum E , transeat. Dico AD , esse omnium maximam, & AC , maiorem remotiore AB . Ductis enim rectis BE , CE ; tum in triangulo AEC , latera AE , EC , & maiora sine latere AC ; suntque rectæ AE , EC , æquales rectis AE , ED , hoc est, rectæ AD ; maior erit AD , quam AC . Eademque ratione maior erit, quam AB ; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est AD .

h 20. primi.

DEINDE, quæ duo latera AE , EC , trianguli AEC , æqualia sunt duobus lateribus AE , EB , trianguli AEB . & angulus AEC , totus maior est angulo AEB , erit b basis AC , maior base AB . Eodemque argumento erit AC , maior quacunque alia lineæ, quæ à centro remotior est.

b 24. primi.

CÆTERVM & hic duæ tantum æquales lineæ duci possunt à puncto A , ad utrasque partes maximæ AD . Si namque angulo AEC , æqualis fiat angulus AEF , iungaturque recta AF : cum latera AE , EC , æqualia sunt lateribus AE , EF , & anguli contenti quoque AEC , AEF , æquales; erunt bases AC , AF , æquales. Neque verò vlla alia his duabus æqualis potest exhiberi. Quæcunque enim ducatur ex A , super AC , ea minor erit, quam AC ; si verò infra AC , ea maior erit, ut iam demonstratum est.

c 4. primi.

QUOD si AB , AF , ad diuersas partes diametri AD , ductæ sint, & dicatur AF , propinquior centro, quam AB , demonstrabitur, ut in scholio proposit. 7. huius libri AF , maiorem esse, quam AB . Si namque, ut proximè

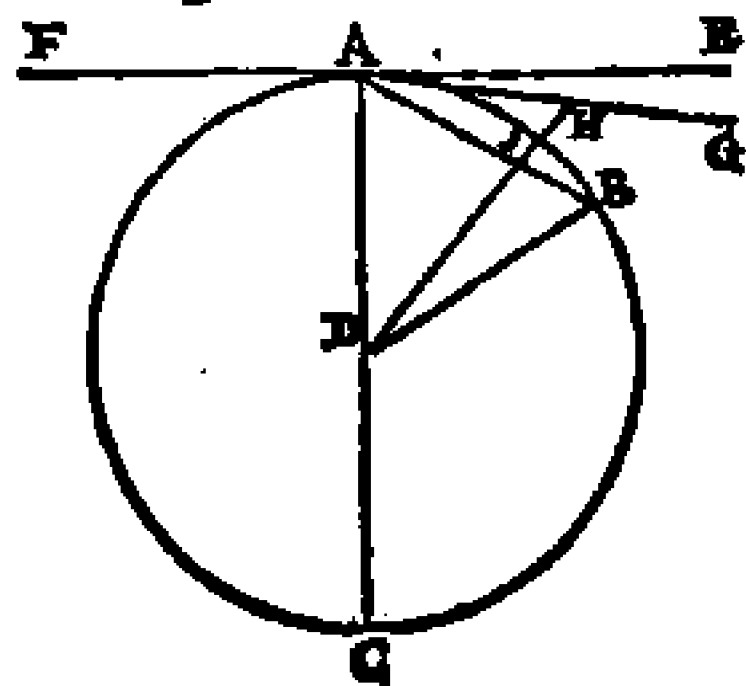
ostēsum fuit, ducatur ipsi AF , æqualis AC , ex altera parte, nempe si fiat angulo AEF , æqualis angulus AEC , & c. cader punctum C , inter B , & D ; quod AF, AC , æqualiter distent ab AD , ob earū æqualitatem, aut certe ob æquales angulos AEF, AEC . Hinc enim fit, cum AF , ponatur propinquior centro, quàm AB , ut & AC , ipsi AF , æqualis, propinquior sit centro, quàm AB , ac proinde punctum C , sit inter B , & D . Cum ergo AC , maior sit, quàm AB , ut in hoc scholio demonstratum est, maior erit quoque AF , quàm AB .

15.

THEOR. 15. PROPOS. 16.

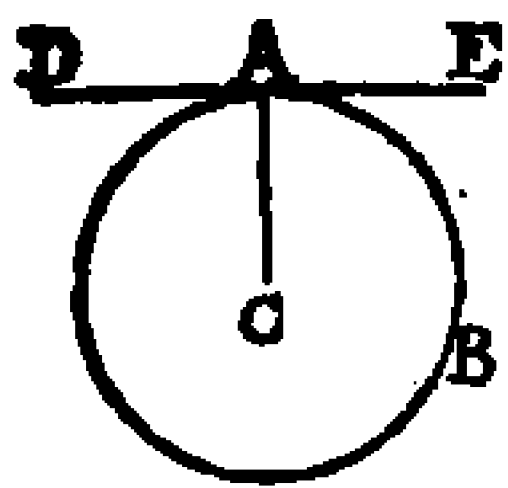
Quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet, & semicirculi quidem angulus, quous angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

In circulo ABC , cuius centrum D , diameter sit AC , ad quam ex A , puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessariò extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est AB ; ducta DB , erunt duo anguli DAB, DBA , æquales; sed DAB , rectus est, per constructionem: Igitur & DBA , rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neque eandem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est EF . Dico iam ex A , inter AE , rectam, & circumferentiam AB , non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta AG , ad quam ex D , ducatur perpendicularis DH , secans circumferentiam in L , quæ necessariò ad partes anguli acuti DAG , cadet, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo DAH , duo anguli DHA, DAH , minores sunt duobus rectis; & DHA , rectus est, per constructionem, erit angulus DAH , recto minor, ideoque recta DA , hoc est, recta illi æqualis DL , maior erit, quàm DH , pars quàm totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE , & circumferentiam AB : sed quæcunque ex A ,



ducatur infra AE , ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro AC , & circumferentia AB , maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum verò angulum contingentiz, qui continetur recta AE , & circumferentia AB , minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex A , ductam infra perpendicularem AE , cadere intra circulum, faciet necessariò ea linea cum AC , angulum rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at verò cum AE , angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentiz, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic verò totum quidpiam respectu anguli contingentiz. Id quod liquidò constat, ducta recta AB , quomodocunque infra AE . Nam cum hæc linea AB , intra circulum cadat, ut demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus CAB , minor angulo semicirculi contento sub diametro AC , & circumferentia ABC , cum ille huius sit pars: Angulus verò contingentiz contentus sub tangente linea AE , & circumferentia ABC , minor angulo rectilineo acuto BAE , quod ille huius pars sit. Eademque ratio est de omnibus aliis angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro AC , vel tangente AE , & rectis ex A , sub AE , ductis, quæ omnes intra circulum cadent, ut demonstrauius. Angulus igitur semicirculi, maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiz, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

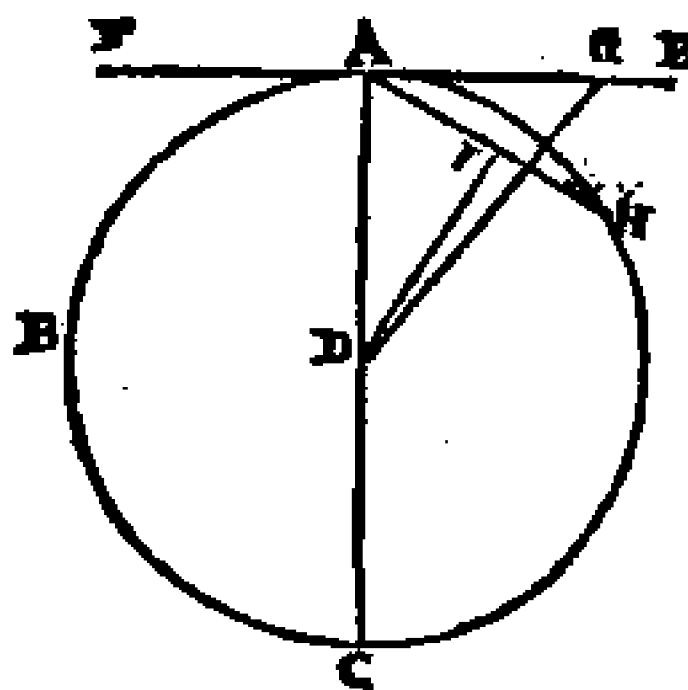


Hæc manifestum est, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipsam circulum tangere. Ostensum enim est, ipsam cadere extra circulum. Quare solum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

Quare si inbeamur per datum punctum A , in circumferentia circuli AB , rectam lineam ducere, qua circulum tangat in A , ducentur ex A , ad centrum C , rectam AC , & ad eam excitabimus perpendicularem DAE . Hac enim circulum tanget in A , ut demonstratum est.

EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonstrari ostensuè hac ratione. Sit diameter AC , in circulo ABC , cuius centrum D . Ducatur ex A , ad AC , perpendicularis AE , quam dico extra circulum cadere. Sumatur enim in ea quodvis punctum G , & coniungatur recta GD . Quoniam igitur in triangulo ADG , duo anguli DAG, DGA , minores sunt duobus rectis, & DAG , factus est rectus; erit DGA , recto minor. Quare maior erit



213.prom.

bi. primă

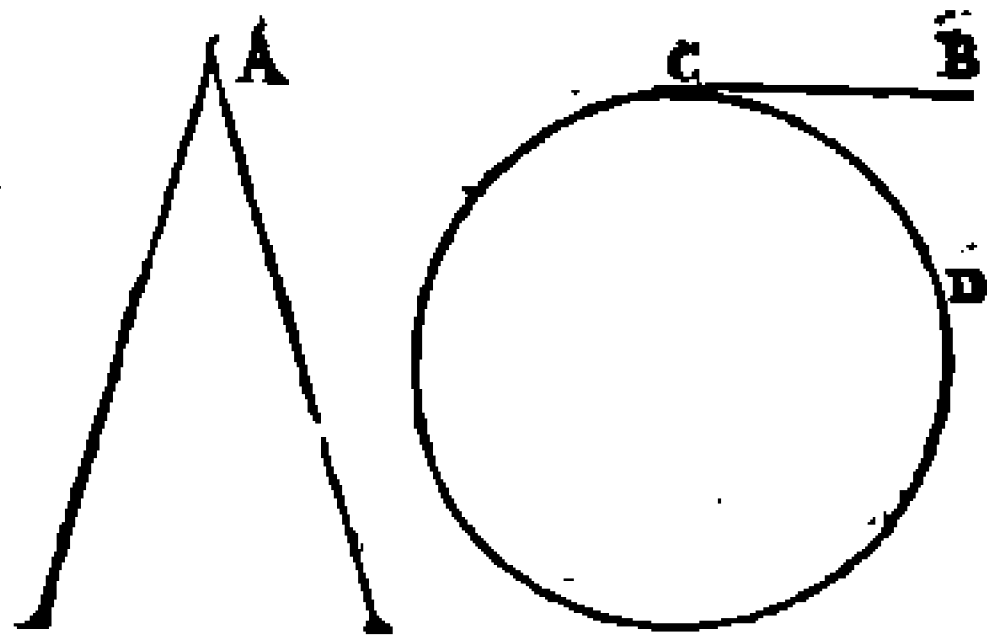
è 19. primi

S C H O L I U M

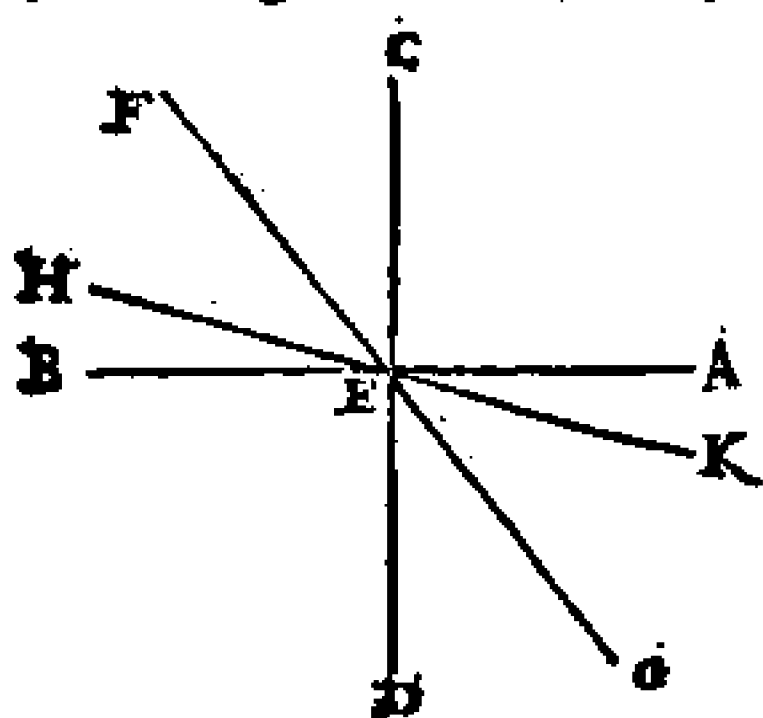
Cum huius theorematum caput postremum attentius considerarem, mihi sanè in mentem subijt prima specie, Geometriam non satis sibi constare; immò adeò repugnantiam in se admittere.

Si à maior duarum quantitatum auferatur maius, quàm dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuò fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

demonstrationem hic non appono; cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamē in tota Geometria propositio est, qua (ut sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Qui enim nō vides, propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quā dimidium abstuleris, ut quinarium; tum à ternario residuo, maius quā dimidium, ut binarium, relinqui unitatem posito binario minorem? Neq; verò ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hac quippe conciliatio nulla est; quoniam etiā men

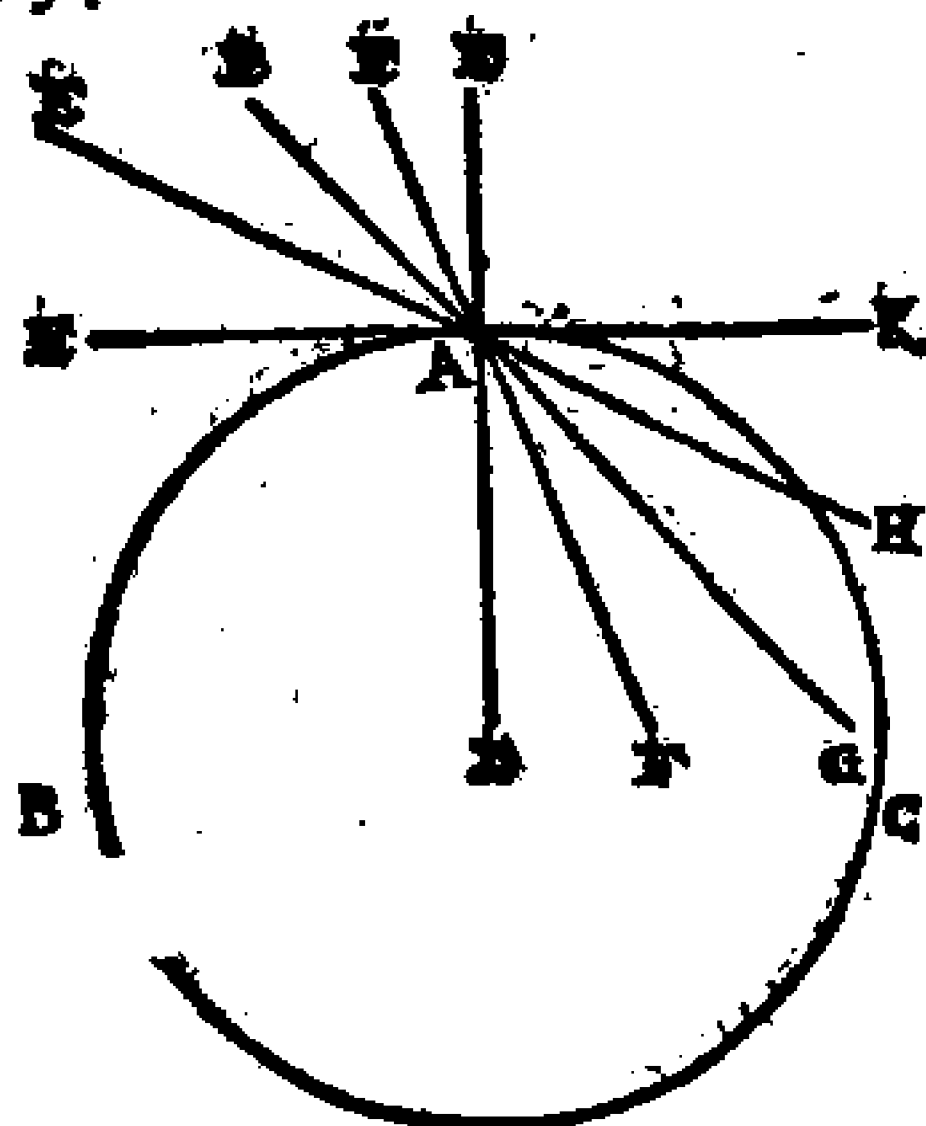


Non igitur hanc dubitationem sic expediemus; ut dicamus; lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet $E C D$, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in se-



ctione consistit, non in contactu: Et ubi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque ut vno verbo dicam, in decussatione, (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficiuntur. Duabus enim lineis AB , & CD , se scindentibus in puncto E , ad angulos rectos, intelligatur CD , sic moveri in orbem, scilicet super puncto E , fixo, ut ex CD , fiat FG ; hinc sane ex recto angulo AEC , fiet obtusus AEF : Inde ex recto BEC , fiet acutius BEF . Cumque facta fuerit HK , hinc quidem angulus obtusior fiet HEA , inde vero acutior BEH ; sicque continuò, donec pervenerit ad AB , & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immersa, ut sic dicam, linea CD , in lineam

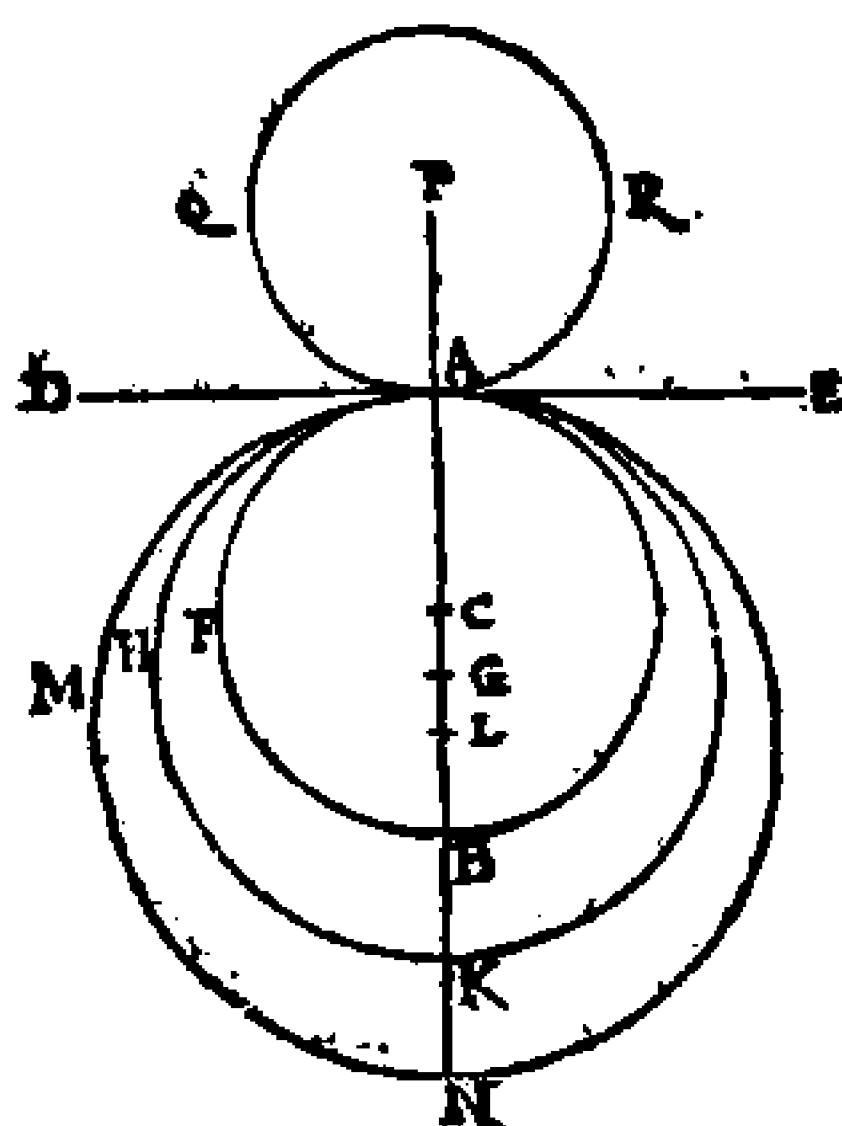
*AB, evanescet angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo ABCA, cuius centrum D, li-
nea DE, præteriens peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circumducatur ipsa DE, per
puncta F, G, H. Tum fient anguli continuè varij cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatio-*



ne linea ED, facta sit EK, & tangat circulum. Ac cum linea DE, non iam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam EAC, quantum ad angulum attinet: non aliter quam si BAH, esset linea recta neque contra facit, quod deducantur lineæ, faciantq; spatium CAK. Nam id sola AC, linea efficit, quæ rectam refugit: sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non consistat, quam uno sit, ut punctum A, tam sit in eodem angulo constituendo, quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dicet, punctum A, lineæ rectæ manere in suo recto, punctumq; A, periphæria in suo rotundo; neq; verumq; esse idem punctum; sed lineas se tantum inter se veluti lambere, quia altera alteram penitus, omnino puncto refugit; ut contraria contrapositione fiant manifestiora; id vero sensus non recipit. Duo enim circuli sese exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent. Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum ABC, circulum exterius: quod non patitur

linearum natura. Sed demus id fieri posse; ut nihil in cogitatione cadat, quod semel ipsam Geometria non representet. Illud tamen minime urgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus; Hiabit enim utrinque ipsarum concursus. Sed nos hac Geometricis rationibus confirmemus per theoremas.

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est.



Si t enim circulus AFBA, cuius centrum C, diameter vero AB, per cuius extremitatem A, ducatur linea DE, ad angulos rectos. Et constat, ex consuetudine huius decimasextæ, lineam DE, contingere ipsum AFBA, circulum: ac propterea DAF, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per ultimam partem huius decimasextæ. Iam vero inter puncta C & B; suscipiatur in diametro AB, centrum G, & spatium GA, describatur alter maior circulus AHKA. Dito FAH, non esse quantitatem: Constat quippe circulum AHKA, transire inter rectam DA, & curvam AF, cum sit semidiameter GA, maior semidiametro CA. Manifestum quoque est, lineam DE, tangere ipsum AHKA, circulum, ex eodem huius decimasextæ consuetudine: ac propterea DAH, esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum maius spatium LA, circulus AMNA; Et erit ex eodem consuetudine DAM, omni acuto minor. Sitq; in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficit linea DE, cum circuli ductis per A, punctum, quorum centra in AB, lineæ, minores omni acuto rectilineo: ac sic omnes aequales,

si modo æqualitas inter non quantitas dici possit. Quapropter contactus DAM, erit æqualis contactui DAF: Fietq; ut MAF, contactus interior circulorum neque auget, neq; minuat contactum DAM. Igitur MAF, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.

Sed & probabimus, contactum interiore circulorum quantitatem non esse, in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes. Quapropter anguli, qui sunt à diametro & periphæria, in omnibus circulis sunt æquales, per contrariam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus BAF, æqualis utrique angulorum KAH, & NAM: Ac propterea contactus FAM, nihil addit ad angulum BAF. Quare FAM, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

Mente enim eadem constructione, si DAF, sit quantitas; ipsa utriusque dividetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnantem ultimæ parti huius decimasextæ: neq; per obliquam, ut per lineam AM. Effet enim FAM, pars ipsius DAF: Atqui FAM, quantitas non est, ut modo probauimus. Non est igitur DAF, pars ipsius DAF. Igitur DAF, neq; per lineam rectam, neque per obliquam dividi potest. Quare DAF, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

In eadem constructione protrahatur BA, diameter ad punctum P. Tum centro P, intervallo autem PA, describatur circulus AQRA, tangens circulum AFBA, exterius in puncto A. Dico contactum FAQ, non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam dividitur, cum FAM, non sit quantitas per primam harum; neq; per rectam, cum neq; DAF, sit quantitas per secundam

secundam earundem; neque DAQ , quantitas per eandem. Quare cum FAQ , partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

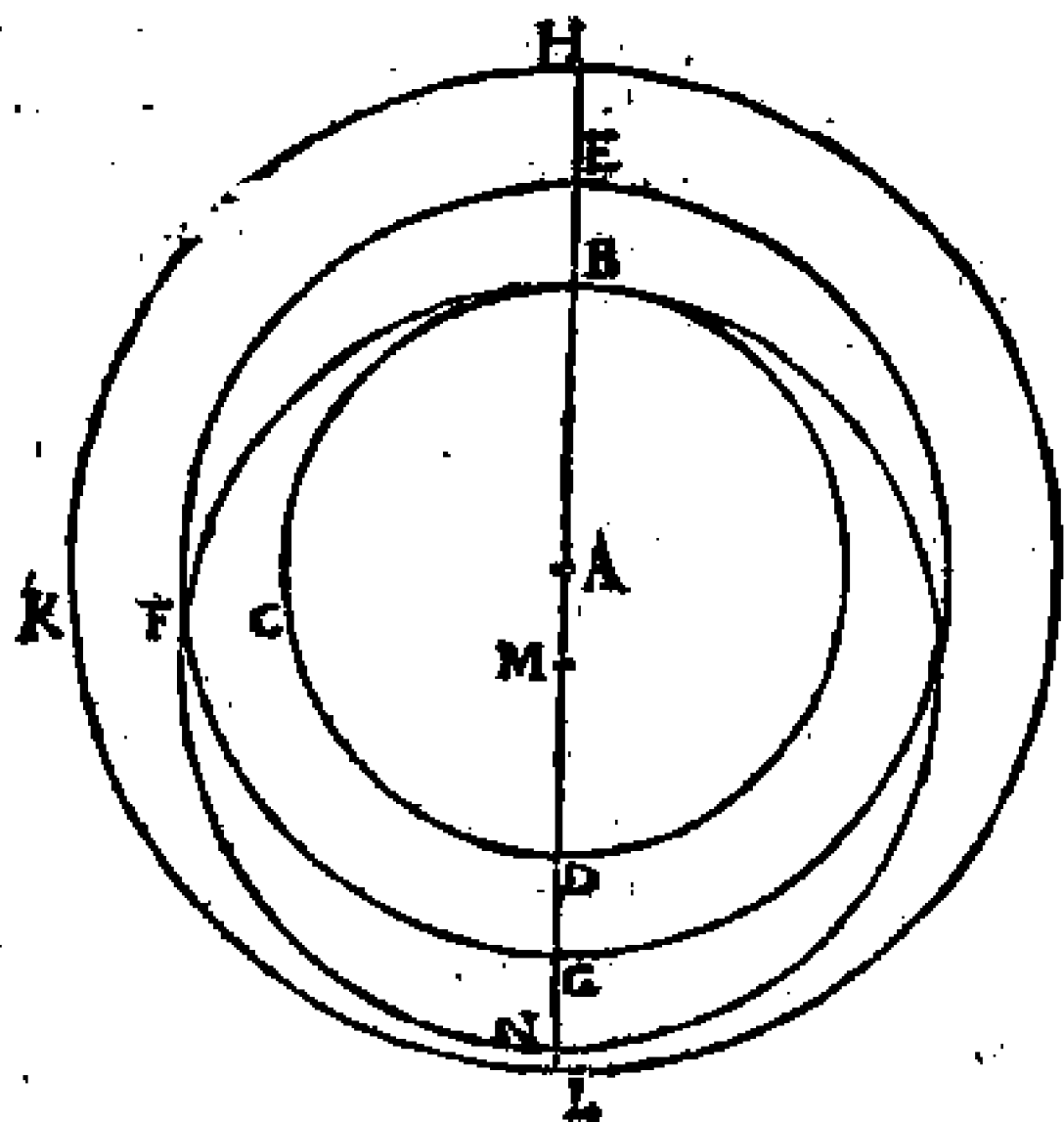
Ex his emerget hoc pronuntiatur, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitavit.

ANGULI, qui fiunt à diametro, & peripheria, sive intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

UT in posteriori figura, angulus BAF , æqualis est angulo BAD ; cum ipsi nihil accrescat ob contactum DAF , qui quantitas non est: & ob id QAP , rectus est, & æqualis ipsi DAP , cum DAQ , nihil addat: quod erat probandum.

Hæc Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quam ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorē esse. Hanc igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

In circulis anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, sunt æquales.



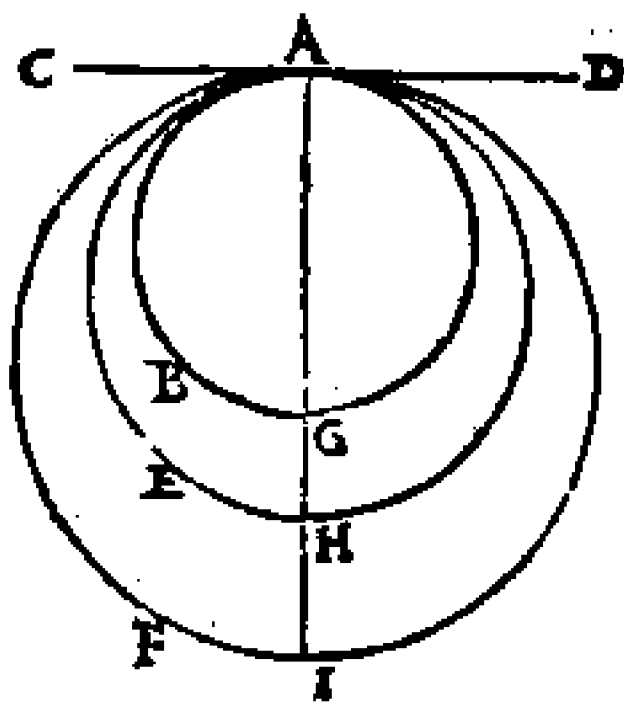
Si enim super centro A , duo circuli $BCDB$, & $EFG E$, quorū diametri BD , & EG , & secet EG , ambos circulos in punctis E, B, D , & G . Aio duos angulos CBD , & FED , esse æquales. Nam si sit FED , maior ipso CBD ; (neque enim contra, CBD , maior vllō pacto erit ipso FED), ac describantur plures circuli super eodem centro A , quorum vnus hoc loco satis fuerit $H K L H$: fiet tandem ex continuo augmento angulus à diametro & peripheria: verbi gratiā, angulus $K H L$, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B , & E , inter se æquales: quod fuit ostendendum: Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione vllus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos:

attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione recta linea, & peripheria, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeste maiores, & minores fiunt.

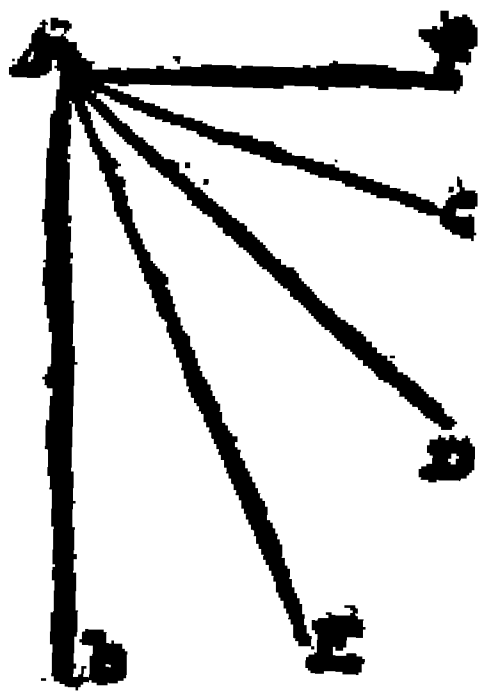
Ita ad hunc modum demonstratis, aio contactum circularum interiorem, non esse quantitatem. Super centro M , in eadē linea HL , posito, describatur circulus $BFNB$, tanto intervallo, quanto est circulus $EFG E$, posita scilicet MB , semidiametro æquali ipsi AE ; qui circulus tangat $BCDB$, circulum in puncto B . Et manifestum est, angulum FBD , æqualem esse angulo FED , propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipse FBD , erit angulo CBD , æqualis. Igitur CBF , contactus nihil addit ad ipsum CBD , angulum. Quare CBF , quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio eorum, quæ in 3. lib. adduximus, theorematum.

Hæc igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidis est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasset, vt demonstraret angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum verò semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quoque magis perspicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus verè esse angulum, ac quantitatem, affirmamus: atque aded angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Vnde dissoluenda sunt à nobis omnia Peletarij sophismata, quæ in hac digressionē adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

PRIMUM igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed insinuat, nos asserere angulum contactus esse minimam quantitatem: Immo verò asseueramus, quemuis angulum contactus, etsi ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo,



diuidi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonstrauit, & optime: sed per lineam circularem. Vt propositio angulo contactus CAB , si per A , describatur circulus $A E H$, maior circulo ABG , tangens rectam CD , in A : fiet angulus contactus CAE , minor angulo contactus CAB . Quod si adhuc maior circulus $A F I$, describatur, erit multò minor angulus contactus CAF , eodem angulo contactus CAB . Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque. Quemadmodum quiuis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit. cum diuidi possit infinite. Vt angulus acutus



$\angle BAC$, minor est recto $\angle BAF$, & tamen si ducatur recta AD , inter AC , AB , fiet acutus minor BAD . Quod si alia recta AE , inter AB , AD , ducatur, erit multo minor acutus BAE , nec unquam finis erit huius decrementi.

PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri posse infinite, ita ut quovis angulo contactus proposito dentur alij maiores sine numero. Ut in superiori figura circulari, angulo contactus CAF , maior est angulus contactus CAE , & multo maior angulus contactus CAB ; Atque ita deinceps, si minores semper circuli, quam ABG , describantur, tangentes rectam CD , in A , augebitur perpetuo angulus contactus, semper tamen minor existet quovis rectilineo acuto. Quemadmodum quovis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Ut in proxima figura, angulo acuto BAE ,

maior est acutus BAD , & multo adhuc maior acutus BAC . Quod si alia recta ducatur inter perpendicularem AF , & rectam AC , fiet adhuc maior angulus acutus, nec unquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento nunquam pervenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit equalis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam devenimus ad aliquem angulum contactus, qui equalis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto, nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur à duabus lineis se secantibus, cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EO DEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Immo asserimus, quolibet angulo semicirculi proposito, quamvis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Ut in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi BAG , maior est angulus semicirculi EAH , & multo adhuc maior angulus semicirculi FAI . Atque ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quam AFI , tangentes rectam CD , in A , augebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto CAI . *E* contrario vero, angulo semicirculi FAI , minor est angulus semicirculi EAH , & multo adhuc minor angulus semicirculi BAG , nec unquam finis erit huius decrementi, & tamē quilibet maior est quovis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuat, ut Euclides demonstrat. Quemadmodum quovis acuto angulo dato, inveniuntur alij quidē maiores, alij vero minores innumerabiles.

QUO D autem anguli contactus sint inaequales inter se, & non omnes aequales, ut vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in unico puncto, & linearum inclinatione, qua non in directum incut, ut constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, ut aequalitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationē linearum, ita ut linea unius conveniant omnino lineis alterius, si unus alteri superponatur; Ea enim aequalia sunt, quae sibi mutuo congruunt, iuxta usitatum pronuntiatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperitur semper eadem inclinatio, quod (uno superposito alteri) linea eorum non sibi respondeant sed prorsus inter se dissideant, ut ex figuris superioribus perspicuum est; Non erunt omnes anguli huiusmodi inter se aequales. Immo quilibet angulus contactus augeri, & dividi poterit infinite per lineam curvam, licet per rectam secari nequeat, ut recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hac affertur potest causa. Si enim linea contingens circumulum concipiatur moveri circa punctum contactus immobile, continuo circumulum secabit, donec iterum ipsū contingat: Tunc enim primum secare desinet circumulum. Quare si vel minimē inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circumulum, cum in uno tantum puncto linea recta circumulum possit tangere, ut ex 2. propos. huius lib. collegimus.

SOLV M igitur illi anguli contactus, pariterque illi duntaxat anguli semicirculorum aequales inter se erunt, qui efficiuntur à peripheriis aequalibus: In his enim tantummodo lineae sibi congruunt mutuo. Angulus vero contactus, qui efficiuntur à peripheriis minoribus, maiores erunt; Et qui à peripheriis maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, ut non obscure intelligi potest ex superioribus figuris. Neque enim lineae talium angulorum sibi mutuo conveniunt.

CONSTAT ergo, quemvis angulum contactus habere partes, & unum alteri posse aequalem exhiberi; ac rursus inaequalem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri certissimum. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.

DEINDE non est, quod anxiam reddat Peletarium prima propositio 10. libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatis eiusdem generis, quā diversi, dummodo utraque multiplicata alterā excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterve, siue denique quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quocunque anguli contactus, ut centum, inter se aequales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illi equarent, esset quoque unus illorum maior, vel equalis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quā dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quā dimidium, idque continuo fiat, relinqui tandem

Et tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito: quoniam angulus contactus, ut dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicamus, siue quantumvis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec unquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem illius propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, ut videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria à curvo rectum aufert, vel contra, ut vult, i. proposit. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

*I*am vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodò effici à duabus lineis se secantibus. Sufficit enim, ut angulus efficiatur, duas lineas in plano ad invicem inclinari, ita tamen, ut non in directum iaceant, ut constet ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secant, si producantur: cuiusmodi sunt peripheria, & linea recta illam tangens, vel etiam dua peripherie se tangentes. Quare verè angulum efficiunt, ut antea diximus.

*P*orro demonstratio Peletarii, qua conatur ostendere, contactum interiorem non esse quantitatem, nullius est momenti. Quamvis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur à linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto: non tamen propterea inter se omnes aequales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, ut diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes aequales. Sic etiam omnes formica (ut ex rebus quoque naturalibus exemplum afferamus,) minores sunt homine, vel montes, cum tamen ipsa inter se valde sint inaequales. Quare non rectè concludit Peletarius, contactum interiorem nihil esse.

*N*egamus demum, angulos segmentorum similium aequales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neg. enim hoc Euclides significavit in ultima definitione huius 3. lib. Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt aequales, vel quae angulos rectilineos capiunt aequales: non autem quorum anguli aequales existunt. Immo magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, ut aperte constabit ex proposit. 31. huius libri.

*E*x his facile reiciuntur reliqua Peletarii demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur à linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita ut contactus interior sit verè pars eius, cum contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, què constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quae utrumque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quò assertuit, angulum semicirculi aequalem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremò hallucinatus est quoque Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Et si enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minori: non tamen propterea efficitur, ut aliquis angulus semicirculi maior sit angulo recto. Semper enim rectus angulus superbit quemvis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur à peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores: nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, ut in precedenti figura cernere licet. Constat igitur ex his, angulum contactus verè esse angulum, demonstrationes autem Peletarii sophisticas esse, ac nullius momenti, homineque Geometra prorsus indignas.

*H*aec porro mea de angulo contactus disputatio adeò Peletarium commouit, atque perturbavit, ut lassam esse omnino atque offensam existimationem putauerit suam. Quare annis fere quinque post mei in Euclidem commentarii editionem, hoc est, anno 1579. pro sui defensione Apologiam in me conscripsit: in qua tamen neque ausus est solutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neque opinionem suam, non iam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (scilicet nullas habebat) confirmare, sed verbis duntaxat, & conuictis se defendere conatur, ut facile est, qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologie iam pridem non tam mei purgandi, quam veritatis tuenda gratia respondissem, nisi me ab hoc consilio grauissima eruditissimorum hominum auctoritas, qui eam responso omnino indignam iudicabant, reuocasset. Nunc verò quoniam locus hic à me postulare videtur, ut in secunda hac editione patrociniū veritatis iterū suscipiam, non alienum esse duxi, breuiter calumnias atque iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quanta potero modestia, depellere. Quamvis enim hoc à me factum iam sit anno 1586. in meis triangulis sphaericis, ubi necessario de re ipsa, eiusque Apologia mentio facienda fuit: quia tamen fortassis non omnes librum illum meum viderunt, opera pretium arbitratus sum me facturum, si totam illam responsionem hic, ubi proprius eius locus est, interseram, ut benignus Lector intelligat sine causa eum tanto animi dolore, & iracundia, quantam praese fert, contra me exarsisse, falsoque mihi imposuisse multa: me autem è contrario nullum verbum iniuriosum in illum effudisse, aut conuictum, quod frustra in Epistola nuntiatoria criminatur, ubi me à conuictis non abstinere, aperte testatur. Atque in illa Apologia nihil adeò me offendit, quam quòd me Peletarius non sincere, sed animosè, atque adeò inuidiosè fecisse insinuat, ut eum in meis commentariis vel reprehendere, vel laudarem: quae sane vitia pusilli semper animi esse duxi, & ab homine liberaliter, Christianeque educato alienissima. Verum ea quàm longè absint tū à nostra Societatis disciplina, tum à mea consuetudine, nemo omnino, qui nos ac nostra norit, ignorat. His verò, qui nostra minime norunt, hic ipse liber fidem faciet, sincere omnia dici, nihil inuidiosè, nihil animosè: plane ut veritatem quæsitam, non cuiusque auctoritatē contemptam esse

appareat. Neq; enim mihi tantum derogo, (et si nihil arrego) ut mihi vni interdictum putem, ne si quid in alieni scriptis falsum videatur, occasione oblata, cur id mihi minus probetur, ostendā; modò (quod prudentium, ac bene moratorum hominū consuetudo postulat) id sine conuicio atq; irrisione faciam: Hoc autē liber ipse, qui in medio est, ita à me factum esse clamat. Etenim ut totū hunc librū peruolutes, ne verbum quidem vnum reperiēs, quod vel speciem maledicti habeat, atq; conuicij. Nam in scholio hoc de angulo contactus iurare li- quidō possem, nihil me minū cogitasse, q̄ ut Peletarium obrectandi animo oppugnarem; sed illud habuisse propositum, (si modò consequi possem) ut suus esset veritati locus. Quod quidem eō liberius feci, q̄ Peletario ipso non modò inuito, sed etiam liberti existimaui me esse facturum, quod vel ipso auctore facerem: qui non à Cardano solum, atq; Campano, sed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Eratosthene, Pappo, Prolemao, Hippo- crate Chio, Geometria luminibus, ab ipso deniq; omnium magistro Euclide dissentire nō dubitauit. Nimirum quia, ut ab eodem in Apologia verè dictum est, in omni doctrina, præsertim verò in Geometria, non auctoritas est spectanda, sed veritas: quanquam non video, qui amicus veritatis sit is, apud quem veritas odium parit, nisi fortē aut decipi se nō posse arbitratur, qui columnina illa Geometria errasse interdum prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac querit potius, q̄ in suis. Equidem si quis me in re quāpiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri posse video) errasse ostenderit, ne ego maximam illi gratiam habuero, qui errātem in viam veritatis reduxerit. At enim probat studium veritatis Peletarius, conuicia ferre non potest: quæ tandem con- uicia? rogas? Demonstrationes meas appellas sophismata. Nunc demum, quæ conuicia dicat, intelligo. Nam alia nulla in meo hoc libro esse certò scio: ab his (si conuicia sunt) fateor me non abstinere. At ego homo sim- plex, & ignarus verborum, conuicia esse nunquā duxi, cum verè dicerentur. Neq; enim, quo alio vocabulo de- monstrationes planè fallaces, & adulterinas appellarem, habebam: neq; verò Philosophorum, ac Mathematico- rum consuetudo loquendi magis appositum mihi verbum suppeditabat. Accedit, q̄ cum à Peletario, homi- ne in loquendo consideratissimo, germanus Campani, Cardaniq; demonstrationes paralogismos appellari vi- derem, existimaui in falsis eius demonstrationibus refellendis impuniū per simili me vocabulo vsurum. Quod si sophisma contumeliosius verbum est, q̄ paralogismus, in Gallia, ignoscit consuetudinū eius ignaro, atq; exi- stimet, me paralogismos dicere voluisse. Atq; ut planè intelligat Peletarius, me non contradicendi studio illa scripsisse, mecum vnā consideret, quantam mihi materiam sui refellendi dederit, si hominem refellere potius, quā rem, quæ tum agebatur, explanare in animo fuisset: quanquam occasione eius reprehendendi in sinum delatam sepius omisi, ne illum mihi delegisse viderer, in quem potissimum incurrerem. Quā præclara enim occasio fuit, in propof. 4. & 8. lib. 1. atq; in propof. 24. lib. 3. quā ipse 23. facit? In his enim omnibus reijcit de- monstrationes antiquissimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram vnā alteri su- perponi concipere animo oporteat: quod ipse à Geometria dignitate putat esse alienum, hac solum inductū ratione, quod superpositionem illam mechanicum quid esse arbitretur; & quod omnes ferè propositiones hoc modo, ut ait, possint demonstrari, etiam problemata, in quibus aliquid proponitur construendum: atq; in huius rei exemplū adducit propof. 2. & 3. lib. 1. quæ problemata sunt. Hic certè Peletarium iure carpere potuissem, si id mihi fuisset propositum, ut falsò criminatur; maxime in eo, quod eadem ratione vsui fore existimauit su- perpositionem in demonstrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non satū intellexisse videtur, quo pæ- cto Geometra superpositionem illam vsurpent. Neq; enim volunt, re ipsa faciendam esse figurarum superpo- sitionem, (hoc enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantū, ac mente, quod opus est rationis atq; intellectus. Itaq; in theorematibus quidem locū habebit genus hoc argumentandi, in problematibus verò non. Namq; in theorematibus, propter magnitudinum aequalitatem, inæqualitatemve, quæ, ut nota ponitur, faci- le intellectus cuiusvis sine vlla hesitatione comprehendit, vnā vel non excedere alteram, vel excedere, si an- imo concipiatur vnā alteri esse superposita, quamuis re ipsa non fiat illa superpositio, ut in propof. 4. lib. 1. fa- ctum est: At in problematibus, in quibus magnitudinem quā alteri aequalē construere iubetur, licet mente cogitet magnitudinē propositam transferri in alium locum, non tamen propterea quicquam efficiet, cum re ipsa translatio nulla facta sit: Ut mirum sit, Peletarium sibi persuadere potuisse, propof. 2. & 3. lib. 1. & alias penè omnes per superpositionē, siue translationem linearum, figurarūve posse demonstrari, si hoc modo ar- gumentandi in Geometria vti liceret. Et certè hac in re non solum Euclidem in crimen vocat Peletarius, ve- rum etiam Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonstrando, & subtilior fuit nemo, eiusq; commen- ratorem grauiſſimum, eumq; doctissimū Eutocium Ascalonitam, qui eodem argumentandi genere vtuntur in æque ponderantibus, immò verò & omnes Geometras redarguat necesse est, qui non rarò hoc argumētū genus adhibēt. Sed videamus, quò tandem egregius hic noster Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, sit deuolutus. Viderat Peletarius, (neq; enim rem adeò manifestam videre nō poterat) si hunc modum argumen- tandi e medio tollat, vniuersam se Geometriam funditus euertere, cum plurima, eaq; præcipua propositiones in Geometria demonstrantur ex propof. 4. & 8. lib. 1. & ex 24. lib. 3. quæ quidem alio modo demonstrari ne- queunt, q̄ per illam figurarum superpositionē, non quidem re ipsa existentem, sed cogitatione duntaxat, ut dē- xi, comprehensam. Quò igitur se verteret? quid ageret? Excogitauit scire rem magis à Geometria alienam, q̄ est superpositio illa figurarum. Coactus enim est asserere, propof. 4. lib. 1. esse definitionem angulorū aqua- lium, (& quis vnquam talem audiuit definitionem?) atq; adeò concedendam eam esse sine demonstratione: propositionem verò 8. eiusdem lib. principium esse per se quoq; notū. Quod ut credibile magis efficiat, ita scri- bit in

in propof. 4. lib. 1. (Etenim nulla euidēiori specie æqualitas figurarum dignoscitur, quàm ex laterum æqualitate.) Idemq; quasi confirmat, & repetit in propof. 8. eiusdem libri, dum ita loquitur, (Quis enim negauerit, duas superficies esse æquales, quarum latera & quantitate, & numero sunt æqualia?) Hac Peletarius, ut dicta propositiones Euclidis sine demonstratione admittantur, commentatus est, sed quæ omnino falsa sunt: ut magnopere mirandum sit, potuisse eum propositiones à Geometria prorsus alienas tam inconsideratè proferre. Scilicet verum est, quod Philosophi asserunt; Dato vno absurdo, cetera consequuntur. Assumpserat enim Peletarius propof. 4. & 8. lib. 1. pro principii: quod quidē falsum est, atq; absurdum. Vnde ad eas absurditates necessariò deuenit, quas etiā illi, qui vix adhuc principia Geometria attingerunt, vel facile vitare potuissent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratū, etiam si latera habeant & quantitate, & numero equalia, posse tamen inter se valde esse inæqualia? Id quod in Pentagonis quoq; æquilateris, & in aliis figuris plurium laterū equalium cerni potest: quod non est huius loci pluribus verbis explicare. Cum ergo in omnibus figuris multilateris inæqualitas reperiatur, licet latera habeant & quantitate, & numero equalia, demonstrandum fuit necessariò Euclidis, æqualitatē triangulorum colligi ex laterum æqualitate, quandoquidem in aliis figuris ea non colligitur. Quare neq; propofitio 4. Definitio, neq; propof. 8. principium erit: ac proinde omnes propositiones, quæ illis nituntur, quæ innumerabiles propemodū sunt, corruant necesse est, nisi demonstrationes Euclidis recipiātur in illis propositionibus, cum alio modo demonstrari non possint. Demonstratio enim noua propof. 4. quam Peletarius consinxit, nihil aliud est, q̃ (ut cum Logicè loquamur) petitio principij. Id quod perspicuum erit cuiuslibet, qui eam diligentius considerare voluerit. Nam in ea solum constructur vnum triangulum posteriori ex duobus datis æquale, immò idem, atq; hoc ipsum quidem ineptissimè, cum ad id præstandum circulos describat Peletarius, quibus tamen in demonstratione non vitetur, quod vitiosum omnino est in Geometria. Deinde infert, triangulum hoc constructum, quod à posteriori ex duobus propofitis nō differt, priori esse æquale, sine vlla demonstratione; certum autem est, hoc ab initio propofitum fuisse, ut demonstraretur. Quocirca manifestè principium petit, cum eadem facilitate statim in principio concludere potuisset, etiam si nullam adhibuisset constructionem, triangula propofita esse æqualia; quippe cum constructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonstratione propof. 24. lib. 3. quam etiam nouam consinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus eius commentarij peruenerunt, relinquo. Præterea alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propofitionibus Euclidis in demonstrando, ut q̃ plurimq; 2. propof. libri 1. iuscire pro 3. assumat, &c. Neq; enim mihi in animo nunc est, eius commentarios examinare, sed solum calumnias, quas frequētes in sua Apologia adhibuit, à me depellere. Quæ cū ita sint, quod ille falsò de me, verè ego de illo dicere possem, rubere me, (ut eius verbis utar) Euclidis interpretē contigisse, qui non iam Theonem, aut Campanum emendet, sed ipsum Euclidem sine causa reprehendat; quippe cū ego Euclidem (vri par est) à calumniis ipsius defendam, omnesq; insidias, ac fallacias, quas contra eum instruxerat, detegam, ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuisse, ut Peletarium redarguerem, cum tot ac tantos errores dissimulauerim: quas ego me nunc quidem in lucē protuliffem, nisi vellem omnes & intelligere, quantū Peletarius à me, de quo tam acerbè queritur, tum beneficium acceperit, & ex breui hac disputatione fructus aliquid, vtilitatisq; percipere. Nunc ut, q̃ dispari ille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter exponā, atq; ita refellam, ac diluam, ut omnes oculis videant, eas esse calumnias: In quo tamen eiusmodi à me moderatio adhibebitur, ut modestia, quæ hominem religiosum decet, minimè obliuiscar. Neq; enim illi, vti prouocauit, respondebo.

PRIMUM itaq; mihi obijcit Peletarius, q̃ in eius demonstrationibus citandis ita me gesserim, ut si quomodo nomen ipsius suppressere potuiffem, id me ostendam libenter fuisse facturum. Quod q̃ sit falsum, facile iudicabunt ij, qui meos commentarios legerint: cum vbiq; eam honorificè appellem, eiq; plurimas demonstrationes ascribam, tanquam proprias, quas tamē aliter, q̃ ipse, & multò breuius demonstro, & interdum etiam (quod maius est) vniuersalius, ut liquido constat ex iis, quæ tum ad propof. 38. tum ad propof. 45. lib. 1. ex Peletario demonstraui, ut alia interim taceam: quæ non iniuria mihi vindicare potuiffem: ut mirer, quid illi in mentem venerit, id à me parū sincere, atq; adeò inuidiosè factum existimare, quod ego verebar, ne nimis ambrosiosè factum quispiam iudicaret. Quod verò propof. 16. lib. 3. & in prioribus duabus defin. lib. 5. ut ipse obijcit, animosè, ut ego fateor, liberè, quid de eius demonstrationibus sentirem, exposui, id feci, ut iam antè dixi, non cuiusquam ladendi causa, sed querenda veritatis. Ea enim est natura, & conditio eorum, qui liberalibus artibus dant operam, ut etiam si alter alterius interdum sententiam impugnet, non tamē idcirco odii potius, quàm ingenij inter se certare videantur. Qui sit aliorum sensus ignoro, equidem, ut suprà dixi, ita sum animo, ut si quis me alicuius erroris in demonstrando commissi admoneret, ei q̃ maximas gratias haberem: atq; ut liberiùs id facerent, enixè rogauit non paucos, & nunc iterum eosdem, atq; etiam alios amicè oratos volo. Scio enim, quàm facile possit in suis quisq; inuentis hallucinari; video (quod ipse quoq; Peletarius in Apologia sapienter asseruit) omnibus hominibus commune esse, ut peccent. Deinde quòd in additionibus ad propof. 47. lib. 1. eius mentionem non fecerim, non est, quòd agre ferat, cum illa propositiones non sint ab ipso inuentæ. Quædam enim multo tempore antè ipsum demonstrare sunt vel à Campano, vel à Proclo, aut Theone, quasdam verò demonstrauit egomet, antequam ipsius demonstrationes vidiffem: quòd adeò manifesta sunt, & faciles, ut nulla probatione egeant, sed sint instar corollariorum propof. 47. Ut nulla prorsus laus, aut gloria illi accessura videretur, si maximè eas ab ipso inuentas esse, (quod tamen verum non est) predicassent; cum

ex quilibet, modo primoribus labris studia Mathematica degustarit, nullo negotio ex illa propof. 47. colligere possit: Vt non videam, cur tandem eas propositiones tanti ponderis esse dicat, cum sint omnium iudicio leuissimæ adeo ut in plerisque earum nec ipse Peletarius demonstrationem ullam, propter earum evidentiam adducat, sed eas nulla probatione egere fateatur. Denique non est, quod tantopere mihi succenseat idcirco, quod constructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli supra datam rectam lineam finitam ei non tribuerim: quoniam in ea constructione nihil prorsus ab eo sum mutuatus: quod is diiudicandum relinquo, qui meam cum illius constructione contulerint. Nam & mea omnino diuersa est, & ille in sua mirifice (vt alia peccata rectam) abutitur propositione 9. lib. 3. cum ex ea probet, punctum quoddam esse centrum circuli, qui nondum est descriptus. Geometra sanè dixisset, punctum illud esse eiusmodi, vt circulus ex eo descriptus ad internallum cuiuslibet lineæ rectæ ex illis tribus, quæ ibi ostensa sunt æquales, transeat per extremitates reliquarum duarum linearum æqualium. Nam propositio 9. lib. 3. nihil eo loco ad rem facit, cum propositum ex ipsa constructione posset concludi, & ex demonstratis, vt proximè dixi, etiam si propositio illa vera non esset, aut nusquam demonstrata. Idem peccatum committit Peletarius in omnibus propositionibus lib. 4. in quibus vel intra figuram rectilineam, vel circa eandem circulus describendus est. Quod si idè sum reprehendendus, quod propositionem vnā, multò aliter à me, & breuius demonstratam, ei non ascripserim, non video quo pacto in idem ipse vitium non incurrat, cum problema hoc (Propositis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris supra minorem cognoscere.) multū seculū ante ipsum à Theone demonstratum sibi arroget, hac solam de causa, vt arbitror, quod illud alia ratione, longiore tamen, demonstrauit. Mitto hoc aliud problema, (Dato angulo rectilineo æqualem angulum curuilineum constituere.) quod in Apologia suum proprium appellat, idemq; hætenus desideratum esse gloriatur; cum tamen illud ipsum ego ex Proclo, qui multis ante eum seculis floruit, in definitione 5. libri 5. multò breuius & clarius demonstrauimus. Nam, vt eo in loco ostendi, si recta linea datum angulum rectilineum continentes ponantur æquales, & circa ipsas duo semicirculi (qui æquales erunt) versus easdem partes describantur, illico constitutus erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo æqualis: Neq; opus est tot ambagibus uti; quot Peletarius ad eam rem demonstrandam adhibet: quamuis robur demonstrationis ipsius idem sit, quod meæ. Et quod magis mirandum est, fateretur Peletarius se meam demonstrationem vidisse, & eam nihilominus sibi audet, tanquam propriam arrogare. En cur Peletarius clamet, me non paucas demonstrationes parū honeste, vt mihi vendicem, sibi subducere conatum. Quis autem non videt, idem in alio vituperare, quod ipse sibi gloriæ suæ putat: Itaque multò verius, ac iustius eodem illum crimine ego, q̃ ille me, condemnare possum; cum nunquā propositionum illarum inuentorem me appellauerim, vt ipse, sed solum eius nomen, ob rationes à me expositas, retinuerim.

DE I N D E angulum contactus, & acutum rectilineum eiusdem generis esse, contra me pluribus verbis conatur ostendere. Sed nescio quo modo aberrat, quod dicitur, à scopo. Solum enim probat, utrumq; angulum eodem genere quantitatis contineri, hoc est, utrumq; angulum planum esse: quod acutus angulus rectilineus, vel etiam rectus constare possit ex angulo contactus, & alio angulo mixto: quod neq; ego, neq; vllus vquam Geometra negauit. Ego angulos illos eiusdem esse generis negant, hac solam de causa, quod angulus contactus, quantumuis multiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat, vt in scholio huius propof. 16. euidenter ostendi. Hic enim fit, vt alt. r ad alterum proportionem non habeat, atq; adeo quodam modo diuersi generis sint: quemadmodum eadem de causa linea recta finita, & infinita non censentur esse eiusdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat, quamvis sub eodem genere magnitudinis, nimirum sub linea recta, comprehendantur. Hoc itaq; feriat, vt collimasse videatur: quanquam vt omnia faciat, collimabit nunquam, ita longè abest, quod est propositum. Magnitudines autem, quarum altera multiplicata alteram superare nequit, non censeri eiusdem generis, (quod ad proportionem attinet) licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur, liquidò constat ex defin. 5. lib. 5. vbi Euclides satis perspicue explicat, cuiusmodi debeant esse magnitudines eiusdem generis, inter quas proportio reperitur. Quare viderint alij, Peletarius homo consideratus, quàm cogitare me incogitantem hominem appellarit; quasi non rectè intellexerim, quæ magnitudines sint eiusdem generis, quæ non sint. Nunquam enim dixi (id quod mihi affinxit, vt carperet) duarum magnitudinum, quæ sub diuersis quantitatis generibus collocantur, quales sunt linea, superficies, corpus, ac numerus, alterutram ita posse multiplicari, vt alteram superet: In quo, nemine reluctante, frustra sese fatigat, vt doceat, id fieri non posse: sed de illis duntaxat magnitudinibus sum locutus, quæ cum in eodem genere quantitatis versentur, diuersi tamen generis censeri possunt: quales sunt superficies rectilinea, & curuilinea, siue mixta: Itemq; linea recta, & curua. Hæ etenim ita differre inter se videntur, vt Aristoteles liquidò affirmarit, vnā alteri æquali in esse non posse: quod tamen (pace Aristotelis dictum sit) verum vsquequaque non est: cū Archimedes in libro de Lineis spirales demonstrauerit, quenam linea recta æqualis possit esse circumferentia cuiusvis circuli dati, idemq; nos in quadratura circuli ostenderimus. Non igitur negare poterit Peletarius, ab Euclide defin. 5. lib. 5. aliquas quantitates à proportionis definitione excludi, diuersiq; propterea esse quodammodo generis, quod ad proportionem attinet, licet in eodem magnitudinis genere ponantur: quales sunt angulus contactus, & angulus rectilineus; Lineæ item rectæ finitæ, & infinitæ: Multas item magnitudines comprehendendi in eadem definitione proportionis, quas plerique excludabant: cuiusmodi sunt curuilinea superficies, & rectilinea. nec-

non linea circularis, & recta, ut paulo ante diximus, latiusq; in defin. 5. lib. 5. exponemus. Verum Peletarius, ne opinionem illam suam, quam de angulo contactus semel imbiberat, deferere cogeretur, noluit hanc expositionem 5. defin. lib. 5. recipere: immo eam ut oppugnet, omnes videtur in Apologia intendisse nervos, oblitus fui, qui ferè eodem modo illam defin. in 5. lib. olim exposuerat; nisi quod non rectè inde colligit, angulum contactus non esse quantitatem, propterea quod multiplicatus nullam magnitudinem, ut dicit, possit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falsum est. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non possit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. solum rectè colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem ullam: ad angulum verò alium contactus quemcumq; proportionem habere. Sed siue ita intellexerit eam defin. ut ex commentarijs eius in lib. 5. colligi potest, siue secus, ut in Apologia indicare videtur, nō multum laboro: Certè ita illam esse intelligendam, ut exposui, nemo, qui verba Euclidis diligenter expendit, negabit. Verum enimverò, si mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certè, (nisi arrogans haberi vult) aut Proclo gravissimo scriptori, qui libro 2. in lib. 1. Euclid. ad definitionem anguli plani eodem modo definitionē illam intellexit, aut Petro Nonio Lusitano, quem tanti facis, (& meritò id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac nostra aetate in Mathematicis inferior) ut eum unum pro multis millibus testem citet, & suarum demonstrationum approbato-rem, qui disertissimis verbis tum in libro de Erratū Orontij, tum in Algebra sua, illam definitionem explicat, ut à me est exposita: quintiā ibidem asserit, ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem; ut Petrus Nonius, quē testem produxerat pro se Peletarius, iam pro me testimonium dicat. Atq; ex hisce duobus locis Petri Nonij facile quivis intelliget, q̄ sine ratione, quanto contradicēdi studio mihi insultet Peletarius, cum semel atq; iterum odiosè percontatur, vndenam potuerim illi lineam infinitā deportare. In idem enim crimen (si crimen est, lineam infinitam exempli causa nominare) vocat etiam Petrum Nonium testem suum, atq; adeo omnes Philosophos, quorum est illa vox nemini inaudita, præterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam esse proportionem. Desinat igitur à me sciscitari, vnde lineam infinitam deportaverim: Inde enim respondebo, vnde eam Petrus Nonius, vnde Philosophi omnes deportarunt. Quid? nōne sophisma illud Peletarij, semper in hoc erro, demonstratio illa, volui dicere, & quidem palmaris, qua conatur ostendere, propositionem 1. lib. 10. cum proposit. 16. lib. 3. stare non possit, si angulus contactus concedatur esse quantitas, à Petro Nonio Peletarij cognitore eadem prorsus ratione, qua à me ipso, confutatur? Quæ si germana demonstratio est, miror quid sit, cur eam Nonius Geometriæ scientissimus, idēque Peletarij approbator, minus probarit: Cur nihilo magis demonstrationes eiusdem, quibus planum facit, (ut putat) angulum contactus quantitatem non esse, eundem illum Nonium nihil admodum moverint? Id enim (nisi fallor) illa Nonij verba, (Si quis sententiam Peletarij de angulo contactus amplecti velit.) declarant. Nam si demonstrationes existimasset, profectò Peletarij doctrinam in eo retinendam esse dixisset, Geometricæ enim demonstrationes eiusmodi sunt, ut assensum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloq; modo quempiam sinant ancipiti opinione distrahi sic, ut tum assentiatur, si velit, tum, si nolit, dissentiat. En cur Peletarius Nonij testimonio aliorū iudicia contemnat, en præclarum testimonium quod Petrus Nonius eius demonstrationibus dedit: quò aequiore animo ferat, eas à me nihilo magis, quàm ab illo suo approbatore, demonstrationes putari.

TERCIO, quòd existimare dixi Peletarium, angulum contingentia nihil esse, falsum esse, clamat: Nusquam enim dixisse se, nihil esse, sed quantitatem non esse. Itane verò? ut in predicamento Quantitatis, quòd neq; est punctum, (quis enim inclinationem illam punctum esse dixerit?) neq; quantitas, quo alio nomine vocetur, q̄ Nihil? Sed, ut ut dixit, profectò non modò mirabile est, sed monstri in Geometria simile, putare angulum contactus non esse quantitatem, qui postea additus alijs angulis efficiat curvilineum angulum rectilineo æqualem. Quis enim unquam Geometrarum id, quòd quantitas non est, magnitudini adiunxit, ut æqualem eam alteri efficeret? Prætereo, q̄ figura trilatèra curvilinea intra tres circulos se mutuo tangentes conclusa nullum haberet angulum ex Peletarij sententia; quia tres illi contactus, anguli non sunt: cum tamen tribus diversis lineis contineatur; quòd omnino novū est, & inauditū apud Geometras. Itemq; si quatuor, aut plures circuli se mutuo tangerent, ut fieret figura curvilinea quadrilatera, vel plarium laterum, illa nullum angulum haberet. Atq; etiam, si duæ lineæ rectæ angulum continent, unum eundemq; circulum tangerent, trilatèra illa figura habens tertium latus curvum, unicū tantum haberet angulum. Quæ omnia si sunt absurda, consentanea non est opinio Peletarij. Sed nimis fortasse multis ad Nihil illud Peletarij evertendum, ad quòd tuendum ille nihil asserat. Quoniam verò, ne pro Nihilo suo nihil agere videatur, quando res non potest, mea verba carpit, verba defendam: quæ quidem ille, nescio quibus prastigijs ita depravat, ut dicere videat, Nihil esse minus quocunq; angulo: atq; (ut simplicem, credo, hominem irretiat) quarit ex me, quòd tandem genus sermonis sit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Neq; enim ego eiusmodi sermonem agnosco, q̄ Nihil esse minus quocunq; angulo, nusquam dixerim, nisi ex sententia Peletarij. Sed videlicet homo vehemens, ut summi illud Nihil vlcisceretur, aliud mihi Nil affinxit, quo cū impune pugnaret: At quàm palastricè pugnat: quàm sibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo petitus fuerat, in me ipsum mira venustate conuertit? Sic enim argumentatur. (Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Angulus igitur maior nihilo est: Atqui Clavius eundē ponit minorē nihilo:

Est igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor.) Mox quasi Nihil illud ab se effictum ingulasset, exclamat. (En Clauij argumenta, quæ vtrum tandem Peletarij sophismata sunt; an Clauij potius figmenta, cum ipse suum angulum contactus nihil esse dicat, non ego?) Verum vt hominem faneum, atq; adumbratum nequicquā petere definat, virum ostendam, qui cum, si velit, certare cum laude possit. Ego vt ostenderem, angulum contactus, ex Euclidis sententia, verè esse angulum, & angulum semicirculi angulo recto rectilineo minorem, ita sum argumentatus. Si Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, (hoc est, vt Peletarius intelligit, non esse angulum, vel non esse quantitatē) & angulum semicirculi aequalem recto rectilineo; quid, obsecro, tantoperè desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum verò semicirculi maiorem? Quid enim clariùs, quàm nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, hoc est, quàm id, quod quantitas non est, minus esse quocunque angulo? Quid rursus magis perspicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Agnoscat itaque Peletarius, Nihil illud suum male à nobis acceptum, idq; ita vliscatur, vt meum hoc argumentum refellat: in quo ego si angulum contactus dixi esse nihil, & non potius eum nihil esse asserui ex sententia Peletarij, libenter manus dabo. Videretur Peletarius aut non intellexisse meum argumentum, aut intelligere noluisse: nisi enim quis dicat, dedit opera verba mea voluisse cauillari; quod & plerisque alijs in locis facere videtur. Nunquam enim dixi, angulum contactus minorem esse, aut maiore nihilo: Solum affirmari, angulum contactus quemcunque minorem esse, aut maiorem aliquo alio angulo contactus, quem non ego dixi nihil esse, sed Peletarius, eundemq; Euclides minorem quolibet acuto rectilineo rectè demonstrauit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipse negat, didicisse Dialecticam, illum ipsum tam lepidum, atq; acutum syllogismum, quo Nihil illud ab se confictum mira venustate confixit, paulisper considerabimus: vt quàm suo iure Dialecticæ ignaros alios vocet, appareat. Nam mihi quidem male cornatus ille ipse syllogismus videtur; incudiq; reddendus. Etenim cùm versetur in tertia figura, in eo maior extremitas, (vt Dialectici loquuntur) quæ est, Nihil, de minori extremitate, quæ est, angulo contactus maior, in recto prædicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Igitur aliquid, quod angulo contactus maior est, nihil est. Quæ quidē conclusio rectè sequitur ex præmissis, quarū prior Peletarij est, nō mea, posterior autē mea, & Procli, immo & Euclidis. Conclusio autē illa Peletarij, Angulus igitur maior nihilo est, nulla ratione ex præmissis inferri potest. Nam si, angulum cū dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, assumitur medius terminus, qui in vtraq; præmissa subiicitur: quod nefas esse, Aristoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamāt. Si autē alium angulum intelligit, assumitur in conclusione terminus, cuius nulla facta est mentio in præmissis: quod nihilo magis licere, nemo est tam plumbeus in Dialecticu, qui nesciat. Neq; contendat Peletarius, mentionē factam esse anguli in minore extremitate, vbi dictum est, angulum contactus angulo contactus maiorem esse. Nam angulus in minore extremitate positus est in obliquo, qui in conclusione subiicitur in recto: quod, vt auctore Aristotele, docent omnes Logici, sine peccato fieri non potest. Quod, vt planum fiat, vtimur ea palæstra, quam ab illo didicimus. Si quispiam ita argumentetur; Angulus in semicirculo rectus est: Angulus in semicirculo angulo acuto maior est. Angulus igitur acutus maior recto est: quis, modò sit imbutus Dialecticus, talis argumentationem probet, cum præmissæ veræ sint, conclusio autem falsa? Talis ille syllogismus est Peletarij, qui apud imperitam multitudinem alter Chrysippus videri voluit. Conclusio, quæ rectè ex præmissis inferretur, hæc esset. Igitur aliquis angulus, qui acuto maior est, rectus est. Sed tamen ei veniam dandam puto, quod se Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere profitetur, cuius ego me Dialecticæ, si ab Aristotelica abhorret, planè fateror ignarum. Faterur deinde Peletarius, se non intelligere, quo pacto dicere possim angulum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum contactus esse omni acuto rectilineo minorem, (ipse, vt aliquid addat de suo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem; cū tamen verbum illud, minimo, ego nō addiderim) cupitq; scire, quid aliud sit, angulum contactus minorem esse omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus esse acutorum rectilinearum minimum. Quæ in re morem geram homini non grauare, et si è scholio huius propos. 6. potuit id, quod cupit, cognoscere. Nempe ea ratione me illud potuisse dicere, quæ dicimus, angulum obtusum rectilinearum minimum dari non posse, & tamen angulum rectilinearum acutum esse omni obtuso rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud est, angulum rectilinearum acutum minorem esse omni rectilineo obtuso, quàm angulum rectilinearum acutum esse obtusorum rectilinearum minimum: propterea quod angulus acutus non est obtusus, sicut nec angulus contactus rectilinearus est, aut acutus. Id quod etiam clarissime docet Proclus lib. 2. in primum Euclidis ad definitionem anguli recti, obtusi, & acuti. Sed hæc puerilia sunt, & quæ magis ad Grammaticos spectent, quàm ad Geometras. Quod etiam, ne librum meum parum spissum viderer fecisse, suas demonstrationes ad verbum me recitasse queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipso desidero. Id enim eo à me consilio factum est, vt omnes planè viderent, syncerè me, ac fideliter eius opinionem retulisse, nullumq; omnino verbum immatasse. Quod verinam in meo verbis recitandis ipse facere in animum induxisset. Multo enim minus spissam Apologiam suam facere potuisset. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarij verbum magis spissum efficere? Qui enim parum spissum iudicaret librum eum, qui nec raras, nec inanes in libros omnes Euclidis commèntationes contineret, cū Peletarius suum librum, qui sex priorum duntaxat librorum demonstrationes complectitur, satis spissum sit

fit arbitrarius? Sed eo sum æquior Peletario, quod ex se alios indicat. Nam in Apologia sua, ne inaniter verum videtur, tres demonstrationes nihil penitus ad eam pertinentes inserit: quarum priorem immerito suam propriam facit, ut supra dixi: posteriorem verò, quam mirum in modum gloriatur se clariorem fecisse, ego & longe breuius & dilucidius (nisi meorum me amor fallat) iam pridem demonstravi, ut mox, Deo adiuuante, ex libello meo de dimensionibus magnitudinum apparebit. Sed licuerit Peletario sua Apologia, ne incomitata prodiret, nono more comites ac pedisequas adungere: mihi cur non liceat, quod omnibus semper licuit, aliorum sententias totas meis scriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atq; in primis Petrum Nonium laudatorem suum, q; idem fecit in refellendo paralogismo Orontij, aut sine causa id se mihi vitio dedisse fateatur. Quod si postquam tam fideliter eius verba proposui, Peletarius criminatur, me eius sententiam perperam esse interpretatum, quid facturum fuisset, si alieni verbum eius opinionem in medium adduxissem? Equidem facile sibi persuadebit quis, nullum eum verbum relicturum fuisse, quod non reprehendisset.

Quod autem ut leuiores hæc oneraret, illud putat palmare, quod me laborare ostendit, ut probem angulos contactus alios alijs esse inæquales: propterea q; scripsi, æqualitatem angulorum eiusdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita ut lineæ vnius conueniant omnino lineæ alterius, si alter alteri superponatur, iuxta octauum pronuntiatum. Quam in re dupliciter me peccare ait. Primum quod dicā, ad æqualitatem angulorum eiusdem generis requiri eandem linearum inclinationem; cum tamen angulus rectilineus ostensus sit à me æqualis curuilineo, atq; aded eiusdem generis cum illo, licet non sit in utroq; eadem linearum inclinatio. Deinde quod putē angulos contactus idē inter se inæquales esse, quod sibi mutuo nō congruant. Equidem si quid in eo à me peccatum esse intelligerem, & peccatum (quod est ingenuo, & liberaliter educato homine dignum) agnoscerem, & Peletario correctori, & emendatori meo (quocunq; id animo fecerit) gratias agerem. Nunc verò, cum, tota re etiam atq; etiam considerata, nihil omnino vitij inesse videam, ita, quæ obijciuntur, diluam, ut tamen gratiam habeam Peletario, qui occasione dedit eius loci diligentius explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiusdem generis illos, qui vnam lineam habent rectam, & alteram circulearem, quales sunt anguli contactus, & semicircularum, de quibus tunc agebamus. Quare cum lineæ recta vnius congruat lineæ rectæ alterius, circulari verò circulari nō item, nisi circuli ponantur æquales, efficitur, angulos illos esse inæquales inter se, quippe cū alter alterū excedat. Eadem ratione, si dentur duo anguli curuilinei æqualium circularum æquales, necesse est, lineas vnius lineæ alterius congruere, si alter alteri superponatur. Quod si Peletarius hanc doctrinam oppugnat, sciat, se iam bellum mouere non mihi, sed Proclo, qui libro 3. in primum Euclidis ad propof. 4. idem præfatus docet, quod ego. Ait enim, (Angulorum autē æqualitatem sumemus iuxta conuenientiam laterum in rectilineis: in cæterisq; omnibus, qui eiusdē sunt speciei, ut in Lunaribus, in Syftroidibus, atq; in utrinq; conuexis, &c.) Et infra, (Quæ æqualia data sunt, sibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum est, sed in iis, quæ specie similia sunt. Specie autem similia hæc dico, ut recta lineæ rectæ lineæ, & circumferentiæ circumferentiæ circuli eiusdem, & anguli, qui à similibus similiter iacentibus lineis comprehensi sunt. Horum autem dico, quod quæ æqualia data fuerint, sibi inuicem congruunt.) Nēne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos solum angulos contactus concedere æquales, quorum recta lineæ, & curuæ sibi mutuo congruunt: Temere igitur Peletarius mihi obijcit angulum rectilineum, & curuilineum, triangulum & quadratum, atque alia huiusmodi, de quibus eo loco sermo non erat: quippe quæ non sunt eiusdem speciei, atq; aded æqualitatem tueantur, etiamsi alterum alteri non congruat. Ut iam vereri incipiam, ne Peletarius nosse contentionis sit cupidior, quàm veritatis.

Postremo, ut nihil intactum relinquat, me non modo Geometria ignarū vocat, sed etiam Logices: propterea quod lib. 5. dixi, non recte à quibusdam diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, atq; inæqualitatis: quod multa proportionēs inæqualitatis sint etiam irrationales. Ego verò (et si non sum, qui mihi quicquam vllō in genere arrogem) tamen in hisce studiis, in quibus mediocriter versatus sum, plane rudem non esse, præ me semper tuli. Quantulum autem sit id, quod in utroque possim, ceteri melius, qui vacant amore, & odio, indicabunt. Peletario quidem ipsi ita me adhuc respondisse arbitror, ut iam minus forte ignarus Geometria, ac Dialectica videar, quàm putarat. Nunc, ut perspiciat, neq; me pertinacem esse, neque illa, quæ exagitat, à Dialecticorum præceptis abhorre, libenter ei concedo, diuisionem illam, quam à me reprehensam criminatur, probam esse, ita tamen, si in quolibet diuisionis membro Diuisum intelligatur: neque verò hoc vnquam negaui, cum alibi similes diuisiones vsurpem. Solum id eo loci contendī, rectius meo iudicio, diuidi Proportionem in vniuersum duplici diuisione, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; posteriori verò in proportionē æqualitatis, atq; inæqualitatis, (quod verissimum esse, neminem negaturum censeo, qui rem diligentius expendit) cum tam priora duo membra diuidentia, quàm posteriora totum Diuisum (ut Logici loquuntur) exhaustiant: quàm si prius membrum prioris diuisionis hoc est, proportio rationalis, secetur in proportionē æqualitatis & inæqualitatis, cum hac membra diuidentia latius pateat, q; Diuisum, nisi in illis Diuisum intelligatur. Atq; eo magis duplex illa diuisio mihi probatur, q; non desint, qui primam partiantur Proportionē in proportionē æqualitatis, & inæqualitatis posteriorem deinde hanc in proportionē rationalem & irrationalem: contrario scilicet modo, quàm priores. Ut igitur hanc controuersiam dirimerem, ac dubitationem, utri rectius faciant, prioresne, an posteriores, tollerem,

starni duabus divisionibus secundam esse Proportionem, quarum utraq, absolutissima est, ac perfectissima. Non aliter arbitror, omnes magis esse probaturos, si corpus duplici divisione secetur, primum quidem in viuentem, & non viuentem; deinde vero in album, nigrum, ac mixto colore affectum: quod si corpus viuentis diuidatur in album, nigrum, ac mixto colore affectum; ob causam iam dictam: licet hac subdivisio bona sit, si Diuisum semper intelligatur. Huiusmodi divisiones sexcentas adducere possem: sed satis est, me prudenti lectori institutum meum in diuisione Proportionis exposuisse, & cur duplicem illam diuisionem subdivisioni aliorum praeulerim. Quod si tam acres, & seueri iudices singulorum verborum aut improprietatum, quae per incogitantiam interdum excidunt, esse velimus, nam scriptorum nullus aliquo vitio carebit, neque ipse quidem Peletarius, ut partim ex his, quae dicta sunt, constat, partim etiam ex alijs eius demonstrationibus apparere potest: quas si liberet ad certam illam Dialecticorum normam exquirere, profecto reprehendendi materia non deesset. Verum non est hoc nostri consilij, refellendi studio vitia aliena scrutari, sed ubi sese occasio obrulerit, meam (qualiscunque est) de aliorum sententijs sententiam exponere. Solum ab eo peto, (quoniam se tam acutum Dialecticum iactat, ut alios contemnere videatur; quanquam ex superiore syllogismo, quem in me conuertit, liquido constat, quod sit Dialectica peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauserit; Omnes anguli contactus sunt minores quolibet angulo acuto rectilineo: ergo omnes inter se sunt aequales. Itemque, hanc: Anguli semicirculorum, quod a maioribus circulis sunt, eo sunt maiores: igitur tandem ad aliquem perueniemus, qui recto rectilineo maior sit; in qua quidem ad Cardanum scribit, nullum esse paralogismum. Ego sane vehementer miror, quae ratione in tam apertas hallucinationes, & virum Geometra omnino indignas, incidere potuerit. Sed argumentationes eiusmodi satis superque, in scholio huius propos. 16. a me sunt confutatae, adductis contra ipsas euidentissimis instantijs. Deinde quod me perstringit, quasi parum intellexerim, quae sit proportio rationalis, & quae irrationalis, non multum laboro. Constat enim, eum studio mihi detrahendi id dixisse: cum has proportionales ubique ex sententia grauissimorum scriptorum definierim: neque, vero ipse, vllum peccatum a me ea in re esse commissum, poterit ostendere. Certe commentarius meus in librum 10. Euclidis abunde declarat, num illas intellexerim, necne. Denique, quod criminatur, me in definitionibus lib. 5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum est. Perspicuis enim verbis docui in defin. 4. lib. 5. me in commentario comparationem duarum quantitatum Proportionem cum pluribus Geometria appellaturum, habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem; licet in textu cum interprete illam dicam Rationem, hanc vero, Proportionem. Neque enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meo verbu potest esse ambiguitas.

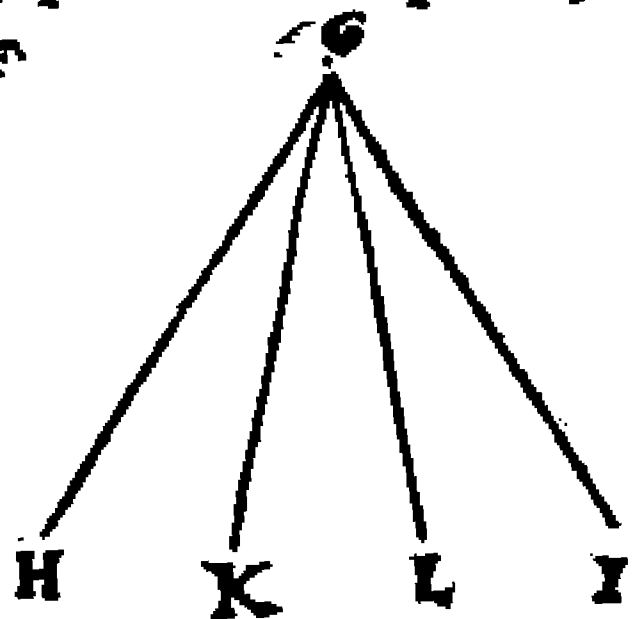
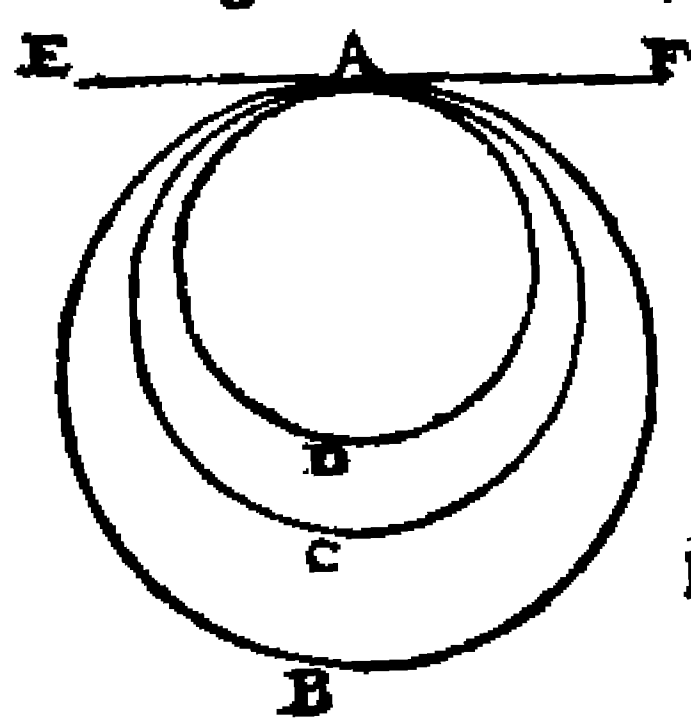
Ex his, quae diximus, satis (ut opinor) apparet, doctissimos illos viros, de quibus initio memini, non sine causa Apologiam Peletarii inane, ac responsionis indignam iudicasse. Ego tamen, ne contemnere hominem viderer, quem semper laudandum esse duxi, occasione inuitatus respondendum amice putavi. Existimet ille, angulum contactus quantitatem non esse, atque, adeo angulum semicirculi recto rectilineo esse aequalem, ego certe contrariam sententiam tuebor, donec aliud mihi demonstratum ab aliquo fuerit: rationes enim Peletarii fallaces sunt, nihilque continent in se probabilitatis, ut in scholio huius propos. 16. ostendi, ubi omnes dissolui: neque meum in se solutionibus vel vnum verbum (exceptis his, quae supra ex lib. 10. adduxi) respondit; quod tamen maxime ad Apologiam pertinebat: Ut non sine causa permulti existimauerint, eum non veritatis studio eam Apologiam scripsisse, sed ne veritati cessasse videretur. Nec vero quisquam putet, me vnum existimare, angulum contactus vere esse angulum, & angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim eius rei auctores, eosque grauissimos laudare possum, Theonem, Campanum, Petrum Nonnum, & (ut Nonnus testis sit) Archimedem, atque, Iordanum: quin etiam (quod plurimi facio) Euclidem ipsum, eiusque, commentatorem celeberrimum Proclum; ut eacum ex Gallis praestantissimos, atque eruditissimos viros non paucos, a quorum numero in primis est Franciscus Candalla ex illustrissima Effissatum: s. m. lia erinndus, qui insigni volumine in elementa Geometrica Euclidis edidit, ubi ad propos. hanc 16. apertissime docet, angulos contingentia vere esse angulos, ex definitione anguli plani, aliosque, alijs esse maiores, aequales, ac minores: Eos autem, qui aliter sentiunt, (Peletarium proculdubio intelligit. Praeter eum enim ad hunc diem nemo hac de re scripsit) absurde multa ex falsis suppositis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium Professor regius, qui, cum Apologiam Peletarii in me conscriptam vidisset, opusculum eruditum aduersus Peletarium de angulo contactus edidit. Ut autem studiosus Lector videat, quid in hoc negotio sentiat Proclus, afferam in medium pauca quaedam ex eius commentarijs in lib. 1. Euclidis, quae obiter notant. & ex quibus liquido constabit, eius sententiam esse Peletarii commento prorsus contrariam. Primum itaque ita scribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (Duae namque circumferentiae se inuicem secando, vel sese contingendo, angulos efficiunt. Quinetiam a recta linea, & conuexa circumferentia angulus continetur, ut Cornicularis.) Intelligit autem nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtum. Pauld enim ante dixerat, angulum Cornicularem esse omni rectilineo minorem: quod solum anguli contactus proprium est. Deinde in eodem libro ad definitionem anguli recti, obtusi, & acuti ita habet. (Cornicularis namque angulus omni recto est minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus est: Semicircularis itidem quocunque recto est minor, acutus tamen non est.) Quid clarius, quam Proclus hic asserere angulum semicirculi minorem esse recto? Rursus lib. 3.

ad propof. 4. lib. 2. Euclidis ita fcribit. (Addifcemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto femper inæqualis eft, & nunquam æqualis; Et femicircularis fimiliter, tranfitusque à maiori ad minus non omnino per æquale fit.) En quàm aperte docet angulum femicirculi aqualem effe non poffe angulo rectilineo, tranfitumque, propterea fieri à maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumque Peletarius negat, audetque, pofterius appellare paralogifmum. Denique eodem lib. 3. ad propof. 23. hæc verba habentur. (Cum autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis effe poffit, &c.) Et Peletarius tamen non dubitat angulum femicirculi, qui mixtus eft, angulo recto rectilineo facere aqualem, contra Procli fententiam. Ex his liquere arbitror, vt de cæteris taceam, idem fentire Proclum de angulo contactus, & femicirculi, quod ego contra Peletarium fcripfi; quæ autem neget, maiorem effe auctoritatem, meliora argumenta Procli, quàm Peletarii?

Quæritur quoque hoc loco monendum lectorem cenfeo, id, quod de angulo contactus, qui fit in circulo, ex fententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam effe de angulo contactus, qui in conicis fectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipfi. Vt enim Apollonius Pergæus demonftrat lib. 1. propof. 32. in locum, qui inter coni fectionem, & rectam lineam tangentem interijcitur, altera recta linea non cadit; atque adeò angulus ille contactus minor etiam eft omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (fi nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis) omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non eft, (eadem enim hic eft ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter fe æquales, hoc eft, vt ipfe vult, non inæquales, & reliquorum angulorum finguli recto rectilineo æquales. Vbi fanè maior abfurditas apparet, quòd ad fenfum, in ea Ellipfi, quæ perexiguam habeat latitudinem, & in ea Hyperbola, quæ ferè linea recta effe videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipfis, & Hyperbola conftituti; vt incredibile omnino fit, nifi firma ratione demonftraretur, angulos illos contactus ad vertices fectionum conftitutos inter fe, & reliquos ex rectis inter fe quoque effe æquales; propterea quòd in ea Ellipfi linea tangens magis recedere perfpiciatur à circumferentia Ellipfis, quàm in circulo; in illa verò Hyperbola minus. Sed hæc alio tempore examinanda relinquamus: nunc ad interruptam expofitionem Euclidis reuertamur.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas poteft continuè, & infinitè augeri, altera verò infinitè minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque fit, minus femper erit decremento huius.

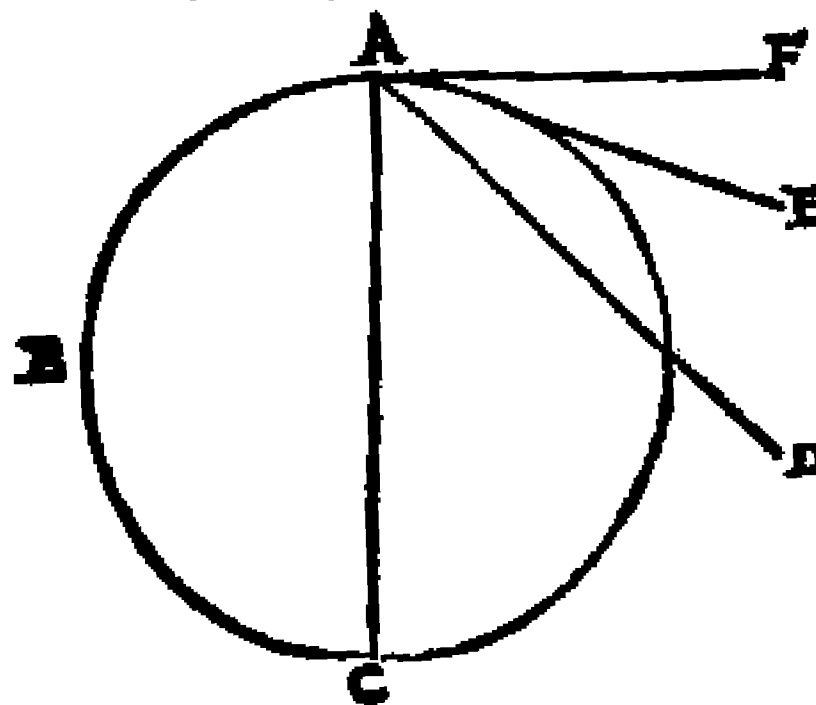


PROBANTVR enim angulus contactus BAE, & acutus HGI. Si igitur describantur alij circuli minores AC, AD, tangentes rectæ EF, in A, augebitur continuè angulus contactus, vt dictum eft. Si rursus inter rectas GH, GI, alia recta cadant GK, GL, diminuetur continuè angulus acutus: Et tamen femper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor eft angulo acuto, quantumvis diminuat.

EX CAMPANO.

CÆTERVM ex hac propofitione 16. perfpicuum eft, vitiofam effe argumentationem hanc, quæ vfus eft Brifon in quadrando circulo, vt auctor eft Ariftoteles. Videlicet.

TRANSITVR à minori ad maius, vel contrà, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.



DESCRIBATVR enim circulus ABC, cuius diameter AC, moveri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in A. Hoc concesso, manifeflum eft, quando recta AC, fecat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo femicirculi; quamprimum verò fecare ceffat, effici angulum rectum maiorem eodem angulo femicirculi. Cum igitur factus fit tranfitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo femicirculi; (Rectus enim, vel obtufus, maior eft, & acutus, minor;) conftat quoque, vitiofam effe pofteriorem confequentiam.

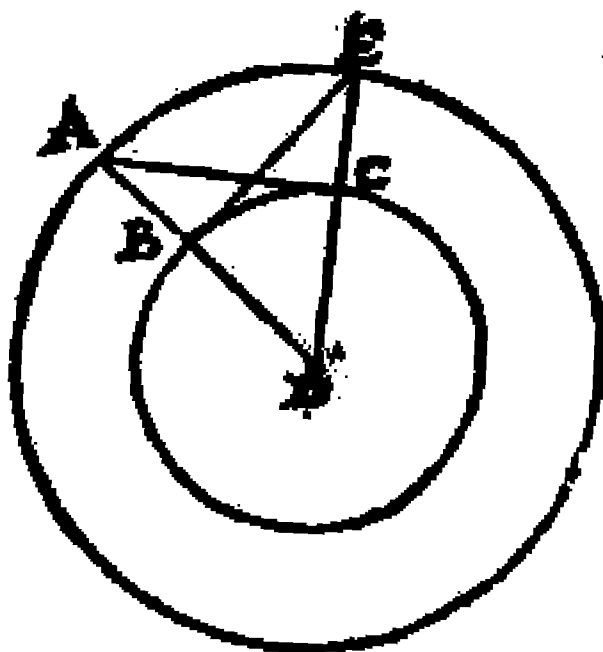
PROBL. 2. PROPOS. 17.

16.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Ex puncto A, ducenda fit linea, quæ tangat circulum BC, cuius centrum D. Ducatur recta

a 4. prim.



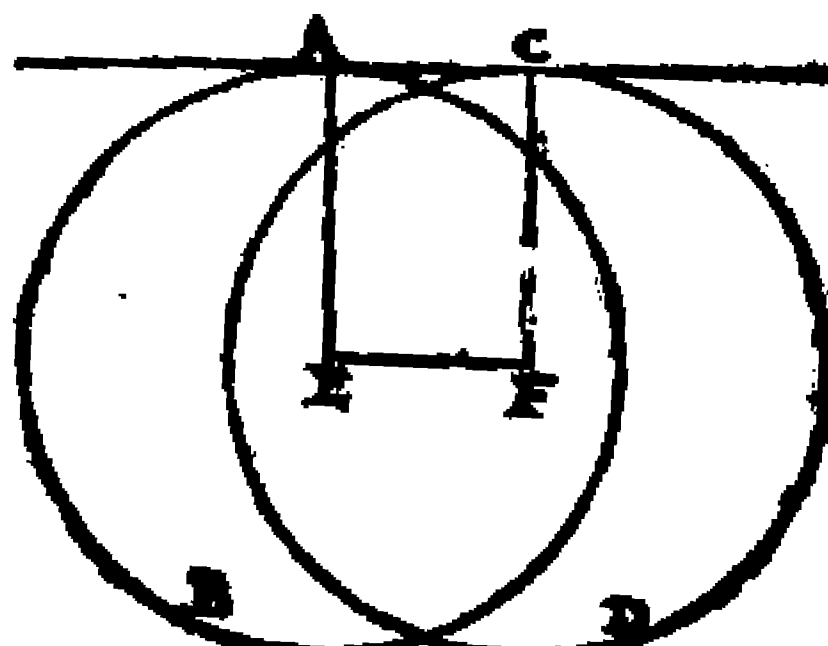
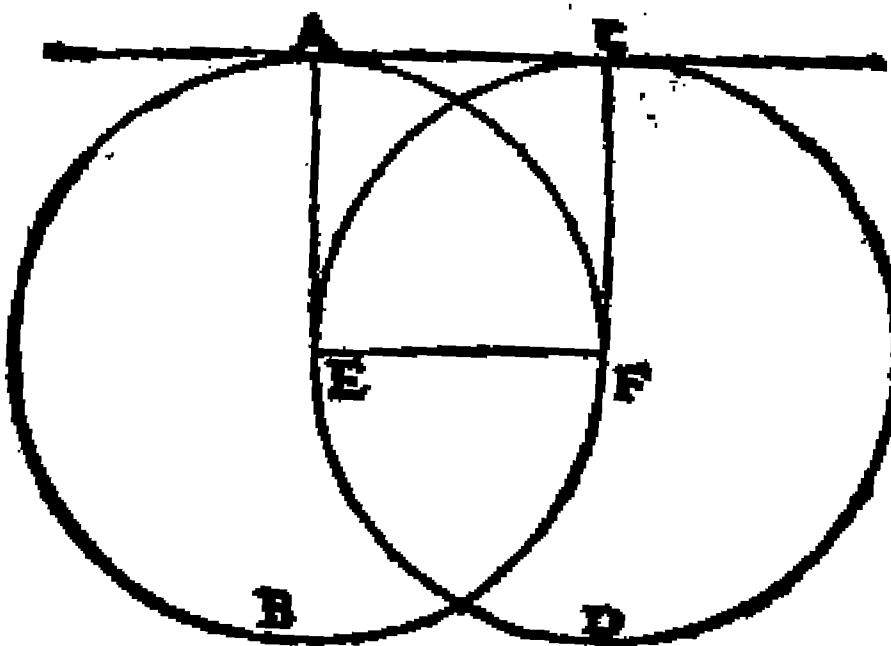
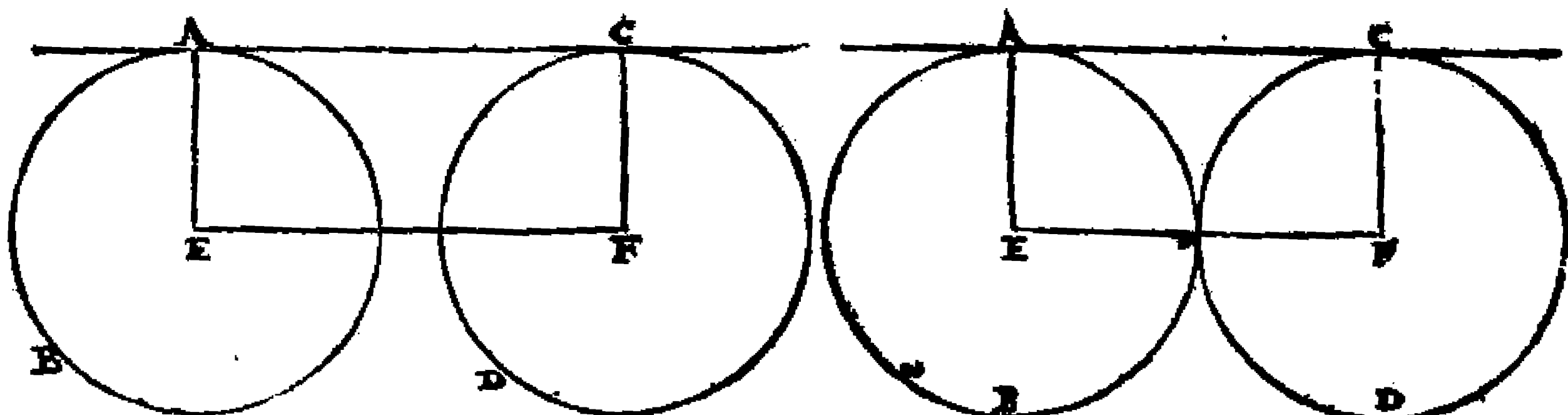
AD, secans circulum B C, in B. Deinde centro D, intervallo autem DA, describatur circulus AE, & ex B, educatur BE, perpendicularis ad AD, secans circulum AE, in E. Ducta denique recta ED, secante circulum B C, in C, connectatur recta AC: quam dico tangere circulum B C, in C. Cùm enim duo latera DE, DB, trianguli BDE, æqualia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, utrumque utrique, ut constat ex circuli definitione: angulusque D, contentus dictis lateribus, sit communis: Erunt & bases BE, CA, & anguli DBE, DCA, super ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, cùm sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri CD, tanget circulum, et corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangens circulum B C, in C, quod faciendum erat.

S C H O L I U M.

P R A X I S huius problematis ex ipsa demonstratione facile elicitur. Faciliorem tamen praxim, ad propositionem 31. huius libri inuenies.

S I D & sequens problema cum Cardano absoluemus.

PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ utrumque tangat circulum.



S I N T primū duo propositi circuli æquales, AB, CD, quorum centra E, & F, recta iungantur EF, ad quam ducantur perpendiculares EA, FC, secantes circumferentias in punctis A, & C. Dico rectā per A, & C, ductā utrumque

circulū tangere. Cùm enim EA, FC, semidiametri circulorum æqualium sint æquales, & parallela, quod anguli E, & F, recti sint; Erunt quoque EF, recti. Quare, per A C, æquales & parallelae, Ideoque, & anguli A, & C, coroll. propof. 16. huius libri recta AC, utrumque circulum tanget, cùm rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum.

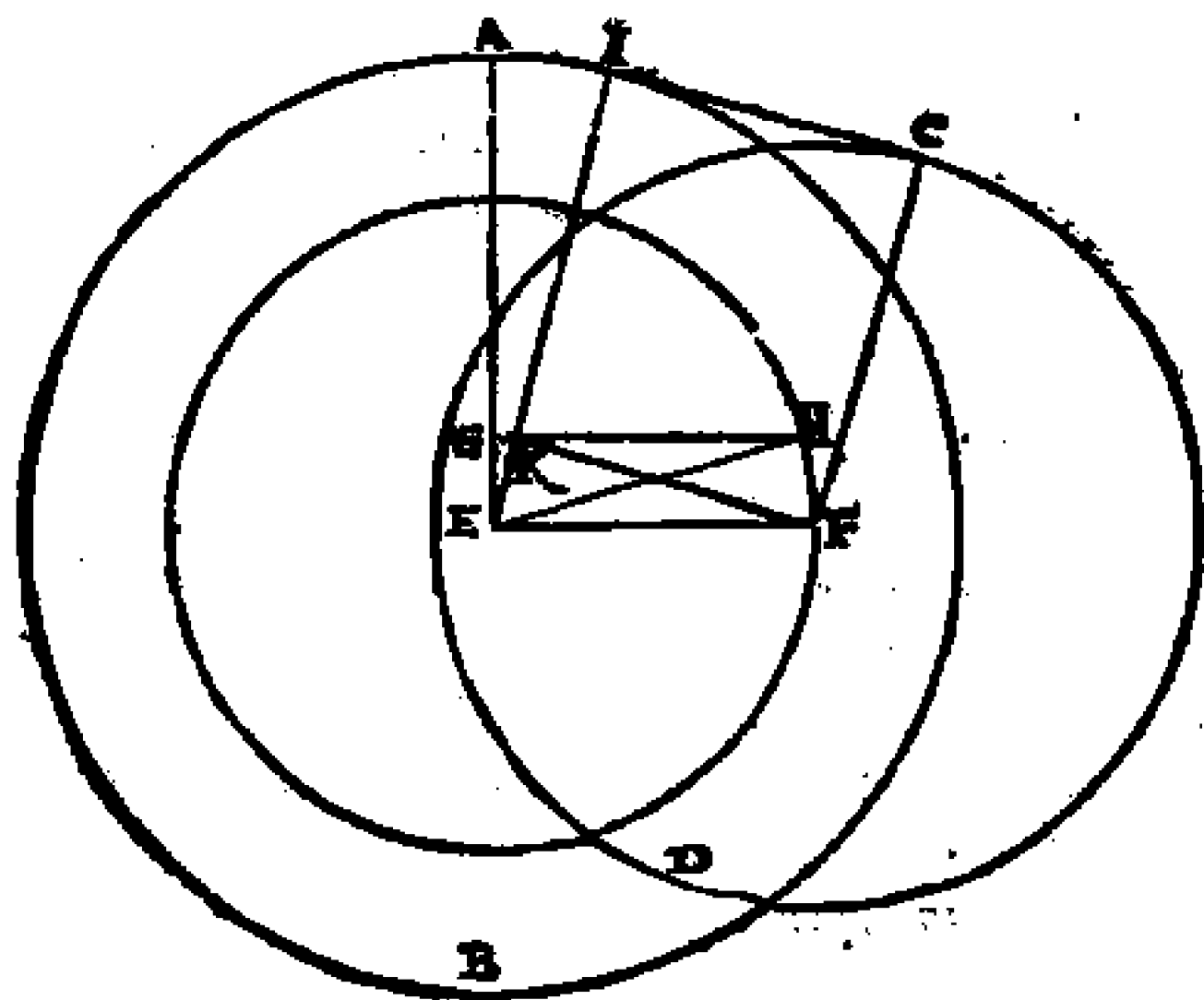
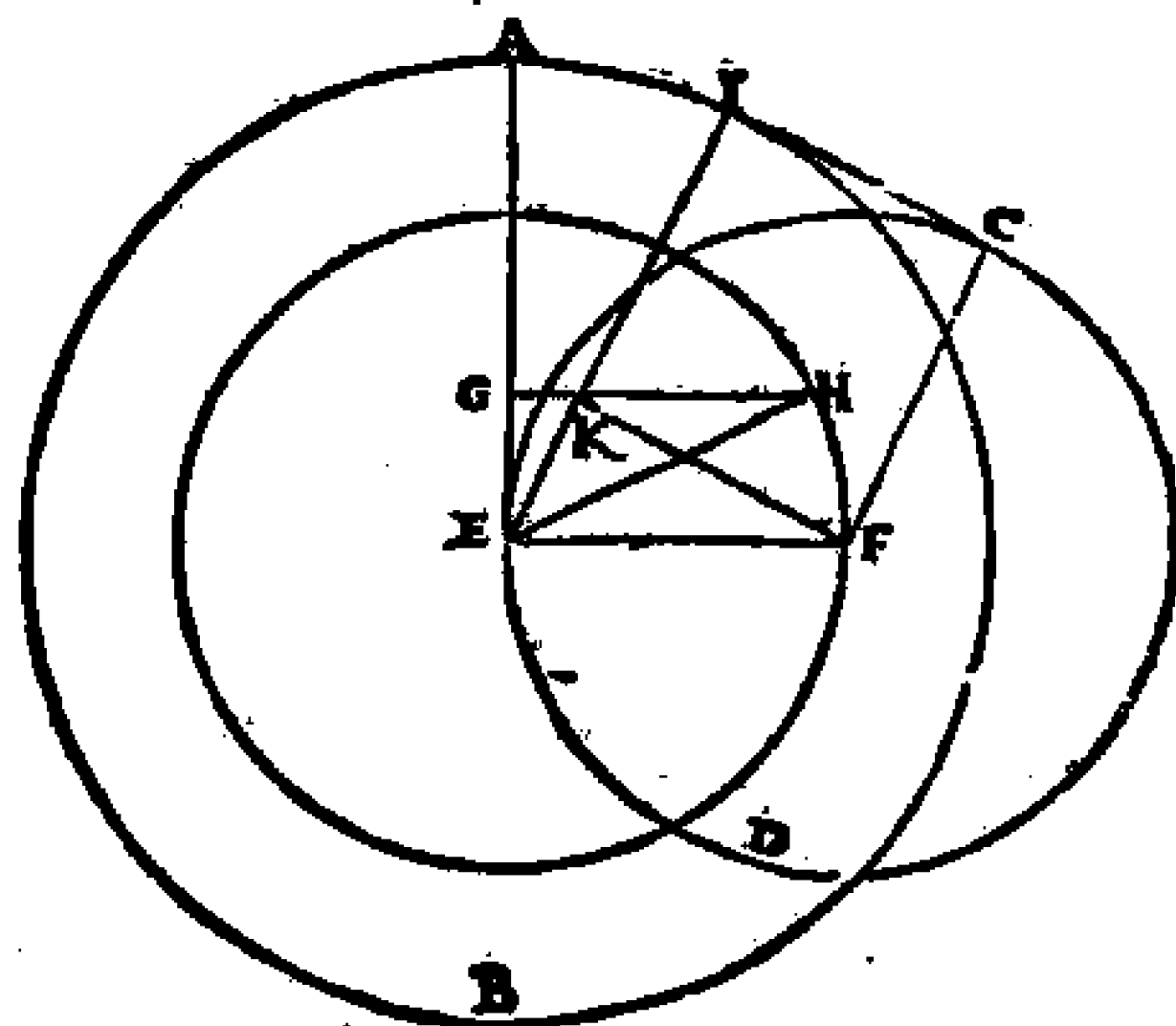
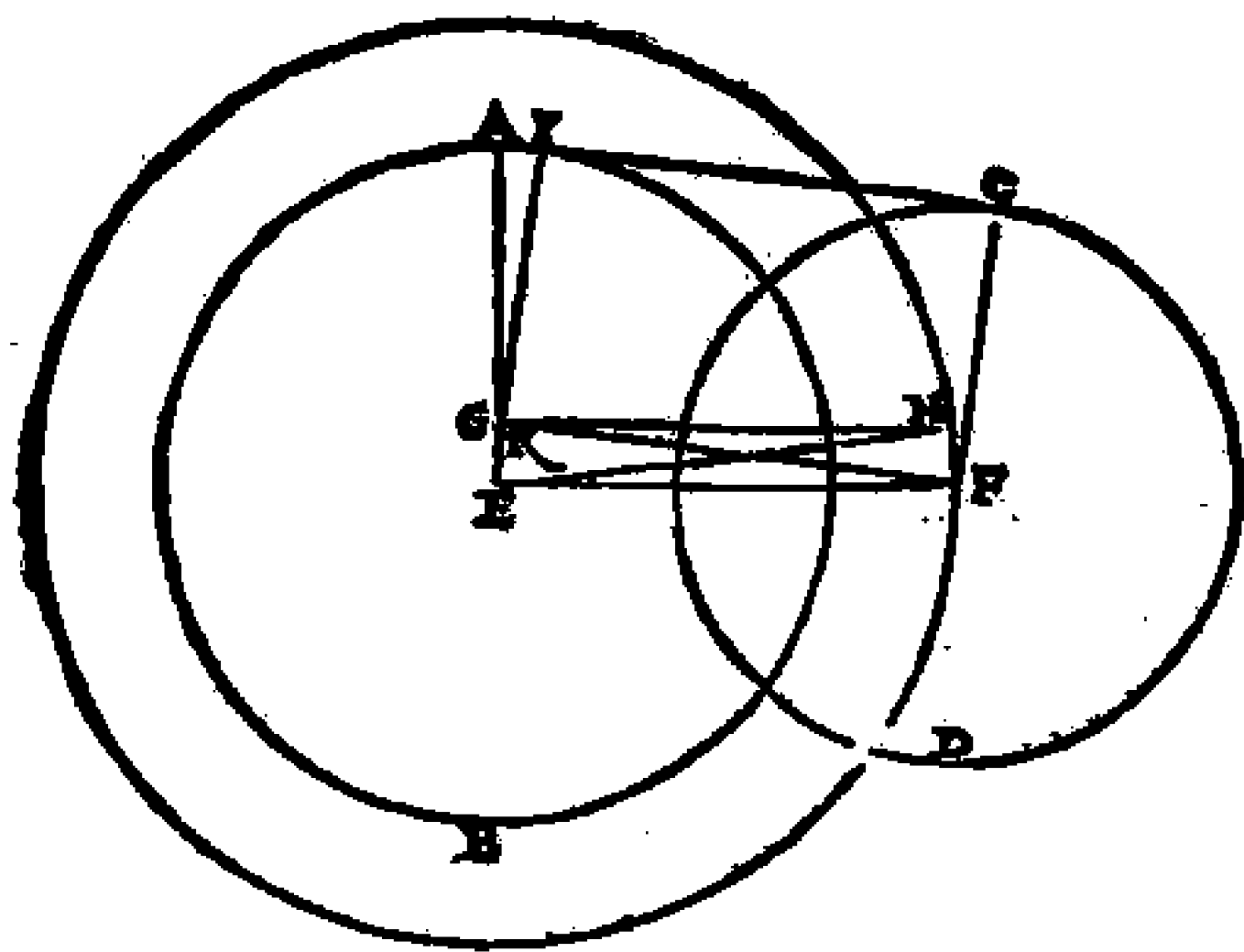
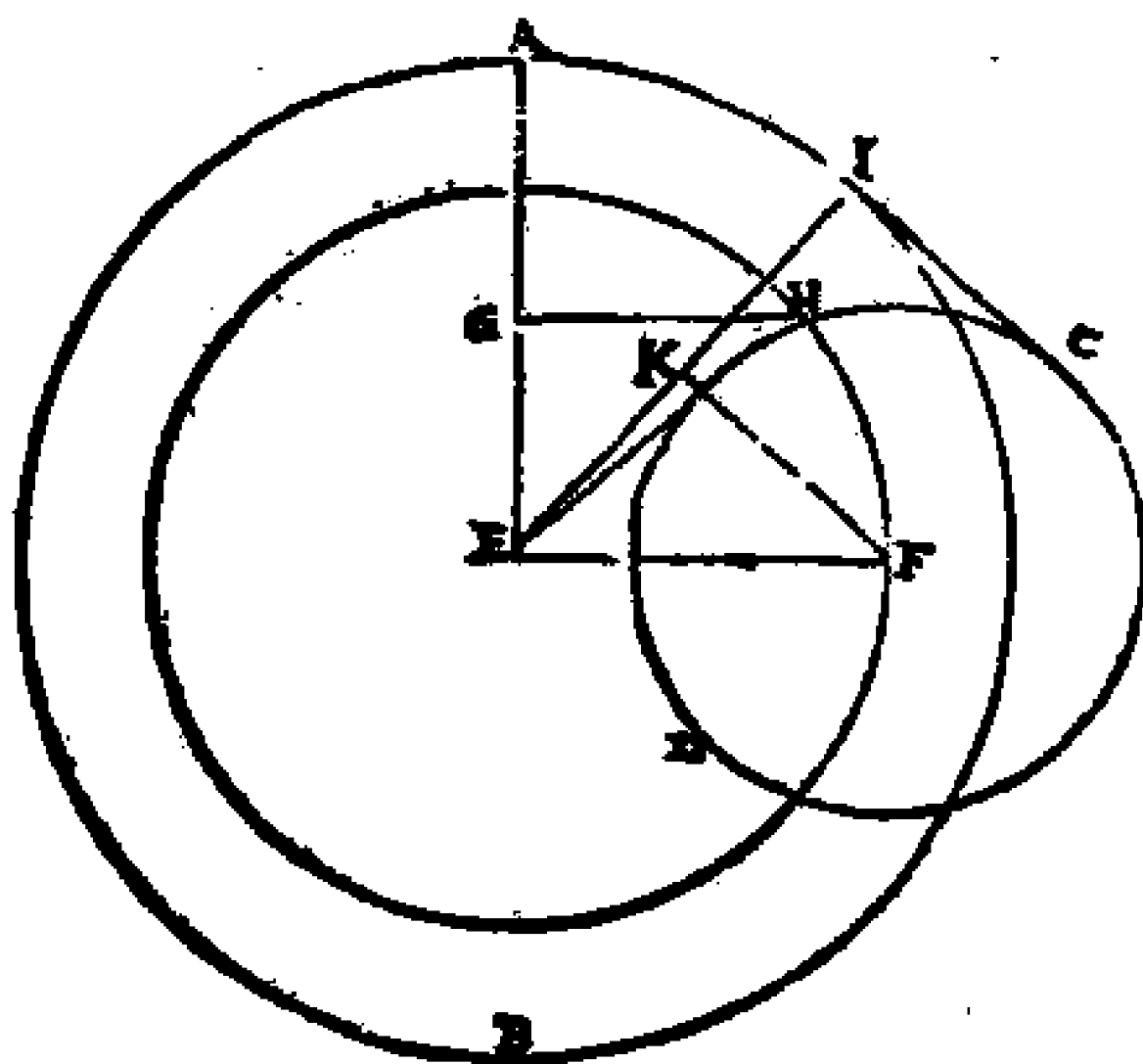
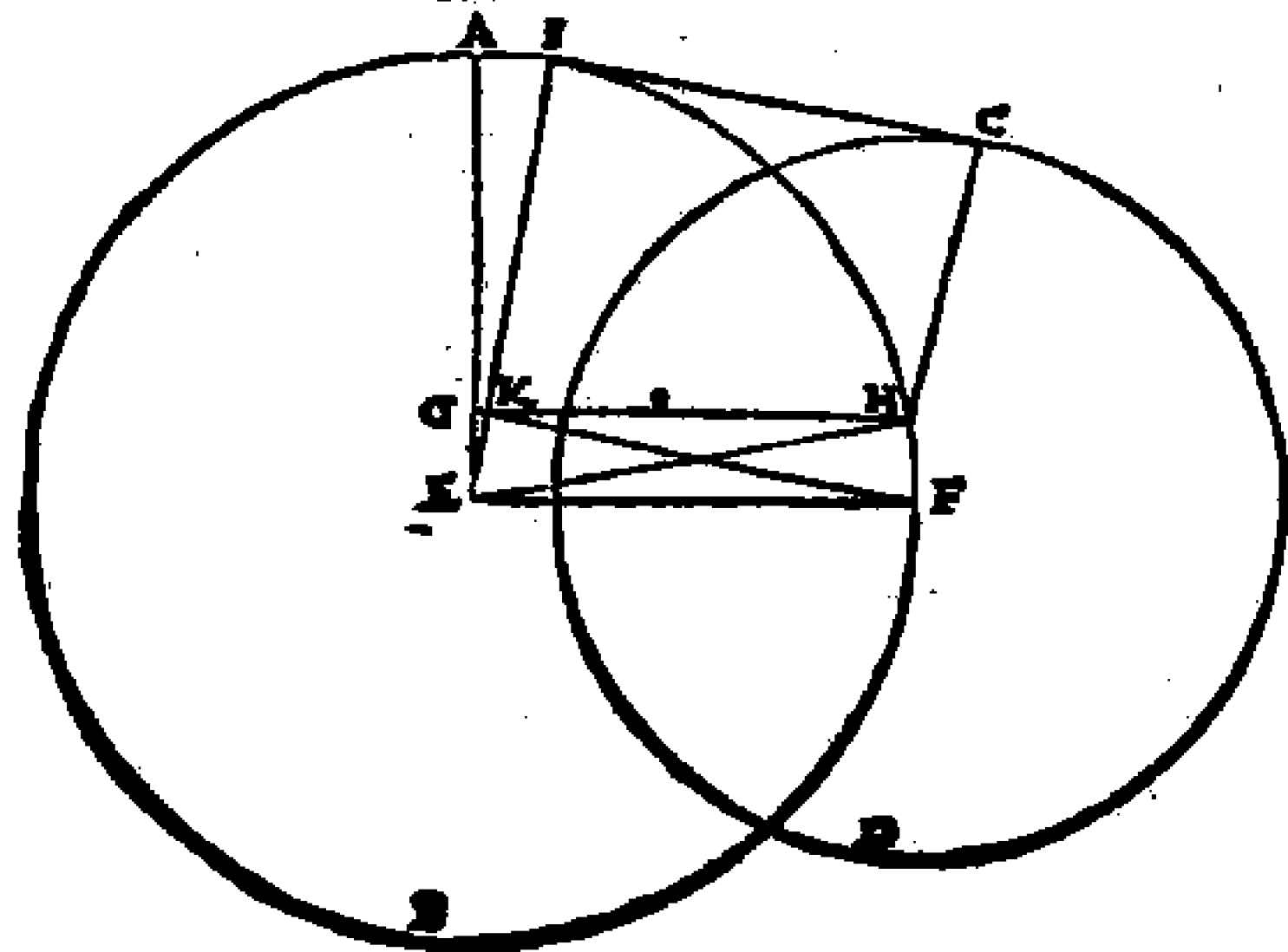
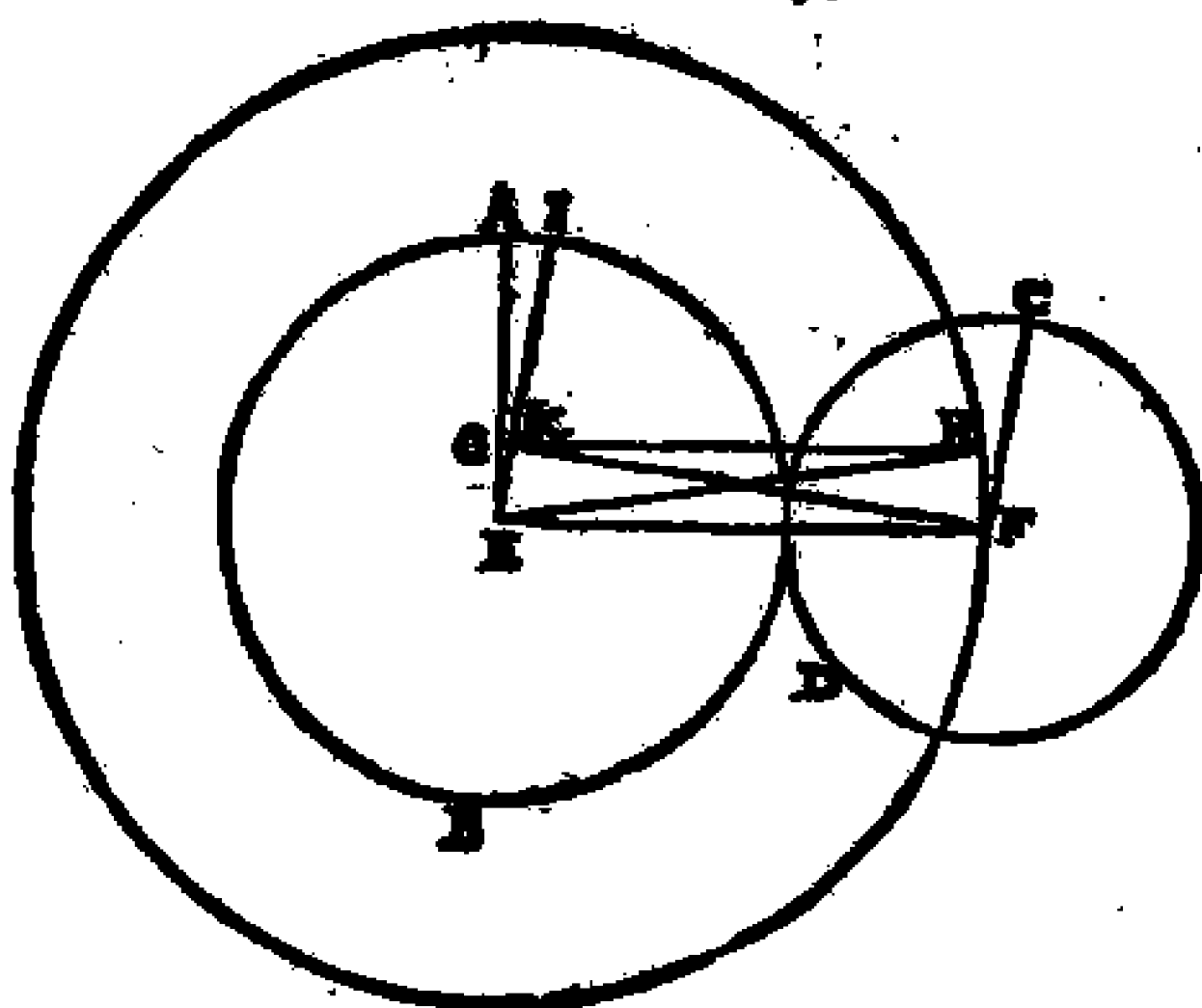
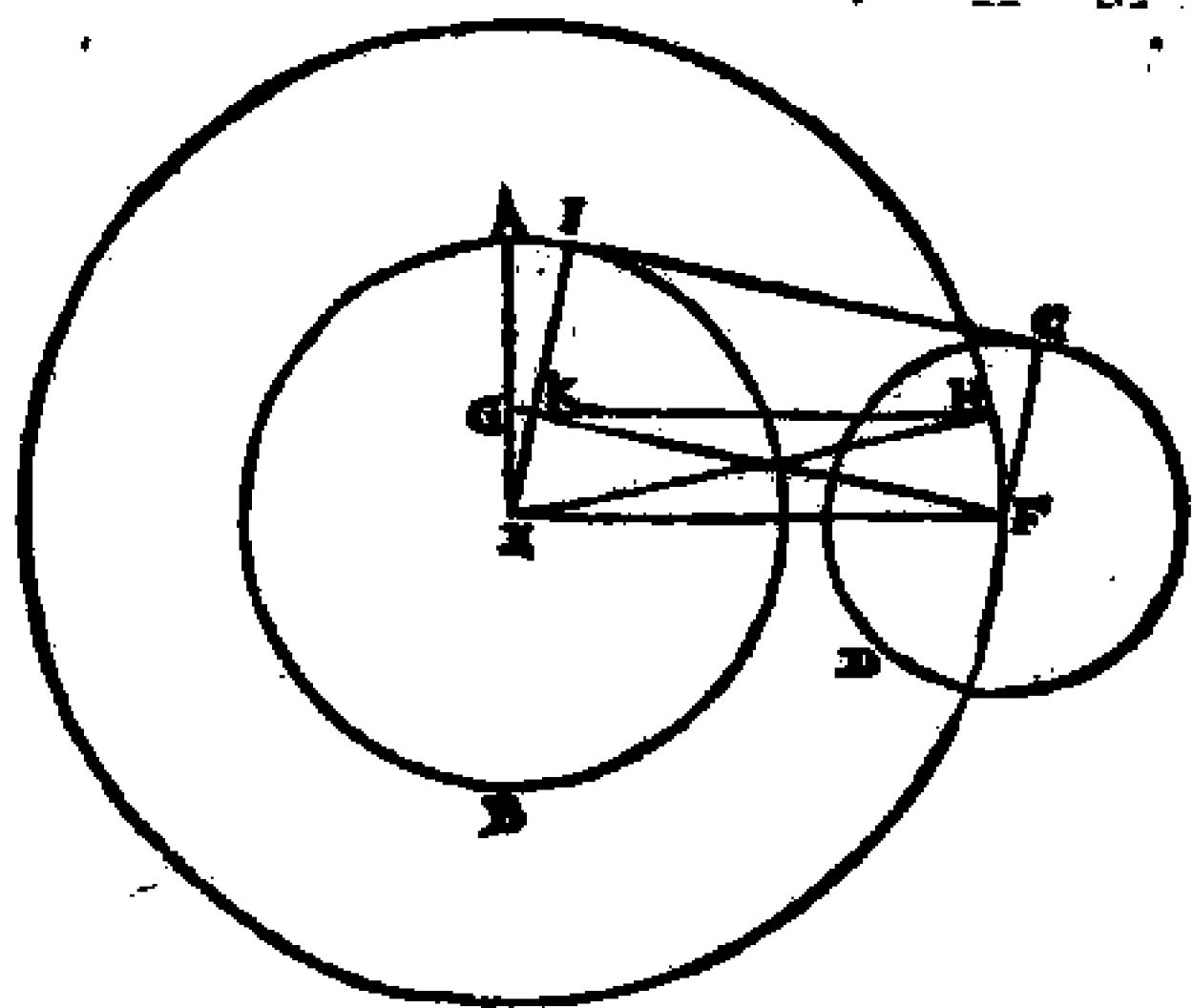
S I N T deinde duo circuli propositi inæquales AB, CD, quorum rursus centra E, & F, iungantur re-

cta EF, ad cuius intervallum ex E, centro maioris circuli circulus describatur FH, si maior non transeat per centrum minoris. Deinde ducta ad EF, perpendiculari EA, abscindatur ex ea portio AG, semidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G, ipsi EA, perpendicularis ducatur GH, vsque ad circumferentiam circuli FH, proxime descripti. Ducta autem recta HE, fiat angulo HEA, angulus FEI, æqualis; atque per F, agatur ipsi EI, parallela recta FC. Dico rectam per puncta I, & C, ductam utrumque circulum AB, CD, contingere. Abscindatur enim ex I E, recta IK, ipsi AG, vel semidiametro FC, minoris circuli, æqualis, ut sint reliqua EG, EK, æquales quoque, ducaturque recta KF. Quoniam igitur latera HE, EG, trianguli HEG, æqualia sunt lateribus FE, EK, trianguli FEK, & anguli ipsis contenti æquales, ex constructione: Erunt anguli HGE, FKE, æquales; At proinde, cùm HGE, rectus sit, ex constructione, erit & FKE, rectus

Rursus

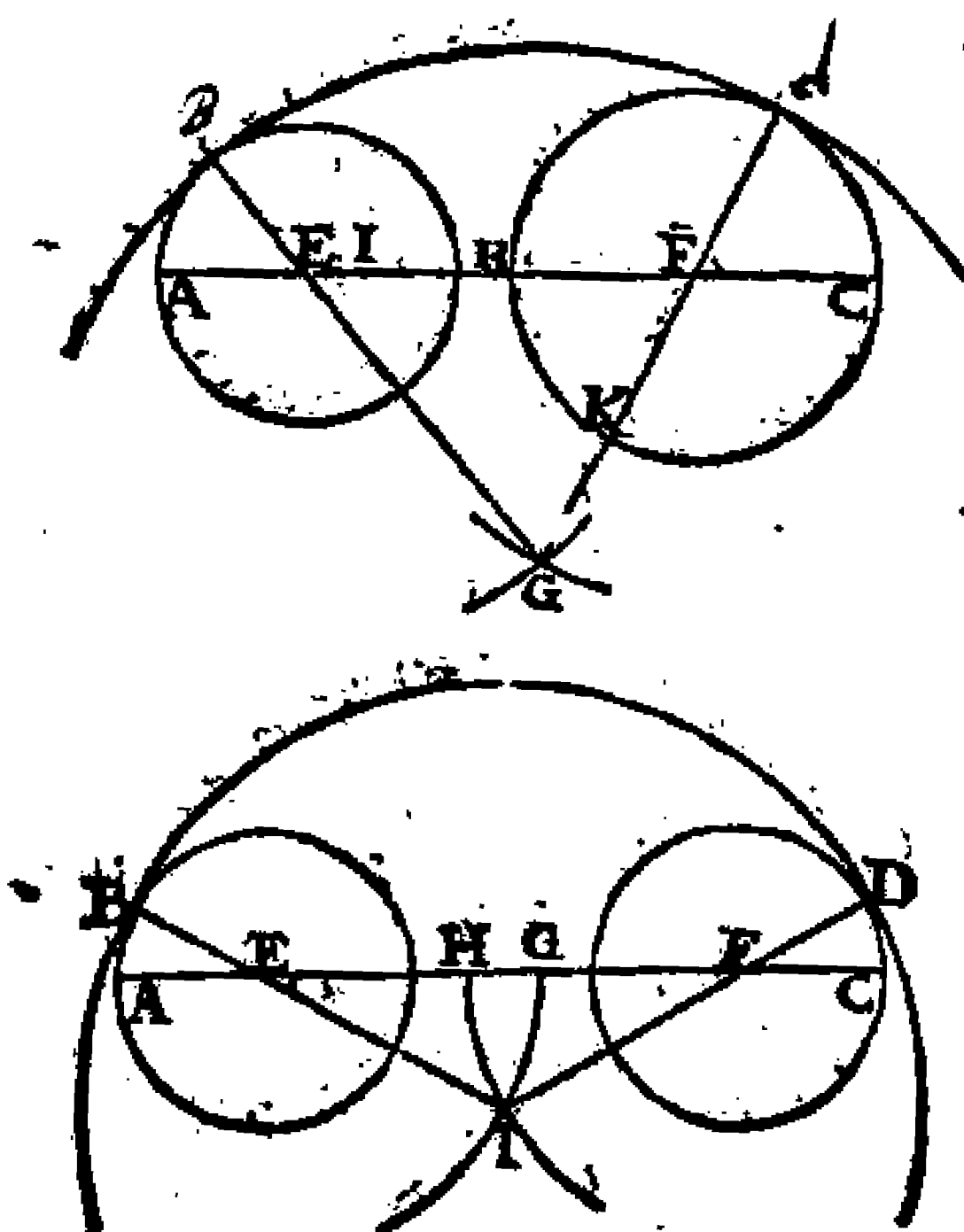
a 28. prim.
b 33. prim.
c 29. prim.

d 4. prim.



Rursum quia CP, IK aequales sunt, & parallela, ex constructione, ^a erunt quoque IC, KF 233. primi. aequales & parallela; Atque propterea angulus EIC , ^b cū aequalis sit externo FKE , rectus erit; ^c Ideoq; & ICF , rectus existet. Quocirca, per corollarium propositionis 16. huius libri, recta IC , utrumque circum continges, cū rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorum. Quod erat propositum.

Satis autem constat, si circuli propositi aequales fuerint, id quinque modis posse fieri. Aut enim alius extra alium cadit, aut se mutuo contingunt, aut se inuicē p centra secant, aut nō, ita tamē, ut vel cētra consistat in communi corū segmento, vel certē extra illud.



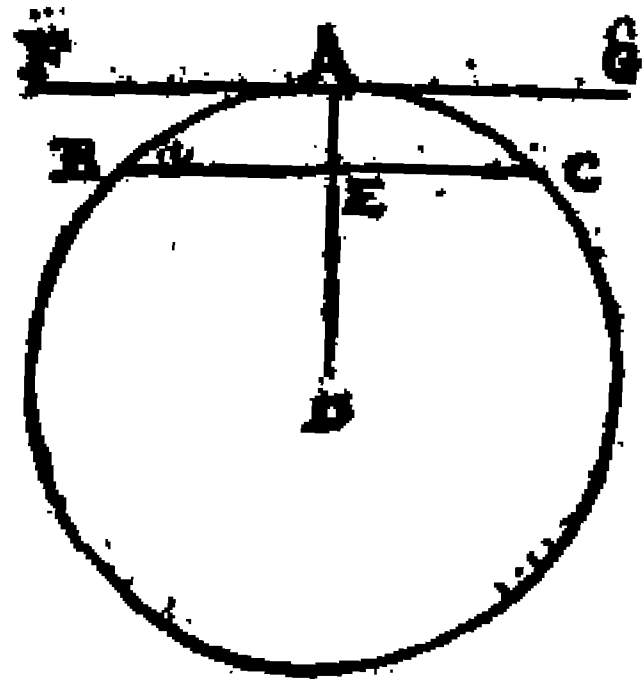
Sunt inaequales, describat̃ ex E, centro minoris ad interval-
lum diametri maioris CH, arcus, quem in G, secet alter arcus
ex F, centro maioris descriptus ad intervalum recta FI, com-
posit̃ ex semidiametro maioris FH, & HI, semidiametro mi-
noris equali. Ponamus enim nunc hos arcus se interfecere;
quando autem se non secant, dicemus mox, quid agendum sit.
Ex G, autem per centra E, F, recta ducantur secantes circun-
ferentias in B, D. Et quia FG, ipsi FI, equalis est: ablati a-
qualibus FK, FH; reliqua aequales erunt KG, HI. Est autem
HI sumpta equalis semidiametro minoris EB. Igitur & KG,
ipsi EB, equalis erit. Cum ergo & EG, diametro maioris
KD, sit equalis, erunt totae rectae GB, GD, aequales. Quare cir-
culus ex G, per B, descriptus transibit per D, cadetq; extra v-
trumque circum, ex coroll. propos. 13. huius lib. ac proinde v-
trumque tanget in B, D. Quod est propositum.

VERUM quia non semper duo illi arcus ex E, & F, descri-
pti se interfecant, quod accidit propter nimiam circumferentiarum
distantiam unius ab altero; absolvemus problemam hoc alio mo-
do, qui generalis est, siue circuli se tangant, siue non, etiamsi
non se secant, & siue aequales sint, siue inaequales. Ducta recta

AC, per circumferentiarum centra, sumantur rectae aequales AG, CH; ita ut qualibet semissem ipsius AC, superet:
& ex centro E, per G, arcus GI, describatur, quem secet in I, alius arcus HI, ex centro F, per H, descriptus: ac
deniq; ex I, per centra E, F, recta emittantur circumferentiis occurrentes in B, D. Et quoniam EG, EI, aequa-
les sunt: si addantur aequales AE, BE, fient totae AG, BI, aequales. Eadem ratione erunt CH, DI, aequales.
Cum ergo AG, CH, posita sint aequales, erunt quoque BI, DI, aequales. Circulus igitur ex I, per B, descriptus
transibit per D, totusq; extra verumque circum cadet, ex coroll. propos. 13. huius lib. ac propterea verumq;
tanget in B, D. Quod est propositum.

ITEM vero eadem arte describemus circum datum magnitudinis, q. duos circulos propositos tangat, datum
modo semidiameter circuli describendi maior sit, semisse recta AC, per centra circumferentiarum usq; ad circunse-
rentias ducta. Nam si semidiametro dati circuli rectas aequales abscindamus AG, CH, reliqua persisterunt,
ut proxime dictum est.

• PORRO manifestum etiam est, si ex puncto medio recta AC, per centra circumferentiarum usque ad circunse-
rentias ducta, describatur circum per A, & C, cum circum tangere verumque circum A B, & C D, in A,
& C, ex coroll. propos. 13. huius libri.



a 18. primi.

EXPLETARIO.

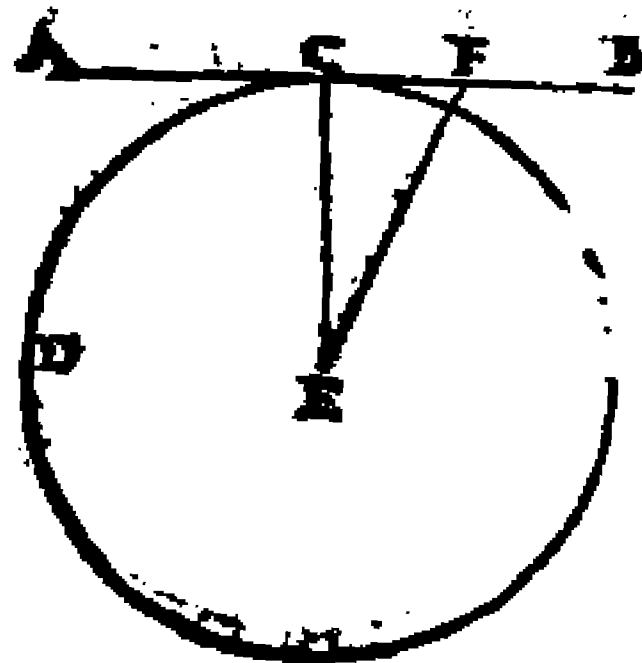
LINEAE rectae, quae circum secet, lineam parallelam du-
cere, quae eundem circum tangat.

CIRCULUM enim ABC, cuius centrum D, secet recta BC, cui du-
cenda est parallela tangens circum ABC. Ducatur ex centro D, recta
DE, perpendicularis ad BC, extendaturq; ad punctum A, in circunse-
rentiam; & ex A, ducatur FG, perpendicularis ad AD. Erit igitur FG, paral-
lela ipsi BC, tangetque circum in A, per corollarium propos. 16. huius lib.
quod erat faciendum.

17.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiun-
gatur recta quædam linea, quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendi-
cularis erit.



a 17. primi.

b 19. primi.

RECTA linea AB, tangat in C, circum CD, cuius centrum E;
& ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad
AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad AB, secans
circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, duo
anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis: Et est EFC, rectus,
ex constructione: erit ECF, minor. Quare major erit recta EC,
hoc est, ED, quam EF, pars quam totum, quod est absurdum. Est igitur
EC, perpendicularis ad AB. Quare si circum tangat recta
quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

ALITER. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angu-
lorum

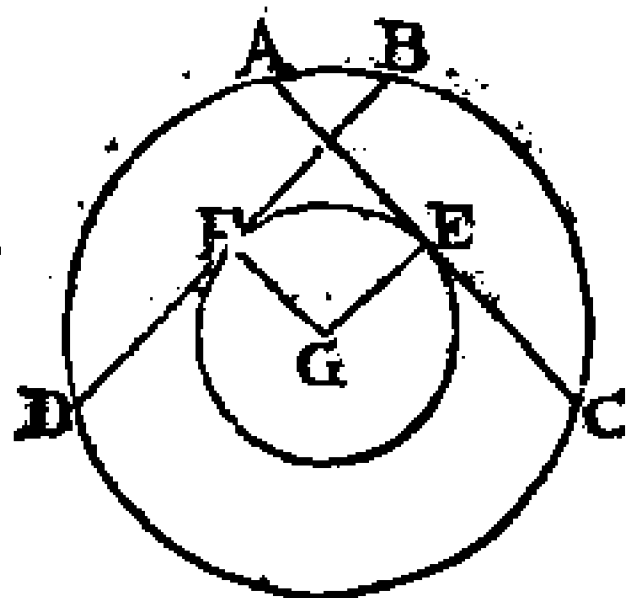
lorum ad C, obtusus, & alter acutus. Si ergo ECB, acutus, qui cum maior sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi maior est omni acuto.

a 16. tertij.

S C H O L I V M.

Hinc licebit demonstrare sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

Dvobus circulis ex eodem centro descriptis; erunt omnes rectæ lineæ interiorei circuli tangentes, & usque ad circumferentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bisariamque in punctis contactuum secabuntur.



Si nunc duo circuli ABCD, EF, ex eodem centro G, descripti, quos tangant rectæ AC, BD, in punctis E, F. Dico rectas AC, BD, esse æquales, bisariamque secari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, rectæ GE, GF, quæ ad AC, BD, perpendiculares erunt; ac proinde, per def. 4. huius libri rectæ AC, BD, æqualiter à centro G, in circulo ABCD, distabunt, cum perpendiculares GE, GF, æquales sint. Igitur rectæ AC, BD, æquales sunt. Dividuntur autem & bisariam in E, F, à perpendicularibus GE, GF. Constat.

a 18. tertij.

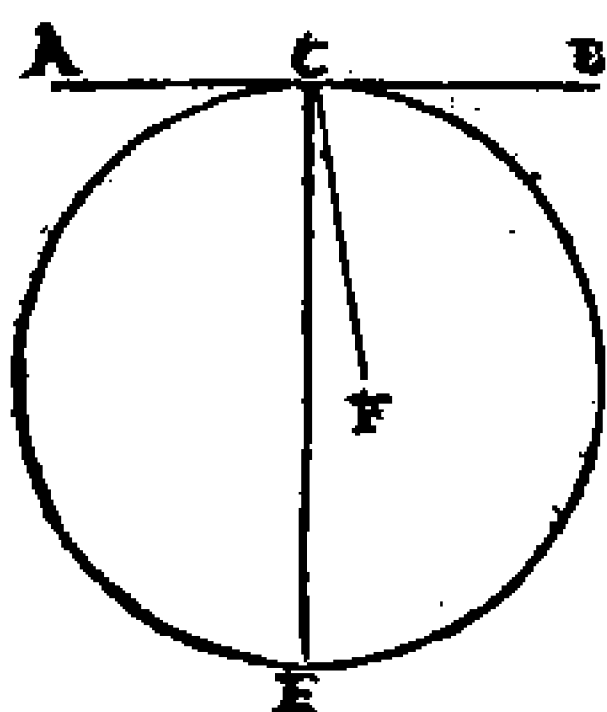
b 14. tertij.

c 3. tertij.

ergo id, quod propositum est.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

18.



Si circum tegerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

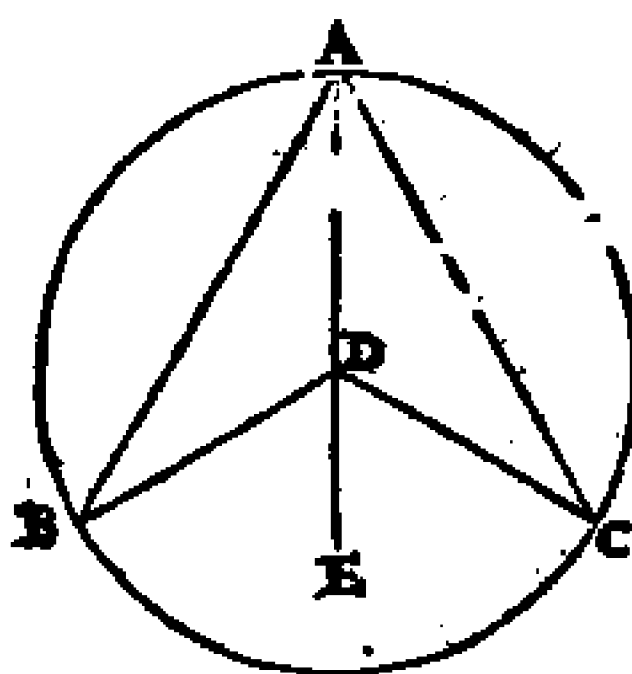
Tangat recta AB, circum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est extra CE, sit F, centrū, à quo ad C, ducatur recta FC, quæ perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrū circuli existet. Itaque si circum tegerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.

a 18. tertij.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

19.

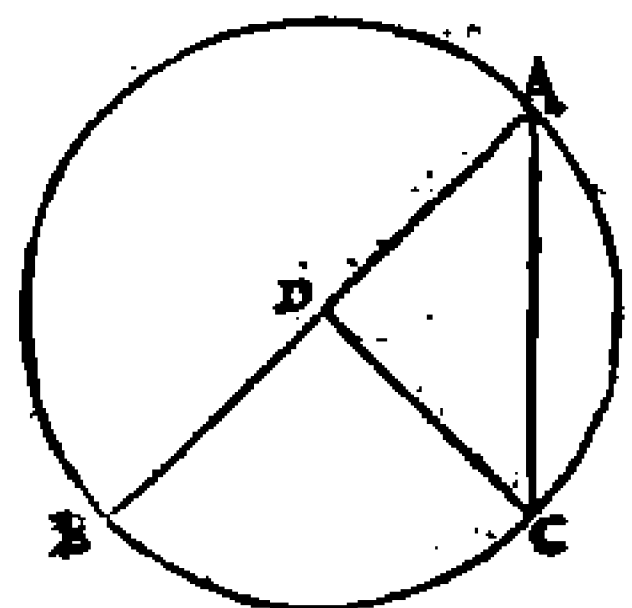
In circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.



In circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constitutatur angulus BDC, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplū esse anguli BAC. Includant enim primū duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extēdatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, erunt anguli DAB, DBA, æquales: Est autem externus angulus BDE, æqualis duob. angulis interis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorū, ut anguli DAB. Eodem modo duplus ostēdetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarū sunt duplæ, singulæ singularum; est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum.

b 9. primū.

c 32. primū.

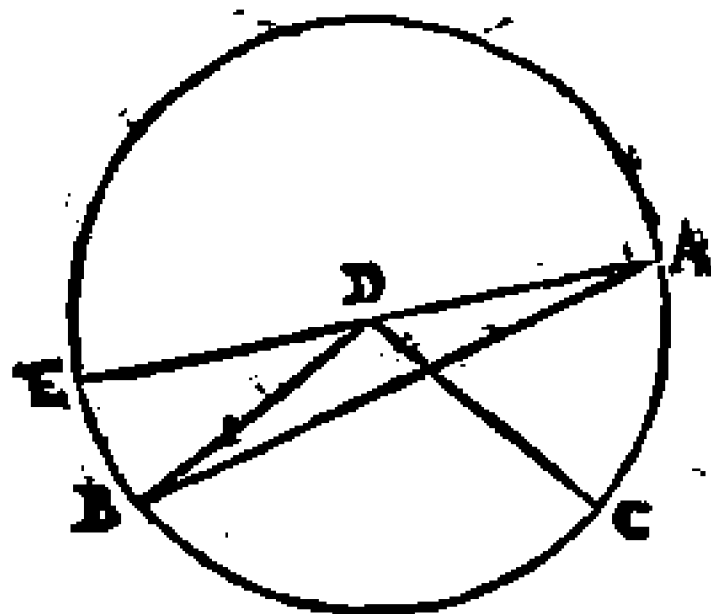


DEINDE non includant rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extēdatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, æqualis est duobus internis DAC, DCA: Hi autē duo inter se sunt æquales, quod latera DA, DC, sint æqualia: erit angulus BDC, duplus alterius eorū, nempe anguli BAC. Quod est propositum.

d 32. primū.

e 5. primū.

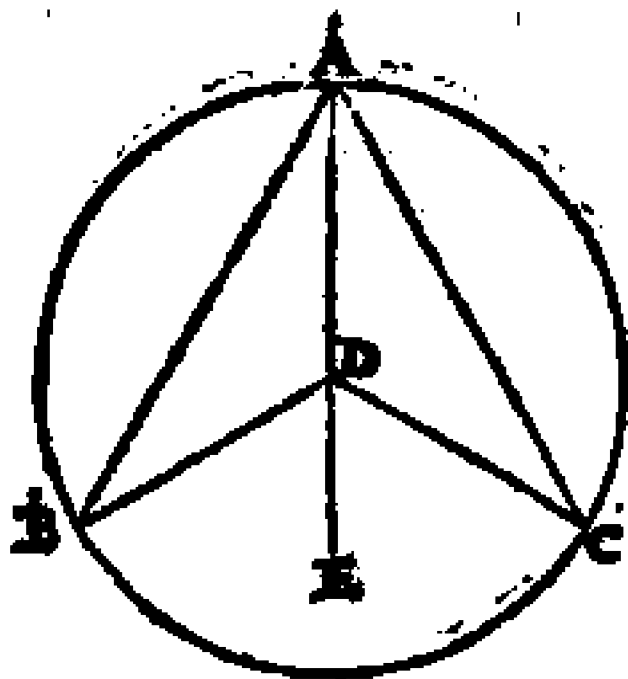
TERTIO recta AB, secet rectam DC, & per centrū D, extendatur AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam habent eandem basin EC, & recta AE extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, ut ostensum est in secunda parte. Simili modo erit angulus EDF, duplus anguli EAB: habent enim hi anguli eandem basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. Quando enim totum totius est duplum, & ablatum ablati, est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est &c. Quod erat demonstrandum.



f 20. primū.

Ad primam partem huius propositionis demonstrandam assumptum est hoc principium. (Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint duplæ, singulæ singularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum.) In tertia verò partis demonstratione hoc aliud principium adhibuitur est. (Si totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.) Quorum utrumque ab Euclide vniuersaliter demonstratur in omni genere multiplicium, & de quocunque magnitudinibus, libro 5. propos. 1. & 5. Non tamē propterea demonstratio huius propositionis censenda est vitiosa, quasi assumat ea, quæ nondum sunt demonstrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita sunt in dupli magnitudinibus, vt facile à quouis sine vlla demonstratione concedantur, & vtraque illa propositio lib. 5. demonstrari potest ante tertium hunc librum, cum ex eo non pendeant: adeo vt duo illa principia iure optimo adhiberi possint hoc loco, tanquam demonstrata. Neq; verò hac in re circulus ab Euclide committitur, cum duo illa principia per quæ propos. 20. huius libri demonstratur, hac eadem propositione non nitantur, aut alijs propositionibus, quæ ex hac 20. pendent.

a 5. primi.



b 32. primi.

c 32. primi.

d 3. prop.

VERVM, si placet, demonstrabimus primam partem huius propositionis sine priore illo principio, & tertiam sine posteriore, (secunda enim pars neutro eorum indiget) hac ratione. Repetatur prima figura. Et quoniam^a tam anguli DAB, DBA, inter se æquales sunt, quàm anguli DAC, DCA; erit totus angulus BAC, duobus angulis B, C, simul sumptis æqualis, ac proinde tres anguli BAC, B, & C simul sumpti dupli erunt anguli BAC. Quia verò angulus BDC, æqualis est ipsi^b tribus angulis BAC, B, & C. Nam^c cum BDE, duobus internis, B, & DAB, & CDE, duobus internis C & DAC; æqualis sit, erit totus BDC, omnibus quatuor, hoc est, tribus BAC, B, & C, æqualis: erit angulus quoq; BDC, duplus anguli BAC. quod est propositum.

ALITER. Quoniam^c sex anguli triangularum ABD, ACD, sunt æquales quatuor rectis, sunt autem & tres anguli BDC, CDA, ADB, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. erunt hi tres illi sex æquales: ablati^d communibus ADB, ADC, reliquis BDC, reliquis BAC, B, & C, æqualis erit. Quare et prius, erit BDC, ipsius BAC, duplus.

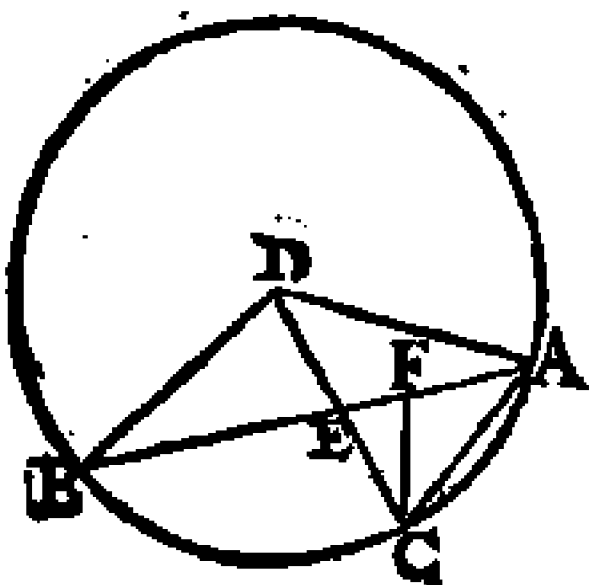
e 5. primi.

f 32. primi.

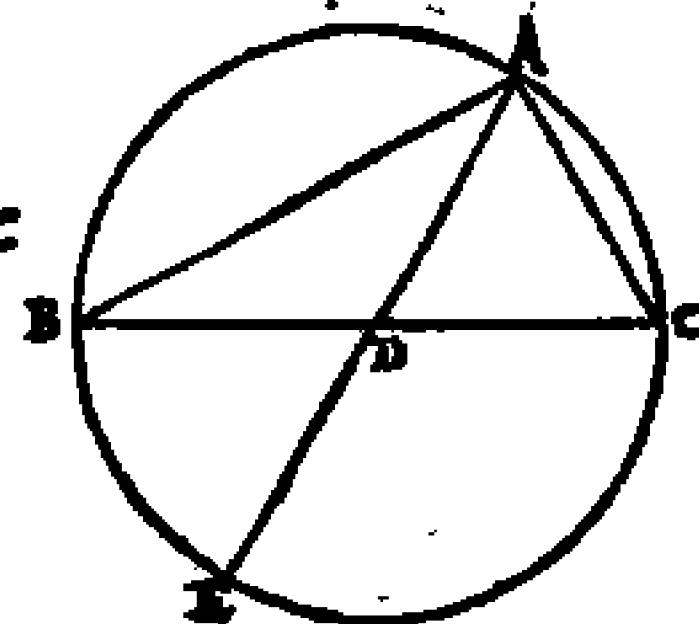
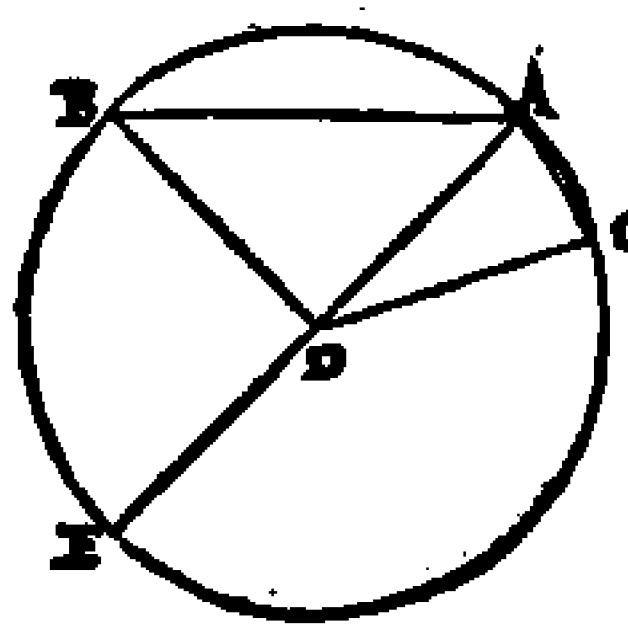
g 5. primi.

h 5. primi.

i 15. primi.



REPETATUR quoque tertia figura, ubi recta DC, rectam AB, secatur, vt in E. Quoniam ergo, ducta recta AD, ^a duo anguli DAC, DCA, æquales sunt, estq; angulus DAC, angulo EAC, maior, erit quoque angulus DCA, eodē angulo EAC, maior. Si igitur fiat angulus ACF, angulo EAC, æqualis, secabit CF, rectam AE, vt in puncto F, ^b angulusq; EFC, æqualis erit internis angulis FAC, FCA, ac proinde anguli BAC, duplus. Quia verò B anguli DAC, DCA, æquales sunt, & ablati quoq; FAC, FCA; erunt & reliqui DAB, ECF, æquales. Cum^c ergo DAB, ipsi DBA, æquales, erit quoq; ECF, eidem DBE, æqualis: Sunt autem, ^d & anguli DEB, FEC, ad verticem E, æquales. Igitur & reliqui anguli BDF, EFC, æquales erunt; ex corollario 1. propos. 32. lib. 1. Cum ergo angulus EFC, ostensus sit anguli BAC, duplus; erit quoq; angulus BDC, anguli BAC, duplus. quod est propositum.



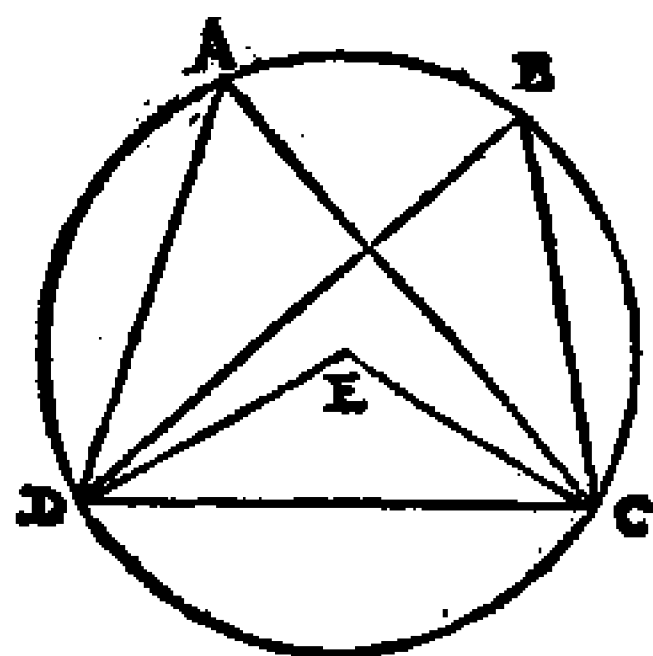
Quod si recta BD, CD, in centro angulum non constituent, ad partes basis BC, quædam demum sit, quando segmentum BAC, est vel semicirculus, vel segmentum minus; nihilominus spatium illud ad centrū duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat basin, quàm spatium illud. Ducta enim recta AE, per centrum, erit tam angulus BDE; ad centrum duplus anguli BAE, ad circumferentiam, quàm angulus CDE, ad centrum, anguli CAE, ad circumferentiam, vt ostensum est. Spatium igitur ad centrum D, basin habens BEC, constansq; ex duobus angulis BDE, CDE, duplum est totius anguli BAC. Quod est propositum.

20.

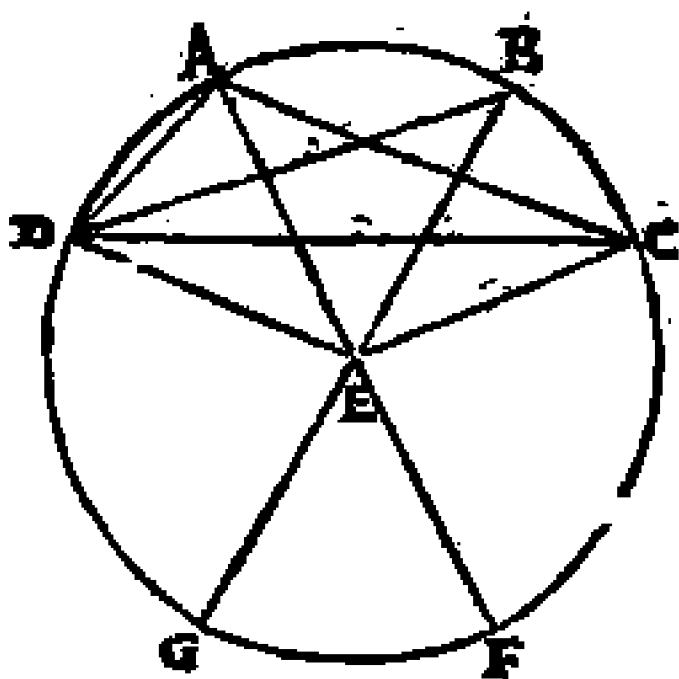
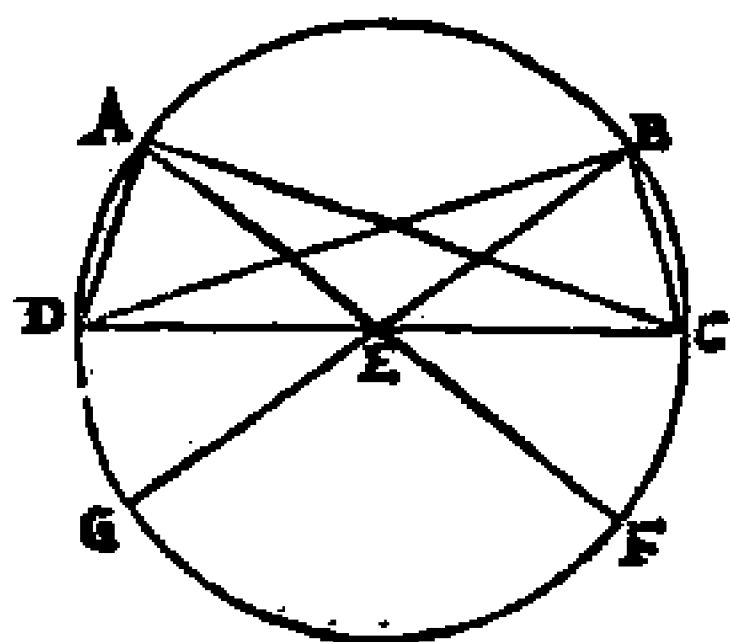
THEOR. 19. PROPOS. 21.

IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, existant anguli A, & B, in segmento DAB C. Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum DAB C, primum semicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad



CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, ^{a 20. tertij.} duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriam, cum omnes habeant eandem basin DC; erunt anguli A, & B, dimidia- ^{b 7. prom.} tæ partes anguli E. Quare inter se æquales erunt. Eademq; ratio- ne omnes alij anguli existentes in segmento DABC, ostenduntur esse æquales.



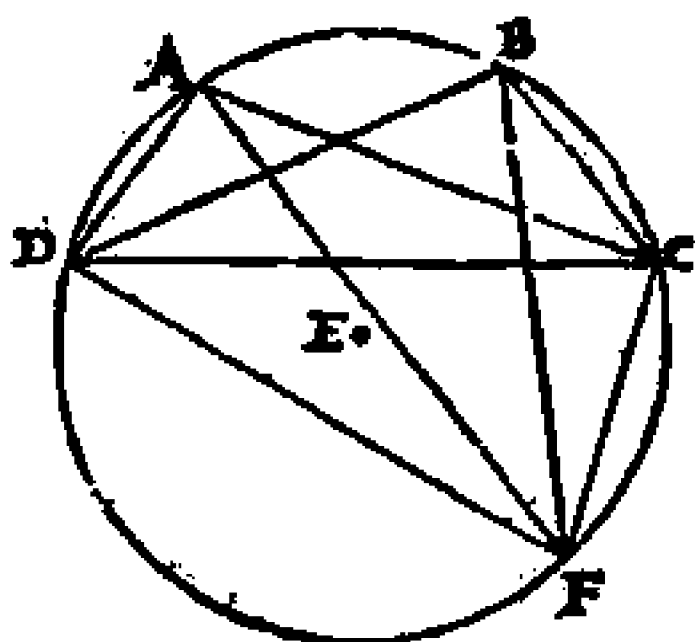
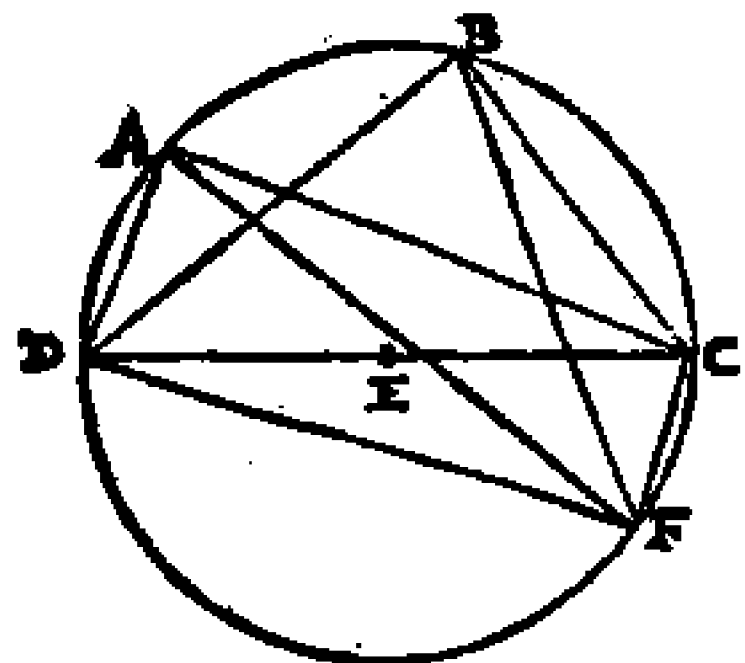
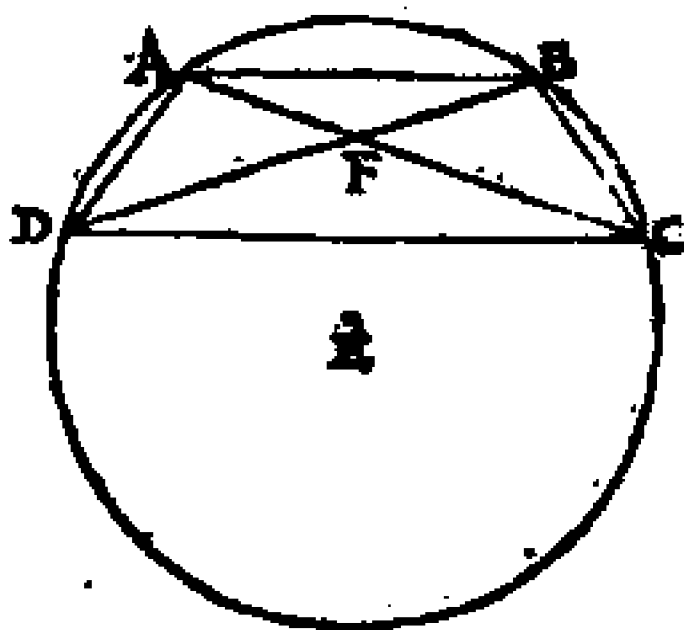
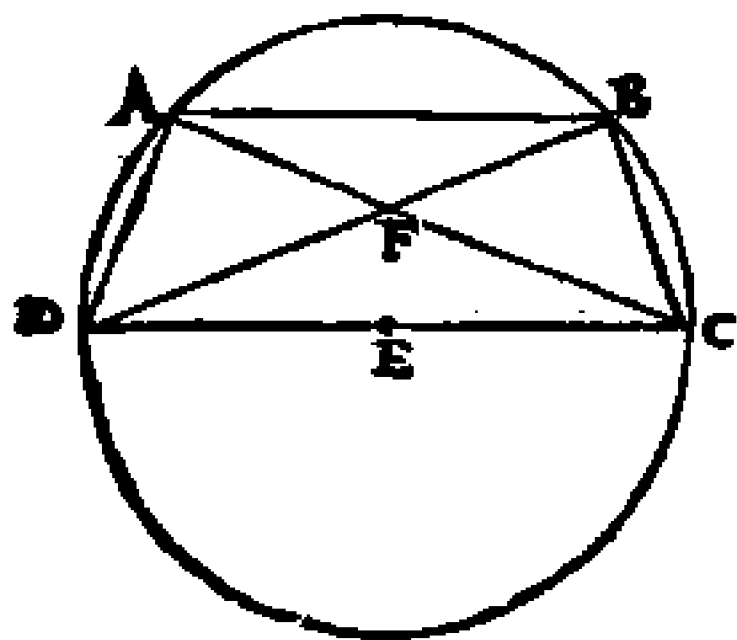
^{c 10. tertij.}

^{d 7. prom.}

^{e 7. prom.}

Si r deinde segmentum DABC, vel semicirculus, vel semicirculo mi- nus. Ducantur per centrum E, rectæ AF, BG, & in segmento minori con- nectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, ^a duplus est anguli DAF, ad peripheriam. Similiter angulus CEF, anguli CAF; ac proinde duo anguli simul DEF, CEF, duorum angulorum simul DAF, CAF, dupli erunt, hoc est, totius an- guli DAC: Sunt autem anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: Igitur erunt quoque tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt iidem tres anguli du- ^{d 7. prom.} pli anguli DBC. Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

ALITER. Quoniam ut in scholio propos. præcedentis demonstravimus, spatium ad centrū E, cuius basis DGC, duplum est utriusque anguli DAC, DBC, ad circumferentiam: Erunt ipsi ^{e 7. prom.} anguli DAC, DBC, inter se æquales.



ALITER. Secent sese rectæ AC, BD, in F, & connectatur recta AB. Quoniam igitur tres anguli triangu- li AFD, æquales sunt tribus angulis triangu- li BFC; quoniam tam illi, q̃ ^{f 32. primæ} hi ^{g 15. primæ} æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, & qui æquales sunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æqua- les sunt ostensi in segmento maiori ADCB. Ergo & anguli reliq DAC, DBC, æquales sunt.

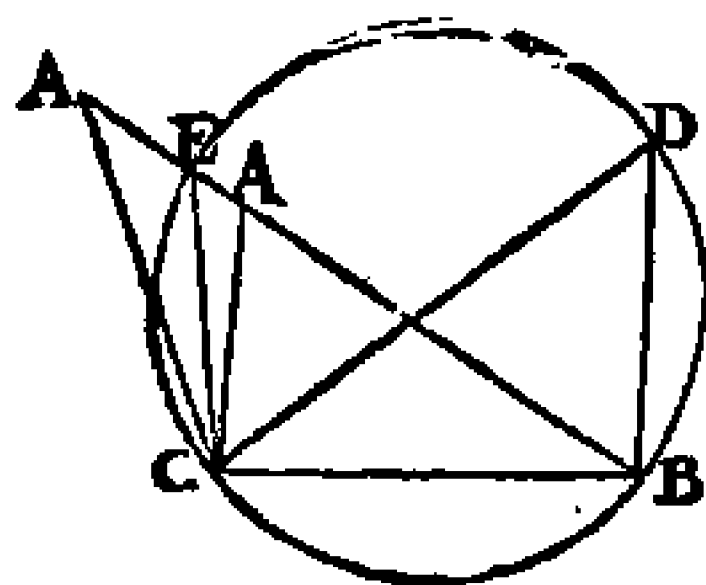
ALITER. Ductis rectis DE, CF, ad punctum in circumferentia quod- vis F, includentibus centrum E, ita ut tam DAB:CF, quam FDABC, sit segmentū maius: iungantur quo- que rectæ AF, BF. Quia igitur angu- li DAF, DBF, in eodem segmento maiori DABCF, æquales sunt; nec

non & anguli FAC, FBC, in segmento etiam maiori FDABC, existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

FACILE quoque theorema istud converteremus hoc modo.

Si à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illo- rum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.



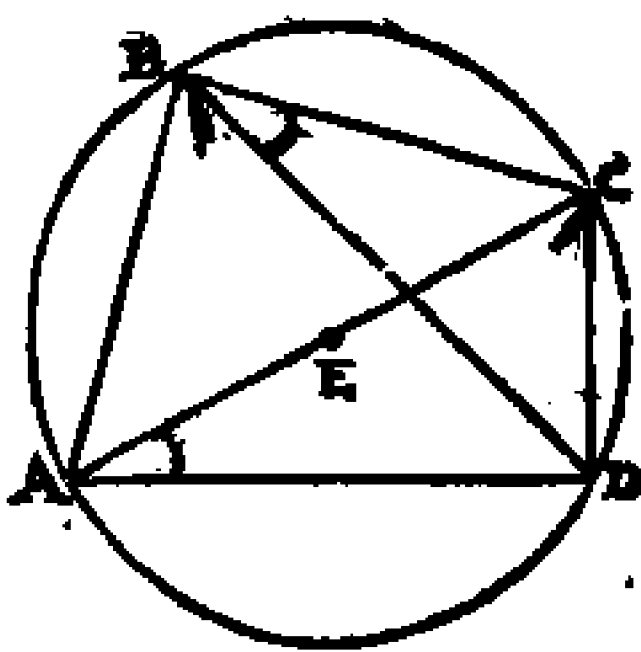
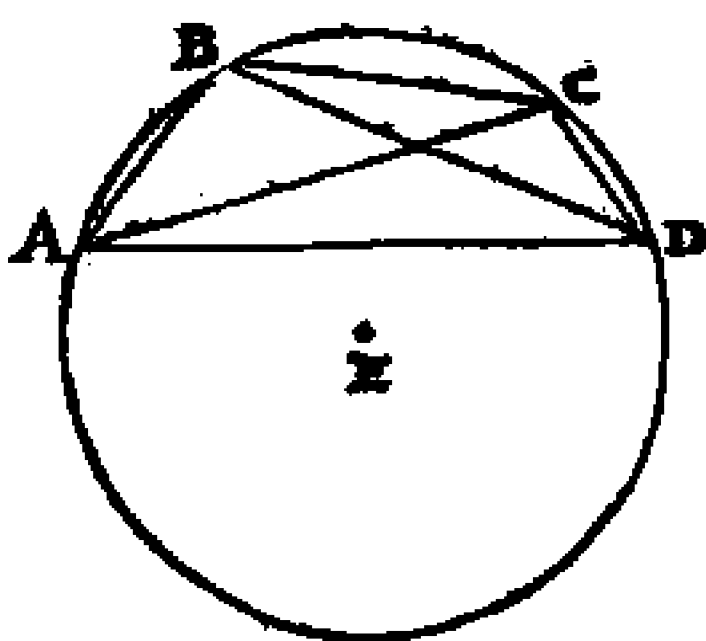
Ex duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ BA, CA, BD, CD, binæ ex singulis, constituentes ad easdem partes duos æ- quales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, de- scriptum, transire quoque per angulum A. Si enim non transit, transibit vel ultra A, vel circa secans rectam AB, in E. Ducta ergo recta CE, ^{a e- 21. tertij} runt anguli E, D, æquales. Cum ergo & angulus A, angulo D, ponatur æ- qualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus, quod est absurdum. ^b Externus enim internus maior est. Transit ergo circulus per ^{b 16. primæ} A. quod est propositum.

EVCLIDIS GEOMETRIÆ
THEOR. 20. PROPOS. 22.

21.

QUADRILATERORVM in circulis descriptorū anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

a 21. i. i. i.



IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppositos ABC, CDA: Item BCD, DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri AC, BD, erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD, in eodem segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus

ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Adde igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Nam rursus duo anguli ABD, ACD, sunt æquales: Item duo BCA, BDA, ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Adde igitur communi angulo BAD, erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.

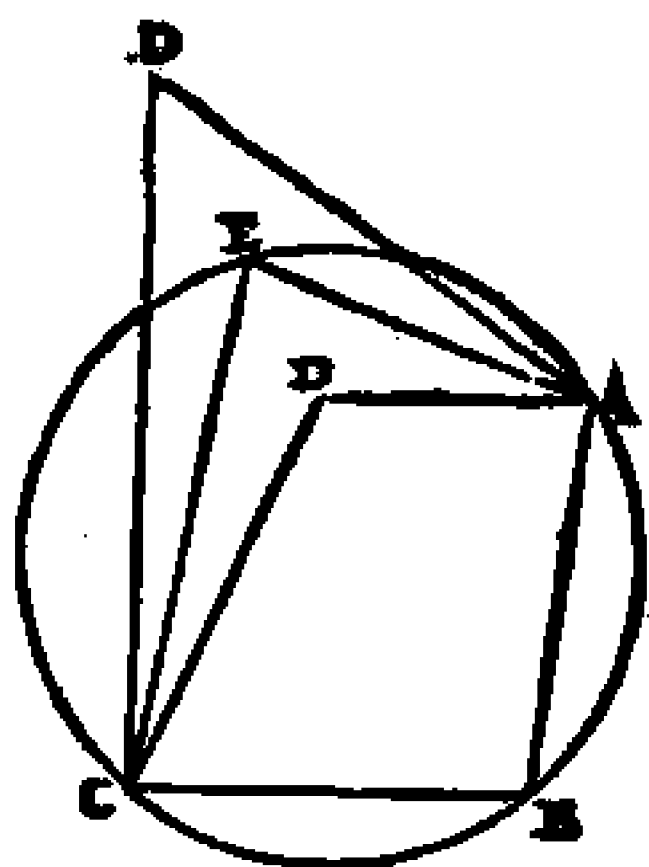
S C H O L I V M.

CONVERSVM quoque huius theoremati demonstrari potest, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales; circulus, qui per tres quoscunque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum angulum; Atque adeo circa ipsum quadrilaterum circulus describi potest.

a 22. tertij.

b 21. primi.



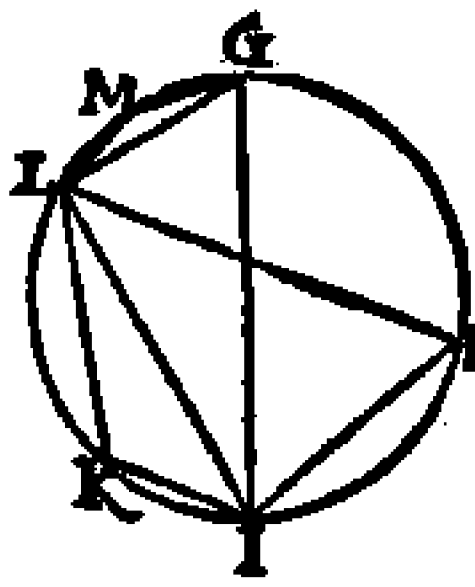
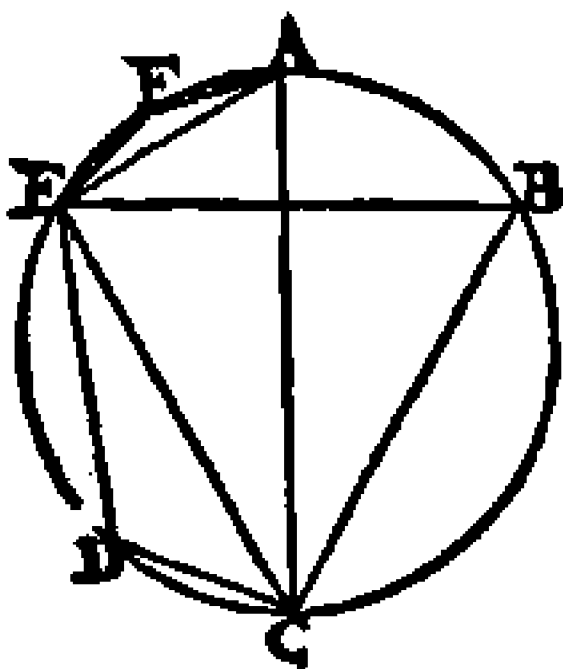
IN quadrilatero enim ABCD, sint anguli oppositi B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus describatur; (Quo modo autem hoc fieri possit, ad 25. propos. huius libri, & ad 5. quarti libri ostendetur.) quem dico transire etiam per D. Si enim non, transibit vel ultra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ CE, AE, ad circumferentiam, ita ut non secent rectas CD, AD. Quo facto, erunt anguli B, & E, æquales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli B, E, æquales sunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod est absurdum. Ducta enim recta AC, erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Transigitur circulus per punctum D. Quod est propositum.

SATIS autem est, sumere duos tantum angulos oppositos æquales duobus rectis, ut theorema hoc verum sit: quia si duo oppositi sunt æquales duobus rectis, erunt necessariò & reliqui duo oppositi duobus rectis æquales; cū omnes

quatuor sint quatuor rectis æquales, ut ad propos. 32. lib. 1. demonstrauimus.

Ex hac etiam propositione facile demonstrabimus theorema hoc insequens, quod frequenter usurpari solet, tanquam principium, à Mathematicis: scilicet.

SI ex semicirculis, aut circulis segmenta similia detrahantur; reliqua quoque segmenta similia erunt.



c 22. tertij.

d 3. prop.

IN primū in circulo ABCDEF, GHI-KLM, arcus similes CDE, IKL. Dico & reliquos arcus EFAB, LMGH, similes esse. Sumptis enim in dictis arcibus, punctis utcumque D, B, K, H, iungantur rectæ DC, DE, BC, BE, KI, KL, HI, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, similes sunt, erunt, ex definitione segmentorum similium, anguli CDE, IKL, æquales.

Cum ergo duo anguli CDE, CBE, duobus angulis IKL, IHL, sint æquales; quod tam illi, quam hi sint æquales duobus rectis; erunt & reliqui anguli CBE, IHL, æquales; ac propterea ex definitione 10. huius libri arcus EBC, LHI, similes erunt.

DEINDE in semicirculis AEC, GLI, similes sint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GI, esse similes.

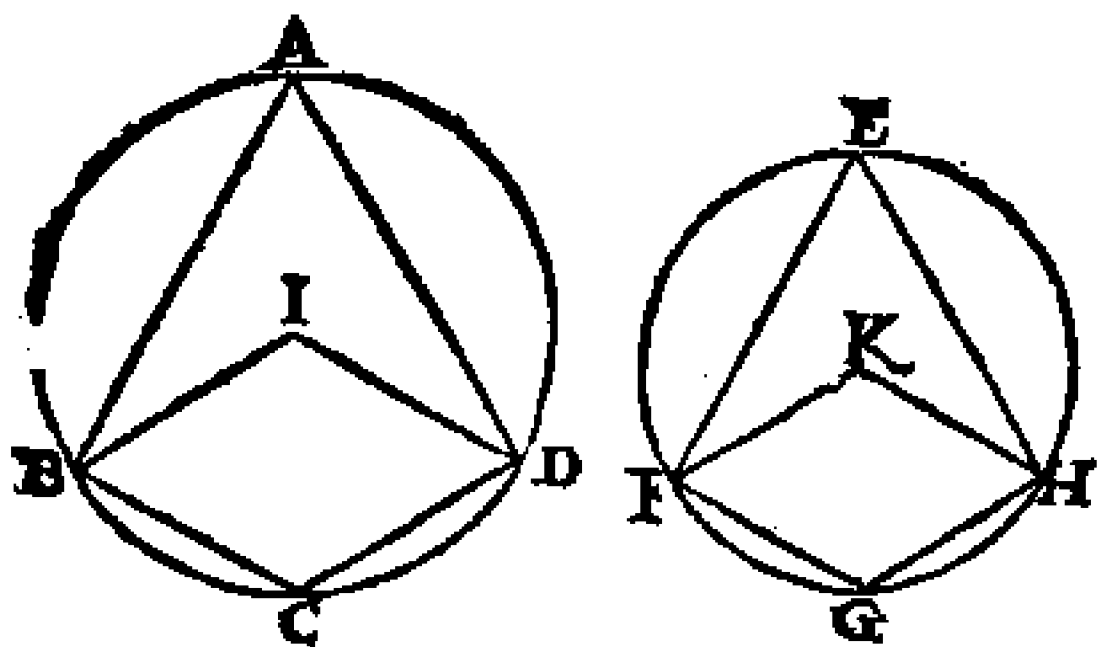
miles. Sumptis enim punctis D, F, K, M, utcumque in his arcibus, iungantur rectæ CD, DE, CE, EF, FA, AE; IK, KL, LI, LM, MG, GL. Itaque quia arcus EC, LI, similes sunt, erunt, ex definitione anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo & duo anguli CDE, EAC, duobus angulis IKL, LGI, æquales sint; ^a quod tam illi, quam hi sint duobus rectis æquales: erunt & reliqui anguli EAC, LGI, æquales. Sunt autem & anguli AEC, GLI, in semicirculis, hoc est, in segmentis similibus AEC, GLI, æquales, ex definitione segmentorum similibus. Igitur in triangulis AEC, GLI, & reliqui anguli ACE, GIL, ex coroll. r. propof. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli ACE, EFA, duobus angulis GIL, LMG, æquales sint; ^b quod tam illi, quam hi duobus sint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui EFA, LMG, æquales: ac proinde ex definitione similibus segmentorum, arcus AE, GL, reliqui in semicirculis, similes erunt. Quod erat ostendendum.

a 12. tertij.

b 12. tertij.

QUANDO autem de segmentis similibus sermo hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tam Geometricis rebus, cum præsertim Astronomicis perneccessaria, quorum primum sit hoc, quod nos ad defin. 10. huius libri demonstrandum recepimus: videlicet.

ANGULI insistentes arcibus circulorum similibus siue ad centra, siue ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contrà, arcus, quibus anguli æquales siue ad centra, siue ad circumferentias insistant, similes sunt.



Si in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, primum arcus similes BCD, FGH, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias vero anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter se æquales esse. Constituantur enim in illis arcibus anguli C, G, qui ex definitione segmentorum similibus, æquales erunt. ^c Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur aequalibus C, G, erunt quoque reliqui A, E, æquales. Quorum ^d cum dupli sint anguli I, K, ^e erunt hi quoque, æquales. Quod est propositum.

c 12. tertij.

d 20. tertij.

e 6. pron.

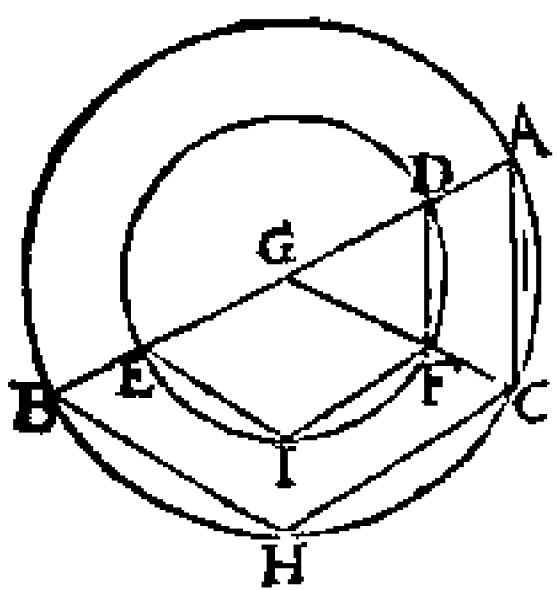
DEINDE sint tam anguli I, K, quam A, E, insistentes arcibus BCD, FGH, inter se æquales. Dico arcus BCD, FGH, esse similes. Nam si A, & E, sint æquales: sint ^f autem tam duo anguli A, C, quam duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex definitione similibus segmentorum, arcus BCD, FGH, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias insistant, similes. Si vero anguli I, K, ad centra sint æquales, erunt quoque eorum dimidia equalia, hoc est, anguli A, E. Quare, ut prius, arcus BCD, FGH, similes sunt. Quod erat ostendendum.

f 12. tertij.

g 7. pron.

SECUNDO autem, quod nos etiam in sphaera ad finem 1. cap. demonstravimus, huiusmodi sit.

Si duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti, similes.



Duo circuli ABCD, EFGH, ex eodem centro G, descripti sint, & ex centro G, duæ rectæ educantur GB, GC. Dico arcus EF, BC, esse similes. Producta enim BG, ad A, iungantur rectæ AC, DF; Item sumptis punctis H, I, utcumque, ducantur rectæ BH, CH, EI, FI. Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcibus EF, BC, insistentis ^h duplus est tam anguli EDF, quam anguli BAC; ⁱ erunt anguli EDF, BAC, æquales. Sunt autem duo anguli EDF, EIF, duobus angulis BAC, BHC, æquales; quod ^k tam illi, quam hi duobus rectis sint æquales. Ablatis igitur aequalibus angulis EDF, BAC, ^l reliqui EIF, BHC, æquales erant: ac proinde segmenta EF, BC, in quibus sunt, similia erunt, ex definitione similibus segmentorum. Quod erat ostendendum.

h 20. tertij.

i 7. pron.

k 21. tertij.

l 3. pron.

BREVIVS sic. Quoniam ^m anguli A, D, æquales sunt, quod utriusque ⁿ duplus sit angulus G, ad centrum; erunt per antecedens theorema, arcus BC, EF, quibus ad circumferentias insistant, similes. Quod est propositum. Vel adhuc brevius. Quoniam arcibus EF, BC, æquales anguli in centro insistant, immò vnus & idem angulus BGC; erunt per antecedens theorema, arcus EF, BC, similes. Atque in hac demonstratione non est opus vlla constructione, ut manifestum est.

m 7. pron.

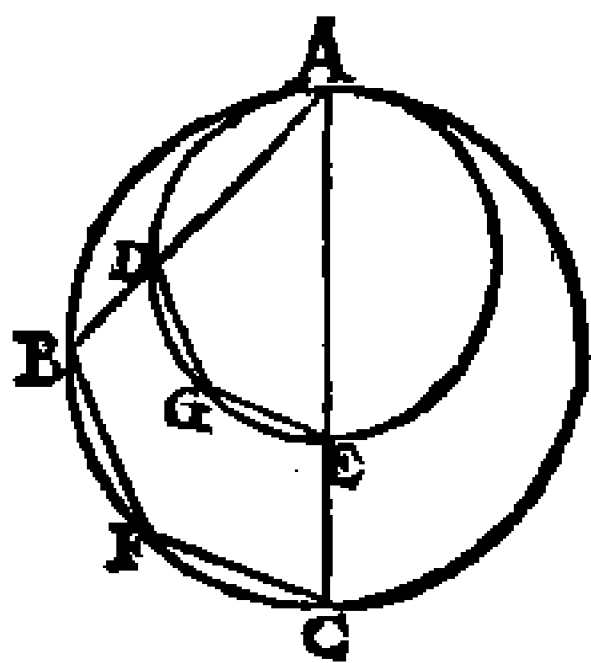
n 20. tertij.

TERTIUM denique, quod aliter quoque in nostro Astrolabio ostendimus, hoc sit.

Si duo, aut plures circuli se mutuò tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quascunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti similes.

TANGANT se mutuò interius duo circuli ABC, ADE, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur AB, AC. Dico tam arcus DE, BC, quam AD, AB, & AED, ACB, similes esse. Sumptis enim duobus punctis utcumque F, G, iungantur rectæ BF, CF, DG, EG. Quoniam igitur duo anguli DAE, DGE, duobus an-

a 22. tertij.
b 3. pron.



c 11. tertij.

gulis BAC, BFC , æquales sunt; quod^a tam illi, quàm hi sint duobus rectis æquales: ablato communi angulo BAC ,^b erunt reliqui anguli DGE, BFC , æquales; ac proinde arcus DE, BC , similes erunt, ex definitione segmentorum similium.

BR E V I S sic. Quoniam angulus A , communis utrique arcui DE, BC , ad circumferentias insistit, erunt, ex demonstratis antè proximè antecedens hec orema, arcus DE, BC , quibus insistit, similes. Quod est propositum.

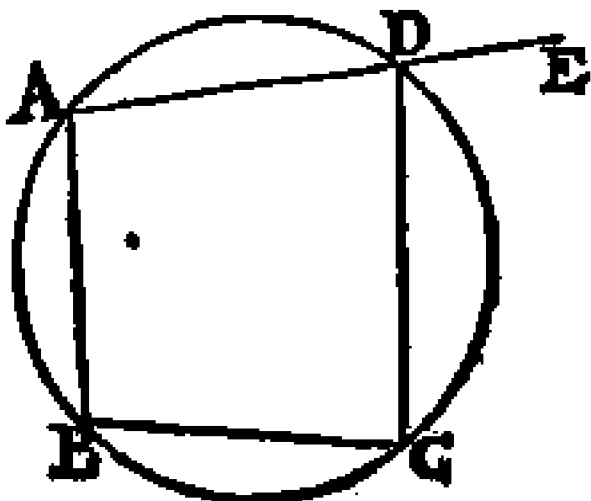
Quia^c A verò, si per circulorum centra ducta cogitetur recta AC ,^c hæc in contactum A , cadit, suntq; eodem pacto arcus DE, BC , similes, sit, ut hisce similibus ablatis ex semicirculis similibus, reliqui arcus AD, AB , similes quoq;

sint: atque his ablatis ex totis circumferentiis similibus, similes quoque sint reliqui arcus AED, ACB , ut paulò antè demonstravimus. Quod est propositum.

Hæc etiam referri potest hoc theorema.

• Si vnum latus quadrilateri in circulo descripti producat, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.

d 13. primi.
e 22. tertij.



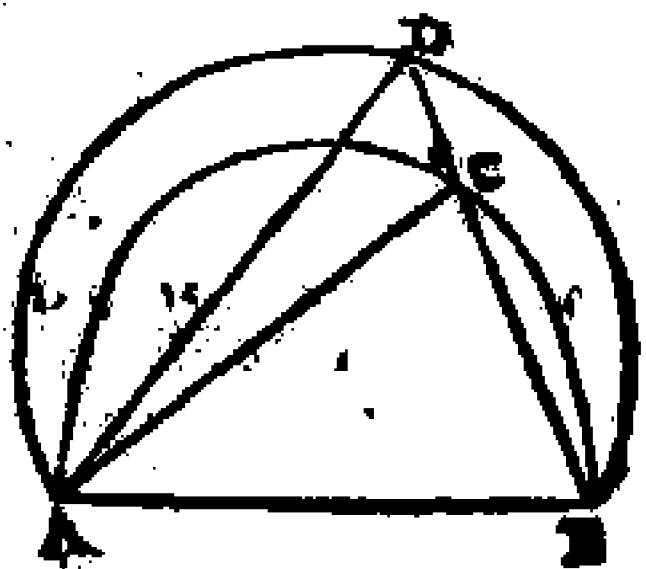
IN circulo $ABCD$, descriptum sit quadrilaterum quodcumq; $ABCD$, cuius latus AD , producat ad E . Dico angulum EDC , angulo B , æqualem esse. Cum enim duo anguli ad D ,^a æquales sint duobus rectis: Item^c duo B, C , in quadrilatero; erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo ADC , reliquus EDC , externus reliquo B , æqualis erit. Quod est propositum.

22.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

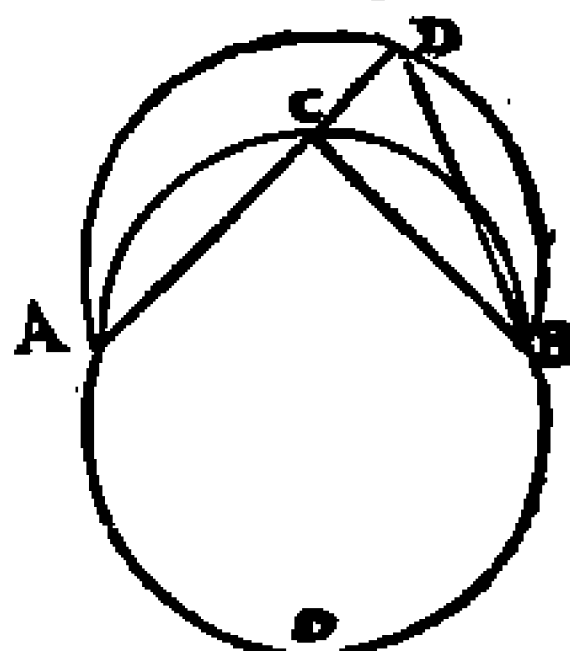
a 10. tertij.



b 16. primi.

absurdum. Non igitur segmenta sunt similia: Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

Si enim fieri potest, super recta AB , constituentur ad easdem partes duo segmenta similia, & inæqualia ACB, ADB . Perspicuum est autem, quod se solum intersecant in punctis A, B :^a Circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quàm duobus. Vade peripheria unius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD , secans circumferentias in C, E , & connectantur rectæ CB, DB . Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. definitionem huius libri angulus ACB , æqualis angulo ADB , externus interno:^b quod est



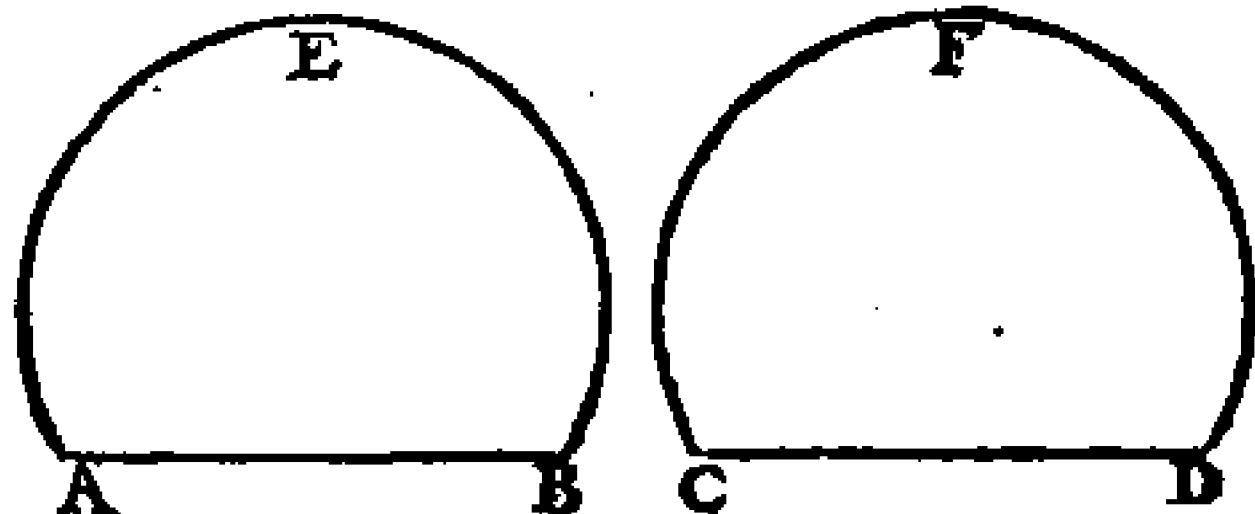
SCHOLIUM.

EAD E M ratione, neque ad diversas partes super eadem recta linea duo segmenta circulorum similia, & inæqualia constituentur. Nam si alterum eorum intelligatur moveri circa lineam AB , ut iam ambo sint ad easdem partes, in idem absurdum incidemus, ut figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet propter inæqualitatem.

23.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

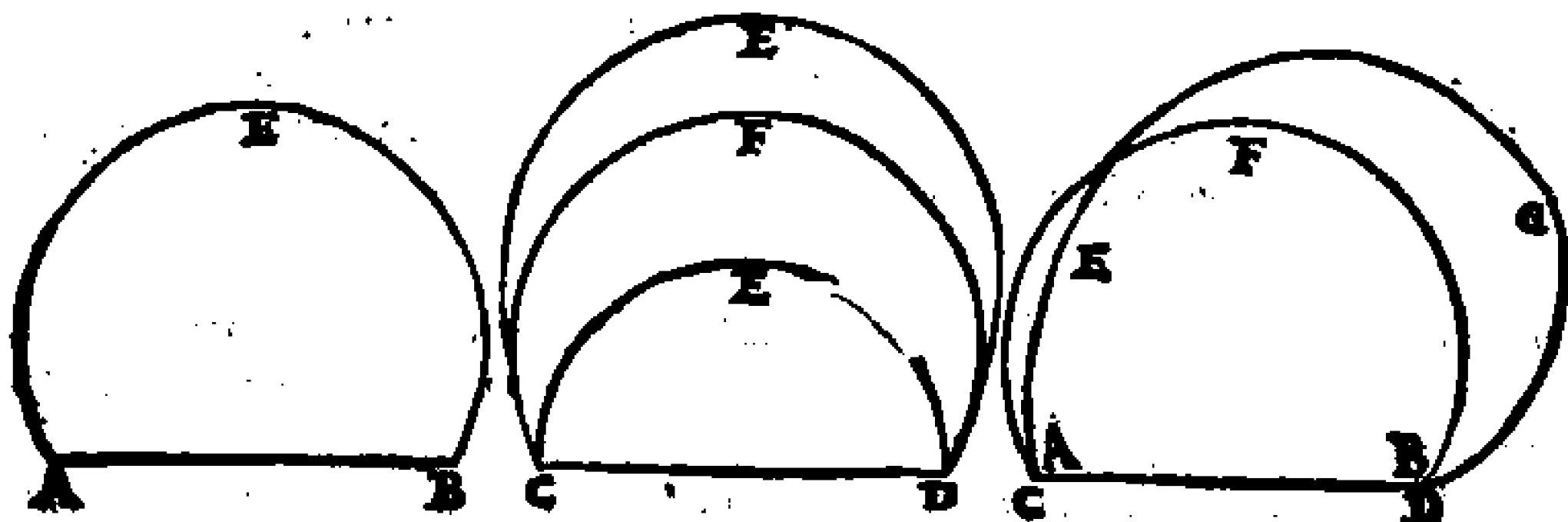


c 23. tertij.

d 10. tertij.

si extra cadat, aut intra, constituentur super eadem recta CD , duo segmenta AEB, AFB , similia, & inæqualia, quorum vnum totum extra aliud cadit, quod est absurdum.^c Demonstratum enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabunt sese in pluribus punctis, quàm duobus, nimirum in A, B, C . Quod est absurdum.^d Circuli enim non se secant in pluribus punctis,

SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD , constituta sint segmenta similia AEB, CFD . Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD , cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmentum AEB , segmento CFD , congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, constituentur super eadem recta CD , duo segmenta AEB, AFB , similia, & inæqualia, quorum vnum totum extra aliud cadit, quod est absurdum.^c Demonstratum enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabunt sese in pluribus punctis, quàm duobus, nimirum in A, B, C . Quod est absurdum.^d Circuli enim non se secant in pluribus punctis,



punctis, quàm duobus. Congruet igitur segmentum AEB, segmento CFD, atque adeò ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

NON solum in hac propositione ostenditur, segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verum etiam ipsas peripherias, eò quòd, ut demonstratum est, sibi mutuò congruant.

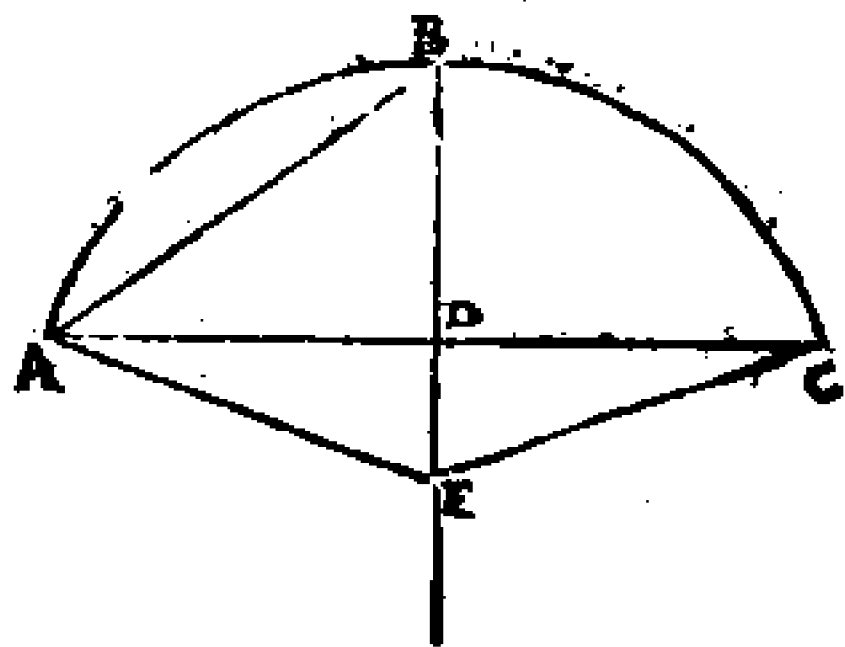
CONVERSVM quoque huius propositionis & precedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione erunt, anguli in ipsis constituti æquales sint. Quòd si quis dicat, non sibi mutuò congruere segmenta, secabis necessario unam circumferentiam alteram. Una enim extra alteram non cadet. In æqualia namque forent segmenta, quòd est contra hypothesein. Sint ergo segmenta AFB, AGB, æqualia super eandem rectam AB, secantq; se mutuò in G. Igitur circuli AFB, AGB, secant sese in punctis A, G, B, pluribus quàm duobus, quòd est absurdum. ^a Circuli enim non se inter- ^a 10. tertij. secant in pluribus punctis, quàm duobus. Eodem modo res demonstrabitur, si æqualia segmenta super æquales rectas sint constituta: si nimirum altera alteri superponantur, &c.

PROBL. 3. PROPOS. 25.

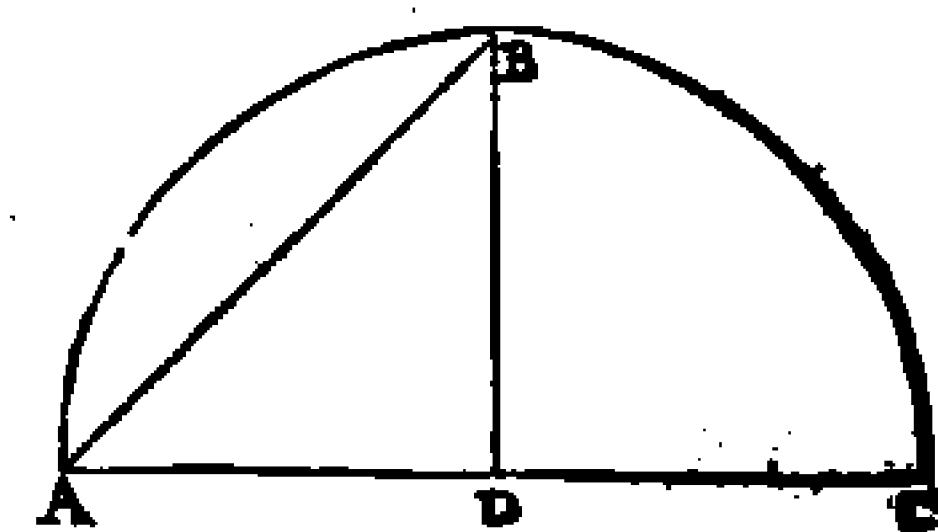
24.

CIRCULI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

SIT segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam secetur in D, puncto; per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel maior est angulo DAB, vel æqualis, vel minor.



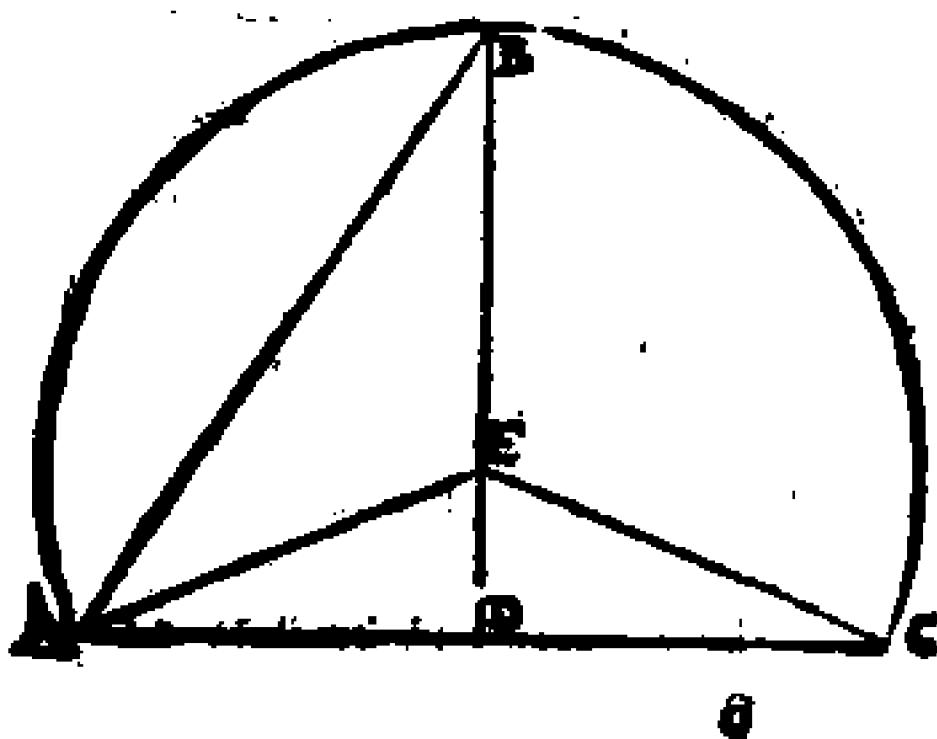
Sit primò maior, (quòd quidem continget, quado segmentum ABC, minus fuerit semicirculo. Tunc enim, quia BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius libri, quòd est extra segmentum, cum ponatur esse minus, erit DA, maior, quàm DB, cum DB, perficiens diametrum, ^a sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. Quare angulus DBA, ^b maior erit angulo DAB, fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentum ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli contenti, recti. ^c Quare bases EA, EC, æquales erunt: ^d Est autem & EA, æqualis ipsi EB, quòd anguli EAB, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erunt: ^e ac propterea E, centrum erit circuli ABC. ^f quandoquidem ex E, plures quàm duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.



SIT deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis (Quòd demum continget, quando segmentum ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum, atque adeò rectæ DA, DB, æquales; quare & anguli DAB, DBA, æquales erunt.) ^g Erunt igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipsi DA, quòd recta AC, secta sit bifariam. Quapropter cum tres rectæ DA, DB, DC, cadant ex D,

in circumferentiam, ^h erit D, centrum.

SIT tertio angulus DBA, angulo DAB, minor, (quòd quidem eveniet, si segmentum ABC, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius libri, quòd quidem intra segmentum, cum maius esse ponatur, existit, ⁱ erit DB, omnium, quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quàm DA, & ideoque angulus DAB, maior



b 9. tertij.

i 7. tertij.

h 18. primi.

angulo DBA) fiatque angulus BAE , æqualis angulo DBA , & secet recta AE , rectam BD , in E , puncto, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo idipsum ostendimus, quando angulus DBA , maior erat angulo DAB , ut constat, si recta ducatur EC . Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.

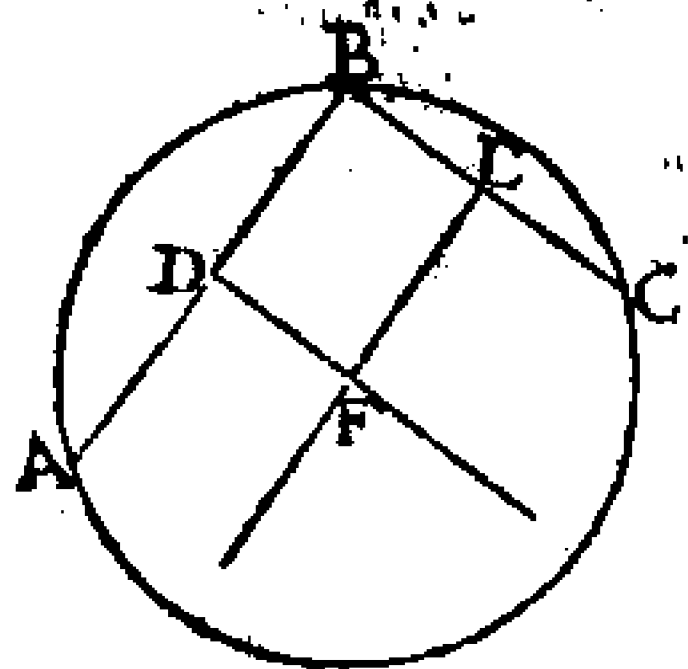
S C H O L I U M.

a 18. primi. **SE** D fortassis hæc demonstratio Euclidis, quæ per omnia tria circuli segmenta progreditur, ita facilius institueretur. Divisa recta AC , bisariam in D , et recta q , perpendiculari DB , & ducta AB , aut DB , minor est, quam DA , aut æqualis, aut maior. Si minor, ^a erit angulus DBA , maior angulo BAD . Constituto igitur angulo BAE , æquali ipsi ABD , ostendimus, ut prius, E , centrum esse. Atque hoc evenit, quando segmentum est semicirculo minus.

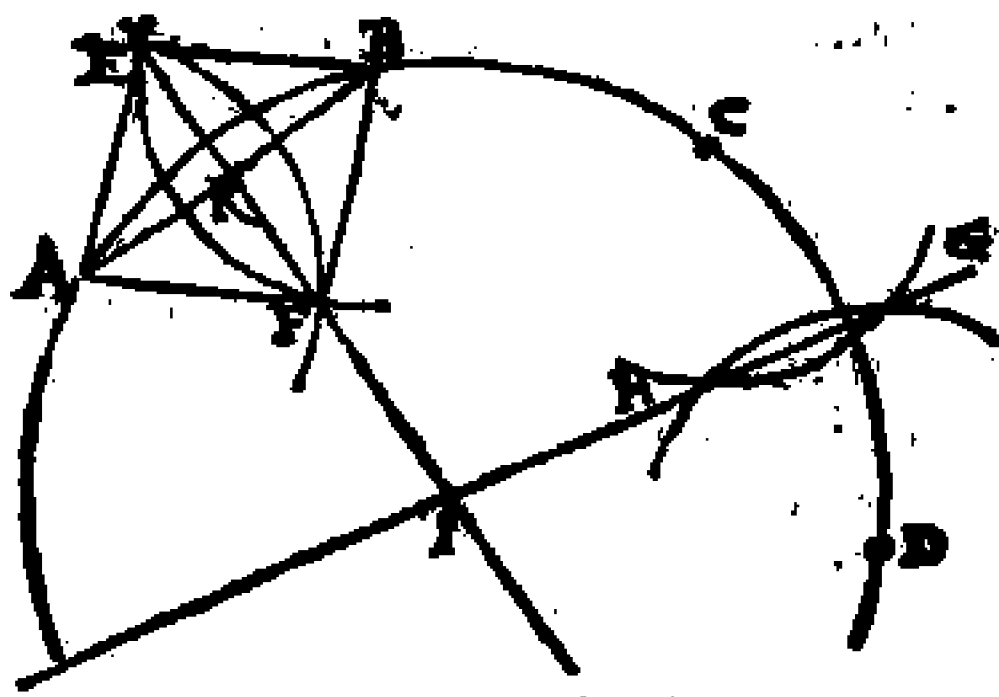
b 9. tertij. Si verò DB , æqualis est ipsi DA , erunt omnes tres DA , DB , DC , æquales; ^b ac proinde D , centrum. Quæ ratio locum habet in semicirculo.

c 18. primi. Si denique DB , maior est, quam DA , ^c erit angulus DBA , minor angulo DAB . Constituto ergo angulo BAE , æquali ipsi ABD , ostendetur E , esse centrum, ut prius. Hoc autem maiori segmento accidit.

AL I T E R idem problema hoc modo absolvetur. Positis q sicut, quæ prius, fiat angulo DBA , æqualis angulus EAB . Et si quidem recta AE , cadit infra AC , erit segmentum semicirculo minus, ut in prima figura. Si verò AE , cadit supra AC , erit segmentum semicirculo maius, ut in tertia figura: semper autem E , centrum erit, ut demonstratum est. Si denique recta efficiens cum AB , in A , angulum æqualem angulo ABD , coincideret cum AC , erit segmentum semicirculum, punctumq; D , centrum erit, ut in secunda figura.



B R E V I S tamen invenietur centrum segmenti propositi cumlibet, siue illud semicirculo minus sit, siue æquale siue maius, hac ratione. Afficiantur in peripheria segmenti tria puncta utcumque A , B , & C , quæ duabus rectis coniungantur AB , BC , quæ bisariam secantur in D , & E . Deinde ex DA , & E , educantur ad AB , BC , perpendiculares DF , EF . Quoniam igitur per corollarium propof. i. huius libri, tam DF , quam EF , incidunt per centrum circuli, cuius ABC , est segmentum, coibunt amba in centro, ut in F . Quare centrum est inveniunt. Quod est propositum.



AL I T E R, ut Mechanici solent. Accipiantur in circumferentia duo puncta utcumque A , & B , & quibus describantur duo arcus ad idem intervallum quodcumque, qui se interset in E , & F . Postea ex aliis duobus punctis C , & D , alij arcus se secantes in G , & H , describantur ad quodvis intervallum, siue idem quod prius, siue diversum. Si igitur agantur rectæ EF , GH , transibunt ambe per centrum. Quare punctum I , in quo coeunt, erit centrum. Quod autem lineæ EF , GH , per centrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ AE , AF , BE , BF , quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circularum. Quoniam igitur latera AE , EF , trianguli AEF , æqualia sunt lateribus BE , EF , trianguli BEF ; & bases quoque AF , BF , æquales: ^d E -

d 8. primi.

e 4. primi.

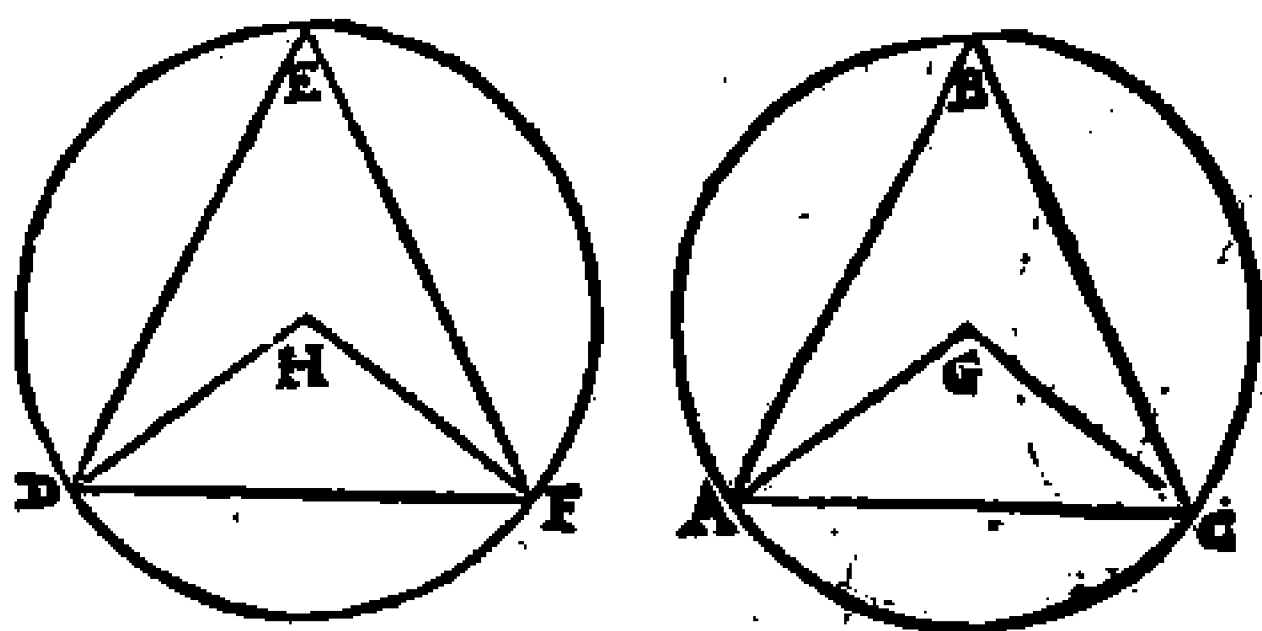
runt anguli AEF , BEF , æquales. Rursus ducta recta AB , quæ secet EF , in K : quoniam latera AF , EK , trianguli AEK , æqualia sunt lateribus BE , EK , trianguli BEK ; & anguli AEK , BEK , ostensi quoq; æquales, ^e erunt & bases AK , BK , & anguli AKE , BKE , æquales, ideoq; recti. Quare cum EF , dividat rectam AB , in circulo bisariam, & ad angulos rectos, transibit per centrum, ex corollario propof. i. huius libri. Eadem ratione ostendetur GH , transire per centrum. Debent autem quatuor puncta A , B , C , D , in tali situ accipi, ut rectæ EF , GH , non in directum sibi occurrant, sed ut se mutuo secant. Quod si quando contingat, rectas EF , GH , in directum esse constitutas, dividenda erit recta intra circumferentiam comprehensa, bisariam. Punctum enim divisionis erit centrum circuli: propterea quod tunc recta illa est diameter circuli, quandoquidem per centrum transit, ex corollario propof. i. huius libri.

25.

T H E O R. 23. P R O P O S. 26.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis insistant, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

e 16. tertij. In circulis æqualibus ABC , DEF , quorum centra G , H , constituti sint primùm ad centra anguli æquales AGC , DHF . Dico peripherias AC , DF , quibus insistant, siue super quas ascenderunt, esse æquales. Sumantur enim in peripheriis ABC , DEF , duo puncta B , E , ad quæ rectæ ducantur AB , CB , DE , FE , connectanturque rectæ AG , DF . Quoniam igitur ^a anguli B , & E , dimidij sunt æqualium angulorum G , & H ; erunt & ipsi æquales inter se. Quare ex definitione, segmenta ABC , DEF , similia erunt. Et quia latera AG , GC , trianguli AGC , æqualia sunt lateribus DH , HF ,



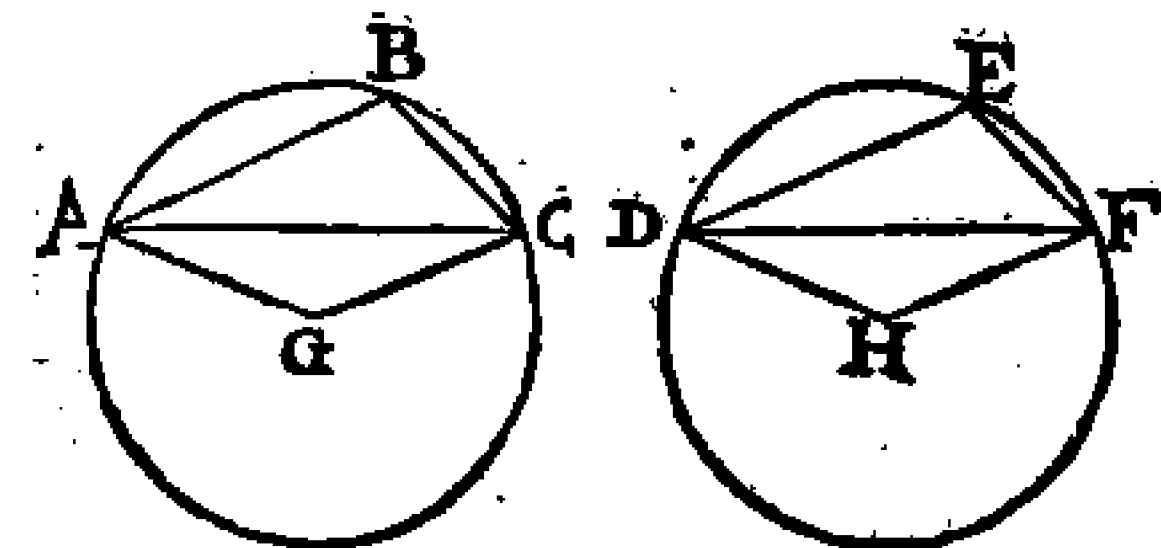
DH, HF, trianguli DHF, propter circulo-
rum æqualitatem; & anguli, quos con-
tinent G, H, æquales, ex hypothesi: ^{a 4. primi.} erunt
bases AC, DF, æquales. Cum igitur se-
gmenta similia ABC, DEF, sint super li-
neas æquales AC, DF, ^{b 24. terij.} erunt ipsa inter
se æqualia. Quare si à circulis æqualibus
demantur, remanebunt & segmenta AC,
DF, inter se æqualia, atque adeò periphe-
riæ AC, DF, æquales erunt. Quod est
propositum.

SINT deinde ad peripherias constituti duò anguli æquales B, & E: Dico rursus, peripherias
AC, DF, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, ut priùs, segmenta ABC, DEF, si-
milia. Cum igitur sint super æquales lineas AC, DF: (cum enim anguli G, H, æquales sint, ^{c 20. terij.} quod
sint dupli angulorum æqualium B, & E: erunt, ut priùs, rectæ AC, DF, æquales) ^{d 24. terij.} erunt ipsa inter
se æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta AC, DF, æqualia:
In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

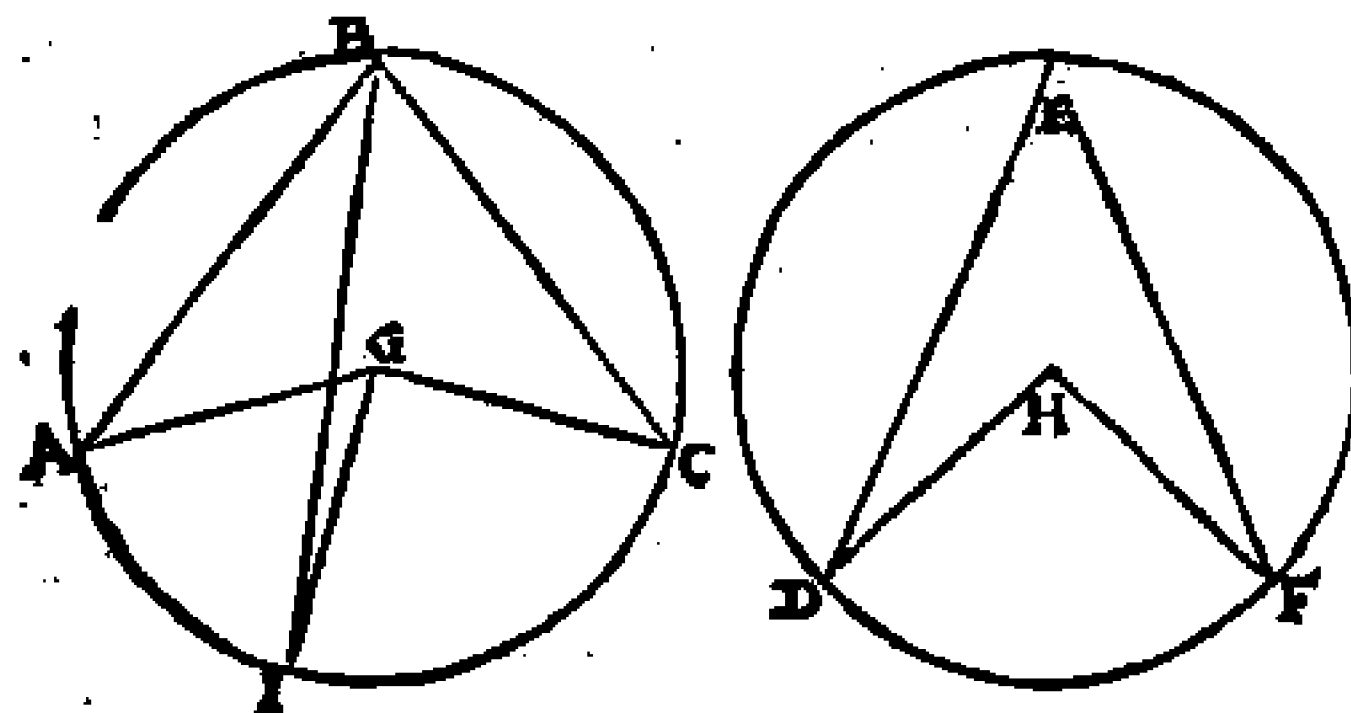
SCHOLIUM.

H. A. E. c. secunda pars brevius ita demonstrabitur. Quoniam anguli G, H, dupli sunt angulorum æqua-
lium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare, ut ostensum est priùs, peripheria AC, DF, super quas ascende-
runt, æquales erunt.

I. A. M. verò, si quando contingat, rectas AG, CG; DH, FH, non constituere angulos in centrīs supra bases
AC, DF, sed supra bases ABC, DEF, ut subiecta hæc figura monstrant, ita secunda pars huius propositionis
demonstranda est. Quoniam spatia ad centra G, H, insi-
stentia arcibus AC, DF, æqualia inter se sunt, cū ex scho-
lio propof. 20. huius lib. dupla sint angulorum B, E, ad cir-
cunferentias; erunt etiam anguli AGC, DHF, reliqui
quatuor rectorum, quibus tam spatium circa G, quàm
spatium circa H, æquale est, ex corollar. 2. propositionis
15. libri 1. inter se æquales. Quare, ut priùs, ostendemus,
bases AC, DF, triangulorum AGC, DHF, æquales ef-
se, idèque segmenta similia ABC, DEF, ob æqualitatem angulorum B, E, super æquales bases AC, DF, esse
æqualia, &c.



H. I. N. c. etiam sit, spatia æqualia in centrīs, insistere arcibus æqualibus. Nam si spatia in centrīs G, H, in-
sistentia arcibus maioribus AC, DF, æqualia sunt; erunt quoque, ut ostendimus, anguli AGC, DHF, æqua-
les. Igitur, ut in prima parte propositionis demonstratum est, erunt & arcus AC, DF, maiores, & minores
ABC, DEF, inter se æquales.



Q. U. O. N. si dicti anguli fuerint inæquales,
maior insister maiori peripheria, quàm minor.
In circulis enim æqualibus ABC, DEF, sit an-
gulus AGC, ad centrum maior angulo DHF,
ad centrum: Item angulus ABC, ad circunse-
rentiam, maior angulo DEF, ad circunse-
rentiam. Dico peripheriam AC, maiorem esse pe-
ripheriam DF. Si enim fiat angulus CGI, angu-
lo DHF, & angulus CBI, angulo DEF, æ-
qualis; erunt, ut ostensum est, peripheria CI,
DF, æquales; ac propterea AC, maior, quàm DF.

PORRO propositio hac, & tres proximè sequentes intelligendæ etiam sunt in eodem circulo. Hoc est, In
eodem circulo æquales anguli æqualibus peripheriis insistant, &c. ut ex demonstratione huius propositionis,
& sequentium trium liquidò constet. Eadem enim semper demonstratio, qua duobus, pluribúsve circulis æ-
commodatur, locum habet in vno eodemq; circulo.

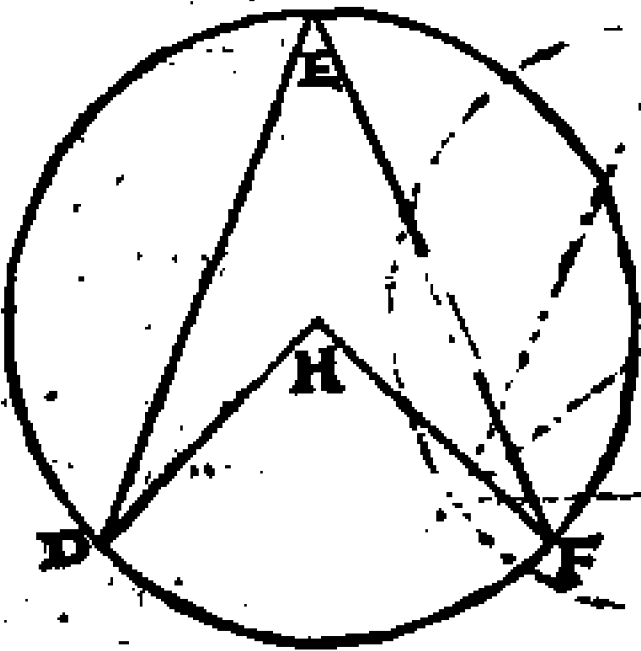
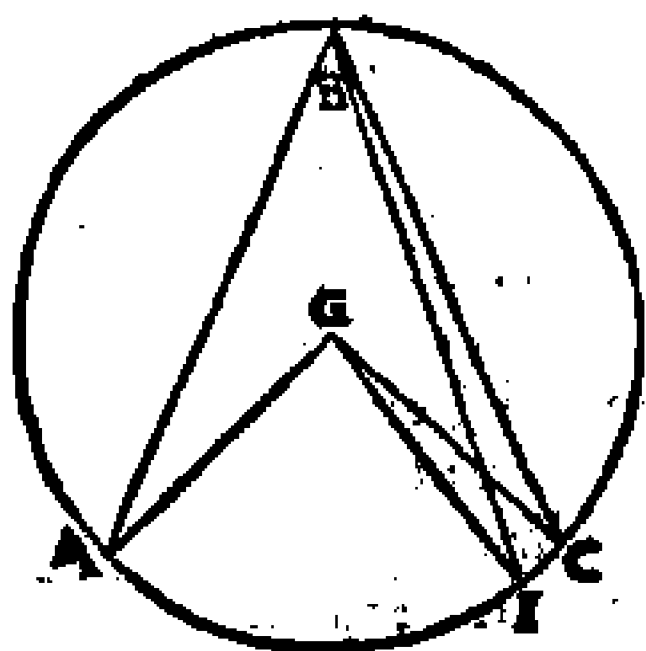
THEOR. 24. PROPOS. 27.

26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistant, sunt inter se
æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, insistant primùm anguli ad centra
AGC, & DHF, æqualibus peripheriis AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales esse. Si

a 16. tertij.



enim non sunt æquales, fit angulus G maior, fiatque angulus AGI, æqualis angulo DHF. Erunt igitur peripheriæ AI, DF, æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales.

INSISTANT deinde eisdem peripheriis æqualibus AC, DF, anguli B, &

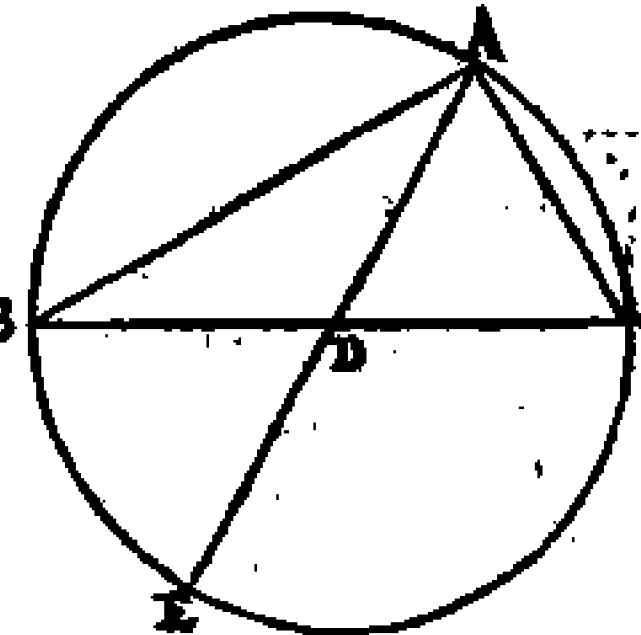
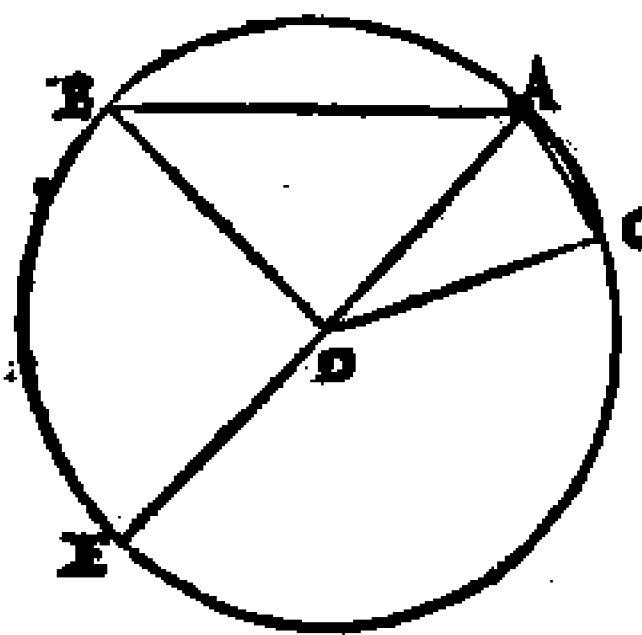
b 16. tertij.

E, ad peripherias, quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, ut ABC, maior est; fiat angulo E, æqualis angulus ABI, eruntque peripheriæ AI, DF, æquales. Quare, ut prius, erunt peripheriæ AI, AC, æquales, pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistent, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I V M.

H. A 2 c secunda pars ita quoque demonstrabitur, quando rectæ AG, CG; DH, FH, in centrâ angulos constituunt supra bases AC, DF. Quoniam anguli ABC, & E, dimidijs sunt angulorum AGC, & H, quos iam ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales.

Eodem modo, spatia in centrâ G, H, insistentia arcibus ABC, DEF, æqualibus, æqualia erunt. Nam ablati arcibus æqualibus ABC, DEF, ex circulis æqualibus, reliqui fient æquales arcus AIC, DF, ideoque, ut ostendimus, anguli AGC, DHF, æquales erunt: quibus ablati ex spatijs circa centra G, H, quæ æqualia sunt, cum quodlibet sit quatuor rectis æquale, ex coroll. 2. propof. 15. lib. 1. reliqua erunt & spatia in centrâ G, H, insistentia arcibus ABC, DEF, æqualia.



Si verò peripheria fuerint inæquales, insister maior, maior angulus, siue ad centrâ, siue ad circumferentiam, quam minori. In figura enim scholij præcedentis sit peripheria AC, maior, quam peripheria DF. Dico angulum AGC, maiorem esse angulo DHF; & angulum ABC, maiorem angulo DEF. Si enim fiat peripheria CI, æqualis peripheriæ DF, ducanturque rectæ IG, IB, erunt, ut ostensum est, tam anguli ad centrâ CGI,

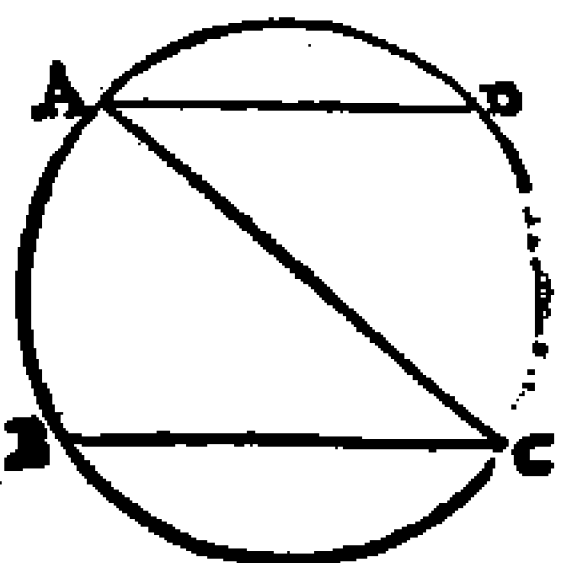
DHF, quam anguli ad circumferentiam CBI, DEF, æquales. Quare & angulus AGC, angulo DHF, & angulus ABC, angulo DEF, erit maior. Quod etiam de spatijs ad centra G, H, insistentibus arcibus ABC, DEF, intelligendum est. Nam eodem modo demonstrabimus spatium ad H, arcui DEF, insistent, maius esse spatio ad G, quod arcui ABC, insistit, si arcus DEF, maior ponatur arcui ABC.

b 27. tertij.

c 27. primi.

d 29. primi.

e 16. tertij.



Ex hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipi. In circulo enim ABCD, rectæ AD, BC, intercipient arcus æquales AB, DC. Dico AD, BC, esse parallelas. Ducta namque recta AC, cum arcus AB, DC, ponantur æquales, erunt anguli ACB, CAD, ipsis insistentes, æquales; qui cum sint alterni, erunt AD, BC, parallelæ.

SINT iam AD, BC, parallelæ. Dico arcus interceptos AB, DC, esse æquales. Cum enim sint parallelæ AD, BC, ducta recta AC, erunt anguli alterni ACB, CAD, æquales; At proinde arcus AB, DC, quibus insistent, æquales erunt.

VISUM est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

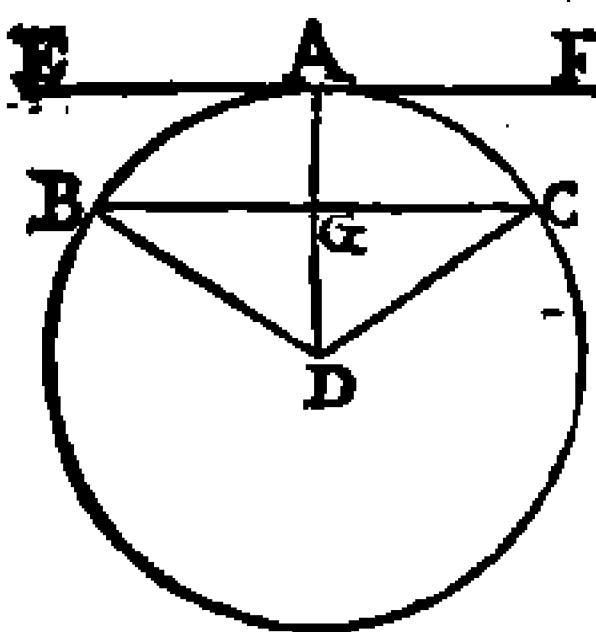
LINÆA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallelæ est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.

f 27. tertij.

g 4. primi.

h 18. tertij.

i 28. primi.

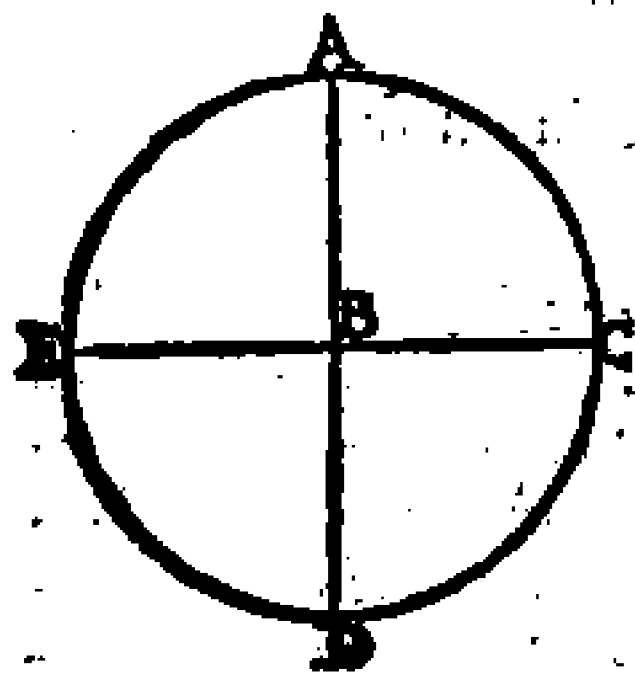


IN circulo ABC, cuius centrum D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ BAC, lineæ EF, tangens circulum. Dico EF, parallelæ esse rectæ BC, arcui BAC, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta DA, secante rectam BC, in G, connexaque rectis DB, DC, erunt anguli ADB, ADC, circumferentijs æqualibus AB, AC, insistentes, æquales. Sunt autem & latera BD, DG, trianguli BDG, lateribus CD, DG, trianguli CDG, æqualia, utrumque utriusque, igitur & anguli ad G, æquales sunt super bases GB, GC, ac propterea recti. Igitur & AGB, AGC, illi deinceps recti sunt: Sunt autem & anguli GAE, GAF, recti, quod DA, perpendicularis sit ad EF. Ergo EF, BC, paral-

EX

Ex demonstratis in hac propositione, & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonstravimus.

ANGVLVS rectus in centro insistit quadranti; acutus verò arcui quadrante minori; & obtusus arcui quadrante maiori. Et contrà, angulus in centro quadranti insistens, rectus est; insistens verò arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtusus.



RECTVS angulus ABC, insistat arcui AC, in centro B, circuli ACDE. Dico arcum AC, quadrante esse, &c. Produci enim rectis AB, CB, ad D, E, erunt quoq, anguli ABE, CBD, recti ABC, deinceps, recti, ex defn. 10. lib. 1. nec non & angulus DBE, rectus, * cum equalis sit recto angulo ABC, ad verticem: 215. primâ
Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, aequales sunt, utpote recti: ac pro-
pterea^b arcus AC, CD, DE, EA, quibus insistant, aequales erunt. Quilibet igitur
corum quadrans est. Et quoniam recta cum AB, in B, constituens angulum
acutum, cadit in arcum AC: recta verò cum eadem AB, in B, continens angu-
lum obtusum, cadit in arcum CD; liquido constat, angulum acutum insistere
arcui quadrante minori, obtusum verò maiori.

215. primâ

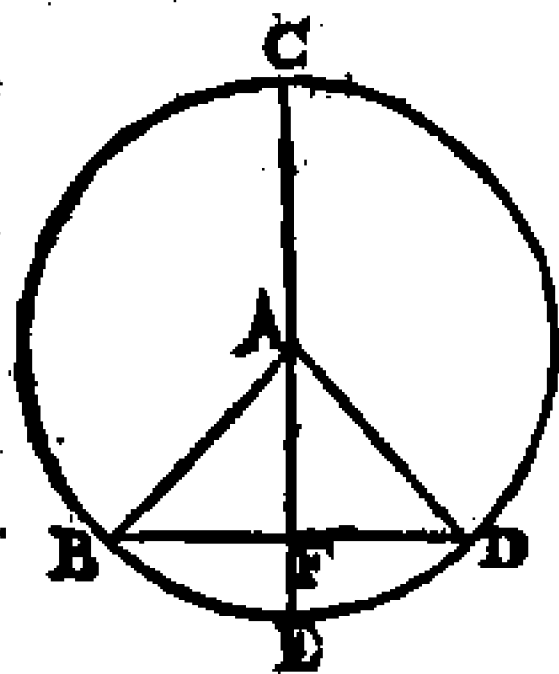
b 26. tertij

c 27. tertij

SEI D insistat iam quadranti AC, angulus ABC, in centro B. Dico angulum ABC, esse rectum, &c. Pro-
ductis enim rursus rectis AB, CB, ad D, E; quoniam tam CAE, quam ACD, & AED, semicirculus est, estq,
AC, quadrans; erit tam AE, quam CD, quadrans quoque, ac proinde & DE, in semicirculo AED, quadrans
erit. Sunt ergo quatuor arcus AC, CD, DE, EA, aequales, * ac proinde anguli ad centrum B, illis insistentes,
aequales erunt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor recti aequales, erit eorum quilibet rectus. Et quia re-
cta cum AB, auferens minorem arcum quadrante AC, facit in centro B, cum AB, minorem angulum recto
angulo ABC; recta verò cum eadem AB, auferens maiorem arcum quadrante AC, constituit in centro B,
angulum recto angulo ABC, maiorem; perspicuum est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse a-
cutum; maiori verò, obtusum. Quod est propositum.

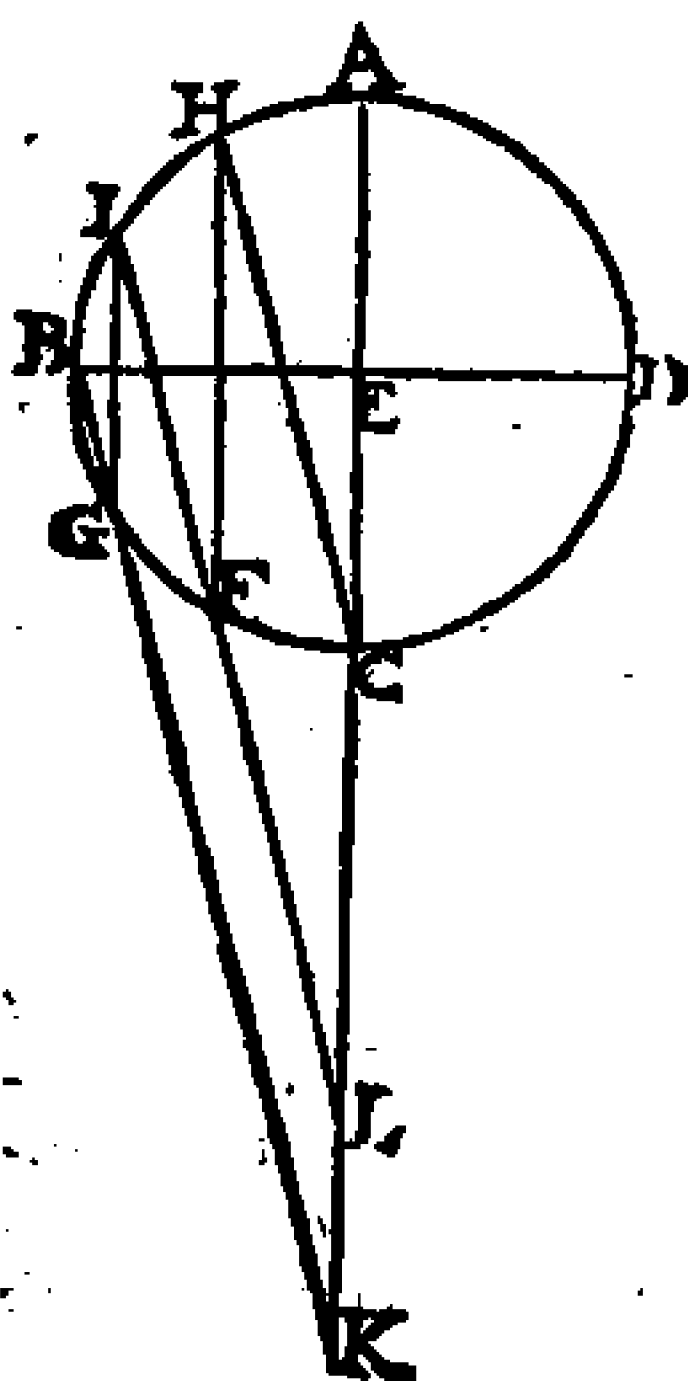
PAR: ratione & hoc theorema ex demonstratis elicitur, quod in sinibus etiam demonstravimus.

RECTA linea è centro circuli ducta, secansque aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui hæc recta subtenditur bifariam. Et contrà, si secet arcum bi-
fariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam.



EX centro A, circuli BCDE, recta egrediens AE, secet rectam BD, bifariam
in F. Dico & arcum BED, in E, sectam esse bifariam, &c. Ductis enim rectis
AB, AD; quoniam duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, equalia sunt,
vtrumque vtrique, basisq, BF, basi DF, equalis ponitur; ^d erit angulus BAF, d 8. primâ
angulo DAF, equalis. Igitur * arcus BE, arcui DE, equalis erit. Sectus ergo est
arcus BD, in E, bifariam. c 26. tertij.

SECTA iam recta AE, arcum BD, in E, bifariam. Dico rectam quoq, BD,
in F, bifariam esse sectam. Ductis enim rursus rectis AB, AD; quoniam arcus
BE, DE, ponuntur aequales; ^f erunt & anguli BAF, DAF, in centro aequales. f 27. tertij
Itaque quia duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, equalia sunt, vtrum-
que vtrique, angulosq, continent aequales, ut ostendimus; & erunt quoque bases BF, DF, aequales: ac proinde
recta BD, in F, secta est bifariam. Quod erat ostendendum. g 4. primâ.



NEQVE verò omittenda hoc loco videtur eximia quadam proprietas cir-
culi, quam Ioan. Bapt. Benedictus ex Cardano lib. 16. cap. 1. de Subtilitate de-
sumptam demonstrat. Videlicet.

SI in circulo ductis duabus diametris sese ad angulos rectos
secantibus, altera earum producat, eique ex vna parte quot-
quot parallelæ agantur, diuidentes vtrumque Quadrantem in
partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diame-
tri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur con-
ueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum
concursum, & concavam peripheriam circuli, omnibus paralle-
lis vnâ cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis.

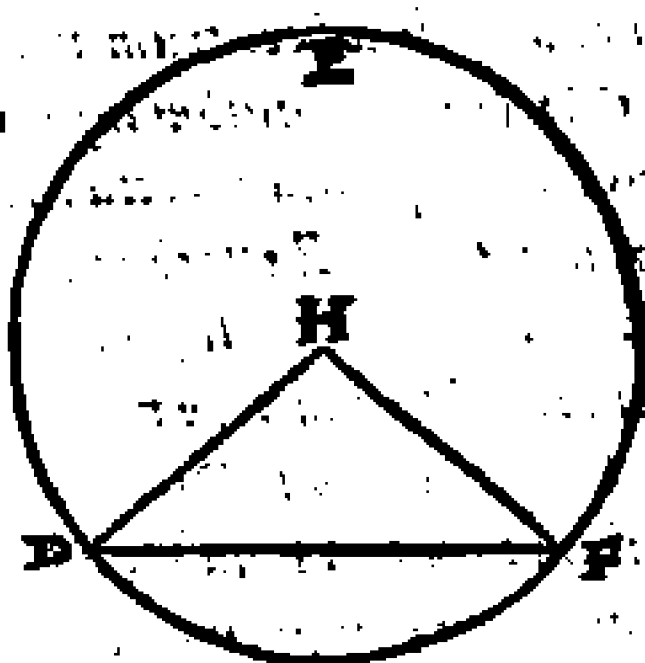
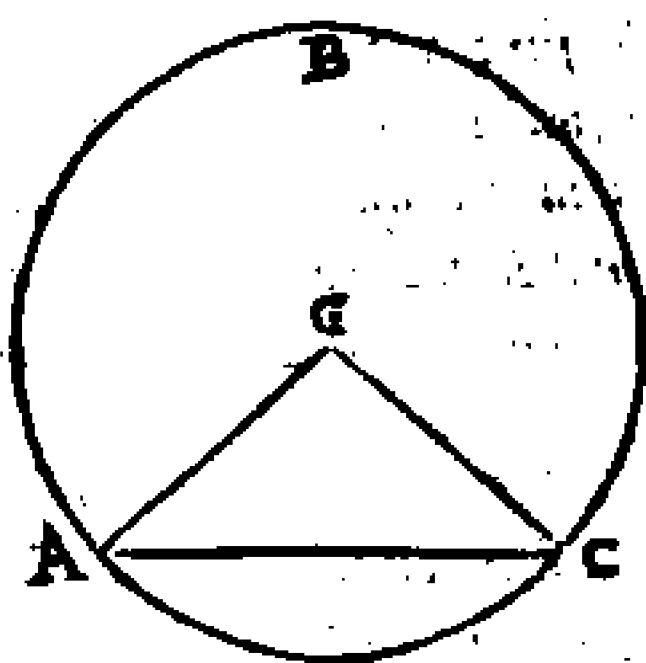
In circulo ABCD, secant se ad rectos angulos diametri AC, BD, & AC,
producat, versus C, quantumlibet. Diuiso autem Quadrante BC, in quot-
vis partes æquales CF, FG, GB, & Quadrante BA, in totidem, iungantur re-
ctæ FH, GI, quæ ex scholio huius propositionis ipsi AC, parallela erunt, cum
arcus æquales intercipiunt. Ex B, per G, denique extendatur recta BG, occur-
rens AC, producta in K. Dico rectam AK, æqualem esse omnibus parallelis AC,
HF, IG, simul sumptis. Ductis enim rectis HC, IF, & productis, donec cum

a 27. tertij. ΔK , continiant; ^a quoniam anguli CHF , HFL , arcibus aequalibus CF , HL , insistentes, sunt æquales; ^b erunt
b 27. primi. rectæ HC , IL , parallela. Est autem $\angle FHL$, ipsi CL , parallela. Parallelogrammum ergo est $CHFL$; ^c ac proinde
c 34. primi. de recta CL , recta FH , æqualis erit. Eadem ratione erit RL , ipsi GL , æqualis: & sic deinceps, si sint plures. Ad-
dita ergo communi AC , fiet tota AK , omnibus AC , HF , IG , simul sumptis æqualis. Quod est propositum.

27.

THEOR. 25. PROPOS. 28.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt: maio-
rem quidem maiori, minorem autem minori:

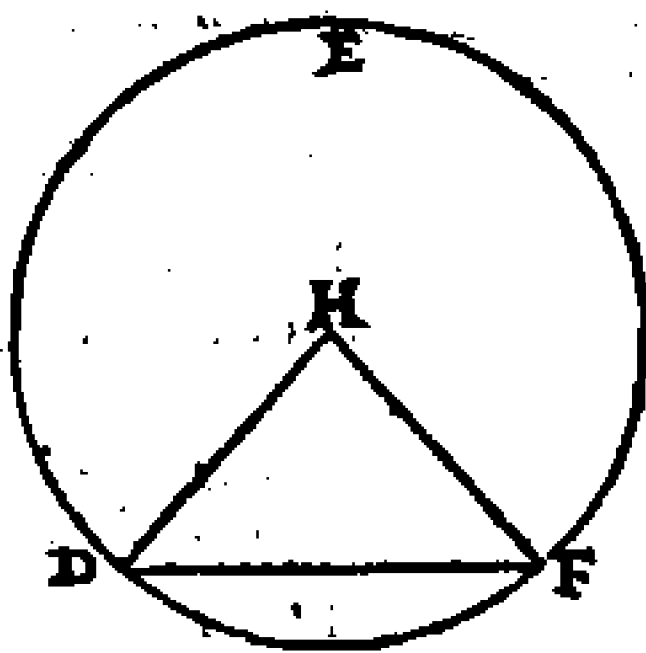
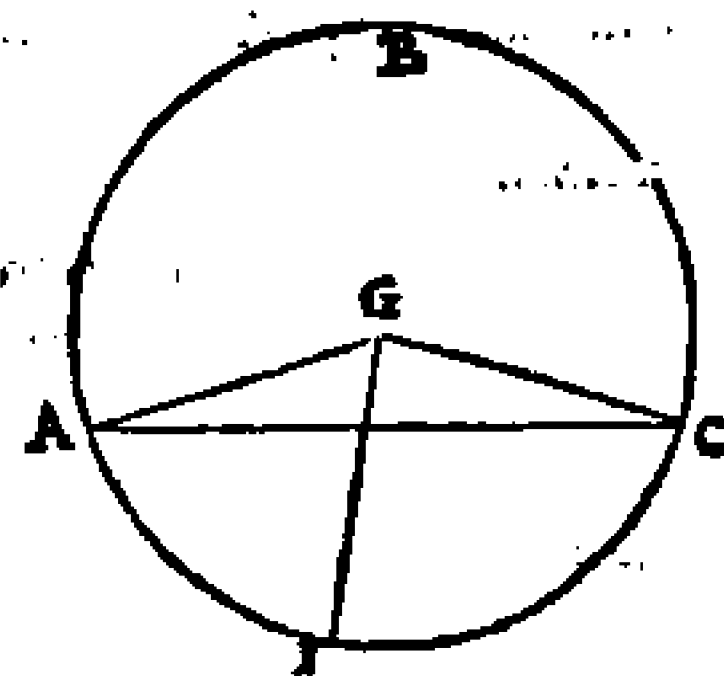


a 8. primi.

b 26. tertij.

quibus insistant, ^b æquales erunt; quæ ablatae ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC ,
 DEF . In æqualibus ergo circulis, æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.



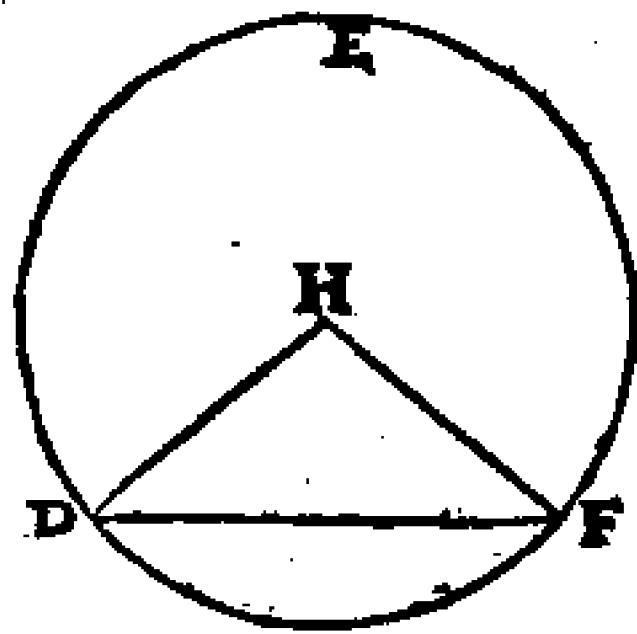
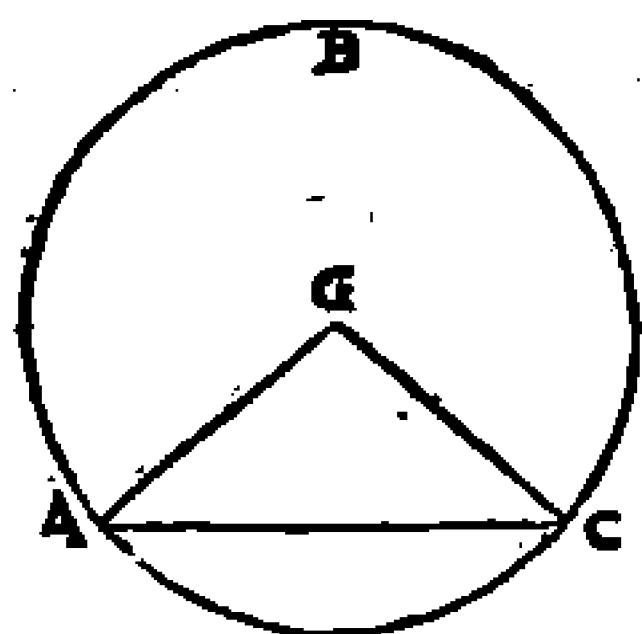
Q U O D si fuerint lineæ inæquales in
circulis æqualibus, auferet maior lineæ ma-
iorem peripheriam, quam minor, si loqua-
mur de segmentis circuli minoribus semi-
circulo. Nam si de segmentis circuli maio-
ribus sermo habeatur, maior lineæ auferet
minorem peripheriam, quam minor. In cir-
culis enim æqualibus ABC , DEF , quorum
centra G , & H , sit recta AC , maior, q̃ DF .
Dico peripheriam AC , semicirculo mino-

rem, maiorem esse peripheria DF . At peripheriam ABC , minorem peripheria DEF . Ductis enim rectis AG ,
 GC , DH , HF , erunt latera AG , GC , trianguli AGC , æqualia lateribus DH , HF , trianguli DHF . Ponitur
a 25. primi. autem basis AC , maior base DF . Igitur ^a angulus AGC , maior erit angulo DHF . Fiat angulus CGI , an-
b 26. tertij. gulo DHF , æqualis; eritq̃, propterea ^b peripheria CI , peripheria DF , æqualis; Ac proinde peripheria AIC ,
maior, quam peripheria DF . Ideoq̃, reliqua ABC , minor, quam reliqua DEF .

28.

THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.



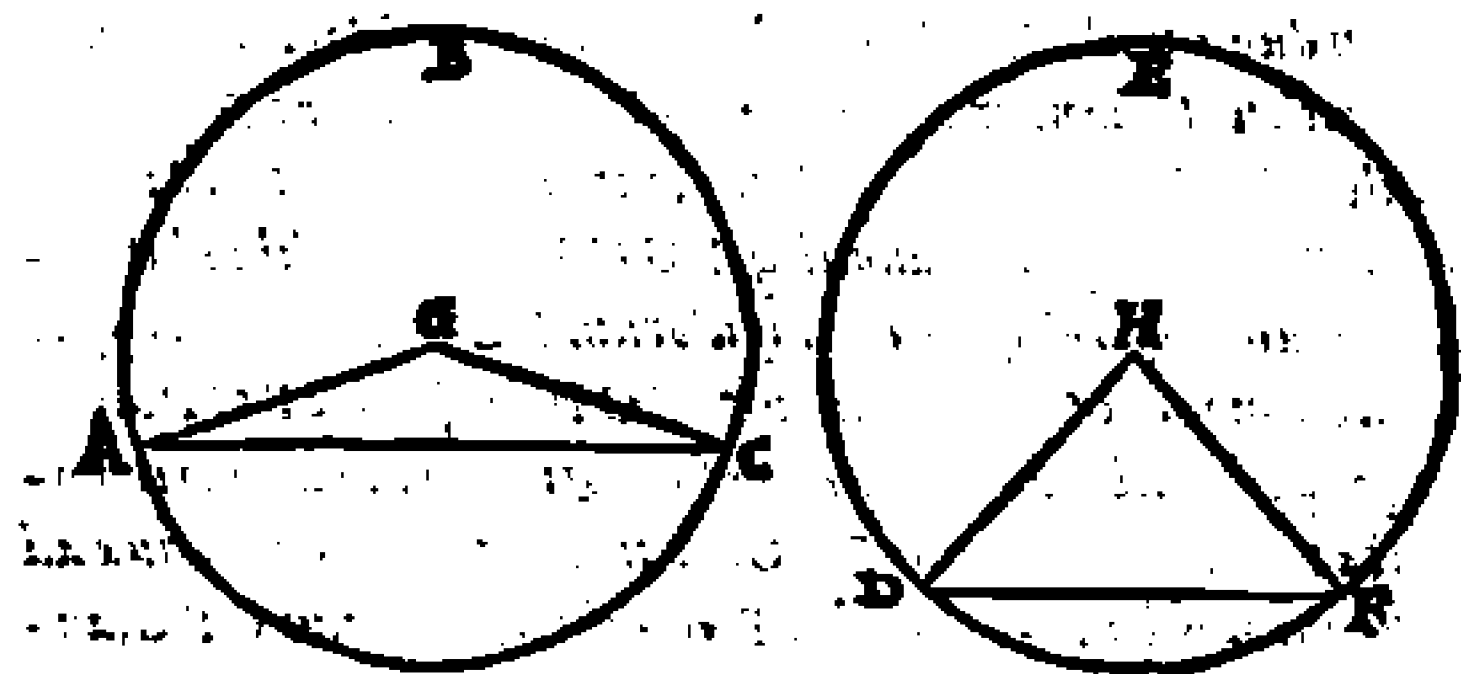
a 27. tertij.

b 4. primi.

erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I V M.

S I autem fuerint peripheria inæquales, subtendet maiorem maior lineæ, quam minorem, si de segmentis
semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maio-
rem minor lineæ, quam minorem. In circulis enim æqualibus ABC , DEF , quorum centra G , & H , sint peri-
pheria semicirculo minores AC , DF , sitq̃, AC , maior, q̃ DF ; Ac proinde ABC , minor, quam DEF . Dico li-
neam AC , maiorem esse, quam DF . Ductis enim rectis AG , GC , DH , HF ; erit angulus AGC , maior angulo
 DHF , ex scholio propositionis 27. huius libri. Cum igitur latera AG , GC , trianguli AGC , æqualia sint late-
ribus



ribus DH, HE, trianguli DHE, ^a erit basis ^a 4 primi AC, maior base DE, &c.

SVNT autem proximè antecessores quatuor propositiones 26. 27. 28. & 29. intel ligenda etiam in eodem circulo, ut in scholio propo. 26. monuimus, quemadmodum constat ex demonstrationibus adductis. Eadem enim locum habent in vno eodemque circulo.

IT. A. Q. V. eadem quatuor propositiones magis universales fiunt, si ita proponantur.

I. In æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripheriis insistant, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

II. In æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripheriis insistant, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

III. In æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt: maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IV. In æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ subtendunt.

SEDE & sequentes propositiones demonstrare, non fuerit inutile.

I.

Circuli, ex quibus æquales rectæ lineæ auferuntur similes circumferentias, æquales sunt.

EX circulis ABC, DEF, rectæ lineæ æquales AC, DF, abscindantur similes circumferentias ABC, DEF. Dico circulos ipsos æquales esse. Nam si segmenta ABC, DEF, similia sunt, erunt & reliqua segmenta AC, DF, similia, ut ad propo. 22. demonstrauimus. Rursus quia super rectas æquales AC, DF, constituta sunt similia segmenta ABC, DEF, ^b ipsa inter se æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erunt segmenta AC, DF, ^b 24. tertij, quæ similia sunt demonstrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, si rectæ æquales AC, DF, dicantur auferre similes circumferentias AC, DF, erunt ex his, quæ ad propo. 22. demonstrauimus, & segmenta ABC, DEF, similia. ^c Tam ergo illa, quàm hæc inter se æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter se. Quod est propositum. ^c 24. tertij.

II.

Ex circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt.

IN eadem figura ponantur rectæ AC, DF, æquales, at circuli ABC, DEF, inæquales. Dico circumferentias ABC, DEF, dissimiles esse. Si enim similes essent, circuli ipsi, ut proximè demonstrauimus, essent æquales. Quod pugnat cum hypothese. Dissimiles ergo sunt circumferentia ABC, DEF. Eadem ratione, circumferentia AC, DF, erunt dissimiles. Quod erat ostendendum.

III.

Ex circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt.

IN eadem figura ponantur circuli inæquales, at circumferentia ABC, DEF, similes. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Si enim dicantur, esse æquales, erunt, ex primo theoremate, circuli æquales, quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ AC, DF, inæquales. Eodem modo, si similes dicantur circumferentia AC, DF, demonstrabitur, rectas lineas AC, DF, inæquales esse.

III.

Rectæ lineæ, quæ ex quibuscunque circulis circumferentias similes inæquales auferunt, inæquales sunt.

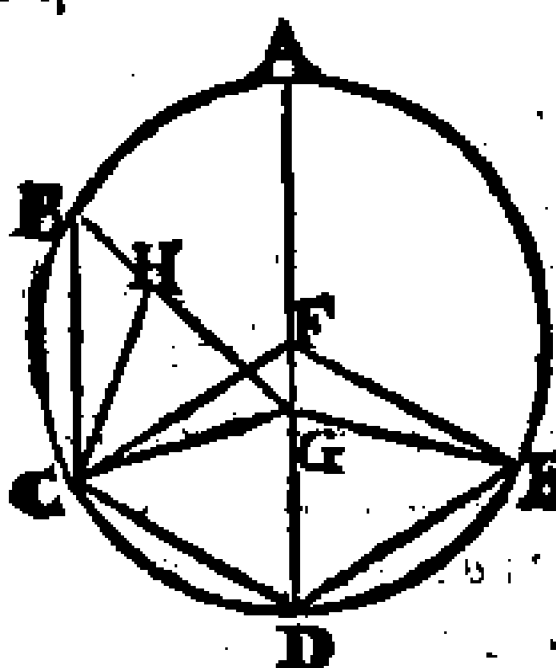
IN eadem figura ponantur circumferentia ABC, DEF, similes & inæquales. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Aut enim circuli æquales sunt, vel inæquales. Sint primum æquales. Si ergo rectæ AC, DF, dicantur æquales, ^d erunt circumferentia ABC, DEF, ablata æquales, quod est contra hypothese. Non ergo æquales sunt rectæ AC, DF. Sint deinde circuli inæquales. Igitur rectæ AC, DF, auferentes circumferentias ABC, DEF, similes, inæquales sunt, ut in tertio theoremate demonstratum est. Non aliter ostendemus, rectas AC, DF, inæquales esse, si circumferentia AC, DF, ponantur similes & inæquales. ^d 28. tertij.

V.

SI in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ nõ in eadem partes cadentes efficiantur ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindant æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent rectæ illæ ad diametrum angulos æquales, abscindentq; æquales arcus. Si denique arcus æquales abscindant, erunt rectæ illæ æquales, constituentq; ad diametrum angulos æquales.

IN circulo ABCE, cuius centrum F, sumatur in diametro AD, punctum G, præter centrū, constituanturq; primum duo anguli æquales CGD, EGD. Dico tam rectas GC, GE, quàm arcus CD, ED, æquales esse.

a 13. primi.

b 26. tertij. gulo EFG; ^b ac proinde arcus CD, ED, æquales erunt. Constat ergo propositum.

DE INDE sint lineæ GC, GE, æquales. Dico & angulos CGD, EGD, æquales esse, & arcus CD, ED. Si enim lineæ GC, GE, sunt æquales, erunt duo latera GC, GE, æqualia duobus lateribus GE, GF. Est autem & basis FC basi FE, æqualis. Igitur anguli FGC, FGE, æquales erunt, ac proinde & ex duobus rectis reliquis CGD, EGD, erunt æquales. Rursus quia duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia sunt, basesq; æquales ponuntur GC, GE; ^d erunt & anguli CFD, EFD, æquales, ^e atq; idcirco & arcus CD, ED, æquales erunt. Quod est propositum.

TER TIO sint arcus CD, ED, æquales. Dico & lineas GC, GE, & angulos CGD, EGD, esse æquales. Si enim arcus CD, ED, æquales sunt, ^f erunt & anguli CFD, EFD, æquales. Quare cum duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, sint æqualia, angulosq; æquales contineant; ^g erunt & bases GC, GE, æquales, & anguli FGC, FGE; ac proinde ex duobus rectis reliquis CGD, EGD. Quæ omnia demonstranda erant.

VI:

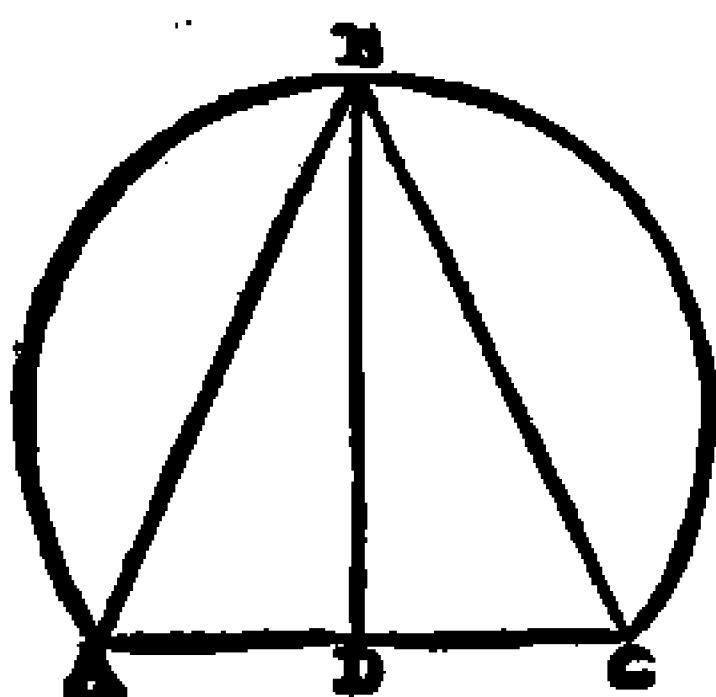
Si in diametro circuli præter centrum sumatur punctum quodpiam, in quo ad easdem partes duo anguli æquales constituantur, insistent hi anguli æquales arcibus inæqualibus, maiorque erit ille, qui à minori portione diametri remotior est.

IN eadem figura proxima sint duo anguli æquales CGD, CGB. Dico arcum BC, arcu CD, maiorem esse. Ductus enim rectus BC, CD, ^h quoniam recta GB, maior est, quam recta GD, abscindatur GH, ipsi GD, æqualis, iungaturq; recta CH. Quia igitur duo latera GH, GC, duobus lateribus GD, GC, æqualia sunt, angulosq; continent æquales; ⁱ erunt & bases CH, CD, æquales, & angulus GHC, angulo GDC, æqualis. Est autem GDC, in Isoscele FCD, acutus, ex 3. coroll. propof. 17. lib. 1. Igitur & GHC, acutus erit; ac proinde ex duobus rectis reliquis CHB, obtusus erit. Cum ergo ^k duo anguli CHB, CBH, sint duobus rectis minores, ^l erit CBH, acutus. Quare ^l latus BC, latere CH, maius erit. Est autem CH, recta ostensa ipsi CD, æqualis. Igitur recta BC, maior quoque erit, quam CD; ac propterea ex scholio propof. 28. huius lib. arcus BC, arcu CD, maior erit. Quod erat ostendendum.

29.

PROBL. 4. PROPOS. 30.

DATAM peripheriam bifariam secare.

a 4. primi.
b 28. tertij.

SIT peripheria ABC, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens AC, qua diuisa bifariam in D, erigatur perpendicularis DB, quæ peripheriam ABC, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erunt latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia lateribus CD, DB, trianguli CDB. Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur & bases AB, CB, æquales erunt. Ac propterea ^b peripheriæ AB, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secimus. Quod erat faciendum.

P R A X I S.

NON differt praxis diuidendi datam peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propof. 10. lib. 1. tradidimus. Si namque quicumque arcus proponatur, ut ABC, intelligenda semper est recta linea eum subtendens AC, utriusq; ducta non sit; atq; ex punctis A, & C, describendi arcus eodem intervallo se mutuo intersectantes supra & infra puncta A, & C, &c. non secus, ac si dicta recta AC, secanda esset bifariam. Recta enim diuidens rectam AC, bifariam, secabit quoque arcum datum bifariam.

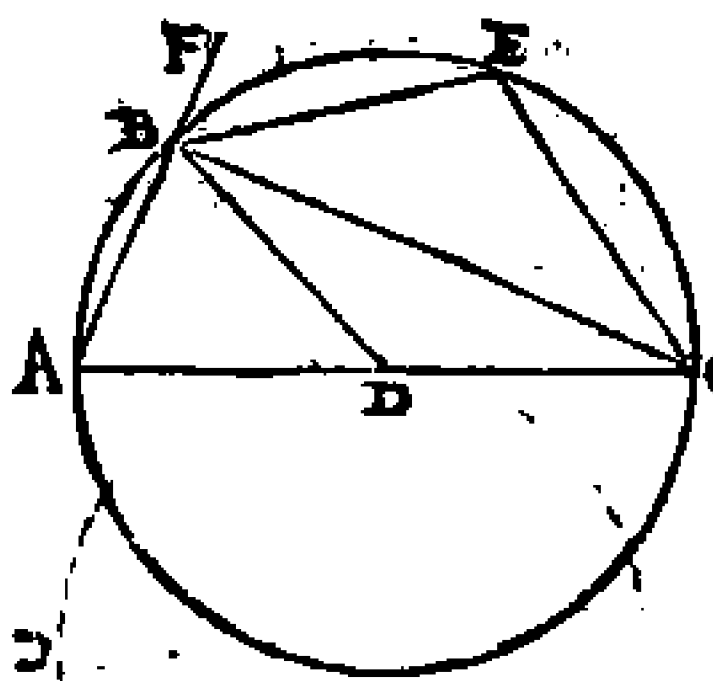
30.

THEOR. 27. PROPOS. 31.

IN circulo angulus, qui in semicirculo rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui verò in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidē maior est: minoris autē segmenti angulus, minor est recto.

CIRCULI enim ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, constituaturque in semicirculo an-

gulus



gulus ABC, existetq; angulus BAC, in maiori segmento CAB. Constituatur quoque in CEB, minori segmento angulus BEC. Dico angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero BAC, in maiore segmento, minorem recto: & angulum BEC, in minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem. At angulum minoris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur enī recta BD, ad centrum, & extendatur AB, in F. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadem ratione erit angulus DCB, angulo DCB, æqualis, ideoque totus

a 5. primi.

b 32. primi.

angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA, æqualis erit. ^b Est autem & angulus FBG, externus eidem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli ABC, FBG: ac propterea uterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC, quod est primum.

QUONIAM vero in triangulo ABC, duo anguli ABC, & BAC, sunt duobus rectis minores: Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor: quod est secundum.

c 17. primi.

RURSUS quia in quadrilatero ABEC, intra circulum descripto, duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales: Et angulus BAC, ostensus est recto minor: Erit BEC, angulus in segmento minore, recto maior: quod est tertium.

d 22. terci.

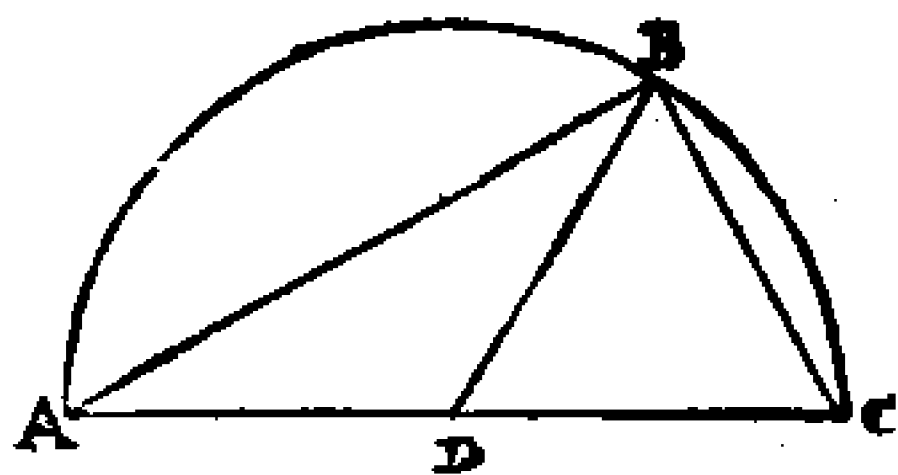
SATIS autem est demonstrasse, unum angulum in semicirculo, nimirum ABC, rectum esse: & in maiori segmento, qualis est BAC, recto minorem: at denique in segmento minori, cuiusmodi est BEC, maiorem recto. Cum enim omnes anguli in eodem segmento sint inter se æquales, perspicuum est, si unus angulus in semicirculo rectus sit, omnes in eodem semicirculo esse rectos: Et si in maiore segmento unus sit recto minor, omnes in eodem segmento esse recto minores: Et si denique in minore segmento unus sit maior recto, omnes in eodem segmento maiores esse recto. Hoc idcirco dixerim: quia Euclides non probat absolute, quemcunque angulum in segmento maiore BAC, esse recto minorem, ut constat, si alius angulus in eo segmento constitueretur: cum non contineretur à diametro, quemadmodum angulus BAC. Quare quicumque alius ostendetur esse etiam recto minor, quia æqualis est angulo BAC, in eodem segmento maiore, qui recto minor est ostensus ab Euclide.

a 21. terci.

AMPLIUS cum angulus rectus ABC, pars sit anguli segmenti maioris BAC, qui comprehenditur recta BC, & peripheria BAC, erit angulus segmenti maioris, recto maior: quod est quartum.

POSTREMO, cum angulus segmenti minoris, comprehensus recta BC, & peripheria BEC, pars sit quoque anguli recti FBG: Erit angulus segmenti minoris, recto minor: quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est, &c. Quod erat demonstrandum.

Alia demonstratio huius propositionis.



In semicirculo, cuius diameter AC, & centrum D, sit angulus ABC, quem dico esse rectum. Ducta enim recta BD, erunt anguli DBA, DAB, æquales, quod rectæ DA, DB, æquales sint. Cum igitur angulus BDC, externus æqualis sit duobus angulis internis DBA, DAB, in triangulo ABD, Erit angulus BDC, duplus anguli DBA. Eodem modo erit angulus ADB, duplus anguli DCB: atque adeo duo anguli ad D, dupli erunt totius anguli ABC. Cum igitur anguli ad D, sint duobus rectis æquales: erit angulus ABC, eorum dimidium, rectus: quod est primum.

e 5. primi.

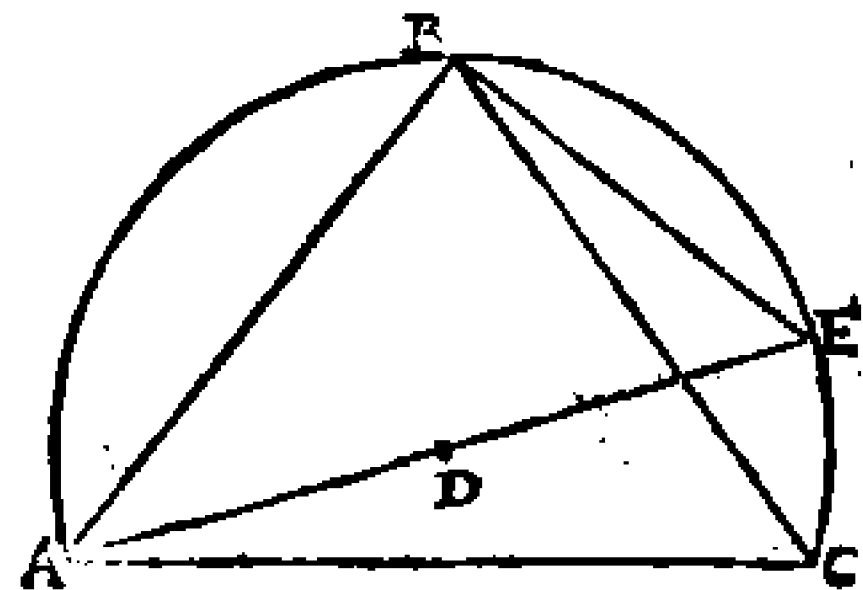
f 32. primi.

g 13. primi.

VEL sic. Quoniam angulus DAB, angulo DBA, & angulus DCB, angulo DCB, æqualis est: erunt duo anguli A, C, angulo ABC, æquales in triangulo ABC: ac proinde angulus ABC, dimidium erit trium angulorum A, C, & ABC, eiusdem trianguli. Quocirca cum tres anguli in triangulo ABC, sint æquales duobus rectis: erit ABC, dimidium duorum rectorum, atq; idcirco rectus.

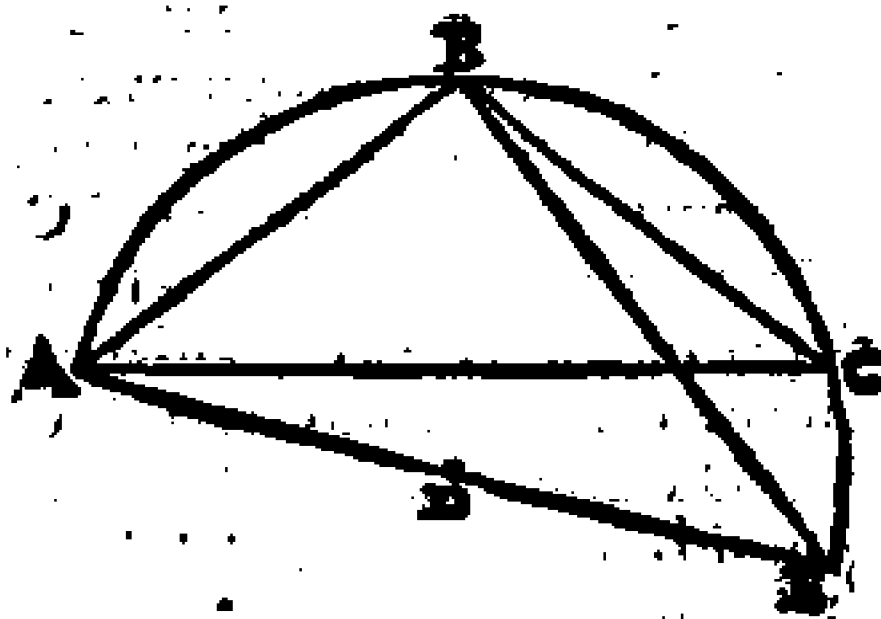
h 5. primi.

i 32. primi.



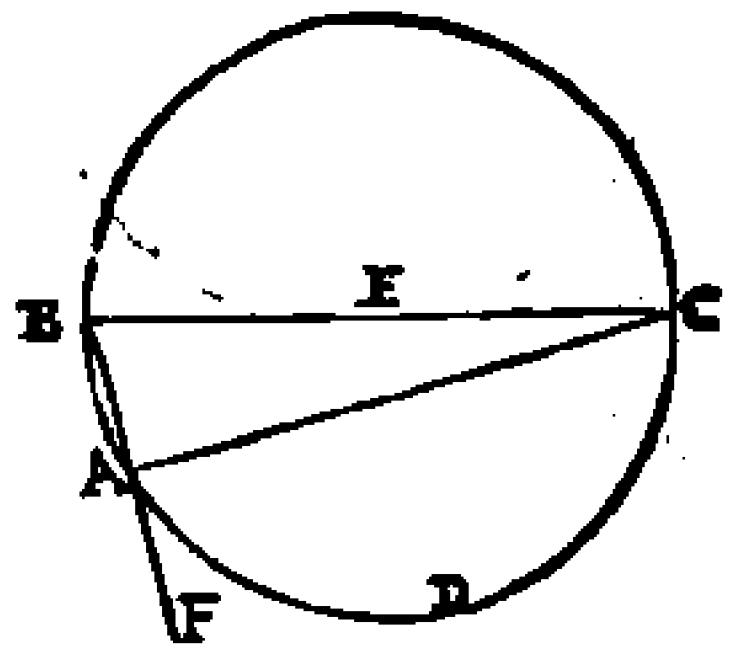
Si rursus in segmento maiori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro AE, & coniuncta recta BE, erit angulus ABE, in semicirculo rectus, ut demonstratum est. Quare angulus ABC, pars recti, recto minor erit: quod est secundum. Atque hæc demonstratio in omnem angulum in minori segmento quadrat: quod de superiori demonstratione dici non poterat, ut ibidem monuimus.

Si rursus in segmento minore, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto maiorem. Ducta enim dia-



metro AE, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniu-
cta recta BE, erit angulus ABE, in semicirculo rectus, ut
demonstratum est; qui cum sit pars anguli ABC, erit angu-
lus ABC, recto maior: quod est tertium.

Iam verò pponatur se-
gmentum maius ABC, & se-
gmentum minus ADC, quo-
rum centrum E. Dico angu-
lum CAB, segmenti maio-
ris, qui videlicet constitui-



tur à recta CA, & peripheriâ ABC, esse recto maiorem. At angu-
lum CAD, segmenti minoris, qui fit à recta eadem CA, & periphe-
ria ADC, recto minore. Ducta enim diametro CB, & recta BAE,
cadet eius segmentum BA, duo puncta B, A, coniungens, intra
circulum, reliqua verò pars AF, extra circulum; eritque angulus
BAC, in semicirculo rectus, atque adeò ei deinceps FAC, rectus quoque. Cum igitur angulus re-
ctilineus rectus BAC, sit pars anguli CAB, segmenti maioris, qui nimirum sub recta CA, & peri-
pheriâ ABC, continetur; & angulus CAD, segmenti minoris, contentus videlicet sub recta CA,
& peripheriâ ADC, pars quoque anguli recti FAC, constat vtrumque.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, quòd angulus trianguli, qui reliquis duobus aequalis existit, rectus
est: eò quòd illi conliguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit aequalis. Quod
quidem constat ex priore demonstratione. Vel eò quòd dimidium sit trium angulorum trian-
guli, qui duobus rectis æquivalent. Quod ex posteriore demonstratione manifestum est.

EX CAMPANO.

Ex hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus
ad propof. 16. huius libri, quarum una est.

TRANSITUR à maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

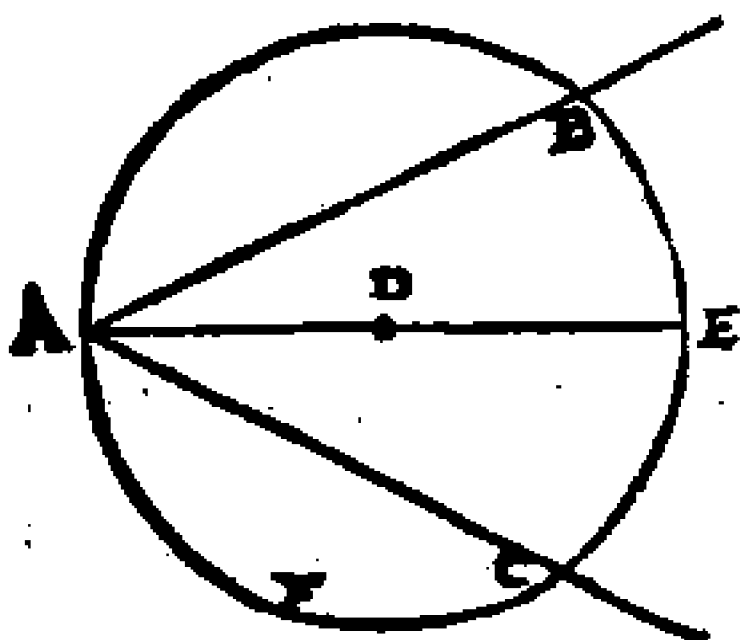
ALTERA verò est eiusmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

b 31. tertij.

c 16. tertij.

d 31. tertij.



IN circulo enim ABC, cuius centrum D, & diameter AE, ducatur
recta AB. Erit angulus ABE, segmenti maioris, recto maior. Quare
si AB, moveatur versus AE, circa A, punctum fixum, faciet semper cum
peripheriâ angulum recto maiorem, donec ad diametrum AE, perue-
nerit, ubi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quòd si ulte-
rius moveatur ad AC, faciet à fortiori angulum ACF, segmenti mi-
noris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui
recto maior est, ad angulum semicirculi, vel etiam segmenti minoris,
quorum uterque recto minor est; non tamen per angulum recto equa-
lem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspi-
cuum est, vitiosas esse predictas consequentias.

SCHOLIUM.

MANIFESTUM quoque est conuersum huius theoremati: hoc est.

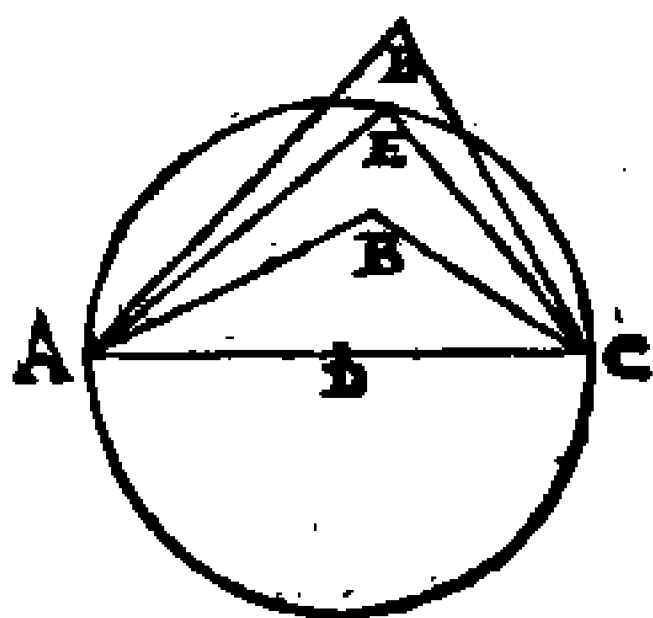
SEGMENTUM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo
verò angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmen-
tum minus. Et segmentum, cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius; cuius ve-
rò angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.

NAM angulo existente recto, si segmentum non sit semicirculus, erit vel maius, & sic angulus erit acutus,
vel minus, & sic angulus in eo obtusus erit: quorum vtrumque pugnat cum hypothese. Rursus angulo existen-
te acuto, si segmentum non sit semicirculo maius, erit vel semicirculus, & sic angulus in eo erit rectus; vel mi-
nus, & sic angulus in eo erit obtusus: quorum vtrumque cum hypothese etiam pugnat. Denique angulo exi-
stente obtuso, si segmentum non sit minus semicirculo, erit vel semicirculus, atque ita angulus in eo rectus erit;
vel maius, atque ita angulus in eo acutus erit: quòd similiter hypothese contrarium est. Præterea quando se-
gmenti angulus est recto maior, si segmentum non sit maius semicirculo, erit vel semicirculus, vel semicircu-
lo minus, & sic eius angulus recto erit minor: quòd non ponitur. At quando angulus segmenti est recto minor,
si segmentum non sit semicirculus, aut semicirculo minus, erit maius, atque ita eius angulus recto quoque maior
erit. quòd hypothese aduersatur.

QFIN

Q^UIN & hoc theorema verum est; scilicet.

Si angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto divisionis circa illam rectam, vel latus, circulus describatur; transibit necessario circulus ille per angulum rectum.

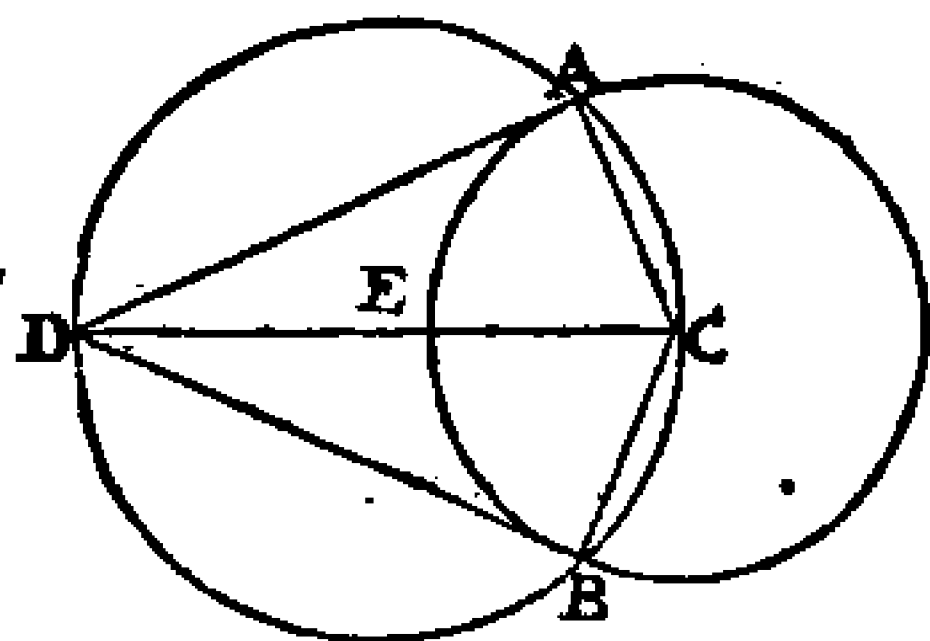


ANGLIO enim recto ABC , subtensa recta AC , vel in triangulo rectangulo ABC , latus AC , recto angulo B , oppositum bifariam secetur in D , puncto, ex quo ad intervallum DA , vel DC , circulus describatur AEC , quem dico transire per B . Si enim transeat circa B , vel ultra; ductis rectis AE, CE , ita ut rectas AB, AC , non secant, sed vel intra eas cadant, vel extra; erit ^a angulus AEC , rectus quoque. Quare anguli recti B , & E , aequales erunt, quod est absurdum: cum angulus E , sit necessarius, ^b vel maior, vel minor angulo B . Transigitur circulus per punctum B : quod est propositum.

231. tertij.

b 1. primi.

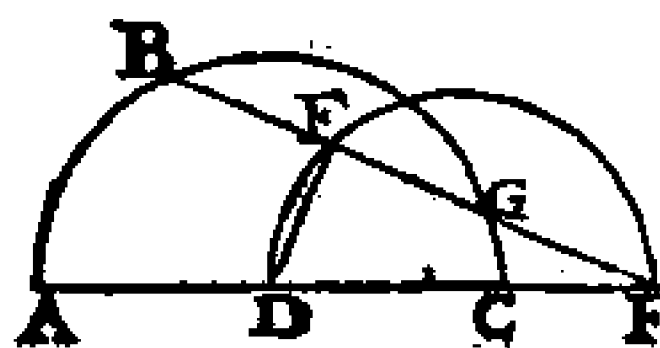
Ex iis, quae in priore parte huius propositionis demonstrata sunt, nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad utramque partem rectae ex eodem puncto per centrum circuli ductae, quae circulum tangant. Id quod ad propof. 12. huius libri polliciti sumus.



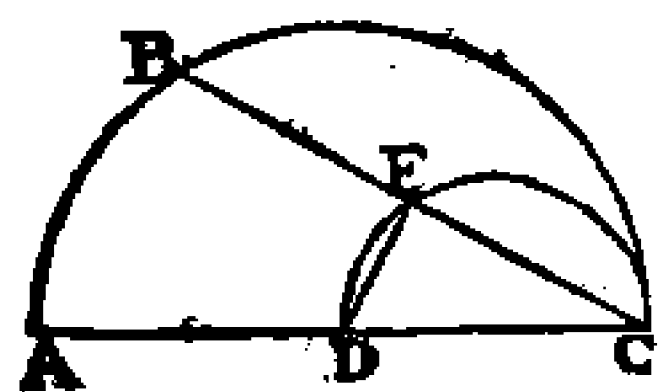
Si T enim circulus AB , cuius centrum C , & punctum D , extra ipsum. Ducta recta DC , ex dato puncto ad centrum, eaque divisa bifariam in E , describatur ex E , ad intervallum EC , vel ED , circulus $A'CB'D'$, secans datum circulum in punctis A, B , iunganturque rectae DA, DB . Dico utramque circulum tangere in A , & B . Ductis enim rectis AC, BC , ^c erit uterque angulus A , & B , in semicirculo rectus. Quare per coroll. propof. 16. huius libri, recta DA , circulum AB , tanget in A ; & recta DB , eundem tanget in B : quandoquidem tam illa perpendicularis est ad extremitatem semidiametri AC , quam hac ad extremitatem semidiametri CB .

c 31. tertij.

SE D & hoc theorema non iniucundum ex Pappo Alexandrino demonstrabimus hoc loco; nimirum.



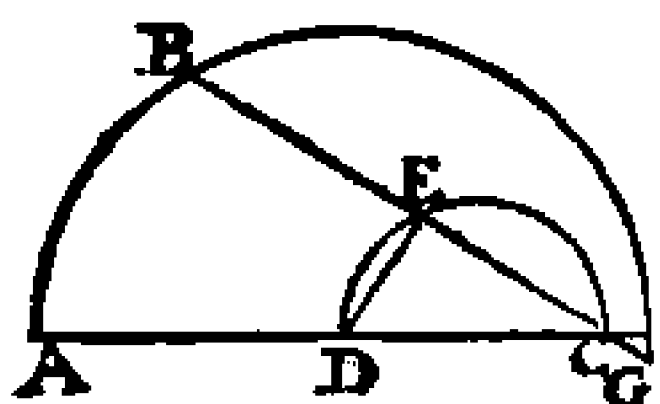
Si per centrum circuli alius circulus describatur, & per utriusque circuli centrum recta eiciatur, à puncto vero, ubi haec recta à posteriori circulo secatur, ducatur recta utcumque: secabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia posterioris bifariam.



Si T circulus ABC , per cuius centrum D , describatur alius circulus DEF , & per horum circulorum centra ducatur recta AF ; ac denique ex puncto F , ubi circulus DEF , rectam AF , intersectat, ducatur recta FB , secans circumferentiam in B, E, G . Dico BE, GE , esse aequales. Ducta enim recta DE , ^d erit angulus DEF , in semicirculo DEF , rectus. Igitur ^e recta DE , rectam BG , secat bifariam.

d 31. tertij.

e 3. tertij.



Q^UOD si posterior circulus transeat per punctum C , ut in secunda figura; erit ^f rursus angulus DEC , in semicirculo DEC , rectus; ac E propterea BC , in E , secabitur bifariam.

f 31. tertij.

g 3. tertij.

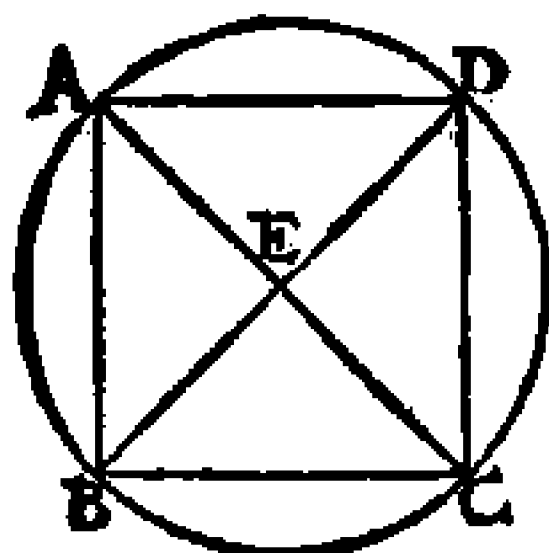
Si denique posterior circulus totus sit intra priorem, ut in tertia figura; erit iterum ^h angulus DEF , in semicirculo DEF , rectus. Quare ⁱ recta DE , rectam BG , bifariam secabit. Quod erat ostendendum.

h 31. tertij.

i 3. tertij.

FACILE etiam aliud hoc theorema demonstrabitur.

QUADRILATERVM in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & aequalia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.



In circulo $ABCD$, descriptum sit quadrilaterum $ABCD$, cuius duo opposita latera AD, BC , parallela sint, & aequalia. Dico ipsum esse parallelogrammum, & rectangulum. Cum enim rectae AD, BC , parallelae sint, & aequales, ^k erunt quoque AB, DC , parallela, & aequales. Parallelogrammum ergo est $ABCD$. Quia vero ^l & arcus AD , arcui BC , ob rectas aequales AD, BC , & arcus AB , arcui DC , ob aequales rectas AB, DC , equalis est; erit totus arcus EAD , toti arcui BCD , & totus arcus ADC , toti arcui ABC , equalis; ac proinde, ductis

k 33. primi.

l 28. tertij.

rectis BD, AC , semicirculi erunt BAD, BCD, ADC, ABC . Quare ^m anguli quadrilateri recti erunt. Quod est propositum.

m 31. tertij.

THEOR. 28. PROPOS. 32.

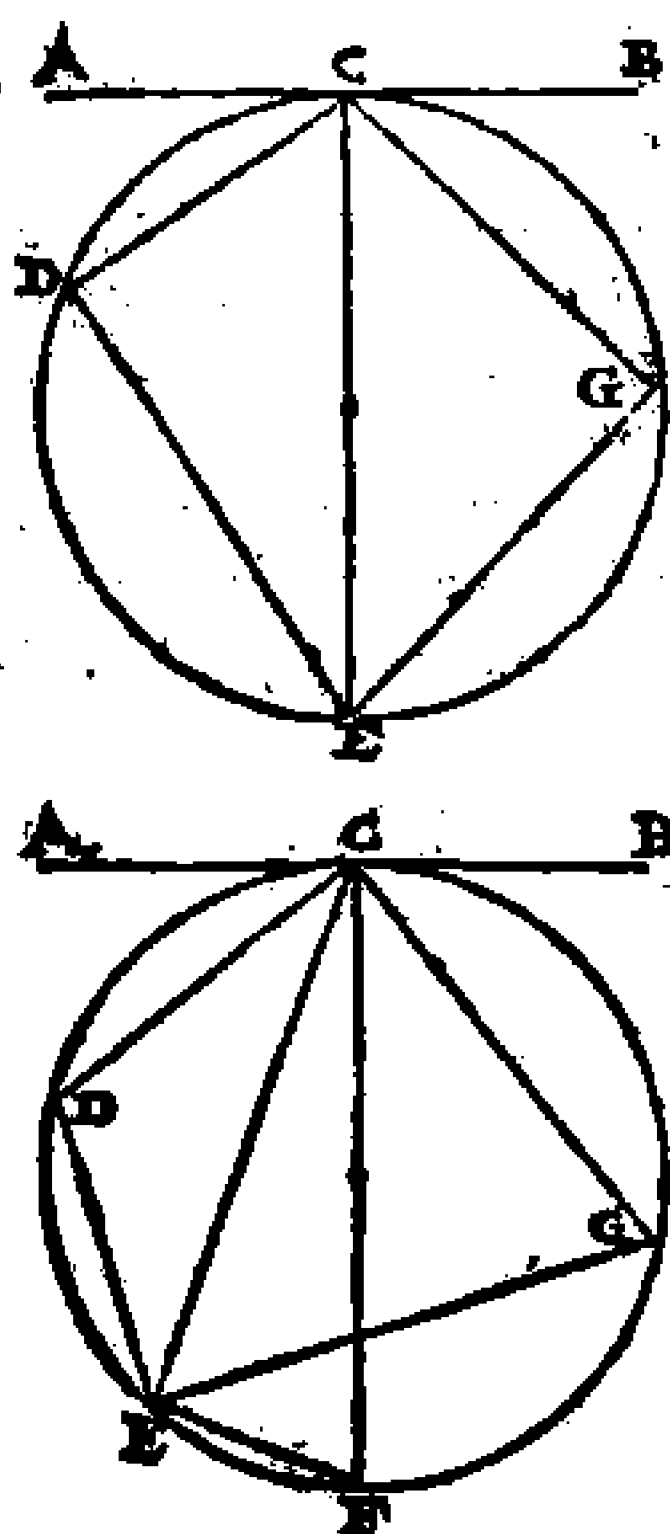
31.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à cōtactu autem producat̃ur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

a 18. tertij.
b 31. tertij.

c 18. tertij.
d 31. tertij.
e 32. primi.
f 21. tertij.

g 22. tertij.
h 13. primi.



TANGAT recta AB, circuli CDE, in C, puncto, à quo ducatur recta CE, dividens circuli in duo segmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem esse angulo CGE, in alterno segmento, & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoque segmento. Transeat enim primum, ut in priorē figura, recta CE, per centrum. Erit igitur uterque angulus ACE, BCE, rectus. Sunt autem & anguli CGE, CDE, in semicirculis recti. Igitur angulus ACE, angulo CGE, & angulus BCE, angulo CDE, æqualis est.

NON transeat iam CE, recta per centrum, ut in figura posteriore. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta EF: eritque CF, perpendicularis ad AB, & angulus CEF, rectus, ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, ut angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis. Est autem angulo CFE, æqualis quoque angulus CGE, cum uterque sit in segmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis erit. Quoniam verò in quadrilatero CDEG, duo anguli CDE, CGE, duobus sunt rectis æquales: Sunt autem & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis æquales: si auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à cōtactu autem, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

POTEST theorema hoc converti hoc modo.

Si linea recta ducta ad extremitatē lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem figura priorē transeat primum recta CE, per centrum, secans circulum CDE. & ducatur recta AB, per C, faciens angulum ACE, æqualem angulo CGE. Dico AB, tangere circulum. Quoniam angulus CGE, rectus est, erit & angulus ACE, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget. Iam verò CF, non transeat per centrum, construat̃urq. figura posterior, ut suprà. Quoniam igitur angulus ACE, æqualis ponitur angulo CGE, in alterno segmento maiore, & hic est æqualis angulo CFE, erit & angulus ACE, æqualis angulo CFE. Addito ergo communi angulo ECF, erit angulus ACF, æqualis duobus angulis EFC, ECF: Atqui anguli EFC, ECF, æquales sunt vni recto; quod & angulus CEF, rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo CEF, æquales sint duobus rectis. Angulus igitur ACF, rectus quoque erit; ideoq. per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget.

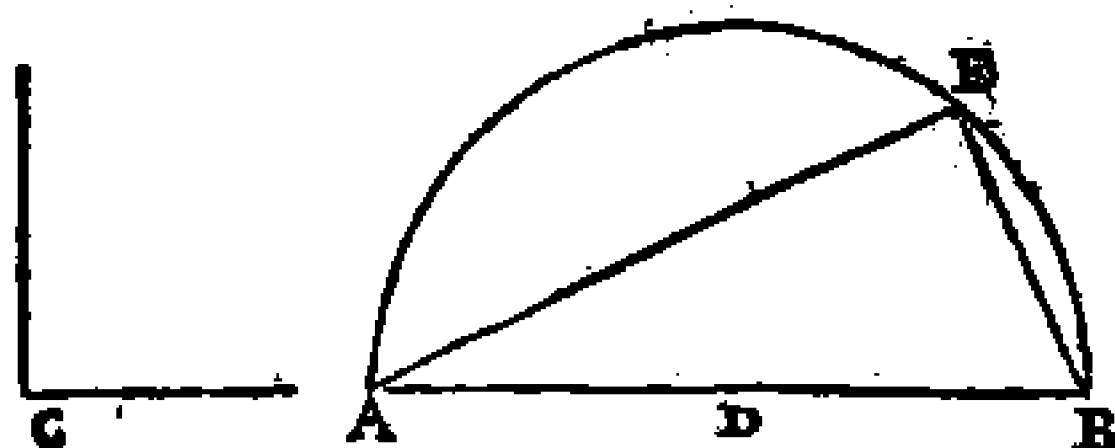
EO DEM modo, si angulus BCE, æqualis fuerit angulo CDE, in alterno segmento minori, ostendetur recta AB, tangere circulum. Cum enim anguli BCE, ACE, duobus sint rectis æquales: Item duo anguli CDE, CGE, duobus rectis æquales; si demantur æquales BCE, CDE, remanebunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, ut demonstratum iam est, recta AB, circulum tanget.

32.

PROBL. 5. PROPOS. 33.

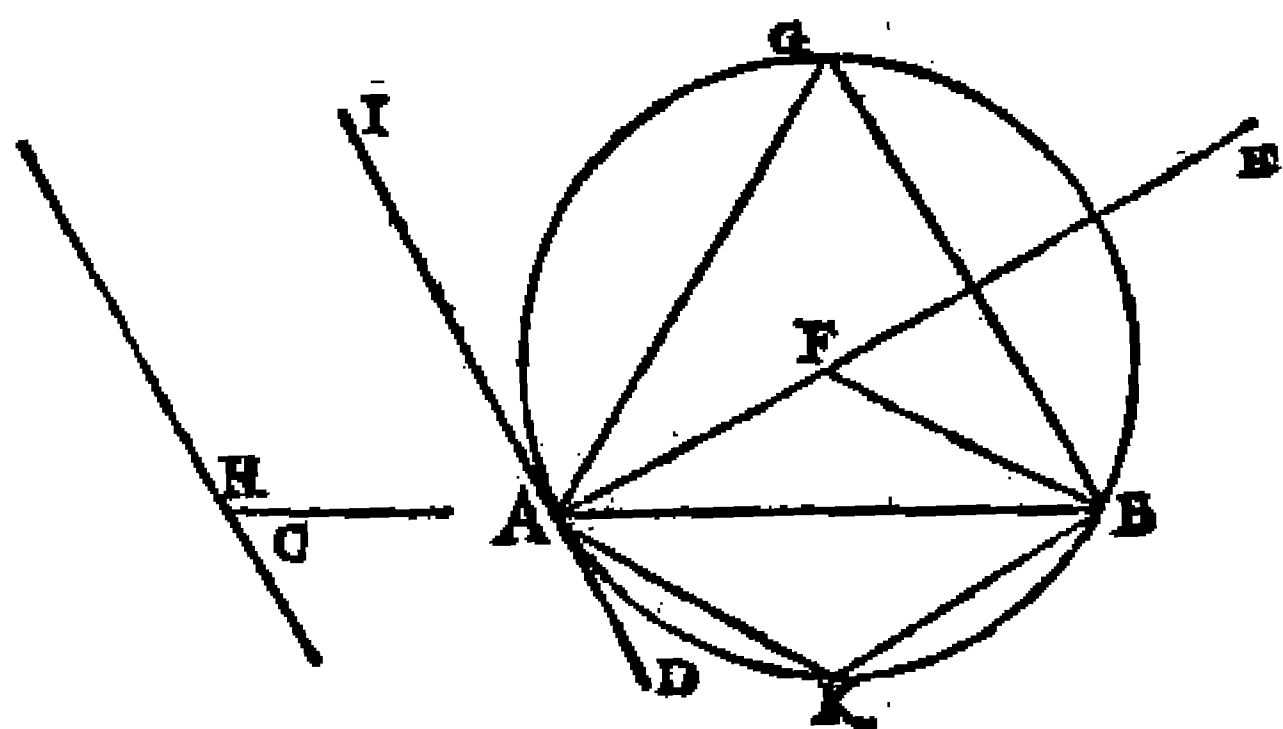
SUPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

a 31. tertij.



RECTA data sit AB, & datus angulus primū rectus C. Oportet igitur super AB, segmentum describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo recto dato C. Divisa AB, bifariam in D, describatur centro D, intervallo autem DA, vel DB, semicirculus AEB, factumque erit, quod proponitur. Nam angulus AEB, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto.

Si r deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad D A, perpendicularis AE, quæ cadet



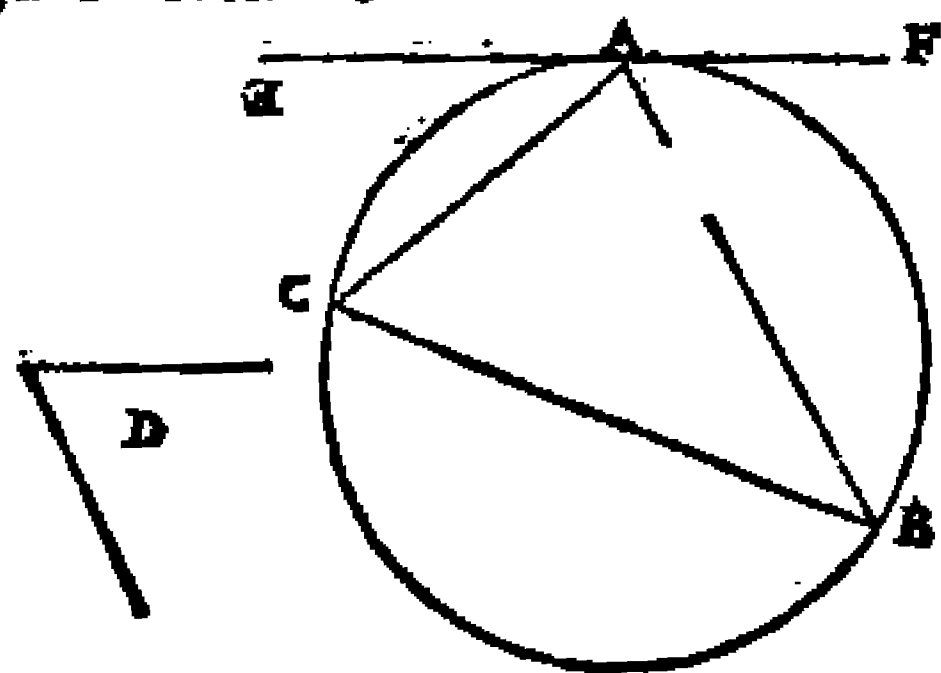
a G. primi:

632.1875.

с 32.12.1994г.

33.

33.

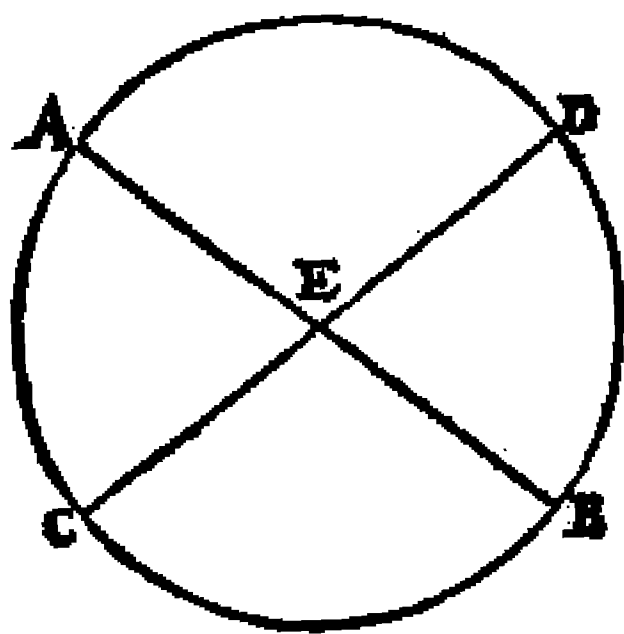


d 17.10.1984.

e 32. lertij:

344

344



3.10.15.

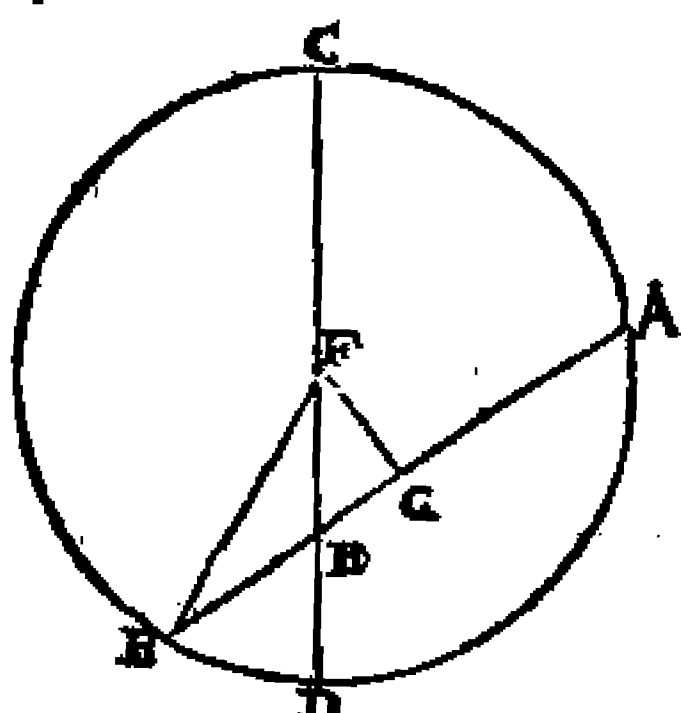
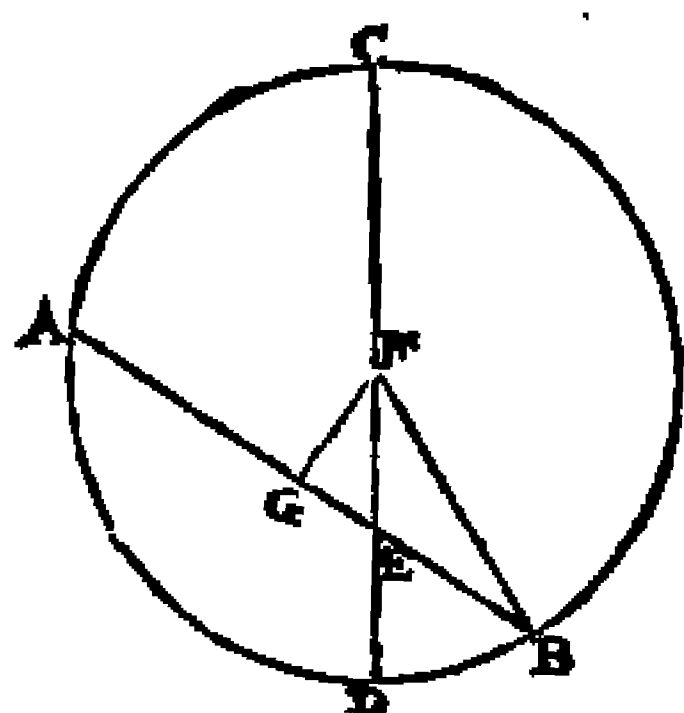
8 5. secundi.

b 47. prima

1. 3. 1977

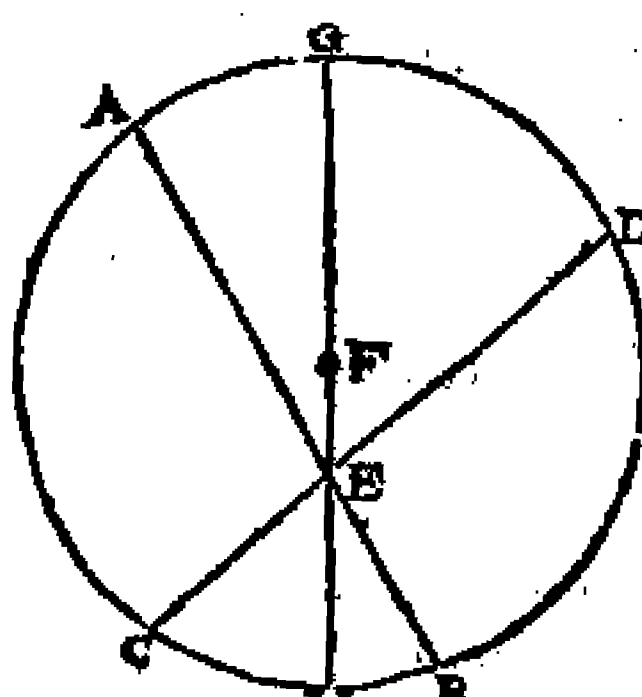
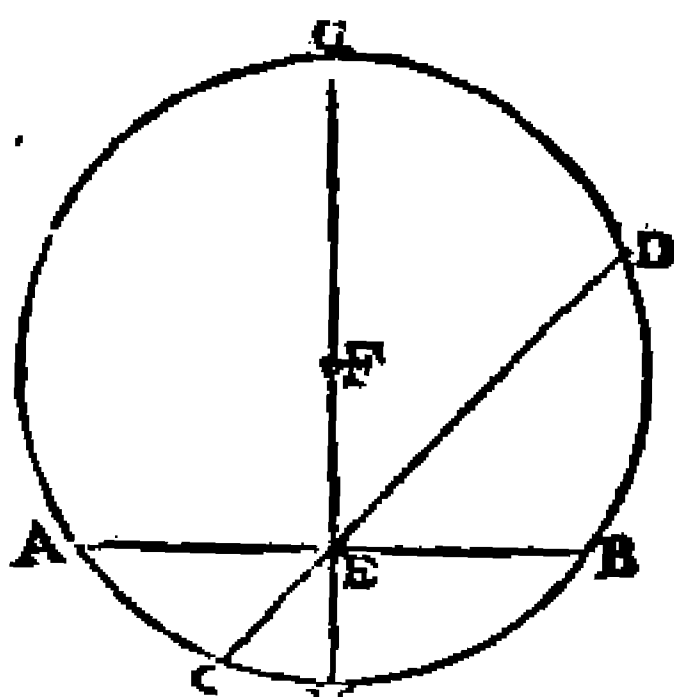
45-second

a 47. primi.



quadrato rectæ FB: Est autem quadratum rectæ FE, ^a æquale quadratis rectarum FG, GE; & quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB: Erit quoque rectangulum sub CE, ED, vnâ cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub CE, ED, vnâ cum quadrato rectæ GE, æquale quadrato

rectæ GB. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, vnâ cum quadrato rectæ GE, ^b æquale est eidem quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB, secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED, vnâ cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vnâ cum quadrato eiusdem rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB. quod est propositum.



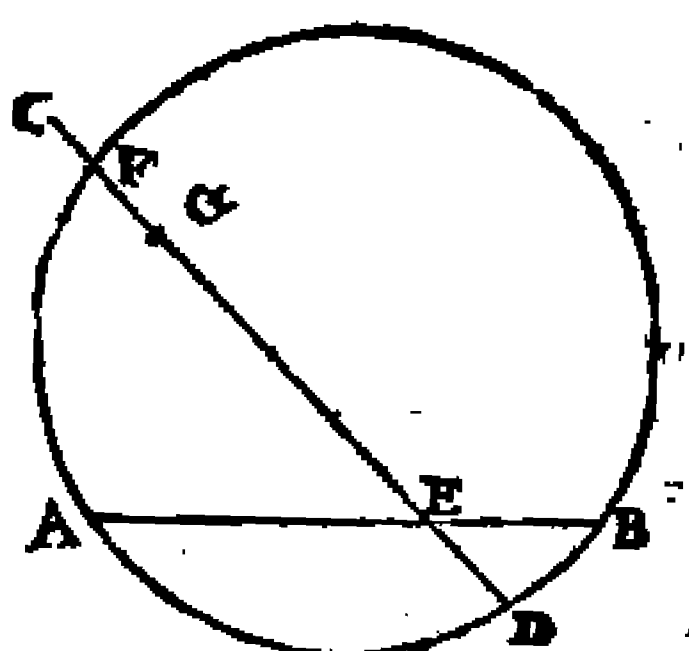
TERTIO neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta GH. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE, EH, siue AB, diuidatur bifariam, siue non: Item rectangulum sub CE, ED, æquale esse quoque eidem rectangulo sub GE, EH, siue CD, siue

ita sit bifariam, siue non: Erit rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. quod est propositum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ sese mutuo secant, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I U M.

CONVERTI poterit theorema istud hoc modo.

Si duæ rectæ ita se secant, vt rectangulum sub vnus segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, circulus per quælibet tria puncta earum extrema descriptus, per quartum quoque punctum transibit.



a 35. tertij.

SECENT se mutuo rectæ AB, CD, in E, sitq; rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circunferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi: adeo vt circulus per tria puncta A, D, B, descriptus, transeat necessarîo per punctum etiam C. Describatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis; (quo autem modo id fiat, ostendimus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut yltra C, vel citra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub FE, ED, æquale est rectangulo sub AE, EB; & rectangulum sub CE, ED, ponitur quoque æquale eidem rectangulo sub AE, EB; Erunt rectangula sub CE, ED, & sub FE, ED, æqualia pars

& totum, quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C. quod erat propositum.

35.

THEOR. 30. PROPOS. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò tangat: Quod sub tota secante, & exterioris inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum; æquale erit ei, quod à tangente describitur quadrato.

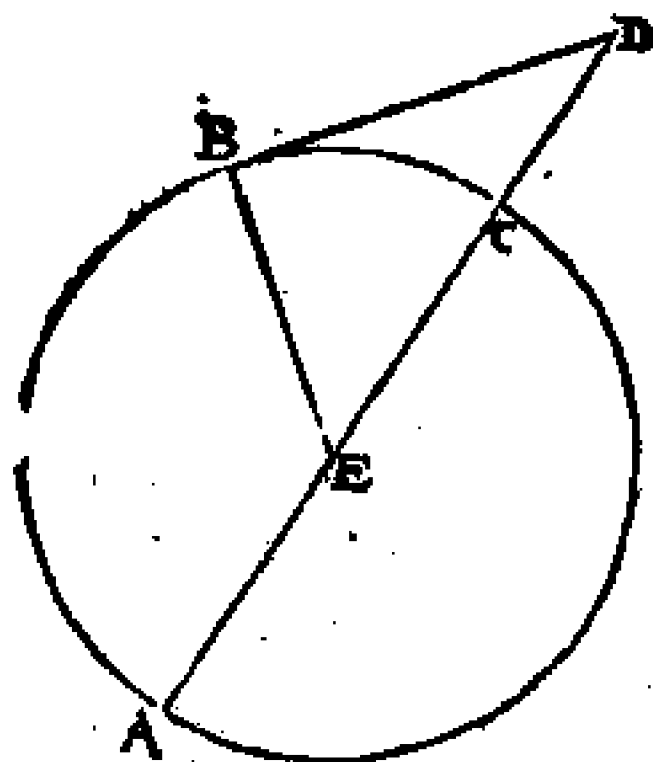
EXTRA circulum ABC, punctum sumatur D, à quo linea ducatur DA, secans circulum in C, ^a & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat enim primum recta DA, per centrum E, & iungatur recta EB, ^b quæ perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum CD, erit rectangulum sub DA, DC, vnâ cum quadrato rectæ EC, hoc est, cum quadrato

a 17. tertij.

b 18. tertij.

c 6. secundij.

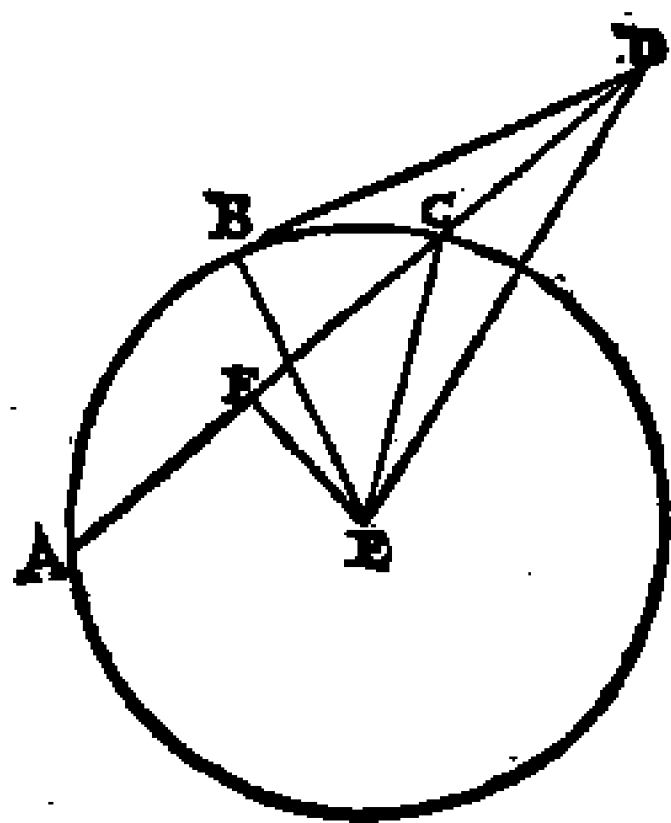
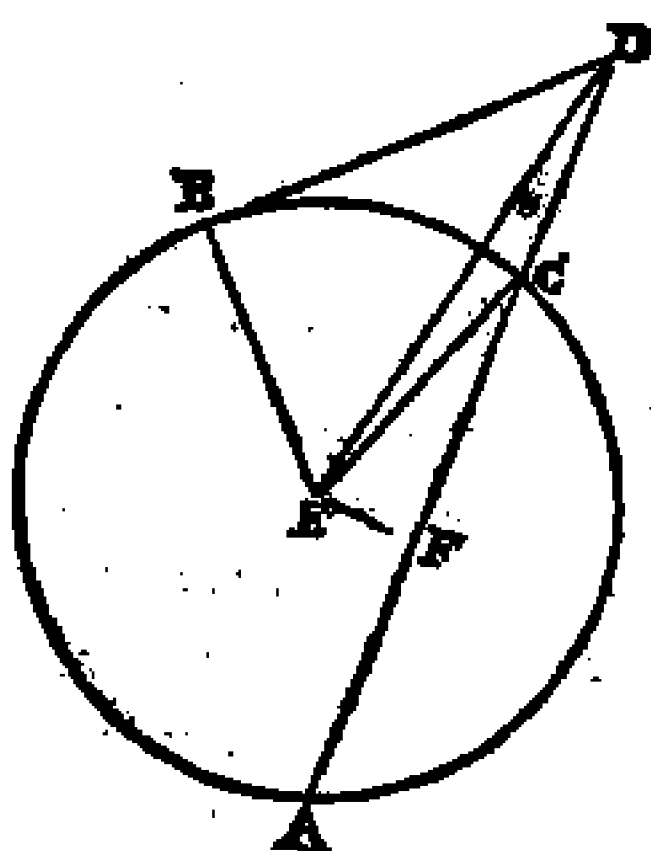
quadrato rectæ EB, æquale quadrato rectæ DE: Est autem quadratum rectæ DE, æquale quadratis rectarum EB, BD. Quare rectangulum sub DA, DC, vñ cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadratis rectarum DB, BE. Ablato igitur communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale. Quod est propositum.



Non trāseat iam DA, secans p centrum E. Diuisa ergo AC, bisariam in F, ducantur re-

ctæ EB, EC, ED, EF. ^a eritque EB, ad BD, perpendicularis; ^c & EF, ad AC. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD, ^d erit rectangulum sub DA, DC, vñ cum quadrato rectæ CE, æquale quadrato rectæ DE.

Addito igitur communi quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, vñ cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF, FE. Est autem quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratum rectæ EC, ideoque & quadratum rectæ EB. Et ^f quadratis rectarum DF, FE, æquale est quadratum rectæ DE. Quare rectangulum sub DA, DC, vñ cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadratum rectæ DE, æquale sit quadratis rectarum DB, BE, erit & rectangulum sub DA, DC, vñ cum quadrato rectæ EB, æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale: quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.



b 18. tertij.

c 3. tertij.

d 6. secūdi.

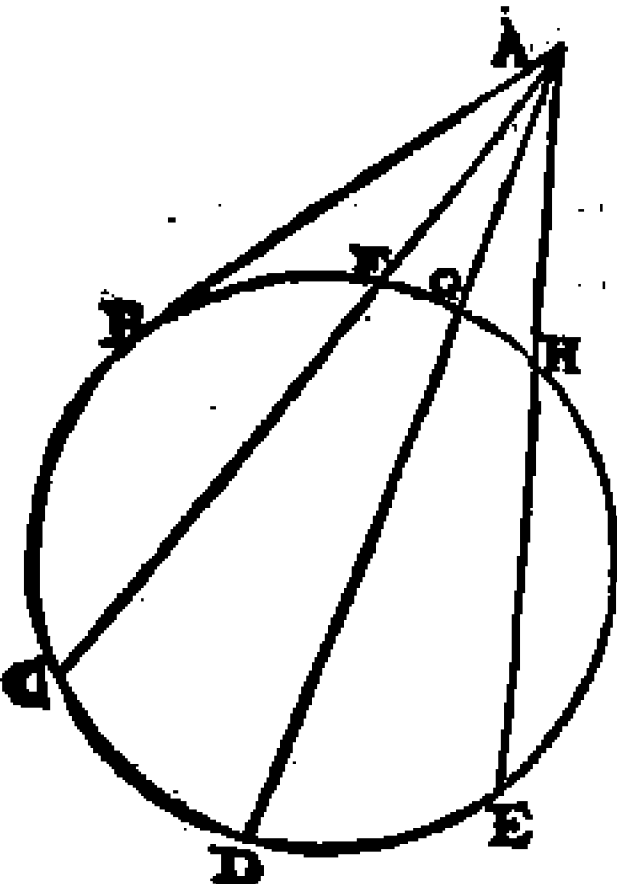
e 47. primi.

f 47. primi.

g 47. primi.

COROLLARIUM I.

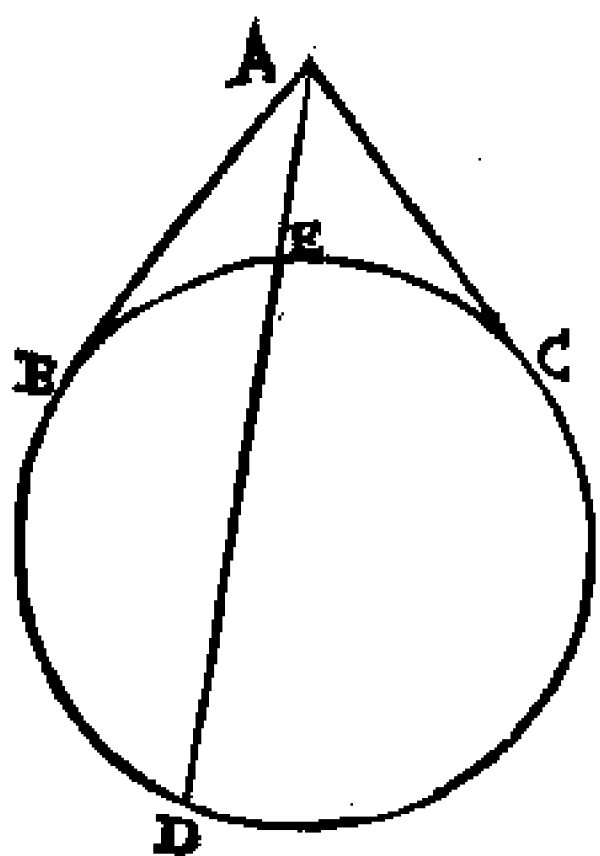
Hinc manifestum est, si à puncto quodvis extra circulum assumpto plurima linea rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se esse equalia. Vt si ex A, ducantur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF; Item sub AD, AG; & sub AE, AH, equalia inter se. Nam ducta AB, tangente circulum, ^a erunt quadrato rectæ AB, equalia singula illa rectangula; quare & inter se omnia equalia erunt.



COROLLARIUM II.

CONSTAT etiam duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex

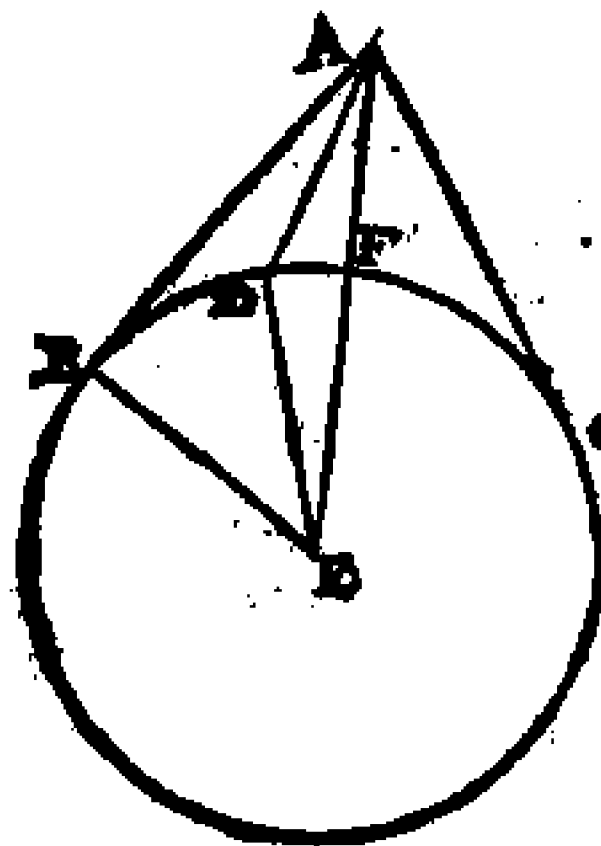
A, rectæ AB, AC, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta AD, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ AB, quàm quadratum rectæ AC, ^b æquale rectangulo sub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales quoque erunt.



b 36. tertij.

COROLLARIUM III.

PERSPICVVM quoque est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci possit tertia AD, circulum eundem tangens; ductis rectis EB, ED, ex centro E, ^c erunt anguli ABE, ADE, recti, ideoque æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta AE, ^d erit angulus ADE, maior angulo ABE.



c 18. tertij.

d 21. primi.

ALITER. Si tertia AD, circulum etiam tangat, erunt due tangentes AB, AD, æquales, ut ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta AE, ad centrum E, quæ circulum secet in F, ^e

e 8. tertij.

erit AD , cum sit propinquior minima AF , minor, quam AB , qua à minima AF , remotior est. Vel sic: Si AB, AD , sunt aequales; additis aequalibus EB, ED , erunt quoque AB, BE , i. p. s. AD, DE , aequales, quod est absurdum. * Sunt enim maiores AB, BE , quam AD, DE . Solùm igitur dua recta ducentur à puncto A , qua circumulum tangant. Quod est propositum.

COROLLARIUM IV.

ILLUD denique constat etiam, si dua recta aequales ex puncto quopiam in connexam peripheriam incidant, & earum una circumulum tangat, alteram quoque circumulum tangere. Vt si dua recta AB, AC , in antecedente figura sint aequales, & AC , tangat circumulum in C , tanget quoque AB , eundem circumulum in B . Si enim non tangat, ducatur AD , tangens (semper enim dua tangentes ab eodem puncto duci possunt, ut constat ex scholio propof. 31. huius lib.) eruntq; ex 2. coroll. AC, AD , aequales. Cum ergo & AB, AC , aequalis ponatur, ducentur tres recta aequales AB, AC, AD , quod est absurdum. ^b Dua enim tantum duci possunt.

ALITER. Ponantur in figura sequentis propositionis dua recta aequales DB, DF , & DB , circumulum tangat, in B . Dico & DF , eundem tangere in F . Ductis enim rectis EB, EF , ex centro, erunt duo latera DB, BE , duobus lateribus DF, FE , aequalia, & basis DE , communis. * Igitur anguli B, F , aequales erunt: ^d Sed B , rectus est. Igitur & F , rectus erit: atque idcirco DF , circumulum tanget in F , ex coroll. propof. 16. huius libri.

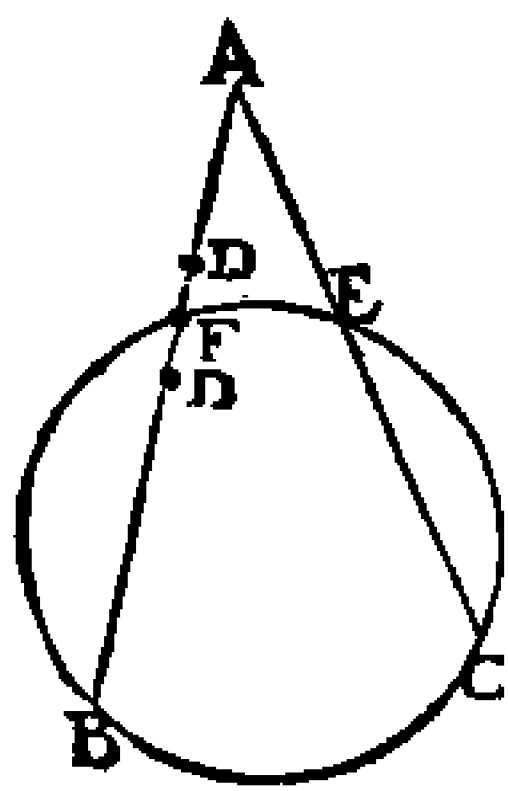
SCHOLIUM.

FACILLIMO negotio propositionem hanc per antecedentem propositionem demonstrabimus, hoc modo. Ex puncto A , extra circumulum BCD , ducatur tangens AB , & secans AE , qua primum per centrum F , transeat, secetq; circumferentiam in D . Dico rectangulum sub AE, AD , equale esse quadrato ex AB . Descripto namque ex F , per A , circulo AKL , producantur AE, AB , vsq; ad H, I ; & per D , ad AH , perpendiculari KL , qua eundem circumulum BCD , tanget in D , ex coroll. propof. 16. huius libri. Eruntq; ex demonstratis in scholio propof. 3. huius libri AD, HE , aequales, ac proinde, addita communi DE , & AE, HD , aequales erunt. Item ex scholio propof. 18. huius libri AI, KL , aequales erunt, secabunturq; in B, D , bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI , & sub KD, DL , aequalia inter se erunt, atq; adeo quadrata, ob aequalitatem rectarum AB, BI ; KD, DL . Itaque quoniam rectangulum sub HD, DA , hoc est, sub AE , (qua ipsi HD , ostensa est aequalis) AD , * equale est rectangulo sub KD, DL , hoc est, rectangulo sub AB, BI , siue quadrato ex AB ; constat propositum.

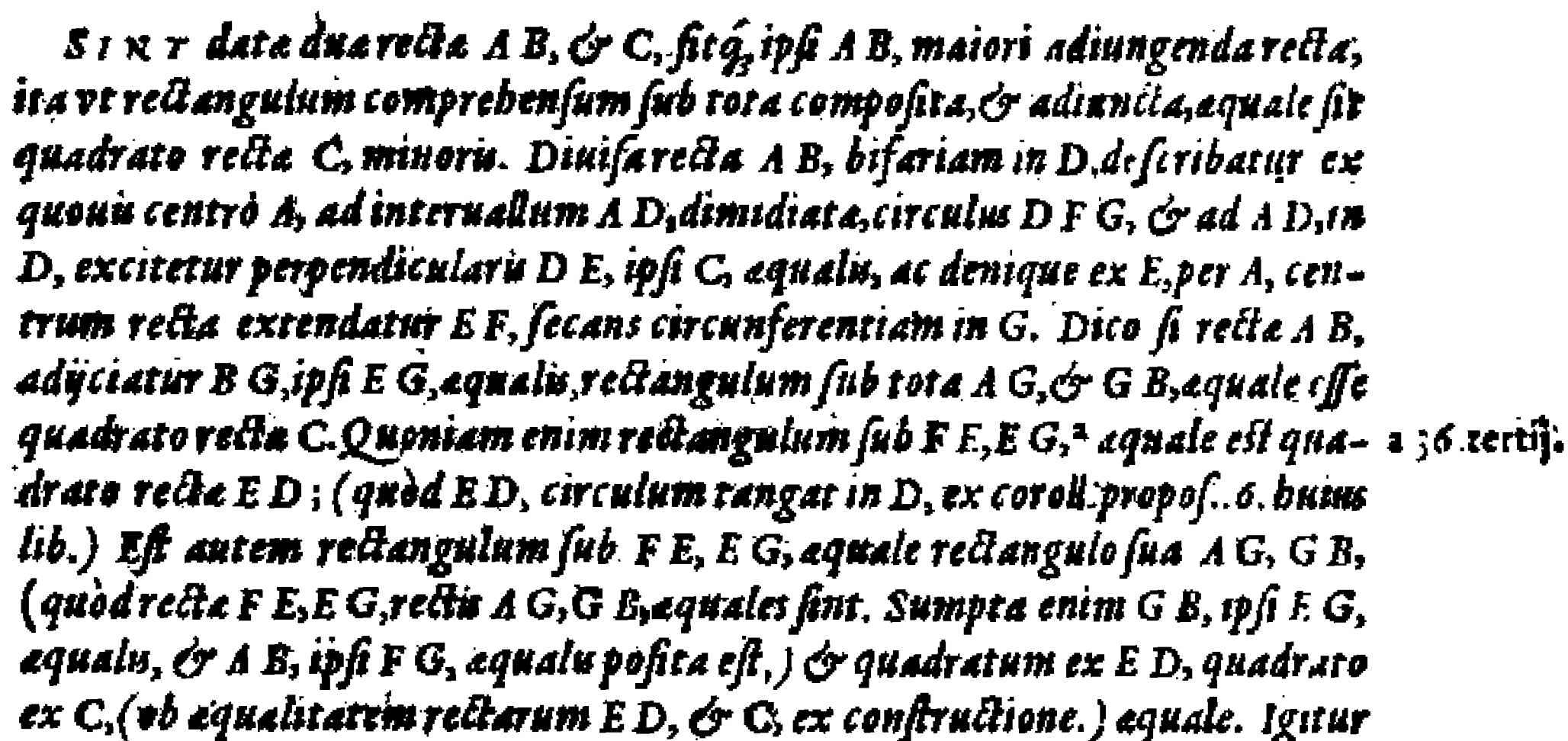
SED iam secans linea AN , non transeat per centrum F , secetq; circumferentiam in C . Dico rursus, rectangulum sub AN, AC , quadrato ex AB , equale esse. Descripto enim rursus ex F , per A , circulo AKL , producantur AN, AB , vsque ad G, I ; & per C , ducatur OM , circumulum BCD , tangens. Eruntq; ex scholio propof. 3. huius libri AC, GN , aequales, ac proinde, addita communi CN , & AN, GC , aequales erunt. Item ex scholio propof. 18. huius lib. AI, OM , aequales erunt, secabunturq; in B, C , bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI , & sub OC, CM , aequalia inter se erunt, atq; adeo quadrata, ob aequalitatem rectarum AB, BI ; OC, CM . Itaque quoniam rectangulum sub GC, CA , hoc est, sub AN , (qua ipsi GC , ostensa est aequalis) AC , * equale est rectangulo sub OC, CM , hoc est, rectangulo sub AB, BI , siue quadrato ex AB ; constat rursus id, quod proponebatur.

PRIMUM etiam corollarium huius propositionis hoc modo ferme conuertemus.

Si à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitè egrediantur, quæ ita secantur in binas partes, ut rectangula sub totis, & segmentis prope punctum comprehensa sint aequalia: describi poterit per extrema puncta alicuius segmentorum circumulum, hoc est, circumulum per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit.



Ex puncto enim A , egrediantur dua recta AB, AC , qua ita secantur in punctis D, E , ut rectangula sub AB, AD , & sub AC, AE , sint aequalia. Dico quatuor puncta B, C, E, D , in circumferentiam circuli cadere; hoc est, per ea posse describi circumulum: adeo ut circumulum per tria puncta B, C, E , descriptus, transeat necessario per reliquum etiam punctum D . Describatur enim per tria puncta B, C, E , (ut ad propof. 3. lib. 4. docebitur) circumulus BCE , qui si dicatur non transire per quartum punctum D , transibit autem citra D , aut ultra, ut per F . Quoniam ergo rectangulum sub AB, AD , aequale est, ex coroll. 1. huius propof. rectangulo comprehensa sub AC, AE ; & rectangulum sub AB, AD , eidem rectangulo sub AC, AE , ponitur aequale: erunt rectangula sub AB, AD , & sub AC, AE , inter se aequalia, pari & totum: quod est absurdum. Transibit ergo circumulum per punctum D . Quod erat demonstrandum.

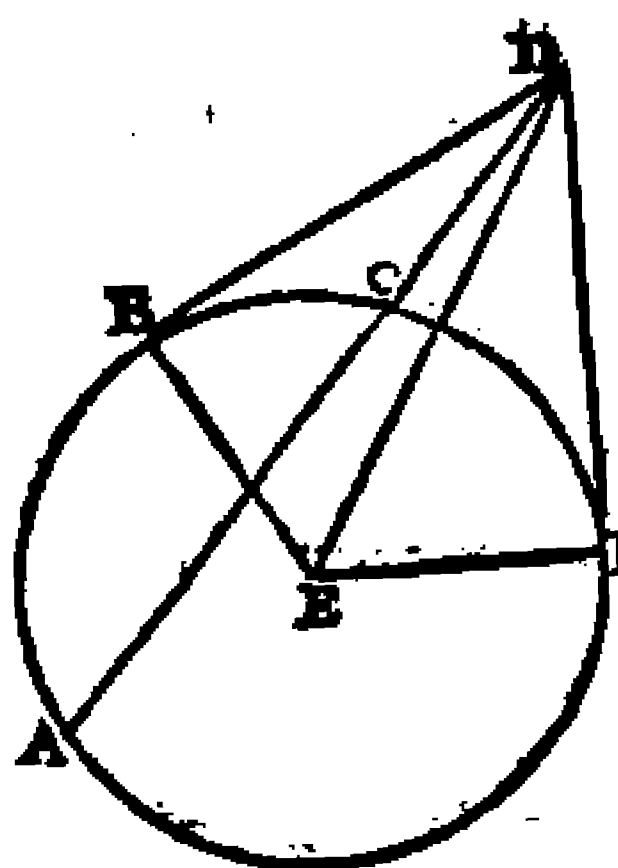


a 36. zertij.

30:

30:

30:



EXTRA circulum A B C, cuius centrum
E, punctum sumatur D, à quo ducatur re-
cta D A, circulum secans in C, & recta D B,
incidens in circulum ad punctum B. sitque
rectangulum sub D A, D C, æquale quadra-
to rectæ D B: Dico D B, circulum tangere
in B. * Ducatur enim D F, tangens circulum, à 17. *lib. 1.*
& iungatur rectæ E B, E F. Quod si
D A, secans nō transeat per centrum E, iun-
gatur quoque recta D E. Quoniam igitur
rectangulo sub D A, D C, æquale est qua-
dratum rectæ tangentis D F, b 36. *lib. 1.*
Et eidem re-
ctangulo sub D A, D C, æquale ponitur qua-
dratum rectæ D B: erunt quadrata rectæ.

rum DE, DB , inter se æqualia, ideoque & rectæ DE, DB , æquales inter se erunt. Itaque quia latera DE, FE , trianguli DFE , æqualia sunt lateribus DB, BE , trianguli DBE ; & basis DE , communis: erunt anguli DFE, DBE , æquales: ⁴ Atqui angulus DFE , rectus est, quod DF , circum- ^{è 8 primi.} lum tangat. Igitur & angulus DBE , rectus erit. Quapropter per ætoll. propos. 16. huius lib. DE , ^{d 18. tertij.} circum- lum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circum- lum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

S. prima

18. let t_{ij}

10.12.194

Si à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vsque ad conuexam peripheriam inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli eiecta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam: Et contrâ, Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidēs bifariam, per centrū circuli transibit.

IN priori figura huius propositionis dua rectæ DB, DF , circulum $ABC F$, tangant in B, F , punctis quæ ex
2. coroll. precedentis propositionis æquales erunt: Vel ducantur quæcunque dua æquales DB, DF . Et per cen-
trum E , ducatur recta linea DEA . Dico angulum DBF , sectum esse bisariam à recta DA . Cùm enim iun-
ctis rectis EB, EF , duo latera BD, DE , duobus lateribus FD, DE , æqualia sint, basiſq; EB , basi EF , æqualis,
erunt duo anguli ad D inter se æquales. Quod est propositum.

DIVIDAT iam recta DA , angulum BDE , bifariam. Dico rectam DA , per centrum transire. Si enim in DA , non est centrum, sit extra ipsam centrum E , iungaturq; recta ED , ut in posteriori figura huius propositionis. Ergo, ut demonstratum est, recta ED , angulum BDE , bifariam dividet; ac propterea anguli BDA , BDE , cum sint dimidiata partes anguli BDE , æquales inter se erunt, pars, & totum; quod est absurdum. Transire ergo recta DA , per centrum. Quod demonstrandum erat.

FINIS ELEMENTI TERTII.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.



DEFINITIONES.

I.

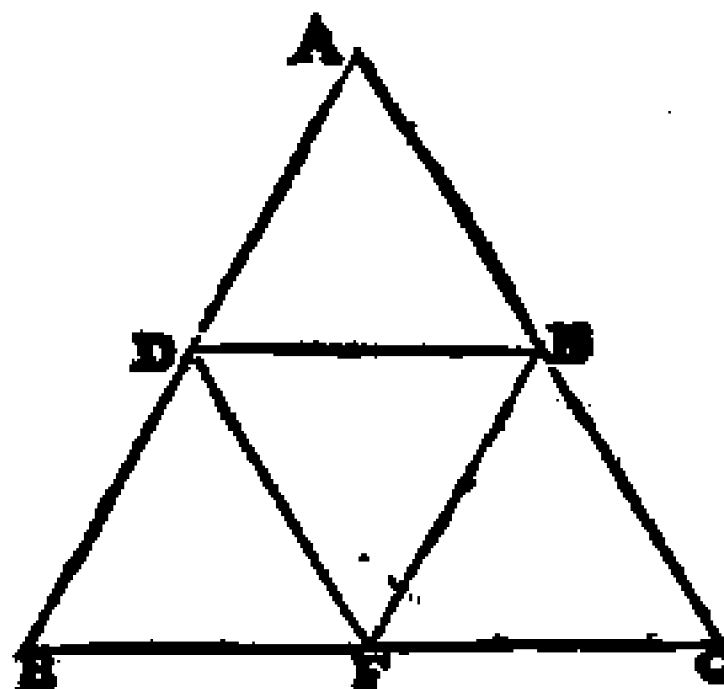
FIGURA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.



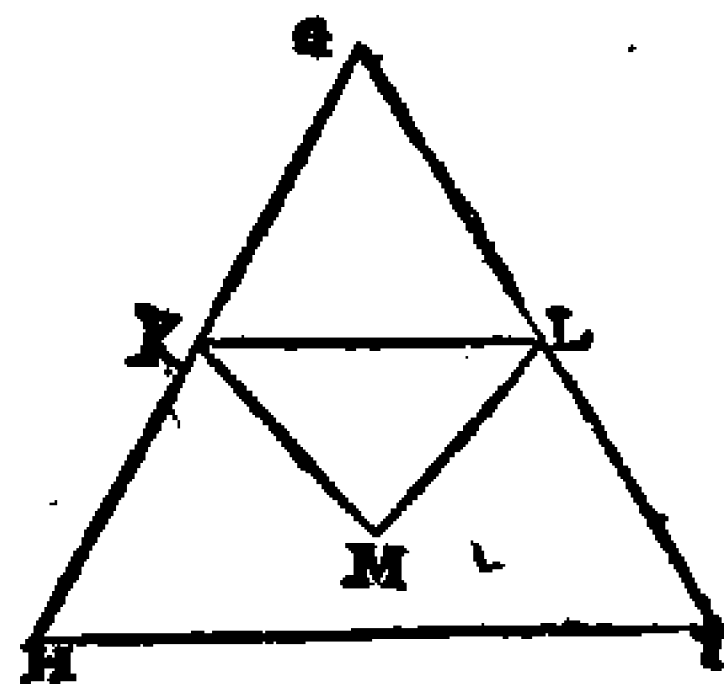
GL. s Enclides quarto hoc libro de variis inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circumulum descriptionibus: Item de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa easdem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens à rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F , trianguli interni DEF , tangant latera AB, AC, BC , trian-

guli externi

ABC ; dicetur triagulum DEF , in triangulo ABC , esse inscriptum. At quoniam angulus M , triaguli KLM , non tangit latus HI , triaguli GHI , non dicetur triagulum KLM , inscribi in triagulo GHI , quævis totum illud sit intra hoc, duoq; anguli K, L , tangant duo latera GH, GI .



I I.



SIMILITER & figura circum figuram describi dicitur, cum singula eius, quæ circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E contrario dicetur triangulum ABC , describi circa triangulum DEF ; quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt; At triangulum GHI , non dicetur descriptum esse circa triangulum KLM , propterea quod latus illius HI , angulum huius M , non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

CÆTERVM proprie figura rectilinea dicuntur in figuram rectilineam describi, & circa easdem describi, quando inscripta, & circumscripta habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamvis hoc non sit omnino necessarium, cum & quadratum intra triangulum describi possit, ut ad finem lib. 6. docebimus.

II I.

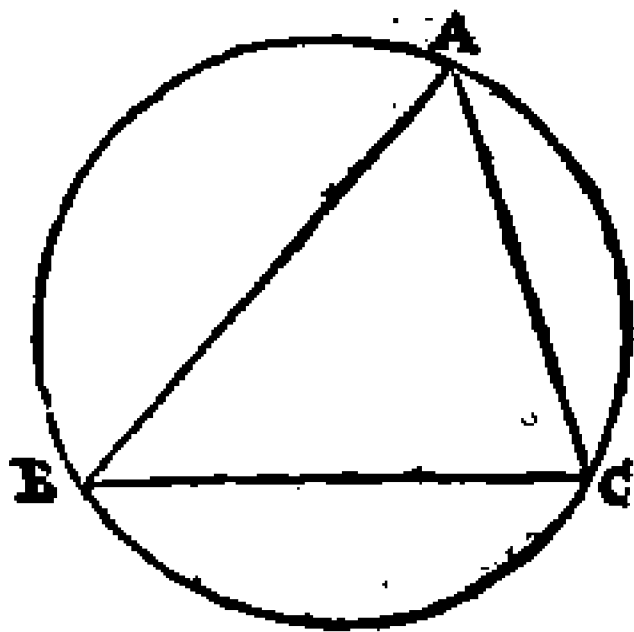


FIGURA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

Vt si tangant anguli A, B, C , triaguli ABC , peripheriam circuli ABC , dicetur triagulum in circulo esse inscriptum. Quod si vel unus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non dicetur triagulum esse inscriptum in circulo.

FIGURA

IIII.

FIGVRA verò rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera eius, quæ circunscríbítur, circuli peripheriam tangunt.

At verò, si latera trianguli ABC singula tangant peripheriam circuli DEF ; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.

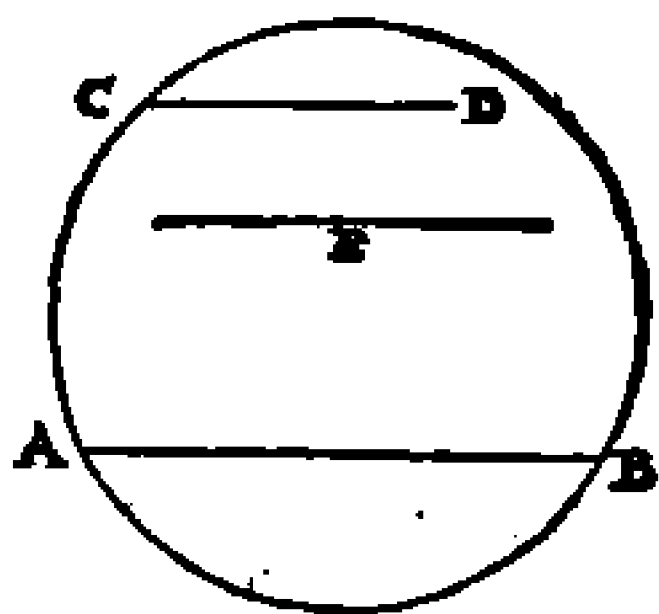
V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria, singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

CIRCVLVS autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circunscríbit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus DEF , in figura definitionis 4. inscriptus esse in triangulo ABC : At verò circulus ABC , in figura definitionis 3, descriptus esse circa triangulum ABC . Idem iudicium habito de alijs figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.



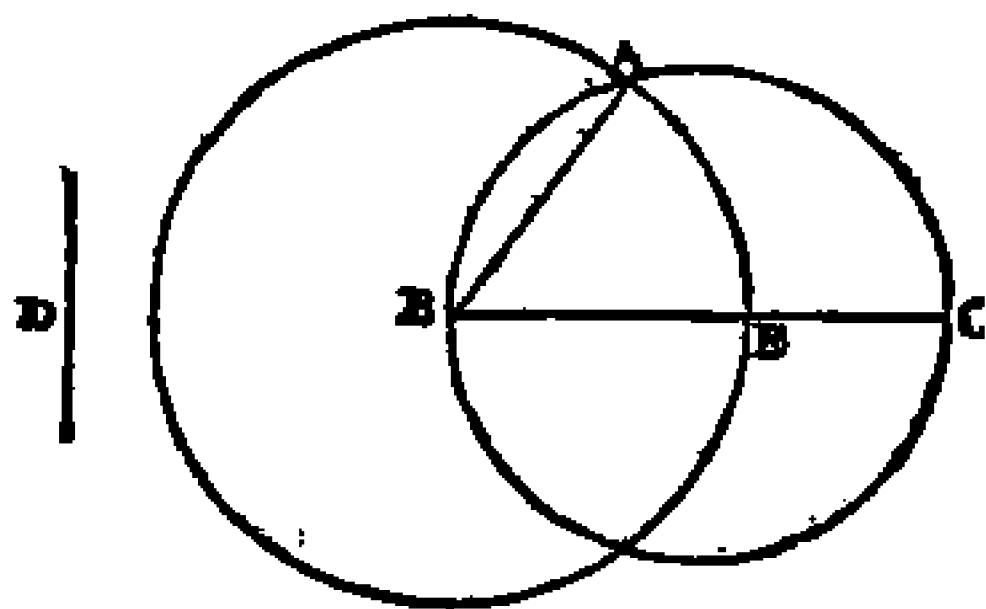
VII.

RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

Ut recta linea AB , quoniam eius extrema A , & B , in peripheria circuli ABC , existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E , vel CD ; quia hac alterum duntaxat extremorum, nempe C , habet in peripheria circuli; Illa verò neutrum.

PROBL. I. PROPOS. I.

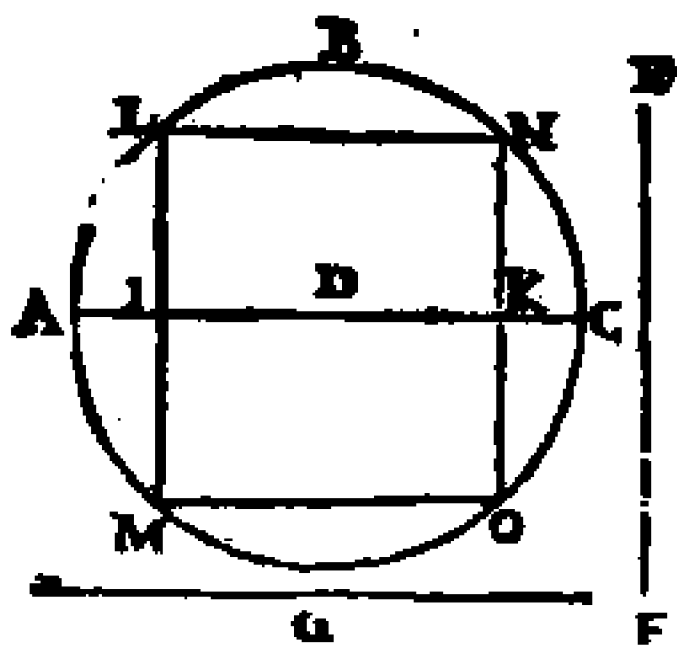
IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.



ea aptata in circulo ABC , æqualis datæ rectæ D . Est enim BA , æqualis ipsi BE ; & D , æqualis eadem BE , per constructionem. Quare AB , & D , inter se æquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.



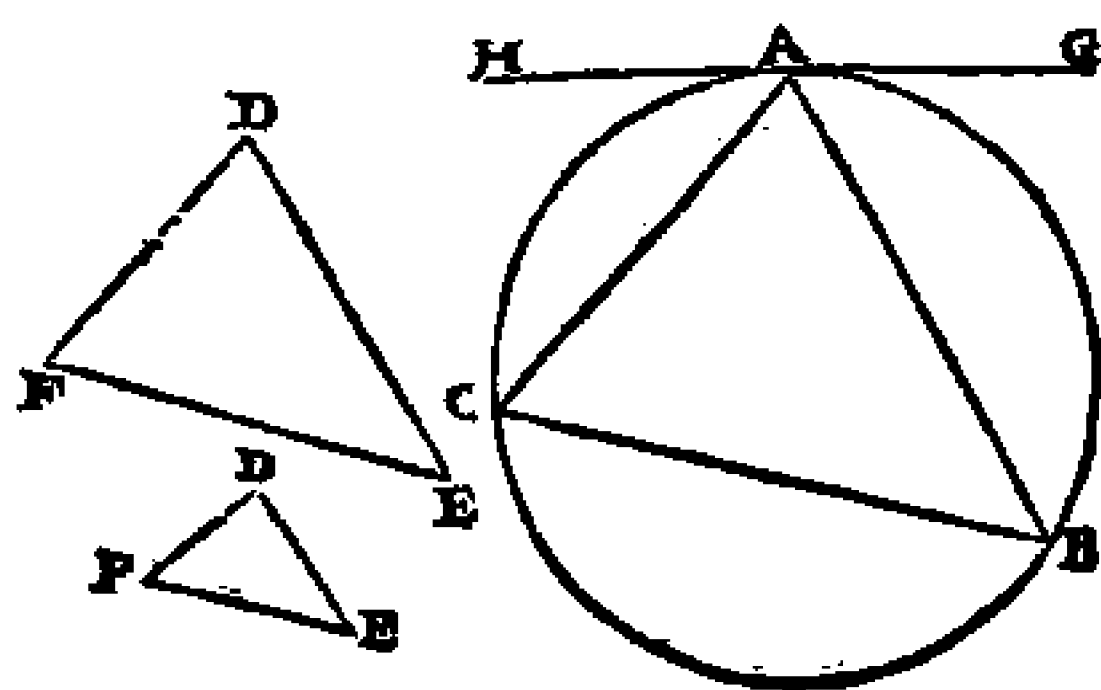
IN dato circulo ABC , cuius centrū D , accommodata sit recta æqualis rectæ EF , quæ diametro maior non sit, & alteri rectæ G , parallela. Ducatur per centrū D , diameter AC ; rectæ G , parallela. Quod si recta EF , diametro fuerit æqualis, factū iam erit, quod proponitur. Si verò EF , diametro minor fuerit, secā ea bisariam in H , abscindatur DI , ipsi HE , & DK , ipsi HF , æqualis, ut tota IK , toti EF , sit æqualis. Et per I , K , ad angulos rectos ipsi AC , ducantur LM , NO , iungaturq; LN . Dico LN , accommodatam esse æqualem ipsi EF , & ipsi G , parallelam. Cum enim LM , NO , equaliter à centro distent, ipsæ æquales inter se erunt: quæ cum diuidantur bisariam in I , &

K , quod ad angulos rectos secantur à recta AC , per centrū D , transcurrentes, erunt & earum semisses LI , NK , æquales. Quia verò LI , NK , parallela etiā sunt, erunt quoq; LN , IK , æquales, & parallela. Quare cum IK , æqualis sit ipsi EF , & parallela ipsi G ; erit etiam LN , æqualis ipsi EF , & ipsi G , parallela. Eadem ratione, si recta ducatur MO , erit ea æqualis ipsi EF , & parallela ipsi G . Quod est propositum.

2.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



a 17. primi.

b 13. primi.

c 32. tertij.

d 32. tertij.

e 32. primi.

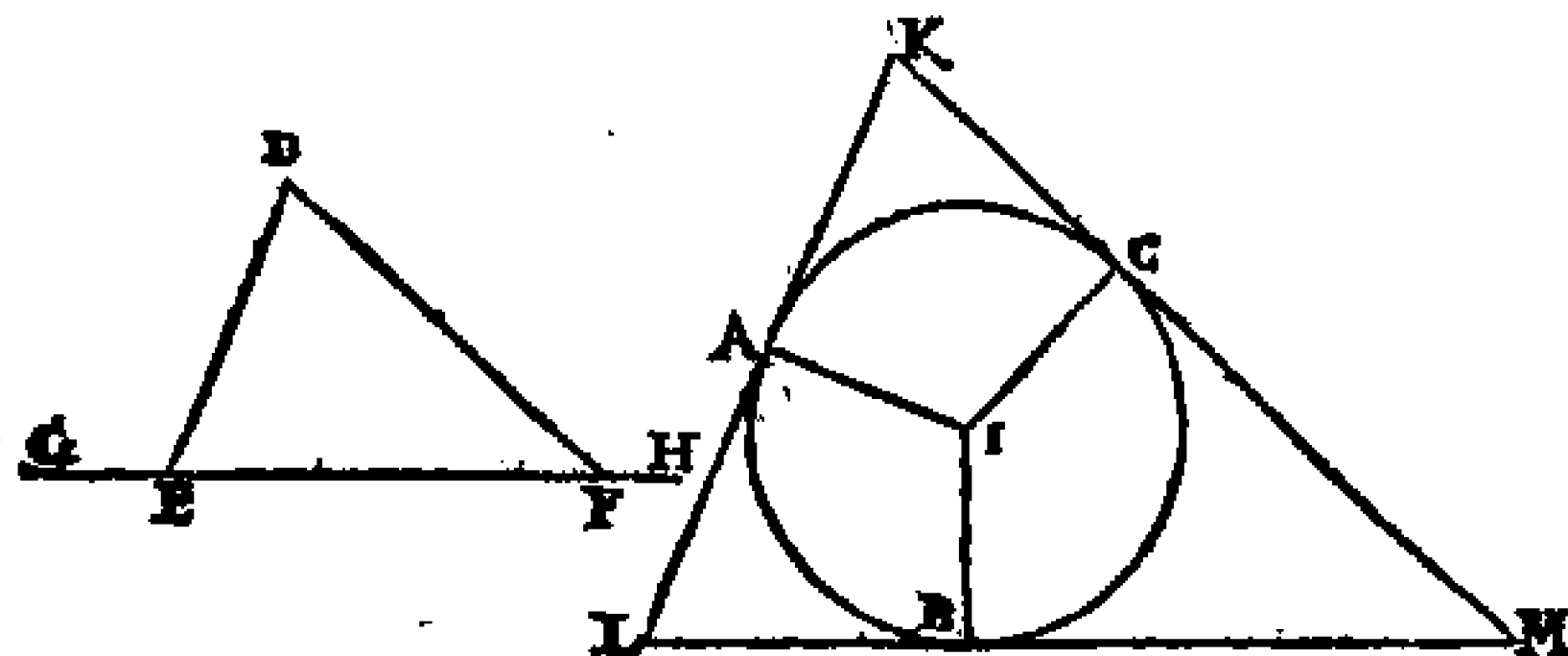
SIT in circulo ABC, dato describendum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF. Ducatur recta GH, tangens circum in A, fiatq; angulus GAB, angulo F, æqualis, & angulus HAC, angulo E, atque extendantur rectæ AB, AC, ad circumferentiam usque in puncta B, & C, coniungaturq; recta BC. Non cadet autem recta AC, in rectam AB, vel inter rectas AB, AG: propterea quod anguli GAB, HAC, hoc est, anguli F, E, minores sunt duobus rectis. ^b Essent autem duobus rectis æquales, si AC, in AB, ca-

deret, vel maiores duobus rectis, si inter AB, AG, caderet. Dico triangulum ABC, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus C, ^c æqualis angulo GAB, & eidem angulo GAB, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, ^d æqualis est angulo HAC, & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli DEF, ^e erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

3.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

CIRCA datum circum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



CIRCA circum datum ABC, describendum sit triangulum æquiangulum dato triangulo DEF. Producta latere EF, utrinque ad G, & H, sumptoq; centro circuli I, ducatur recta utcumque AI, & fiat angulus AIB, æqualis angulo DEG, & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex A, B, C, educantur ad AI,

BL, CL, perpendiculares KL, LM, MK, quæ circum tangunt in punctis A, B, C, per corollarium propof. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta AC, fierent duo anguli KAC, KCA, duobus rectis minores; ac proinde AK, CK, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta AC, caderet supra rectas AI, CI, quod hæc angulum constituent in I. Cum enim spatium circa I, æquale sit quatuor rectis, ex coroll. 2. propof. 15. lib. 1. hoc est, quatuor angulis ad E, & F, sintque duo anguli AIB, CIB, duobus angulis DEG, DFH, æquales, erit reliquum spatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æquale: Sed ^f hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatium AIC, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit AIC. Aliàs spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum AI, CI, unam rectam lineam constituerent; vel maius duobus rectis, si recta AI, producta caderet supra I, C. Cadit igitur necessario AI, producta infra CI; atque idcirco angulus fiet AIC, ad partes K, & ducta recta AC, faciet cum AK, CK, duos angulos minores duobus rectis, ideoque rectæ AK, CK, coibunt in K. Non secus ostendemus, AL, BL, coire in L; & CM, BM, in M: quia ductæ rectæ AB, BC, facient cum AL, BL, CM, BM, angulos minores duobus rectis. Descriptum est igitur circa circum triangulum KLM, quod dico esse æquiangulum triangulo DEF. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero AIBL, æquales sunt quatuor rectis, ut ad 32. propof. lib. 1. ostensum fuit, & anguli IAL, IBL, sunt duo recti; erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur & anguli DEG, DEF, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse angulo DFE. ^h Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum KLM, æquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circum, &c. Quod efficiendum erat.

f 17. primi.

g 13. primi.

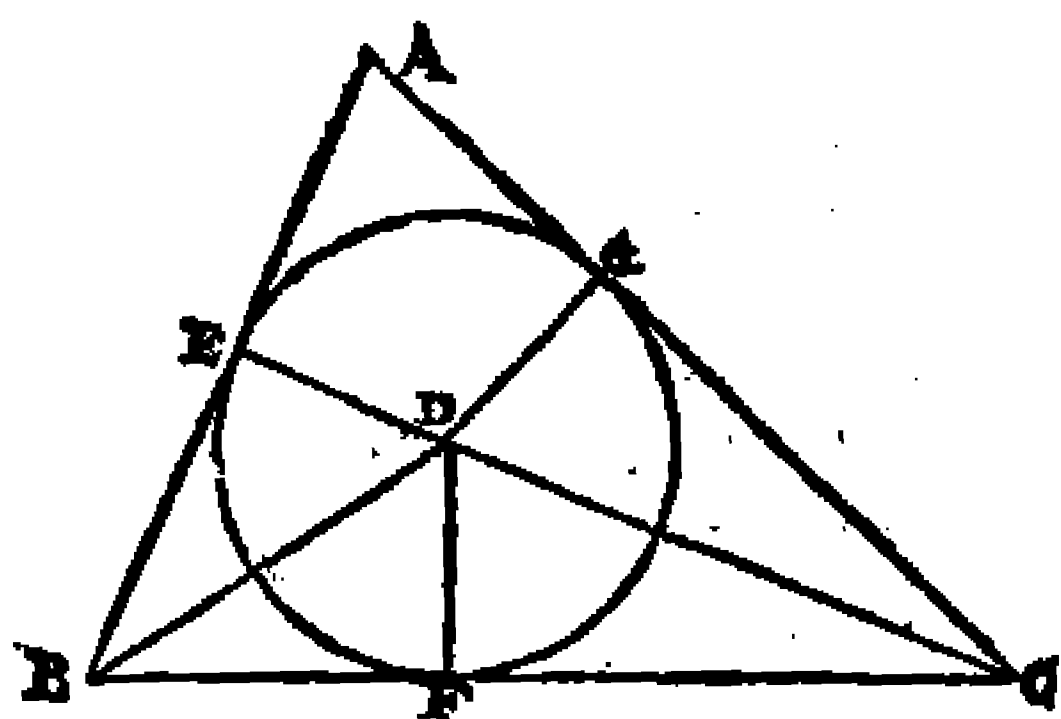
h 32. primi.

4.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circum inscribere.

SIT describendus circulus in dato triangulo ABC, Dimis duobus angulis ABC, AOB, bisectam

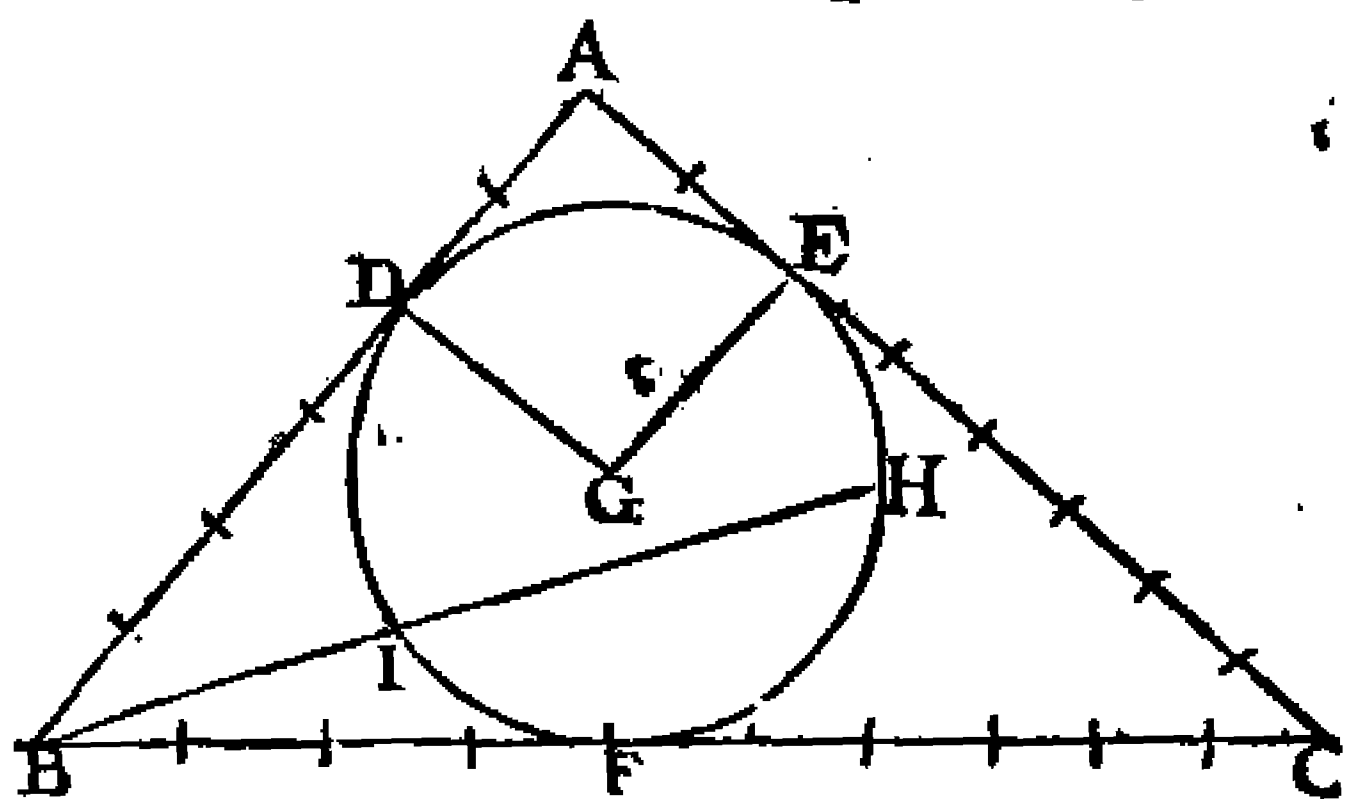


propof. 16. lib. 3. quòd latera perpendicularia funt ad femidiametros DE, DF, DG. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

S C H O L I V M.

V A R V M quoniam Euclides lib. 1. demonstrauit; * in omni triangulo duo latera quomodolibet assum- 220. primi
pta reliquo esse maiora; non abs re fuerit demonstrare hoc loco, cum Ioan. Baptista Benedicto, quanto mai-
ra funt, hoc proposito theoremate.

IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquum re-
cta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo il-
lis lateribus comprehenso in cauum peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriori.
Quòd si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo op-
positum diametro circuli triangulo inscripti.



Si τ triangulum ABC, cui circulus in- b 4. quarti
scribatur DEF, tangens latera trianguli in D,
E, F, punctis: & à quouis angulo B, siue rectus
is sit, siue obtusus, siue acutus, ducatur recta
BH, secans circulum in I. Dico duo latera BA,
BC, superare latus AC, recta linea, cuius qua-
dratum quadruplum est rectanguli sub BH,
BI, comprehensi. Quoniam enim per coroll. 2.
propof. 36. lib. 3. recta CF, recta CE, & recta
AD, recta AE, aequalis est; erunt dua recta FC,
DA, lateri AC, aequales. Latera igitur BA,
BC, latus AC, superant segmentis BD, BF: qua cum ex eodem corollario sint aequalia; superabunt eadem
latera BA, BC, latus AC, recta, qua dupla est segmenti BD. Sed quadratum recta, qua dupla est segmenti
BD, quadruplum est quadrati recta BD, ex scholio propof. 4. lib. 2. Et quadratum recta BD, aequale est re- c 36. tertij
ctangulo sub BH, BI. Igitur latera BA, BC, superant latus AC, recta, cuius quadratum quadruplum est re-
ctanguli sub BH, BI. Quod est propositum.

Q U O D si angulus A, rectus sit, dico nò solum duo latera AB, AC, superare latus BC, recta, cuius quadra-
tum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ex A, in cauum peripheriam ducta, & eius segmento
exteriore, vt ostensum est: verum etiam excessum illum esse diametro circuli DEF, aequalem. Ductis enim ex
centro G, ad puncta contactuum D, E, rectis GD, GE; d erunt anguli ad D, & E, recti. Cùm ergo & angulus d 18. tertij
A, ponatur rectus, * erunt tam recta AE, DG, quàm AD, EG, parallelae inter se: atque idcirco AG, parallelo- e 28. primi
grammum erit. Quare tam recta, AD, semidiametro EG, quàm recta AE, semidiametro DG, aequalis erit: f 34. primi
hoc est, dua recta AD, AE, simul toti diametro circuli erunt aequales. Superant autem duo latera AB, AC, la-
tus BC, duabus rectis AD, AE, vt ostensum est. Nam EC, ipsi FC, & DB, ipsi FB, aequalis est, ex corollario 2.
propositionis 36. libri 3. Igitur eadem latera AB, AC, superant latus BC, diametro circuli inscripti. Quod
est propositum.

Q U O D si angulus A, rectus sit, dico nò solum duo latera AB, AC, superare latus BC, recta, cuius quadra-
tum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ex A, in cauum peripheriam ducta, & eius segmento
exteriore, vt ostensum est: verum etiam excessum illum esse diametro circuli DEF, aequalem. Ductis enim ex
centro G, ad puncta contactuum D, E, rectis GD, GE; d erunt anguli ad D, & E, recti. Cùm ergo & angulus d 18. tertij
A, ponatur rectus, * erunt tam recta AE, DG, quàm AD, EG, parallelae inter se: atque idcirco AG, parallelo- e 28. primi
grammum erit. Quare tam recta, AD, semidiametro EG, quàm recta AE, semidiametro DG, aequalis erit: f 34. primi
hoc est, dua recta AD, AE, simul toti diametro circuli erunt aequales. Superant autem duo latera AB, AC, la-
tus BC, duabus rectis AD, AE, vt ostensum est. Nam EC, ipsi FC, & DB, ipsi FB, aequalis est, ex corollario 2.
propositionis 36. libri 3. Igitur eadem latera AB, AC, superant latus BC, diametro circuli inscripti. Quod
est propositum.

IT A Q V E quouis duo latera superant reliquum duabus rectis circulum triangulo inscriptum tangen-
tibus, qua inter angulum duobus illis lateribus comprehensum, & circulum interijciuntur. Ostensum enim
est, latera AB, AC, superare latus BC, rectis tangentibus AD, AE, &c.

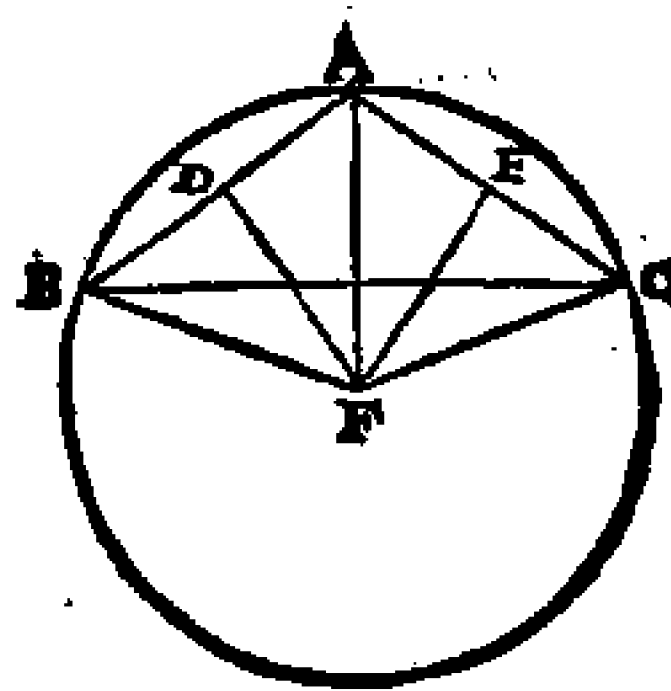
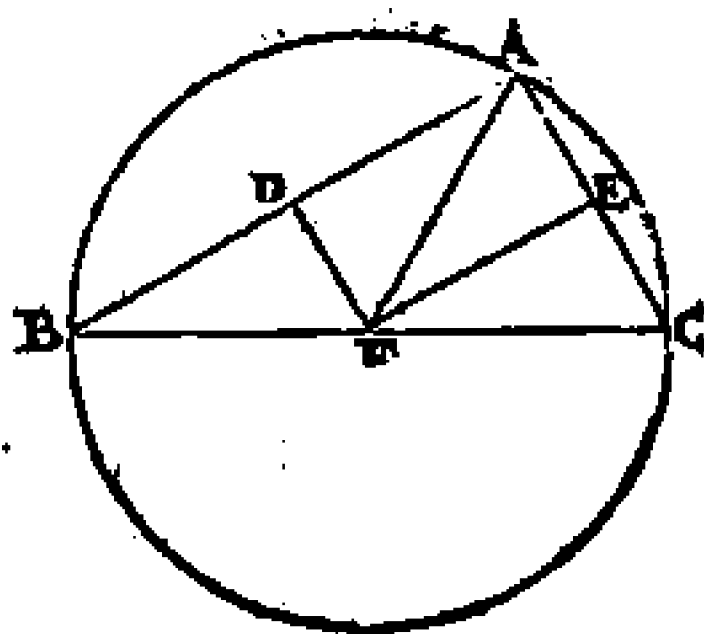
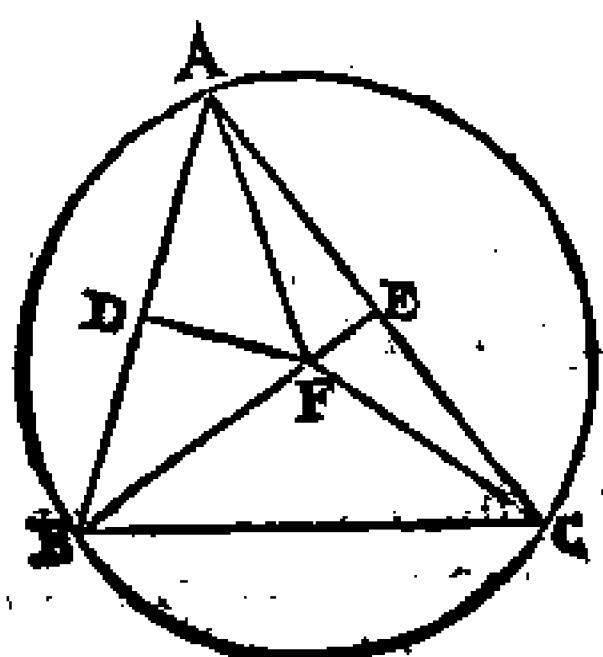
I A M verò his ita demonstratis, si tria latera trianguli cognita sint, inueniemus nullo negotio tria pun-
cta, in quibus circulus triangulo inscribendus latera tangere debet. Quia enim latera, verbi gratia, AB, AC,
superare debent latus BC, duabus tangentibus ex A, ductis, quæ quidem aequales sunt: si dematur latus BC,
notum ex notis lateribus AB, AC, relinquentur dua sagentes AD, AE, nota. Semissus ergo huius excessus da-
bis vtrumque punctum D, E. Reliquum deinde segmentum EC, dabit segmentum CF, vsque ad punctum ter-
tium F: Vel reliquum segmentum DB, dabit segmentum BF, ad idem punctum F. Si igitur ex duobus pun-
ctis D, E, erigantur perpendiculares DG, EG, coibunt ha in G, centro circuli inscribendi. Exempli gratia. Sit
latus AB, 6. latus AC, 8. & latus BC, 10. palmorum. Dempto latere BC, 10. palmorum ex duobus lateribus

AB, AC , hoc est, ex 14. palmis relinquuntur 4. palmi. Tam ergo AD , quam AE , duos palmos continebit. Segmentum ergo DB , continebit 4. palmos, totidemque segmentum BF , habebit. Segmentum autem EC , ac proinde & CF , erit 6. palmorum. Sic etiam de pro latere AB , 6. palmorum, ex lateribus AC, BC , id est, ex 18. palmis, reliqui sunt 12. palmi. Vtrumque ergo segmentum CE, CF , erit 6. palmorum: ac proinde vtrumque AE, AD , 2. palmorum, & vtrumque BD, BF , 4. palmorum. Postremo de pro latere AC , 8. palmorum ex lateribus AB, CB , hoc est, ex palmis 16. remanent 8. palmi. Vtrumque ergo segmentum BD, BF , habebit 4. palmos: At vtrumque CF, CE , 6. palmos: & vtrumque AD, AE , 2. palmos.

5.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

CIRCA datum triangulum circulum describere.



a 4. primi.

SIT circulus describendus circa datum triangulum ABC . Dividantur duo latera AB, AC , (quæ in triangulo rectangulo, vel obtusangulo sumenda sunt facilitatis gratiâ, circa rectum, vel obtusum angulum, quamvis hoc non sit omnino necessarium, sed duo quævis latera bisariam possint secari) bisariam in D, E , punctis, ex quibus educantur DF, EF , perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F . (Quod enim coeant, patet. Nam si ducta esset recta DE , fierent anguli FDE, FED , duobus rectis minores.) eritque F , vel intra triangulum, vel in latere BC , vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC . Quoniam igitur latera AD, DE , trianguli ADF , æqualia sunt lateribus BD, DF , trianguli DBF , & anguli ad D , recti: erunt bases FA, FB , æquales. Eodem modo erunt FA, FC , æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC , sint æquales, circulus descriptus ex F , ad intervallum FA , transibit quoque per puncta B, C . Circa datum ergo triangulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

a 31. tertij.

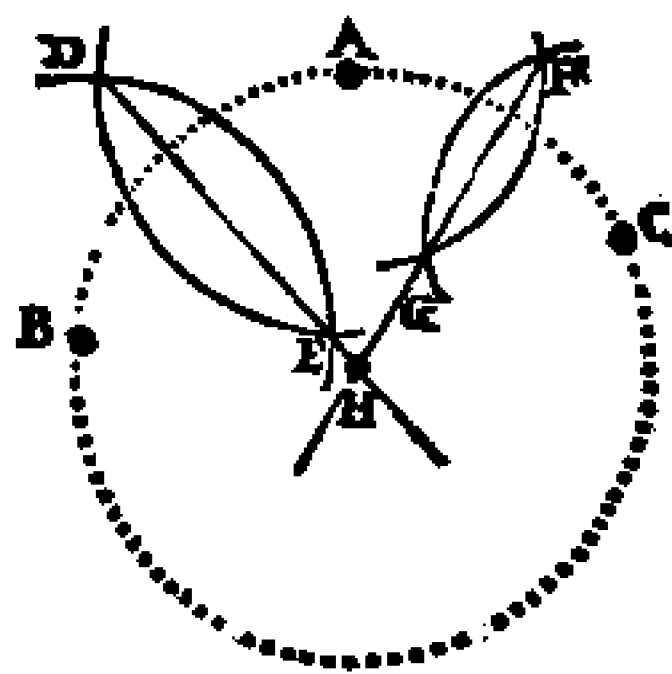
b 31. tertij.

c 31. tertij.

HINC manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, omnes angulos esse acutos, quoniam omnes sunt in maiori segmento circuli: si verò sit in latere BC , angulum BAC , ei lateri oppositum, esse rectum, quod sit in semicirculo: Si denique cadat extra triangulum, angulum oppositum BAC , obtusum esse, cum sit in minori segmento circuli.

CONTRA verò perspicuum est, si triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, siue absurdum. Quia si in acutangulo caderet centrum in unum latus, esset angulus ei oppositus rectus: si verò extra, esset idem angulus obtusus. Item si in rectangulo centrum caderet intra, essent omnes anguli acuti: si verò extra, esset angulus oppositus, obtusus. Denique si in triangulo obtusangulo caderet in unum latus, esset angulus ei oppositus, rectus: si verò intra, omnes anguli essent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius corollarij colliguntur, & pugnant cum hypothesis.

SCHOLIUM.



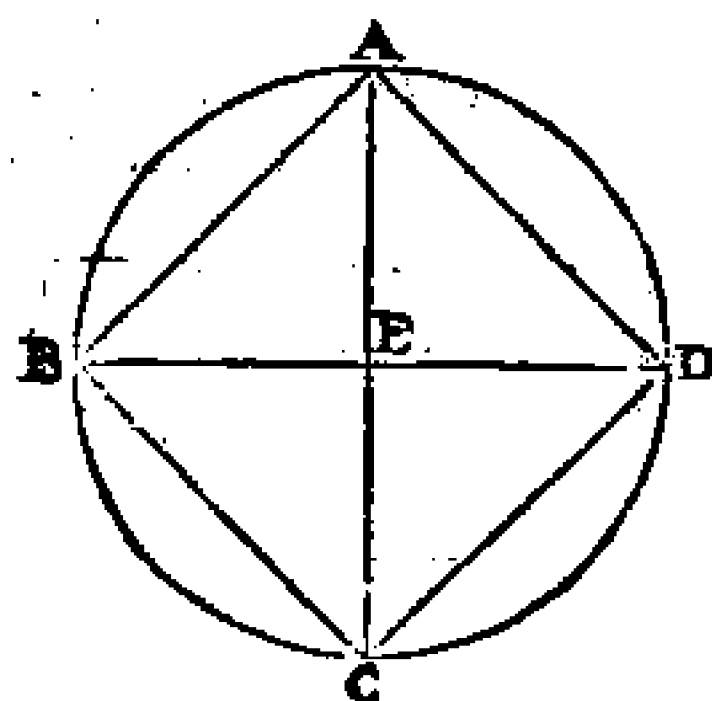
COLLIGITUR etiam ex hoc problemate, quam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in una recta linea existentia transeat. Nam si data puncta tribus rectis iungantur, ut constriatur triangulum, facile circa ipsum circulus describetur, ut hac propositione traditum est. Quod ramen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propof. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C ; Ex A , & B , quouis intervallo eodem duo arcus describatur se interfecantes in D , & E , punctis, per quæ recta linea ducatur DH . Item ex A , & C , quouis alio intervallo eodem, vel etiam, si placet, priori illo, alij duo arcus delineentur, secantes sese in F , & G , punctis, per quæ recta ducatur FH , secans rectam DH , in H . Dico H , esse centrum circuli transeantis per data puncta A, B , & C . Nam si ducantur

uentur recta AB, AC, BC, diuiderentur latera AB, AC, trianguli ABC, bisariam à rectis DH, FH, seu demonstratum est in praxi illa propof. 25. lib. 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum ABC, descripti. Quod est propofitum.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

6.

IN dato circulo quadratum describere.



SI T in dato circulo ABCD, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes sese ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico ABCD, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus EC, ED, trianguli CED, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; erunt bases AB, BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD; Item rectæ CD, DA; Et rectæ DA, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum recti; erunt quatuor arcus, quibus insunt, æqua-

a 4. primi

b 2. tercia

c 29. tercia

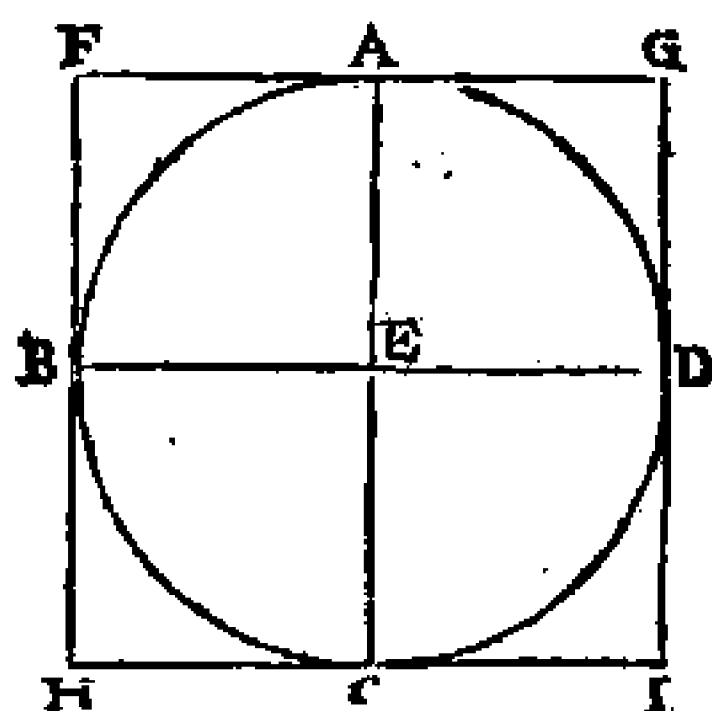
d 31. tercia

les; ac proinde & rectæ quatuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD, inter se æqualia sunt. Sunt autem, & anguli recti, cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit ABCD; proptereaq; in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

7.

CIRCA datum circulum quadratum describere.



SI T circa datum circulum ABCD, cuius centrū E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se in E, centro, ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculæ FG, FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H, I, G. Quod enim coeant AF, BF, patet ex eo, quod ducta recta AB, faciat cum AF, BF, duos angulos duobus rectis minores: atque ita de reliquis. Dico FHIG, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli AEB, FEB, sint recti, erunt FH, AC, parallelæ; similiterque erunt GI, AC, parallelæ. Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur parallelogrammum est ACHF, & erunt late-

a 28. primi

f 30. primi

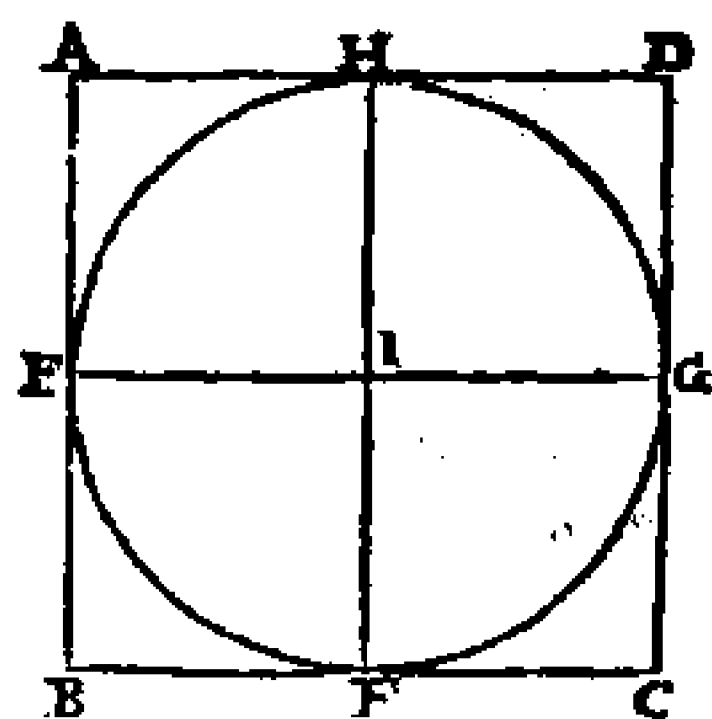
g 34. primi

ra opposita AC, FH, æqualia, & anguli oppositi ACH, AFH, æquales: Sed ACH, est rectus. Igitur & AFH, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse, & latera HI, IG, GF, æqualia esse diametris BD, AC. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera FG, FH, HI, IG, æqualia, ideoque FGHI, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangent, per corollarium propof. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

8.

IN dato quadrato circulum describere.



SI T in dato quadrato ABCD, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bisariam in E, F, G, H, ducantur rectæ EG, FH, secantes se in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales, & parallelæ. Quare & AB, parallela est, & æqualis ipsi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipsi EG. Sunt igitur parallelogramma AIEB, CIEI, ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hæ inter se æquales, cum sint semisses æqualium AD, AB, &c. Quare & rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad intervallum IE, transibit quo-

b 33. primi

que per puncta E, F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propofit. 16. lib. 3. quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat.

i 29. primi

PROBL. 9. PROPOS. 9.

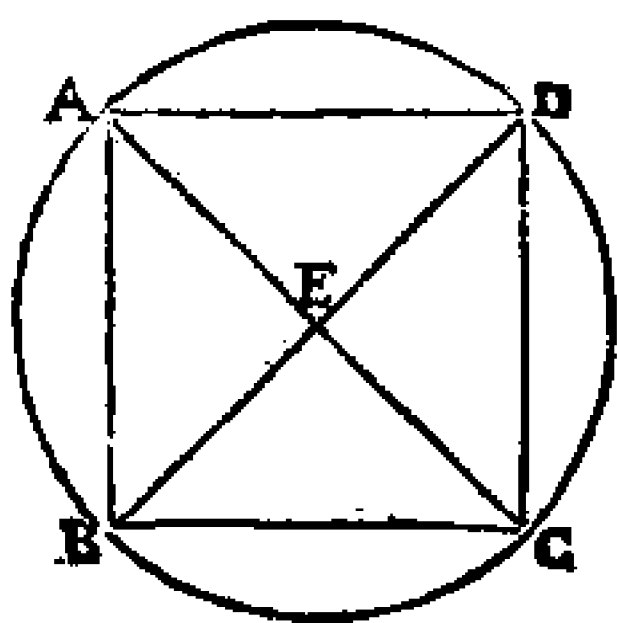
9.

CIRCA datum quadratum circulum describere.

45 primi.

631. primi.

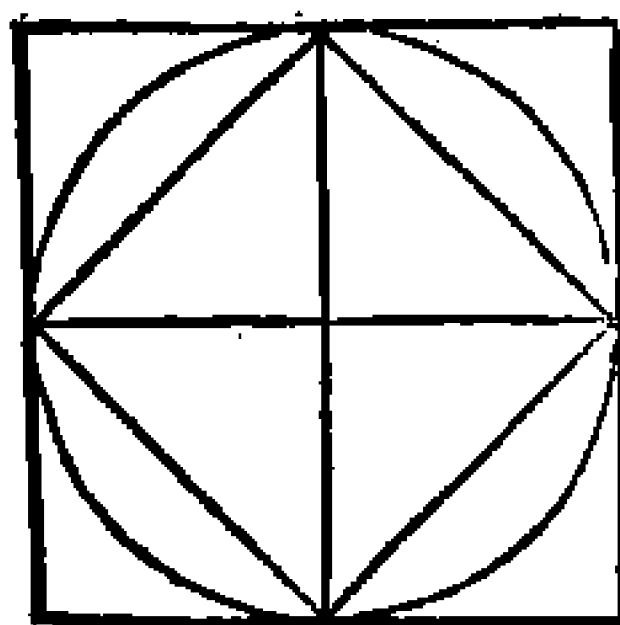
e 6. primi:



Si r describendus circulus circa quadratum $ABCD$. Ducantur diametri AC, BD , secantes se in E . Quoniam igitur latera AB, AD , trianguli ABD , æqualia sunt; erūt anguli ABD, ADB , æquales: Est aut angulus BAD , rectus. Quare ABD, ADB , semirecti erūt. Similiter ostendēmus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D , esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cū ergo anguli EAD, EDA , sint æquales; erunt rectæ EA, ED , æquales. Eadem ratione EA, EB , æquales erunt; nec non EB, EC : Item EC, ED . Quare circulus ex E , descriptus, intervallo EA , transibit per reliqua puncta B, C, D . Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Quod si circa datum circulum describatur quadratū, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit quadratū circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam enim latus quadrati circumscripti aequale est diametro circuli, ut ex 7. propositione huius libri constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum verò diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, ut ad 47. propositionem libri primi ostendimus; Constat propositum.



10.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IS OS CE LES triangulum constituere ; quod habeat utrumque eorum, qui ad
basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

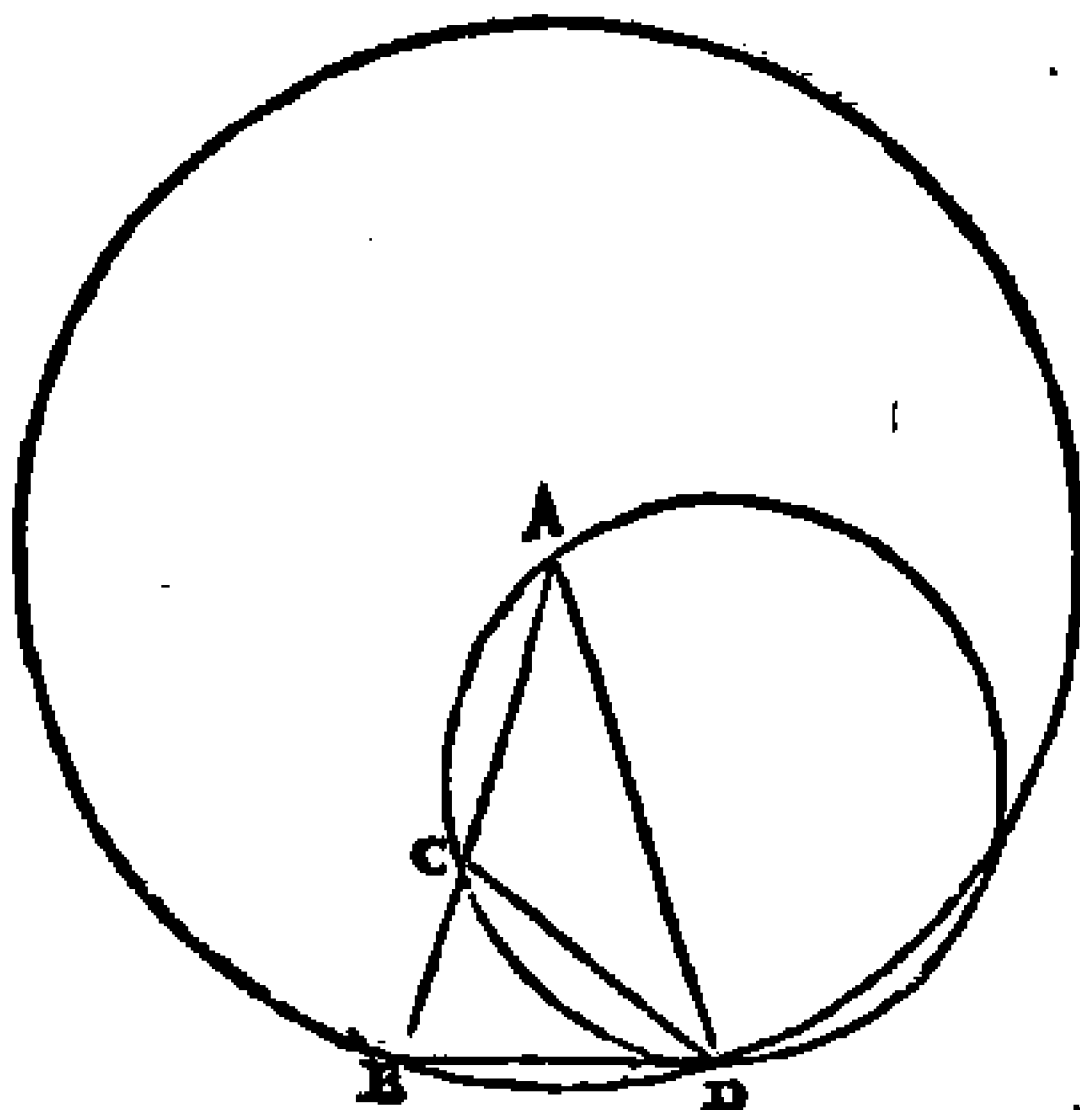
di. f. c. d. i.

21. quart.

f. s. quart.

g 37-cert7-

632.5075



SUMMATVR quæuis recta linea AB, quæ diuidatur in C, ita vt rectangulum sub AB, BC, æquale sit quadrato rectæ AC. Deinde centro A, intervallo verò AB, circulus describatur, in quo accommodetur recta BD, æqualis ipsi AC, iungaturque recta AD. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales sunt, erit triangulum ABD, Isosceles. Dico vtrumque angulorum ABD, ADB, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta CD, describatur circa triangulum ACD, circulus DCA. Quoniam igitur rectangulum sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ BD; & recta AB, secat circumulum DCA: & tanget recta BD, eundem circumulum DCA, in D. Quare angulus BDC, æqualis est angulo A, in alterno segmento CAD. Addito igitur communi CDA, erit totus angulus ADB, æqualis duobus angulis CAD, CDA: Sed his eis-

COROLLARIUM

22. primi.

b3a.prima.

Quoniam verò tres anguli trianguli ABD ,^a aequales sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis duorum rectorum; perspicuum est, angulum A , esse quintam partem duorum rectorum; utrumlibet autem B, D , duas quintas partes. Item A , esse duas quintas partes unius recti, & utrumvis B, D , quatuor quintas partes: quandoquidem omnes tres^b aequales sunt duobus rectis, hoc est, decem quintis unius recti.

SCHOLIVM.

FOR FURTHER problema hoc proponi ad instar theorematu, hoc modo.

Si recta linea secetur, ut propos. 11. lib. 2. traditum est; Isosceles triangulum, cuius basis maiori segmento æqualis est, utrumvis verò laterum æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet utrumlibet angulorum æqualium ad basim, duplum reliqui.

NON est autem quod se excrucient Campanus & Peletarius, ut probent, rectam BD, ita applicari circumlo DCA, ut eum nullo modo fecer. Nam propterea quod quadratum recte BD, aequalit est rectangulo sub AB, BC.

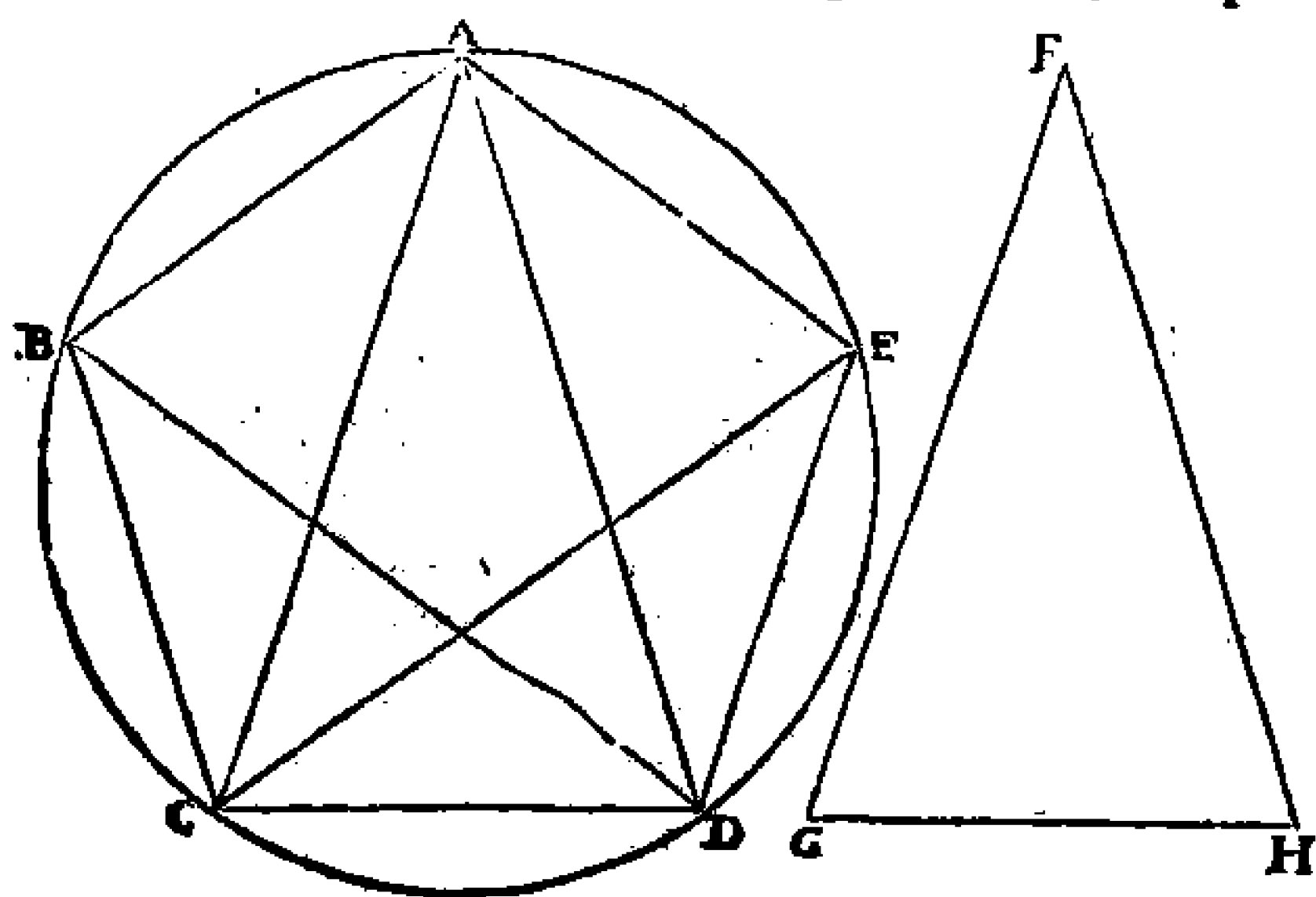
Et ostensum est vltima propos. 3. lib. rectam BD, perpendicularem esse ad semidiametrum circuli ex D; du-
tam. Quare circulum tanget, & nulla ratione secabit.

Quare arte autem construi debeat triangulum Isosceles, cuius vterius angulorum ad basim, ad reliquum
habeat quamcunque proportionem datam; non solum duplam, vt hic ab Euclide factum est, trademus cum
Pappo ad finem lib. 6. Quare res hactenus desiderata est.

PROBL. II. PROPOS. II.

11.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.



SIT in dato circulo AB-
CDE, inscribendum pen-
tagonum æquilaterum, &
æquiangulū. Construat^a 10. quarti.
triangulū Isosceles FGH,
ita vt vterque angulorum
G, H, duplus sit reliqui F: &
in circulo^b inscribat^c trian- b 2. quarti.
gulum ACD, æquiangu-
lum triangulo FGH, & v-
terque angulorum ACD,
ADC, bisariam diuidatur c 9. primi.
rectis CE, DB; atque recte
iungantur AB, BC, CD,
DE, EA. Dico pentagonū
ABCDE, in circulo dato
inscriptum, esse æquilaterū,

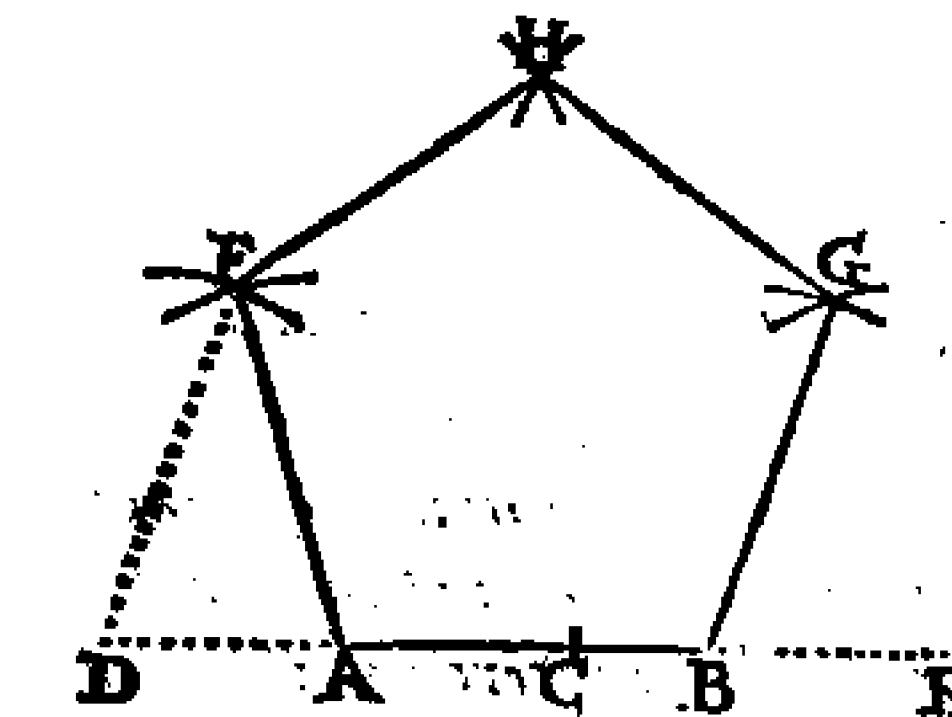
& æquiangulum. Cum enim vterque angulorum ACD, ADC, duplus sit anguli CAD, & diui-
sus bisariam; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, æquales. Quare arcus d 16. tertij.
AB, BC, CD, DE, EA, super quos ascenderunt, atque idcirco, & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, e 29. tertij.
æquales erunt. Equilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus quia arcus AB, ED, æ-
quales sunt; addito cōmuni BCD, fient æquales ABCD, EDCB. Anguli ergo AED, BAE, f 27. tertij.
dictis arcubus insistentes æquales erunt. Eodem modo æquales erūt cuilibet horum angulorum
reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus, quorum singuli externis arcubus æqualibus
componuntur. Equiangulum est ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & æquilaterum esse
sit ostensum, inscriptum erit in dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum: Quod
faciendum erat.

COROLLARIUM.

SEQUITUR hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas
partes duorum rectorum, vel sex quintas vnius recti. Cum enim tres anguli BAC, CAD, a 27. tertij.
DAE, æquales sint, vt ipse qui æqualibus arcubus BC, CD, DE, insistant; sit autem CAD,
per coroll. precedentis propositionis quinta pars duorum rectorum, vel dua quinta vnius re-
cti; erit totus BAE, tres quinta duorum rectorum: vel sex quinta vnius recti.

SCHOLIUM.

Quod si detur recta linea terminata CD, super ea constituemus pentagonum æquilaterum, & æquian-
gulum, hoc modo. Fiat triangulum Isosceles FGH, habēs vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui an- b 10. quarta-
guli F. Deinde constituantur anguli ACD, ADC, æquales angulis G, H, coeantq; rectæ CA, DA, in A, & que ti.
efficient angulum CAD, æqualem angulo F; ac propterea trianguli ACD, vterque angulorū ACD, ADC, c 32. primi.
duplus erit reliqui anguli CAD. Iam verò circa triangulum ACD, circulus^d describatur ABCDE; In quo d 5. quarti.
cum sit inscriptum triangulum ACD, si anguli ACD, ADC, bisariam secentur, inscribetur, vt prius, pen-
tagonum æquilaterum & æquiangulum, cuius latus est recta CD. Quod est propositum.



FACILIVS idem efficiemus hac ratione. Secta recta propo-
sita AB, supra quam pentagonum æquilaterum, & æquiangu-
lum constituendum est, in C, vt propos. 11. lib. 2. traditum est, produ-
catur ad vtramque partem, sintq; AD, BE, maiori segmento AC,
æquales. Intervallo deinde data recta AB, ex A, D, duo arcus descri-
bantur, secantes sese in F. Item ex B, E, eodem intervallo alij duo
se interfecantes in G. Denique ex F, G, eodem intervallo alij duo se
diuidentes in H, coniunganturq; rectæ AF, FH, HG, GB. Dico pen-
tagonum ABGHE, super datam rectam AB, descriptum, esse æ-
quilaterum, atq; æquiangulum. Quod enim sit æquilaterum, con-

stat ex constructione, cum omnes lineæ ipsi AB sumptæ sint æquales: hoc est, omnes arcus descripti sint ad in-

teruallum AB . Quod autem sit & equiangulum, ita ostendetur. Ducta recta DF , erit ADF , isosceles, quod ab Euclide propof. 10. constructum est, ut ex scholio eiusdem propositionis manifestum est, propterea quod basis AD , æqualis est maiori segmento AC . Linea AB , utramvis verò laterum æqualium ipsi AB , æquale. Quare ex coroll. eiusdem propof. 10. angulus DAF , continebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorum rectorum, nimirum BAF , reliquas tres quintas duorum rectorum continebit. Cum ergo ex corollario huius propositionis angulus pentagoni æquilateri, & equianguli complectatur res quintas duorum rectorum, erit BAF , angulus pentagoni æquilateri, & equianguli. Eademq; ratione erit ABG , angulus pentagoni æquilateri, & equianguli. Ex quo sequitur, totum pentagonum esse equiangulum. Si enim compleatur, aut concipiatur esse completum, hoc est, super E, G , cogitentur descripta duo alia latera, cadent ea necessario in punctum H . Alioquin, si supra H , aut infra conuenerent, ^a essent ea vel maiora, vel minora rectis FH, GH , ut constat, si angulo H , subtenderetur basis FG : atque idcirco alia lateribus FA, AB, BG , æqualia non forent. quod est absurdum. Pentagonum ergo $ABGHF$, & æquilaterum, & equiangulum est. Quod erat ostendendum.

12.

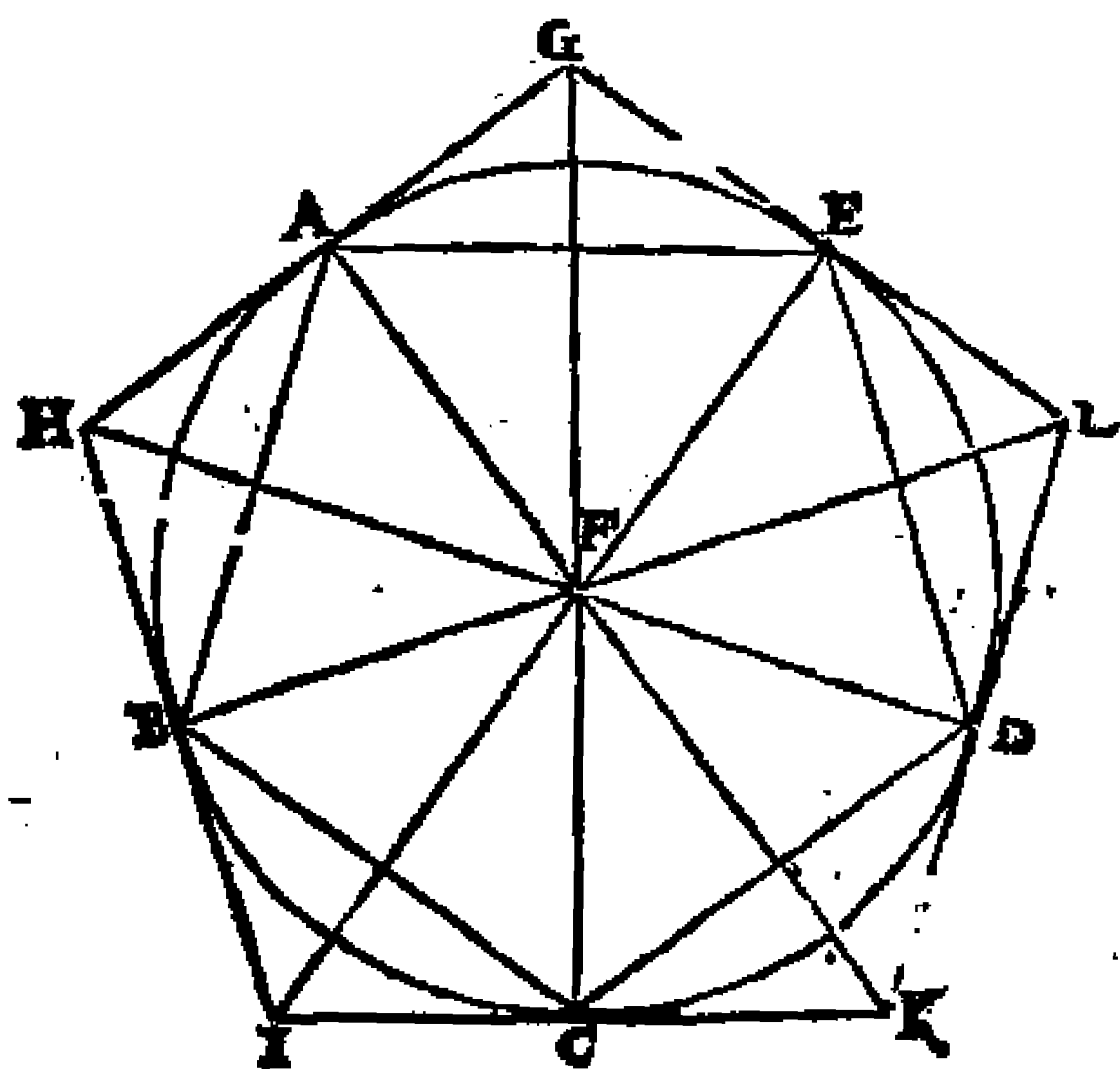
PROBL. 12. PROPOS. 12.

CIRCA datum circulum, pentagonū æquilaterū, & æquiangulum describere.

a 11. quarti.

b 13. primi.

c 47. primi.



Si r circa datū circulum $ABCDE$, describendum pentagonū æquilaterū, & æquiangulum. ^a Inscribatur in eo pentagonū æquilaterum, & æquiangulum $ABCDE$, & ex centro F , ducantur rectæ FA, FB, FC, FD, FE , ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG , coeūtes in G, H, I, K, L . Cū enim anguli $GAE, GE A$, duobus sint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum FAG, FEG , ^b coibunt rectæ AG, EG , ad partes G , & sic de aliis. Et quia ipsæ tangent circulum, per coroll. propof. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum $GHIKL$, circa circulum quod dico esse æquilaterum, atq; æquiangulum. Ductis enim rectis FG, FH, FI, FK, FL , erūt quadrato rectæ FH , ^c æqualia tam quadrata rectarū FA, AH , quā rectarum FB, BH . Quare quadrata rectarum FA, AH , æqualia erunt quadratis re-

ctarum FB, BH . Dempstis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium FA, FB , remanebunt quadrata rectarum AH, BH , æqualia; ideoque & rectæ AH, BH , æquales erunt. Quod etiam constat ex coroll. 2. propof. 36. lib. 3. cū AH, BH , ex eodem puncto H , ducantur circulum tangentes in A, B . Quoniam ergo latera AF, FH , trianguli $A FH$, æqualia sunt lateribus BF, FH , trianguli $B FH$: Est autem & basis AH , basi BH , æqualis, ut ostensum est; ^d erunt anguli $A FH, B FH$, æquales. Igitur & anguli $A HF, B HF$. Duplus igitur est angulus $A FB$, anguli $B FH$; & angulus $A HB$, anguli $B HF$. Eodem modo ostendemus, angulum $B FC$, duplum esse anguli $B FI$, & angulum $B IC$, anguli $B IF$. Cū igitur ^e anguli $A FB, B FC$, sint æquales, quod insistant circumferentiis AB, BC , & quæ æquales sunt, cū a rectis æqualibus subtendantur AB, BC , erunt & dimidij eorum $B FH, B FI$, æquales. Quocirca cū duo anguli $B FH, H BF$, trianguli $B FH$, æquales sint duobus angulis $B FI, I BF$, trianguli IFB , & latus illis adiacens commune BF , ^f erunt & latera BH, BI , æqualia, & anguli $B HF, B IF$, æquales. Dupla est ergo recta HI , rectæ NB . Eademque ratione ostendemus GH , rectam duplam esse rectæ HA . Sunt autem ostensæ æquales NB, HA . Igitur & earū duplæ HI, HG , æquales erunt. Similiter demonstrabimus, rectas IK, KL, LG , æquales esse cuilibet rectarum HI, HG . Equilaterū ergo est pentagonum $GHIKL$. Rursus quoniam ostensum est, angulos $B HF, B IF$, æquales esse, ac semisses angulorum $B HA, B IC$, erunt & eorum dupli $B HA, B IC$, æquales. Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH , æquales erunt cuilibet angulorum $B HA, B IC$. Equiangulum igitur est pentagonum $GHIKL$. Quapropter cū & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

d 8. primi.

e 4. primi.

f 27. primi.

g 18. primi.

h 16. primi.

COROLLARIUM

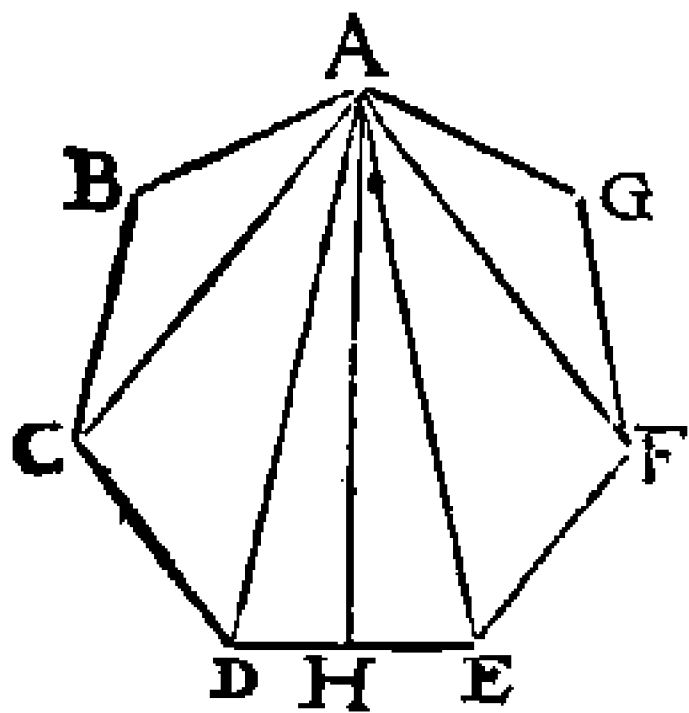
SEQUITUR ex huius problematis demonstratione, si in circulo quacunque figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos duarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares consisteret aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulosque conficere æquales: si enim mirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, ut in pentagono factum est; quæ quidem ipsos angulos

angulos bifariam secabunt; quemadmodum in pentagono hic probatum est, &c.

S C H O L I V M.

Ita referendum est theorema sequens ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectans, quod perutile erit ad inueniendâ centra circulorum circa ipsas figuras, siue intra ipsas describendorum, ut ex sequenti- bus patebit.

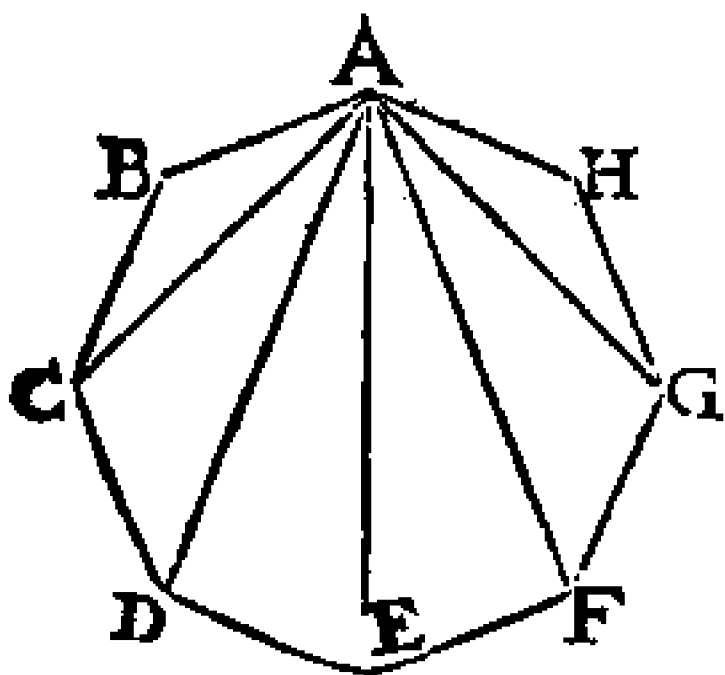
In figura æquilaterra, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta li- nea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam; Et contrâ, recta linea diuidens angulum bifariam, secat quoque latus oppo- situm bifariam: Si verò numerus angulorum est par, recta linea ex quouis angulo ad oppo- situm angulum ducta secat vtrumque angulû bifariam; Et contrâ, recta linea secans quem- uis angulum bifariam, cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.



Si t primû figura æquilaterra, æquiangulaq, imparium laterum ABCDEFG, & ex angulo A, demissa recta AH, secet latus oppositum DE, bifariam. Dico angulum quoque BAG, sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera BA, BC, duobus lateribus GA, GF, æqualia sunt, angulosq, continent æ- quales, ex hypothefi; ^a erunt & bases AC, AF, æquales, & tam anguli ^a 4. primi. BAC, GAF, quàm BCA, GFA: ac proinde cû toti anguli BCD, GFE, ponantur æquales; erunt quoq, reliqui ACD, AFE, æquales. Quia igitur rursus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, æqualia sunt, conti- nentq, angulos æquales, ut ostensum est; ^b erunt & bases AD, AE, æqua- ^b 4. primi.

les, & tam anguli CAD, FAE, quàm CDA, FEA. Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppositum perueniunt sit. Vbi quia rursus toti anguli CDE, FED, æquales sunt, erunt quoque reliqui ADH, AEH, æ- quales. Quare cû duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, æqualia sint, angulosq, æquales contineant, ^c c 4. primi. erunt etiam anguli DAH, EAH, æquales. Quocirca cû quouis anguli BAC, CAD, DAH, totidem anguli GAF, FAE, EAH, sint æquales, singuli singulis; erit quoq, totus angulus BAH, toti angulo GAH, æqua- lis; ac proinde angulus BAG, sectus erit bifariam. Quod est propositum.

SE D iam recta AH, secet angulum BAG, bifariam. Dico eam secare quoque latus oppositum DE, bifa- riam. Si enim dicatur latus DE, non secari bifariam, si ex A, ducatur alia recta secans DE, bifariam, secabit eadem & angulum BAG, bifariam, ut iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAG, secabunt bifariam. quod est absurdum, cû vna medietas maior esset, quàm altera. Recta ergo AH, secans angulum BAG, bifariam, secat quoq, latus DE, bifariam. Quod est propositum.



Si t deinde figura æquilaterra & æquiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppositum E, ducatur recta AE. Dico rectam AE, secare tam angulum BAH, quàm angulum DEF, bifa- riam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis; demon- strabimus, ut in antecedente figura quouis angulos BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE, esse æquales, singulos singulis; ideoq, totum angulum BAE, toti angulo HAE, æqualem esse, nec non & angu- lum DEA, FEA, esse æqualem. Vterque igitur angulus BAH, DEF, secatur bifariam. Quod est propositum.

SE D recta iam AE, secet angulum BAH, bifariam. Dico eam cade- ro in angulum oppositum E, eumque diuidere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, si ex A, ad E, du- catur alia recta, secabit ea angulum BAH, bifariam, ut iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angu- lum BAH, bifariam secabunt. quod est absurdum. Recta ergo AE, secans angulum BAH, bifariam, ca- dit in E, secatque propterea, ut demonstratum est proximè, angulum DEF, bifariam quoque. Quod est propositum.

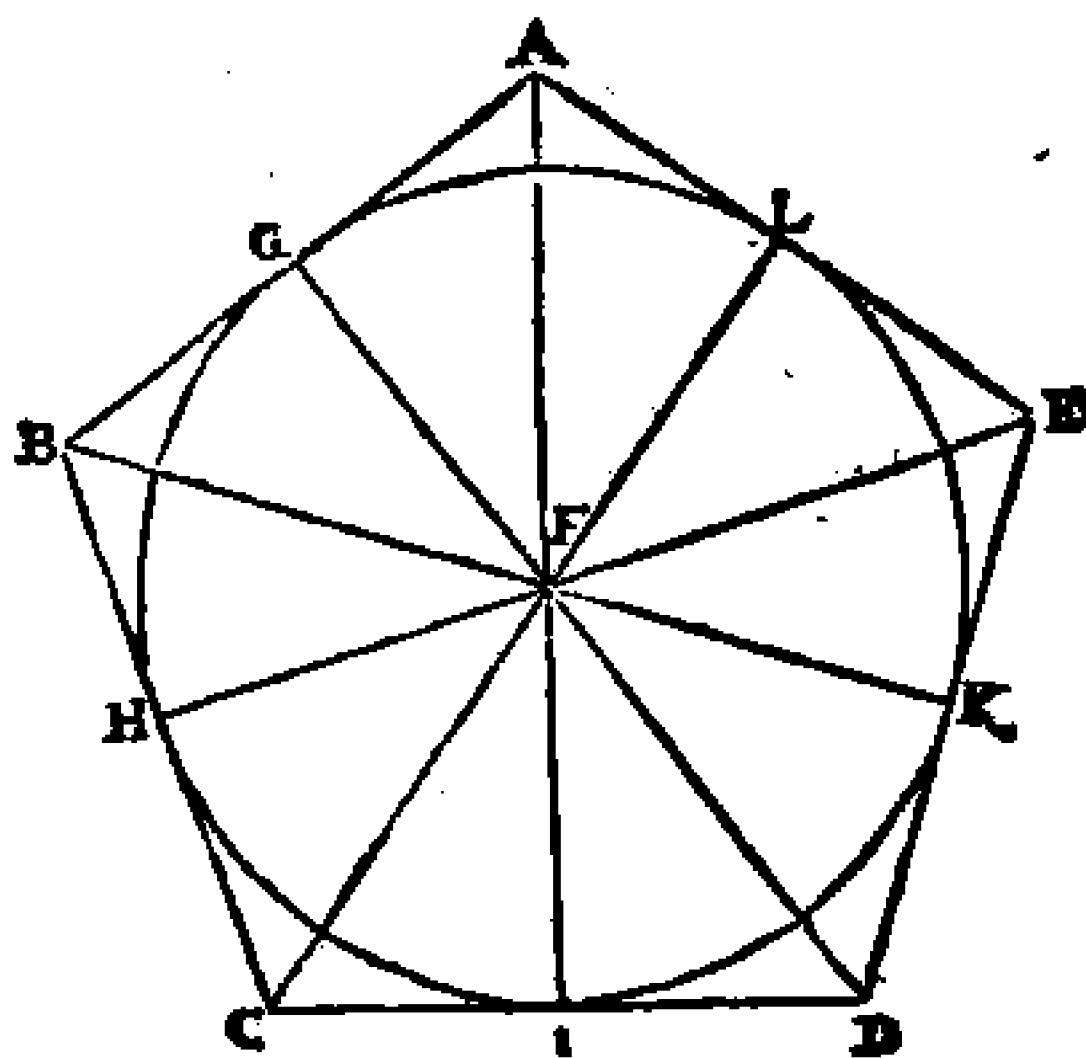
PROBL. 13. PROPOS. 13.

13.

IN dato pentagono æquilaterra & æquiangulo circulum inscribere.

Si t inscribendus circulus in dato pentagono ABCDE. Diuidantur duo eius anguli BAE, ^a 9. primi. ABC, proximi bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F. Cû enim ex scholio præcedentis pro- positionis rectæ AF, BF, secant opposita latera CD, DE, bifariam, necesse est, duas rectas AF, BF, se mutuò intra pentagonum secare, priusquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt lateribus CB, BF, trianguli CBF: Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales ABF, CBF; ^b erunt bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cû igitur anguli BAE, BCD, po- ^b 4. primi.

a 26. primi



nantur æquales, & BAF, dimidiū sit anguli BAE, per constructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Diuisus est ergo angulus BCD, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diuisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula pentagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli FAG, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli FAL; estque latus AF, subtensum vni æqualium angulorum, commune; erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet istarū. Circulus igitur descriptus ex centro F, & intervallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam verò latera pentagoni circulum hūc tangunt, per corollarium propof. 16. lib. 3. eō quod angulos rectos faciant cum semidia-

metris FG, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

S C H O L I V M.

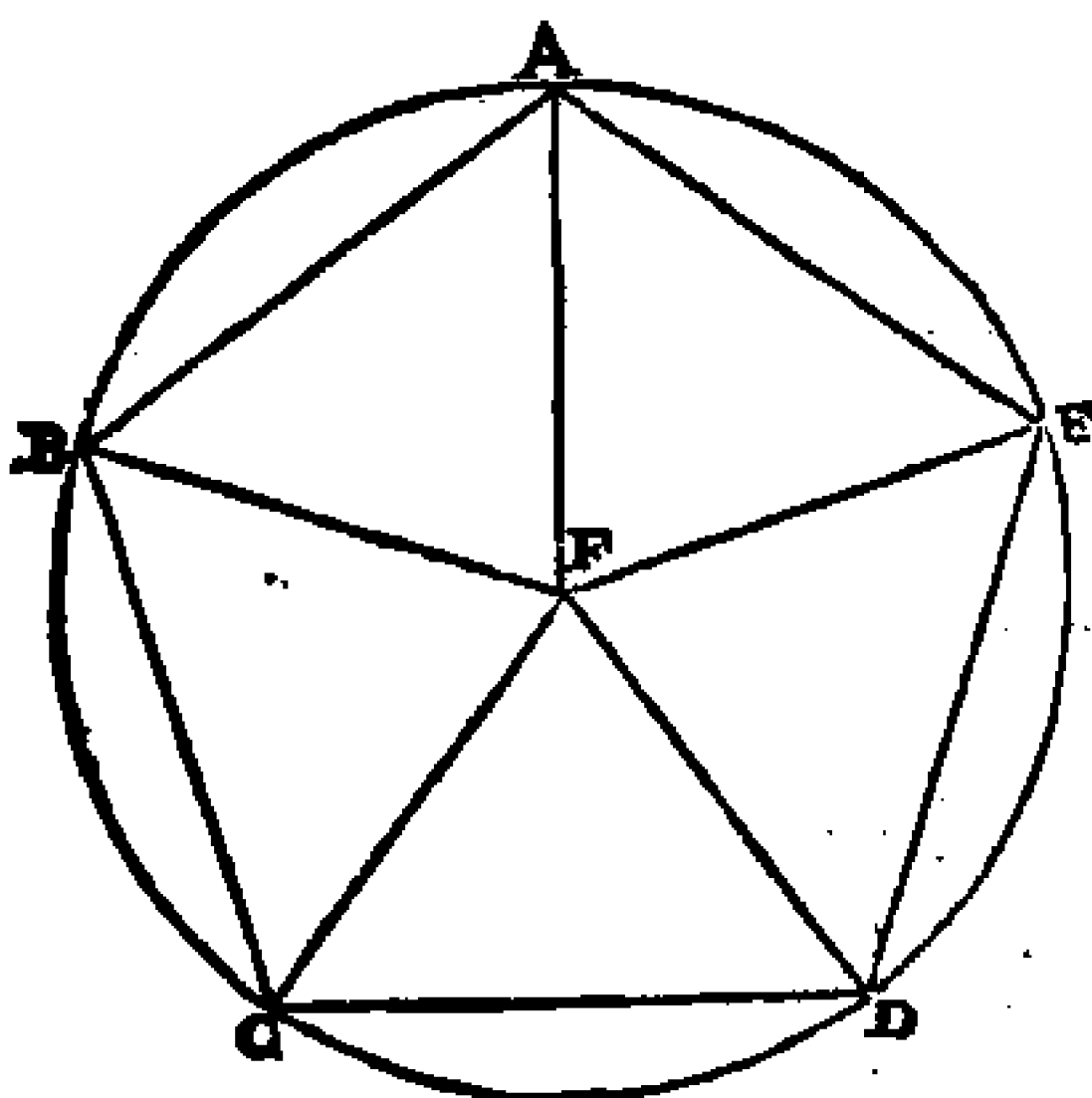
EADEM prorsus arte in quacunque figura æquilatera, & æquiangulari circulum describemus. Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, si ex puncto concursus linearum angulos diidentium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter se esse æquales: ac proinde punctum illud concursus centrum esse circuli inscribendi. Concurrent autem necessarīo intra figuram duæ illæ rectæ, quæ angulos duos proximis secant bifariam: propterea quod in figura imparium laterum diuidunt latera opposita bifariam; in figura verò parium laterum angulos oppositos bifariam, ut in scholio antecedenti propof. ostensum est.

14.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonū æquilaterum & æquiangulum circulum describere.

b 6 primi.



Si r circa pentagonum ABCDE, æquilaterum & æquiangulū, circulus describendus. Diuisis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonum, ut in antecedente propositione demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, ut in præcedenti problemate, reliquos etiā angulos BCD, CDE, DEA, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, & toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales sunt FAB, FBA; erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, intervallo autem FA, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa

datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

S C H O L I V M.

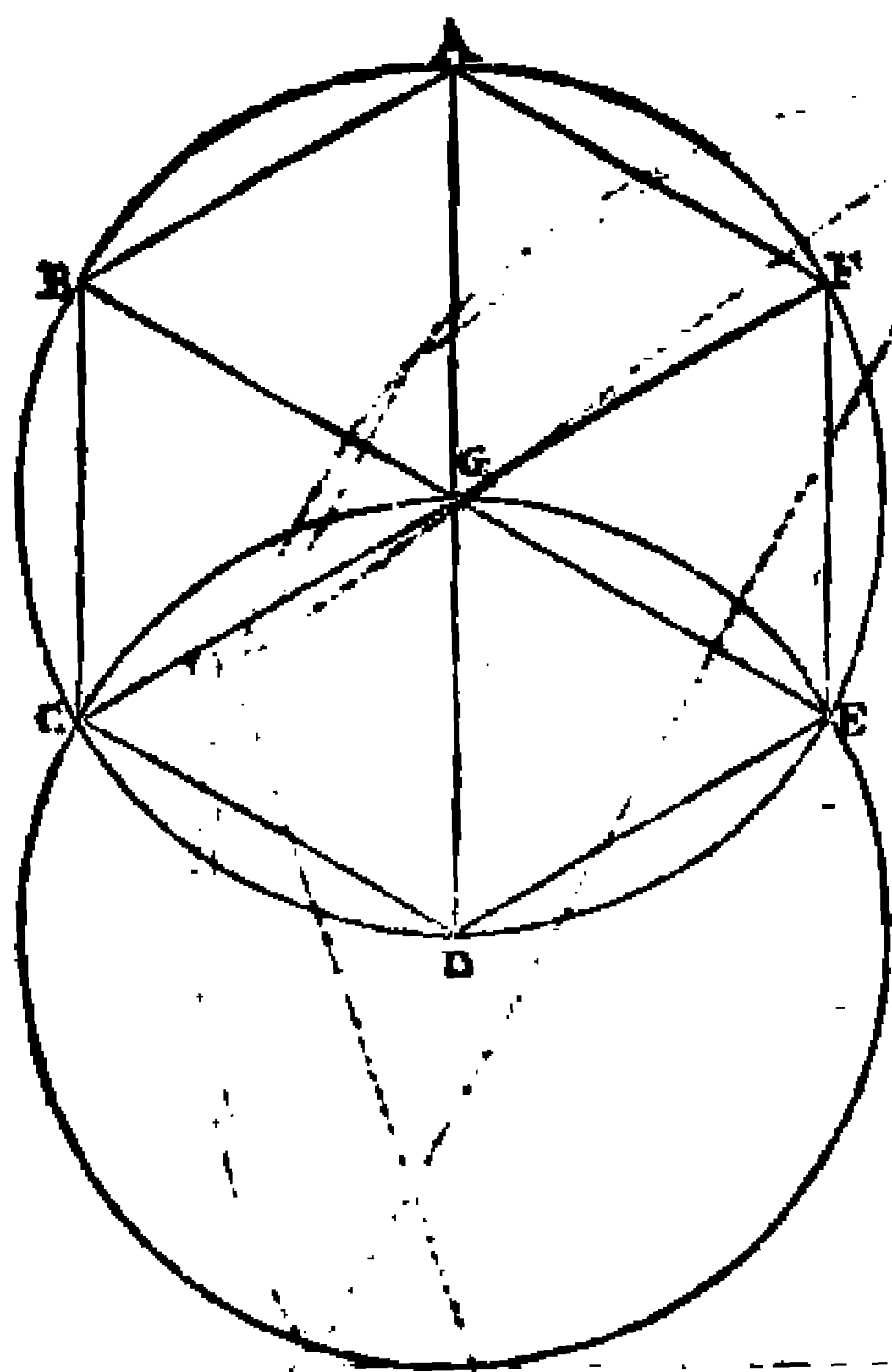
EODEM prorsus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulari circulum describemus. Semper enim ostendemus diuisis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concursus linearum angulum diidentium ad angulos figuræ ductas, inter se esse æquales: ac propterea punctum illud concursus centrum esse circuli circumscribendi, ut in scholio præcedenti propositionis diximus.

15.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

Si r in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G, inscribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Ducta diametro AD, describatur circulus ex centro D, intervallo verò DG, qui secet circulum datum in punctis C, & E, & quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF, quod dicesset & æquilaterū, & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis sit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ DG, ex definitione circuli, erunt &



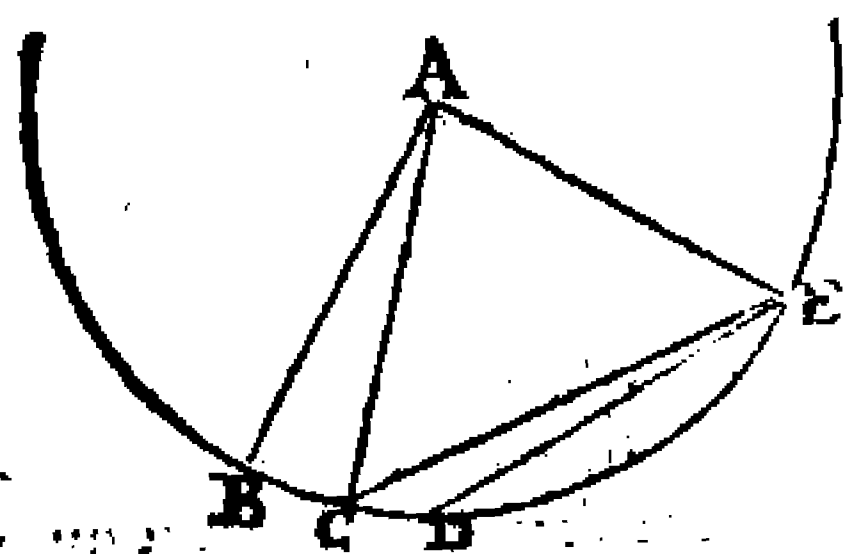
rectæ GC, DC, æquales inter se: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se erunt: quicūq; æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum. Sunt autē tres anguli CGD, DGE, EGF, æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se æquales, quibus cum etiam æquales sint ad verticem anguli FGA, AGB, BGC, erunt sex anguli ad centrum G, æquales. Quare circumferentiæ, quibus insistant, ac propterea rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum est hexagonum ABCDEF. Rursus quia circumferentia BC, æqualis est circumferentiæ AF; si addatur communis CDEF, erunt circumferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, æquales erunt. Similiterque ostendemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insitit arcui composito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripā, deimptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoque est hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendum erat.

C O R O L L A R I V M.

Hinc manifestum est, hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam DC, latus hexagoni, æquale est semidiametro DG, ex definitione circuli.

S C H O L I V M.

CÆTERVM per ea, quæ dicta sunt de pentagono, propositione duodecima, decimatertia, & decimaquarta, describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatere, & æquiangulo circulum inscribemus, & denique circa idem hexagonum describemus circulum. Nam, ut hexagonum circulo circumscribatur, inscribendum prius erit hexagonum intra circulum, ut hac propositione decimaquinta docuit Euclides. Si vero circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum describendus sit, diuidendi erunt duo anguli proximi bisariam. Reliqua deinde perficienda, ut propositione duodecima, decimatertia, decimaquarta traditur.



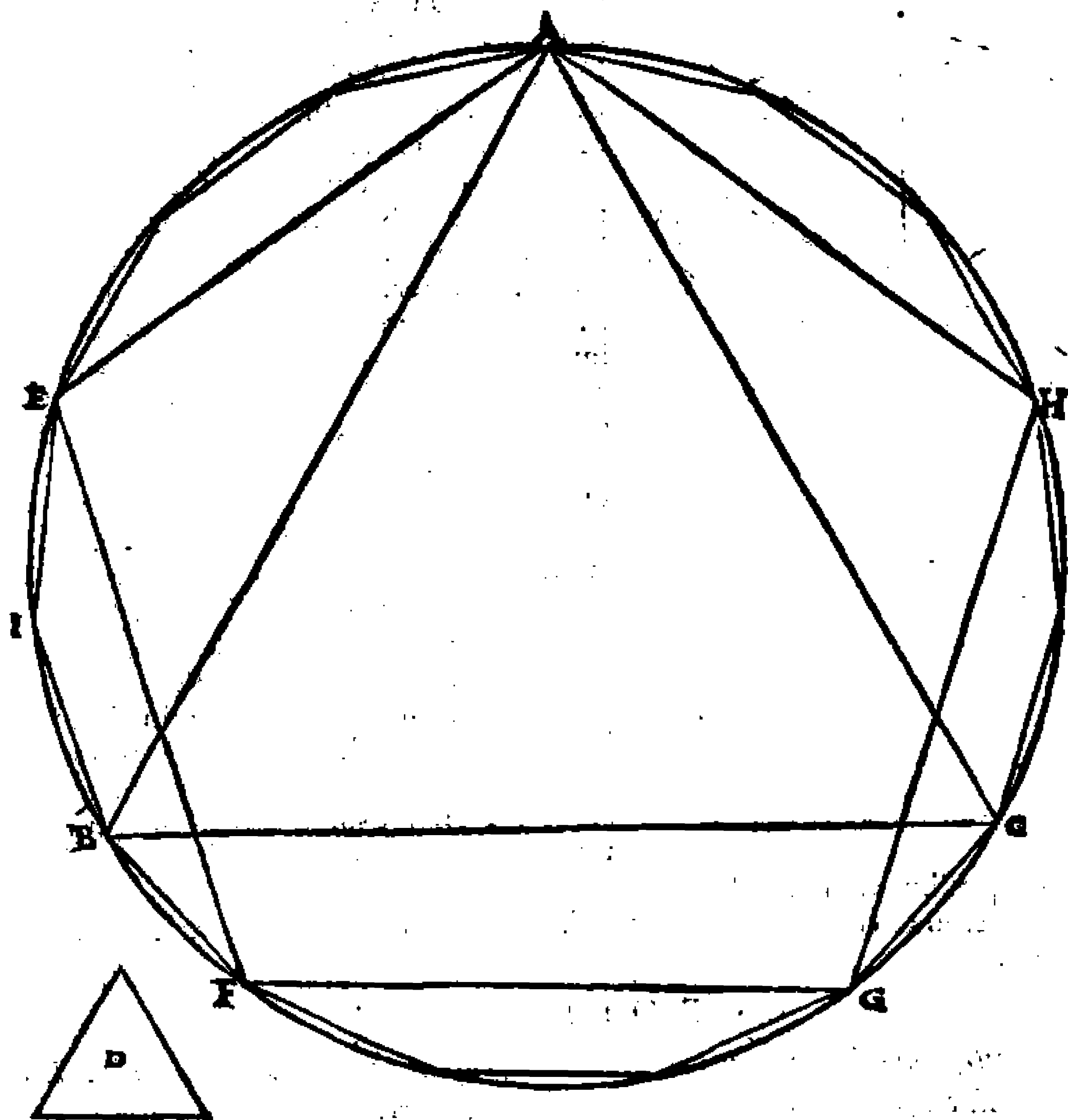
PORRO ex his quoque facile demonstrabimus, dari posse triangulum isosceles oxygonium, cuius tertium latus utrovis æqualium maius sit; siue in quo utrumvis latus æquale tertio minus sit. Id quod ad definitionem vigesimam octauam libri primi admonuimus. Sit enim A, centrum circuli BCDE, in quo sexta pars sit DE, & quarta BE. Erit ergo subtensa DE, semidiametro æqualis. Et si ex quouis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur CE; erit hac maior, quàm DE, ex scholio propositionis vigesime nonæ libri tertij, hoc est, maior, quàm semidiameter. Quare iunctis duabus semidiametris AC, AE, erit triangulum ACE, isosceles, cuius tertium latus CE, utrovis æqualium AC, AE, maius est. Dico idem esse oxygonium. Quoniam enim anguli ACE, AEC, æquales sunt, & simul duobus rectis minores, erit uterque acutus. Ducta item recta AB, erit angulus BAE, quadranti BE, in centro insistentis rectus, ex scholio propositionis vigesime septimæ libri tertij: ac proinde CAE, acutus erit. Oxygonium ergo est isosceles triangulum ACE, habens tertium latus CE, utrolibet æqualium maius. Quod est propositum.

P R O B L. 16. P R O P O S. 16.

161

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT in dato circulo ABC, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatere D, quod ex corollario propof. 6. lib. 1. erit etiam æquiangulum; a 2. quart.



a 26. vel 28. *tertij.* inscribatur ei æquiangulum triangulum ABC, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterum, ex corollario propos. 6. lib. 1. eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas AB, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli ABC. Qualium igitur partium æqualium quindecim est circumferentia tota ABC, talium quinque erit arcus AB, qui tertia pars est totius circumferentiae. Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum A EFGH, applicans unum angulorum ad punctum A, eruntque quinque arcus AE, EF, FG, GH, HA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia ABC, talium trium erit arcus AE, quinta pars existens totius circumferentiae. Itaque cum arcus AB, contineat tales partes quinque, & arcus AE, tres, continebit reliquos arcus EB, duas. Diviso ergo arcu EB, bisariam in I, erit arcus BI, pars decima quinta totius circumferentiae. Quare ducta recta BI, subtendet decimam quintam partem totius circumferentiae, cui si aliz quatuordecim, æquales in circulo accommodentur, inscriptum erit in circulo quindecagonum æquilaterum, quod f & æquiangulum est, cum eius anguli subtendant arcus æquales, compositos videlicet ex 12. arcibus æqualibus omnes, ut perspicuum est. In dato igitur circulo quindecagonum, &c. Quod faciendum erat.

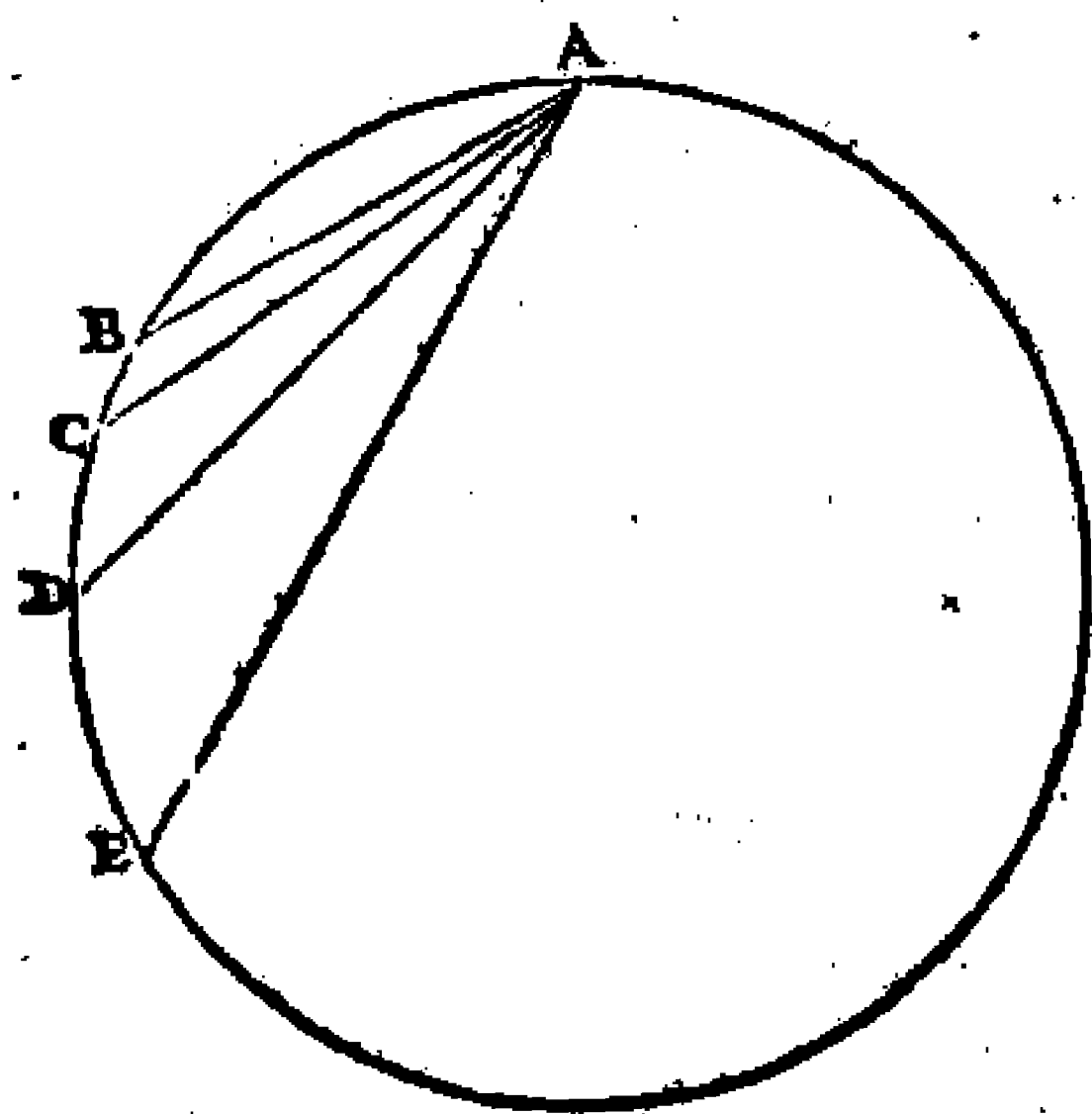
Similiter autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circum quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Item in dato quindecagono æquilatere, & æquiangulo circum inscribemus, & tandem circa datū quindecagonum describemus circum.

SCHOLIUM.

Ex huius problematis structura, atq; demonstratione colligi potest methodus, atq; ars quædam, qua infinita propemodum figura in dato circulo inscribantur. Nam quia recta AB, denominatur a ternario, quod ea sit latus trianguli æquilateri, & recta AE, a quinario, quod ea sit latus pentagoni, si multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duobus lateribus in circulo descriptis, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumq; æqualium, hac ratione. Denominator lateris AB, hoc est, 3. exceditur a denominatore lateris AE, id est, a 5. binario. Igitur arcus BE, continebit duo latera figure prædictæ, Ideoq; diviso arcu BE, bisariam in I, erit subtensa recta BI, latus figure 15. laterum, angulorumque æqualium, ut demonstratum fuit. Hac fere arte usus est Euclides in describendo Quindecagono intra circum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

Si in circulo ab eodem puncto inscribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum,

rum, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figure inscribendæ in eodem circulo, quot unitatibus inter se differunt denominatores eorundem laterum: Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot unitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.



INSCRIBATUR in circulo $ABCDE$, initio semper factò à puncto A , plurima latera; Hexagoni quidè AB , pentagoni verò AC , & quadrati AD , trianguli denique æquilateri AE . Quoniam igitur denominator lateris AB , nimirum 6. excedit denominatorem lateris AC , nempe 5. unitate; continebit arcus BC , inter ea latera inclusus unum latus figura 30. laterum, angulorumque æqualium. Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita esse, sic demonstrabitur. Qualium partium æqualium 30. est tota circumferentia, talium 5. est arcus AB , sexta pars circumferentie; & talium 6. est arcus AC , quinta pars circumferentie. Igitur arcus BC , unam talem continebit partem.

PARI ratione arcus BD , continebit duo latera figura 24. laterum, angulorumque æqualium. Nam denominator lateris AB , videlicet 6. superat dominatorem lateris

AD , nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.

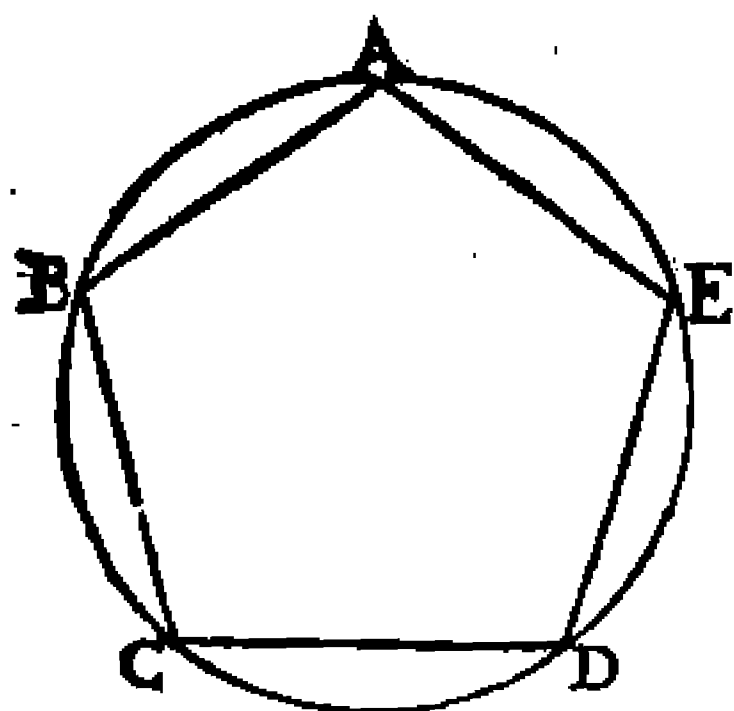
ITÆ quoque arcus BE , comprehendet tria latera figura 18. laterum.

ARCVS verò CD , complectetur unum latus figura 20. laterum.

ARCVS autem CE , duo latera figura 15. laterum.

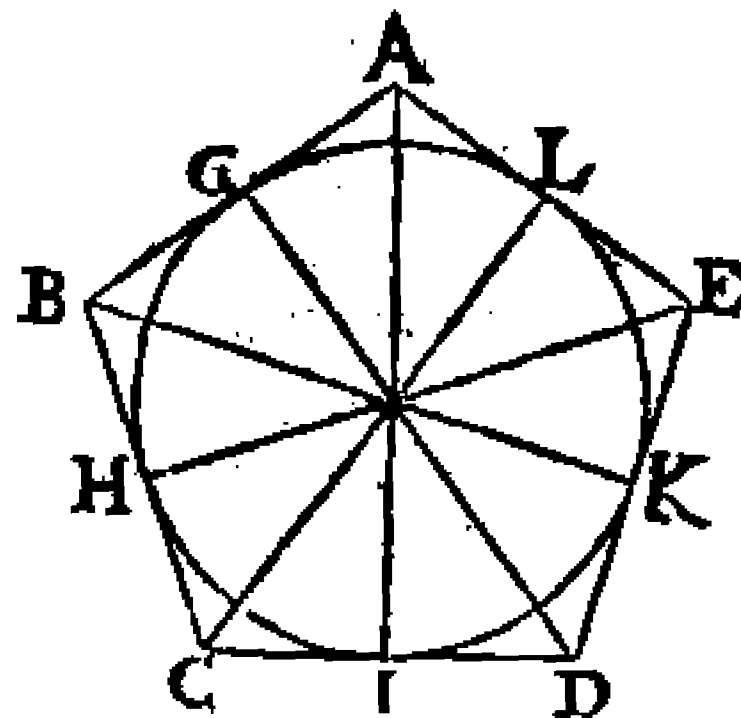
ASCVS denique DE , continebit unum latus figura 12. laterum, angulorumque æqualium. Hac itaq; arte, ac methodo inuestigabuntur fere infinitarum figurarum latera.

NON est autem prætereundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inscriptam, esse quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam necessariò æquiangulam quoque esse, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar; vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunque, ut quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximus. quod est contra hypothesim.) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re nonnulli hallucinati sunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam, necessariò esse quoque æquiangulam: inter quos est Campanus, Euclidis non obscuri nominis interpres.



SI ENIM figura æquilatera, quotcunque angulorum $ABCDE$, circulo inscripta. Dico eam necessariò esse quoque æquiangulam. Cum enim latera AB, BC, CD , sint equalia, ^a erunt arcus quoque AB, BC, CD , æquales: ac proinde & totus arcus ABC , totus arcus BCD , æqualis erit. Reliqui ergo ADC, BED , in eodem circulo æquales erunt. Quocirca ^b anguli ABC, BCD , illis insistentes æquales erunt: Eodemq; modo omnes anguli ostendentur esse æquales, quotquot illi sint; ac propterea figura $ABCDE$, æquiangula est, siue angulorum numerus sit par, siue impar. Quod ostendendum erat.

SI RURSUS figura æquilatera $ABCDEF$, quolibet angulorum numero imparium circulo, cuius centrum F , circumscripta. Dico enim necessariò esse quoque æquiangulam. Ductis enim ex F centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis, ^c erunt hæc ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes AG, AL , ex coroll. 2. propof. 36. lib. 3. æquales sunt; erunt duo latera AG, AF , duobus lateribus AL, AF , equalia. Cum ergo & bases FG, FL ex centro sint æquales; ^d erunt & anguli ad A , æquales: ac proinde angulus BAE , diuisus erit bisariam. Non aliter ostendemus, reliquos omnes angulos figuræ sectos esse bisariam. Rursus quia duo latera AB, BF , duobus lateribus CB, BF , equalia sunt, anguliq; illi contenti, ostensi æquales; ^e erunt quoque bases AF, CF , & anguli BAF, BCF , æquales. Cum ergo hi anguli sint semisses angulorum BAE, BCD , ut ostensum est, erunt totius anguli BAE, BCD , quoque æquales. Eadem ratione erit recta CF , recta EF , & angulus BCD , angulo DEA , æqualis: Atque ita deinceps, si figura plures habeat angulos, erit semper tertius quisque angulus ei, à quo tertius est, vno relicto in medio, æqua-



a 18. tertij.

b 27. tertij.

c 18. tertij.

d 8. primj.

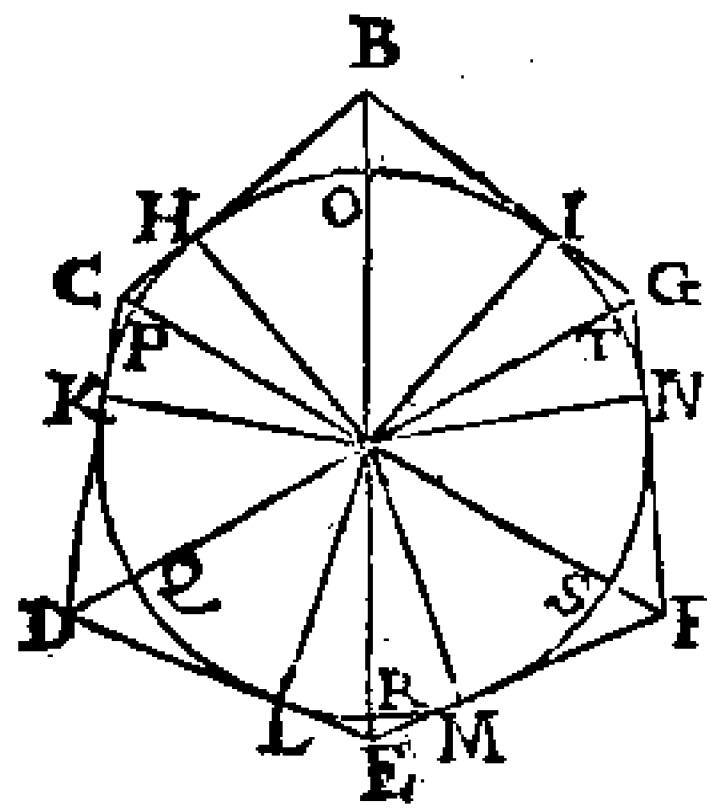
e 4. primj.

li: hoc est, primus (constitui autem potest primus quicumq, angulus) aequalis erit tertio, tertius quinto, quintus septimo, septimus nono, &c. Atque ita omnes anguli in locis imparibus positi, aequales inter se erunt: Eademque ratione omnes anguli parium locorum, ut secundus, quartus, sextus, octavus, decimus, &c. aequales inter se erunt: cum quartus sit à secundo tertius, & sextus à quarto tertium quoq, locum occupet, &c. Itaque quoniam figura proposita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui aequalis ostensus est omnibus angulis locorum imparium, aequalis ultimo angulo impari, qui primo proximus est. Hic autem ultimus angulus erit eadem ratione secundo angulo aequalis, qui tertius est ab ultimo, primo relicto in medio: & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, ut quarto, sexto, octavo, decimo, &c. usq, ad penultimum. Quapropter omnes anguli figura proposita inter se aequales erunt. Quod erat ostendendum.

HAEC demonstratio in figuris aequilateris circulo circumscriptis, quae habent numerum angulorum patrem, locum non habet. Ex ea enim solum concludetur, primum angulum aequalem esse tertio, quinto, septimo, nono, & alijs loca imparia occupantibus; nunquam autem probabitur, primum ultimo esse aequalem, eo quod ultimus locum patrem occupet, ut in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, in octogono octauum, &c. Sic etiam solum ex eadem demonstratione colligetur, angulum secundum aequalem esse quarto, sexto, octauo, decimo, & alijs loca paria occupantibus; nunquam autem ostendetur, secundum angulum esse primo aequalem, propterea quod primus locum imparem occupat. Itaque soli anguli imparium locorum inter se, & soli quoque anguli locorum parium inter se semper conuincuntur aequales.

QVOD si duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodo vnus eorum in loco impari, alter vero in loco pari collocatus sit, fuerint inter se aequales, tum demum per superiorem demonstrationem concludetur omnium angulorum aequalitas. Nam si primus angulus aequalis sit secundo, (quando enim duo anguli proximi sunt aequales, licebit vnum eorum dicere primum, & alterum secundum,) cum ostensum sit, primum esse aequalem quoque omnibus angulis loca imparia occupantibus: secundum vero omnibus parium locorum, erunt omnes inter se aequales. Si autem primus angulus aequalis sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo anguli non proximi sunt aequales, quorum vnus in loco impari, & alter in loco pari existat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel sextum, vel octauum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundus primo proximus est.) cum primus ostensus sit aequalis omnibus alijs locorum imparium, alter vero omnibus parium locorum, atque adeo & secundo angulo: erit quoque primus secundo aequalis: hoc est, duo proximi inter se aequales erunt. Quam ob rem, vt proximè demonstrauimus, omnes anguli inter se erunt aequales.

VERUM si dicat fortan aliquis, quanquam ex ea demonstratione colligi nequeat, omnē figuram equilateram, cuius angulorum numerus sit par, circulo circumscriptum, esse quoq, equiangulam: non colligi tamen contrarium: ac proinde eam posse esse equiangulam, non quidem propter illam demonstrationem, sed propter quampiam aliam; aded vt nulla dari possit figura aequilatera circulo circumscripta, quin simul sit equiangular, vt Campanus cum nonnullis alijs asseruit. Si, inquam, aliquis ita dicat, respondemus, infinitas figuras equilateras angulorum numero parium circumscriptas circulo, nō esse equiangularas. Sit enim circulus



ex centro A, descriptus, cuius circumferentia tribus diametris BE, CF, DG, in sex partes aequales OP, PQ, QR, RS, ST, TO, diuidatur, quemadmodum propos. 15. in descriptione hexagoni traditum est. Deinde arcus OP, secetur inaequaliter in H, sitq; maius segmentum OH, & minus PH. Arcui quoque OH, aequales sumantur OI, QK, QL, SM, SN, ita vt sex arcus aequales ad utrasque partes trium semidiametrorum non proximorum, sed inter binas singulis relictis in medio, sumantur. Eruntq; ad utrasque partes semidiametrorum relictarum sex reliqui arcus PH, PK; RL, RM; TN, TI, aequales. Ductis item ex centro A, ad puncta H, K, L, M, N, I, rectis lineis, ducatur per H, ad H A, perpendicularis BC, secans semidiametros AO, AP, productas in B, C, quae circumculum tanget in H, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Coibunt autem necessario rectae HB, AB, propterea quod duo anguli BHA, BAH, duobus rectis minores sunt.

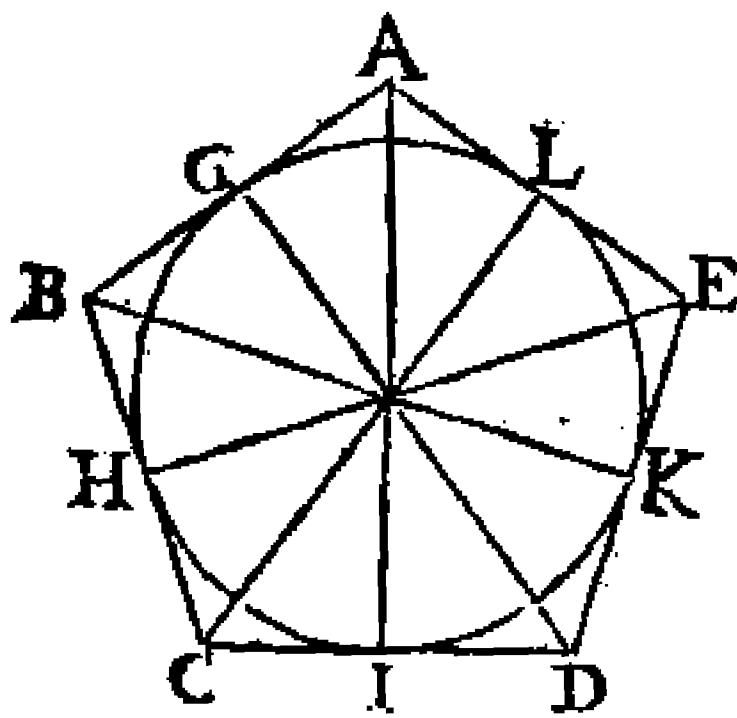
Est enim BHA , rectus, & BAH , insistentis arcui OH , qui minor est quadrante, minor recto, ex scholio propof. 27. lib. 3. Iungatur quoq; recta BI . Et quia duo latera AH , AB , duobus lateribus AI , AB , aequalia sunt, ^a angulosq; continent aequales aequalibus arcibus OH , OI , insistentes; ^b erunt quoq; bases BH , BI , & anguli H , I , aequales. Cum ergo BHA , rectus sit ex constructione, erit & BIA , rectus: ac propterea recta BI , circulum tangent in I , conuenietq; cum semidiametro AT , producta in G , ob angulos AI , G , AI , duobus rectis minores. Est namque AI , G , ostensus rectus, at G , AI , recto minor est, ex scholio propof. 27. lib. 3. ob arcum TI , quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I , A , trianguli G , AI , duobus angulis H , A , trianguli C , AH , aequales sunt; (Nam I , H , recti sunt, ^c & G , AI , C , AH , aequales sunt insistentes aequalibus arcibus TI , PH .) lateraq; AI , AH , quibus adiacent, aequalia; ^d erunt quoq; latera GI , GA , lateribus HC , CA , aequalia. Cum ergo & BI , ipsi BH , ostensa sit aequalis; erit tota BG , toti BC , aequalis. Eadem ratione, ducta recta GN , tangent circulum in N , coabitq; cum semidiametro AF , producta in F , eritq; ipsi GB , aequalis. Item iuncta recta FM , circulum tangent in M , & cum semidiametro AR , producta conueniet in E , ipsiq; FG , aequalis erit. Similiter ducta recta EL , tangent

tanget circulum in L, & semidiametro A Q, protrahitur occurret in D, ipsi q̄ EF, fiet equalis. Denique iuncta recta D K, eundem circulum tanget in K, & cum semidiametro A P, producta concurret in C, fiet q̄ ipsi D E, equalis. Quod autem D K, in eodem puncto C, occurrat semidiametro A P, in quo recta B H, eidem occurrat, manifestum est. Si enim in alio puncto eam secaret, cum ducta recta C K, circulum tangeret in K, ut demonstratum est, tangerent dua recta circulum in eodem puncto K: atq; adeo inter peripheriam, & tangentem interciperetur ad punctum contactus una linea recta: quod fieri non posse, Euclides demonstravit. Est ergo hexagonum B C D E F G, circulo circumscriptum, equilaterum. At idem esse non equiangularum, ita demonstrabimus. Quoniam figura B C D E F G, aequilatera est, erunt quidem per ea, quae paulo ante monstrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter se, & anguli locorum parium, ut C, E, G, inter se aequales; omnesq; secti erunt bisariam à semidiametris: At quia tres anguli trianguli A B H, tribus anguli trianguli A C H, aequales sunt; ablati rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus aequales. Est autem B A H, maior quam C A H, ex scholio propos. 27. lib. 3. quod & arcus O H, maior sit arcu P H. Igitur reliquus A B H, reliquo A C H, minor erit: qui cum semisses sint totorum angularum B, C, ut ostensum est; erit totus quoq; C B G, toto B C D, minor. Eodemq; modo toti anguli D, F, totis angulis E, G, minores ostendentur. Non est ergo hexagonum B C D E F G, aequiangularum. Quod erat ostendendum.

E A D E M omnino constructio, & demonstratio fieri potest in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, si circulus quatuor diametris secetur in 8. partes, vel quinque diametris in 10. &c.

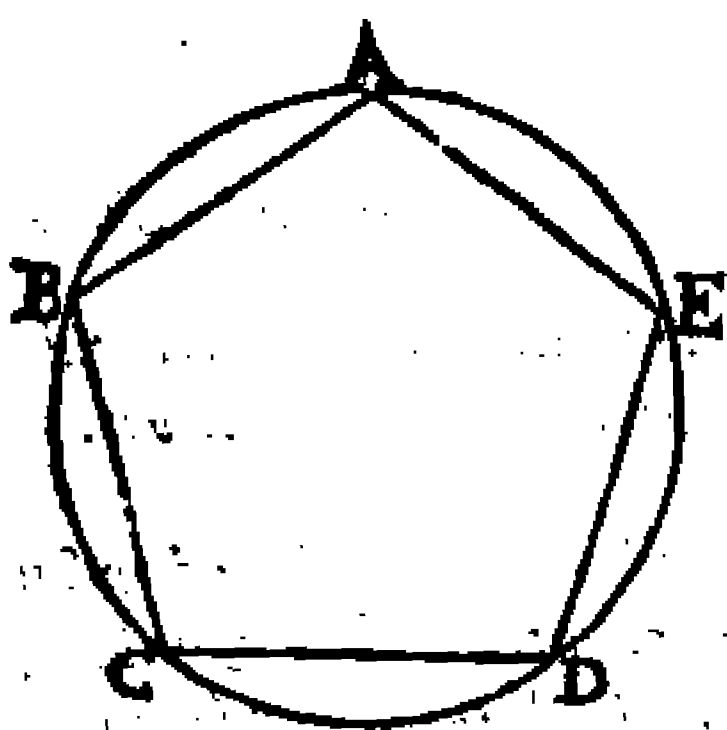
Q V O D si figura aequilatera quocunq; angularum circulo circumscribatur per doctrinam propos. 12. descripta nimirum prius simili figura intra circulum, & ductis lineis circulum tangentibus in figura inscripta angulis, &c. ut factum est in pentagono propos. 12. tum necessario figura illa erit simul equiangulara, ut ex demonstratione eiusdem propos. liquido constat.

OBSERVATIONE quoque dignum est, omnem quidem figuram æquiangularam circulo circumscriptam, esse etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangularam circulo inscriptam necessario æquilateram quoq; esse, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel si par est, quando duo latera proxima æqualia sunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum posito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, ut quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximum, quod est contra hypothesein.) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re facile etiam quis hallucinari possit.



Si t enim figura æquiangulara A B C D E, quouis laterum circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam esse quoque necessario æquilateram. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactuum rectis F G, F H, F I, F K, F L, quae ad latera figurae sunt perpendiculares; emittantur quoque ex centro F, ad angulos figurae rectae F A, F B, F C, F D, F E. Et quoniam tangentes A G, A L, ex 2. coroll. propos. 36. lib. 3. aequales sunt, erunt duo latera A G, A F, trianguli A G F, duobus lateribus A L, A F, trianguli A L F, aequalia. Sunt autem & bases F G, F L, ex centro aequales. Igitur anguli quoque ad A, illis lateribus comprehensi aequales sunt, ideoq; angulus B A E, sectus est bisariam. Non aliter ostendemus, reliquos angulos figurae bisariam sectos esse:

ac proinde cum toti anguli ponantur aequales, & eorum semisses aequales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli A F G, duobus angulis B, G, trianguli B F G, aequales erunt. Est autem latus F G, vni aequalium angularum oppositum, commune. Igitur latera quoq; A G, B G, aequalia erunt: atq; ideo latus A B, sectum erit bisariam in G. Eodem modo probabitur, reliqua figurae latera secta esse bisariam. Quia ergo A G, A L, dimidia aequales sunt, erunt quoq; tota linea A B, A E, aequales. Eademq; ratione A B, B C; & B C, C D; & C D, D E; & D E, E A, aequales erunt. Quam ob rem figura A B C D E, æquilatera est, siue numerus laterum sit par, siue impar. Quod erat demonstrandum.



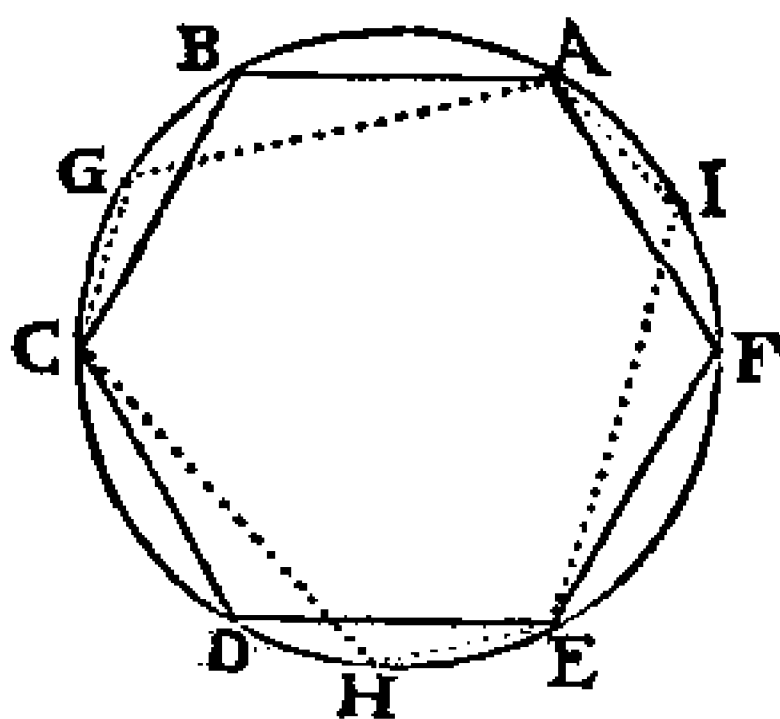
Si t rursus figura æquiangulara A B C D E, quouis laterum numero imparium circulo inscripta. Dico eam necessario esse quoq; æquilateram. Quoniam enim anguli B A E, A B C, ponuntur aequales erunt arcus B C E, A D C, quibus insistant, aequales: quibus demptis ex communi circulo, aequales quoque erunt reliqui arcus B A E, A B C. Dempto ergo communi arcu A E, erunt & reliqui arcus A E, B C, aequales. Eadem ratione arcus B C, arcui D E, equalis erit; ac proinde & latus A E, lateri B C, & latus B C, lateri D E, aequale erit: atq; ita deinceps, si figura plura habeat latera, erit semper tertium quodque latius ei, à quo tertium est, vno relicto in medio, aequale: hoc est, primum constitui autem quoduis latus potest primum) aequale erit tertio, tertium quinto, quintum septimo, septimum nono, &c. atq; in hunc modum omnia latera in locis imparibus posita, aequalia inter se erunt. Eademq; ratione omnia latera parium locorum, ut secundum, quartum, sextum, octauum, decimum, &c. aequalia inter se erunt, cum quartum sit à secundo tertium, & sextum à quar-

10 tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam proposita figura numerum laterum habet imparem, æquale erit ultimum primo, cui proximum est. Hoc autem ultimum latus eadem ratione æquale erit secundo, quod ab ultimo tertium est, primo in medio relicto; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, ut quarto, sexto, octavo, &c. usque ad penultimum. Quocirca omnia latera figura proposita inter se æqualia erunt. Quod ostendendum erat.

Hæc etiam demonstratio in figuras æquiangularas parium laterum circulo inscriptas non quadrat. Ex ea enim solum concludetur, primum latus esse æquale tertio, quinto, septimo, & alijs loca imparia occupantibus; nunquam autem per eam demonstrabitur, primum ultimo esse æquale, propterea quod ultimum occupat locum parem, ut in quadrangulo quarrum, in hexagono sextum, &c. Pari ratione eadem demonstratio convincet tantum latus secundum æquale esse quarto, sexto, octavo, & alijs loca paria possidentibus; at per eam nunquam colligetur, secundum latus esse æquale primo, eo quod primum in loco impari locetur. Itaque sola latera imparium locorum inter se, & sola latera in paribus locis posita inter se convincuntur esse æqualia.

Quod si duo latera proxima, vel etiam duo non proxima, dummodo vnum eorum in loco impari, alterum vero in loco pari positum sit, fuerint inter se æqualia, tum demum superior demonstratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam si primum latus secundo sit æquale, (quando enim duo proxima latera æqualia sunt, dici poterit vnum primum, & alterum secundum) cum demonstratum sit, primum æquale esse quoque omnibus lateribus locorum imparium, secundum vero omnibus parium locorum; perspicuum est omnia inter se esse æqualia. Si autem primum latus æquale sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo latera non proxima sunt æqualia, ita tamen ut vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, licebit vnum eorum appellare primum, & alterum vel quartum, vel sextum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundum primo proximum est.) cum primum ostensum sit æquale omnibus alijs positis in locis imparibus; alterum vero omnibus loca paria occupantibus, atque idcirco & secundo lateri; erit quoque primum secundo æquale: ac proinde duo proxima inter se æqualia erunt. Ut ergo proximè demonstratum est, omnia latera erunt inter se æqualia.

Si quis autem dubitet, dari posse figuram æquiangularam parium laterum circulo inscriptam, quæ non sit æquilatera, (quanquam enim superior demonstratio non probet omnia latera esse æqualia, si omnes anguli æquales sint: contrarium tamen ex ea inferre non licet.) demonstrabimus id Geometricè hac ratione. Primum quidem constat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior æquiangulara est, quippe cum



a 21. tertij.

b 27. tertij.

omnes eius anguli sint recti, sed non æquilatera. Quis autem dubitet, eam circulo posse inscribi? Deinde vero sit hexagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDEF, in circulo descriptum, sumaturque in arcu BC, quodvis punctum G, & arcui BG, in tertio arcu ab eo arcus æqualis DH. Item in quinto ab eo arcus æqualis FI. iunganturque rectæ AG, GC, CH, HE, EI, IA. Dico hexagonum AGCHEI, æquiangulum esse, at non æquilaterum. Quod enim sit æquiangulum, sic ostendemus. Anguli B, G, æquales sunt in eodem segmento ABC. Eadem ratione æquales sunt anguli D, H, & F, I. Præterea quia arcus BG, DH, æquales sunt, per constructionem; addito cōmuni GD, erunt toti arcus BCD, GCH, æquales.

Igitur reliqui ex circulo arcus BFD, GFH, æquales erunt; ac proinde anguli BCD, GCH, illis insistentes æquales quoque erunt. Non aliter ostendemus & angulos DEF, HEI, & FAB, IAG, æquales inter se esse. Ergo sex anguli hexagoni AGCHEI, sex anguli hexagoni ABCDEF, æquales sunt, singuli singulis: ideoque cum hoc ponatur æquiangulum, erit quoque illud æquiangulum. Quod autem non sit æquilaterum, ita probabimus. Latus AG, latere AB, maius est, & latus GC, latere BC, minus, ex scholio propof. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera CH, EI, lateribus CD, EF, maiora sunt, & latera HE, IA, lateribus DE, FA, minora. Cum ergo latera AB, BC, CD, DE, EF, FA, æqualia ponantur, erunt AG, GC, CH, HE, EI, IA, inæqualia: quanquam AG, CH, EI, inter se, & GC, HE, IA, inter se, relicto semper vno in medio, æqualia sint, ut supra ostendimus.

IDEM prorsus eodem modo demonstrabitur fieri posse in pentagono, decagono, & alijs figuris parium laterum, si in circulo inscribantur prius octogonum, decagonum, & alia figura æquilatera, atque æquiangulara, &c.

Quod si figura inscribatur circulo per doctrinam propof. 11. 15. & 16. erit ea perpetuo & æquiangulara, & æquilatera, ut ex earum propositionum demonstrationibus perspicuum est.

Porro qualemunque figuram æquilateram & æquiangularam in circulo noverimus inscribere, eadem etiam sciemus describere circa circumulum, & in ea circumulum quoque inscribere, & circa eandem describere circumulum, si artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propof. 12. 13. & 14.

Rursus inscripta figura quacunque æquilatera, & æquiangulara in circulo, inscribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcibus, quos latera subrendunt, bisariam, & subrensus rectis lineis, constat propositum. Ut per triangulum æquilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

CAETERUM omnes figura æquilatera & æquiangulara in circulo inscribi possunt beneficio isoscelium

scelium triangulorum, vt rectè hoc loco nonnulli Euclidis interpretes movent.

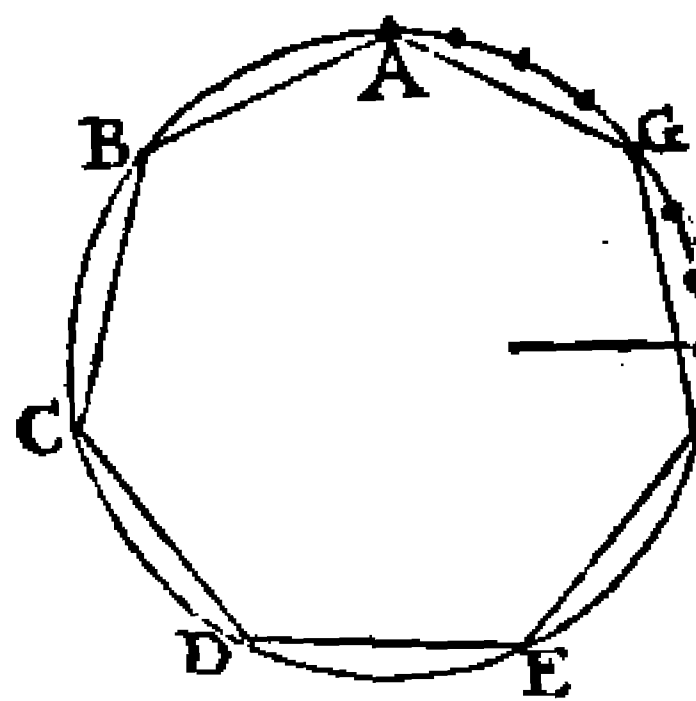
IMPARIVM enim laterum figura inscribentur beneficio triangulorum Ifofelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt beneficio Ifofelis, cuius vterq; angulorum ad basin æqualis est ei, qui ad verticem, describitur in circulo inscribetur prima figura imparium laterum, hoc est, triangulum æquilaterum. Nam Ifoseles huiusmodi, triangulum æquilaterum erit. Quod si in circulo inscribatur Ifoseles, cuius vterque angulorum ad basin duplus sit eius, qui ad verticem, inscribetur secunda figura imparium laterum, nimirum pentagonum, in circulo, si duo anguli æquales secentur bisariam, veluti propos. 11. fuit ostensum. At heptagonum, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triangulum Ifoseles habens vtrumque angulorum ad basin triplum eius, qui ad verticem, si duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad verticem. Ita quoque figura quarta imparium laterum, quale est Hennagonum, in circulo inscribetur beneficio Ifofelis, cuius vterq; angulorum ad basin quadruplus est eius, qui ad verticem, si vterque distribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad verticem, &c.

DIUISIO autem hac angulorum ad basin in partes æquales perfacilis est. Nam si angulo ad verticem constituantur ad basin tot anguli æquales ordine, quot unitates sunt in numero proportionis multiplicis, quam vterque angulorum æqualium habet ad reliquum, diuisus erit angulus in partes æquales. Verum descripto huiusmodi triangulo Ifosele in circulo, describetur figura in circulo sine diuisione angulorum ad basin, si basi accommodentur rectæ æquales in circulo. Basis enim semper est vnus figura latus, vt in pentagono patuit.

PARIVM vero laterum figura in circulo inscribetur, beneficio Ifofelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur beneficio Ifofelis, cuius vterq; angulorum ab basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem insidet quarta parti circumferentia. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem, quod quilibet semel eum contineat, & dimidiatam insuper eius partem, subtendent ipsi tres partes circumferentia, & idcirco angulus ad verticem vnam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur beneficio Ifofelis, cuius vterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, insidet sexta parti circumferentia, cum reliqui anguli simul cõpositi contineant ipsum quinquies, propterea quod quilibet bis eum continet, & dimidiatam eius insuper partem. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium inscribetur beneficio Ifofelis habentis vtrumque angulorum ad basin triplum sesquialterum anguli ad verticem, &c.

Si igitur inuenta fuerit ars, qua Ifofelia triangula construuntur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui ad verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Ifoseles fabricauit, habens vtrumque angulorum ad basin duplum anguli ad verticem, facile in circulo describentur figura omnes laterum imparium. Et si arcus earum diuidantur bisariam, inscribentur quoq; omnes figura parium laterum, post quadratum, atq; ad circumferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æquales partes Geometricè diuidetur. Quæ res summam Astronomis afferret utilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim rectè sibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hætenus, vt ipse ait, desiderato de absoluta figurarum rectilinearum omnium descriptione intra circulum, &c. cum eius demonstrationes falsa sint, ac sophistica, vt Geometricè ostensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

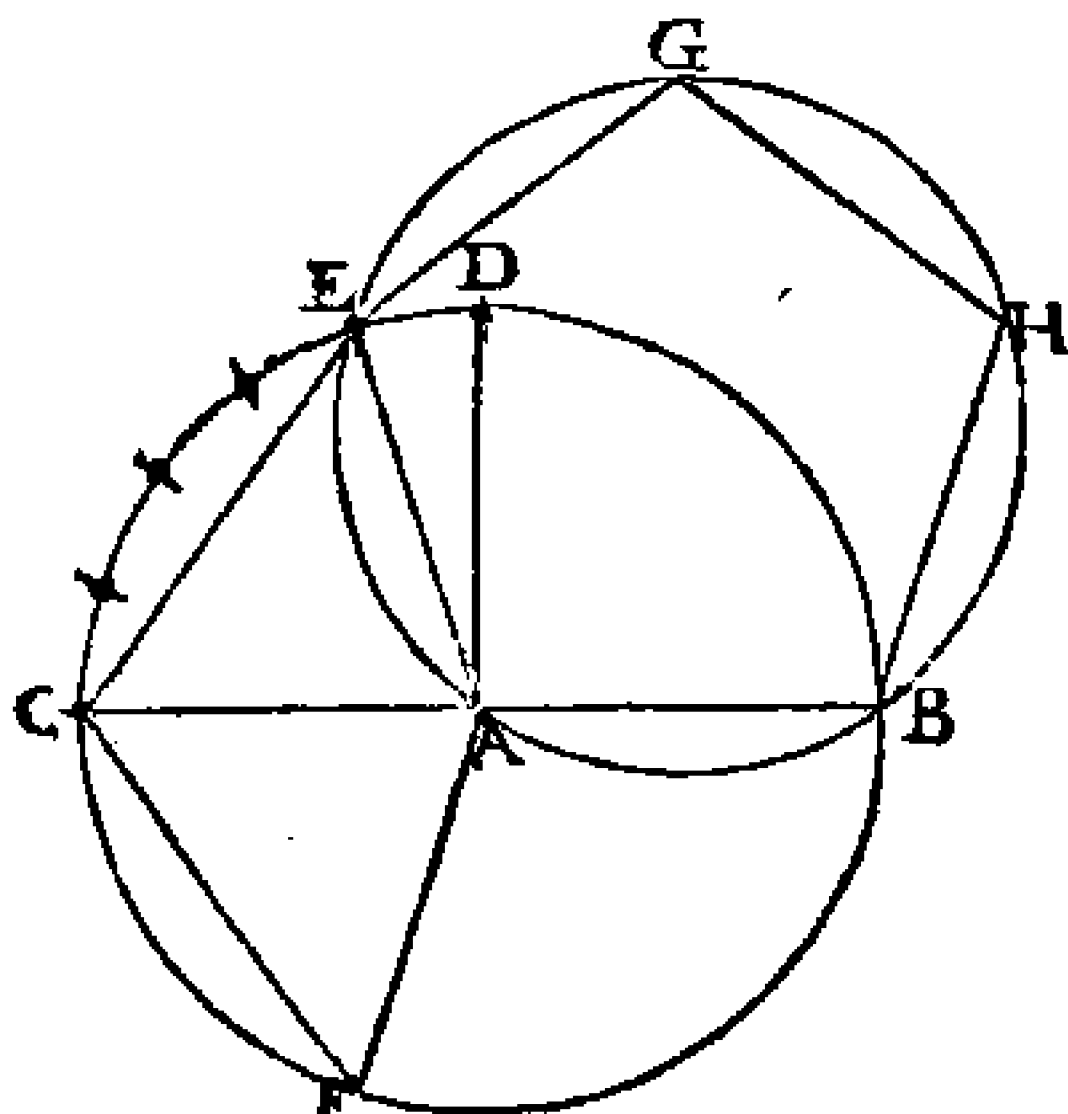
Nos tamen ad finem lib. 6. ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometricè describemus, qua non solum triangula Ifofelia, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant datam proportionem, construuntur, ac proinde omnes figura æquilatera, & æquiangula in circulo describuntur: verum etiam arcus cuius circuli distribuatur in quotcunque partes æquales, siue is quadrans sit, siue non. Quin etiam eiusdem lineæ inflexæ beneficio iucunda operatione circulus quilibet sine vilo negotio in quadratum æquale commutabitur, vt ibidem dicemus. Quæ res ad hunc vsque diem animos Mathematicorum tenuit suspensos.



SEI doceamus, si placet, qua etiam via figura quævis æquilatera, & æquiangula circulo inscribatur sine triangulis Ifofelibus, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant proportionem datam. Sit ergo in circulo ABCDEFG, inscribendum heptagonum æquilaterum, & æquiangulum. Secetur eius quadrans AH, in septem partes æquales, in tot videlicet, quot latera angulosue figura inscribenda continet. Secabis autem quadrantem AH, in propositas partes æquales vel ex his, quæ ad finem lib. 6. nos demonstratos diximus, vel beneficio circini, dilatando eius crura modo magis, modo minus, donec reperiatur eorum distantiam partiri quadratam in partes optatas.

Facilius enim quadrans in quotvis æquales diuidetur partes, quam tota circumferentia, quod sapius attendendo, & quasi repetendo opus, clarius appareat in parua magnitudine, quam in magna, quantum detrahi, vel addi debeat parti vni beneficio circini acceptæ, si ea partem desideratam non offerat. Secto quadrante in septem partes æquales, vel in plures, si figura plurium laterum desideretur, erit recta linea AG, quæ quatuor eiusmodi partes subtendit, latus figura inscribenda. Quoniam enim in tota circumferentia quater tot partes æquales continentur, in quot quadrans diuisus est, continebitur aggregatum

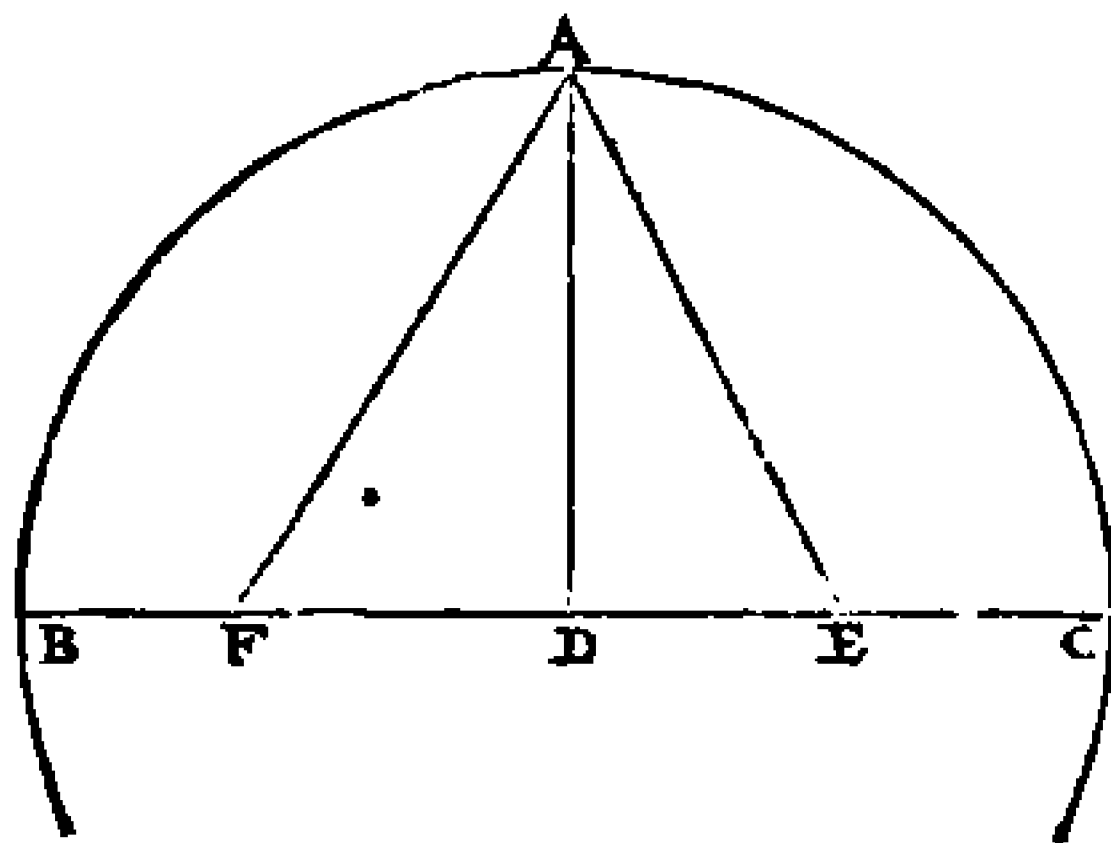
ex quatuor partibus toties in tota circumferentia, quoties una pars in quadrante: quia qualibet pars cum aliis tribus, quarum singula in singulis aliis tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod etiam ita perspicuum fiet. Quoniam partes eandem proportionem habent, quam earum æquemultiplicia, ut ab Euclide demonstratur lib. 5. propof. 15. (Licet enim hic accommodare eam propositionem, cum ex antecedentibus nullo modo pendeat.) ita se habebit una pars ad quadrātem, ut quadruplum unius partis, hoc est, arcus A G, ad quadruplum quadrantis, id est, ad totam circumferentiam. Qualis ergo pars quadrantis est una illarum, in quas quadrans diuisus est, talis erit arcus A G, totius circumferentia. Atque ita si quadrans diuisus sit in 7. partes, continebuntur eiusmodi partes 28. in tota circumferentia. Igitur 4. efficiunt $\frac{4}{7}$. hoc est, $\frac{1}{7}$. totius circumferentia. Ita quoque, si quadrans sectus sit in 1. partes, continebuntur eiusmodi partes 44. in tota circumferentia: atque adeo 4. efficiunt $\frac{4}{44}$. hoc est, $\frac{1}{11}$. totius circumferentia: & sic de cæteris. Itaque, si arcui A G, quatuor partium abs. indantur arcus continuè aequales, eisdemque arcubus recta subtendantur, inscripta erit circulo figura propof. 1. ut ex demonstrari liquet.



- describendi, erit CF, alterum latus: ac proinde duo latera EC, FC, comprehendent angulum pentagoni æquilateri & equianguli ECF. Quoniam verò, ducta recta AF, duo latera EC, CA, duobus lateribus FC, CA, equalia sunt, & bases item æquales AE, AF;^a erunt anguli ECA, FCA, æquales. Cum ergo, ^b & anguli ACE, AEC, sint æquales: erit & ACF, ipsi AEC, equalis: additoque communi ACE, totus angulus ECF, duobus angulis ACE, AEC, equalis erit. Est autem ^c externus BAE, eisdem internis ACE, AEC, equalis. Igitur & ECF, BAE, inter se æquales erunt. Cum ergo ECF, sit angulus pentagoni, erit quoque BAE, pentagoni angulus. Quocirca si circa tria puncta B, A, E, circulus describatur, & rectis AB, AE, ^d rectæ æquales in eo accommodentur BH, HG, GE, descriptum erit pentagonum æquilaterum & equiangulum descriptum in circulo ABHGE, ac proinde supra datam rectam AB. Quod faciendum erat. Non est autem dubitandum, quin rectis AB, AE, æquales rectæ possint in circulo accommodari, quæ totam circumferentiam abs. luant. Nam angulus pentagoni BAE, insidet tribus quintis partibus totius circumferentia: singulis autem latera AB, AE, singulas quintas partes subtendunt: ac proinde singule BH, HG, GE, singulas quoque quintas partes subtendent, cum ipsis AB, AE, sumptæ sint æquales, proptereaque totum arcum BGE, continere tres quintas partes absolvent. Eadem ratio est de aliis figuris æquilateris, & equiangulis.

Si forte in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & equiangulam, cui supra datam rectam lineam desideramus constituere similem, siue ea in circulo aliquo descripta sit siue non: satis erit vni eius angulo æqualem angulum constituere BAE, in extremo data lineæ AB. Si namque posita recta AE, equali ipsi AB, per tria puncta B, A, E, circulus describatur, perficiemus figuram propositam, ut ante diximus.

Quoniam verò longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & equianguli in circulo quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annexere praxin quandam, quæ una eademque opera Pro-

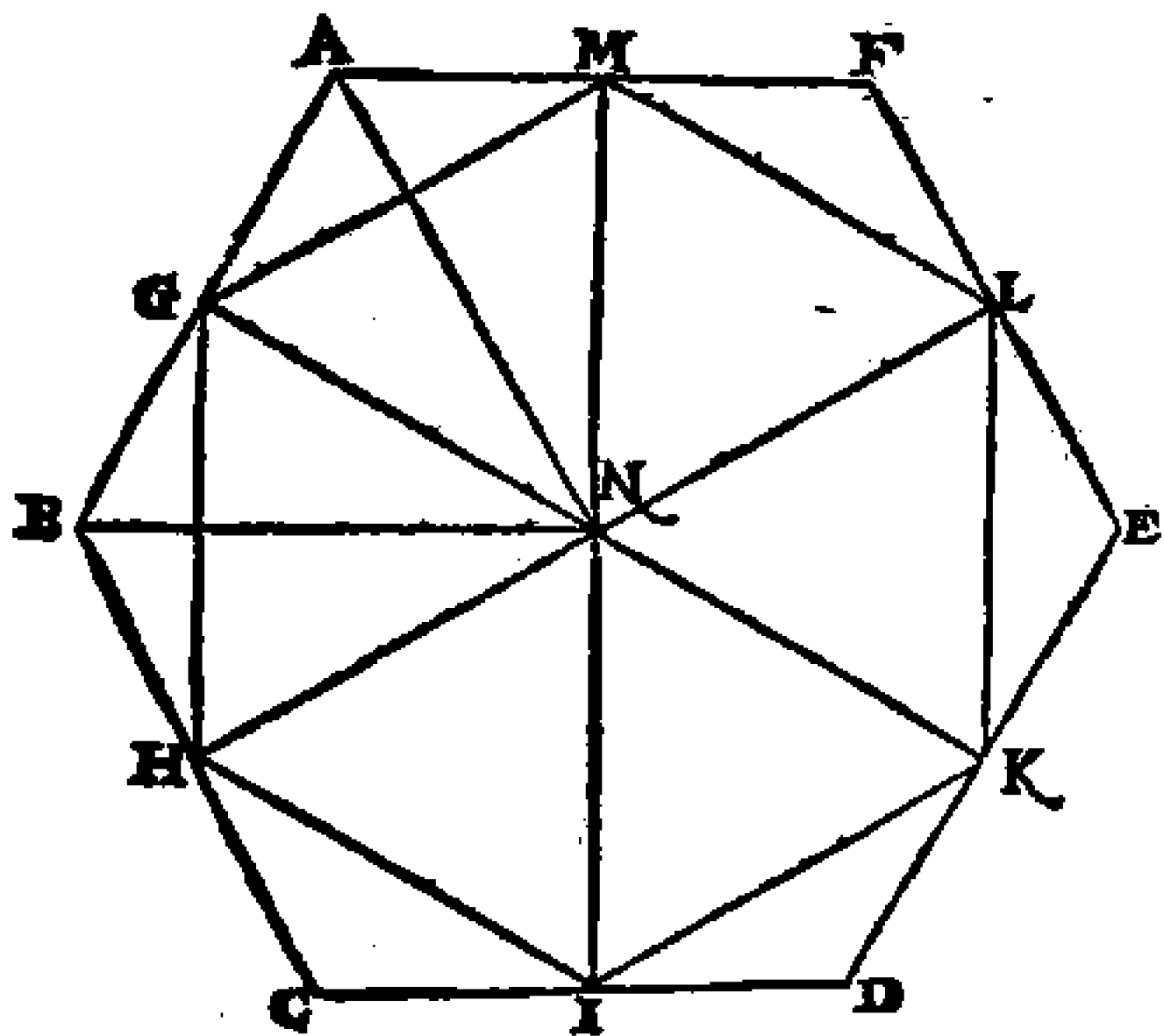


lemas lib. 1. magna constructionis, in circulo dato inscribit pentagonum & decagonum æquilaterum, & equiangulum. Sit enim datus circulus ABC, cuius centrum D; Ducta autem diametro BC, erigatur DA perpendicularis ad BC. Deinde diuisa semidiametro CD, bisariam in E, ducatur recta EA, cui equalis abscindatur EF. Itaque, si ducatur recta AF, erit AF, latus pentagoni, & DE, latus decagoni in dato circulo inscribendi, ut ipse demonstrat. Cæterum cum demonstratio huius rei pendeat ex decimotertio libro Euclidis, non videtur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, utpote in librum decimumtertium deferenda.

Non erit etiam præter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienum, si sequens adhuc theorema adiungamus: videlicet.

Si bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.

CENTRUM figura æquilateræ, & æquiangulæ appellatur punctum illud, e quo circulus figura inscribitur, aut circumscribitur: ita ut idem sit centrum circuli & figuræ.



Si igitur figura æquilatera, & æquiangula $ABCDEF$, cuius latera bifariam secantur in G, H, I, K, L, M , iunctis rectis GH, HI, IK, KL, LM, MG . Disco figuram $GHIKLM$, inscriptam figuræ $ABCDEF$, æquilateram esse quoque, ac æquiangulam, idemque centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera cum subtendant angulos aequales comprehensos equalibus rectis, utpote dimidiis laterum equalium, ^a equalia sunt. Quoniam vero tam tres anguli AMG, GML, LMF , quam tres FLM, MLK, KLE , ^b duobus sunt rectis aequales: Sunt autem AMG, LMF, FLM, KLE , ^c inter se aequales, cum aequalibus lateribus contineantur, subtendanturque a basibus equalibus; Erunt reliqui anguli GML, MLK , aequales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se aequales esse. Æquiangula igitur quoque est figura $GHIKLM$.

Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se aequales esse. Æquiangula igitur quoque est figura $GHIKLM$.

Quod autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N , figuræ $ABCDEF$, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur rectæ NG, NH , &c. iunganturque rectæ NA, NB . Quoniam igitur AG, GN , latera trianguli AGN , equalia sunt lateribus BG, GN , trianguli BGN , suntque bases AN, BN , cum sint semidiametri circuli circa figuram descripti, equalia: ^d Aequales erunt anguli AGN, BGN , ideoque recti. Quare NG , perpendicularis est ad latus AB ; Eodemque modo reliquæ NH, NI , &c. perpendiculares erunt ad latera BC, CD , &c. Quæ cum ex defin. 4. lib. 3. ostendant distantias rectarum AB, BC , &c. equalium à centro N , ^e aequales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N , intervallo NG , descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M , incedet; Ac propterea N , centrum erit figuræ $GHIKLM$, hoc est, circuli circa eam figuram descripti. Quod est propositum.

Neque vero & hoc omittendum est, inter omnes figuras æquilateras, & æquiangulas, solum triangulum, quadratum, & hexagonum replere locum, hoc est, aliquot triangula, vel quadrata, vel hexagona, ita in plano posse inter se aptari, ut inter eorum angulos nihil sit vacui, sed planam superficiem constituant. Nam sex anguli in triangulo æquilatero, & quatuor in quadrato, & tres in hexagono æquilatero, & æquiangulo, aequales sunt quatuor rectis, quantum nimirum est spatium circa punctum quodlibet in plano, ut ad propositionem decimam quintam libri primi ostendimus. Quoniam enim unus angulus trianguli æquilateri continet $\frac{2}{3}$. unius recti, quod omnes tres contineant $\frac{6}{3}$. unius recti, hoc est, duos rectos, continebunt sex eiusmodi anguli $\frac{1}{3}$. unius recti, id est, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato sunt quatuor recti. Denique quia unus angulus hexagoni æquilateri, & æquianguli continet $\frac{2}{3}$. unius recti, quod omnes sex contineant $\frac{12}{3}$. unius recti, hoc est, 8. rectos, continebunt tres eiusmodi anguli $\frac{1}{3}$. unius recti, id est, 4. rectos. Quod in alijs figuris planis æquilateris, & æquiangulis non cernitur. Nam tres anguli in pentagono æquilatero & æquiangulo aequales sunt $\frac{3}{5}$. unius recti, hoc est, angulus rectus $3\frac{3}{5}$. duntaxat, ac quatuor aequales sunt $\frac{4}{5}$. unius recti, id est, angulus rectus $4\frac{4}{5}$. propterea quod omnes quinque æquivalent 6. rectis, hoc est, constituunt $\frac{6}{5}$. unius recti, atque idcirco unus continet $\frac{6}{5}$. unius recti, &c. Triangula igitur pentagona locum replere non possunt, cum trium in plano aptatorum tres anguli minores sint quatuor rectis: quippe qui efficiant tantum tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt, propterea quod quatuor in plano aptatorum quatuor anguli maiores sunt quatuor rectis, cum aequales sint quatuor angulis rectis, & insuper quatuor quintis unius recti, ut dictum est. Pari ratione neque ex heptagonis locus poterit repleri. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni æquilateri, & æquianguli aequales sunt $\frac{3}{7}$. unius recti, hoc est, angulus rectus $4\frac{2}{7}$. Quoniam enim omnes septem anguli 10. rectis sunt aequales, hoc est, complectuntur $\frac{10}{7}$. unius recti; sit, ut unus contineat $\frac{10}{7}$. unius recti, hoc est, unum rectum, & præterea $\frac{3}{7}$. unius recti: ac proinde tres contineant quatuor rectos, & $\frac{2}{7}$. unius recti. Non ergo tribus heptagonis in plano aptatis, eorum tres anguli locum replere possunt, cum quatuor rectos excedant. A fortiori neque quatuor heptagona locum replebunt: neque tria octogona æquilatera, & æquiangula, aut quatuor,

neque tres aut quatuor figura æquilatæ, atque æquiangula plurium laterum, quàm octo: quippe cum semper tres anguli simul sumpti sint maiores quatuor rectis, propterea quòd maiores sunt tribus angulis heptagoni æquilatæ & æquianguli, quos ostendimus quatuor rectis esse maiores. Solam ergo triangulum æquilatæ, quadratæ, & hexagonum æquilatæ atque æquiangulum, suis angulis locum replere possunt, ut diximus.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.



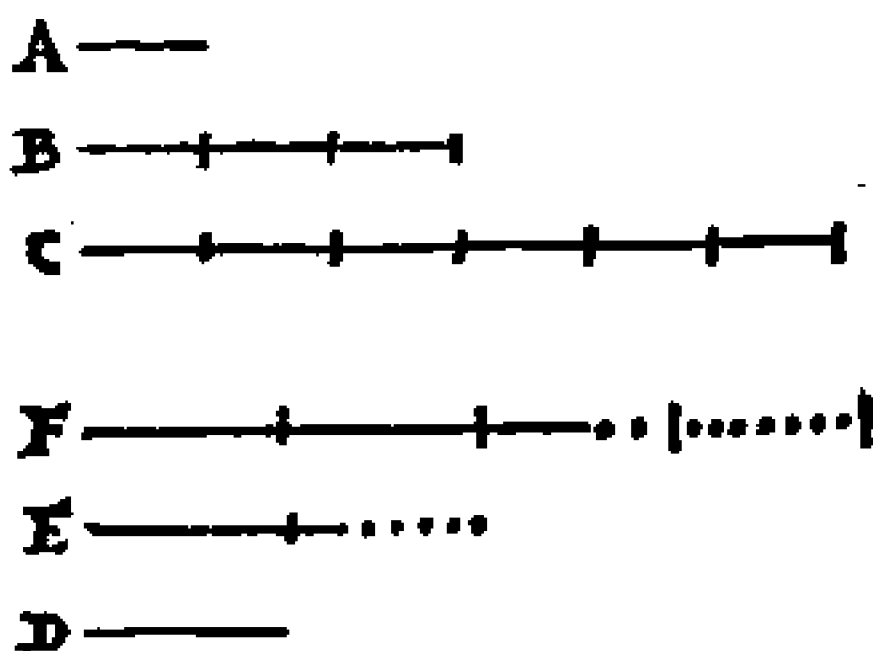
DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.



GIT in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata; Nunc verò duobus sequentibus de eadem disputat, non absolute, sed prout una ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportionem quantitarum continuarum in genere, non descendendo ad ullam quantitatis speciem, ut ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto verò libro extendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se linea, anguli, circumferentia circulorum, triangula, & alia figura plana. Ut igitur institutum suum seruet, definit prius vocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.



ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Ut quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B; sexies autem sumpta, magnitudinem C, dicitur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At verò quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinē E, & sumpta ter, deficit à magnitudine F, sumpta autē quater, eandem superat, non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

DUPLEX autem est pars apud Mathematicos: Quadam metitur suum totum, ita ut aliquoties repetita totū suum constituat;

qualis est numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus: Quadam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum vel excedit, vel ab eodē deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collatus cum 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc loco definit partem aliquotam duntaxat, cum quia hæc solum metitur suum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia, ut ex lib. 7. constabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed due partes tertia, quales sunt duo binary. Accedit etiam, quòd in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Unde mirum sanè est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Peletarius, contendere, partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quàm aliquantam; cum tamen in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MULTIPLEX autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

UT in superiori exemplo tam magnitudo B, quàm magnitudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam
hæc

hac vtrunque illam metitur. At verò neq, magnitudo E, neq, magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea quòd hac neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita vt minor quantitas mensurans maiorem, dicatur pars maioris; Maior verò mensurata à minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perspicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam esse eam, qua perfectè metitur suum totum. Si enim 6. diceretur metiri 7. vt vult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

CAETERVM quando duæ magnitudines minores duas alias maiores aequè metiuntur: hoc est, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in altera maiore; dicuntur duæ hæ maiores duarum illarum minorum æquemultiplices. Quod idem dices, si plures minores aequè metiantur plures maiores.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundum quantiratem, habitudo.

QUANDO duæ quantitates eiusdem generis, vt duo numeri, duæ lineæ, duæ superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est secundum quod vna maior est, quàm altera, vel minor, vel equalis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio, seu (vt alijs placet) Proportio. Itaque si compareretur linea aliqua cum superficie quapiam, vel numerus cum linea, non diceretur ea comparatio proportio, quòd neq, linea, & superficies; neq, numerus, & linea sint eiusdem generis quantitates. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est secundum quod vna est alba, & altera nigra; aut quòd vna est calida, & altera frigida, &c. quamuis amba sint eiusdem generis, non diceretur ea comparatio proportio, quia non sit secundum quantitatem.

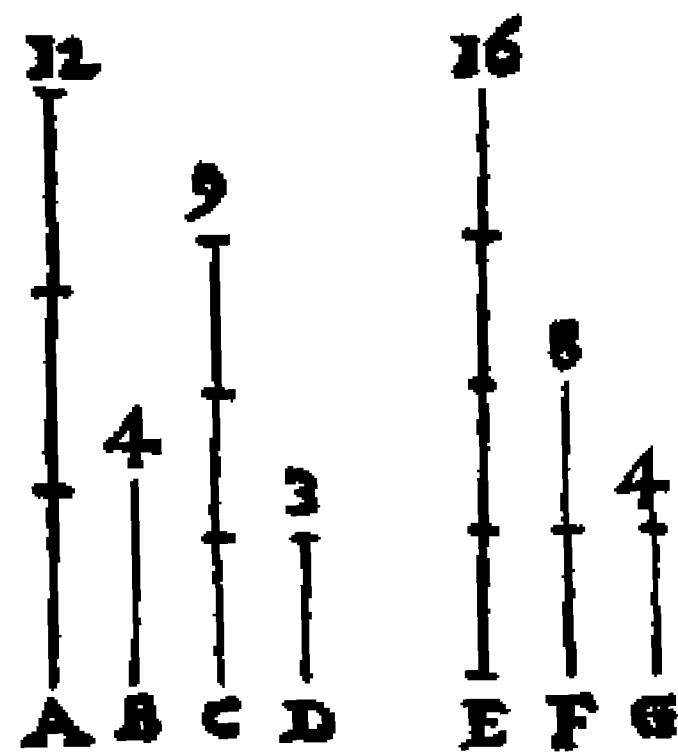
QUANTVM autem in solis quantitatibus propriè reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentie, proportionem quoq, dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur, secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse equalia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quædam.

CAETERVM in omni proportionem ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometristis alijs, antecedens proportionis; Ea verò, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportionem linea 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis; at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quòd si e contrario consideretur proportio linea 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens, linea 3. palmorum; consequens verò linea 6. palmorum, & sic in ceteris.

IIII.

PROPORTIO verò est rationum similitudo.

QUOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, plerisque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitarum inter se, dicitur proportio. Ita



comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas: solet nuncupari. Vt si proportio quantitarum A ad quantitatem B, similis fuerit proportioni quantitarum C, ad quantitatem D, dicitur habitudo inter has proportionem, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hac similitudo proportionalitas. Multæ autem habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim cum pluribus comparationem duarum quantitarum, proportionem appellabimus: habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem) à scriptoribus præsertim Boëtio, & Iordano, describuntur; inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Vereres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atq, Musica, seu Harmonica, de quibus paulò post dicemus: Verùm Euclides de sola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex est, continua, altera, in qua singula

quantitates intermediae bis sumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, sed qualibet quantitas intermedia sit, & antecedens & consequens; Antecedens quidem quantitaris subsequenti, consequens verò quantitaris antecedenti. Vt si dicatur, quæ est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabitur hac proportionalitas, continua. Altera verò discreta, seu non continua, in qua singule quantitates intermediae semel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaq, quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens tantum, vel consequens tantum. Vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas hac, discreta, siue non continua.

DE PROPORTIONIS DIVISIONIBVS.

OPERAE pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quoniam sint genera propor-

tionum apud Mathematicos, & quam sint præcipua proportionalitates, earumque proprietates, vel ob hanc præcipuè utilitatem, ut ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ à Philosophis cum Aristotele de proportionem motuum disputantur, intelligi. Ut autem maior utilitas, ac voluptas ex admirabilibus proportionum affectionibus percipi possit, instituemus paulò uberio-rem tractationem in hac posteriori editione, quàm in priori: reiicientes nihilominus innu-mera propemodum, quæ dici possent, in pleniorē nostram Arithmeticam, ubi omnia genera Proportionalitatum diligentissimè persequemur.

PROPORTIO igitur ab Euclide definita, dividitur in proportionem rationalem, & irra- tionalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi. Qualis est proportio linea 20. pal- morum, ad lineam 10. palmorum. Hac enim proportio in hisce numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis verò proportio ea est, quæ in numeris exhiberi nequit. Qualis est proportio dia- metri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdem quadrati. Hac enim proportio in numeris repe- riri non potest, ut in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt proportionem rationalem eam esse, quam habent quævis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalem verò eam, quam habent duæ qualibet quantitates incommensurabiles. Dicuntur autem quantitates commensurabiles, quæ habent unam communem partem aliquotam, seu quas eadem men- sura communis metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam li- nea 4. palmorum est utriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim li- nea tam 4. quàm 2. palmorum metitur lineam 20. palmorum; Ita quoque eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri, commensurabi- les dicuntur, quia saltem unitas omnes metitur. Quantitates verò incommensurabiles di- cuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri. Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. Quam- vis enim qualibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, utpote partem dimidia- tam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota unius, quantumvis minima, alte- ram metiri potest, ut demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. ultima. Quo in lib. multa alia linea incommensurabiles ostenduntur, præter illas duas. Itaq; in numeris inuenitur sola pro- portio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quàm irrationalis proportio continetur.

At 10. modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Æqua- litatis proportio, est inter duas quantitates æquales, ut inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorum, & lineam 10. palmorum, &c. Inæqualitatis verò proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, ut inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum, & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duobus eam connexionem, ut omnis proportio æqualitatis sit necessariò rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessariò sit proportio inæqualitatis, sed non con- tra. Ex quo manifestum est, minus rectè à quibusdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamvis enim omnis proportio rationalis sit ne- cessariò æqualitatis, inæqualitatisve, non tamen contra omnis proportio huiusmodi est ra- tionalis; cum multe proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perspicuum est, quosdam non satis rectè distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem ratio- nalem & irrationalem. Quamvis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessariò rationa- lis irrationalisve, non tamen omnis huiusmodi proportio è contrariò est proportio inæquali- tatis: cum multe proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur, meo iudicio, duplici diuisione secanda est proportio in genere, priori quidem in proportionem ra- tionalem & irrationalem; Posteriori verò in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; ut à nobis factum est. Ita enim membra diuidentia cum Diuiso (ut cum Dialecticis loquamur) in utraque diuisione recipiuntur. Scio rectè posse subdividi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; quàm proportionem inæqualitatis in propor- tionem rationalem, & irrationalem; si in utraque diuisione subintelligatur Diuisum. Sed cur duplicem nostram diuisionem, quæ proportio in tota sua latitudine diuiditur, utrique ha- rum subdivisionum prætulerim, supra exposui in responsione mea ad Apologiam Peletarij.

RVRSVS proportio inaequalitatis (Relinquimus enim aequalitatis proportionē, quoniam amplius subdividi nequit, cum quaecunque quantitates aequales, siue magna, siue parva fuerint, eandem semper habeāt proportionem aequalitatis) subdividitur in proportionem maioris inaequalitatis, & minoris inaequalitatis. Maioris inaequalitatis proportio est, quando maior quantitas cum minore confertur; qualis est proportio 20. ad 10. Item linea 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c. Proportio minoris inaequalitatis est, quando minor quantitas ad maiorem refertur; qualis est proportio 10. ad 20. Item linea 6. pedum ad lineā 8. pedum, &c. Non est autem haec divisio inanis & superflua, ut multi suspicantur. Neque enim eadem est proportio 4. ad 2. quae 2. ad 4. sed multum inter se differunt, cum valde diversus sit usus utriusque, ut perspicuum est his, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebra sunt versati. Haec igitur sunt generales divisiones proportionis, prout complectitur omnes proportionēs, nulla secusa: Nunc autem tam proportionem maioris inaequalitatis, quam minoris inaequalitatis, quatenus solas proportionēs rationales comprehendunt, subdividemus; quoniam de quantitatibus, quae habent proportionēs irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inaequalitatis, distribuitur in quinque genera, ut in proportionem multiplicem, superparticularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem. Par ratione proportio rationalis minoris inaequalitatis in eadem genera secatur, si modo singulis vocabulis praepositio (sub) ut in proportionē submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartientem, submultiplicem superparticularem, & submultiplicem superpartientem. Horum autem quinque generum priora tria sunt simplicia, posteriora verò duo ex illis tribus composita, ut manifestum est. Cur verò tantum sint quinque haec genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inaequalitatis, post explicationem omnium harum quinque proportionum ostendemus.

DE PROPORTIONE MULTIPLICI.

PROPORTIO Multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita ut minor maiorem metiatur; qualis est proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio linea 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.

HAEC autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantum continet, dicitur proportio dupla: si ter, tripla: si decies, decupla: si centies, centupla, &c.

Ex his facile omnes species proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodemque modo definienda erunt reliqua proportionēs multiplices: ut proportio quincupla, qualis est 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla linea 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

CAETERVM omnes proportionēs multiplices in numeris integris, hoc est, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportionē multiplici continet. Is enim ad unitatem habet primam proportionem multiplicem, quae inuestigatur: hoc est, numerus ille, & unitas sunt primi ac minimi numeri, inter quos proposita proportio multiplex reperitur. Atque numerus ille idem, atque unitas dicuntur ab Arithmetico termini eius proportionis multiplicis, quae proponitur. Inueniuntur huiusce termini, inter quos prima proportio multiplex proposita reperitur, si uterque duplicetur, producentur duo numeri habentes secundam proportionem multiplicem propositam: si uterque triplicetur, procreabuntur numeri tertiae proportionis multiplicis propositae: si uterque quadruplicetur, exurgent numeri quartae proportionis multiplicis quaesitae. Atque ita si iidem termini per quemvis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propositae, quae eum locum inter omnes proportionēs multiplices illius speciei obtinet, quae numerus, qui utrumque terminum multiplicauit, indicat. Adeo ut si multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centesimum locum inter omnes numeros propositam proportionem habentes. *EXEMPLI* gratia. Quaeantur omnes numeri proportionis quintuplae. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportionē, erit prima proportio quintupla inter 5. & 1. qui duo termini si ducantur in 2. reperietur secunda proportio quintupla inter 10. & 2. Si iidem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertiae proportionis quintuplae: Et sic deinceps. Itaque si decima proportio quintupla quaeratur, ducendi erunt

duo primi termini inueni 5. & 1. per 10. si verò millesima reperienda sit, multiplicandi erunt idem termini per 1000. &c.

OMNES item numeri cuiusque proportionis multiplici reperiuntur hoc modo. Constituatur dua series numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab unitate incipiat, & per seriem naturalem numerorum progrediatur; superior autem ab eo numero, qui significat, quoties maior numerus minorem in data proportionem continet, initium ducat, progrediaturque per continuam additionem eiusdem numeri, primum ad seipsum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam superioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, ut primus ad primum, secundus ad secundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportionem multiplices speciei propositæ. Exempla hic habes in proportionibus quintuplis, septuplis, & decuplis.

Proportiones quintuple.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	&c.

Proportiones septuple.

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	&c.

Proportiones decuple.

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	&c.

DE PROPORTIONE SUPERPARTICULARI.

PROPORTIO superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper unam eius partem aliquotam, scilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis est proportio 3. ad 2. Nam 3. continet 2. semel, & insuper unitatem, quæ dimidiata pars est numeri 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel, & insuper lineam 3. pedum, quæ tertia pars est lineæ 9. pedum, &c.

HÆC quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est dimidiata pars minoris quantitatis, constituitur proportio sesquialtera; si est tertia pars, exurgit proportio sesquitercia; si quarta, sesquiquarta; si millesima, sesquimillesima, &c. VNDE ex ipso vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum superparticularium. Erit enim proportio sesquioctaua, quando maior quantitas minorem semel includit, & insuper octauam partem minoris: qualis est inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

INVENIENTUR omnes proportionem superparticulares, siue omnes numeri, inter quas proportio superparticularis quacunque reperitur hoc modo. Accipiat numerus, qui partem aliquotam in proportionem expressam denominat. Ad eum enim numerus proximè maior, qui videlicet eum una sola unitate superat, habebit primam proportionem superparticularem propositam, ita ut in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini data proportionis dicuntur, si duplicentur, triplicentur, vel per quemcunque alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirum secundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat. VERBI causa. Si querantur omnes proportionem sesquiseptima; quoniam hic exprimitur pars septima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. una unitate illum superans: atque inter 8. & 7. prima proportio sesquiseptima existit. Quæ duo termini si duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16. & 14. inter quos secunda proportio sesquiseptima cernitur: si triplicentur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si denique centesima proportio eadem queratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. ut gignantur numeri 800. & 700.

NUMERI quoque omnes cuiusque proportionis superparticularis comperientur, si constituentur duo ordines numerorum, quorum inferior a numero partem aliquotam denominante incipiat, superior verò a numero proximè maiore: uterque verò per continuam additionem numeri, à quo initium sumit, primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur. Exempla hic posuimus in proportionibus sesquialteris, sesquiseptimis, & sesquidecimis.

Proportiones sesquialtera.

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	&c.
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	&c.

Proportionem

Proportiones sesquiseptima.

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	Et c.
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	Et c.

Proportiones sesquidecima.

11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	Et c.
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	Et c.

DE PROPORTIONE SUPERPARTIENTE.

PROPORTIO superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes unam aliquotam. Qualis est proportio 8. ad 5. Nam 8. continent semel 5. & insuper tres unitates, quarum qualibet est pars aliquota, utpote quinta, huius numeri 5. Ipse autem ternarius ex illis compositus, non est pars una aliquota numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere constituere unam partem aliquotam, ob multas proportionem, quae primo aspectu videntur esse superpartientes, cum tamen sint superparticulares; cuiusmodi proportio est inter 10. & 8. Quanquam enim 10. contineant semel 8. & duas insuper unitates, quarum qualibet est octava pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis unitatibus compositus, est quarta pars 8. non dicenda est ea proportio superpartiens, sed superparticularis, nempe sesquiquarta. Itaque ut duae quantitates dicantur habere proportionem superpartientem, necesse est, ut maior quantitas minorem contineat semel, & plures eius partes aliquotas, quae simul sumptae non constituent unam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt.

DIVIDITVR primam proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes unam, conficitur proportio superbipartiens; si tres partes aliquotas, supertripartiens; si decem, superdecupartiens, &c.

DIVIDITVR deinde quodlibet horum generum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inaequales, quarum maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quod si duae illae partes fuerint quinta, appellabitur superbipartiens quinta, & ita de reliquis proportionibus superbipartientibus. Pari ratione superdecupartiens proportio inter duas quantitates inaequales, quarum maior excedit minorem decem partibus undecimis, appellabitur superdecupartiens undecimas. Quod si decem illae partes sint decimae tertiae, vocabitur proportio superdecupartiens decimae tertias; & sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus.

NE autem proportionem superpartientes vel inter se confundantur, vel cum proportionibus superparticularibus, quod a plerisque factum esse deprehendimus, diligenter consideranda sunt ea, quae sequuntur. Primum, in pronuntiatione cuiuscunque proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorum alter monstrat, quoniam partes aliquota minoris quantitatis in maiore supersint; alter vero, quanta partes ea sint, aut quanta, indicat. Ut in proportionem supertripartiente octavas, denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior significat, maiorem quantitatem dictae proportionis continere semel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturque syllaba illa [tri] quando dicitur, supertripartiens: posterior autem per vocem [octavas] expressius ostendit, illas tres partes aliquotas, esse partes octavas minoris. Deinde in qualibet proportionem supertripartiente duos praedictos numeros, (qui quidem facile ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, ut ex proximo exemplo patet) eiusmodi esse debere, ut non habeant ullam partem aliquotam communem, praeter unitatem, quae quidem est omnium numerorum pars aliquota: hoc est, ut sint inter se primi. Numeros enim, qui praeter unitatem nullam aliam partem aliquotam communem admittunt, dicunt Arithmetici cum Euclide, primos inter se, ut ex lib. 7. constabit. Tales sunt duo illi numeri 3. & 8. in superiori proportionem supertripartiente octavas expressi. Nam sola unitas, ut constat, est utriusque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionem inter 11. & 8. supertri-

partientem octavas: qualis etiam est inter 22. & 16. Non autem rectè appellabitur proportio posterior inter 22. & 16. supersexupartiens sextasdecimas, quamvis maior minorem contineat semel, & insuper sex unitates, quarum qualibet decimasexta pars est minoris: Non, inquam, rectè sic appellabitur; quia duo numeri 6. & 16. in ea expressi, habent partem aliquotam 2 per quam, ut in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{2}$ ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio ea dicenda est, supertripartiens octavas. Sic etiam non rectè vocabitur proportio inter 9. & 6. supertripartiens sextas, quoniam duo numeri in ea denotati 3 & 6 habent præter unitatem, aliam communem mensuram, videlicet 3. Nam ternarius semel sumptus, se ipsum, & bis repetitus, senarium metitur, ac proinde $\frac{3}{6}$ reducuntur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit sesquialtera, cum maior quantitas contineat semel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non rectè dicetur proportio inter 10. & 6. superquadrupartiens sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. communem partem aliquotam, præter unitatem; atque ita dicenda erit talis proportio superbipartiens tertias, cum maior quantitas contineat minorem semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit unicuique, denominare convenienter omnes proportionem superpartientes.

PERSPICUUM etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem superbipartientem describimus paulò antè, in proportionem superbipartientem tertias, quintas, septimas, nonas, &c. prætereuntes superbipartientem quartas, sextas, octavas, decimas, &c. Cum enim hæ postriores ommissæ, sint superparticulares, propterea quòd $\frac{2}{4}$ faciunt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{6}$ constituent $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{8}$ efficiunt $\frac{1}{4}$. denique $\frac{2}{10}$ æquivalent $\frac{1}{5}$. confunderentur proportionem superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipse in numerum portionum superbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, præter unitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, necne, in Arithmetica docetur, demonstrabiturq; ab Euclide, ad initium libri 7.

INVENTIO omnium proportionum superpartientium cuiusque speciei sic se habet. Numerus tot unitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quæ in proportionem nominantur, quot partes in eadem proportionem exprimuntur, habebit primam proportionem speciei propositæ ad numerum easdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemvis numerum multiplicati, gi-gnent secundos numeros eandem proportionem habentes, tertios, vel alios, ut supra dictum est. V. R. B. gratia, si inquirendi sint omnes numeri proportionis supertripartientis decimas, erunt primi huiusmodi numeri 13. & 10. quia maior superat minorem, qui partes decimas denominat, tribus unitatibus, quot videlicet partium decimarum mentio fit, in proportionem supertripartiente decimas. Dupli eorum, qui nimirum secundam proportionem constituunt, sunt 26. & 20. Tripli, 39. & 30. Centesima autem eiusmodi proportio erit 1300. ad 1000. cum hi numeri centupli sint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti sunt.

EODEM numeros omnium proportionum superpartientium reperies, si statuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat à partium aliquotarum denominatore, superior autem à numero, qui numero partium nominatarum priorem illum superat: uterque deniq; ordo progrediatur per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad numeros cõflatos, ut supra diximus. Exempla hic adiecimus proportionum superbipartientium quintas, superoctupartientium nonas, & superseptupartientium decimas.

Proportiones superbipartientes quintas.

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	&c.
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	&c.

Proportiones superoctupartientes nonas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	&c.

Proportiones superseptupartientes decimas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	&c.

DE PROPORTIONE MULTIPlici SUPERPARTICULARI.

PROPORTIO multiplex superparticularis est habiundo maioris quantitatæ ad minorem,
quando

quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea unam eius partem aliquotam. Cuiusmodi est proportio 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (quæ ex parte proportio hac cum multiplici convenit, utpote cum dupla.) & insuper comprehendunt unitatem, quæ est quarta pars numeri minoris; (quæ in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquarta, eadem proportio proposita similis est.) ut rectè proportio hac composita dicatur ex multiplici, & superparticulari.

DIXIDITUR autem proportio hac, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Ut in duplam superparticularem; triplam superparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterve, &c. & insuper unam partem minoris quantitatis aliquotam.

INFORMODUM ERURsus horum generum in infinita alia subdividitur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio, verbi gratia, tripla superparticularis continet sub se triplam sesquialteram, (quando scilicet maior quantitas minorem ter continet, & præterea dimidiatam eius partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

REPERIEMVS verò omnes proportionēs multiplices superparticulares cuiuslibet speciei, si aduertamus diligenter denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis, quarum in proposita proportionē mentio fit. Nam si denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, productoque numero adiciamus unitatem; habebit hic numerus conflatus ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem speciei propositæ. Et hi duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemvis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportionē numeros, nimirum secundos, tertios, vel alterius ordinis, pro numero unitatum, quæ in numero multiplicante continentur, ut in aliis dictum est. EXEMPLI gratia, si inveniendi sint omnes numeri proportionis sextuple sesquionæ, ducemus 9. denominatorem partis nonæ in 6. denominatorem multiplicis proportionis, productoque numero 54. addemus 1. Conflatus namque numerus 55. ad 9. denominatorem partis nonæ expressæ habet primam proportionem sextuplam sesquionam, ita ut in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Dupli horum numerorum 110. & 18. erunt secundi numeri in eadem proportionē: Triples verò 165. & 27. erunt tertij, &c. ita ut eorumdem centupli 5500. & 900. exhibeant centesimam proportionem eandem.

EASDEM proportionēs multiplices superparticulares inuenies, si constituas duas series numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquotæ nominatæ, superior autem à numero conflato ex unitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotæ eiusdem in denominatorem proportionis multiplicis expressæ: Vterque verò ordo per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad conflatum numerum, &c. progrediatur, ut in superioribus dictum est. Exempla hic vides proportionis dupla sesquialtera, tripla sesquiseptima, & decupla sesquitertia.

Proportiones dupla sesquialtera.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	&c.
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	&c.

Proportiones tripla sesquiseptima.

22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	&c.
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	&c.

Proportiones decupla sesquitertia.

31	62	93	124	155	186	217	248	279	310	341	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	&c.

DE PROPORTIONE MULTIPLICI SUPERPARTIENTE.

PROPORTIO denique multiplex superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes unam: qualis est proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes unam, ob causam dictam in proportionē superpartiente. Nam si partes illæ aliquotæ unam efficerent, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex superparticularis. Ut proportio 20. ad 6. non dicenda est multiplex superbipartiens sextas, quamvis 20. contineant ter 6. & duas

sextas, quia dua sexta conficiunt unam tertiam partem. Quare vocabitur proportio tripla sesquitercia.

DISTRIBUITUR autem hac proportio primum, habita ratione proportionis multiplicis, ut multiplex in duplam superpartientem; triplam superpartientem, &c.

DEINDE qualibet harum, habita ratione numeri partium, sub se continet genera infinita. Ut sub tripla superpartiente, continetur tripla superbipartiens; tripla supertripartiens, &c.

POSTREMO quævis istarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in genera adhuc infinita secatur. Ut tripla supertripartiens diuiditur in triplam supertripartientem quartas, in triplam supertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones & exempla non difficile est cuius ex dictis depromere, &c.

OMNES proportionēs multiplices superpartientes postrema diuisionis ita inueniemus. Denominator partium aliquotarum propositarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propositæ, productumq; numero addatur numerus partium aliquotarum expressus. Constat enim numerus ad eandem partium aliquotarum denominatorem habet primam proportionem earum, quæ inuestigantur. Atq; hi duo numeri, si duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcunque numerum multiplicentur, dabunt secundos numeros, tertios, & alios in eadem proportionē. VEL ET SI quærantur omnes proportionēs quadrupla superoctupartientes vndecimas, ducemus 11 denominatorem partium vndecimarum in 4. denominatorem proportionis quadrupla, numeroq; procreato 44. adiciemus 8. numerum octo partium. Nam conflatu numerus 52. ad 11. denominatorem partium habet primam proportionem quæsitam. Secundi numeri erunt 104. & 22. Tertij 156. & 33. nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, ut 5200. & 1100. habent centesimam proportionem inter omnes quadruplas superoctupartientes vndecimas.

QUOD SI duo numerorum ordines constituantur, quorum inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propositarum, & per continuam eiusdem additionem, primum ad se, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; superior vero incipiat à numero conflatu ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorem multiplicis proportionis data, & ex numero partium expresso, ac per eiusdem continuam additionem primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoque omnes numeros oblata proportionis, ut in superioribus quoq; diximus. Exempla hic vides in proportionē dupla superbipartiente tertias, dupla superquintupartiente sextas, & quintupla supertripartiente quintas.

Proportionēs dupla superbipartientes tertias.

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	&c.

Proportionēs dupla superquintupartientes sextas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	&c.
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	&c.

Proportionēs quintupla supertripartientes quintas.

28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	&c.
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	&c.

DE PROPORTIONIBVS RATIONA- LIBVS MINORIS INAE- QUALITATIS.

OMNIA, quæ dicta hæcenus sunt de quinque generibus proportionum rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda sunt quoque de quinque generibus correspondentibus minoris inæqualitatis, præmissa tamen semper præpositione (sub,) ut dictum est. Nam si in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportionēs minoris inæqualitatis correspondentes. Quemadmodum enim proportio 100. ad 1. est centupla, ita proportio 1. ad 100. est subcentupla. Sicut etiam proportio 11. ad 3. est tripla superbipartiens tertias, ita proportio 3. ad 11. est subtripla superbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.

NON videretur autem hoc loco præmittenda insignis vtilitas tabula Pythagorica, quam cap. 4. nostre Arithmetica construximus, in omnibus proportionibus rationalibus inueniendis: quæ eiusmodi est. Construita tabula Pythagorica, (Est autem constructio facillima, cum numeri in sinistro latere constituent seriem numerorum naturalem, in infinitumq; progredi possint; qualibet autem linea in transversum procreetur ex continua additione numeri in sinistro latere, à quo incipit, ad seipsum, & ad numerum conflatum, & sic in infinitum:

in infinitum: ita ut hae lineae in transfusionibus aliud sint, quam progressiones Arithmetica numerorum, quorum differentiae sint primi numeri earundem linearum.) primum omnes numeri cuiusvis proportionis multiplicis reperiuntur hac modo. Denominator datae proportionis multiplicis in suprema linea acceptus ad unitatem in sinistro latere habet primam eam proportionem multiplicem: Numeri autem sub eodem denominatore descendentes per lineam rectam ad numeros sub unitate in latere sinistro positos, singuli ad singulos, habent secundam, tertiam, quartam, & alias proportionem eiusdem speciei, in infinitum. Ut prima proportio noncupla erit inter 9. suprema linea ad 1. in sinistro latere: secunda inter 18. sub 9. ad 2. sub 1: tertia inter 27. eiusdem lineae ad 9. descendens; & 3. in sinistro latere, &c. atque ita de aliis proportionibus multiplicibus dicendum est.

DEINDE omnes numeri cuiusvis proportionis superparticularis sic inueniuntur. Ad denominatorem partis aliquotae, quae in proportionem exprimitur, in latere supremo acceptum habet proxime insequens numerus primam proportionem datam: Et si per lineam rectam ab hisce duobus numeris descendamus, reperiemus omnes alios numeros eiusdem proportionis, ut de multiplicibus dictum est. Verbi gratia, prima proportio sesquioctava erit 9. ad 8. aliae vero ordine erunt inter numeros sub illis positos, ut secunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.

TERCIO sic reperies omnes proportionem superpartientes cuiuslibet speciei. Post denominatorem partium aliquotarum, quantum in proportionem data mentio fit, in supremo latere acceptum numerata tot numeros, quot partes in eadem proportionem nominantur. Ultimus enim ad denominatorem earundem partium habebit primam proportionem superpartientem propositam. Secunda autem, tertia, quarta, & aliae ordine reperiuntur inter numeros sub illis duobus collocatos. Exempli causa, si quis omnes numeros proportionis superoctupartientis undecimas desideret; sumat in latere supremo denominatorem partium, id est, 11. post quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. Ultimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem superoctupartientem undecimas. Secundam habebit numerus 38. ad 22. tertiam, 57. ad 33. & alias alij numeri sub 19. & 11. per rectam lineam descripti.

QUARTO numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis inuenies hac ratione. In supremo latere accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotae expresse habeat proportionem multiplicem, cuius mentio fit. Numerus enim proxime insequens habebit ad denominatorem partis aliquotae primam proportionem propositam: Secundam autem, tertiam, & alias ha-

beant numeri sub illis duobus positi. Ut autem scias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotae habeat multiplicem proportionem propositam, sumendus est denominator partis in supremo latere, & in sinistro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in sinistro latere, & posterior in supremo.

IN angulo enim communi reperies numerum multiplicem, quem desideras. Exempli gratia. Inueniendi sunt omnes numeri proportionis triplae sesquiquinta. Primum queratur numerus ad denominatorem partis aliquotae, hoc est, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplae, qui est 3. & denominatoris partis aliquotae, qui est 5. quorum alteruter in supremo latere, & alter in si-

TABULA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322

Itaq, si scire cupias, quot numeri cadant inter vnderimos numeros proportionis dupla, cape in serie naturali numerum 11. cui supponitur numerus 10. Dico ergo 10. numeros inter illos intercipi. & sic de ceteris.

PROPONATVR deinde proportio decupla, cuius termini minimi sunt 10. & 1. Differentia eorū est 9. & numerus vna vnitatem minor, 8. Progressio ergo Arithmetica incipiet ab 8. progredieturq, per continuam additionem 9. primum ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & sic deinceps; vt hic videre licet, vbi supra scripsimus etiam seriem numerorum naturalem, cuius idem vsus hic est, qui supra fuit in proportione dupla.

Ordo proportionum decuplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multitudo mediorū numerorum.	8	17	26	35	44	53	62	71	&c.

Itaque inter primos numeros decupla proportionis cadent 8. numeri medij; Et 17. inter secundos: Et 26. inter tertias. At inter octauos intercipientur 71. numeri medij. & sic de ceteris. Vt hac formula declarat.

																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													</
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

RVRSVS detur proportio quacunque superparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt sola vnitatem, quemadmodum & minimi numeri proportionis dupla, inseruiant hic eadem progressionem, qua in dupla proportione, ita vt idem numerus sit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perspicuum est in proportione sesquioctaua.

Ordo proportionis sesquioctaua.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multitudo medior. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

	9.	8.																
	18.	17.	16.															
	27.	26.	25.	24.														
	36.	35.	34.	33.	32.													
	45.	44.	43.	42.	41.	40.												
	54.	53.	52.	51.	50.	49.	48.											
	63.	62.	61.	60.	59.	58.	57.	56.										

OFFERATVR quoque proportio superquadrupartiens septimas, cuius minimi termini sunt 11 & 7. Differentia eorum est 4. Progressio ergo Arithmetica incipiet à 3. progredieturq, per 4. vt hic patet, vnà cum serie naturali ei superimposita.

Ordo proport. superquadr. sept.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multitudo medior. numerorū.	3	7	11	15	19	23	27	31	&c.

IGITVR inter primos numeros proportionis superquadrupartientis septimas comprehenduntur 3. numeri medij. Et 7. inter secundos: Et 23. inter sextos, atq, ita de ceteris, vt hic vides.

	11.	10.	9.	8.	7.													
	22.	21.	20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.									
	33.	32.	31.	30.	29.	28.	27.	26.	25.	24.	23.	22.	21.					
	44.	43.	42.	41.	40.	39.	38.	37.	36.	35.	34.	33.	32.	31.	30.	29.	28.	

ITEM data sit proportio dupla, sesquisepta, cuius numeri minimi sunt 13. & 6. Differentia eorum est 7. Incipiet ergo progressio à 6, habebitq, differentiam 7. inter eius numeros, vt hic cernitur, vnà cum serie naturali numerorum.

Ordo proport. dupl sesquisept.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multitudo med. numerorum.	6	13	20	27	34	41	48	55	&c.

INTER primos ergo numeros proportionis dupla sesquisepta cadent 6. medij numeri; inter secundo, 13. & inter octauos, 55. &c. veluti hic cernitur.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

POSTREMO propositum sit idem experiri in proportione dupla superbipartiente tertias, cuius minimi termini sunt 8. & 3. Et quia eorum differentia est 5. sumet progressio Arithmetica initium à 4. habet

bluntque eius numeri differentiam s. veluti hic manifestum est, vna cum numerorum naturali serie.

Ordo propor. dupl. superbiq. teritias.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	etc.
Multitudo mediorum numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39	44	etc.

Cadent ergo inter duas primos numeros proportionis dupla superbipartientis tertias, 4. numeri medij, & inter secundos, 9. & inter septimos, 34. &c. vt hic perspicuum est.

[illegible]

MANIFESTUM autem est, quod de proportionibus maioris inequalitatis hoc loco diximus, verum quoque esse de minoris inequalitatis proportionibus, cum eadem numeri inter maiorem numerum ac minorem, & inter minorem, ac maiorem interjiciantur.

CÆTERVM ex iis, quæ de quinq; speciebus proportionis rationalis tam maioris, quàm minoris inæqualitatis diximus, perspicuè colligitur, non posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quàm quinq; iam exposita. Cum enim, ut Euclides demonstrat propof. 5. lib. 10. commensurabiles quantitates quæcunq; inter quas, ut diximus, est proportio rationalis inter se proportionem eam habeant, quàm numerus ad numerum; sit, ut omnis proportio rationalis quarumcunq; quantitarum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfectè; quæ ratione constituitur proportio multiplex: Aut semel tantummodo, ac præterea unam eius partem aliquotam; & sic habetur proportio superparticularis: Aut semel duntaxat, & insuper plures partes eius aliquotas non facientes unam; & conficitur proportio superpartiens: Aut aliquoties, & unam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex superparticularis: Aut deniq; aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes unam; & exurgit proportio multiplex superpartiens. Neg; verò alio modo maior quantitas minorem continere, aut minor quantitas à maiore contineri potest. Eadem ratione constat, totidem esse genera proportionis minoris inæqualitatis. Rectè ergo proportionem rationalem sive maioris inæqualitatis, sive minoris, in quinq; genera, quæ exposuimus, partiti sumus.

DE PROPORTIONVM RATIONALIVM
DENOMINATORIBVS.

QUONIAM verò non exiguus est usus Denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus exposuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibusnam numeris singulae proportionales denominentur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distinctè, & apertè habitudinem unius quātitatis ad alteram. Ut denominator proportionis octupla est 8. Nami hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octupla, continere minorem octies. Similiter denominator proportionis sesquiquinta est $1\frac{4}{5}$; quoniam iste numerus significat, maiorem quantitatem proportionis sesquiquinta, continere minorem semel, & quintam eiusdem partem. Atq; ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum est, ut arbitror, quod Euclides in lib. 6. & pleriq; alij Mathematici, appellent denominatorem cuiusvis proportionis, quantitatem illius; quia denominator, ut diximus, ostendit, quanta sit una quantitas ad alteram, cum qua confertur, ut ex propositis exemplis constat.

Ex iis autem, quæ diximus, facile colligi potest denominator cuiusq; proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quacumq; ex sit, est numerus integer tot continens unitates, quoties maior quantitas minorem continere dicitur in ea proportionē, cuius denominator queritur. Vt proportionis duplæ denominator est 2. Noncuplæ, 9. Centuplæ, 100. millecuplæ, 1000 &c. Denominatores autem proportionum submultiplicium multiplicibus correspondentium, sunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus respondent, denominata. Vt denominator proportionis subduplæ, est $\frac{1}{2}$; subquintuplæ, $\frac{1}{5}$. subnoncuplæ, $\frac{1}{9}$; subcentuplæ, $\frac{1}{100}$; submillecuplæ, $\frac{1}{1000}$. Eodem modo denominatores aliarum proportionum submultiplicium reperiemus. Itaq; denominator cuiuscumq; proportionis submultiplicis

triplicis est numerus fractus, cuius numerator perpetuo est unitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, ut ex prolatiis exemplis patet. Neque verò ulla difficultas est in cuiusque proportionis multiplicis, vel submultiplicis denominatore reperiendo, si ea quæ dicta sunt, rectè intelligantur: quippe cum ipsi prolatio proportionis denominatorem offerat, ut ex datis exemplis manifestum est.

DENOMINATOR cuiusvis proportionis superparticularis est unitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet ultra minorem comprehendere. Vt proportionis sesquialtera denominator est $1\frac{1}{2}$; sesquioctava, $1\frac{1}{8}$; sesquimillesima, $1\frac{1}{1000}$. &c. Neque difficile erit denominatorem cuiusque proportionis superparticularis inuenire; cum ipsa proportio prolatio denominatorem exprimat per suam partem aliquotam, ut ex datis exemplis perspicuum est. Denominatores autem proportionum subsuperparticularium correspondentium, sunt fractiones, quarum numeratores una tantum unitate minores sunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis subsequaltera, est $\frac{2}{3}$; subsequioctava, $\frac{9}{8}$; subsequimillesima, $\frac{1000}{999}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquote in proportionem expressa, & pro eiusdem fractionis denominatore, numerus unitate maior. Vt denominator proportionis subsequidecima, est $\frac{10}{9}$. cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem eiusdem fractionis numeratorem superet unitate, &c. Reperiemus quoque denominatorem cuiusvis proportionis subsuperparticularis hoc modo. Denominatorem correspondentis proportionis superparticularis renocabimus ad unam fractionem, ut in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator superabit hic semper una unitate denominatorem, qui etiam denominator est partis aliquote, cuius mentio fit in oblata proportionem. Nam si huius fractionis terminos inuertamus, ut ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, habebimus denominatorem proposita proportionis subsuperparticularis. Vt si offeratur proportio subsequisepima: quoniam denominator proportionis sesquiseptima, quæ illi respondet, est $1\frac{1}{7}$. qui renocatur ad hanc fractionem $\frac{8}{7}$. cuius numerator una unitate maior est, quam denominator partis aliquote. Quare si eam fractionem inuertamus hoc modo $\frac{7}{8}$. discemus denominatorem proportionis subsequisepime esse $\frac{7}{8}$. Facilius denique cuiusvis proportionis subsuperparticularis denominator fortassis reperietur, si inueniantur primi numeri habentes proportionem superparticularem respondentem, ut supra docuimus. Nam fractio, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator verò maior, erit denominator proposita proportionis. Vt si proponatur proportio subsequisepima: quoniam primi, siue minimi numeri habentes proportionem sesquiseptimam, sunt 8. & 7 si ex minore fiat numerator, & ex maiore denominator, conficiemus hanc fractionem $\frac{7}{8}$. pro denominatore proportionis subsequisepime proposita, ut prius.

DENOMINATOR cuiusvis proportionis superpartientis est unitas cum illis partibus aliquotis non efficientibus unam, quas maior quantitas debet ultra minorem continere. Vt denominator proportionis supertripartientis septimas est $1\frac{2}{3}$; supertripartientis vigesimas, $1\frac{3}{20}$. &c. Neque ulla difficultas est in huiusmodi denominatoribus inueniendis: propterea quod prolatio ipsa proportionis denominatorem proprium exhibet, ut ex superioribus exemplis liquido constat. Denominatores autem proportionum subsuperpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores tot unitatibus minores sunt, quam earundem fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem superat. Vt denominator proportionis subsupertripartientis septimas, est $\frac{7}{10}$; subsupertripartientis vigesimas, $\frac{2}{25}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quæ in proportionem exprimuntur, cui si addatur numerus earundem partium, habebitur eiusdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis subsuperquadrupartientis undecimas, est $1\frac{1}{11}$, cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partes undecimas, nimirum 11. cui additus est numerus 4. quatuor partium, ut fiat eiusdem fractionis denominator 15. Denominator autem proportionis subsupertripartientis quintas est hac fractio, $\frac{5}{8}$. Nam eius numerator est numerus denominans partes quintas, nimirum 5. Denominator autem 8. eiusdem fractionis conflatus est ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum subsuperpartientium denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Re-

uoca denominatorem proportionis cuiusque superpartientis correspondentis ad unā fractionem, ut in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expressas denominat, superabit hic semper tot unitatibus, quot sunt partes aliquota. Nam huius fractionis numeri inuersi, ut ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, dabunt denominatorem proposita propositionis subsuperpartientis. Ut denominator proportionis subsuperdecupartientis decimastertias est $\frac{2}{3}$, quia denominator proportionis superdecupartientis decimastertias est $1\frac{2}{3}$, qui ad hanc fractionem $\frac{2}{3}$, reuocatur, cuius numeri inuersi efficiunt hanc fractionem $\frac{2}{3}$. Denique facilius cuiusvis proportionis subsuperpartientis denominator inuenietur fortassis, si reperiantur primi vel minimi numeri habentes proportionem superpartientem correspondentem, ut supra tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator sit eorū numerorum minor, denominator autē maior, denominator erit proposita proportionis subsuperpartientis. Veluti si proponatur proportio subsuperquadrupartientis nonas: quoniam minimi numeri habentes proportionem superquadrupartientem nonas, sunt 13. & 9. faciemus fractionem $\frac{9}{13}$, pro denominatore proportionis subsuperquadrupartientis nonas: & sic de ceteris.

DENOMINATOR cuiusvis proportionis multiplicis superparticularis est numerus integer multiplicem proportionem expressam denominat, cum illa parte aliquota, quam maior quantitas continere debet ultra minorem quantitatem. Ut denominator proportionis tripla sesquiseptima, est $3\frac{1}{7}$. Quintupla sesquinona, $5\frac{1}{9}$, &c. Ut nullus omnino labor sit, exhibere denominatorem cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis; quippe cum ipsa prolatio proportionis distincte exprimat & denominatorem multiplicis proportionis, & partem aliquotam, ut exempla proposita declarant. Denominatores autem proportionum submultiplicium superparticularium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expressas. Ut denominator proportionis subtripla sesquiseptima, est $\frac{7}{2}$; subquintupla sesquinona, $\frac{9}{5}$, &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquota: qui si multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis, addaturque unitas numero producto, habebitur denominator eiusdem fractionis. Ut denominator proportionis subquadrupla sesquiseptima, est $\frac{7}{4}$; cum huius fractionis numerator 6. denominet partes sextas, isque ductus sit in 4. denominatorem proportionis quadrupla, ac producto numero 24. addita unitas, ut eiusdem fractionis denominator conficiatur 25. &c. Item denominatores proportionum submultiplicium superparticularium inuenientur, si denominator cuiusvis proportionis multiplicis superparticularis respondentis reuocetur ad unam fractionem, ut in Arithmetica docuimus, multiplicando nimirum denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adherentis, & producto numero unitatem, id est, numeratorem eiusdem fractionis addendo. Nam si huius fractionis termini commutent ordinem inter se, fiet denominator proportionis proposita. Ut si detur proportio subquadrupla sesquiseptima: quoniam denominator correspondentis proportionis quadrupla sesquiseptima est $4\frac{1}{7}$. ducemus 4. id est, denominatorem multiplicis proportionis, in 6. hoc est, in denominatorem fractionis adherentis, numeroque producto 24. addemus 1. nimirum numeratorem eiusdem fractionis, ut totum denominatorem $4\frac{1}{7}$. reuocemus ad fractionem $\frac{7}{4}$. Cuius termini si inter se ordinem permutent, fiet hac fractio $\frac{4}{7}$, pro denominatore proportionis subquadrupla sesquiseptima. Eodemque modo in ceteris agendum erit. Denique facilius fortasse denominatorem cuiusque proportionis submultiplicis superparticularis inuenies, si duos primos, minimosue numeros proportionis multiplicis superparticularis correspondentis reperias, ut supra traditum est. Nam fractio, cuius numerator sit minor eorum numerus, denominator autem maior, erit denominator proportionis proposita. Ut si offeratur proportio subtripla sesquiseptima: quoniam primi siue minimi numeri proportionis tripla sesquiseptima sunt 22. & 7. fiet ex illis fractio hac $\frac{7}{22}$, pro denominatore proportionis subtripla sesquiseptima, atque ita de ceteris.

DENOMINATOR cuiusvis proportionis multiplicis superpartientis, est numerus integer denominans proportionem multiplicem in ea expressam, cum illis partibus aliquotis, non constituentibus unam, quas maior quantitas ultra minorem debet comprehendere. Ut denominator proportionis tripla superquincupartientis octauas, est $3\frac{5}{8}$; quadrupla superbipartientis quin-

is quintas, $4\frac{2}{5}$. &c. Nihil enim difficultatis habet hac inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus superpartientibus, quod aperte & distinctè in qualibet earum exprimitur tam denominator proportionis multiplicis in ea contenta, quam partes aliquotae, ut perspicue in exemplis prolatis appareat. Denominatores verò proportionum submultiplicium superpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas, quae in proportionibus expressae sunt. Ut denominator proportionis subtripla superquincupartientis octauas, est $\frac{8}{3}$; subquadrupla superbipartientis quintas, $\frac{5}{2}$. &c. Inueniatur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum: quem si multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis eiusdem fractionis denominatorem. Ut denominator proportionis subdupla superoctupartientis decimas tertias, est $\frac{3}{4}$; quia huius fractionis numerator 12. denominat partes tertiasdecimas: qui si ducatur in 2. denominatorem dupla proportionis, productoque numero 26. adiciatur numerus 8. octo partium, conficietur eiusdem fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quoque cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis sic reperies. Reduc denominatorem proportionis multiplicis superpartientis, qua proposita respondet, ad unam fractionem, ut in Arithmetica praecipimus, nimirum multiplicando denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhaerētis, & producto numero addendo numeratorem eiusdem fractionis. Nam huius fractionis termini, si inter se permutantur ordinem, dabunt fractionem, quae denominator erit proportionis submultiplicis superpartientis. Veluti si proponatur proportio subquintupla supertripartientis decimas, reducemus denominatorem correspondentis proportionis quintupla supertripartientis decimas, hoc est, $5\frac{3}{10}$. ad hanc fractionem $\frac{5}{3}$. quod fit ducendo 5. in 10. productoque numero addendo 3. ut fiat numerator 53. cui idem denominator 10. supponendus est. Nam si hac fractio terminos permutat, fiet denominator proportionis subquintupla supertripartientis decimas, $\frac{10}{53}$. &c. Sed forsitan facilius denominatorem cuiusvis proportionis submultiplicis superpartientis obtinebis, si primos, siue minimos numeros proportionis multiplicis superpartientis respondentis reperias, ex eisque fractionem constituas, sumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Fractio enim hac dabit denominatorem proportionis propositae. Ut si proponatur proportio subquintupla supertripartientis decimas: quoniam minimi numeri in proportionem quintupla supertripartiente decimas sunt 53 & 10. constituetur ex eis denominator proportionis propositae hac fractio $\frac{10}{53}$. & sic de ceteris.

DENOMINATOR denique proportionis aequalitatis perpetuò est unitas: quia una quantitas debet in ea proportionem esse aequalis alteri, ac proinde una alteram continere semel, & nihil praeterea: quod quidem unitas significat.

Ex his, quae de proportionum denominatoribus diximus, perspicuum esse puto, denominatores proportionum maiorem inaequalitatem re & nomine ipsas proportionem maiorem inaequalitatis denominare; denominatores verò proportionum minorum inaequalitatem re tantum, non autem & verbo, siue nomine denominare proportionem minorum inaequalitatis. Id quod ex prolatis exemplis liquido constat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis tripla superquadrupartientis nonas, qui est $3\frac{4}{9}$. hoc est, tria integra, & quatuor nonae partes, re & verbo denominat eam proportionem, cum distinctè, aperteque nobis indicet, in ea maiorem quantitatem continere minorem ter, & insuper quatuor eius partes nonas. At verò denominator correspondentis proportionis subtripla superquadrupartientis nonas, nimirum $\frac{9}{34}$. id est, nouem trigessimaprime partes, re quidem ipsa proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas denominat, cum verè significet, minorem quantitatem in ea esse maiorem nouem partes trigessimas primas, quod omnino necessarium est, ut minor quantitas ad maiorem habeat proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas: Verbo autem, siue nomine, eam proportionem nequaquam denominat; quippe cum $\frac{9}{34}$. hoc est, nouem partes trigessimaprime cum nomine proportionis subtripla superquadrupartientis nonas nihil videantur habere commune, sed penitus ab eo discrepare.

QUAERITUR si denominator alicuius proportionis minorum inaequalitatis numeris expressus sit, nimirum per fractionem, ut dictum est; ut scias, quo pacto proportionem, quam denominat, efferre debeas, vide quam proportionem habeat denominator eius fractionis ad numeratorem: quod scies, si partiarum denominatorem fractionis per numeratorem. Nam Quotiens denominator denominabit proportionem, quam denominator fractionis habet ad numeratorem. Eodem enim nomine proportionem dati denominatoris proportionis minorum inaequalitatis pronuntiabis, proposita tantum syllaba, sub, quo illa denominatoris fractionis ad numeratorem appellatur. Ut si detur

denominator $\frac{1}{3}$, dicetur eius proportio suboctupla. Quando enim numerator fractionis est unitas, proportio dati denominatoris erit submultiplex ab eiusdem fractionis denominatore denominata. Quod si datus denominator sit, $\frac{2}{3} \frac{0}{7}$. Diuiso denominatore 327. per numeratorem 20. fit Quotiens $16 \frac{7}{10}$. Denominator igitur fractionis $\frac{2}{3} \frac{0}{7}$. ad numeratorem habet proportionem sedecuplam superseptupartientem vigesimas: ac proinde proportio cuius denominator est $\frac{2}{3} \frac{0}{7}$. dicenda est subsedecupla superseptupartiens vigesimas, & sic de cæteris.

Quia verò nō semper commodè omnes proportionēs propriis nominibus appellari possunt, (quis enim proportionem, verbi gratia, 37. ad 1. commodè dixerit triginta septuplam, vel trigecuplam septuplam, vel alio id genus nomine? Quis item commodè proportionem 48. ad 29. dixerit supernouemdecupartientem vigesimas-nonas? &c.) solent Geometra plerunque in suis scriptis exprimere proportionem quamcunque per primos, siue minimos numeros eius proportionis. Vt proportionē 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quàm tredecuplam. Et vicissim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quàm subtredecuplam. Ita quoque proportionem 52. ad 40. vocant proportionem 13. ad 10. quia alias diceretur supertripartiens decimas. Proportionem verò 40. ad 52. appellant eam, quæ est 10. ad 13. quæ proprio nomine diceretur subsupertripartiens decimas, & sic de aliis.

Quæ autem proportio qualibet exprimi possit per minimos eius numeros, vt diximus: per-necessaria tamen est cognitio denominatoris eiusdem proportionis, vt habitudinem vnius numeri ad alterum cognoscamus. Nam etiam si aliquis proportionem numeri 1700. ad 400. dicat esse eam, quæ est numeri 17. ad 4. non intelligam tamen planè, quam sit illa proportio, nisi eius denominatorem cognouero, qui est $4 \frac{1}{4}$. Hic enim manifestè declarat, maiorem numerum continere minorem quater, & insuper quartam eius partem. Atque hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quàm ex numeris non minimis. Quod si quando minimi numeri alicuius proportionis sint ita magni, vt denominator ex illis non facile possit intelligi, recurrendum erit ad præceptum, quod mox subiungam, & ex quo denominator proportionis inter quosvis duos numeros, siue minimi hñ sint, siue non, notus efficitur.

Quod si proportionem quamcunque per eius numeros minimos efferunt Mathematici, licebit nobis multo commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem, ita vt proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator est 5. Item proportionem 48. ad 38. eam, cuius denominator est $1 \frac{5}{8}$. quæ dicenda esset superquintupartiens decimanonas. Sic etiam proportio 20. ad 100. dici potest ea, quæ habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 38. ad 48. ea, cuius denominator est $\frac{1}{2} \frac{2}{4}$. atque ita de reliquis: quoniam videlicet denominator clarissimè demonstrat habitudinem vnius numeri ad alium, vt dictum est.

Denominator porro proportionis inter duos quosvis numeros ita reperitur. Diuidatur numerus antecedens, qui nimirum ad alium refertur, per consequentem. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, si qua adsit, ad minimos numeros, vt in Arithmetica tradidimus, erit eius proportionis denominator. Veluti proposita proportione 39. ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem eius esse 3. Quotientem videlicet numerum diuisionis 39. per 3. vel 390. per 30. Quod si vicissim conferantur 3. cum 39. vel vel 30. cum 390. erit quotiens diuisionis fractio hæc $\frac{3}{39}$. vel $\frac{3}{390}$. Nam quando minor numerus per maiorem diuiditur, Quotiens semper est fractio, cuius numerator est minor numerus, & denominator, maior, vt in Arithmetico explicauimus. Et quia vtraque fractio, si eius numeri ad minimos reuocentur, reducitur ad hæc $\frac{1}{13}$. dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39. vel 30. ad 390. esse $\frac{1}{13}$. Rursus data proportione 52. ad 40. ex diuisione 52. per 40. fit Quotiens $1 \frac{1}{4} \frac{2}{10}$. cuius fractio reducitur ad hanc $\frac{3}{10}$. Igitur denominator proportionis 52. ad 40. erit $1 \frac{1}{3}$. Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inuenietur denominator, siue Quotiens $\frac{4}{13}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{1}{3}$. Præterea proportio 100. ad 20. denominatorem habebit 5. Diuisis enim 100. per 20. Quotiens est 5. Proportionis verò 20. ad 100. denominator erit $\frac{1}{5}$. propterea quòd diuisis 20. per 100. Quotiens est $\frac{2}{100}$. id est, in minimis numeris, $\frac{1}{5}$. Denique denominator proportionis 48. ad 10. erit $4 \frac{2}{5}$. quòd diuisis 48. per 10. Quotiens sit $4 \frac{8}{10}$. hoc est, in numeris minimis, $4 \frac{4}{5}$. At denominator proportionis 10. ad 48. erit $\frac{5}{12}$. id est, in minimis numeris $5 \frac{1}{4}$. Et quia denominator fractionis $\frac{5}{12}$. ad numeratorem habet proportionem quadruplam superquadrupartientem quintas, (quòd diuisis 24. per 5. Quotiens fiat $4 \frac{4}{5}$.) appellabitur proportio 10. ad 48 subquadrupla superquadrupartiens quintas. Vt enim ritè efferatur proportio minoris inæqualitatis, denominanda prius est proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, vt supra diximus.

In præterito denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, vt dictum est, eoq; reducto ad vnā fractionem, vt in Arithmetica traditum est, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter quos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportionē, quando nimirum denominator inuentus non habet annexam fractionem, erunt denominator inuentus, & unitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. est $2 \frac{1}{10}$. si reducatur ad hanc vnā fractionem, $\frac{21}{10}$. (quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorē fractionis 10. productoque numero eiusdem fractionis numeratorem 9. addendo.) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Sic etiam, quia denominator proportionis 824. ad 1133. est $\frac{9}{11}$. erunt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133. Item quia denominator proportionis 84. ad 12. est 7. erunt in ea proportione minimi

minimi numeri 7. & 1. Viciſſim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cuius denominator eſt $\frac{7}{12}$. erunt 1. & 7. Itaq; propoſitis duobus numeris quibuſcunq; ſe querantur minimi numeri, eandem quam illi habentes proportionem, inueniendus erit denominator proportionis eorum, vt dictum eſt, iſq; ad vnā fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator & denominator, erunt minimi numeri quaſiti. Vt ſi querantur minimi numeri proportionis, quam habent 400. ad 90. Diuiſo antecedente per conſequente terminum, ſit Quotiens $4\frac{4}{9}$. in minimis numeris. Quo reuocato ad hanc fractionem $4\frac{4}{9}$. dicemus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. eſſe 40. & 9. Eademq; ratio eſt de ceteris.

Item vero ſi, propoſitis duabus proportionibus, cognoscere velis, vtrum earū maior ſit, vel minor, dicēs eam maiore eſſe, cuius denominator maior eſt: minore vero eam, cuius denominator eſt minor. Quod ſi denominatores ſint aequales, proportionē quoq; aequales eſſe pronunciabis. Vt ſi proponantur duae hae proportionē, ſuperſextipartiens decimaſquintas, & ſuperdecupartiens decimaſeptimas, quarū denominatores ſunt $1\frac{5}{8}$. & $1\frac{10}{7}$. dicēs priorē poſteriore eſſe minorem: quia denominator $1\frac{5}{8}$. minor eſt denominatore $1\frac{10}{7}$. Qua vero arte cognoscās, vtra duarū fractionū maior ſit, vel minor, an verō aequales ſint, tradidimus in Arithmetica. Eadem ratione, ſi offerantur duae proportionē, quarū denominatores ſint $10\frac{1}{1000}$. & $9\frac{1}{100}$. dicemus priorē eſſe maiorem. Quāquam enim fractio $10\frac{1}{1000}$. minor ſit fractione $9\frac{1}{100}$. numerus tamē integer 10. integro numero 9. maior eſt. Sic ſi dentur duae proportionē, vna 17. ad 11. altera 18. ad 12. dicēs illam hac eſſe maiorem, quia illius denominator $1\frac{11}{17}$. maior eſt huius denominatore $1\frac{12}{18}$. Ceterū, quādo duae proportionē proponuntur in numeris, dignoſcemus facile, vtra earū ſit maior, etiam ſi earū denominatores non inquiramus, hac ratione: Multiplicato antecedente termino prioris proportionis in terminū conſequente poſterioris, & termino antecedente poſterioris in conſequente terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminus maiorem numerum produxerit, illa proportio maior eſt: Et ſi duo aequales numeri geniti fuerint, proportionē inter ſe aequales erunt. Vt ſi proponantur duae proportionē 17. ad 11. & 18. ad 12. comperiemus priorē maiorem eſſe, quia illius antecedens 17. in huius conſequente 12. ductus procreat 204. at antecedens huius 18. in conſequente illius 11. producit tantummodō 198. Rurſus ſi dentur duae proportionē 18. ad 12. & 108. ad 72. produceretur idem numerus 1296. tam ex prioris antecedente 18. in poſterioris conſequente 72. q̄ ex antecedente poſterioris 108. in conſequente prioris 12. multiplicato. Quare proportionē ipſae aequales inter ſe erunt. Ratio huiusce operationis eſt: quia hac ratione, propoſitis quatuor numeris, multiplicatur inter ſe tam extremi duo, quā duo intermedij, vt in datis exemplū patet. Igitur ſi procreentur numeri aequales, erit eadem proportio primi ad ſecundum, quā tertiū ad quartum, vt ab Euclide demonſtratur lib. 7. propoſ. 19. Hinc ſit, ſi primus in quartum producat maiorem numerum, quā ſecundus in tertium, maiore eſſe primum, quā vt eandem habere poſſit proportionem ad ſecundum, quā tertius ad quartum: quandoquidem minor eſſe deberet, vt eundem numerum poſſet producere, ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquā duo numeri in quacunque proportionē, ſue q̄ primi ſint, ſue non; hos ergo, vt inueniamus, multiplicabimus quemcunque numerum aſſumptum, vel diuidemus per propoſita proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad aſſumptum, qui multiplicatus eſt, vel aſſumptus, qui diuiſus eſt, ad Quotientem habebit proportionē propoſitam. Verbi gratia, ſi ſint inueniendi duo numeri in proportionē quintupla, ducemus quemcunque numerum, vt 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionē habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. diuidemus per denominatorem 5. Nam diuiſus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoque datam proportionē quintuplam. Ita quoque ſi inueniendi ſint duo numeri in proportionē dupla ſeſquitercia, cuius denominator eſt $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemcunque numerum, vt 24. per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habet proportionē denominatam a $2\frac{1}{3}$. Item ſi numerum 24. diuidamus per $2\frac{1}{3}$. habebit diuiſus numerus 24. ad Quotientem $10\frac{2}{3}$. proportionē datam duplam ſeſquiterciam. Sed vt fractionē vitentur, ſiquidem per multiplicationem rem expedire lubet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur a denominatore partis aliquota, vel pluriū partium, quarū in proportionē ſit mentio: In proportionē tamē multiplici, quia nullius partis ſit mentio, aſſumi poteſt quilibet numerus. Vt ſi deſiderentur duo numeri proportionis tripla ſuperbipartiētiſ nonas, accipiendus erit numerus a 9. numeratus, qualis eſt 18. vel 27. 36. 45. &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{9}$. gignet numerum integrum: vt ductus 45. in $3\frac{2}{9}$. ſit numerus 145. qui ad aſſumptum numerum 45. proportionē habet datam. Sic etiam ſi capiat qui proportionē ſubquadruplam, cuius denominator eſt $\frac{1}{4}$. ſumendus erit numerus a 4. numeratus, vt 12. Hic enim ductus in denominatorem $\frac{1}{4}$. producer 3. numerum integrum, qui ad aſſumptum 12. habet proportionē ſubquadruplam. Si verō per diuiſionem agendum ſit, & fractionē vitanda, ſumendus erit in proportionē multiplici numerus a denominatore proportionis numeratus. In aliis autem proportionibus, reuocandus erit denominator proportionis ad vnā fractionem, numerusq; ſumendus a numeratore numeratus. Vt ſi queratur proportio quintupla, ſumendus erit, verbi gratia, numerus 30. a 5. numeratus. Hic enim diuiſus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionē habet quintuplam. Si autem deſideretur proportio, cuius denominator ſit $4\frac{3}{7}$. reuocato eo ad fractionem $\frac{3}{7}$. ſumendus erit numerus a 3. numeratus, vt 62. Nam hoc diuiſo per $\frac{3}{7}$. ſit Quotiens 14. ad quē acceptus numerus 62. habet proportionē a $4\frac{3}{7}$. denominatam, nimirum quadruplam ſupertripartiēte ſeptimas. Ceterū ſi duo numeri proponantur,

cupiatq, quis alios duos in eadem proportionem reperire, satū erit, si utramque per quemvis numerum multiplicet, aut diuidat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propositi duo numeri. Item si proposito quouis numero, inueniendus sit alius, qui ad eum proportionem habeat datam vel ad quem is datam habeat proportionem, assequeris primum, si propositum numerum per denominatorem proportionis multiplices: at secundum obrinebis, si eundem per denominatorem proportionis diuidas. Quod si proportio detur in duobus numeris, proponaturq, tertius quispiam numerus siquidem inueniendus sit quartus, ad quem tertius datus eandem habeat proportionem, quam primus datus ad secundum: siquidem denominator proportionis duorum numerorum datorum notus est, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem. Quotiens enim numerus erit, quem quærimus. Vel certè, siue denominator cognitus sit siue non, multiplicandus erit tertius numerus per secundum datum: hoc est, per consequentem terminum data proportionis, productusq, numerus per primum, siue per antecedentem terminū, diuidendus. Vt si dentur duo numeri 4. 7. quorum proportionis denominator est $\frac{4}{7}$. detur item tertius numerus 20. Diuide numerum 20. per denominatorem $\frac{4}{7}$. produceturg, quartus numerus quesitus 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per secundum 7. & productum numerum 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si verò inueniendus sit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri: si quidem denominator notus est, ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem quærimus. Vel siue notus sit denominator, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per secundum, id est, per consequentem terminum, diuidendus. Vt dati eisdem duobus numeris 4. 7. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{4}{7}$. denominatorem, gigneturq, quesitus numerus $11\frac{2}{7}$. Vel duc tertium numerum 20. in primum 4. numerumq, productum 80. partire per secundum 7. Nam ad tertium 20. habebit Quotiens $11\frac{2}{7}$. eandem proportionem, quam 4. ad 7.

Quæ iam verò diximus, eam proportionem esse maiorem, cuius denominator maior est, sit, ut in proportionibus multiplicibus detur minima, nimirum dupla, denominata à 2. nō autem maxima: propterea quod numerus 2. inter omnes denominatores proportionum multiplicium est minimus: maximus autem dari non potest, cum numeri augeantur in infinitum. Efficitur quoq, inter proportionem superparticulares reperiri maximam, nimirum sesquialteram, denominatam à $1\frac{1}{2}$. non autem minimam: quia numerus $1\frac{1}{2}$. omnium denominatorum proportionum superparticularium maximus est: minimus autem dari non potest cum denominatores fractionum progredi possint in infinitum. Constat autem ex iis, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionem, cuius denominator maior est, minorem esse, si idem sit numerator; fractionem autem, cuius denominator minor est, si idem sit numerator, maiorem esse. Cum ergo denominator 2. sit omnium minimus, erit fractio $\frac{1}{2}$. omnium, quæ numeratorem habent 1. (quales sunt fractiones denominatorum proportionum superparticularium) maxima. Colligitur denique, in alijs proportionibus maioris inæqualitatis neque minimam posse dari, neque maximam. Quod intelligendum est de vltimis speciebus. Nam si de vltimis speciebus non sit sermo, erit superbipartiens inter superpartientes, minima: superpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem superparticulares maxima erit multiplex sesquialtera: minima verò, dupla superparticularis. Inter multiplices denique superpartientes maxima erit multiplex superpartiens tertius; minima verò, dupla superbipartiens. E contrario in proportionibus submultiplicibus datur maxima, nimirum subdupla, non autem minima: In subsuperparticularibus autem reperitur minima, ut subsesquialtera, non autem maxima: In alijs deniq, proportionibus minoris inæqualitatis neq, maxima, neq, minima dari potest. Quæ omnia perspicua erunt, si denominatores proportionum inter se conferantur.

Colligitur etiam, hanc esse connexionem inter proportionem maioris inæqualitatis, equalitatis, & minoris inæqualitatis, ut qualibet proportio maioris inæqualitatis maior sit proportionem equalitatis: qualibet verò proportio minoris inæqualitatis, minor: propterea quod quilibet denominator proportionis maioris inæqualitatis, quantumvis minimus, maior est vnitati, quæ denominator est proportionis equalitatis, cum ille minor esse nequeat, quàm vnitati cum vna parte aliquota: At denominator proportionis minoris inæqualitatis semper minor est, quàm vnitati, cum sit fractio, cuius numerator à denominatore superatur, ut ex iis, quæ supra diximus, patet. Itaq, proportio equalitatis media est inter proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Vbi hoc animaduersione dignū est, Proportionem maioris inæqualitatis decrecendo appropinquare semper magis ac magis in infinitum proportioni equalitatis, nunquam tamen ad eam peruenire: E contrario verò proportionem minoris inæqualitatis crescendo semper magis, ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem equalitatis, nunquā tamen eam attingere. Nam qualibet proportionem multiplici proposita datur minor, ac minor, vsq, ad duplam, quæ omnium multiplicium est minima. Deinde hac datur minor, nimirum superparticularis, vel superpartiens quæcunque: in qua cum minima non possit dari, omnisq, proportio eiusmodi maior sit proportionem equalitatis, liquidò constat, proportionem maioris inæqualitatis ad equalitatis proportionem non posse peruenire, etiam si in infinitum decrecendo ad ipsam accedat. Rursus cum omnis proportio minoris inæqualitatis minor sit proportionem equalitatis, non possit autem in ea reperiri maxima, manifestum quoq, est, proportionem minoris inæqualitatis attingere non posse proportionem equalitatis, licet in infinitum crescendo ad eam accedat. Sed ut utrumque exemplo etiam discatur, sciendum

sciendum est; si inter duos numeros quosvis non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior scilicet uno eorum, & altera minor; proportionem maioris numeri ad minorem diuisam esse in duas minores, quarum una est maioris numeri ad medium interpositum, altera vero numeri medi ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorem diuisam esse in duas maiores, quarum una est minoris numeri ad medium interpositum, altera vero medi ad maiorem. Vt si inter duos numeros 6. 3. ponatur medius 4. hoc modo, 6. 4. 3. proportio 6. ad 3. qua dupla est, diuisa erit in sesquialteram 6. ad 4. & sesquiterciam 4. ad 3. quarum utraq; minor est proportionem dupla 6. ad 3. Contra vero, proportio 3. ad 6. qua subdupla est, diuisa erit in sub-sesquiterciam 3. ad 4. & sub-sesquialteram 4. ad 6. quarum utraque maior est proportionem subdupla 3. ad 6. Idem fit, si inter eosdem numeros 6. 3. interponatur medius 5. hoc modo, 6. 5. 3. Tam enim proportio 6. ad 3. sesquiquinta, quam proportio superbipartiens tertias 5. ad 3. minor est proportionem dupla 6. ad 3. Contra vero eam proportio subsuperbipartiens tertias 3. ad 5. quam sub-sesquiquinta 5. ad 6. maior est proportionem subdupla 3. ad 6. Quae omnia ex denominatoribus probari possunt. Verum verumque demonstrabitur hac ratione. Quoniam medius numerus minor est maiore dato, & maior minore, habebit maior datus ad minorem datum, maiorem proportionem, quam idem maior ad medium, & quam medius ad minorem. At vero minor ad maiorem habebit minorem proportionem, quam idem minor ad medium, & quam medius ad maiorem, ut manifestum est, vel ex defin. 20. lib. 7. ut ibidem explicabimus, vel ex propof. 8. huius lib. 5. ubi demonstrat Euclides, propositis duabus quantitibus inaequalibus, maioris ad tertiam aliquam esse maiorem proportionem, quam minoris? At è contrario, tertiam eandem quantitatem ad minorem habere maiorem proportionem, quam ad maiorem. Ex quo sequitur id, quod diximus: nimirum positis his tribus numeris 6. 4. 3. maiorem esse proportionem eiusdem numeri 6. ad minorem 3. quam ad medium 4. maiorem: Item maiorem esse proportionem maioris numeri 6. ad 3. quam minoris 4. ad eundem 3. Contra vero maiorem esse proportionem eiusdem numeri 3. ad minorem 4. quam ad maiorem 6. Item maiorem esse proportionem maioris numeri 4. ad 6. quam minoris 3. ad eundem 6. Eademq; in ceteris ratio est. His positis erit proportio dupla 4. ad 2. diuisa hic, 4. 3. 2. in duas minores. Et tam proportio 8. ad 6. qua eadem est, qua 4. ad 3. diuisa hic, 8. 7. 6. quam proportio 6. ad 4. qua eadem est, qua 3. ad 2. hic, 6. 5. 4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 14. qua eadem est, qua 8. ad 7. diuisa hic, 16. 15. 14. & proportio 14. ad 12. qua eadem est, qua 7. ad 6. hic, 14. 13. 12. quam proportio 12. ad 10. qua eadem est, qua 6. ad 5. hic, 12. 11. 10. & proportio 10. ad 8. qua eadem est, qua 5. ad 4. hic, 10. 9. 8. in duas minores: atq; ita fieri potest in infinitum. E contrario vero proportio sub-sesquialtera 4. ad 6. diuisa erit hic, 4. 5. 6. in duas maiores. Et tam proportio 8. ad 10. qua eadem est, qua 4. ad 5. diuisa hic, 8. 9. 10. quam proportio 10. ad 12. qua eadem est, qua 5. ad 6. hic, 10. 11. 12. in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 18. qua eadem est, qua 8. ad 9. diuisa hic, 16. 17. 18. & proportio 18. ad 20. qua eadem est, qua 9. ad 10. hic, 18. 19. 20. quam proportio 20. ad 22. qua eadem est, qua 10. ad 11. hic, 20. 21. 22. & proportio 22. ad 24. qua eadem est, qua 11. ad 12. hic, 22. 23. 24. in duas maiores: atq; huius incrementi nunquam erit finis. Idemq; experiri licebit in quibusvis aliis proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. diuisa hic est, 10. 6. 1. in duas minores: Et proportio subsuperseptupartiens vndecimus 11. ad 18. diuisa hic, 11. 15. 18. in duas maiores, &c.

DE PROPORTIONALITATIBVS.

PROPORTIONALITAS ab Euclide definita in plura genera diuiditur, ut videre licet apud Boetium, Iordankum, & alios Arithmeticos: sed praecipuae proportionalitates, quas auctores nominati Medietates vocant, sunt haec tres; Arithmetica, Geometrica, & Musica; siue Harmonica.

ARITHMETICA proportionalitas, siue Medietas est, quando tres, vel plures numeri per eandem differentiam progrediuntur. Et hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. quorum quilibet suum antecedentem ternario superat, dicuntur constituere proportionalitatem Arithmeticam. Est autem duplex, continua, & discreta. Continua est, quando in progressionem numerorum nulla sit interruptio, sed quilibet cum proximè antecedente confertur, ut in dato exemplo fit. Discreta autem est, quando in numerorum progressionem interruptio fit, ita ut bini tantum inter se conferantur, non autem quilibet cum proximè precedente. Vt in his numeris contingit, 4. 7. 8. 11. 30. 33. Nam eadem differentia est inter binos 4. 7. & 8. 11. & 30. 33. non autem inter 4. 7. & 7. 8. &c.

GEOMETRICA proportionalitas, siue Medietas est, quando tres, vel plures numeri eandem proportionem habent: quam quidem Euclides definiuit. Hac enim proprie proportionalitas dicitur, siue Analogia: alia vero improprie, cum non sit eadem semper inter earum terminos proportio, ita ut rectius Medietates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos interyiciuntur. Et hi numeri, 2. 6. 18. 54. quoniam quilibet ad suum antecedentem eandem habet proportionem triplam, constituunt proportionalitatem Geometricam. Hac duplex quoque est, continua, & discreta, ut in 4. defin. huius libri explicauimus.

Continua cernitur in datis numeris, discreta autem in hisce sex, 2. 3. 12. 18. 20. 30. Nam bini tantum 2. 3. & 12. 18. & 20. 30. eandem habent proportionem sesquialteram; non autem quilibet ad proximè precedentem.

MUSICA siue Harmonica proportionalitas, siue Medietas est, quando tres numeri ita ordinantur, ut eadem sit proportio maximi ad minimum, qua differentia inter maiores duos ad differentiam inter duos minores: ita ut nec eadem inter eos sit differentia, ut in Arithmetica, nec eadem proportio, ut in Geometrica. Ut tres hi numeri, 3. 4. 6. quoniam eadem est proportio maximi 6. ad minimum 3. qua differentia inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiam inter medium 4. & minimum 3. id est, ad 1. (cùm utrobique proportio sit dupla.) constituunt proportionalitatem, siue Medietatem Muscam, siue Harmonicam: Ipsi verò neq. eandem habent differentiam, neq. eandem proportionem, ut patet. Sic etiam tres hi numeri, 42. 12. 7. Harmonicam proportionalitatem constituunt, quia eadem proportio est maximi 42. ad minimum 7. qua differentia inter maximum 42. & medium 12. hoc est, numeri 30. ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cùm utrobique proportio sit sextupla. Dicitur autem huiusmodi proportionalitas Musica, siue Harmonica, quia plerunque eius numeri habent proportionem eas, in quibus consonantia Musica consistunt. Ut in priori exemplo inter 6. & 4. est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, qua Diapente dicitur, siue Quinta. Item inter 4. & 3. est proportio sesquitercia, constituens consonantiam, quam Diatessaron, siue Quartam vocant. Denique inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, qua Diapason consonantiam, siue Octavam constituit. Atque eodem modo in plerisque alijs idem cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT TRIVM PROPOR- tionalitarum, siue Medietarum, quas ex- plicauimus.

I.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmetica, minor est proportio maximi ad medium, quàm medijs ad minimum. Ut hic patet. 2. 4. 6. Nam proportio 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 2. dupla.

AT in tribus numeris proportionalitatis Musica, maior est proportio maximi ad medium, quàm medijs ad minimum. Ut hic vides. 3. 4. 6. Proportio enim 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 3. sesquitercia.

IN tribus denique numeris proportionalitatis Geometrica, eadem est proportio maximi ad medium, qua medijs ad minimum, ut ex eius definitione constat, apparetq. in hisce tribus numeris 3. 6. 12. Tam enim 12. ad 6. quàm 6. ad 3. duplam habet proportionem. Qua in re Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmetica atq. Harmonicam, cùm in Arithmetica inter maiores numeros minor sit proportio, quàm inter minores; Contra verò in Harmonica inter maiores numeros maior, quàm inter minores: In Geometrica autem eadem inter maiores, qua inter minores, ut explicatum est.

II.

ARITHMETICA proportionalitas habet terminorum differentias aequales, proportionem verò eorundem inaequales.

GEOMETRICA è contrario differentias terminorum habet inaequales, proportionem verò eorundem aequales.

HARMONICA denique neque differentias, neque proportionem terminorum aequales habet. Patet hoc ex superioribus exemplis.

III.

IN tribus numeris Arithmetica proportionalitatis, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, & à maiori superatur. Ut hic, 3. 7. 11. Medius 7. superat minorem 3. quatuor vnitatibus, qua efficiunt $\frac{4}{7}$. ipsius medijs 7. Item medius idem 7. superatur à maiore 11. quatuor quoq. vnitatibus, qua constituunt eiusdem medijs $\frac{4}{7}$. Item hic, 15. 20. 25. medius 20. superat minorem 15. quinque vnitatibus, qua efficiunt $\frac{5}{20}$. ipsius medijs 20. Item medius idem 20. superatur à maiore 25. quinque quoq. vnitatibus, qua constituunt $\frac{5}{20}$. eiusdem medijs 20.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometrica, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Ut hic, 4. 6. 9. medius 6. superat minorem 4. binaria, qui est $\frac{2}{6}$. medijs, superaturq. à maiore 9. ternario, qui quoque est $\frac{2}{9}$. maioris. Sic etiam hic, 9. 15. 25. ubi est continua proportio superbipartiens tertias, medius 15. superat minorem 9. sex vnitatibus, qua faciunt $\frac{6}{15}$. ipsius medijs 15. Et idem medius 15. superatur à maiore 25. decem vnitatibus, qua efficiunt quoq. $\frac{6}{25}$. ipsius maioris 25.

IN tribus denique numeris Harmonica proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minorem minorem superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Ut hic, 3. 4. 6. medius 4. superat minorem 3. vnitatibus

3. vnitatibus

3. vnitatē, quā est $\frac{2}{3}$. eiusdem minoris superatur $\frac{2}{3}$ à maiore 6. binario, qui quoq, est $\frac{1}{3}$. eiusdem maioris. Rursus in hac proportionalitate Harmonica, 4. 2. 12. 7. medius 12. superat minorem 7. quinque vnitatibus, quae sunt $\frac{5}{7}$ ipsius minoris 7. Et idem medius 12. superatur à maiore 42. triginta vnitatibus, quae sunt $\frac{3}{4} \frac{9}{2}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{5}{7}$. quoq, ipsi maioris 42.

III.

IN tribus numeris Arithmeticae proportionalitatis, summa extremorum dupla est medij. Vt hic, 3. 7. 11. summa extremorum 14. dupla est medij 7.

AT in tribus numeris proportionalitatis tam Geometricae, quam Harmonicae, summa extremorum superat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum superat. Vt hic, 4. 6. 9. & 3. 4. 6. tam summa 13. extremorum 4. 9. superat duplum medij 6. hoc est, 12. vnitatē, quā differentia maiorum, nimirum 3. superat 2. differentiam minorum, quā summa 9. extremorum 3. 6. duplum medij 4. id est, 8. superat vnitatē, quā differentia maiorum, nimirum 2. superat differentiam minorum, quā est 1. Sic etiam hic, 9. 15. 25. vbi est continua proportio superbipartiens tertiā, summa 34. extremorum 9. 25. superat duplum medij 15. hoc est, 30. numero 4. quo eodem differentia maiorum, 10. differentiam minorum 6. superat. Item in hac proportionalitate Harmonica, 4. 2. 12. 7. summa 49. extremorum duplum medij 12. id est, 24. superat numero 25. quo differentia maiorum 30. superat differentiam minorum 5.

V.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticae, extremi inter se multiplicati procreant numerum, qui à quadrato medij superatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic, 3. 7. 11. numerus 33. factus ex 3. in 11. superatur à 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricae, numerus ex primo in tertium genitus, quadrato medij aequalis est, vt hic, 4. 6. 9. Extremi inter se multiplicati faciunt 36. quadratum medij.

IN tribus numeris deniq, Harmonicae proportionalitatis, numerus ex multiplicatione extremorum inter se genitus superat quadratum medij numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic, 4. 2. 12. 7. numerus 294. factus ex 4. 2. in 7. superat 144. quadratum medij numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Quā in re etiam medium locū obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmetica, & Harmonicā; quippe cū in Arithmetica minus producat ex primo in tertium, quā ex medio in se, in Harmonica verò plus; & in Geometrica idem numerus gignatur.

VI.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticae, summa extremorum in medium ducta producit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3. 7. 11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui numerus superat numerum 66. qui duplus est producti 33. ex primo in tertium, numero 32. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatam, hoc est, in 8.

IN tribus autem numeris Geometricae proportionalitatis, summa extremorum in medium multiplicata gignit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum, in differentiam maiorum. Vt hic, 4. 6. 9. Summa 13. extremorum in medium 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4. in 9. id est, 72. superat numero 6. ex differentia 2. in differentiam 3. genito.

DENIQUE in tribus numeris proportionalitatis Harmonicae, ex summa extremorum in medium procreatur, numerus duplus producti ex primo in tertium. Vt hic, 3. 4. 6. Ex summa extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

VII.

QUATUOR numeris in proportionalitate Geometrica non continuè proportionalibus datis, si secundus est inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eosdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et si secundus medius est in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6. 9. 8. 12. quoniam ita est 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et sunt 6. 9. 12. proportionales Arithmetice, cū eundem habeant excessum 3. vides 6. 8. 12. Harmonicè proportionales esse, cū eadem sit proportio 12. ad 6. quā differentia maiorum 4. ad 2. differentiam minorum. Item hic, 6. 8. 9. 12. quia ita est 6. ad 8. vt 9. ad 12. Et sunt 6. 8. 12. proportionales Harmonicè, vt diximus, vides 6. 9. 12. Arithmetice esse proportionales, cū eundem excessum 3. habeant.

ITEM quatuor numeris datis, quorum alteruter mediorum sit inter extremos medios in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometricè non continuè proportionales. Vt quia datis hu 4. numeris 4. 6. 8. 12. tertius 8. medius est Arithmetice inter extremos 4. 12. & secundus 6. inter eosdem extremos 4. 12. medius est Harmonicè; vides ita esse 4. ad 6. vt 8. ad 12. Et 4. ad 8. vt 6. ad 12.

VIII.

PROPOSITIS quotquot numeris continuè proportionalibus siue Arithmetice, siue Geometricè, siue Harmonicè, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica, quando tres primi sunt

Harmonicè proportionales, item tres primum insequentes, relicto primo; & relicto primis duobus, alij tres, qui sequuntur; nec non primis tribus relictis, subsequentes tres, & sic deinceps.) erunt in eadem proportionalitate constituti numeri, qui in locis tam imparibus, quàm paribus, atq; etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodo aequalis multitudo numerorum inter quosvis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interjiciantur: cuiusmodi sunt primus, tertius, quintus, septimus, &c. Item secundus, quartus, sextus, &c. Præterea primus, quartus, septimus, &c. Insuper primus, quintus, nonus, &c. atq; ita deinceps. Id quod in exemplis, quæ sequuntur, perspicuum est.

PROPORTIONALITATES ARITHMETICÆ.

3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59
3		11		19		27		35		43		51		59
	7		15		23		31		39		47		55	
3			15			27			39			51		
	7			19			31			43			55	
3				19				35				51		

Proportionalitates Geometricæ.

5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960	81920
5		20		80		320		1280		5120		20480		81920
	10		40		160		640		2560		10240		40960	
5			40			320			2560			20480		
	10			80			640			5120			40960	
5				80				1280				20480		

Proportionalitates Harmonicæ.

252	280	315	360	420	504	630	840	1260	2520
252		315		420		630		1260	
	280		360		504		840		2520
252			360			630			2520
	280			420			840		
252				420				1260	

I X.

Quot quot numeris proportionalibus datis siue in Arithmetica proportionalitate, siue Geometrica, aut Harmonica, si singuli per aliquem numerum eundem multiplicentur, aut diuidantur, habebunt quoq; producti numeri, vel Quotientes proportionalitatem Arithmetica, vel Geometricam, aut Harmonicam. Ut hic vides singulos multiplicatos per 4. Item diuisos per 4.

Arithmetica proport.			Geometrica proport.			Harmonica proport.		
20	28	36	20	40	80	60	84	140
Producti			Producti			Producti		
80	112	144	80	160	320	240	336	560
Quotientes			Quotientes.			Quotientes.		
5	7	9	5	10	20	15	21	35

CAETERVM in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandem specie proportionem, quam numeri multiplicati, aut diuisi habent: At in Arithmetica non seruant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentia multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatam. Ut in dato exemplo quadruplam. Differentia enim inter 20. & 28. est 8. at inter 80. & 112. est 32. Quotientem verò differentia ad differentiam numerorum diuisorum habet proportionem submultiplicem à diuisore denominatam, præposita particula, sub. Ut in dato exemplo subquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28. est 8. at inter 5. & 7. est duo. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atque inter Quotientes, numerosq; diuisos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica. Ita vides differentias numerorum 80. 160. 320. Item numerorum 240. 336. 560. quadruplas esse differentiarum inter numeros 20. 40. 80. & inter numeros

60. 84. 140. At verò differentias numerorum 3. 10. 20. & numerorum 15. 21. 35. esse earundem differentiarum subquadruplus.

DE PROPORTIONALITATE ARITHMETICA.

I.

DATIS duobus numeris quibuscunque, si eorum differentiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica utroq; dato maiorem. Et si eandem differentiam huic tertio addas, conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps reperiēs infinitos alios semper maiores, si differentiam ultimo inuento semper adicias. Vt datis duobus numeris 4. 11. quorum differentia est 7. constituetur hac proportionalitas Arithmetica, quæ extendi potest in infinitum.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quod si eandem differentiam à minori subtrahas, quando subtrahi potest, habebis rursus tertium terminum in eadem proportionalitate utroq; minorem. Et si differentiam eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps intuenies alios minores, si differentiam ab ultimo inuēto semper demas, donec subtractio amplius fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 30. 34. quorum differentia est 4. constituetur hac proportionalitas Arithmetica usq; ad 2, quæ ulterius progredi nequit, cum differentia 4. amplius subtrahi nequeat à 2.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

EADĒM proportionalitas extendetur, etiam si differentia non assumatur, hoc modo: Datis duobus numeris, à maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim numerus erit tertius terminus utroq; dato maior. A quo duplicato, si proximè præcedentem subtrahas, habebis quartum; & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4. 15. si à 15. duplicato, hoc est, à 30. subtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52. si quoq; demas 15. habebis quartum terminum 37. & sic deinceps, ut hic appares, 4. 15. 26. 37. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris; si ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius terminus utroq; minor. Et si ex huius duplo proximè præcedentem demas, relinques quartum terminum adhuc minorem; & sic deinceps, donec amplius subtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20. 27. si ex 20. duplicato, id est, ex 40. detrahas 27. reliquus fiet tertius terminus 13. Ab huius duplo 26. si quoq; detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab huius duplo 12. præcedens terminus 13. subtrahi nō potest, non poterit proportionalitas ulterius progredi, ut hic vides, 27. 20. 13. 6.

II.

QUANDO terminorum numerus est impar, summa extremorum æqualis est summa quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium: dupla autem medij termini, à quo extremi æqualiter distant, ut hic:

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4. & 28. Item 7. & 25. Item 10. & 22. Item 13. & 19. Item duplum medij termini 16. semper est 32.

QUANDO autem numerus terminorum est par, summa extremorum æqualis semper est summa quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter remotorum, ut hic:

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4. & 31. Item 7. & 28. Item 10. & 25. Item 13. & 22. Item 16. & 19. semper est 35.

ITAQVE quando numerus terminorum impar est, habebit summa omnium terminorum ad medium terminum ab extremis æqualiter distantem, hoc est, ad semissem summa extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Cum enim summa extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis æquali intervallo distantium, dupla sit termini medij, continebitur medius terminus, siue semissus summa extremorū, in summa omnium terminorum toties, quot sunt termini; semel quidem in ipso medio termino, & bis in qualibet summa duorum à medio termino æqualiter distantium: ac proinde omnium terminorum summa ad semissem aggregati extremorum, hoc est, ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cuius denominator est numerus terminorum. Vt in hac serie nonem numerorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18. hoc est, semissem summa extremorum 6. & 30. toties, quot unitates sunt in 9. numero terminorum, id est, summa omnium terminorum ad 18. semissem summa extremorū, siue ad medium terminum, proportionē habebit noncuplam. Eademq; in cæteris est ratio.

SUMMAM igitur omnium terminorum proportionalitatis Arithmetica, cuius terminorum numerus impar est, facile inueniemus, si semissem aggregati extremorum, (quod semper par est, quando terminorum numerus est impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac serie 11. terminorum:

7. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum est 134. Cuius semissus 67. quæ à medio termino 67. non differt, in 11. numerū termi-

numera ducta producit 737. summam omnium terminorum. Atq; hac ratio convenit etiam in proportionalitate, cuius terminorum numerus est par: sed quando extremorum summa impar est (quando enim terminorum numerus est par, potest esse summa extremorum impar, non autem semper par) erit eius semissis, numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

QUANDO autem terminorum numerus est par, habebit summa omnium terminorum ad summam extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis aequaliter distantium, proportionem multiplicem à semisse numeri terminorum denominatam. Cum enim summa quorumlibet duorum ab extremis aequaliter distantium aequalis sit summa extremorum, continebitur hac summa extremorum toties in summa omnium terminorum, quoties unitas in dimidiato numero terminorum continetur, semel nimirum in summa quorumlibet duorum ab extremis distantium aequaliter: atq; idcirco summa omnium terminorum ad summam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Ut in hac serie 10. terminorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorum summam extremorum 6. & 33. quæ est 39. continebit quinquies, hoc est, summam omnium terminorum ad 38. summam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et sic de alijs.

SUMMA ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmetica, cuius terminorum numerus par est, obtinebimus, si summam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit sine fractione unitatis, cum par ponatur) ducamus. Ut in hac serie 10. terminorum.

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum est 57. quæ in 5. semissem numeri terminorum ducta efficit 285. summam omnium terminorum. Hac ratio convenit etiam in proportionalitate, cuius terminorum numerus est impar: sed semissis numeri terminorum semper erit integer cum $\frac{1}{2}$. cum numerus terminorum ponatur impar.

VIDES igitur satis esse, ut summa inveniatur, si extremi termini, una cum terminorum numero cogniti sint. Quo pacto autem ex cognito altero extremorum, terminorum numero, atq; differentia, in cognitionem alterius extremi pervenire possimus, iamiam docebimus.

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotius terminorum alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoscamus, reperiemus alterum extremum, hoc modo: Numerum proximè minorem numero terminorum in differentiam datam ducemus, & productum minori extremo cognito adiciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto detrahemus. Nam ibi consociemus maius extremum, quod quaeritur, hic autem reliquum fiet minus extremum ignotum. Exempli causa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirum numerum proximè minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. productumq; 55. minus extremum 4. adiciemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Ut in his 12. terminis manifestum est, quorum differentia est 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si verò proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productum ex 11. numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Ut in eodem exemplo perspicuum est.

NECESSÈ autem est, si minus extremum inquiratur, numerum productum ex numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam, minorem esse maiore extremo cognito, ut subtractio fieri possit. Alioquin questio erit impossibilis: hoc est, fieri non poterit, ut datus numerus possit esse maius extremum in progressionem vlla, cuius differentia, & numerus terminorum ita se habeant, ut proponitur. Ut si quis daret maius extremum 20. numerum terminorum 6. & differentiam 5. non posset inveniri minus extremum: propterea quòd numerus 25. productus ex 5. qui proximè minor est terminorum numero, in differentiam 5. maior est dato maiore extremo 20. Quòd si quando contingat, productum illum numerum maiori extremo esse æqualem, ita ut subtractione facta, relinquatur 0. erit quidem questio possibilis, sed minus extremum erit 0. Ut si in posteriori hoc exemplo maius extremum proponeretur 25. fieret hac proportionalitas Arithmetica:

0. 5. 10. 15. 20. 25.

III.

SI duo extremi termini noti sint, una cum numero terminorum, reperiemus differentiam numerorum hoc pacto: Dempso minore extremo à maiore, diuidemus reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæsita. Ut si quis dicat, esse 10. terminos proportionalitatis cuiuspiam Arithmetica, cuius numeri extremi sint 7. & 52. Dempso minore extremo 7. ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, qua quaeritur, ut hic apparet:

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM vt fractiones vitentur, progressioq. proposita locum habeat in numeris integris, necesse est, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquus numerus possit numerari à numero, qui terminorum numero proximè minor est. Si enim non numeretur, differentia inuenta erit, vel fractio, vel numerus integer cum fractione: questio tamen erit possibilis. Vt si quis proponat extremos terminos, 2. & 38. & numerum terminorum 9. Demptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiso per 8. reperitur differentia $4\frac{1}{2}$. vt patet in hoc exemplo.

2. $6\frac{1}{2}$. 11. $15\frac{1}{2}$. 20. $24\frac{1}{2}$. 29. $33\frac{1}{2}$. 38.

V.

SI duo termini extremi, vnà cum differentia, noti sint, eliciemus numerum terminorum hac ratione: Detrahto minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam si Quotienti adiciamus 1. conflabimus numerum terminorum quæsitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10. ex 40. & reliquo numero 30. diuiso per 3. fit Quotiens 10. Addita ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet:

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37. 40.

SED vt questio proposita sit possibilis, hoc est, vt verè in rerum natura existat progressio aliqua, quæ habeat omnes conditiones propositas, necesse est, minore extremo subducto ex maiore, reliquum numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiam si addatur 1. Fieri enim non potest, vt detur progressio aliqua, cuius terminorum numerus non sit integer.

VI.

SI duo extremi termini, vnà cum omnium terminorum summa, noti sint, explorabimus & numerum terminorum, & differentiam, hac arte: Summam omnium terminorum per extremorum summam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totum numerum indicabit. Inuenito autem terminorum numero, cum & duo extremi termini cogniti sint, inueniemus differentiam, vt in 4. regula traditum est: si nimirum, minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum diuidamus per numerum proximè minorem numero terminorum inuenito. Verbi gratia. Si summa proponatur 515. & extremi termini 20. & 83. diuidemus summam 515. per 103. summam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differentiam obtinebimus, si dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum inuenito. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernit.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Vides ergo, vt questio sit possibilis, hoc est, vt re vera existat aliqua progressio, in qua omnium terminorum summa, & duo extremi ita se habeant, vt proponitur, necesse esse, vt summa omnium terminorum data à summa extremorum numeretur. Alioquin terminorum numerus erui non poterit, si Quotiens non sit numerus integer: Vel cerè, si summa omnium terminorum data à summa extremorum non numeretur, necesse esse, vt diuisa summa omnium terminorum per extremorum summam, Quotiens sit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. vt nimirum duplicatus efficere possit numerum terminorum integrum.

VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionem duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionem: Si verò extremorum proportio maior sit, quàm dupla, proportio medij ad differentiam, minor erit, quàm tripla: Si denique minor sit extremorum proportio, quàm dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quàm tripla. Vt hic, 8. 12. 16. proportio extremorum 16. & 8. est dupla: & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8. 14. 20. proportio inter extremos 20. & 8. est dupla sesquialtera, nimirum maior, quàm dupla: & medij 14. ad differentiam 6. dupla sesquitertia, minor videlicet, quàm tripla. Hic denique 8. 11. 14. extremi 14. & 8. proportionem habent supertripartientem quartas, quæ minor est, quàm dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam superbipartientem tertias, hoc est, maiorem, quàm triplam.

VIII.

INTER quosvis duos numeros constitues medium proportionalem Arithmetice, si eorum summa accipias semissem. Vt datis duobus numeris 6. & 30. summa eorum est 36. Huius ergo semisus 18. medio loco proportionalis est Arithmetice inter 6. & 30. vt hic manifestum est, 6. 18. 30. Itaque si medius terminus constituendus sit numerus integer, necesse est, vtrumque numerorum datorum esse vel parem, vel imparem, vt videlicet summa extremorum semper sit par, hoc est, vt possit habere dimidium sine fractione vnitatis. Nam quando summa extremorum impar est: quod accidit cum alter extremorum par est, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum semisse vnitatis. Vt datis numeris duobus 8. 25. summa eorum est 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, 8. $16\frac{1}{2}$. 25.

IX.

INTER quosvis autem duos numeros constitues, quotquot quis iusserit, medios proportionales Arithme-

zicè, hoc modo: Minorem detrabe ex maiore; reliquum deinde numerum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmetica, quam si minori numero proposito adicias, conflabis primū medium. Huic si eandem differentiam addas, conficies secundum, & sic deinceps. Vel si eam differentiam à maiori numero proposito subtrahas, relinquetur ultimus medius. A quo si eandem differentiam demas, remanebit penultimus, & sic deinceps. Veluti si inter 6. & 114. constituendi sint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proximè maior est numero mediorum constituendorum.) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo se habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SE D quoniam plerunque tales duo numeri proponuntur, inter quos non possunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quod inuentus Quotiens pro differentia non semper numerus integer est: si fractiones vitare velis, necesse est, duos propósitos numeros esse eiusmodi, ut dempto minore ex maiore, reliquus à numero, qui proximè maior est numero mediorum constituendorum, numeretur: quos ita facile reperies. Accipe pro minore extremo quemcunque numerum, eumq; adde cuicunque alij numero, quem numerus proximè maior numero mediorum inueniendorum metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Ut si velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmetice, primus autem sit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemvis numerum, quem nomenarius, (qui proximè maior est numero mediorum constituendorum) metitur, nimirum ad 72. conficiesq; maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, ut dictum est, detrahendo 7. ex 79. & reliquum unumquemque 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. erit differentia, ut hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

Q U O D si quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita ut inter minus & maius cadant quotius medij numeri habentes illam differentiam, si numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum per datam differentiam multiplices, numeroq; producto minus extremum addas. Ut si quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum constituere 9. terminos medios, quorum differentia sit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipientur 9. medij termini cum differentia data 4. Ut hic manifestum est.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

H A C alia etiam iucunda operatione cōstitues quorumque medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumque datorum numerorum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum constituendum. Quotientes sub illis colloca, quemque sub suo, & ab eisdem Quotientibus ascende per continuam eorum additionem, addendo primò quemque ad seipsum, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, ita ut duas proportionalitates Arithmeticas instituas à Quotientibus incipientes, & per eosdem progredientes, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini desiderantur. Postremò adde singulos terminos vnius ordinis singulis terminis aduersis alterius ordinis, id est, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde sub illo, proximo supra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medios optatos. Exempli gratia: Sint inter 15. & 100. constituendi 4. medij termini Arithmetice proportionales. Vtroque diuiso per 5. hoc est, per numerum proximè maiorem numero mediorum, sunt Quotientes 3. & 20. Constitues ergo hos ordines 4. terminorum sub 15. & 100. Arithmetice proportionalium per eorundem Quotientum continuam additionem, addendo primū 3. ad 5. ut fiant 6. Item 3. ad 6. ut fiant 9. Item 3. ad 9. ut fiant 12. Rursus addendo 20. ad 20. ut fiant 40. Item 20. ad 40. ut fiant 60. Item 20. ad 60. ut fiant 80. ut hic vides.

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|-----|
| 15 | 32 | 49 | 66 | 83 | 100 |
| 12 | | | | | 80 |
| 9 | | | | | 60 |
| 6 | | | | | 40 |
| 3 | | | | | 20 |

Ex 12. supremo primi ordinis, & infimo 20. secundi ordinis sunt 32. pro primo medio. Ex 9. & 40. sunt 49. pro secundo medio. Ex 6. & 60. sunt 66. pro tertio medio. Deniq; ex 3. & 80. sunt 83. pro quarto medio. Itaque in primo ordine semper descendendum est à supremo ad infimum vsq; in secundo verò ab infimo ad supremum vsq; ascendendum.

EST autem dignum consideratione, differentiam Quotientum, qui sunt minimi numeri duorum ordinum constitutorum, esse quoque differentiam proportionalitatis constituenda. Ita vides differentiam in proposito exemplo esse 17. quæ differentia etiam est inter Quotientes 3. & 20. Quocirca inuentus Quotientibus, si minor à maiore subtrahatur, & reliquus numerus minori extremo dato adiciatur, & huic composito numero

numero idem ille numerus reliquus addatur, & ita deinceps, constituentur iidem termini medij, etiam si duo illi ordines non instituantur.

VIDES ergo, utrumq; numerum propositum numerari debere a numero, qui numerum mediorum una unitate superat, si fractiones enucanda sint: Vel certe monendos esse duos extremos, ut in priori parte huius regula precepimus. In ijs enim fractionibus quoque vivunt, etiam si eos numerus numero mediorum proximè maior non numeret: quia minore Quotiente detractio ex maiore, semper numerus integer relinquitur, ut in exemplis prioris illius regula apparet. Nam in tertio eorum, verbi gratia, inter 5. & 45. constituendi sunt 9. termini medij. Si igitur uterque per 10. dividatur, sunt Quotientes $\frac{1}{2}$ & $\frac{9}{2}$. hoc est, $\frac{1}{2}$ & $\frac{9}{2}$. quorum differentia est 4. numerus integer, ex cuius continua additione ad minus extremum datum medij termini optari conficiuntur: qui iidem reperientur, si per Quotientes $\frac{1}{2}$ & $\frac{9}{2}$. duo ordines instituantur ascendentes, ut dictum est, per ipsorum Quotientum additionem continuam, &c.

X.

NUMERUM quemlibet propositum distribuimus in partes, quotquot quis infferit, proportionalitatem Arithmeticam servantes, hac ratione. Diviso dato numero per semissem numeri terminorum, secabimus Quotientem in duas partes inaequales utcumque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia iam dati sunt duo termini extremi, cum numero terminorum, detrahemus minus extremum ex maiore, partiemurq; reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Ita namque prodibit in Quotiente differentia, ut ex 4. regula patet. Si igitur hac differentia addatur minori extremo assumpto, deinde ad numerum conflatum, atq; ita deinceps, constituetur numerus terminorum datum, quorum summa proposita numero aequalis est: ac proinde datus numerus in numerum partium Arithmetice proportionalium sectus erit. Exempli causa, si numerus 830. distribuendus sit in 10. partes proportionales Arithmetice, partiemur eum per 5. semissem terminorum, Quotientemq; 166. secabimus in 20. & 146. terminos extremos proportionalitatis constituenda. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126. dividemus per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (ut in 4. regula dictum est) differentia erit proportionalitatis. Ut hic vides:

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

Rursus si numerus 10. dividendus sit in 10. partes proportionales Arithmetice, dividemus eum per 5. semissem terminorum: Quotientem vero 2. in duas partes inaequales secabimus $\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex maiore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquam 1. per 9. numerum proximè minorem numero partium constituendarum. Quotiens enim $\frac{1}{9}$. differentia erit continue addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero conflato, &c. Quia additio, ut facilius fiat, reducemus minus extremum $\frac{1}{2}$. & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationem, ut ad $\frac{9}{18}$ & $\frac{2}{9}$. Sic ergo divisus erit numerus 10. in 10. partes Arithmetice proportionales, quarum prima est $\frac{1}{18}$ siue $\frac{1}{18}$. ultima vero $1\frac{1}{18}$ siue $1\frac{1}{18}$. & differentia $\frac{2}{9}$ siue $\frac{4}{18}$.

$\frac{9}{18}$. $\frac{11}{18}$. $\frac{13}{18}$. $\frac{15}{18}$. $\frac{17}{18}$. $1\frac{1}{18}$. $1\frac{2}{18}$. $1\frac{3}{18}$. $1\frac{4}{18}$. $1\frac{5}{18}$.

Certum autem est, hac ratione varijs modis datum numerum dividi posse in propositum numerum partium proportionalium, prout videlicet, diviso dato numero per semissem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas inaequales pro terminis extremis sectus fuerit.

ITEM efficiemus hac ratione: Numero dato, ac si esset summa omnium terminorum constituendorum, diviso per numerum terminorum datum, dabit Quotiens duplicatus summam extremorum: propterea quod huius extremorum summa semisus, id est, Quotiens inuentus ductus in numerum terminorum, hoc est, in divisorem, producit summam omnium terminorum, nimirum datum numerum, ut in 2. regula dictum est. Quare si Quotientem duplicatum in duos numeros inaequales secemus pro terminis extremis: & minore detracta ex maiore, reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum dato dividamus, dabit Quotiens differentiam, ut in 4. regula diximus. Quam si ad minus extremum factum adjiciamus, & iterum ad conflatum numerum, & sic deinceps, constituta erit proportionalitas Arithmetica, quae imperatur. Veluti, si numerus 198. secandus proponatur in 9. partes Arithmetice proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, ut fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44. summam extremorum. Constituto igitur minore extremo 10. ac proinde maiore 34. si detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24. per 8. numerum proximè minorem numero terminorum partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergo stabunt 9. termini proportionalitatis Arithmeticae conscientes summam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

Hic etiam manifestum est, varijs modis datum numerum distribui posse in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem summam esse diximus extremorum, in alias atq; alias partes binas sectus fuerit pro extremis duobus terminis.

SEU fortasse facilius (quanquam operatio aliquantò longior sit) idem hoc absolues hac ratione: Cape tot numeros Arithmetice quomodocunque proportionales, in quot partes datus numerus distribuendus est, & singulos in datum numerum duc, procreatosq; numeros per summam omnium terminorum sumptorum ex 2. regula inuentam partire. Quotientes enim dabunt partes, quas quæris. Verbi gratia. Sit dividendus nomen-

rus 525. in 10. partes proportionales Arithmetice. Sume 10. numeros Arithmetice proportionales quoscunque, 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. quorum summa est 175. Ductu autem singulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri 2100. 3675. 5250. 6825. 8400. 9975. 11550. 13125. 14700. 16275. quibus singulis diuisis per summam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignetur haec 10. partes, quas quæris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

Idem obinebis, si datum numerum per assumptorum numerorum summam partiatis, Quotientemq, in singulos assumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas quæris. Vt in dato exemplo, si datus numerus 525. diuidatur per 175. summam assumptorum numerorum, fit Quotiens 3. quo ducto in singulos numeros assumptos, 4. 7. 10. &c. gignentur eadem partes, qua prius, 12. 21. 30. &c.

Verum autem operatio fiat facilior, ac breuior, satis est, priores duos numeros proportionalitatis accepta multiplicare per datum numerum, productosq, numeros per summam omnium terminorum eiusdem accepta proportionalitatis partiui. Vel satis est, dato numero per summam assumptorum numerorum diuiso, Quotientem in duos priores assumptos numeros ducere. Ita enim reperietur prima dua partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differentia addita tertia, faciet quartam, & sic deinceps. Liquido autem hic quoq, constare puto, datum numerum variis modis distribui posse in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout scilicet alij atq, alij numeri eiusdem proportionalitatis Arithmetica fuerint assumpti, vel quorum alia atq, alia sit differentia.

Hæc via partes inuenta habent ordinatim easdem proportionem inter se, quæ inter terminos proportionalitatis assumpta eodem ordine reperiantur. Perpetuo autem singuli numeri accepta proportionalitatis ad singulas partes inuentas, primus ad primam, secundus ad secundam, &c. eandem omnino habent proportionem. Sic vides, inter primas partes inuentas 12. 21. esse proportionem supertripartientem quartas, qualis est inter primos numeros acceptos 4. 7. &c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorsus proportionem, nimirum subtriplam.

Itaque si accipiat proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionem duplam, ita ut primus sit differentia omnium terminorum, habebunt prima partes duplam quoq, proportionem, atq, ideo prima erit quoq, differentia, ex cuius additione alia partes coaceruetur. Vt si in superiore exemplo accepisses hos 10. terminos, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. quorum summa est 55. Vel hos 10. numeros, 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. quorum summa est 165. multiplicassesq, primum quemque in datum numerum 525. & productos numeros 525. 1575. per summam quemlibet propriam, ut priorem per 55. & posteriorem per 165. diuissesses, inuenisses primam partem $9\frac{5}{11}$. quæ eadem est differentia. Quare partes omnes 10. constituentes proportionalitatem Arithmeticam fuissent hæc:

$9\frac{5}{11}$. $19\frac{1}{11}$. $28\frac{7}{11}$. $38\frac{3}{11}$. $47\frac{9}{11}$. $57\frac{3}{11}$. $66\frac{2}{11}$. $76\frac{4}{11}$. $85\frac{10}{11}$. $95\frac{6}{11}$.

DE PROPORTIONALITATE GEOMETRICA.

I.

Datis quibuscumque duobus numeris, si denominatorem proportionis, quæ habent, conferendo maiorem cum minore, hoc est, si diuiso maiore per minorem, Quotientem ducas in maiorem, gignes tertium terminum in proportionalitate Geometrica utroq, dato maiorem. Et si eundem denominatorem, siue Quotientem, in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps constitues infinitos alios semper maiores, si denominatorem, Quotientemve, per vltimum inuentum semper multiplices. Vt datus duobus numeris 4. 12. denominator proportionis 12. ad 4. est 3. quod diuisis 12. per 4. Quotiens fiat 3. Si igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & sic in infinitum, constitues hanc proportionalitatem Geometricam, quæ in infinitum potest extendi.

4. 12. 36. 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

Quod si minorem cum maiore conferas, & denominatorem proportionis, quam habent, id est, diuiso minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem est, per denominatorem proportionis, quam maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis utroq, minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem, & sic in infinitum. Vt datus duobus numeris 8. 16. denominator proportionis 8. ad 16. est $\frac{1}{2}$. quod diuisis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. denominator autem proportionis 16. ad 8. est 2. quod diuisis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$. in 8. vel diuidas 8. per 2. Idemq, cum producto numero facias, constituetur hæc proportionalitas Geometrica, progrediens quoque in infinitum versus minores numeros, sicut illa in infinitum versus maiores numeros progrediebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$. &c.

Extendetur quoq, eadem proportionalitas in infinitum, etiam si denominator proportionis ignotus sit, hoc modo: Datis duobus numeris, duc maiorem in se, & productum per minorem diuide. Quotiens enim erit tertius terminus utroq, maior. Hunc si iterum in se ducas, productumq, per proximè præcedentem terminum diuidas, dabit Quotiens quartum terminum, & sic deinceps. Vt datus duobus numeris, 3. 6. Ducto 6. in se, fit 36.

quo

quo diuiso per 3. fit 12. tertius terminus. Rursus ducto 12. in se, fit 144. quo diuiso per 6. fit 24. quartus terminus: atq; ita in infinitum, vt hic vides, 3. 6. 12. 24. 48. &c.

Rursus si datis duobus numeris, si minorem in se duxeris, productumque per maiorem diuiseris, dabit Quotiens tertium terminum utroque minorem. Quem si rursus in se duxeris, productumque per proximè præcedentem terminum diuiseris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris 6. 18. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 18. fit 2. tertius terminus. Rursus ducto 2. in se, fit 4. quo diuiso per 6. fit $\frac{2}{3}$. siue $\frac{2}{3}$. in minima numeris pro quarto termino: atque ita in infinitum, vt hic apparet.

18. 6. 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$. &c.

Iam vero si quamcunque proportionem non multiplicem (in multiplici enim, si regulam præscriptam sequaris, nulla est difficultas) extendere velis in numeris integris ad quolibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continue proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partem, vel partes aliquotas, cuius, vel quatum in data proportionem fit mentio; tot inquam cape terminos, quot in propofita proportionalitate non multiplici terminos desideras. Vltimus enim eorum erit primus terminus tue proportionis non multiplicis. Eum ergo si multiplices per denominatorem data proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atque ita deinceps, constitues terminos optatos. Vbi hoc est mirabile, si termini imperati hac via reperiuntur, non posse ultra terminos propofitos proportionalitatem extendi sine fractione. Verbi gratia, si inueniendi sint 7. termini proportionis sesquialtera: Quoniam denominator fractionis $\frac{1}{2}$. cuius mentio fit, est 2. sumendi sunt 7. termini proportionis dupla, videlicet 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. Si ergo à 64. incipias, constitues 7. terminos proportionalitatis sesquialtera, & non plures; hos nimirum:

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

Inuenientur autem facile hi termini, si ad primum 64. adicias eius dimidium, & ad secundum 96. iam factum, eius quoq; dimidium, &c. Sic quoque si desiderentur 6. termini proportionis dupla superbipartientis quintas, accipiendi sunt 6. termini proportionis quintupla, propter denominatorem partium quintarum, qui est 5. videlicet 1. 5. 25. 125. 625. 3125. Nam si ab vltimo 3125. incipias, reperies hos 6. terminos in proportionem dupla superbipartiente quintas.

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

Qui termini facile reperiuntur, si duas quintas partes primi ad eundem primum duplicatum adicias, & rursus $\frac{2}{5}$. secundi iam facti ad eundem secundum duplicatum, &c. Atq; numeri hac via inuenti semper minimi sunt in sua proportionem, ita vt alij totidem termini in eadem proportionem continua reperiiri, qui minores illis sint, sit prorsus impossibile, nisi fractiones admittere velimus. In proportionem porro multiplici quacunque minimi termini quocunque perpetuo incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportionem continua quadrupla sunt hi, 1. 4. 16.

II.

QUANDO numerus terminorum continue proportionalium impar est, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter se, equalis est numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis equaliter distantium, multiplicatione inter se creatur, & ei quoque, qui ex medio in se ipsum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis sesquialtera:

16. 24. 36. 54. 81.

tam ex 16. in 81. quam ex 24. in 54. & ex 36. in se, procreatur numerus 1296.

QUANDO autem proportionalium terminorum numerus est par, etiam si non continue sint proportionales, dummodo bini continuam proportionem interrumpentes, habeant vnā eandemq; inter se proportionem, hoc est, dummodo secundus & tertius; Item quartus & quintus; necnon sextus & septimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) sint quoque non continue proportionales, in diuersa tamen proportionem ab ea, quam primus habet ad secundum, & tertius ad quartum, & quintus ad sextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus est par, numerus ex ductu extremorum vnus in alterum productus semper equalis est numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis equaliter distantium inter se gignitur. Vt hic in 6. numeris dupla proportionis continua.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem semper numerus 288.

Item in hac sesquitertia non continua 8. terminorum, vbi bini proportionem continuam interrumpentes habent vnā eandemq; proportionem, videlicet triplam, qua à sesquitertia diuersa est.

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnino numerus 768. fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

Hic sequitur, quando terminorum numerus impar est, numerum ex ductu extremorum unius in alterum, vel ex duorum quorumlibet aqualiter ab extremis, vel à medio distantium multiplicatione inter se procreatum, esse quadratum, (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in seipsum producit; numerusq; ipsum producatum eius, siue radix appellatur.) cuius radix, siue latus est medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in seipsum; ac proinde medius eius radix quadrata est. Numerum vero ex tribus inter se multiplicatis productum, quorum duo sunt vel extremi, vel ab extremis aqualiter remoti, tertius autem, medius, esse cubum, (Numerus ille dicitur cubus, qui producit ex numero aliquo in seipsum ducto, & iterum in productum numerum: & numerus ille, qui in se ductus, & iterum in productum, cubum producat, latus eius cubicum, siue radix cubica appellatur.) cuius latus, siue radix est medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in se cubice ducto, hoc est, primum in se, deinde in productum ex alijs duobus inter se multiplicatis. In se enim facit productum ex alijs duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producat cubum.

SEQUITUR quoq; quando sunt 4. numeri siue continuè, siue nō continuè proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri se mutuo multiplicare continuè, quando unus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & sic deinceps, donec omnes numeri sint multiplicati.) esse quadratum, cuius latus, siue radix est numerus ex primo in quartum, vel ex secundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4. numerorum inter se idem procreatur numerus, quem producat numerus factus ex primo in quartum, si in productum ex secundo in tertium (qui productus ex primo in quartum equalis est) multiplicetur. Quando autem sunt 6. numeri, siue continuè, siue non continuè proportionales, dummodo bini numeri proportionem continuam interrumpentes sint quoq; non continuè proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter se, cuius radix latusve est numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis aqualiter distantium, productus: quia videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter se multiplicatis, in se cubice multiplicato: hoc est, semel in se, nimirum in productum ex duobus, qui sunt extremis proximi, & iterum in productum: quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus medijs: quippe cum tres hi numeri producti sint inter se aequales.

I I I.

Si propositis quocunque terminis continuè proportionalibus, minus extremum à maiore subtrahatur, & reliquus numerus per numerum una unitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propositorum numerorum ad minorem habet, qui illi proximus est) diuidatur, Quotiens denique maiori extremo addiciatur, constabitur summa omnium terminorum. Ut hic in proportionem continuam tripla.

2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex maiore 13122. & reliquo numero 13120. diuiso per 2. per numerum scilicet una unitate minorem denominatore 3. proportionis tripla, quam quilibet eorum numerorum ad proximè antecedentem minorem habet, fit Quotiens 6560. cui si addatur maius extremum, 13122. fit summa omnium 19682. Item in hac sesquitercia continua.

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. ex maiore 1024. & reliquo numero 781. diuiso per $\frac{7}{3}$. (qui numerus una unitate minor est denominatore $1\frac{1}{3}$.) fit Quotiens 2343. Addito ergo maiori extremo 1024. fit omnium terminorum summa 3367.

ITAEQUE vides, ad explorandam summam quocunque terminorum proportionalitatis Geometricæ satis est, si duo extremi cognoscantur, una cum proportionis denominatore. Quo vero artificio inuestigandum sit ultimus terminus cuiusvis proportionalitatis Geometricæ quocunque terminorum, etiam si mediorum numeros ignoremus, copiosè tradidimus in progressionibus in nostra Arithmetica practica, ut superuacuum sit ea hoc loco repetere.

I I I I.

PROPOSITIS quolibet numeris se mutuo aqualiter superantibus, id est, Arithmetice proportionalibus; si totidem alij numeri sumantur, habentes easdem proportionem, quas illi, eodem ordine sumpti; superabunt se quoq; posteriores hi numeri aqualiter, hoc est, erunt Arithmetice proportionales, sicut illi. Ut si sex hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. 19. Arithmetice proportionales proponantur, sumanturq; alij sex cum iisdem proportionibus, cuiusmodi sunt hi, 20. 35. 50. 65. 80. 95. cōperies ipsos quoq; Arithmetice esse proportionales; quippe cum habeant differentiam 15. Sed caue putes, hanc proprietatem posse conuertere: Neq; enim si dentur quotius numeri Arithmetice proportionales, & totidem alij Arithmetice quoq; proportionales sumantur, etiam si utrobique eadem sit differentia, necessario hi illi proportionales erunt. Id quod perspicuum est in hisce duabus proportionalitatibus Arithmeticis:

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2.4. habent proportionem duplam, at posterioris duo primi 3.5. superbi-
sientem tertias. Item primus numerus 3. in posteriore ordine ad primum numerum 2. in ordine priore habet
sesquialteram proportionem, secundus autem 5. ad secundum 4. sesquiquartam, &c.

V.

DE OBS quibusvis numeris datis, si eorum alterutro in quolibet partes distributo, singula partes in
alterum ducantur, & singuli numeri producti per priorem numerum diuidantur, constituent omnes Quo-
tientes simul sumpti posteriorem numerum, habebuntq; ordine easdem omnino proportionem inter se, quas
partes prioris numeri inter se eodem ordine habent: at singuli Quotientes, siue partes posterioris numeri ad
singulas partes prioris, ut prima ad primam, secunda ad secundam, &c. vnā eandemq; prorsus habebunt pro-
portionem. Veluti, datis duobus numeris 57. 285. si prior secetur in partes, quae simul additae ipsum consueiunt,
2.5.10.40. & earum qualibet in posteriore numerum 285. ducatur, gignetur hi numeri 570.1425.2850.11400.
quibus sigillatim per numerum priorem 57. diuisis, fiunt Quotientes, 10.25.50.200. qui in vnā collecti sum-
mam constituent posteriorem numerum 285. habentq; easdem proportionem, quas habent partes 2.5.10.40. ni-
mirum duplam sesquialteram, duplam, & quadruplam: singuli vero ad singulas partes, ut 10. ad 2. & 25. ad 5.
& 50. ad 10. & 200. ad 40. eandem omnino proportionem habent, nimirum quinquuplam.

EASDEM partes numeri posterioris obtinebis, si eum per priorem, qui in partes distributus est, parti-
ris, Quotientemq; factum in singulas partes eiusdem prioris numeri ducas. Ut in eodem exemplo, diuiso nu-
mero 285. per 57. fit Quotiens 5. quo ducto in 2.5.10.40. partes numeri 57. fiunt partes numeri 285. haec 10.25.50.
200. ut prius.

Hinc facile elicitur, quo pacto duo quilibet numeri secandi sint in partes componentes ipsis numeris
aequales, ita ut partes vnius sint partibus alterius proportionales, collatis tum partibus vtriusque numeri in-
ter se, tum & partibus vnius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio distribuendi
numerum propositum in quoruus partes Arithmetice proportionales, quam in regula 10. proportionalitatis A-
rithmetica praescripsimus. Nam sumptis totidem numeris Arithmetice proportionalibus, erit eorum summa,
numerus in illos, tanquam in partes ipsum componentes, diuisus. Quare si singulae partes in datum nume-
rum ducantur, & producti numeri per summam illam diuidantur; Vel si per assumptorum numerorum sum-
mam datum numerus diuidatur, ac Quotiens in singulos eos numeros ducatur; producentur partes totidem
numeri propositi in eisdem proportionibus. Quare Arithmetice quoq; proportionales erunt, ut ex anteceden-
te regula 4. manifestum est.

VI.

QUOTLIBET numeris continuè proportionalibus datis, erunt eorum differentia continuè quoque in
eadem proportionem proportionales. Ut in apposito exemplo tam numeri, quam eorum differentia, habent con-
tinuam proportionem sesquialteram.

| | | | | | | | |
|--------------|-----|-----|------|------|------|------|------|
| Differentia. | 32. | 48. | 72. | 108. | 162. | 243. | |
| | 64. | 96. | 144. | 216. | 324. | 486. | 729. |

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod sequitur, habent & numeri, & eorum differentia duplam pro-
portionem. Vbi vides differentias non differre à numeris dupla proportionis, quorum sunt differentia. Id quod
soli proportioni dupla cuiusque accidit: quia in ea quilibet numerus maior proximè præcedentem minorem
superat, ipsomet numero proximè antecedente, cuius duplus est, hoc est, quem bis continet.

| | | | | | | | | | |
|--------------|---|----|----|----|-----|-----|-----|-----|------|
| Differentia. | 7 | 14 | 28 | 56 | 112 | 224 | 448 | 896 | |
| | 7 | 14 | 28 | 56 | 112 | 224 | 448 | 896 | 1792 |

VII.

DE TRIS quotcunque numeris continuè proportionalibus, si eorum summa per eos sigillatim diuidatur,
erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportionem continuè proportionales. Et si Quotientum summa
per ipsos Quotientes sigillatim diuidatur, creabuntur ydem prorsus Quotientes ordine conuerso: atq; ita in
infinitum. Summa autem eorum Quotientum aequalis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum,
vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis aequaliter distantium, vel denique, si terminorum
numerus est impar, ex medio in seipsum ducto. Quod sanè incredibile videri possit. Exempli causa. Si dentur
hi 4. numeri continuè proportionales in proportionem dupla. 3.6.12.24. si eorum summa 45. per singulos diui-
datur, erunt Quotientes 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. conuerso ordine in eadem proportionem dupla continuè proportio-
nales. Et si per hosce Quotientes diuidatur eorum summa $28\frac{1}{8}$. prodibunt ordine conuerso ydem omnino Quo-
tientes, & ita deinceps in infinitum. Ipsa verò summa $28\frac{1}{8}$. aequalis est numero, qui fit ex 15. in $1\frac{7}{8}$. vel ex $7\frac{1}{2}$.
in $3\frac{3}{4}$. Sic etiam datis his 5. terminis in continua proportionem tripla, 2.6.18.54.162. si eorum summam parti-
mur per eos sigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{1}{27}$. $1\frac{4}{243}$. in eadem continua proportio-
ne tripla. Quorum summa $180\frac{5}{9}$. producit vel ex 121. in $1\frac{4}{243}$. vel ex $40\frac{1}{3}$. in $4\frac{1}{27}$. vel denique ex $13\frac{4}{9}$.
in seipsum. Vbi duo consideratione sunt digna. Primum, quando terminorum numerus est impar, summam

Quotientum esse numerum quadratum, cuius radix est medius terminus: quippe qui ex medio termino in seipsum ducto procreetur, ut dictum est. Deinde, eosdem semper Quotientes gigni ex divisione summa quotcunque terminorum proportionis eiusdem continua, quantumvis termini illi sint magni, aut parvi, dummodo terminorum numerus idem semper sit. Veluti, si sint tres termini continue dupli, siue magni, siue parvi, erunt perpetuo hi Quotientes $7. 3\frac{1}{2}. 1\frac{3}{4}$. Si sint quatuor, hi Quotientes erunt $15. 7\frac{1}{2}. 3\frac{3}{4}. 1\frac{7}{8}$. In quinque numeris continue tripli, erunt hi semper Quotientes, $121. 40\frac{1}{3}. 13\frac{4}{9}. 4\frac{1}{3}\frac{2}{9}. 1\frac{4}{9}\frac{2}{3}$. Ac denique, in quinque numeris continuam proportionem sesquialteram habentibus reperientur hi Quotientes, $13\frac{1}{5}. 8\frac{1}{2}\frac{2}{5}. 5\frac{1}{3}\frac{1}{5}. 3\frac{4}{5}\frac{2}{3}. 2\frac{4}{9}\frac{2}{3}$.

Ex hac proprietate inueniemus quotcunque terminos in data proportionem continue proportionales, quorum summa aequalis sit numero, qui sit ab extremis inter se multiplicatus, vel ex duobus medijs quibilibet equaliter distantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in seipsum ducto, si numerus terminorum siue sit impar. Nam si sumantur tot termini in data proportionem continue proportionales, quot inueniendi sunt, siue magni, siue parvi, eorumque summa per eosdem seorsum diuidatur, erunt Quotientes numeri, qui desiderantur. Quod si summa debeat esse numerus quadratus, accipiendi erunt termini, quorum numerus impar sit, & dato numero terminorum impari equalis, &c. Quæ res miraculi instar quodammodo censei possit, dari posse in data proportionem, quotquot quis iusserit, terminos continue proportionales, quorum summa ex multiplicatione primi termini in vltimum gignatur: cum contrarium huius experiamur in omnibus proportionibus continuis inaequalitatis, quarum termini sint numeri integri; & in alijs etiam omnibus, quarum numeri fractiones habent admixtas, nisi hi numeri Quotientes sint producti ex divisione summae alicuius quotcunque terminorum continue proportionalium, per ipsos terminos proportionales, ut diximus.

Eodem modo satisfaciemus questioni, si quis petat duos numeros datam habentes proportionem, quorum summa aequalis sit numero ex eorum multiplicatione vnus in alterum procreato. Nam si sumantur quilibet duo numeri in proportionem datam, atque eorum summa per eosdem sigillatim diuidatur, satisfiet questioni proposita per Quotientes inuentos. Ut si cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla superbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29.9. vel 87.27. proportionem datam habentes, vel alios quosvis. Summa etenim priorum 38. diuisa per 29. & 9. vel posteriorum summa 114. per 87. & 27. diuisa dabit Quotientes $1\frac{2}{9}$. & $4\frac{2}{9}$. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87.27. ordine tamen conuerso, & quorum aggregatum est $5\frac{1}{3}\frac{2}{9}$. qui videlicet numerus ex ductu etiam $1\frac{2}{9}$. in $4\frac{2}{9}$. gignitur.

VIII.

Inter duos quoscunque numeros constituemus medium Geometricè proportionalem, si eos inter se multiplicemus, & procreati numeri radicem quadratam accipiamus. Ut dati duobus numeris 6. & 96. ex vno in alterum, sit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6.24.96. Nam 96. ad 24. habent proportionem quadruplam, qualem etiam habent 24. ad 6. Itaque, si inter datos duos numeros constituendus sit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi possit, necesse est ut numerus ex vno in alterum productus sit quadratus. Nisi enim quadratus sit, non habebit radicem in numeris, sed eius radix erit numerus, quem Arithmetici surdum, vel irrationalem vocant, explicantque hoc modo, radix quadrata talis numeri: Veluti, dati duobus numeris 7. & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergo radicem quadratam numeri 63. qua quidem numerus exprimi nequit, esse medio loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9. hoc modo, qua quidem radix maior est, quam 7. cum huius quadratum sit 49. minor vero quam 8. cum huius quadratum sit 64. Neque vero numerus 7. cum aliqua fractione, qui medius est inter 7. & 8. radix esse potest, etiam si vnitas in infinitum cogitetur esse diuisa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, ut ad def. 8. demonstrabimus, cuiusmodi non est numerus 63.

IX.

Si quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos singuli cadant medij Geometricè proportionales, assequetur id hac ratione: Sumantur tres numeri quicunque, quorum secundus primi sit quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus. Quadrati enim numeri eorum erunt Arithmetice proportionales, & primus numerus acceptus in secundum ductus producet medium proportionalem Geometricè inter primum quadratum, & secundum, in proportionem primi assumpti numeri ad secundum: secundus vero numerus assumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter secundum quadratum, & tertium, in proportionem, quam inter se habent secundus, ac tertius numerus assumptus. Id quod perspicue in hoc exemplo apparet.

| | | | |
|---------------------|-----------|--------------------|-------------------|
| Tres numeri assump. | Primus 8. | Quintupl. pri. 40. | Septupl. pri. 56. |
| Quadr. Arith. prop. | 64 | 1600 | 3136 |
| Medij Geometr. | | 320 | 2240 |

Differentia enim trium quadratorum est 1536. & medij proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. & ex 40. in 56.

Hinc facile reperies tres numeros quadratos, qui se aequalibus differentijs mutuo superent, si pro radicibus

bus eorum sumes tres numeros, quorum secundus sit primi quinquuplus, & tertius eiusdem primi septuplus, ut diximus.

P. 4 Ratione, dato quouis quadrato; reperientur alij duo maiores cum illo constituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati statuatur primus numerus, & alij duo numeri sumantur, quorum alter illius radice sit quinquuplus, & septuplus alter, erunt quadrati numeri horum duorum numerorum, quos querimus. Ut si datur quadratus numerus 64. erit eius radix 8. primus numerus; secundus, 40. & tertius, 56. &c.

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmetice proportionalibus, si eos per quemvis numerum eundem multiplices, vel per quamvis partem aliquotam, si quam habent, diuidas, erunt producti quoque numeri, aut Quotientes Arithmetice proportionales, inter quorum binos singuli etiam medij in Geometrica proportionalitate intercipiuntur: qui medij reperientur eodem modo, si nimirum medij inter quadratos inuerti per eundem illum numerum multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotam diuidantur. Ut si superiores quadrati, una cum medijs proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

| | | | | | |
|--------------------|-----|-----|------|------|------|
| Arithmet. proport. | 128 | | 3200 | | 6272 |
| Medij Geomet. | | 640 | | 4480 | |

Si vero diuidantur ijdem per 8. partem aliquotam communem quadratorum, (sunt autem qualibet partes aliquota quadratorum, partes etiam aliquota mediorum) prodibunt hi numeri.

| | | | | | |
|--------------------|---|----|-----|-----|-----|
| Arithmet. proport. | 8 | | 200 | | 392 |
| Medij Geomet. | | 40 | | 280 | |

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti easdem semper proportionem, quas quadrati, eorumque medij inter se habent. Quod si hos 8. 200. 392. diuidas per 4. inuenies alios, 2. 50. 98. Arithmetice proportionales, inter quos cadunt Geometricè medij, 10. & 70. Et si denique hos 2. 50. 98. partiaris per 2. habebis alios, 1. 25. 49. inter quos medij Geometricè sunt, 5. & 35.

Vbi hoc etiam admiratione videtur dignum, quodcumque inter tres numeros Arithmetice proportionales, siue quadrati sint, siue non, cadunt duo medij Geometricè proportionales, unus inter primum & secundum, & inter secundum ac tertium alter; quadratum prioris medij, & quadratum secundi numeri Arithmetica proportionalitatis, & quadratum posterioris medij constituere proportionalitatem Arithmeticam: Ut in posteriori exemplo, quadrati numeri horum trium numerorum, 40. 200. 280. sunt 1600. 40000. 78400. Arithmetice proportionales, habentes differentiam eandem communem 38400. & sic de ceteris.

X.

INTER quoscunque duos numeros reperiemus quotcumque medios continue proportionales, iucunda sanè & artificiosa operatione: quam ut planius explicem, dicenda pauca sunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex suis radicibus gignantur. In omni ergo proportionem continua, qua ab 1. incipit, secundus terminus radix est omnium numerorum insequentium. Ea enim radix bis posita, atque ita in seipsam ducta, producit tertium terminum, qui est numerus quadratus, radixque ipsa quadrata dicitur. Eadem radix ter posita, & primum in se, & iterum in productum multiplicata gignit quartum terminum, qui cubus est, & propterea radix eius cubicæ appellatur. Denique, si eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primum in se, deinde in productum, tertio iterum in ultimum productum, fiet quintus terminus: Et si ponatur quinquies, fiantque quatuor ordine multiplicationes, orietur sextus terminus, atque ita in infinitum. Quo pacto autem omnes hæc radices nominari debeant, & signari, non est huius loci declarare, sed ad Algebram tota hæc res spectat, ubi etiam docebimus, qua arte ex dato numero eruenda sint. Nunc, ut intelligatur res, de qua agimus, notanda sunt tres infra scripta proportionalitates continua, quarum duæ primæ sunt Arithmetica, nimirum duæ series naturales numerorum ab 1. incipientes, tertia vero Geometrica ab 1. quoque initium ducens. Vbi perspicue apparebit, quam egregium vsum habeat series numerorum naturalis in re proposita.

| | | | | | | | | | |
|-------------------------------|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| Numerus mediorum. | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | &c. |
| Numeri significantes radices. | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | &c. |
| Numeri Geomet. proport. | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | &c. |

Prima complectitur numeros mediorum constituendorum: secunda numeros, qui significant genera radicum, hoc est, quoties terminus secundus tertia proportionalitatis, quem radicem omnium insequentium diximus, ordine poni debeat, ut multiplicatus numeros proportionalitatis Geometricæ illis respondentes procreet. Verbi gratia, unitas medij ordinis significat, numerum 2. tertij ordinis, qui radix est omnium aliorum, semel positum non esse multiplicandum, sed ipsummet esse radicem omnium ex nulla sui multiplicatione productum. Ac numerus 2. eiusdem secundi ordinis indicat, eandem radicem 2. tertij ordinis positam bis hoc modo, 2. 2. & ita in se multiplicatam gignere 4. tertium terminum eiusdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij

ordinis denotat, radicem eandem 2. infimi ordinis positam ter hoc modo, 2. 2. 2. atq; ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco posita in eandem 2. positam secundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio positam loco gignitur numerus 8. quartus nimirum proportionalitatis Geometrica sub numero 3. ordinis secundi. Idem dices de alijs. Vt, verbi gratia, numerus 7. secunda proportionalitatis monstrat, radicem eandem 2. tertij ordinis positam septies, hoc pacto, 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. & in se continuè sexies multiplicatam producere 128. octavum numerum Geometrica proportionalitatis illi numero 7. suppositum. Nam ex 2. primi loci in 2. secundi loci sunt 4. & ex 4. in 2. tertij loci sunt 8. & ex 8. in 2. quarti loci sunt 16. & ex 16. in 2. quinti loci sunt 32. & ex 32. in 2. sexti loci sunt 64. & denique ex 64. in 2. septimi loci sunt 128. &c. Atque hoc non solum verum est in proposita proportionem continua duple, sed in omnibus alijs ab unitate incipientibus, quicunque numerus secundum locum occupet, tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

Ita *A Q V E* si constituere vis quotlibet medios inter duos propositos numeros, cape numerum mediorum constituendorum in primo ordine. Nam ex utroq; numero dato extrahenda est radix, quoties ordine posita, & continuè multiplicata utrumq; producat, quot unitates continentur in numero secundi ordinis, qui infra numerum mediorum constituendorum in supremo ordine acceptum scriptus est. Radices inventas sub datis numeris colloca, quamq; sub suo, & ab eisdem ascende per continuam utriusque multiplicationem, (ducendo primum quamq; radicem inuentam in se, deinde in numerum productum, & sic deinceps.) ita ut duas proportionalitates Geometricas multiplices instituas à radicibus incipientes, & ab eisdem denominatas, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini quaruntur. Post hac singulos terminos vnius ordinis duc in singulos terminos alterius ordinis aduersos & oppositos, hoc est, maximum vnius in minimum alterius: proximum deinde sub illo in proximum supra hunc, &c. Ita ut in vno ordine semper descendas à supremo ad infimum vsq;, in altero vero ab infimo vsq;, ad supremum ascendas, ut in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos querimus. Exempli causa, si inter 9. & 144. inueniendus sit vnus terminus medio loco proportionalis sumemus in primo ordine 1. & sub hoc termino in secundo ordine numerum 2. qui indicat, ex utroq; numero dato eruendam esse radicem quadratā, qua videlicet bis posita, per eius multiplicationem utrumq; producat, ut declarauimus. Radices autem quadrata inuenta sunt 3. & 12. Et quia vnus tantum medius terminus desideratur, non sunt instituenda proportionalitates Geometrica à radicibus incipientes, quae plures terminos habeant, sed ipsae radices inter se multiplicanda. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9. & 144. ut hic vides, 9. 36. 144. Sic etiam si inter 18. & 288. constituendus sit vnus terminus medius: quoniam hi numeri radices quadratas non habent, signabimus priorē hoc modo, R. q. 18. posteriorem autem sic, R. q. 288. Ha autem radices inter se multiplicata faciunt 72. terminum medium proportionalem inter 18. & 288. hoc modo, 18. 72. 288. Vbi etiam admiratione dignum est, duos numeros, quorum neuter potest efferrī, inter se multiplicatos gignere numerum rationalem: cuius rei demonstratio ex lib. 10. petenda est. Quo pacto autem inter se multiplicandi sint duo numeri surdi, qui nimirum efferrī non possunt, quales sunt R. q. 18. & R. q. 288. docebimus in Algebra.

R. v. 16. & 625. si dati sint duo numeri 16. & 625. inter quos tres medij constituendi sint, accipiemus in primo ordine numerum mediorum 3. cui in ordine secundo subscribitur numerus 4. Igitur ex utroque dato numero extrahenda est radix, quae quater posita, & continuè multiplicata utrumque producat, quae quadrati quadrata, vel Zensizensica dici solet, cuiusmodi in dato exemplo sunt 2. & 5. Constitues ergo hos ordines trium terminorum sub 16. & 625. Geometricè proportionalium in proportionem multiplici, incipientes ab eisdem radicibus 2. & 5. à quibus proportionem horum ordinum denominantur, ut hic apparet:

| | | | | |
|----|----|-----|-----|-----|
| 16 | 40 | 100 | 250 | 625 |
| 8 | | | | 125 |
| 4 | | | | 25 |
| 2 | | | | 5 |

Ex 8. supremo primi ordinis in 5. infimum secundi ordinis sunt 40. pro primo medio. Ex 4. in 25. sunt 100. pro medio secundo. Denique ex 2. in 125. sunt 250. pro tertio medio.

Sic ita autem dignum est, medios terminos inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quae inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita esse 625. ad 250. & 250. ad 100. & 100. ad 40. & 40. ad 16. ut 5. ad 2. Quapropter, inuentis radicibus, si maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator est proportionis radicum inuentarum multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rursus per eundem Quotientem multiplicetur, atq; ita deinceps, constituentur intra duos extremos datos medij termini ydem, etiam si duo illi ordines proportionum multiplicium à radicibus denominatarum non instituantur. Vt in exemplo dato. Diuisa radice 5. per radicem 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$. denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorem numerum datum 16. in $2\frac{1}{2}$. gignes 40. primum medium: Et si rursus ducas 40. in $2\frac{1}{2}$. procreabis 100. secundum medium: Et denique si centum ducas in $2\frac{1}{2}$. produces 250. tertium medium.

PERSPICVVM autem est, inter datos quoslibet numeros nō semper constitui posse numerum terminorum propositum, qui sint rationales, sed plerunque inueniētos terminos esse irracionales: propterea quod dati numeri non habent semper illas radices, quae extrahenda sunt: aut certe non habent eam proportionem, quam aliqui duo numeri, ex quibus earadices possunt extrahi, quod etiam satis esset. Sicut enim inter 16, & 625, qui habent radices quadratiquadratas, hoc est, quae quater posita eos suis multiplicationibus producant, tres medij termini incidunt: ita quoque inter 48. & 1875. qui illis 16. & 625. proportionales sunt, licet non habeant similes radices, cadunt tres medij termini, ut hic patet:

48. 120. 300. 750. 1875.

QUAMOBREM si quis desideret duos numeros, inter quos cadant, quotquot voles, termini medij rationales in data proportionē, accipiendi sunt duo numeri quomodocunque datam habentes proportionē. Eorum enim vterque si toties ponatur, quot termini medij querendi sunt, & adhuc semel & continuē multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos querimus. Inter eos enim medij termini constituentur eo modo, quem exposuimus: hoc est, vel instituendo sub illis duos ordines proportionata multiplicium, quas assumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini queruntur; vel multiplicando minorem eorum per denominatorem proportionis datae, quae est inter acceptos duos numeros, &c. Verbi gratia, si quis velit duos numeros, inter quos constitui possint quatuor termini medij rationales in proportionē superbipartiente tertias, cuius denominator est $1\frac{2}{3}$, sumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem superbipartientem tertias, & vtrumque quinquies ponemus hoc modo, 6.6.6.6.6. & 10.10.10.10.10. Ex multiplicatione enim continua vtriusque existent hi numeri 7776. & 100000. inter quos constitues quatuor medios numeros proportionales, ut hic vides:

| | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 7776 | 12960 | 21600 | 36000 | 60000 | 100000 |
| 1296 | | | | | 10000 |
| 216 | | | | | 1000 |
| 36 | | | | | 100 |
| 6 | | | | | 10 |

Qui quidem medij termini inueniuntur vel ex 1296. in 10. & ex 216. in 100. & ex 36. in 1000. & ex 6. in 10000. vel ex denominatore $1\frac{2}{3}$. proportionis superbipartientis tertias in minorem numerum inuentū 7776. & iterum in numerum productum, &c.

XI.

NUMERVM quemcunque datum distribuemus in quotuius partes proportionales Geometricē in data proportionē hoc modo: Cape tot numeros continuē proportionales in data proportionē, siue minimos, siue nō minimos, in quot partes datus numerus distribuendus est, & per eorum summam datum numerum partire. Quotiens namque per singulos terminos in data proportionē acceptos multiplicatus procreabit partes dati numeri seruantes datam proportionem inter se. Veluti si datus numerus 756. secandus sit in 6. partes continuē proportionales in proportionē dupli; si sumantur 6. termini continuē dupli, 3. 6. 12. 24. 48. 96. quorū summa est 189. & per hanc summam datus numerus 756. diuidatur, Quotiens autem 4 per singulos acceptos numeros multiplicetur, procreabuntur hi 6. numeri continuē dupli, conficientesque simul in vnam summam collecti datum numerum 756. videlicet:

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eadem partes inuenientur, si sumantur hi alij sex numeri continuē dupli, $\frac{1}{100}$. $\frac{2}{100}$. $\frac{4}{100}$. $\frac{8}{100}$. $\frac{16}{100}$. $\frac{32}{100}$. quorū summa est $\frac{63}{100}$. Vel hi 6. alij, 100. 200. 400. 800. 1600. 3200. quorū summa est 6300. Nam datus numerus 756. diuisus per summam priorem $\frac{63}{100}$. facit 1200. qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum $\frac{1}{100}$. dabit primam partem 12. ut prius, &c. At idem numerus datus 756. diuisus per posteriorem summam 6300. facit Quotientem $\frac{756}{6300}$. qui ductus in primum numerum assumptum 100. producit eandem partem primam 12. & sic de ceteris.

QUOD si cupias numerum, qui secari possit in quotuius partes proportionales sine vlla fractione. (Nam nisi seruetur id, quod iam praecipimus, incidemus plerunque in fractiones) assequeris propositum, si sumas quemcunque numerum multiplicem summa totidem terminorum proportionalium assumptorum. Ut si quis querat numerum, qui possit distribui in 5. numeros integros sesquialtera proportionem continuam habentes; sumpris 5. terminis in sesquialtera proportionē continuē quibuscunque, ut 64. 96. 144. 216. 324. quorū summa est 844. accipiemus huius summa quemcunque numerum multiplicem, nimirum decuplum 8440. Hic enim per praeceptum traditum secabitur in 5. numeros integros proportionis sesquialtera continua, cum eo diuiso per summam acceptorum numerorum, Quotiens necessariō sit numerus integer.

HIC nō nullo negotio satisfaciemus quaestioni, qua iubeamur in data proportionē cōtinua reperire quotuius numeros, qui in vnam summam collecti constituent numerum quemcunque datum. Nam si datus numerus secetur in tot partes proportionales datae proportionis, ut docuimus, soluta erit quaestio. Ut si quis inuenire velit 4. numeros tripla proportionis continuae, quorū summa sit 100. secandus erit hic numerus 100. in 4. nu-

meros proportionis tripla, ut in $2\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $22\frac{1}{2}$, $67\frac{1}{2}$. Hi enim conficiunt datum numerum 100. Quod si conficere debeant summam 400. erunt numeri quæsi in tripla proportionem continua hi, 10. 30. 90. 270. Horum enim summa est 400. Si deniq, summam conficere debeant, non superantem 1. erunt huiusmodi numeri, $\frac{1}{40}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{27}{40}$. Summa enim horum est $\frac{40}{40}$. hoc est, 1.

DE PROPORTIONALITATE HARMONICA.

I.

TRES numeri in proportionalitate Harmonica inueniuntur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmetica quibuscunque, si primus in secundum, ac tertium, & secundus in tertium multiplicetur. Vt subiecta exempla demonstrant.

| | | | | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-------|-------|
| Arithm. | 1. | 2. | 3. | 3. | 7. | 11. | 4. | 6. | 8. | 10. | 60. | 110. |
| Harmon. | 2. | 3. | 6. | 21. | 33. | 77. | 24. | 32. | 48. | 600. | 1100. | 6600. |

In omnibus enim ex primo termino Arithmetica proportionalitatis in secundum & tertium sit primus terminus Harmonica, & secundus: ex secundo verò in tertium, tertius.

ALIO modo, & in idem retidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmetica proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonica: extremi verò eiusdẽ Arithmetica inter se multiplicati creant medium Harmonica. Vt in iisdem exemplis manifestum est.

HINC fit, extremos terminos Harmonica proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmetica, ex qua orta est, habent: quia videlicet extremi Arithmetica per eundem medium multiplicari produxerunt Harmonica extremos.

QUA PROPTER si rependiendi sint tres numeri proportionalitatis Harmonica, quorum extremi, atq, adeò & differentia, datam habeant proportionem, sumendi sunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmetica proportionalitatis constituendus: ac deniq, ex hisce tribus terminis inueniendi tres in proportionalitate Harmonica, ut diximus. Vt si querantur tres, quorum extremi habeant proportionem sesquicertiam, sumemus 3. & 4. inter quos ea proportio reperitur: sed quia eorũ summa 7. impar est, non potest inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducimus proutque per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos enim 6. 8. cadet integer medius proportionalis Arithmetice, 7. nimirum semissus eorum summa. Ex his igitur tribus 6. 7. 8. Arithmetice proportionalibus oriuntur hi tres Harmonice proportionales, 4. 2. 48. 56. quorum extremi, atq, adeò & differentia, proportionem sesquicertiam datam habent.

SEQUITUR etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonica binis Arithmetica, ex qua orta est, conuerso ordine esse proportionales: hoc est, in Harmonica ita esse secundum ad primum, ut in Arithmetica tertius est ad secundum. Item in illa sic esse tertium ad secundum, ut in hac est secundus ad primum, quia nimirum priores duo in Harmonica producti sunt ex posterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo verò posteriores Harmonica procreati sunt, ex prioribus duobus Arithmetica in tertium ductis. Vt ex superioribus exemplis perspicuum est.

VICISSIM si primus numerus Harmonica proportionalitatis ducatur in secundum, ac tertium, & secundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmetica proportionalitatis. Vel (quod idem est) si medius terminus Harmonica in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmetica: duo verò extremi Harmonica inter se multiplicati producent medium Arithmetica: eodem scilicet prorsus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicam oriri diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2. 3. 6. gigni hanc Arithmeticam, 6. 12. 18. Siue enim ducas primum 2. in secundum 3. & tertium 6. Item secundum 3. in tertium 6. produces 6. 12. 18. siue ducas medium 3. in extremos 2. 6. facies extremos 6. 18. & ex primo 2. in tertium 6. medium 12.

HARMONICA proportionalitas dicitur continuari ultra tres terminos, siue ad maiores numeros progrediendo, siue regrediendo ad minores, quando primi tres numeri sunt proportionales Harmonice, & tertio adiunguntur duo cum eo constituentes quoq, eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadem omnino proportionem. Deinde ultimo, qui quintus est, adiunguntur eodem modo alij duo, atq, ultimo, siue septimo, alij duo: & sic in infinitum. Hoc autem fit versus maiores numeros progrediendo, si posteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primũ habet. Vt datis hiis tribus numeris 2. 3. 6. Harmonice proportionalibus, si posteriores duo, 3. 6. ducantur in 2. denominatorem proportionis 6. ad 2. fient 9. 18. atq, ita erunt iam quinque termini, 2. 3. 6. 9. 18. Harmonice proportionales. Et si posteriores duo 9. 18. ducantur iterum in 2. denominatorem proportionis, erunt septem hi termini, 2. 3. 6. 9. 18. 27. 54. continue proportionales Harmonice: & sic progredi poterimus in infinitum, ita ut semper Harmonica proportionalitas cõtinuetur per terminos locorũ imparium, ut per tertium, quintũ, septimũ, nonum, &c. Quod si versus minores terminos progredi libeat, diuidendi erunt minores duo numeri per denominatorem proportionis extremorũ: Et posteriores duo minores inuerti iterum diuidendi per eundem denominatorem, & sic deinceps in infinitum. Vt datis hiis

tribus

tribus numeris, 18. 9. 6. si minores duo, 9. 6. diuidantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18. 6. fient 3. 2. atq; ita erūt iam quinque termini 18. 9. 6. 3. 2. Et si rursus duo posteriores inuenti 3. 2. diuidantur per eundem denominatorem 3. adiuncti erunt vltimo termino 2. alij duo in Harmonica proportionalitate hoc modo, 18. 9. 6. 3. 2. $1\frac{1}{2}$. Atq; ita deinceps progredi licebit in infinitum.

ALIO modo, & quidem magis proprie, continuatur proportionalitas Harmonica, siue ad maiores numeros progrediendo, siue ad minores, quando primi tres numeri sunt Harmonicè proportionales: Item, relicto primo, alij sequentes tres; & relicti duobus, sequentes alij tres, atq; ita deinceps: Sed in hac continuatione nunquā erit eadem proportio inter extremos trium, quā inter extremos aliorū trium. Vt in his 4. numeris, 3. 4. 6. 12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3. 4. 6. q̄ tres 4. 6. 12. Harmonicè proportionales sunt: sed priorum extremi 3. 6. proportionem habent duplam, at extremi posteriorum 4. 12. triplicam. Item continua esse dicitur Harmonica proportionalitas in his quinque terminis, 10. 12. 15. 20. 30. quia & in tribus, 10. 12. 15. & in tribus, 12. 15. 20. & in tribus, 15. 20. 30. Harmonica proportionalitas reperitur, licet extremi quorumlibet trium non habeant easdem proportionem. Quo pacto autem in vtramque partem hoc modo continuanda sit, quando continuari potest, (neque enim semper ad maiores numeros progrediendo potest hoc modo extendi) aut quo pacto quotlibet numeri continuè Harmonicè proportionales, vt exposuimus, reperiri possint, ex his, quæ sequuntur, constabit.

I I.

INTER quosuis datos duos numeros constitues medium Harmonicè proportionalem, hac ratione. Numerum, qui sit ex datorum duorum numerorū differentia in eorum minorem, partire per eorundem summam, Quotientemq; minori adde. Constat enim numerus erit medius, quem quæris. Vel eandem differentiam datorum numerorum duc in maiorem, & productum partire per eorundem summam. Si enim Quotientem ex maiore dato subtrahas, reliquus fiet medius terminus quæsitus. Vt inter duos numeros 15. & 60. inueniatur medium, duc eorū differentiam 45. in minorem 15. & numerum productum 675. partire per eorum summam 75. Nam si Quotientem 9. minori 15. adicias, constabis medium terminū 24. vt hic patet, 15. 24. 60. Eundem medium reperies, si eandem differentiam 45. ducas in maiorem 60. & productum 2700. per eorum summam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60. detractus relinquet eundem medium terminum 24.

VIDES ergo, quando summa datorum duorum numerorum non meretur productum ex eorundem differentia in minorem eorum, vel in maiorem, medium inuentum esse necessariò integrum cum fractione. Vt si inter 7. & 10. inueniendus sit medius, duc eorum differentiam 3. in minorem 7. & productum 21. per eorundem summam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. additus eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides 7. $8\frac{4}{17}$. 10. Quia tam 10. ad 7. habent proportionem supertripartientem septimas, quā differentia maiorum $1\frac{3}{7}$. ad minorem differentiam $1\frac{4}{7}$. Vel eorum differentiam 3. duc in maiorem 10. productumq; numerum 30. partire per eorum summam 17. Quotiens enim $1\frac{3}{17}$. subtractus ex maiore 10. reliquum faciet eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

ALIIS tradunt mediū termini inuentionē inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo: Inuentis duobus minimis numeris in proportionē duorū numerorū datorum, subent Quotientem, qui sit ex diuisione differentia datorum duorum numerorum per summam minimorum duorū inuentorum, duci in minorem inuentum, & productum numerū minori dato adijci: Vel eundem Quotientem duci in maiorem inuentum, & productum numerum ex maiore dato subtrahi. Semper enim vel ille constatus numerus, vel hic reliquus dabit medium terminum, qui quæritur. Vt si inter 20. & 30. sit inueniendus medius: minimi numeri proportionis inter 20. & 30. sunt 2. 3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. diuidatur per inuentorum summam 5. fit Quotiens 2. quem si ducamus in minorem inuentum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel si eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6. ex dato maiore 30. demamus, inuenietur semper medius terminus 24. Vt hic apparet, 20. 24. 30.

BREVIVS ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differentia per numerum, qui denominatorem proportionis, quā dati numeri habent, vna vnitāte superat. Quotiens enim minori termino additus dabit medium. Vt dati numeris 10. 40. habentibus proportionem quadruplam; si eorum differentia 30. diuidatur per 5. qui numerus denominatorem proportionis vna vnitāte superat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16. hoc modo, 10. 16. 40.

SEID ad memoriam inuandā inueniemus fortasse commodius (licet aliquantò longiore operatione) mediam terminum inter duos extremos datos hoc modo: Si duo extremi nō sint impares, vel pares, sed vnus par, & alter impar, duplica illos, & inter duplicatos constitue medium Arithmeticè proportionalem, qui semper erit semissus summa eorum. Per hos deinde tres numeros Arithmeticè proportionales quare ex regula 1. tres Harmonicè proportionales. Ita enim inuentus erit medius terminus inter duos, qui eandem inter se proportionem habent, quā dati duo extremi. Quod si fiat, vt primus inuentus ad secundum, ita primus datus ad aliud: hoc est, si per primum inuentum diuidatur numerus ex secundo inuento in primum datum, factus, reperietur medius inter duos datos extremos. Vt si inter 7. & 10. inueniendus sit medius; duplica eos, vt fiant 14. & 20. Summa enim horum 34. par est, cuius semissus 17. est medius Arithmeticè inter 14. & 20. hoc modo 14. 17. 20. Ex his tribus inuenientur hi tres Harmonicè proportionales, 238. 280. 340. Si ergo fiat vt primus in-

uentus 298. ad secundum 280. ita primus datus 7. ad aliud, inuenietur numerus $8\frac{4}{7}$, qui medius est Harmonicè inter 7. & 10. qui ab initio propofiti fuerunt.

III.

PROPOSITIS duobus numeris, reperiemus tertium utroque maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri potest, (Pulchrè autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterum genericum partemur per numerum qui relinquitur, subtracta amborum differentia ex minore termino dato. Quotiens enim erit tertius terminus utroque dato maior, quem querimus. Quòd si quando diuisor reperiaturs esse 0. vel quando amborum differentia ex minore termino subtrahi nequit, impossibile est, datis duobus numeris posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica. Vt si duo termini minores dentur 12. 16. diuidemus numerum ex eis procreatum 192. per 8. qui numerus relinquitur, si amborum differentia 4. ex minore 12. detrahatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus constituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12. 16. 24. Hanc extendemus, si ad duos terminos 16. 24. tertium adiungamus: nimirum diuidendo 384. numerum ex 16. in 24. factum, per 8. qui numerus remanet. facta subtractione differentie amborum, quæ est 8. ex minore 16. Inuenietur enim numerus 48. Quare ita stabunt 4. termini Harmonicè proportionales, 12. 16. 24. 48. Quòd si tentemus his adiungere alium maiorem, frustra laborabimus. Nam datis duobus ultimis 24. 48. reperietur diuisor esse 0. Differentia enim amborum, quæ est 24. subtracta ex minore 24. relinquit 0. Quòd si quis proponat hos duos numeros, 10. 12. adiungetur illis tertius utroque maior, 15. Ad hos vero duos, 10. 11. apponetur tertius $12\frac{2}{3}$. Et ad duos 90. 99. tertius 110. At vero ad 3. 6. nullus adiungi poterit: quia differentia inter ambos, quæ est 3. dempta ex minore 3. relinquit 0. Atque eodem modo, quando dati numeri habent proportionem duplam, non potest illis adiungi tertius proportionalis, quia differentia amborum semper est minori termino aqualis. Multò magis cum dati numeri habent proportionem dupla maiorem, non inuenietur tertius maior illis proportionalis Harmonicè, quia differentia amborum tunc semper maior est minore termino, atque idcirco subtractio fieri nequit. Vt si dentur numeri 3. 7. quorum proportio est dupla sesquitercia, nimirum maior, quàm dupla, vides amborum differentiam 4. maiorem esse minore termino 3. Quare illis non adiungetur ullus tertius proportionalis.

ALI: ita inuestigant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiam in maiorem, numerumque productum per numerum, qui relinquitur, subtracta eadem differentia ex minore numero, diuidunt; Quotientemque denique maiori adijciunt, ut tertium consueant. Vt datis duobus numeris, 12. 16. si eorum differentia 4. ducatur in 16. & productus numerus 64. diuidatur per 8. (qui numerus relinquitur, subtracta eadem differentia, 4. ex minore 12.) fit Quotiens 8. qui additus ad maiorem 16. facit tertium 24. ut prius.

IT A Q V E, ut duobus numeris adiungi possit tertius maior proportionalis, necesse est, illorum proportionem esse vel superparticularem, vel superpartientem, nimirum dupla minorem. Ex quo liquidd constat, Harmonicam proportionalitatem non posse progredi in infinitum versus maiores numeros, si de continuatione secundo modo accepta loquamur, quæ propria est, ut in prima regula diximus. Nam cum primum ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla est, vel maior, ibi necessario proportionalitas consistet, & ultra non promouebitur.

SE Q V I T V R quoque ex priori regula, quando minor terminus superat differentiam amborum sola vnitatem, tertium procreari ex primo in secundum: quia productus hic numerus diuisus per illam vnitatem facit tertium numerum, ut diximus. Constat autem numero per vnitatem diuiso, Quotientem esse eundem numerum diuisum. Vt si dentur duo numeri 6. 11. quia minor 6. superat amborum differentiam 5. sola vnitatem, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6. in 11. veluti hic vides, 6. 11. 66. Idem cernitur in hisce numeris, 2. 3. 6. & 10. 19. 190. Semper enim tertius fit ex primo in secundum: quia primus superat differentiam prout duorum sola vnitatem.

Ex posteriori verò regula sequitur, quando minor terminus superat amborum differentiam sola vnitatem, tertium procreari, si productus ex amborum differentia in maiorem, maiori adijciatur: quia productus ille diuisus per illam vnitatem, non facit diuersum Quotientem ab eo producto, &c. Vt datis eisdem numeris 6. 11. si differentia 5. ducatur in 11. & productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. ut prius.

Q V A R E facile quoque reperiri possunt tres numeri Harmonicè proportionales, si pro primo sumatur quilibet numerus, pro secundo verò eius duplex, detracta prius vnitatem, pro tertio denique numerus, qui ex primo fit in secundum. Vt si primus sit 8. erit secundus 15. & tertius 120. & sic de cæteris. Proportio autem eam extremorum, hoc modo inuentorum, quàm differentiarum, semper erit multiplex à medio, qui perpetuo impar est, denominata. Vt in his proximis tribus, 8. 15. 120. proportio est quindecupla.

V N D E si querantur tres minimi numeri integri Harmonicè proportionales in quacunque proportionem multiplici, siquidem denominator est numerus impar, statuemus eum denominatorem in medio: semissem autem numeri proximè maioris in primo loco. In tertio denique collocabimus eum, qui ex primo in secundum fit. Vt si desideretur tres numeri integri, & minimi in proportionem septupla, locabimus 7. in medio & 4. (id est, semissem numeri 8. proximè maioris, q̄ 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, ut hic vides, 4. 7. 28. Si verò denominator est par, statuemus numerum proximè maiorem in primo loco: in tertio verò collocabimus numerum, qui fit ex illo proximè maiore in denominatorem: In medio denique ponemus denomina-

denominatorem duplicatum. Vt si inueniendi sint tres minimi integri in proportionē octupla, constituemus 9. qui numerus proximè maior est denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerum 72. ex 9. in 8. genitum; in medio denique duplum denominatoris, nimirum 16. vt hic apparet, 9. 16. 72.

Quo d si tres numeri Harmonicè proportionales in data proportionē inueniendi sint, siue illi minimi sint, & integri, siue non, agendum erit hoc modo: In medio statuemus denominatorem datae proportionis: In primo vero semissem numeri, qui denominatorem vna unitate superat: In tertio denique loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per medium factum. Veluti si querantur tres in data proportionē dupla supertripartiente septimas, erit denominator huius proportionis, $2\frac{3}{7}$, collocandus in medio, & in primo numerus $1\frac{5}{7}$, nimirum semis numerum $3\frac{3}{7}$, qui denominatorem $2\frac{3}{7}$, unitate superat. Tertius denique erit $4\frac{9}{7}$, factus ex primo $1\frac{5}{7}$, in medium $2\frac{3}{7}$. Ita igitur stabunt tres numeri inuenti, $1\frac{5}{7}$, $2\frac{3}{7}$, $4\frac{9}{7}$, qui ad hos tres eiusdem denominationis reuocabuntur, $\frac{84}{49}$, $\frac{119}{49}$, $\frac{204}{49}$, si prius quilibet ad vnicam fractionē reducatur. Numeratores autem 84. 119. 204. erunt numeri integri Harmonicè proportionales, eritq; extremorum proportio, ac proinde & differentiarum, dupla supertripartiens septimas, qua videlicet data est.

I I I I.

DE OBS numeris datis, reperiemus tertium utroque minore in proportionalitate Harmonica, hoc modo: Numerum ex vno in alterum productum partiemur per summam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens enim erit is, qui queritur. Vt si dentur duo numeri 6. 12. si diuidamus numerum 72. ex 6. in 12. factum, per 18. summam ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertium 4. minorem utroque illis proportionalem, vt hic cernit, 4. 6. 12. Hanc extendemus regrediendo versus minores numeros, si duobus 4. 6. minorem tertium adiungamus 3. hoc modo, 3. 4. 6. 12. qui numerus 3. inuenietur, diuidendo numerum 24. factum ex 4. in 6. per 8. summam videlicet ex 6. & amborum differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3. 4. adiungetur tertius minor 2. Atq; in hunc modum decrescet proportionalitas qualibet Harmonica continuè in infinitum. Vbi animaduertere licet admirabilem sanè varietatem inter has tres proportionalitates Arithmetica, Harmonica, & Geometrica, qua varietas tribus hisce propositionibus explicatur.

I. ARITHMETICA augetur in infinitum, sed in infinitum non decrescit.

II. HARMONICA contra, decrescit in infinitum sed in infinitum augeri non potest. Quod intelligendum est, si ita continuari debeat, vt quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicam: hoc est, vt primus, secundus, ac tertius sint Harmonicè proportionales: Item secundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam alias in vtramque partem extendi potest in infinitum, sicut Geometrica, vt supra in regula 1. diximus.

III. GEOMETRICA denique & augetur, & decrescit in infinitum.

EST & hoc notatu dignum, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuatos, qui variè inter se comparati praeipuas perfectasq; consonantias Musicas exprimunt. Nam 6. eius bases quadratae, 8. anguli solidi, 12. latera, & 24. anguli plani constituunt hos 4. terminos 6. 8. 12. 24. continuè proportionales Harmonicè. Proportio autem 8. ad 6. est sesquitercia, qua consonantiam Diatessaron, siue Quartam constituit. Proportio vero 12. ad 8. sesquialtera est, continens consonantiam Diapenten, siue Quintam. Proportio deinde 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla est, explicans consonantiam Diapason, siue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla est, efficiens consonantiam Diapason & Diapenten, hoc est, Duodecimam. Deniq; proportio 24. ad 6. quadrupla existit, exhibens consonantiam Disdiapason, siue Decimam quintam.

V.

DATI quotlibet numerus Arithmeticae proportionalitatis, si quicumque numerus, siue minimus, siue non minimus, ab eis numeratus, per singulos diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine Harmonicè proportionales. Et vicissim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, si numerus, quem metiuntur, per singulos diuidatur, erunt Quotientes ordine conuerso Arithmeticè proportionales. Verbi gratia: Sint Arithmetice proportionales, 1. 2. 3. 4. 5. 6. Numerus, quem metiuntur, est 720. ex eorum continua multiplicatione inter se procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, qua in Arithmetica practica capite decimo scripsimus. Priore ergo per singulos datos diuiso, inueniuntur hi in proportionalitate Harmonica continui:

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Posteriore autem per eisdem datos diuiso, reperiuntur hi:

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atque hi numeri inuenti easdem proportionibus habent, quas dati numeri Arithmeticae proportionalitatis, bini ac bini, conuerso tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad secundum, ita in Arithmetica secundus ad primum. Et vt in Harmonica secundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad secundum, &c. Numeri quoq; per minimum numeratus inuenti, sunt minimi in suis proportionibus. Quod si vicissim numerus ab inuentis numeratus diuidatur per singulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmetice pro-

portionales: Et si quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt eodem numeri Arithmetice proportionales, per quos Harmonice proportionales inuenti sunt, & eodem quidem ordine, quo dati sunt, sed ordine conuerso, si cum inuentis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim si in vna proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progressus sit, & contra.

IGITUR si quis cupiat quocunque terminos continue Harmonice proportionales, sumendi sunt totidem termini Arithmetice quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus, (& minimus quidem, si minimi desiderentur) per singulos diuidendus, vt diximus.

V I.

DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum sit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia posteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam cum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. sit numerus 24. Ratio huiusce rei est: quia cum sit, vt 12. primus ad 6. secundum, ita 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, equalis numero, qui ex secundo 6. sit in tertium 4. vt ex 2. regula proportionalitatis Geometrica manifestum est. Idem constat in pluribus terminis, si terni ac terni sumantur, cum suis differentijs, vt in his 6 terminis apparet:

| | | | |
|--------------|---|---|----|
| Differentia | 2 | 4 | |
| Propor. Har. | 6 | 8 | 12 |

| | | | | | | |
|------------------|----|----|----|----|----|----|
| Differentia. | 30 | 10 | 5 | 3 | 2 | |
| Proport. Harmon. | 60 | 30 | 20 | 15 | 12 | 10 |

Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. sunt 600. Item ex 10. in 15. & ex 5. in 30. sunt 150. Rursus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. sunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. sunt 30. Atque ita, vt vides, incunda operatione probare potes, num dati quocunque termini, aut inuenti, seruent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam sumptis ternis, ac ternis, cum suis differentijs, si differentia commutato ordine ducantur in primum terminum, ac secundum, producantq, vtroque numeros aequales, erunt termini omnes continue proportionales Harmonice, sin minus, nequaquam.

V I I.

QuoD si quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates existant: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres insequentes proportionalitatem Geometricam, & tres postremi proportionalitatem Harmonicam: ac deniq, primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel si reperire quis velit tres numeros in data proportione continue proportionales, ita vt inter primum ac secundum cadat medius Arithmetice proportionalis, & inter secundum ac tertium medius Harmonice proportionalis, medius denique tertium datorum numerorum sit inter medios inuentos medius proportionalis Geometricæ, atq, quinque numeri ita inuenti sint minimi omnium, in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione:

| | | | | |
|-----|-----|----|------------------|----|
| 9. | 6. | 3. | $1\frac{1}{2}$. | 1. |
| 9. | 6. | 3. | $\frac{3}{2}$. | 1. |
| 18. | 12. | 6. | 3. | 2. |

ne, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. vt in secundo ordine vides. Quod si eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros secundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, prodicabimus quinque minimos numeros quæsitos, vt in tertio ordine cernis. Nam 18. 12. 6. Arithmeticam habent proportionalitatem: 12. 6. 3. Geometricam: & 6. 3. 2. Harmonicam: ac denique 18. 6. 2. triplam datam. Quod si nō inueniendi sint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus cōtinuatis, accipi possunt quocunque tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij: nimirum secundus, & quartus, inuestigandi, vt dictum est.

| | | | | |
|----|----|----|------------------|-----|
| 1. | 2. | 3. | $4\frac{1}{2}$. | 9. |
| 1. | 2. | 3. | $\frac{9}{2}$. | 9. |
| 2. | 4. | 6. | 9. | 18. |

nam. Inueniendi modum conspicias in hisce tribus ordinibus oppositis.

| | | | | |
|-----|------------------|-----|------------------|-----|
| 9. | $7\frac{1}{2}$. | 6. | | 4. |
| 9. | $\frac{15}{2}$. | 6. | | 4. |
| 18. | 15. | 12. | $9\frac{3}{4}$. | 8. |
| 18. | 15. | 12. | $\frac{48}{5}$. | 8. |
| 80. | 75. | 60. | 48. | 40. |

Si r data proportio tripla, in qua tres minimi sumantur termini, 9. 3. 1. Inter primos duos statuatur medius Arithmetice, 6. Per hunc diuidatur quadratus medij numeri 3. assumpti, & Quotiens $1\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. statuatur, vt in primo ordine hic posito apparet. Sed quia hic Quotiens integer est cum fractione

Si minores termini cum maioribus conferendi sint, & data sit proportio subtripla, inueniemus eodem artificio ex his tribus minimis, 4. 3. 9. subtriplos hōd quinque, 2. 4. 6. 9. 18. Nam 2. 4. 6. seruant proportionalitatem Arithmeticam: 4. 6. 9. Geometricam: 6. 9. 18. Harmonicam: & 2. 6. 18. subtriplam propositam.

Si r s e s sit data proportio sesquialtera, in qua tres minimi termini sint, 9. 6. 4. Inter 9. & 6. medius est Arithmetice, $7\frac{1}{2}$. vt in primo ordine. Reuocetur ad vnicam hanc fractionem $\frac{15}{2}$. vt in secundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro secundo numero, relicto denominatore, ducantur alij in secundo ordine in denominatorem, 2. vt in tertio ordine factum est: Et quadratus numeri numeri 12. nimirum 144. diuidatur per 15. ac

Quotiens

Quotiens $9\frac{3}{5}$ in minimis terminis, statuaturs medius inter 12. & 8. eiusdem tertij ordinis. Hunc numerum $9\frac{3}{5}$. reuocabimus ad hanc vnicam fractionem $\frac{48}{5}$. vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5. inuentiq; erunt quinque minimi numeri quæsti, vt in quinto ordine apparet.

| | | | | |
|-----|-----|-----|------------------|-----|
| 4. | | 6. | | 9. |
| 4. | 5. | 6. | $7\frac{1}{5}$. | 9. |
| 4. | 5. | 6. | $\frac{30}{5}$. | 9. |
| 20. | 25. | 30. | 36. | 45. |

Si minores numeri cum maioribus comparandi sint, inuenientur in proportione data subsequaltera quinque termini minimi, vt hic vides in quarto ordine. Eademq; in cæteris est ratio.

POTES quoque, si placet, in primo ordine omnes quinque numeros constituere, & fractiones, si qua sint, ad vnicam denominationem minimam reuocare, & deinde qualibet ad vnicam fractionem. Nam si numeratores pro illis substituas, denominatore cõmuni relicto, & reliquos numeros integros per communẽ denominatorem multiplices, efficias quinque numeros minimos integros quæstos. Vt si subquadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1. 4. 16. Additis simul 1. 4. erit summa dimidium $2\frac{1}{2}$. medius Arithmetice inter eos. Et si diuidatur quadratus

| | | | | |
|-----|-------------------|-----|-------------------|------|
| 1. | $2\frac{1}{2}$. | 4. | $6\frac{1}{2}$. | 16. |
| 1. | $2\frac{5}{10}$. | 4. | $6\frac{4}{10}$. | 16. |
| 1. | $\frac{25}{10}$. | 4. | $\frac{64}{10}$. | 16. |
| 10. | 26. | 40. | 64. | 160. |

numerus numeri 4. per $2\frac{1}{2}$. fit Quotiens $6\frac{2}{5}$. medius Harmonice inter 4. & 16. Dua autem fractiones reducentur ad minimam denominationem, vt in secundo ordine. Et fractionibus singulis ad vnicam fractionem reuocatis, constituetur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communẽ multiplicatis, con-

stituentur quinque minimi numeri quæsti, vt in quinto ordine vides. Atq; in hunc modum quotcunq; terminos proportionem aliquam seruantes, in quibus permista sunt fractiones: ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

VIII.

QUANDO quatuor numeri ita ordinantur, vt ipsi sint Geometricè proportionales non continuè, vnus autem mediorum cum extremis seruet proportionalitatem Arithmeticam, alter verò Harmonicam, ita vt in quatuor illis numeris omnes tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri constituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, vt in ipsis reperiantur dua duntaxat proportionalitates, vt vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica; vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem constituere.

MAXIMA Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionẽ datam, ita constitues: Sit data proportio, qua 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam summa eorum est impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmetice constituitur 7. hoc modo, 12. 7. 2. Quod si eorum summa fuisset par, accepissem statim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmetice proportionalibus inueniantur tres Harmonice proportionales per primã regulam, 84. 24. 14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem, quam 12. ad 2. vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84. 14. qui semper ita inuenti pares erunt, statuaturs etiam medius Arithmetice, 49. erunt quatuor quæsti numeri, 84. 49. 24. 14. Nam extremi habent datam proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiantur omnes tres proportionalitates. Inter ipsos epim quatuor existit Geometrica proportionalitas non continua, cum eadem sit proportio 84. ad 49. qua 24. ad 14. vel 84. ad 24. qua 49. ad 14. vt liquido constat ex 7. proprietate triam harum proportionalitatum. At inter 84. 49. 14. Arithmetica. Ac deniq; inter 84. 24. 14. Harmonica ex constructione, vt hic vides.

| | | | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|---------------------|
| Tres proportio- | 84. | 49. | 24. | 14. | nalitates simul. |
| Geometricè proport. | 84. | 49. | 24. | 14. | Vel 84. 24. 49. 14. |
| Arithmetice proport. | 84. | | 49. | | 14. |
| Harmonicè proport. | 84. | | 24. | | 14. |

Rursus sit data proportio, qua 3. ad 2. Quoniam iterum eorum summa est impar, sint eorum dupli 6. 4. inter quos statuaturs medius in Arithmetica proportionalitate, 5. hoc modo, 6. 5. 4. Ex his per primam regulam inuenio Harmonice proportionales 30. 24. 20. Constituto autem medio Arithmetice 25. inter 30. & 20. erunt eadẽ ratione quatuor numeri quæsti, 30. 25. 24. 20. cū habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.

| | | | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|---------------------|
| Geometricè proport. | 30. | 25. | 24. | 20. | Vel 30. 24. 25. 20. |
| Arithmetice proport. | 30. | | 25. | | 20. |
| Harmonicè proport. | 30. | | 24. | | 20. |

Et si pro extremis sumamus quosvis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos statuaturs medius Arithmetice: fiat au-

sem, ut inuentus ad primum extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inuentus in Harmonica proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando enim in 4. numeris Geometricè proportionalibus, quales sunt 4. inuenti, vnus ineditorum est medius in proportionalitate Arithmetica, alter ineditorum medius est in Harmonica inter eosdem extremos, ut supra diximus in 7. proprietate harũ trium proportionalitatũ. Quando igitur hi 4. numeri inuenti sunt integri, factum erit, quod proponitur: si verò admiste sint fractiones, reducemus eos ad integros, ut ad finem antecedentis regula 7. scripsimus. Ut si proportio data sit dupla, statuemus extremos, 12. & 6. Dimidium summa eorũ 9. erit medius terminus inter eos Arithmetice proportionalis, hoc modo, 12. 9. 6. Si igitur fiat, ut 9. ad 6. ita 12. ad aliud: Vel ut 9. ad 12. ita 6. ad aliud, inuenietur semper numerus 8. inter 12. & 6. in Harmonica proportionalitate medius. Quare sic stabunt 4. numeri maxima Harmonia, 12. 9. 8. 6. Postremo si in eadem proportionem dupla extremorum sumamus pro extremis, 20. & 10. inueniemus medium Arithmetice, 15. & Harmonice $13\frac{1}{3}$. in minimis numeris, hoc modo, 20. 15. $13\frac{1}{3}$. 10. Si ergo tertium numerum ad vnicam fractionem $\frac{4}{3}$. reducemus, & eius numeratorem 40. denominatore relicto, tertium statuamus, inuenientur alij, si inuentos per denominatorem 3. multiplicemus, ut hic vides, 60. 45. 40. 30.

MINOREM autem Harmoniam sic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri sola proportionalitas, Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continuè proportionales Geometricè, quorum extremi pares ambo sint, vel impares. Si enim inter extremos statuas medium in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæsitos. Ut si sumantur hi tres numeri sesquialteri, 16. 24. 36. & inter extremos inueniatur medius Arithmetice proportionalis, 26. erũt 4. quæsiti numeri, 16. 24. 26. 36. quorum tres 16. 24. 36. Geometricè, & tres 16. 26. 36. Arithmetice proportionales sunt, ex constructione.

Si verò sola Geometrica cũ Harmonica desideretur, cape quoq; tres numeros quoscunque continuè proportionales Geometricè. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quaruntur. Ut si sumantur iidem tres sesquialteri, 16. 24. 36. inuenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, $22\frac{2}{3}$. Sic ergo stabunt 4. numeri inuenti, 16. $22\frac{2}{3}$. 24. 36. qui reducuntur ad hos integros, 208. 286. 312. 468. Si accepisses hos numeros tres duplos, 20. 10. 5. inuenisses inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20. 10. 8. 5.

Si denique optes solam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonicè proportionales. Si namque inter medium, & alterutrum extremorum statuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quarimus. Ut si sumantur hi tres 6. 8. 12. erit inter priores duos medius Arithmetice proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6. 7. 8. 12. At inter posteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo stabunt 4. inuenti numeri, 6. 8. 10. 12. qui omnes (quod casu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) sunt Arithmetice proportionales, & non solum tres 8. 10. 12. ex constructione: at soli tres accepti 6. 8. 12. habent proportionalitatem Harmonicam.

I X.

Si inueniendi sint quocunque numeri Arithmetice proportionales continuè, inter quorum binos ac binos cadant singuli medij Harmonicè proportionales integri, efficietur id hac ratione: Sumantur tot termini Arithmetice proportionales, quot quaruntur, & bini in proportionem binorum proximorum minimi. Si enim accipiat minimum numerus numeratus à summis binorum minimorum acceptorũ, atq; hic in singulos acceptos numeros Arithmetice proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quaruntur. Sint enim, verbi gratia, inueniendi quatuor. Cape quatuor quoscunque numeros Arithmetice proportionales, 3. 6. 9. 12. & 1. 2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2. 3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3. 4. minimos in p. portione 9. ad 12. eruntq; tres summa binorum minimorũ 3. 5. 7. atq; ab hũ minimis numeratus, 105. Si igitur hunc ducas seorsum in singulos acceptos, 3. 6. 9. 12. procreabis 4. numeros Arithmetice proportionales, quos desideras, 315. 630. 945. 1260. Nam inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medius est, 420. Inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. ut hic cernis.

| | | | | | | | |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|
| Arithm. proport. | 315 | | 630 | | 945 | | 1260 |
| Medij Harmon. | | 420 | | 756 | | 1080 | |

IC AQVE si vis duos in data proportionem duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonicè, sume duos minimos in data proportionem, & eorum summam duc in duos data proportionem. Ut si data sit proportio tripla inter 4. & 12. erũt minimi termini, 1. 3. quorũ summã 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quæsitos. Medium Harmonicum inter eos erit 24. Ut hic vides, 16. 24. 48. Si data proportio numeris fuissent minimi 1. 3. duxissemus vtrumque in eorum summam 4. factiq; essent hi duo numeri 4. 12. inter quos cadit Harmonicè medius 6.

X.

Si autem vplueris quocunque terminos in continua proportionem Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, assequeris id hoc artificio: Sume tot minimos numeros continuè proportionales Geometricè, quot desiderantur, & singulos multiplica per summam duorum in eadem proportionem minimorum: Et si quidem producti fuerint omnes

nes pares, ipsi erunt, quos quarimus; si minus, eorum dupli dabunt quæsitos numeros. Sint enim inueniendi, verbi gratia, tres in proportionem sesquialtera. Cape totidem minimos in data proportionem, 4. 6. 9. & duos minimos in eadem, 2. 3. Horum summam 5. duc in singulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares sunt, dupla, habebis, propositos numeros 40. 60. 90. Nam inter 40. 60. medium Harmonicum est, 48. Arithmeticum 50. Et inter 60. 90. Harmonicum medium est, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides:

| | | | | | | | |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| Geometr. propor. | 40 | | | 60 | | | 90 |
| Medij Harmon. | | 48 | | | 72 | | |
| Medij Arithmet. | | | 50 | | | 75 | |

Hic facile reperies duos numeros in data proportionem, inter quos intercipientur duo medij, alter secundum proportionalitatem Arithmetice, & secundum Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis data proportionem, si eorum summam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoscunque alios numeros datam habentem proportionem duxeris, erunt numeri producti, si pares sunt, quæsiti: si vero uterque non est par, erunt eorum dupli, quos querimus. Vt si data sit proportio sesquialtera, cuius minimi numeri sunt 3. 4. eorumque summa, 7. Si ergo duxeris 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentem proportionem, produces vel 21. 28. vel 84. & 112. Et quia priores duo non sunt pares, erunt eorum dupli, 42. 56. quos querimus. Posteriores autem duo, quia pares sunt, erunt quæsiti. Tam enim inter illos, quam inter hos cadunt duo medij, quos querimus, ut hic manifestum est:

| | | | | | | | | |
|-----------------|----|----|----|----|-----|----|----|-----|
| Numeri inuenti. | 42 | | | 56 | | 84 | | 112 |
| Medij Harmon. | | 48 | | | Vel | | 96 | |
| Medij Arithm. | | | 49 | | | | 98 | |

X I.

Si vero quis petat sibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorum binos bini cadunt medij, alter in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alter, exequemur id hac methode: Inueniantur, per 9. regulam proportionalitatis Geometrica, tres numeri Arithmetice proportionales 2. 50. 98. inter quorum priores binos sit medium Geometricum, 10. & inter binos posteriores, 70. statuaturque ordine sic, 2. 10. 50. 70. 98. Minimus autem numerus ab his quinque numeratus sit 2450. Quo diuiso per eosdem quinque numeros, Quotientes sint, 1225. 245. 49. 35. 25. Si igitur omnes Quotientes sint pares, vel impares, erunt primus, tertius, & quintus, ut 1225. 49. 25. ij numeri, qui queruntur. Sunt enim Harmonice proportionales, ut constat ex 5. regula, cum sint Quotientes producti ex diuisione numeri 2450. quem numeri 2. 50. 98. Arithmetice proportionales numerant, per eosdem numeros 2. 50. 98. Inter binos autem cadunt Geometricè proportionales, 245. secundus Quotiens; & 35. tertius Quotiens. Habent enim 1225. 245. 49. easdem proportionem conuerso ordine, quas continuè proportionales 2. 10. 50. habent, ut constat ex 7. regula proportionalitatis Geometrica. Eodemque modo 49. 35. 25. easdem habebunt proportionem, quas conuerso ordine habent continuè proportionales 50. 70. 98. cum tam illi, quam hi, sint Quotientes producti per diuisionem eiusdem numeri 2450. per 2. 10. 50. & per 50. 70. 98. Certum autem est, inter binos eosdem 1225. 49. & inter 49. 25. cadere quoque singulos Arithmetice proportionales, cum omnes pares ponantur, vel impares. Quod si non omnes sint pares, duplicandi erunt omnes 5. Quotientes, ut pares numeri fiant, qui idem omnino prestabunt, quod querimus. Habebunt enim easdem proportionem, quas eorum subdupli habent, ac proinde tam inter primū ac tertium secundus, quam inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometricè proportionalis. Cum ergo inter eosdem cadant medij Arithmetice, constat propositum. Exemplum superius ob oculos hic positum esse vides:

| | | | | | | | |
|-----------------------------|------|-----|-----|----|----|----|----|
| Tres Harm. proport. inuent. | 1225 | | | 49 | | | 25 |
| Medij Arithmet. | | 637 | | | 37 | | |
| Medij Geometr. | | | 245 | | | 35 | |

X I I.

Respondeo si querantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos cadant bini proportionales, Geometricè vnus, & alter Harmonicè, satisfaciemus quæstioni hoc modo: Reperiatur iterum per 9. regulam proportionalitatis Geometrica, tres numeri Arithmetice proportionales, 2. 50. 98. inter quorum binos singuli medij cadant in proportionalitate Geometrica: sumanturque duo minimi, 1. 25. in proportionem priorum duorum: Item duo minimi 25. 49. in proportionem duorum posteriorum; & horum summa, 26. 74. numerent minimum numerum 962. in quem tres illi inuenti 2. 50. 98. ducantur. Producti enim numeri, 1924. 48100. 94276. erunt, quos inquirimus. Cum namque easdem proportionem habeant, quas eorum submultiplices 2. 50. 98. sit, ut quemadmodum inter binos horum singuli cadant medij Geometricè, ita quoque inter binos illorum singuli intercipientur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia summa minorum numerorum 1. 25. & 25. 49. in proportionibus 2. ad 50. & 50. ad 98. (qui tres, 2. 50. 98. Arithmetice, sunt

cē sunt proportionales) numerant minimum numerum 962, qui in eos tres, 2.50.98. ductus producit 1924. 48100.94276. cadent inter binos horum trium singuli medij Harmonicē proportionales, ut in 9. regula traditum est. Exemplum ergo cum medijs sic stabit:

| | | | | | | | |
|--------------------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| Arithm. proport. inuent. | 1924 | | | 48100 | | | 94276 |
| Medij Harmon. | | 3700 | | | 63700 | | |
| Medij Geometr. | | | 9620 | | | 67340 | |

XIII.

Ex his, quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros proportionales, siue Arithmetice, siue Geometricē, siue Harmonicē, inter quorum binos cadant terni medij, unus Arithmetice, alter Geometricē, & reliquus Harmonicē. Sint enim primū inueniendi tres Arithmetica proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmetica proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij: unus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoq; inter binos singuli Arithmetice proportionales, atq; aded questionī satisficient. Si verò nō omnes pares sint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quaerimus. Exemplum hic habes, in tribus numeris antecedentis regula, qui omnes pares sunt, ut hic apparet:

| | | | | | | | |
|-----------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| Arith. proport. | 1924 | | | 48100 | | | 94276 |
| Medij Harm. | | 3700 | | | 63700 | | |
| Medij Geometr. | | | 9620 | | | 67340 | |
| Medij Arithm. | | | | 25012 | | | 71188 |

DEINDE inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni medij, in singulis proportionalitatibus singuli, sitq; proportio data, quam medij Geometrica proportionalitatis efficere debent, nimirum sesquialtera. Cape quinque numeros minimos data proportionis continuē proportionales, 16.24.36.54.81. & duos minimos 4.9. in proportionē primi 16. ad tertium 36. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum summam 13. duc in eundem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti enim numeri 208.468.1053. duplicati, (quoniam ipsi non omnes pares sunt, aut impares; alias non essent duplicandi) nimirū 416.936.2106. (ut inter binos cadere possint singuli medij Arithmetice) sunt ij, quos quaerimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonicē, & Arithmetice alter, ut ex 10. regula patet: Et inter eosdem cadunt medij Geometricē, nimirum dupli eorum, qui sunt ex eadem summa 13. duorum minimorum in secundum 24. & tertium 54. ab initio acceptos: quemadmodum hic manifestum est.

| | | | | | | | |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|
| Geometr. proport. | 416 | | | 936 | | | 2106 |
| Medij Harmon. | | 576 | | | 1296 | | |
| Medij Geometr. | | | 624 | | | 1404 | |
| Medij Arithm. | | | | 676 | | | 1521 |

POSTREMO sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuentis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225.49.25. inter quorum binos cadant bini Medij, unus Arithmetice, & alter Geometricē, ut in 11. regula docuimus, sint proportionis priorum duorum minimi duo numeri 25.1. & proportionis duorum posteriorum minimi duo numeri 49.25. quorum summa 26.74. numerent minimum numerum 962. Hanc si in tres inuētos duxeris gignes tres quæsiros 1178450.47138.24050. Nam inter binos cadent bini medij, unus Arithmetice, & alter Geometricē, quemadmodum inter eorum submultiplices 1225.49.25. nimirum numeri, qui sunt ex eodem 962. in medios supra inuentos. Item inter eosdem binos cadent singuli medij Harmonicē, ut ex 12. regula constat, cum producti sint ex minimo numerato à summis minimorū terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes:

| | | | | | | | |
|--------------|---------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| Harm. prop. | 1178450 | | | 47138 | | | 24050 |
| Medij Arith. | | 612794 | | | 35594 | | |
| Med. Geom. | | | 235690 | | | 33570 | |
| Med. Harm. | | | | 90650 | | | 31850 |

XIIII.

PARI ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam data proportionis, inter quos cadant tres medij, unus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. ad 3. & tres minimi in ea numeri, 4.2.1. eritq; ex defn. 10. huius libri proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1. vel 6. ad 3. data. Ducatur summa 5. ex 4. & 1. collecta in duos quosvis numeros

numeros habentes eandem proportionem, quam 4. ad 1. hoc est, duplicatam datæ proportionis, ut in 12. & 3. Producti autem numeri 60. 15. duplicentur, si ambo non sint pares, vel impares. Dupli enim 120. 30. sunt quos quærimus. Et si uterque esset par, aut impar, ipsi essent quasi, & duplicatio non foret necessaria. Ita autem se habent tres medij inter 120. & 30. ut hic apparet:

| | | | | | |
|---------------------|-----|----|----|----|----|
| Duo numeri inuenti. | 120 | | | | 30 |
| Medius Arithmet. | | 75 | | | |
| Medius Geometr. | | | 60 | | |
| Medius Harmon. | | | | 48 | |

X V.

POSTREMO si libeat numerum quemcunque propositum distribuere in quotiua partes, Harmonicam proportionalitatem seruantes, efficiet id hac ratione: Cape per 5. regulam tot numeros Harmonicè proportionales, in quos partes numerus est distribuendus. Si enim per eorum summam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos sunt, erunt Quotientes partes, quas quærimus, eruntq; accepti numeri eodem ordine proportionales. Vel si per summam acceptorum numerorum partiatur datum numerum, & Quotientem in singulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quærimus. Ut si numerus 130. distribuendus sit in tres partes Harmonicè proportionales: si sumamus tres numeri 6. 8. 12. ex 5. regula inuenti, & per eorum summam 26. diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in assumptos numeros 6. 8. 12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel si datum numerum 130. per 26. summam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in singulos acceptos, 6. 8. 12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eadem partes, quas inquirimus. Constituunt enim datum numerum 130. suntq; Harmonicè proportionales, sicuti assumpti numeri, 6. 8. 12. Eodem modo diuidetur numerus 10. in has tres partes, $2\frac{4}{3}$. $3\frac{1}{3}$. $4\frac{2}{3}$. eodem modo proportionales. Eademq; ratio est de pluribus partibus.

QVO PACTO EX PROPORTIONE AEQUALITATIS
OMNES INAEQUALITATIS PROPORTIONES,
RATIONALES ORIANTVR.

POSITIS tribus terminis aequalibus, siue vnicatibus, siue numeris, mirabile dictu est, quàm facili & iucunda ratione, ex varia illorum inter se additione, omnes proportionales inaequalitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine:

AEQVALES termini, siue numeri, procreant numeros duplos: DVPLI triplos: TRIPLI quadruplos: QVADRVPLI quintuplos: & sic in infinitum.

DEINDE ex multiplicibus terminis inuentis, si ordinem inuertant, gignentur omnes superparticulares, hoc seruatò ordine: DVPLI inuersi produunt sesquialteros: TRIPLI inuersi sesquitercios: QVADRVPLI inuersi sesquiquartos: atq; ita deinceps.

TERTIO ex terminis superparticularibus inuentis, si inuertant quoque ordinem, producentur omnes superpartientes, hac serie: SESQUIALTERI inuersi exhibent superbipartientes: SESQUITERTII inuersi supertripartientes: SESQUIQUARTI inuersi superquadrupartientes, &c.

QUARTO ex iisdem terminis superparticularibus eo ordine, quo inuenti sunt, nascentur omnes multiplices superparticulares, hoc ordine:

SESQUIALTERI dant duplos sesquialteros: DVPLI sesquialteri triplos sesquialteros: TRIPLI sesquialteri quadruplos sesquialteros, &c. SESQUITERTII item gignunt duplos sesquitercios: DVPLI sesquitercij triplos sesquitercios: TRIPLI sesquitercij quadruplos sesquitercios, &c. SESQUIQUARTI rursus efficiunt duplos sesquiquartos: DVPLI sesquiquarti triplos sesquiquartos: TRIPLI sesquiquarti quadruplos sesquiquartos, &c.

QUINTO ex terminis superparticulis inuentis elicietur oēs multiplices superpartientes, hoc ordine:

SUPERBIPARTIENTES generant duplos superbipartientes. DVPLI superbipartientes, triplos superbipartientes: TRIPLI superbipartientes quadruplos superbipartientes, &c. SUPERTRIPARTIENTES quoque pariunt duplos supertripartientes: DVPLI supertripartientes, triplos supertripartientes: TRIPLI supertripartientes, quadruplos supertripartientes, &c. SUPERQUADRVPARTIENTES itē gignunt duplos superquadrupartientes: DVPLI superquadrupartientes, triplos superquadrupartientes: TRIPLI superquadrupartientes, quadruplos superquadrupartientes, atq; sic de cæteris.

MODVS autem, quo omnes hæ proportionales ex tribus terminis aequalibus generantur eo ordine, quem exposuimus, est vnicus, iug, facillimus, nimirum hic:

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, semel sumpto, & secundo bis, & tertio semel, exhibet primum terminum proportionalitatis Geometricæ constituendæ.

SECUNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis constituendæ oritur ex secundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, semel sumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricæ constituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia erui debet, sumptus semel.

AT QV E hoc præceptum triplex sub oculos ponitur, hoc appposito typo, vbi liquidò constat, qui termini datæ proportionalitatis sumendi sint vel semel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis constituentur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS PROPOR-
TIONIS GEOMETRICÆ EX ALIA
GEOMETRICA.

| Ordo terminorum data proportionalitatis. | Primus. | Secundus. | Tertius. |
|--|---------|-----------|----------|
| Primus constituitur, si dati termini ita sumantur. | Semel. | Bis. | Semel. |
| Secundus constituitur, si termini dati ita sumantur. | . | Semel. | Semel. |
| Tertius constituitur, si ita sumantur dati termini. | | | Semel. |

SE QV VNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportionem. Proponimus autem duas æqualitatis proportionem: vnam in vnitatibus, alteram verò in binarijs. Vbi hac notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari semper minimos terminos cuiusque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MULTIPLICIVM.

| Æqualitatis proportio. | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
|----------------------------|----|---|---|----|----|---|
| Dupli ex æqualibus creati. | 4 | 2 | 1 | 8 | 4 | 2 |
| Tripli ex duplis. | 9 | 3 | 1 | 18 | 6 | 2 |
| Quadrupli ex triplis. | 16 | 4 | 1 | 32 | 8 | 2 |
| Quintupli ex quadruplis. | 25 | 5 | 1 | 50 | 10 | 2 |

GENERATIO SUPERPARTICVLARIVM.

| | | | | | | |
|-----------------------------------|----|----|----|----|----|----|
| Dupli inuerso ordine. | 1 | 2 | 4 | 2 | 4 | 8 |
| Sesquialt. ex duplis inuersis. | 9 | 6 | 4 | 18 | 12 | 8 |
| Tripli ordine conuerso. | 1 | 3 | 9 | 2 | 6 | 18 |
| Sesquiter. ex tripl. inuersis. | 16 | 12 | 9 | 32 | 24 | 18 |
| Quadrupli ordine conuerso. | 1 | 4 | 16 | 2 | 8 | 32 |
| Sesquiquart. ex quadr. conuersis. | 25 | 20 | 16 | 50 | 40 | 32 |

GENERATIO SUPERPARTIENTIVM.

| | | | | | | |
|--------------------------------------|----|----|----|-----|----|----|
| Sesquialteri inuersi. | 4 | 6 | 9 | 8 | 12 | 18 |
| Superbip. ex sesquialt. inuersis. | 25 | 15 | 9 | 50 | 30 | 18 |
| Sesquiter. ordine inuerso. | 9 | 12 | 15 | 18 | 24 | 32 |
| Supertr. ex sesquit. inuersis. | 49 | 28 | 16 | 98 | 56 | 32 |
| Sesquiquart. conuerso ordine. | 16 | 20 | 25 | 32 | 40 | 50 |
| Superquadrup. ex sesquiq. conuersis. | 81 | 45 | 25 | 162 | 90 | 50 |

GENERATIO MULTIPLICIVM SUPER-
PARTICVLARIVM.

| | | | | | | |
|---|----|----|---|-----|----|---|
| Sesquialteri directo ordine. | 9 | 6 | 4 | 18 | 12 | 8 |
| Dupli sesquialteri ex sesquialt. | 25 | 10 | 4 | 50 | 20 | 8 |
| Tripli sesquialt. ex dupl. sesquialt. | 49 | 14 | 4 | 98 | 28 | 8 |
| Quadrupl. sesquialt. ex tripl. sesquialt. | 81 | 18 | 4 | 162 | 36 | 8 |

Sesquiter.

| | | | | | | |
|---|-----|----|---|-----|----|----|
| Sesquitercij ordine recto. | 16 | 12 | 9 | 32 | 24 | 18 |
| Dupli sesquiterc. ex sesquiterc. | 49 | 21 | 9 | 98 | 42 | 18 |
| Tripli sesquiterc. ex dupl. sesquiterc. | 100 | 30 | 9 | 200 | 60 | 18 |
| Quadrupl. sesquit. ex tripl. sesquit. | 169 | 39 | 9 | 338 | 78 | 18 |

| | | | | | | |
|--------------------------------------|-----|----|----|-----|-----|----|
| Sesquiquarti ordine recto. | 25 | 20 | 16 | 50 | 40 | 32 |
| Dupli sesquiquar. ex sesquiquar. | 81 | 36 | 16 | 162 | 72 | 32 |
| Tripli sesquiq. ex dupl. sesquiquar. | 169 | 52 | 16 | 338 | 104 | 32 |
| Quadr. sesquiq. ex tripl. sesquiq. | 289 | 68 | 16 | 578 | 136 | 32 |

GENERATIO MULTIPLICIVM SUPER-
BIPARTIENTIVM.

| | | | | | | |
|--|-----|----|---|-----|----|----|
| Superbipart. ordine recto. | 25 | 15 | 9 | 50 | 30 | 18 |
| Dupli superbipart. ex superbipart. | 64 | 24 | 9 | 128 | 48 | 18 |
| Tripli superbipart. ex dupl. superbip. | 121 | 33 | 9 | 242 | 66 | 18 |
| Quadrup. superbip. ex trip. superbip. | 196 | 42 | 9 | 392 | 84 | 18 |

| | | | | | | |
|--|-----|----|----|-----|-----|----|
| Supertripart. directo ordine. | 49 | 28 | 16 | 98 | 56 | 32 |
| Dupli supertripart. ex supertripart. | 121 | 44 | 16 | 242 | 88 | 32 |
| Tripli supertrip. ex dupl. supertr. | 225 | 60 | 16 | 450 | 120 | 32 |
| Quadr. supertrip. ex tripl. supertrip. | 361 | 76 | 16 | 722 | 152 | 32 |

| | | | | | | |
|--------------------------------------|-----|-----|----|------|-----|----|
| Superquadrup. recto ordine. | 81 | 45 | 25 | 162 | 90 | 50 |
| Dupli superquadr. ex superquadr. | 196 | 70 | 25 | 392 | 140 | 50 |
| Trip. superquadr. ex dupl. superq. | 361 | 95 | 25 | 722 | 190 | 50 |
| Quadrup. superquad. ex trip. superq. | 576 | 120 | 25 | 1152 | 240 | 50 |

| | | |
|-----|-----|----|
| 361 | | |
| 95 | | |
| 95 | 95 | |
| 25 | 25 | 25 |
| 576 | 120 | 25 |

Hic enim perspicue cernis, quoslibet tres terminos ex tribus proximè antecedentibus procreatos esse ex prescripto triplici præcepti superioris. Vt verbi gratia, postremi hi tres, 576. 120. 25. ita producti sunt ex tribus antecedentibus, 361. 95. 25. Præcipue 576. coaceruatus est ex primo 361. semel, & ex secundo 95. bis, & ex 25. semel. Secundum autem 120. constat ex secundo 95. semel, & ex tercio 25. semel. Tertius denique 25. est tertius 25. semel sumptus, ut hac appositæ formula demonstrat. Atque hoc eodem modo omnes alij geniti sunt, initio factis à terminis æ-

qualibus, i. i. i. vel 2. 2. 2.

QVO PACTO VICISSIM OMNIS PROPORTIO
INÆQUALITATIS AD ÆQUALITATIS PRO-
PORTIONEM REVOCETVR.

PROPOSITIS rursus tribus terminis inæqualibus in quacunque proportioni, restituetur vicissim proportio æqualitatis, non minus incunda, quam facili ratione, per variam subtractionem terminorum inæqualium, vnius ab altero. Ita autem res expedietur triplici hoc præcepto:

MINIMVS trium terminorum inæqualium datorum statuatur vnum extremum proportionis, ad quam reductio fit.

MINIMO eodem subtracto ex medio, reliquus numerus constituatur in medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

SUMMA collecta ex constituto iam extremo semel, & medio termino bis sumpto, subtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alteri extremi nouæ proportionis fiat.

Hæc ratione quævis proportio trium terminorum inæqualium reuocabitur ad aliam proportionem, conferendo semper maiores numeros cum minoribus; & hac rursus eodem modo ad aliam, atque ita deinceps, donec tres termini æquales occurrant. Quod si tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducuntur y prima statim operatione ad æqualitatem. Id quod exempla, quæ sequuntur, planum facient.

| | | | |
|-------------------------|-----|----|---|
| Quintupla proportio. | 150 | 30 | 6 |
| Quadrupla. | 96 | 24 | 6 |
| Tripla. | 54 | 18 | 6 |
| Dupla. | 24 | 12 | 6 |
| Aequalitatis proportio. | 6 | 6 | 6 |

Hoc enim exemplum monstrat, quintuplam proportionem reuocatam esse ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & denique duplam ad aequalitatem. In hoc altero verò exemplo vides proportionem supertripartientem quartas reduci ad sesquiterciam, sesquiterciam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam tandem ad aequalitatem.

| | | | |
|-------------------------------------|----|----|----|
| Proportio supertripartiens quartas. | 49 | 28 | 16 |
| Sesquitercia. | 9 | 12 | 16 |
| Tripla. | 9 | 3 | 1 |
| Dupla. | 4 | 2 | 1 |
| Proportio aequalitatis. | 1 | 1 | 1 |

VIDES ergo ultimam proportionem inaequalitatis semper esse duplam, hanc vero statim ad aequalitatem reduci.

EST autem animaduersione dignum, si tres numeri dati fuerint in sua proportionem minimi, proportionem aequalitatis, ad quam fit reductio, consistere in tribus unitatibus. Si vero non fuerint minimi, proportionem illam aequalitatis consistere in tribus numeris aequalibus, quorum quilibet tot unitates continet, quorum locum occupant tres termini dati inter omnes tres terminos eiusdem generis proportionis. Ita vides in posteriori exemplo tres datos numeros 49, 28, 16. minimos esse in proportionem supertripartiente quartas, atque reductionem factam esse ad hanc aequalitatem, 1.1.1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150, 30, 6. sextum locum inter omnes tres numeros continua proportionis quintupla, propterea quod aequalitas inuenta est inter hos tres senarios, 6.6.6. Minimi enim, siue primi numeri quintupla proportionis sunt, 25.5.1. Secundi, 50.10.2. Terti, 75.15.3. Quarti, 100.20.4. Quinti, 125.25.5. Sexti autem, 150.30.6. ut manifestum est. Idem experiri licebit in omnibus alijs proportionibus.

SED & hac obseruatione non indignum videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta est ad quadruplam, ex qua orta est: quadrupla ad triplam. Hac enim illam genuit, & sic de ceteris vsq; ad aequalitatem. In exemplo verò posteriori, Supertripartiens reuocata est ad sesquiterciam ordine inuerso. Constat autem, numeros sesquitercios conuerso ordine gignere supertripartientes, ut supra diximus. Item sesquitercia haec, conferendo maiores numeros cum minoribus, reducta est ad triplam ordine inuerso, quemadmodum tripla inuersa generat sesquiterciam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, reducta est ad duplam, & haec ad aequalitatem, &c.

NE QVÆ verò silentio praterendum censeo, ex tribus terminis cuiuscunque proportionalitatis Geometrica, siue ea aequalitatis sit, siue inaequalitatis, gigni posse quamlibet triam proportionalitatem, quas supra explicauimus, si ipsi termini varijs modis inter se coagmententur. Proportionem enim trium terminorum Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, si primus terminus semel, secundus bis, & tertius semel pro primo termino sumatur, pro secundo autem secundus, & tertius semel; pro tercio denique ipse tertius semel, perspicue constat ex his, quae paulò antè scripsimus de ortu omnium proportionum inaequalitatis ex aequalitatis proportionem.

AT verò ut ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, seruabis hoc praeceptum triplex.

SUMMA ex primo, & secundo termino bis, & tertio semel collectam fac primum terminum Arithmeticae proportionalitatis.

SUMMA verò ex primo, secundo, & tertio semel confectam, statue secundo loco.

TERTIUM denique terminum constitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS PROPORTIONIS ARITHMETICAE EX GEOMETRICA.

| Ordo terminorum data proportionalitatis. | Primus. | Secundus. | Tertius. |
|---|---------|-----------|----------|
| Primus fit ex datis terminis, ita coacervatò. | Bis. | Bis. | Semel. |
| Secundus verò sic. | Semel. | Semel. | Semel. |
| Tertius denique hoc modo. | | | Semel. |

Nihil porro interest, vtrum minimum numerum proportionalitatis Geometrica facias primum terminum, an verò maximum, vt ex sequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICAE PROPORTIONALITATIS EX GEOMETRICA.

| | | | | | | | | | | | | |
|--------------------|---|---|---|----|----|---|----|----|---|----|----|---|
| Geometr. proport. | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 9 | 6 | 4 | 4 | 6 | 9 |
| Arithmet. proport. | 5 | 3 | 1 | 20 | 12 | 4 | 34 | 19 | 4 | 29 | 19 | 9 |

CONSIDERATIONE autem dignissimum est, differentiam constituta proportionalitatis Arithmetica semper aequalem esse summa primorum duorum terminorum Geometricae proportionalitatis, per quam constituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam esse 2. summa ex 1. 1. in secundo, 8. summam scilicet ex 4. 4. In tertio 15. quae summa conficitur ex 9. 6. In quarto denique, 10. nimirum summam ex 4. 6. collectam, atque ita in alijs.

ITAQUE si Arithmetica proportionalitas constituatur ex proportionem aequalitatis, erit differentia dupla vnius termini aequalis: vt perspicuum est in prioribus duobus exemplis.

DENIQUE Harmonicam proportionalitatem oriri quoque ex Geometrica, hoc alio praecepto triplici planum fiet.

SUMMAM collectam ex primo bis, & secundo ter, & tertio semel sumpto, statue in primo loco proportionalitatis Harmonicae.

SUMMAM verò confectam ex secundo bis, & tertio semel sumpto, in secundo loco.

SUMMAM denique secundi & tertij, in tertio loco.

Vbi etiam nihil interest, vtrum minimus terminus dicatur primus, vel maximus. Typum porro huius generationis hic expressum vides.

TYPVS PROCREATIONIS HARMONICAE PROPORTIONALITATIS EX GEOMETRICA.

| Ordo terminorum datae proportionalitatis. | Primus. | Secundus. | Tertius. |
|--|---------|-----------|----------|
| Primus fit ex terminis datis, sic in vnum collectis. | Bis. | Ter. | Semel. |
| Secundus verò sic. | | Bis. | Semel. |
| Tertius denique hoc modo. | | Semel. | Semel. |

GENERATIO PROPORTIONALITATIS HARMONICAE EX GEOMETRICA.

| | | | | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|---|----|----|---|----|----|----|----|----|----|
| Geom. proport. | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 9 | 6 | 4 | 4 | 6 | 9 |
| Harm. proport. | 6 | 3 | 2 | 24 | 12 | 8 | 40 | 16 | 10 | 35 | 21 | 15 |

IAM verò è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quaecunque ad aequalitatem hoc pacto.

DETRAHE minimum terminum ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis constituendae.

HOC medio inuento sublato ex minimo datae proportionalitatis Harmonicae, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQUE minimus datus semel, & medius inuentus bis in vnam summam collecti, & ex maximo dato subtrahiti, dabunt duplum alterius extremi. Semissis ergo huius erit ipsum alterum extremum.

HAC ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad aequalitatem, vel ad proportionalitatem aliquam Geometricam, quae ad aequalitatem redigetur, vt supra docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas proposita oritur ex illa Geometrica, si superius praeceptum adhibeatur, ad quam per hoc praeceptum reuocata est. Exempla hic vides:

| | | | | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|---|----|----|---|----|----|----|----|----|----|
| Harm. proport. | 6 | 3 | 2 | 24 | 12 | 8 | 40 | 16 | 10 | 35 | 21 | 15 |
| Geom. proport. | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 9 | 6 | 4 | 4 | 6 | 9 |

| | | | | | | | | | |
|-------------------|---------------|---------------|---------------|----|----|----|----|----|----|
| Harmon. proport. | 3 | 4 | 6 | 60 | 40 | 30 | 24 | 16 | 12 |
| Geometr. proport. | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 5 | 10 | 20 | 2 | 4 | 8 |
| Aequalitas. | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 5 | 5 | 5 | 2 | 2 | 2 |

At proportionalitas Arithmetica reuocabitur ad aequalitatē, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam constituitur, hoc modo:

MINIMUM terminum fac vnum extremorum. Subducto deinde eodem minimo ex medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio constituendae proportionalitatis, & altero extremo. Igitur si hic numerus reliquus duplus est minimi, secto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quam alterum extremorum; reductaq; erit data proportionalitas Arithmetica ad aequalitatem, ex qua ortum traxit.

| | | |
|---|---|----|
| 3 | 9 | 15 |
| 3 | 3 | 3 |

VT si detur Arithmetica proportionalitas, 3. 9. 15. si in Geometrica constituenda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmetica data, & hunc eundem numerum demas ex dato medio 9. supererunt 6. qui numerus duplus est minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad aequalitatem hanc, 3. 3. 3. ex qua oritur secundum superius praeceptum.

Si verò reliquus ille numerus non est duplus minimi, secandus erit in duas partes, quae cum minimo constituent proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

| | | |
|----|----|---|
| 34 | 19 | 4 |
| 9 | 6 | 4 |

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 34. 19. 4. Facto in Geometrica extremo vno, 4. minima data Arithmetica proportionalitatis, eoque subducto ex medio 19. relinquatur numerus 15. qui non est duplus minimi. Quare secto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9. 6. 4. ex qua rursus ortum ducet, ex praescripto superiori praecepti.

SED quoniam reliquus ille numerus non potest semper diuidi in tales duas partes, quae cum minimo constituent continuam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem ea diuisio faciendā sit, & quando fieri in numeru nequeat, docebimus ad proposit. 17. lib. 6.) nisi numeri surdi, irrationalēsve adsciscantur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam statim ad aequalitatē, ex qua, si termini aequales cum differentia proposita coaceruentur, ortum duxit; hoc pacto.

MINIMVS terminus datus fiat vnus ex duobus extremis. Differentia autem proportionalitatis subducta ex medio, reliquus numerus fiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino sublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

| | | |
|----|----|----|
| 20 | 27 | 34 |
| 20 | 20 | 20 |

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 20. 27. 34. cuius differentia est 7. si 20. fiat vnum extremorum, & differentia 7. dematur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erunt, alij duo termini aequales, 20. 20. Ex hac aequalitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmetica proportionalitatis habere debent, conficietur ipsa proportionalitas Arithmetica hac ratione.

VNVS terminorum aequalium fiat minus extremum. Huic addatur differentia data, vt fiat secundus terminus. Eidem denique minori extremo adiiciatur data differentia duplicata, vt efficiatur maius extremum.

VT in dato exemplo, minus extremum erit 20. cui si differentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et si eadem differentia 7. duplicata adijciatur eidem minimo extremo 20. conflabitur maius extremum 34. Eodem pacto data hac aequalitate, 15. 15. 15. si ex ea constitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia sit 20. addatur hac differentia ad 15. vnum terminorum aequalium, vt habeas secundum terminum 35. Quod si eadem differentia duplicata, hoc est, numerus 40. ad eundem terminum aequalem adijciatur, fiet tertius terminus 55. Primus autem est 15. vnus terminorum aequalium, vt hic vides:

| | | | |
|-----------------|----|----|----|
| Differentia 20. | 15 | 15 | 15 |
| | 15 | 35 | 55 |

AT QV E pauca hac praeibasse hoc loco sufficiat ex infinitis, quae de immensa proportionum, proportionalitatumq; vi ac natura, innumerabilibusq; proprietatibus dici possent. Plura enim, & quidem scitu periculosa in pleniore nostra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.

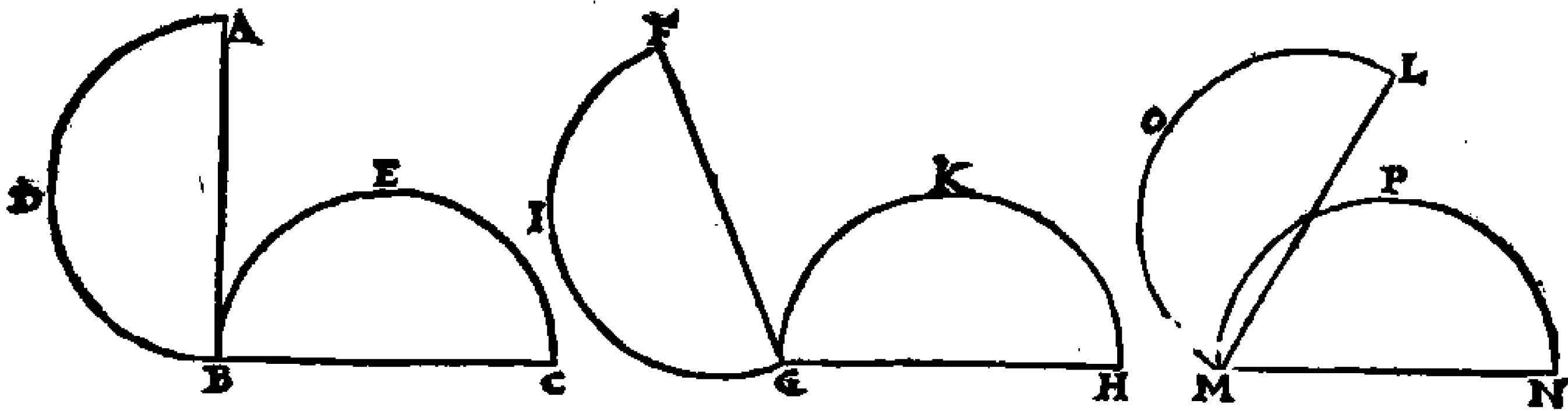
V.

RATIONEM habere inter se magnitudines dicuntur, quae possunt multiplicata sese mutuò superare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat

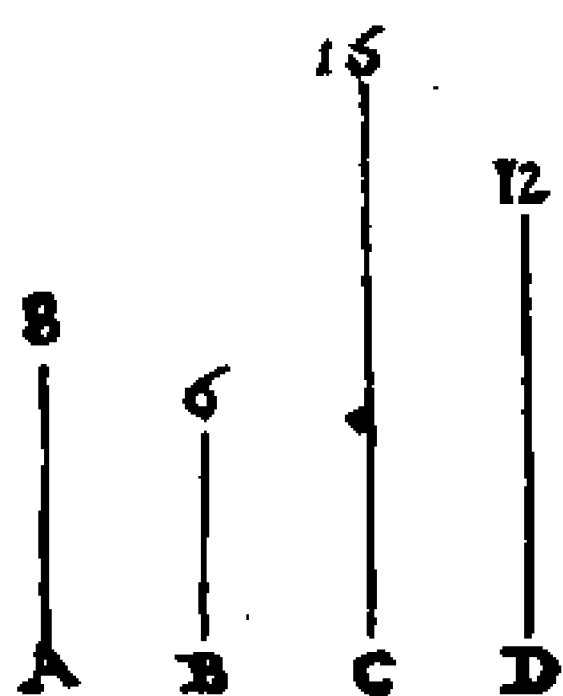
cauerat rationem, quā nos cum alijs auctoribus proportionē dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant due quantitates eiusdem generis, ut proportionem dicantur habere. Neq, enim omnes linea, neq, etiam omnes anguli plani, quāvis sint eiusdem generis quantitates, proportionem habent inter se, ut mox dicemus. At igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum vtrius multiplicata ita augetur, ut alteram tandem superet; adeo ut si alterutra quantumvis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Ut diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, qua nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum isosceles, erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora. Ita quoq, circumferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamvis nondum sit nobis explorata atq, cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circumferentiā superat, cum omnis circumferentia circuli, ut ab Archimede demonstratur, ter duntaxat cōprehendat diametrum eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodem modo multa curvilinea cum rectilineis proportionē habebunt, quia & aequalitas & inequalitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, qua figura est contenta duobus arcibus circulorum, instar Luna nova, quando falcata esse ternitur; & Archimedes parabolam quadratam, hoc est, ille cuidam lunula, hic verò parabola quadratū inuenerit aequale. Hinc enim fit, ut & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atq, e contrario lunula & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quod Archimedes in lib. de Spiralibus demonstravit, lineam aliquam rectam esse circumferentia circuli aequalem, & aliam duplam, triplam aliam, &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo esse aequale, ut in libello de dimensione circuli demonstravit. De aequalitate porro lineae rectae, & circularis quadrati, & circuli, ad calcē lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoq, inter angulos rectilineos, ac curvilineos aequalitatem demonstrari. Ostendit enim lib. 3. in primum Euclidis, ad 12. Axioma, quod ipsi est 4. Postulatum, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curvilineum aequalem. Sic enim an-

a 20. primi.



gulus rectus ABC, contentus rectis aequalibus AB, BC, circa quas semicirculi describantur ADB, BEC. Quoniam igitur anguli semicirculorum ABD, CBE, sunt aequales; addito communi angulo mixto ABE, fiet angulus totus curvilineus DBE, totius angulo recto ABC, aequalis. Similiter ostendes, angulum curvilineum IGH, aequalem esse obtuso FGH; necnon curvilineum OMP, acuto LMN, dummodo hic ab angulis semicirculorum LMO, NMP, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea LM, & curva MP. Ex quibus constat, alterutrum angulorum multiplicatum posse alterum excedere, quare proportionem inter se habebunt. At verò linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunq, multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neq, linea cum superficie, neq, superficies cum corpore, eandem ob causam, ullam habebit proportionem. Deniq, non censebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus cōtactus quantumvis multiplicatus, minor adhuc semper existit quovis angulo rectilineo, etiam minimo, ut propos. 16. lib. 3. demonstravimus. Itaq, ut apertius Euclides explicaret, quanam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, hoc est, quas magnitudines eiusdem generis in definitione 3. intellexeris, voluit hac definitione eas intelligi, quae hanc conditionē habeant, ut alterutra multiplicata alterā possit superare, alias verò non, etiamsi in eodē quantitatū genere videantur comprehendendi, quales sunt linea finita & infinita; angulus rectilineus, & angulus contactus, &c. Hanc ob causam in pīrisq, demonstrationibus proportionum, iubet toties multiplicare vnam propositarū magnitudinū, qua proportionem ponuntur habere inter se, donec alteram excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in plerisq, alijs propositionibus. Taceant igitur, qui putant, per magnitudines eiusdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas esse, quae sub eodem genere proximo, siue infimo continentur. Hac enim ratione non esset proportio inter angulos rectilineos, & curvilineos, aut inter figuras rectilineas, curvilineasq, cum non sub eodem contineantur genere proximo: quod falsum esse diximus. Sileant quoq, qui existimās, intelligendas esse magnitudines in eodem genere quantitatū, siue in eodē genere subalterno, ut Logici loquuntur, ita ut satis sit, ut dua quantitates dicantur habere proportionem, si sint vel linea, vel superficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio esset inter angulum rectilineum, & angulum contactus, cum in genere anguli contineantur: Item proportionem haberent inter se, linea finita, & linea infinita, cum in genere linea existant: quorum vtrumq, falsum esse, liquido ex hac definitione constat.

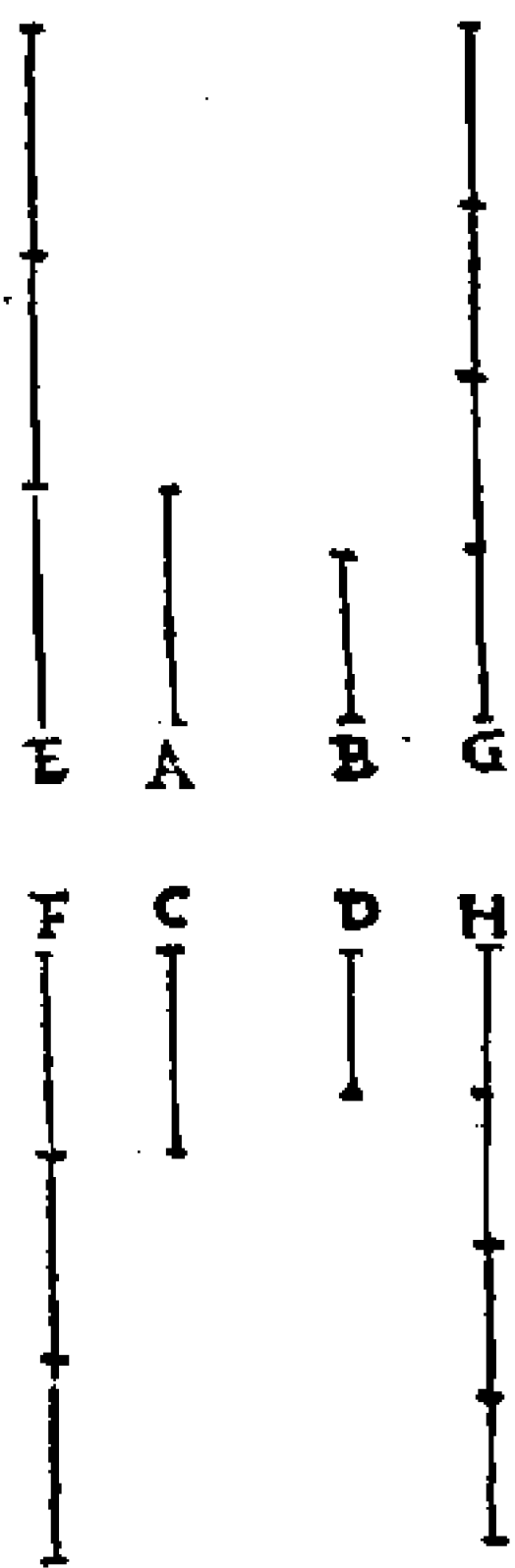
PERSPICUUM est ex his, quàm ineptè, & quàm falso, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quanam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualē proportionem duæ quæcunq; proposita quantitates habeant. Itaq; inquit, vult Euclides si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur aequaliter, hoc est, ambæ sumantur quacunque aequè multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quàm multiplex D, ipsius B, habere magnitudines A, & B, eā inter se proportionem, quàm earū aequè multiplicia C, & D. Non aduertit autem hoc, quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius 5. lib. ubi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportionem esse, hoc est, A, & B, magnitudines eandem habere proportionē, quàm earū aequè multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligēda hac definitio, praesertim cum tam ignota sit hac proportio inter C, & D, quā illa inter A, & B, quandoquidem semper eadem est. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Est ergo sensus huius definitionis ille, quem exposuimus, ut liquido constat ex verbis Euclidis.



VI.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æquè multiplicia, à secundæ & quartæ æquè multiplicibus, qualiscunq; sit hæc multiplicatio, utrumq; ab utroq; vel vna deficient, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

1115

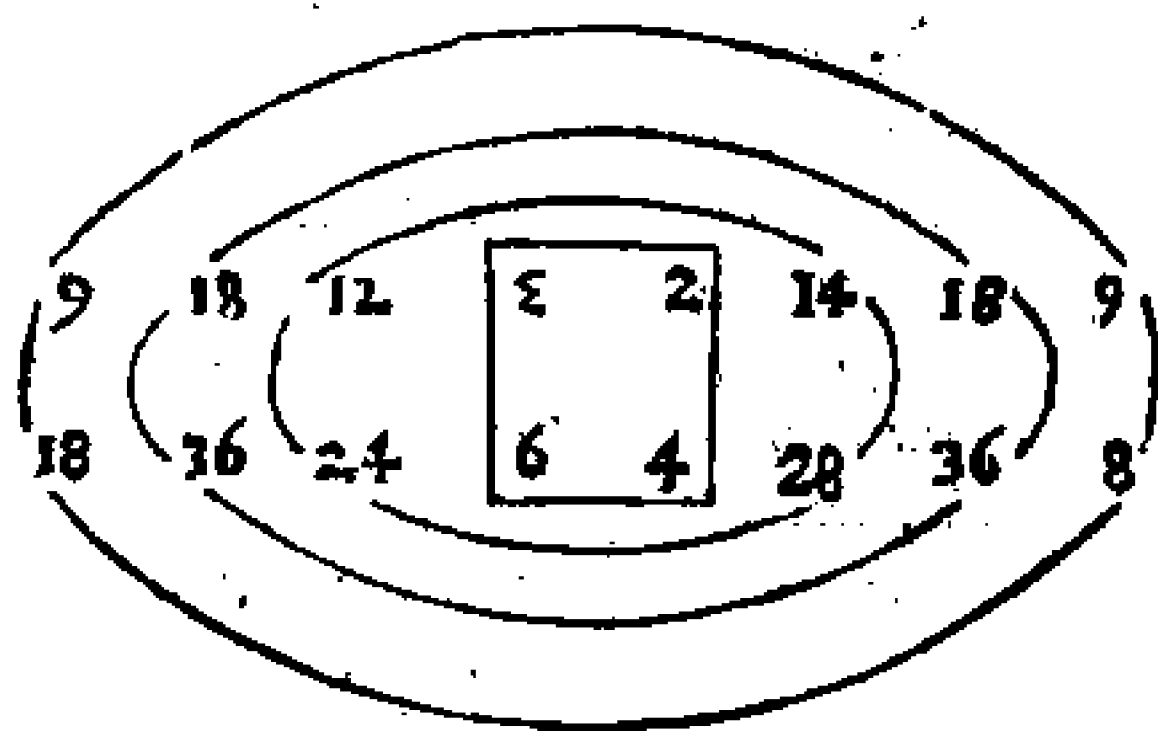


EXPLICAT hoc loco Euclides, quasnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, ut eandem dicantur habere proportionem. Quod ut exequatur, cogitur confugere ad earum æquè multiplicia, ut complectatur omnes proportionem magnitudinum, tam rationales, quam irracionales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturq; prima, & tertia æquè multiplicia quacunque, E, quidem ipsius A, & F, ipsius C. Item sumantur secunda, & quarta alia quacunque æquè multiplicia, G, quidem ipsius B, & H, ipsius D, siue hæc duo posteriora sint ita multiplicia secundæ, & quarta, sicut priora duo multiplicia sunt primæ, & tertiæ, siue non. Quod si iam inter se conferantur sumpta æquè multiplicia ea, quæ inter se respondent, ut multiplex prima, & multiplex secunda inter se, hoc est, E, & G; Item multiplex tertia, & multiplex quarta inter se, hoc est, F, & H, deprehensumq; fuerit perpetuò, ea ita inter se habere, ut si E, multiplex prima magnitudinis A, minus fuerit, quàm G, multiplex secunda magnitudinis B; etiam F, multiplex tertia magnitudinis C, minus sit quàm H, multiplex quarta magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G, etiam F, æquale sit ipsi H: Aut denique si E, maius fuerit quàm G, etiam F, maius sit quàm H: (quod est utrumque ab utroque vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere) ita ut in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, id est, ut nunquam E, minus sit quàm G, quin & F, minus sit quàm H; & ut nunquam E, æquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit æquale; Denique ut nunquam E, maius sit quàm G, quin & F, maius sit, quàm H. Si, inquam, deprehensum fuerit, æquè multiplicia quævis accepta, perpetuò sese ita habere, ut dictum est, dicetur eadem esse proportio prima magnitudinis A, ad secundam magnitudinem B, qua est proportio tertia magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quod si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex E, deficere à multiplici G, non autem multiplex F, deficere à multiplici H, aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamvis in infinitis aliis multiplicibus conditio prædicta reperiat, nulla ratione dicetur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diuersas, ut ex defin. 8. fiet perspicuum.

Quod si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex E, deficere à multiplici G, non autem multiplex F, deficere à multiplici H, aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamvis in infinitis aliis multiplicibus conditio prædicta reperiat, nulla ratione dicetur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diuersas, ut ex defin. 8. fiet perspicuum.

ITAQ; ut demonstratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem per diligentem ab Euclide & hoc 5. lib. & in aliis seruat) quacunque æquè multiplicia prima, & tertia collata cum quibuscunque æquè multiplicibus secunda, & quarta, habere semper conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut excessus; ita ut nunquam contrarium eius inueniri possit. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoq; necesse est, qualibet æquè multiplicia prima, & tertia collata cū quibuscunque æquè multiplicibus secunda, & quarta, habere eandem defectus, æqualitatis, aut excessus conditionem. Debent enim definitio & definitum reciprocari. Ut autem perspiciatur quonam pacto, propositis quatuor magnitudinibus eandem

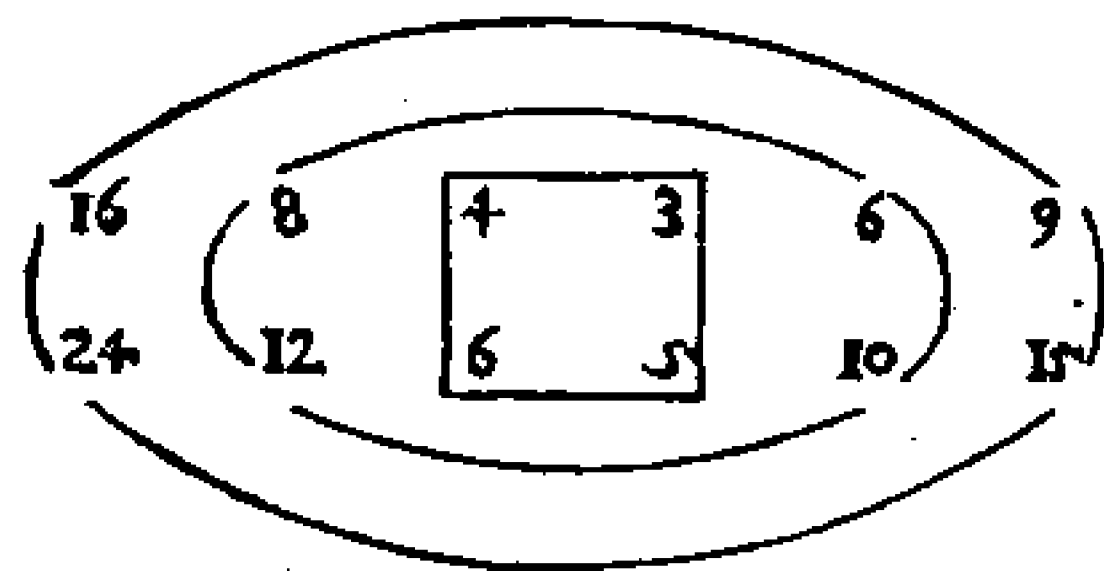
eandem proportionem habentibus: quædam æquæ multipliciæ prima, & tertia magnitudinis, à quibusdam æquæ multiplicibus secunda & quarta magnitudinis, utrumque ab utroque, vna deficiant; alia verò vna æqualia sint; alia denique, vna excedant, si ea sumantur, quæ inter se respondent: placet vnum exemplum proferre



in numeris. Sint igitur 4. numeri 3. 2. 6. 4. sumanturque primi & tertij æquæ multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item secundi & quarti sumantur alij æquæ multiplices, ut septupli 14. & 28. Vides igitur tam 12. multiplicem primi deficere à 14. multiplice secundi, quam 24. multiplicem tertij à 28. multiplice quarti. Rursus primi & tertij sumantur alij æquæ multiplices, nimirum sexupli, 18. & 36. Itē secundi & quarti sumantur alij æquæ multiplices, ut novicupli 18. & 36. Vides ergo, tam 18. multiplicem primi æqualem esse 18. multiplici secundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Postremo primi & tertij sumantur alij æ-

quæ multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item secundi, & quarti alij æquæ multiplices, ut dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quam 18. multiplicem tertij, superare 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æquæ multiplicibus, in quacunque sumantur multiplicatione, semper deprehendatur, vnum trium horum verum esse, dicetur eadem esse proportio 3. ad 2. qua est 6. ad 4. aliàs non.

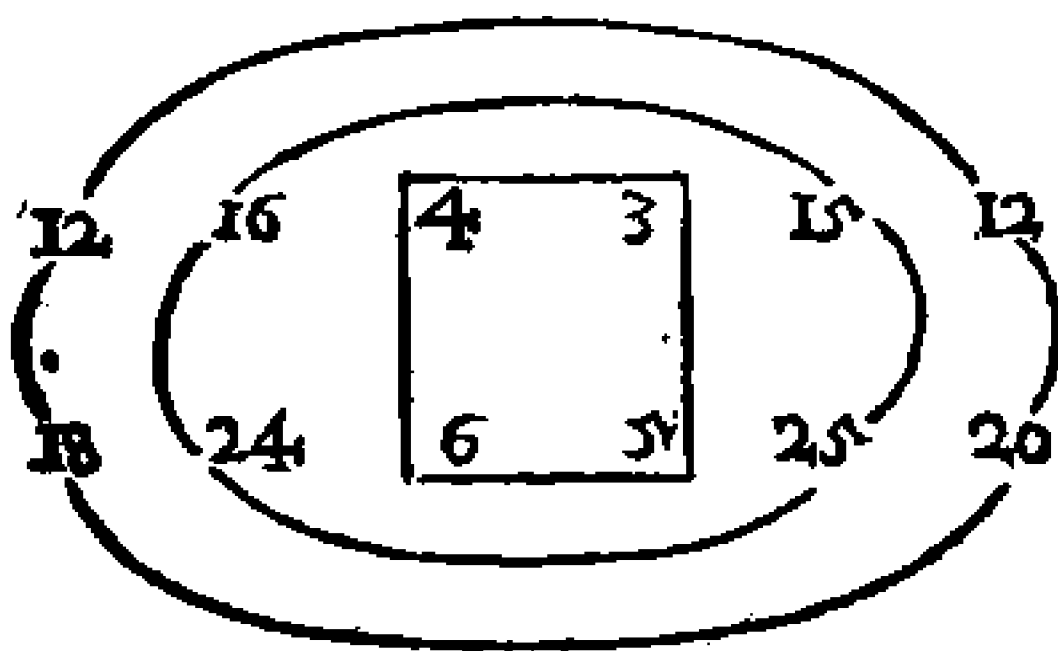
CAMPANVS verò atque Orontius, longè aliter definitionem hanc exponunt. Dicunt enim Euclidem velle tum demum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cum prima & tertia æquæ multipliciæ, à secunda & quarta æquæ multiplicibus, utrumque ab utroque, vel vna deficiunt proportionaliter, hoc est, in eadem proportionem, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt proportionaliter, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Clarius, ut ait Campanus, quando earum æquæ multipliciæ proportionalia sunt, id est, cum eandem proportionem habet multiplex prima ad multiplex secundam, quæ multiplex tertia ad multiplex quartam. Sed quis non videt, si ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod sanè absurdum est. Præterea si Euclides vult, eas magnitudines in eadem esse proportionem, quarum æquæ multipliciæ (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadem proportionem existunt; cur obsecro in 4. Theoremate huius libri demonstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportionem, earum æquæ multipliciæ eo ordine, quem diximus, sumptæ, eandem quoque habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionem ostendatur, perspicuum est idem per idem demonstrari, quod ridiculum est, veluti eo loco adponemus. Accedit etiam si ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata 5. huius lib. non posse demonstrari, ut proprijs locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, ut exposuimus; nimirum propositis quatuor magnitudinibus, si quotiescunque multiplex prima deficit à multiplici secunda, vel æquale est, vel excedit; necessariò etiam multiplex tertia tunc deficiat à multiplici quarta, vel æquale sit, vel excedat, quicumque sit ille defectus, excessusve, non considerando, an proportionalis sit, an non; ita ut nunquam contingat, multiplicem primam à multiplici secunda deficere, multiplicem verò tertiam non deficere à multiplici quarta: Atque multiplicem primam æqualem esse multiplici secunda, multiplicem verò tertiam multiplici quarta non æqualem: aut denique multiplicem primam maiorem esse multiplice secunda, at multiplicem tertiam multiplice quarta non maiorem. Propositus, inquam, quatuor magnitudinibus, quarum æquæ multipliciæ sumptæ, ut dictum est, perpetuò eam conditionem in defectu, æqualitate, & excessu seruant; dicuntur quatuor illa magnitudines eandem habere proportionem; quicquid sit de earum æquæ multiplicium proportionem, quæ nunc non consideratur: sed quarto postea Theoremate demonstrabitur, eum defectum, excessumve esse proportionalem.



PORRO Campanus conatur ostendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nam si de quocunque intelligeretur, essent, ait, quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadē proportionem. Si enim primi & tertij, verpotè 4. & 6. sumantur æquæ multiplices numeri, ut dupli, 8. & 12. Item secundi & quarti, nempe 3. & 5. æquæ multiplices, ut dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplice secundi, quam 12. multiplex tertij, 10. multiplice quarti. Idemque cernitur si primi, & ter-

tij sumantur quadrupli 16. & 24. secundi verò ac quarti, capiantur tripli 9. & 15. Si igitur sufficit, ut æquæ multipliciæ acceptæ vna excedant sese quomodocunque, & non requiritur ut proportionaliter se mutuo superent, erit eadē proportio 4. ad 3. qua est 6. ad 5. quod falsum est, cum proportio 4. ad 3. sit sesquitertia: proportio verò 6. ad 5. sesquiquinta. Intelligendus igitur est excessus, aut defectus æquæ multiplicium proportionalis. Ita enim fiet, non esse eandem proportionem 4. ad 3. qua est 6. ad 5. quod eorum æquæ multiplices non sese excedant proportionaliter, ut constat. Veruntamen dicendum est, Campanum mirum in modum hallucinatum fuisse.

Quamvis enim numeri aequè multiplices ab eo prolati sese vna excedant; tamen quamplurimi alij reperientur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem secundi, vel equalis erit; at multiplex tertij deficiet à multiplice quarti. Si enim in eius exemplo primi & tertij sumantur quadruplices 16. & 24. At secundi & quarti, quincuplices sumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem secundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, sed deficiet. Quod si primi & tertij sumantur tripli 12. & 18. At secundi, & quarti sumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi equalis 12. multiplici secundi; At verò 18. multiplex tertij, equalis nō erit 20. multiplici quarti, sed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur qualibet aequè multiplicia dictorum numerorum sic se habere, ut si multiplex primi excedit multiplex secundi, multiplex tertij excedat quoque, necessario multiplex quarti; quamvis id in nonnullis aequè multiplicibus ita esse contingat; non dicentur, iuxta hanc definitionē 6. dicti numeri eandem habere proportionem, ut adhuc, clarius constabit ex 8. definitione.

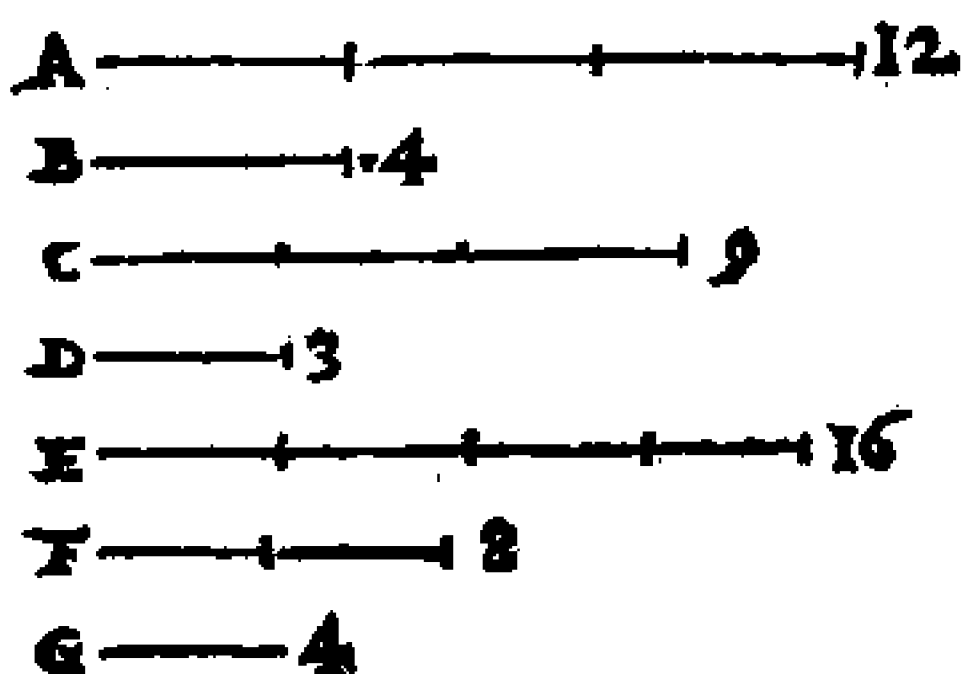


dantur qualibet aequè multiplicia dictorum numerorum sic se habere, ut si multiplex primi excedit multiplex secundi, multiplex tertij excedat quoque, necessario multiplex quarti; quamvis id in nonnullis aequè multiplicibus ita esse contingat; non dicentur, iuxta hanc definitionē 6. dicti numeri eandem habere proportionem, ut adhuc, clarius constabit ex 8. definitione.

CÆTERVM definitio ista complectitur etiam tres magnitudines eandem habentes proportionem, si modo secunda bis ponatur, ut quatuor habeantur. Exempli causa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam aequè multiplicia quæcunque sumpta ad 9. & 6. vel vna deficiunt ab aequè multiplicibus sumptis ad 6. & 4. vel equalia sunt, vel vna excedunt, &c.

V I I.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines. Proportionales vocentur.



Ut si magnitudinum A, B, C, D, eadem sit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur ea magnitudines proportionales. Eadem ratione, si eadem sit proportio E, ad F, quæ F, ad G; dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales continuæ, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales sunt magnitudines E, F, G; Quædam verò proportionales sunt non continuæ, sed discretæ, cuiusmodi sunt magnitudines A, B, C, D. In his enim incertum sit proportionum; in illis verò nequaquam, ut dictum est in 4. definitione.

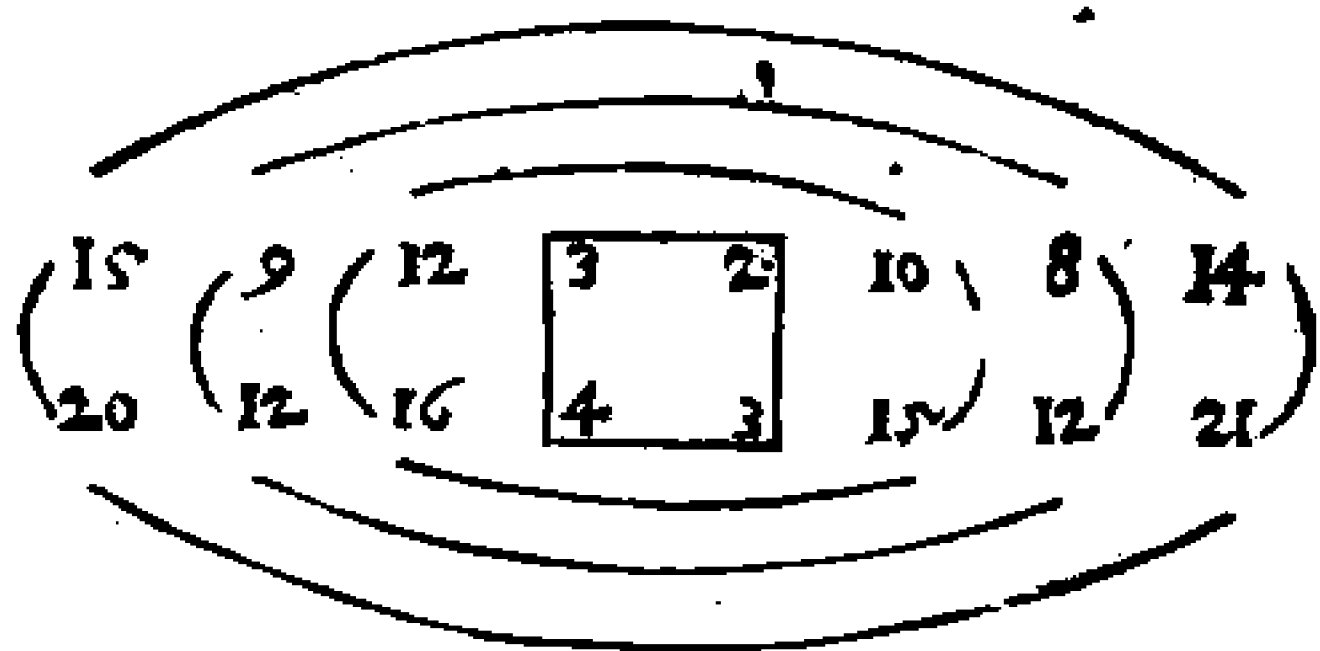
V I I I.

CVM verò æquè multiplicium multiplex primæ magnitudinis excefferit multiplicem secundæ; At multiplex tertix non excefferit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quàm tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, ut maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quàm tertia ad quartam, dicens: Si sumpta sint æquè multiplicia prima & tertia. Item alia æquè multiplicia secunda & quarta; deprehensumque fuerit aliquando, (licet nō semper) multiplex prima maius esse multiplice secunda, multiplex autem tertia non esse maius multiplice quarta, sed vel minus, vel æquale; dicetur maior esse proportio prima magnitudinis ad secundam, quàm tertia ad quartam: ut perspicuum est in apposito exemplo, in quo prima magnitudinis A, & tertia C, sumpta sunt triplicia E, & F; secunda verò B, & quarta D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E, multiplex prima maius quidem est, quàm G, multiplex secunda; At F, multiplex tertia maius non est, quàm H, multiplex quarta, immò minus; dicetur maior esse proportio A, primæ magnitudinis, ad B, secundam, quàm C, tertia, ad D, quartam.

NON est autem necesse, ut quatuor magnitudinum, prima ad secundam dicatur maiorem habere proportionem, quàm tertia ad quartam, æquè multiplicia secundum quamvis multiplicationem sic se habere, ut multiplex quidem prima excedat multiplex secunda, at multiplex tertia non excedat multiplex quarta; sed satis est, ut secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque interdum fieri, ut tam multiplex prima maius sit multiplice secunda, quàm multiplex tertia multiplice quarta: Item ut & multiplex prima minus sit multiplice secunda, & multiplex tertia multiplice quarta: Tamē quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex prima superat quidem multiplex secunda, at multiplex tertia vel minus est, vel æquale multiplici quarta: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quàm tertia ad quartam; non autem eandem, ut perspicuum est in apposito exemplo.

contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex prima superat quidem multiplex secunda, at multiplex tertia vel minus est, vel æquale multiplici quarta: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quàm tertia ad quartam; non autem eandem, ut perspicuum est in apposito exemplo.



Itaque ut quatuor magnitudines dicantur proportionales, necesse est ut aequimultiplicia earum, iuxta quasui multiplicationes accepta, vel una deficiat, vel una equalia sint, vel una excedat, ut in 6. defin. fuit expositum. Ut autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam quam tertia ad quartam, satis est ut secundum aliquam multiplicationem, multiplex prima excedat multiplex secunda, multiplex vero tertia non superet multiplex quarta; quamvis iuxta innumeras alias multiplicationes, aequimultiplicia prima, ac tertia una excedant aequimultiplicia secunda, & quarta.

Quod si quando e contrario multiplex prima deficiat a multiplici secunda, non autem multiplex tertia a multiplici quarta; dicetur prima magnitudo ad secundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam; quamvis secundum plurimas alias multiplicationes, aequimultiplicia prima & tertia una deficiant ab aequimultiplicibus secunda, & quarta. Ut in eisdem numeris propositi exempli, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. & c.

CVR EUCLIDES IN DEFIN. VI. ET VIII. QUATVOR MAGNITVDINES PROPORTIONALES, ET NON PROPORTIONALES PER EARVM AEQVE MULTIPlicia definierit.

Quoniam mirum alicui videri possit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc est, ita esse primam ad secundam, ut est tertia ad quartam, cum aequimultiplicia prima ac tertia iuxta quamcunque multiplicationem, & aequimultiplicia secunda ac quarta iuxta quamcunque, etiam multiplicatione accepta ita se habent, ut quotiescunque, multiplex prima maius est quam multiplex secunda, multiplex quoque tertia maius sit quam multiplex quarta; quotiescunque, vero multiplex prima aequale est multiplici secunda, multiplex etiam tertia aequale sit multiplici quarta; quotiescunque, denique, multiplex prima minus est quam multiplex secunda, multiplex etiam tertia minus sit quam multiplex quarta: item quare tum demum quatuor magnitudinum prima ad secundam maiorem esse proportionem voluerit, quam tertia ad quartam, cum aliqua aequimultiplicia prima ac tertia, & alia aequimultiplicia secunda ac quarta accepta ita se habent, ut multiplex prima sit maius quam multiplex secunda: at multiplex tertia maius non sit, quam multiplex quarta, sed vel aequale, vel minus. Quoniam, inquam, mirum alicui videri hoc possit, quod ex illo excessu, aequalitate, & defectu aequimultiplicium eo ordine sumptorum non statim appareat similitudo proportionum, dissimilitudoque: aperiendum videtur hoc loco, quare ita magnitudines tum proportionales, tum non proportionales definire voluerit Euclides.

Ad hanc difficultatem respondetur, Euclidem eas magnitudines voluisse appellare proportionales, quarum aequimultiplicia ita se habent, ut dictum est; quia non habuit quid notius, per quod explicare potuisset magnitudines tam incommensurabiles, quam commensurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neque vero opus esse, ut ratio asseratur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur, sed satis esse, ut nunquam res definita asseratur alicui convenire, nisi prius definitionem traditam eidem convenire, demonstretur. Id quod in alijs etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin. 10. lib. 1. angulum rectum appellavit eum, qui sit a linea super aliam lineam ad angulos aequales cadente, ita ut nunquam ei concedendum sit, angulum quempiam esse rectum, nisi prius ostenderit, eum ab eiusmodi linea effici. Item quemadmodum definitione ultima lib. 3. definiuit similia circulorum segmenta esse, in quibus anguli existentes sunt aequales, ita ut tunc solum ei concedendum sit, segmenta esse similia, cum probauerit angulos in eis existentes esse aequales: sic etiam defin. 6. & 8. huius lib. vocavit quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, quarum aequimultiplicia eam conditionem habet, quam explicauit, ita ut nunquam ei credendum sit, cum quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionem, vel non eandem, nisi prius demonstrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus convenire. Sed quanquam responsio hac vera sit, ac propria, tamen quia ex illa definitione non videtur colligi posse, verè magnitudines, quarum aequimultiplicia illam conditionem habent, esse proportionales, vel non proportionales, etiam si eas solum Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulò accuratius, Euclidem rectè eo modo definiuisse magnitudines proportionales, & non proportionales, atque adeo sine ulla dubitatione cõcedi posse à quouis, illas, quibus defin. 6. convenit, verè eandem habere proportionem; illas vero, quibus definitio 8. convenit, non eandem proportionem habere.

Quod ut planius fiat, reuocandum ad memoriam est, duplicem esse proportionem, Rationalem, qua inter quantitates cõmensurabiles existit, atque adeo omnis in numeris reperiri potest. Et irrationalem, qua inter quantitates incommensurabiles existit, & nullo modo in numeris potest reperiri. Si igitur Euclides de Rationalibus duntaxat proportionibus, disputationem instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo modo,

modo, quo lib. 7. defin. 20. proportionales quatuor numeros definiuit, nimirum: Magnitudines proportionales sunt, cum prima secunda, & tertia quarta, æquè multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes, Vel certè (vt nos ad eam defin. addidimus) cū prima secundam, & tertia quartā æqualiter cōtinet, eandemq; insuper illius partē, vel easdem partes. Non proportionales verò magnitudines ita definire potuisset: Magnitudines nō proportionales sunt, hoc est, prima ad secundam habet maiorem proportionem, quā tertia ad quartam, cū prima secunda magis multiplex est, vel maior pars, maiorēve partes, q̄ tertia quarta: Vel certè cū prima secundam sapius continet, quā tertia quartā, siue eadem pars, aut partes vtroque supersint, siue nō: Vel cū prima secundam toties continet, quoties tertia quartam, sed prima maiorem insuper partem, maiorēve partes secunda includit, quā tertia quarta. Potuisset, inquam, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac non proportionales, si de solis rationalibus proportionibus ageret: quia omnes proportionēs magnitudinum exhiberi possent in numeris, ac proinde definiri, vt numerorum proportionēs eadem, vel diuersæ, vt diximus. Nam proportio numerorum (vt ex Campano, alijsq; scriptoribus, defin. 24. lib. 7. adunximus) est habitudo quadam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partēve: Vel certè secundum quod illum cōtinet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes. Quæ omnia perspicua sunt, tum ex definitionibus quinque specierum proportionū rationalis tam maioris inæqualitatis, quā minoris inæqualitatis, de quibus supra egimus, tum ex ijs, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. scripsimus.

Quoniam verò Euclides non solum proportionēs Rationales, sed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quod in proportionē irrationali maior magnitudo neq; multiplex esse potest minoris, neq; eam semel aut aliquoties, & insuper aliquam eius partem aut partes continere: Minor item maioris neq; pars esse potest, neq; partes; quippe cū magnitudines irrationalem habentes proportionem incommensurabiles sint, ita vt nullam partem aliquotam communem, quamuis minimam, possint habere. Quocirca coactus est si se conuertere ad proportionēs magnitudinum rationales, hoc est, ad proportionēs numerorum, cū omnis proportio rationalis, siue magnitudinum commensurabilium sit, vt proportio numeri ad numerum, vt lib. 10. propos. 5. demonstratur: Coactus, inquam, est inuestigare aliquid, quod certum sit conuenire quibuslibet quatuor numeris, siue magnitudinibus commensurabilibus eandem habentibus proportionem, vel non eandem: adeo vt, si idem illud conuenire demonstretur quatuor magnitudinibus, etiam incommensurabilibus, iure optimo magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici possint, vel non proportionales: quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatuor numeri proportionales, vel non proportionales, immo quam quælibet quatuor magnitudines commensurabiles, eandem habentes proportionem, vel non eandem, necessariò habere demonstratur. Neq; enim aliunde cognoscere, vel explicare aliter possumus magnitudines incommensurabiles proportionales esse, aut non proportionales, nisi per aliquid, quod certum sit conuenire, vt diximus, numeris quibuslibet, vel magnitudinibus commensurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus euidenter similitudo, dissimilitudine proportionum cernitur. Quemadmodum quia, quando in circulo segmenti anguli æquales existentes, sunt commensurabiles quatuor rectis, hoc est, quando sunt eadem pars, vel eadem partes quatuor rectorū, sunt quoq; ipsa segmenta eadem pars, vel eadem partes circuloꝝ, vt ad finem lib. 6. demonstrabimus. vt merito similia appellentur, ac propterea & omnia segmenta alia, in quibus sunt anguli æquales, etiam si non sint commensurabiles quatuor rectis, dicantur quoq; similia: quandoquidem, quando anguli quatuor rectis commensurabiles sunt, verè illa segmenta similia sunt, hoc est, eadem pars, vel eadem partes circuloꝝ, licet hoc in segmentis, quādo anguli in eis existentes quatuor rectis sunt incommensurabiles, nō cernatur, q̄ tunc segmenta neq; eadem pars, neq; eadem partes possint esse circuloꝝ, sed ipsis circulis omnino incommensurabilia existant. Neq; enim aliud indicium habere possumus segmenta similia esse, aut dissimilia, nisi angulorum in eis existentium æqualitatem, vel inæqualitatem, ex qua veram similitudinem, aut dissimilitudinem segmentorum circulis commensurabilium colligimus. Quam ob rem sicut nemo similitudinem hanc segmentorum in dubium reuocat, quanquam hac similitudo in segmentis, quæ circulis incommensurabilia sunt, non ita euidenter appareat, vt in segmentis quæ circulis sunt commensurabilia; ita non rectè fecerit, qui similitudinem proportionum in magnitudinibus incommensurabilibus in dubium reuocet, quando comperiet, illis conuenire, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus, conuenire certum sit, licet hac proportionum similitudo non tam euidentis sit in magnitudinibus incommensurabilibus.

Itaque quoniam, propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisq; primi ac tertij æquè multiplicibus, iuxta quamuis multiplicationem, item secundi ac quarti æquè multiplicibus secundum quamuis etiam multiplicationem, semper verum est, vt mox demonstrabimus, si multiplex primi maior est multiplice secundi, multiplicem tertij maiorē quoq; esse necessariò multiplice quarti; Et si ille æqualis est, hunc quoque esse æqualem; & si minor, minorem: Et contra quia, propositis quatuor numeris, sumptis æquè multiplicibus primi ac tertij iuxta quāuis multiplicationem, item æquè multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quā multiplex secundi, multiplex tertij maior quoq; sit, quā multiplex quarti; Et si illo existente æquali, hic quoque æqualis sit; & si illo existente minore, hic similiter minor existat: perpetuò verum est, quatuor illos numeros esse proportionales. Rursus,

quia

quia propositis quatuor numeris, quorum primus ad secundum maiorem proportionem habeat, quam tertius ad quartum, sumptisq; æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus secundi ac quarti, necessario interdum accidit, ut multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex verò tertij non sit maior multiplice quarti: Et contra, quia quatuor propositis numeris, sumptisq; æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus secundi ac quarti, si accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, ac multiplicem tertij non maiorem multiplice quarti, sine vlla dubitatione verum est, maiorem esse proportionem primi ad secundum, quam tertij ad quartum. Quoniam, inquam, ita se res semper habet, in numeris, atq; adeo & in magnitudinibus commensurabilibus, ita ut contrarium nunquam inueniatur, non immerito dicentur quacunque quatuor magnitudines, etiam incommensurabiles, eandem habere proportionem, cum sumptis æquemultiplicibus prima ac tertia iuxta quamvis multiplicationem, item æquemultiplicibus secunda ac quarta, secundum quamvis etiam multiplicationem, perpetuo deprehenditur, multiplicem tertie maiorem esse multiplice quarta, quotiescunq; multiplex prima maior est multiplice secunda; multiplicem verò tertia æqualem esse multiplici quarta, quando multiplex prima æqualis est multiplici secunda; multiplicem denique tertia minorem esse multiplice quarta, hoc ipso, quod multiplex prima minor est multiplice secunda. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quacunque magnitudines tam commensurabiles, quam incommensurabiles, non habere eandem proportionem, sed maiorem esse proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, cum, sumptis æquemultiplicibus, ut dictum est, interdum contingit, multiplicem prima esse maiorem multiplice secunda, multiplicem verò tertia non maiorem multiplice quarta: quandoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, posterior autem in non proportionalibus perpetuo reperitur, ut iam iam demonstrabimus; nullumq; aliud indicium habere possumus, quo magnitudines incommensurabiles cognoscantur, esse proportionales, vel non proportionales: praesertim cum magnitudines incommensurabiles alijs magnitudinibus, quæ hoc modo proportionales esse demonstrantur, sæpenumero alia via ostendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, ut nullo modo dubitandum si, quin omnes magnitudines, etiam incommensurabiles, quarum æquemultiplices ita se habent, ut in 6. defin. dictum est, sint proportionales, &c. Nisi enim hoc verum esset, sequeretur haud dubie ex illa proportionalitate aliquando absurdum aliquod manifestum: quod tamen hactenus non accidit, sed potius ea, quæ ex magnitudinibus in eo sensu proportionalibus demonstrantur verissima esse plerumque alia via, ut diximus, ostenduntur; ut postea etiam demonstrabimus. Quæ cum ita sint, liquidò constare existimo, cur Euclides in duabus illis definitionibus adhibuerit (& quidem rectè) magnitudinum propositarum æquemultiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti sumus, Geometricè demonstremus, adscitis nonnullis propositionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. defin. aut ex demonstrationibus huius lib. 5. pendent, ut commodissime ante librū 5, possint demonstrari; atque adeo hic assumi, ut iam demonstrata. Hoc autem efficiemus quatuor propositionibus, quæ sequuntur.

I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, sumptisq; primi ac tertij æquemultiplicibus iuxta quamvis multiplicationem, item secundi & quarti æquemultiplicibus iuxta quancunque etiam multiplicationem; si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit quoque multiplex tertij maior multiplice quarti; & si multiplex primi æqualis sit multiplici secundi, erit & multiplex tertij æqualis multiplici quarti; si denique multiplex primi sit multiplice secundi minor, erit & multiplex tertij multiplice quarti minor.

HABEAT numerus primus A, ad secundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; sumanturq; primi A, & tertij C, æquemultiplices E, F: Item secundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H,

| | | | |
|--------|-------|-------|--------|
| E, 9. | A, 3. | C, 6. | F, 18. |
| G, 4. | B, 2. | D, 4. | H, 8. |
| E, 18. | A, 3. | C, 6. | F, 36. |
| G, 18. | B, 2. | D, 4. | H, 36. |
| E, 12. | A, 3. | C, 6. | F, 24. |
| G, 14. | B, 2. | D, 4. | H, 28. |

qualiscunque hac multiplicatio sit. Dico si E, multiplex primi A, maior est, quam G, multiplex secundi B, maiorem quoq; esse F, multiplicem tertij C, quam H, multiplicem quarti D. Et si E, æqualis sit ipsi G, æqualem quoque esse F, ipsi H. Si deniq; E, minor sit quam G, minorem quoq; esse F, quam H. Quoniam enim est, ut A, ad B, ita C, ad D; ^a erit permutando etiam, ut A, ad C, ita B, ad D: ^b Ut autem A, ad C, ita est E, ad F; quod idem numerus ipsos A, C, multiplicans produxerit ipsos E, F, quippe cum E, & F, ipsorum A, & C, sumpti sint æquemultiplices. Et eadem de causa, ut B, ad D, ita est G, ad H. Igitur ex lemmate propof.

14. lib. 7. erit quoq; ut E, ad F, ita G, ad H; ^c Et permutando ut

E, ad G, ita F, ad H. Quocirca si E, maior est quam G, erit quoq; F, maior quam H, ut in primo exemplo. Si vero F, æqualis est ipsi G, erit quoq; F, ipsi H, æqualis, ut in secundo exemplo: Si deniq; E, minor est quam G, erit quoq; F, minor quam H, ut in tertio exemplo. Quod erat demonstrandum.

II.

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita ut maior sit proportio pri-

a 13. septi.

mi.

b 17. septi.

mi.

c 13. septi.

mi.

mi ad secundum, quàm tertij ad quartum, si sumantur æquemultiplices primi ad tertij, item æquemultiplices secundi ac quarti, fieri potest, ut multiplex primi maior sit, quàm multiplex secundi, multiplex autem tertij non maior, quàm multiplex quarti.

HABEAT primus numerus A, ad secundum B, maiorem proportionem, quàm tertius C, ad quartum D. Dico fieri posse, ut sumptis æquemultiplicibus primi A, & tertij C, item æquemultiplicibus secundi B, & quar-

| | | | |
|---------|---------|--------|--------|
| K, 56. | H, 7. | O, 21. | I, 28. |
| F, 8. | G, 1. | A, 3. | C, 4. |
| | E, 6. | B, 2. | D, 3. |
| M, 54. | N, 6. | P, 20. | L, 30. |
| K, 160. | H, 440. | O, 60. | I, 20. |
| F, 8. | G, 22. | A, 3. | C, 1. |
| | E, 80. | B, 8. | D, 10. |
| M, 160. | N, 80. | P, 24. | L, 30. |

a 19. septi-
mi.

ti D, multiplex ipsius A, primi sit maior, quàm multiplex ipsius B, secundi; at multiplex ipsius C, tertij maior non sit, quàm multiplex ipsius D, quarti. Multiplicantes enim se mutuo numeri B, D, faciant E. Et quoniam D, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque D, eundem genitum ex C, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur D, genitum ex C, in E, per F; fiet q, propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc est, numerus idē, qui sit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum; qui ex C, secundo sit in E, tertium; ^a erit ut D, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad F; quartum: Et conuertendo, ut C, ad D, ita F, ad E.

RURSUS quia B, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoq, B, eundem procreatum ex A, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur B, procreatum ex A, in E, per F, G; fiet q, idcirco ex B, in F, G, numerus, quem B, metitur per F, G, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui sit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in F, G, quartum, & ex A, secundo in E, tertium gignitur, ^b erit ut B, primus ad A, secundum, ita E, tertius ad F, G, quartum: Et conuertendo, ut A, ad B, ita F, G, ad E. Quoniam ergo est, ut F, G, ad E, ita A, ad B: Est autem proportio A, ad B, posita maior quàm C, ad D; erit quoq, proportio F, G, ad E, maior quàm C, ad D: Ostensum autem est, esse ut C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio F, G, ad E, maior quoq, erit proportione F, ad E, ac proinde numerus F, G, maior erit numero F: quæ omnia ex hīs, quæ in defin. 20. lib. 7. scripsimus, perspicue consequuntur. Superet igitur F, G, ipsum F, numero G.

b 19. septi-
mi.

SUMANTUR iam ipsorum F, G, C, æquæ multiplices K, H, I, ea lege, ut H, sit quidē maior q, E, at I, non minor quàm D. Erit q, ex scholio propof. 5. lib. 7. totus K, H, ita multiplex totius F, G, ut est multiplex K, ipsius F, vel I, ipsius C. Sumantur rursus ipsorum D, E, æquæ multiplices L, M, N, ea lege, ut I, sit multiplex ipsius D, proximè maior, quàm I; hoc est, tales æquæ multiplices, ut subtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non sit, quàm I, sed vel æqualis, ut in secundo exemplo, vel minor; ut in primo exemplo contingit. Et quoniam ostensum est ita esse D, ad C, ut E, ad F: & ita est C, ad I, ut F, ad K, ex constructione, quod I, K, sumpti sint ipsorum C, F, æquemultiplices; ^c erit quoque ex æquo, ut D, ad I, ita E, ad K.

c 14. septi-
mi.

PRAETerea quoniam ostensum est esse D, ad C, ut E, ad F; erit permutando quoque D, ad F, ut C, ad E. Ut autem D, ad E, ita est I, ad M, N; quod idem numerus ipsos D, E, multiplicans fecerit L, M, N, quippe cum L, M, N, sumpti sint ipsorum D, E, æquemultiplices: Et eadem de causa, ut C, ad F, ita est I, ad K. Igitur ex lemmate propof. 14. lib. 7. erit quoque, ut L, ad M, N, ita I, ad K, & permutando, ut L, ad I, ita M, N, ad K.

Quia ergo est, ut totus L, ad I, ita totus M, N, ad K: Et ut D, ex L, ablatu ad eundem I, ita E, ex M, N, ablatu ad eundem K erit quoq, ex theor. 6. scholij propof. 22. lib. 7. ut reliquus ex L, ad I, ut reliquus ex M, N, ad K: Est autem reliquus ex L, non maior quàm I, sed vel minor, ut in priori exemplo, vel æqualis, ut in posteriori; propterea quod reliquus ex L, cum D, facit ipsum L, multiplicem ipsius D, proximè maiorem ipso I, ex constructione. Igitur & reliquus ex M, N, maior non erit quàm K; atq, idcirco si ex M, N, detrahatur N, ipsi E, æqualis erit reliquus M, vel minor ipso K, ut in priori exēplo; vel æqualis, ut in posteriori. Cum ergo H, multiplex ipsius G, sit maior quàm E, vel N, ex constructione; erit totus K, H, toto M, N, maior.

DEINDE sumpro O, ita multiplici ipsius A, ut K, H, multiplex est ipsius F, G, vel I, ipsius C; item P, ita multiplici ipsius B, ut M, N, multiplex est ipsius E, vel L, ipsius D: quoniam ostensum est, ita esse F, G, ad E, ut A, ad B, sumpti q, sunt ipsorum F, G, & A, primi ac tertij, æquemultiplices K, H, & O, item ipsorum E, & B, secundi ac quarti, æquemultiplices M, N, & P, sequitur ex antecedente propof. si K, H, maior est quàm M, N, ipsum quoq, O, maiore esse quàm P. Cum ergo K, H, ostensu sit maior quàm M, N, erit quoq, O, maior quàm P. Quocirca cum O, I, sint æquemultiplices ipsorum A, C, primi ac tertij, & P, L, æquemultiplices ipsorum B, D, secundi ac quarti, demonstratum q, sit, maiore esse O, quàm P, sit, aut I, minor quàm L, ex constructione fieri potest, ut existere maiore proportione primi A, ad secundum B, quàm tertij C, ad D, quartum, sumptis q, æquemultiplicibus, ut dictum est, multiplex primi nimirum O, maior sit quàm P, multiplex secundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non sit quàm L, multiplex quarti. Quod demonstrandum erat.

Quod si minor sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, sumantur q, æquemultiplices primi

primi ac tertij, item æquemultiplices secundi ac quarti, fieri quoque potest, ut nonnunquam multiplex primi sit minor multiplice secundi, multiplex verò tertij non sit multiplice quarti minor.

In eodem enim exemplo, minor est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum: demonstratum est, I, multiplicem primi C, minorem esse, quàm L, multiplicem secundi D, at O, multiplicem tertij A, minorem esse quàm P, multiplicem quarti B.

III.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamvis multiplicationem, item æquemultiplicibus secundi ac quarti iuxta quamvis etiam multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit necessario, quàm multiplex quarti: & si illo existente æquali, hic quoque semper sit æqualis; illo denique existente minore, hic quoque perpetuò minor sit: Erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum.

| | | | |
|--------|-------|-------|--------|
| E, 9. | A, 3. | C, 6. | F, 18. |
| G, 4. | B, 2. | D, 4. | H, 8. |
| E, 18. | A, 3. | C, 6. | F, 36. |
| G, 18. | B, 2. | D, 4. | H, 36. |
| E, 12. | A, 3. | C, 6. | F, 24. |
| G, 14. | B, 2. | D, 4. | H, 28. |

SINTE quatuor numeri A, B, C, D, sumanturque primi A, & tertij C, æquemultiplices qualescunque E, F; Item secundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiscunque, etiam hæc sit multiplicatio. Dico si E, F, multiplices primi ac tertij semper sint vel maiores, quàm G, H, multiplices secundi & quarti, vel æquales, vel minores: ita esse A, primum ad B, secundum, ut C, tertium ad D, quartum. Si namque foret maior proportio A, ad B, vel minor, quàm C, ad D; fieri posset, veluti in antecedente propos. demonstratum est, ut E, multiplex primi esset aliquando maior, aut minor, quàm G, multiplex secundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor, quàm H, multiplex quarti. Quod est contra hypothe-

sin. Est ergo A, ad B, ut C, ad D. Quod erat ostendendum.

IIII.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque primi ac tertij æquemultiplicibus, item secundi & quarti æquemultiplicibus; si quando contingat, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, multiplicem verò tertij non maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

| | | | |
|--------|-------|-------|--------|
| E, 21. | A, 3. | C, 4. | F, 28. |
| G, 20. | B, 2. | D, 3. | H, 30. |

SINTE quatuor numeri A, B, C, D, sumptisque ipsorum A, & C, primi ac tertij æquemultiplicibus E, & F, item ipsorum B, & D, secundi ac quarti æquemultiplicibus G, & H, sit E, multiplex primi

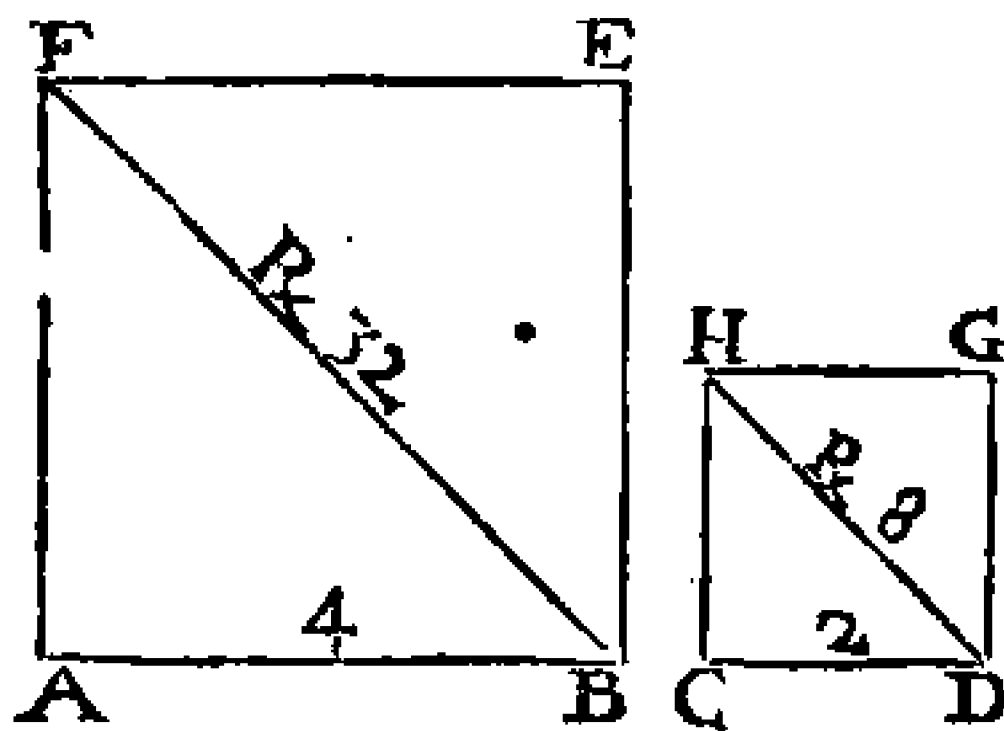
A, maior, quàm G, multiplex secundi B, at F, multiplex tertij C, non maior quàm H, multiplex quarti D. Dico maiorem esse proportionem primi A, ad B, secundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Quoniam enim maior est E, quàm G, at F, non maior quàm H; erit maior proportio E, ad G, quàm F, ad H, cum illa sit proportio maioris inæqualitatis, hæc verò vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Igitur ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. erit quoque permutando maior proportio E, ad F, quàm G, ad H. Est autem, ut E, ad F, ita A, ad C; quod idem numerus ipsos A, C, multiplicans procreauit E, & F, quippe cum E, F, æquemultiplices sint ipsorum A, C. Eademque de causa est, ut G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoque proportio A, ad C, quàm B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod ostendendum erat.

Quod si multiplex primi sit minor multiplice secundi, sed multiplex tertij non sit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

| | | | |
|--------|-------|-------|--------|
| E, 28. | A, 4. | C, 3. | F, 21. |
| G, 30. | B, 3. | D, 2. | H, 20. |

EADDEM enim omnino demonstratio est, si pro maiore proportionem dicatur ubique minor proportio, nulla alia re mutata. Ut in hoc exemplo apparet, ubi quatuor numeri sunt A, B, C, D, & E, multiplex primi A, minor est, quàm G, multiplex secundi B, sed F, multiplex tertij C, minor non est, quàm H, multiplex quarti, &c.

SEDE demonstramus iam, in magnitudinibus, quæ alijs incommensurabiles sunt, & quæ ex definitione 6. proportionales sunt, eam plerunque reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi possit: adeo ut verè proportionales sint magnitudines, quibus definitio 6. conuenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo sensu sumptis verum consequitur, & nihil absurdi inde inferri potest. Hoc enim paulò antè demonstraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta AB, verbi gratia, recta CD, dupla, & super ipsas rectas describantur quadrata AB EF, CD GH; cum diametris BF, DH. Et quia ex scholio propos. 47. lib. 1. tam quadratum diametri BF, quadrati lateris AB, hoc est, quadrati AB EF, quàm



proportionales sunt, eam plerunque reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi possit: adeo ut verè proportionales sint magnitudines, quibus definitio 6. conuenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo sensu sumptis verum consequitur, & nihil absurdi inde inferri potest. Hoc enim paulò antè demonstraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta AB, verbi gratia, recta CD, dupla, & super ipsas rectas describantur quadrata AB EF, CD GH; cum diametris BF, DH. Et quia ex scholio propos. 47. lib. 1. tam quadratum diametri BF, quadrati lateris AB, hoc est, quadrati AB EF, quàm

quadratum diametri DH, quadrati lateris CD, hoc est, quadrati CDGH, duplum est; si ponatur latus AB, 4. & latus CD, 2. erit quadratum AB EF, 16. & quadratum diametri BF, eius duplum, 32. ac proinde diameter ipsa BF, erit radix quadrata numeri 32. quæ numeris exprimi nequit, cum ea maior sit, q̄ 5. minor autem q̄ 6. nullusq̄, numerus inter 5. & 6. medius, hoc est, cōpositus ex 5. & fractione aliqua unitatis, in se ductus possit numerum integrum 32. producere, ut ex Lemmate sequenti perspicuum fiet. Quadratum autē CDGH, erit 4. & quadratum diametri DH, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipsa DH, erit radix quadrata numeri 8. quæ numeris etiam exprimi nequit, cum ea maior sit, quàm 2. minor autē, quàm 3. & c. ita ut proportio tam AB, ad BF, quàm CD, ad DH, sit irrationalis, diameterq̄, propterea BF, lateri AB, & diameter DH, lateri CD, incommensurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propof. ult. lib. 10. demonstravit ex ijs, quæ lib. 6. de magnitudinibus proportionalibus per defn. 6. huius 5. lib. demonstrata sunt, Diametrum nimirum quadrati lateri eiusdem quadrati esse incommensurabilem, esse re ipsa verissimum, quippe cum idem nos alta via sine proportionibus hoc loco ostenderimus.

R V R S V S quoniam diametri BF, DH, diuidunt angulos rectos quadratorum bisariam, ut in scholio propof. 34. lib. 1. & in coroll. 2. propof. 4. lib. 2. ostendimus, erunt anguli ABF, AFB, CDH, CHD, semirecti, ideoq̄, inter se aequales. Cum igitur & recti anguli A, C, sint aequales, equiangula erunt triangula ABF, CDH. **a 4. sexu.** Quare ² crit, ut AB, ad BF, ita CD, ad DH. Et permutando ut AB, ad CD, ita BF, ad DH. Est autem posita recta AB, recta CD, dupla. Igitur & BF, ipsius DH, dupla erit. Itaq̄, cū ex defn. 6. huius lib. eò deducti simus, ut credamus diametrum BF, diametri DH, esse duplam, quamuis utraq̄, diameter ad suum latus habeat proportionem irrationalem, (Nam propof. 4. lib. 6. ex qua ostendimus, ita esse AB, ad BF, ut CD, ad DH, pendet ex propof. 2. & hac ex 1. eiusdem lib. 6. Prima autē propof. lib. 6. vim suam accipit ex defn. 6. huius 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam vsi sumus, sine eadem defn. 6. demonstrari non potest in magnitudinibus incommensurabilibus, ut ex propof. 16. lib. 5. constat.) videmus, an aliunde cognoscere possimus, diametrum BF, diametri DH, verè duplam esse, ut ex defn. 6. conclusum est, hoc ipso, q̄, latus AB, lateris CD, duplum ponitur, etiam si proportio tam lateris AB, ad diametrum BF, q̄, lateris CD, ad diametrum DH, irrationalis sit. Hoc autē sine proportionibus facile ita cognoscemus. Quoniam latus AB, lateris CD, duplum est, erit ex scholio propof. 4. lib. 2. quadratum AE, quadrati CG, quadruplum. Posito ergo quadrato AE, 4. crit quadratum CG, 1. Et quia ¹ quadratum diametri BF, quadrati AE, q̄, quadratum diametri DH, quadrati CG, ex scholio propof. 47. lib. 1. duplum est; erit quadratum diametri BF, 8. & quadratum diametri DH, 2. atq̄, idcirco illud huius quadruplum erit. Quocirca ex scholio propof. 4. lib. 2. recta BF, recta DH, dupla erit. Vides ergo rursus, si procedamus p̄ ea, quæ ex defn. 6. huius lib. de magnitudinibus proportionalibus demonstrata sunt, nos peruenisse ad conclusionē veram, nimirum diametros duorum quadratorū habere proportionem inter se duplam, si latus vnius sit lateris alterius duplum: ut dubium non sit, quin magnitudines verè proportionales sint, quarum æquemultiplicia eam conditionem habent, quam defn. 6. prescribit. Porro ex regulis quoq̄, numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, constat diametrum BF, hoc est, R. 32. habere duplam proportionem ad diametrum DH, id est, ad R. 8. Nam siue R. 32. diuidatur per R. 8. Quotiens sit R. 4. hoc est, numerus 2. qui proportionem diametri BF, ad diametrum DH, denotat: siue R. 8. multiplicetur per 2. produci-
tur R. 32. Atq̄, hoc modo omnia, quæ de magnitudinum incommensurabilium proportionibus demonstrantur ex defn. 6. huius lib. explicari poterunt per regulas numerorū irrationalium. Quæ res argumento rursus est, magnitudines, quibus defn. 6. huius lib. conuenit, verè esse proportionales; quandoquidem calculus numerorum irrationalium cum demonstrationibus, quæ ex ea defn. pendunt, perpetuo consentire comperitur, ut ijs, qui in Algebra præceptis versari sunt, notissimum est.

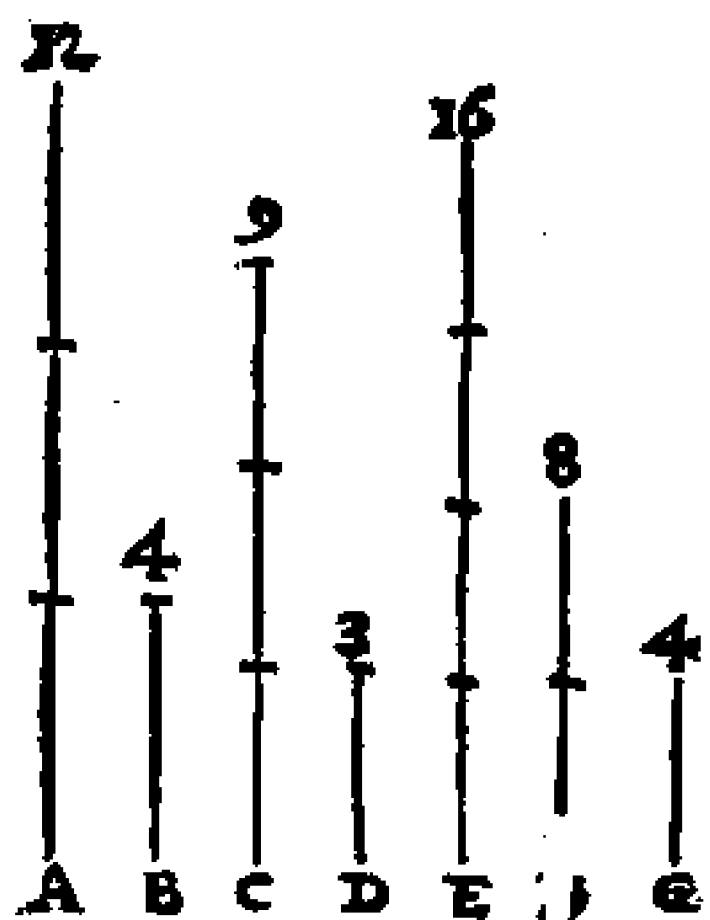
L E M M A.

Q U O D autē nullus numerus compositus ex 5. & fractione aliqua unitatis, quamuis unitas in infinitū secetur, gignere possit integrum numerum 32. hoc modo facile demonstrabimus. Sit enim numerus 5. cū quacungq̄, fractione $\frac{2}{7}$. hoc modo $5\frac{2}{7}$. reuoceturq̄, ut in Arithmetica tradidimus, ad hanc unicam fractionē $\frac{2}{7}$. Certum autē est, denominatorem 7. non metiri numeratorem 38. Alioquin diuisis 38. per 7. fieret Quoties numerus integer sine fractione, quod est contra hypothesin. Multiplicetur iam fractio $\frac{2}{7}$. in se, (quod fiet, ut in Arithmetica diximus, demonstrabimusq̄, ad finem lib. 9. si tam numerator 38. in se, q̄, denominator 7. in se ducatur.) gignaturq̄, fractio $\frac{14}{49}$. ita ut numerator huius 1444. sit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49. quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. non metitur latus 38. ut **b 16. octa.** ostendimus, ^b nō metietur quoq̄, quadratus 49. quadratum 1444. Quare diuiso quadrato 1444. per quadratum 49. Quotiens non erit numerus integer, sed ei adhærebit fractio aliqua. Aliis quadratus 49. metiretur quadratum 1444. cuius contrariū demonstrauimus. Atq̄, eadē ratione demonstrabitur, quemcungq̄, numerum integrum cum fractione qualibet in seipsum ductum gignere numerum integrum cū fractione. Quod si fractio, cuius numerator denominatore minor sit, in se ducatur, produci-
tur semper fractio, cuius numerator etiā minor est denominatore. Nā
cum

cum numerator fractionis producta sit numerus quadratus numeratoris data fractionis, denominator autem quadratus numerus denominatoris, sit autem data fractionis numerator minor denominatore; erit quoque illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{2}{3}$, in se gignitur fractus numerus $\frac{4}{9}$, cuius numerator denominatore minor est. Itaque quacunque fractio in se multiplicata gignit numerum non integrum, nisi quando numerator datae fractionis à denominatore numeratur, sed ea fractio numerus integer potius est: qualis est fractio $\frac{10}{2}$, quae 4. integras unitates constituit.

I X.

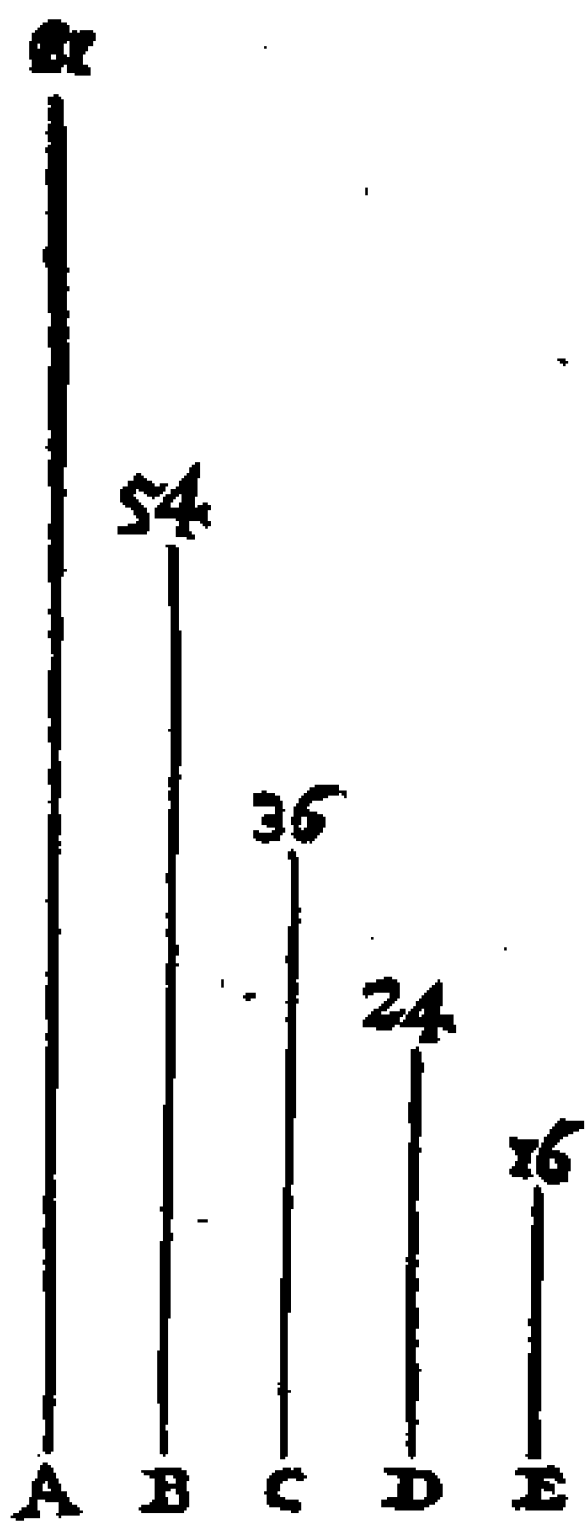
PROPORTIO autem in tribus terminis paucissimis consistit.



QUONIAM omnis Analogia, seu proportionalitas, quam interpres, ut dictum est, proportionē nominat, similitudo est duarum, ut plurimum proportionum; omnis autē proportio habet & antecedentem terminum, & consequentem, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, ut minimū, duos terminos antecedentes, ac duos consequentes. Quare si proportionalitas fuerit non continua, requiruntur saltē quatuor termini, siue magnitudines; At verò si fuerit continua, erunt cū minimū tres termini; quoniā terminus medius bis sumitur, cū sit consequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic est minimus numerus terminorū proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscunque, solū proportio, non autem proportionalitas reperitur.

X.

CUM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationē habere dicitur eius, quā habet ad secundam: At cū quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartā triplicatā rationē habere dicitur eius, quam habet ad secundā: Et semper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio existerit.



VELUT I si sint magnitudines A, B, C, D, E, cōtinuē proportionales, ita ut ea sit proportio A, ad B, quae B, ad C, & C, ad D, & D, ad E: Proportio A, magnitudinis primae ad C, magnitudinē tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quā habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinē secundam: quoniā inter A, & C, duae proportionēs reponuntur, quae aequales sunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C, ut propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionē A, ad B, duplicatā, id est, bis ordine positam. At proportio A, magnitudinis primae ad D, magnitudinē quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinē secundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportionēs, quae aequales sunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C, & C, ad D, atque idcirco proportio A, ad D, includit quodammodo proportionem A, ad B, triplicatam, id est, ter ordine positam. Sic quoque, proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportionēs interjiciuntur inter A, & E, quae aequales sunt proportioni A, ad B, &c.

QUOD si è contrario ea sit proportio E, ad D, quae D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicitur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At verò proportio E, ad B, dicitur triplicata proportionis E, ad D; sic quoque, proportio E, ad A, dicitur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac defin. si proponantur plures quantitates cōtinuē proportionales, proportionē primae quantitatē ad tertiam, esse duplā proportionis primae quantitatē ad secundā, eò quod Euclides illam vocet duplicatā proportionē huius. Eodem modo volunt, proportionem primae quantitatē ad quartā esse triplam proportionis, quā habet prima quantitas ad secundā, &c. Quod tamen nulla est ratio concedendū. Neque enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodo, proportionē primae quantitatē ad tertiam, appellari duplicatā eius proportionis, quā habet prima quantitas ad secundam; propterea quod inter primam quantitatē, ac tertiam, reperitur quodammodo proportio primae quantitatē ad secundam duplicata; quippe cū inter primam quantitatē, ac tertiam interponantur duae proportionēs aequales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad secundam, & sic de ceteris, ut diximus. Non autē intellexit, illam duplā esse huius, ne Theorem. 1 proponeret, quod merito quispiam concedere recusaret. Quis enim affirmabit, in his numeris cōtinuē proportionalibus, 25, 5, 1. proportionem 25. ad 1. duplā esse proportionis 25. ad 5. cū potius eam qui dixerit esse quincuplā? At verò, illam dici huius duplicatā ad sensum expositum, nemo inficiabitur;

eò quod bis sit posita, & continuè, proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor sit, hac autè maior? Nam per propof. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quàm ad quantitatem 25. propterea quòd 25 maior est, quàm 5. Diceretur tamen illa huius duplicata, ob causam iam explicatam, licet sit eius quinta pars. Quare et si proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincupla, tamen decupla proportio est eiusdem dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla est proportionis quadrupla, cum tamen quadrupla duplicata, sit sedecupla, ut hic patet 16. 4. 1. Denique in tribus magnitudinibus aequalibus, vel in tribus aequalibus numeris, 4. 4. 4. atq; ad eò continuè proportionalibus, qui fieri potest, ut proportio primi ad tertium dupla sit proportionis primi ad secundum, cum sit omnino eadem? Duplicata tamen dicitur illa huius, propterea quòd hac ordine bis posita est continuè inter primum numerum & tertium.

SED auctores, qui proportionem primæ quantitatis ad tertiam volunt esse duplam proportionis, quam prima quantitas habet ad secundam, (inter quos auctores est etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod valde miror, cum alioquin Mathematicus sit præstantissimus) dicunt in hac defin. requiri terminos inæquales, primamq; debere esse maiorem; ita ut definitio hac intelligenda sit necessariò de proportionem continua maioris inæqualitatis. Quare mirum non est, ut aiunt, neq; proportionem 1. ad 25. proportionis 1. ad 5. neq; proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam esse. Verum hac expositio non solum vera non est, sed Euclidis prorsus est contraria: quippe qui assumat pleriq; in locis, triplicatam proportionem reperiri in proportionem minoris inæqualitatis. Locus clarissimus est, ut alios omittam, in propof. 12. lib. 12. ubi demonstrat similes conus, & cylindros in triplicata ratione esse diametrorum, quæ in basibus. Nam si conferatur maior conus, vel cylindrus ad minorem, necessariò in secundæ parte eius demonstrationis, assumit Euclides demonstratum esse propof. 8. eiusdem lib. 12. pyramides similes, etiam si minor ad maiorem referatur, in triplicata esse homologorum laterum ratione; ut eo in loco annotavimus. Huc accedit, propositiones illas, in quibus figura aliqua demonstratur habere rationem laterum homologorum duplicatam, vel triplicatam, cuiusmodi est 19. & 20. lib. 6. & 11. 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11. & 12. 18. lib. 12. non fore universales, si solum de proportionem maioris inæqualitatis essent intelligenda. Explicanda ergo est hac definitio, ut nos exposuimus.

IT A QV E hoc loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendum sit nomine proportionis duplicata, triplicata, &c. ut demonstrationes sequentium librorum percipiantur, rebusq; possint materialibus accommodari. Non autem determinat, quanam proportio sit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Exempli gratia, quoniam ex propof. 20. lib. 6. constat, proportionem quadrati ad quadratum duplicatam esse proportionem, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris: colligendum erit, si continetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, quæ est primi termini ad tertium. ita ut si prioris quadrati latus fuerit trium palmorum, posterioris autè unus palmi, prius quadratum ad posterius habeat proportionem, quæ 9. ad 1. ita ut illud nonies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis tripla, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. ut in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportionem lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita ut illud sit huius nona pars, propterea quòd proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. ut in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est. Simili ratione, quoniam lib. 12. propof. ultima, demonstratur sphaera inter se rationem habere suarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, sphaeram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad sphaeram, cuius diameter est unus palmi tantum, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hac enim triplicata dicitur tripla proportionis, ut hic apparet, 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propositis duabus sphaeris, quarum diametri proportionem habent decuplam, habebunt sphaera ipsæ proportionem millecuplam, cum hac sit decupla triplicata, ut hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit unquam, millecuplam proportionem esse triplo tantummodo maiorem proportionem decupla, & non potius trigecuplam decupla esse triplam?

CÆTERVM proposita quacumq; proportionem rationali, si eius denominator in se ipsum multiplicetur, exurgit denominator proportionis, quæ duplicata dicitur proposita proportionis. Ut quia ex multiplicatione 4. denominatore scilicet proportionis quadrupla, in se, produciuntur 16. ideo proportio sedecupla, dicitur duplicata quadrupla proportionis, ut hic cernitur, 16. 4. 1. Item hic, 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis subquadrupla, in se, produciatur $\frac{1}{16}$. dicitur proportio subsedecupla, duplicata proportionis subquadrupla. Quòd si denominator rursus in illud productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicata; ut in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. produciuntur 64. denominator proportionis, quæ quadrupla dicitur triplicata, ut hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic, 192. 48. 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicata, atq; ita de cæteris. Itaq; proportionis duplicata denominator, produciuntur ex denominatore proposita, proportionis bis posito, atq; ita multiplicato. Ut numerus denominas proportionem duplicatam proportionis tripla, produciuntur ex 3. denominatore tripla proportionis, bis posito, in hunc modum, 3. 3. ac sic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncupla, proportionis, quæ duplicata dicitur tripla, ut hic cerni potest, 9. 3. 1. Item hic, 18. 6. 2. At verò denominator proportionis triplicata gignitur ex proposita, proportionis denominatore ter posito, & sic multiplicato. Ut in dato exemplo, denominator triplicata proportionis, nempe 27. procreatur ex

3. ter posito sic, 3. 3. atq; ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exorietur ex denominatore quater posito; Quincuplicata ex eodem quinquies posito, atq; ita multiplicato, &c. Itaque duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, &c. proportionis cuiuslibet, de qua in hac definitione agitur, nihil aliud est, quam multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter se. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis, quam extremi termini inter se habent: quæ propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus est, duplicata dicitur, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. prout videlicet denominator bis positus est, vel ter, vel quater, &c. atque sic multiplicatus fuit, ut exposuimus. Verbi

| | | | | |
|----------------|-----|----|----|---|
| Denominatores. | 4 | 4 | 4 | |
| Num. propor. | 192 | 48 | 12 | 3 |

gratia, propositis hisce quatuor numeris continue proportionalibus in proportione quadrupla, primus 192. ad quartum 3. proportionem habet denominatam à 64. quæ proportio dicitur triplicata proportionis quadrupla: quia denominator 64. proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4. proportionis quadrupla ter posito, ob tres proportionem quadruplas inter extremos interiectas, atq; ita multiplicato, dicendo quater quatuor sunt 16. & quater 16. sunt 64. Sic etiam inuersis iisdem numeris, ut sine continue proportionales in pro-

| | | | | |
|----------------|---------------|---------------|---------------|-----|
| Denominatores. | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | |
| Num. propor. | 3 | 12 | 48 | 192 |

portionem subquadrupla, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam à $\frac{1}{64}$. quæ proportio dicitur triplicata proportionis subquadrupla: quia denominator $\frac{1}{64}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$. proportionis subquadrupla ter posito, & sic multiplicato, ob tres proportionem subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$. & ex $\frac{1}{16}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$. Nihil obstat ergo, quò minus proportio 3. ad 192. a $\frac{1}{64}$. denominata dici possit triplicata proportionis subquadrupla 3. ad 12. quanquam illa minor sit, quam hac: quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter posito, & sic multiplicato, ut diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. a $\frac{1}{64}$. denominata dici potest triplo maior proportione subquadrupla 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{64}$. sed $\frac{3}{4}$. atq; ita proportio subsesquitercia dicitur tripla proportionis subquadrupla: sicut etiam non proportio à 64. denominata, sed proportio duodecupla, est proportionis quadrupla tripla; propterea quòd denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. sed 12. Porro continuatis quocunque numeris proportionalibus, siue maiores cum minoribus, siue minores cum maioribus conferantur, denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionum inter se multiplicatis, demonstrabimus ad defn. 5. lib. 6. Proportionem autem aliquam tum demum esse alterius duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator huius denominatoris duplus est, vel triplus, &c. ita ut proportio decupla sit dupla quintupla, & sextupla sit tripla dupla, &c. ostendemus ad finem libri 9. tractatumq; est hoc argumentum copiose à Rodolpho Volumnio in Disputatione de Proportionibus proportionum. Nunc satis sit, hoc ipsum communi hominum iudicio ex sensibilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod ad Patientem proportionem habeat (verbi gratia) decuplam, ita ut Agens sit 10. & Pater 1. quis tam mente captus erit, qui non statim intelligat si idem Agens augeatur, ut fiat 20. Pater autem maneat 1. Agens tunc duplo maiorem habere potentiam respectu eiusdem Patientis, quam prius? Quare proportio vigecupla, cuius denominator 20. duplus est denominatoris 10. dupla est proportionis decupla; non autem proportio centupla, ut auctores contraria sententia volunt: sed tamen hac proportio centupla dicitur duplicata proportionis decupla propter multiplicationem denominatoris 10. in se, & propter duas proportionem decuplas, quæ inter numeros centuplam proportionem habentes interijciuntur, ut hic apparet, 100. 10. 1. Sic etiam si è contrario, Agens aliquod ad Patientem habeat proportionem, verbi gratia, subdecuplam, ita ut Agens sit 1. & Pater 10. quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, Agens, quod sit 2. duplo esse potentius respectu eiusdem Patientis 10. quam Agens 1.? Cum ergo Agens 2. ad Patientem 10. habeat proportionem subquintuplam, cuius denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. conflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$. bis sumpto, erit profectò proportio subquintupla proportionis subdecuple dupla; non autem illa, quæ subcentupla est, ut prædicti auctores volunt, cum hac longè minor sit, quam subdecupla. Dicitur tamen proportio subcentupla proportionis subdecuple duplicata, propter causam sapius explicatam, ut hic patet, 1. 10. 100.

Ex his, quæ diximus, non obscure colligi potest, proportionem duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, sapere naturam quodammodo lineæ, cum ex nulla alia proportionem producat: Proportionem verò, cuius quantitates intercipiunt vnicum medium in continua proportionalitate habere conditionem superficiem quadratam, quoniam gignitur ex duabus proportionibus equalibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis equalibus conficitur. Denique proportionem, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate interijciuntur, obtinere naturam solidi, atq; aded cubi, cum oriatur ex tribus equalibus proportionibus, quemadmodum etiam cubus ex tribus lineis equalibus consurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmeticos, qui Algebra regulam exposuerunt.

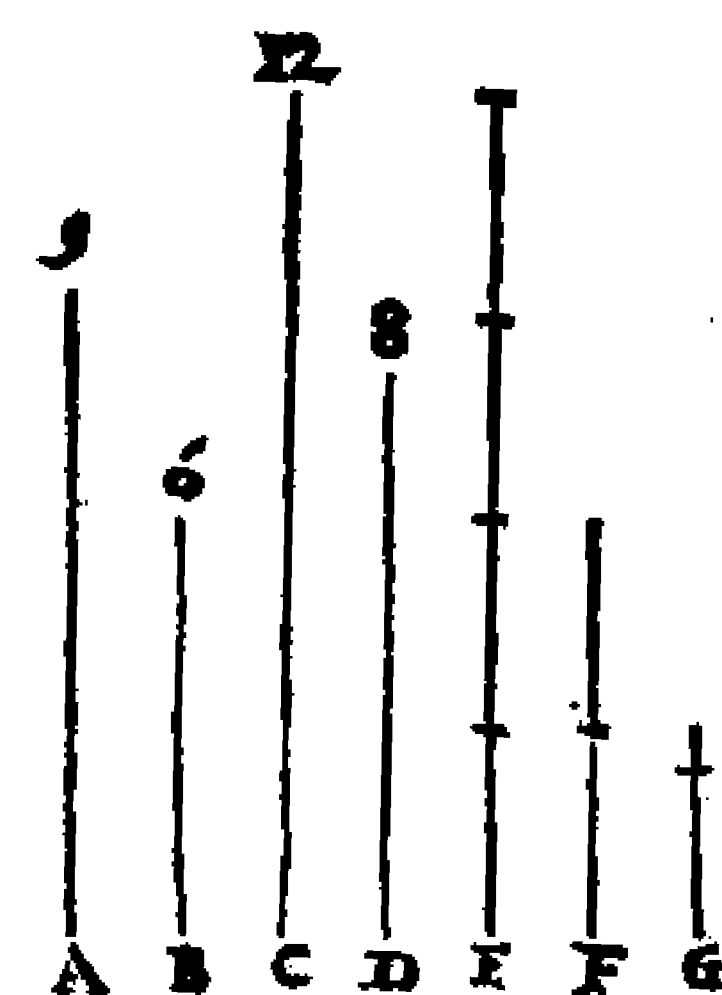
XI.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes qui-

dem antecedentibus, consequentes verò consequentibus.

DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionum esse similitudinem. Docet iam, non solum in proportionalitate quauis proportionibus dici similes; Verum etiã terminos ipsos, seu quantitates similes dici, homologasve; dicēs, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportionem inter se, nec nō consequētes inter se; vt intelligeremus in quam plurimis demonstrationibus, quamam latera figurarum inter

se comparata, antecedentia debeat esse proportionum, & quamam consequentia, vt in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, qua C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, vtamq; magnitudinem antecedentē vel aequalem esse vtrique consequenti, vel eodem modo maiorem, aut minorem: Alias nō haberet vtraq; antecedens ad vtramque consequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vt pote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, cōtinuē proportionalibus, vbi tam E, & F, homologa sunt, quam F, & G, vt constat. Atq; hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi aequē multiplicia prima & tercia magnitudinum, hoc est, antecedentium. Item alia aequē multiplicia secunda, & quarta magnitudinum, nimirum consequentium. Haec enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat: in magnitudinibus verò non proportionalibus dissimiles.



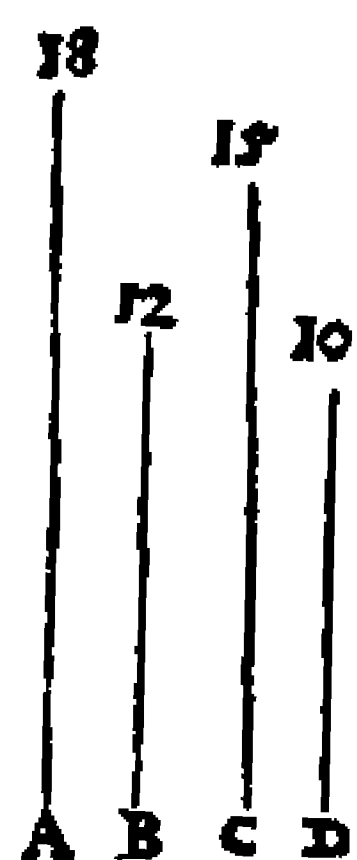
ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longē aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus variē inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; veluti in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib. consideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.

X I I.

ALTEANA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

EXPLICAT hic quosdam modos argumentandi in proportionibus, quorū frequentissimus est vsus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex: Primus dicitur proportio alterna, siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio e contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, vel disiuncta proportionalitas. Quintus, conuersio rationis, siue eversa proportionalitas: Sextus deniq; vocatur proportio ex aequalitate, seu aequa proportio.

Alterna igitur, seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, inferatur eandē esse proportionē antecedentis prioris proportionis ad antecedentē posterioris, quam habet consequēs illius ad consequentē huius. Vt si ponamus proportionē A, ad B, quā C, ad D, & propterea concludamus, eandē esse proportionē A, ad C, quā est B, ad D, dicemur argumentari a permutata proportionem. Graeci scriptores in hac argumentatione vtuntur hoc fere modo loquendi: Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu vicissim, erit quoq; A, ad C, vt B, ad D. Firmā autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propof. 16. lib. huius. Caterum in hoc modo argumentandi, necesse est omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, vt inter binas, vt vt assumptas proportio esse possit. Non enim rectē inferitur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum

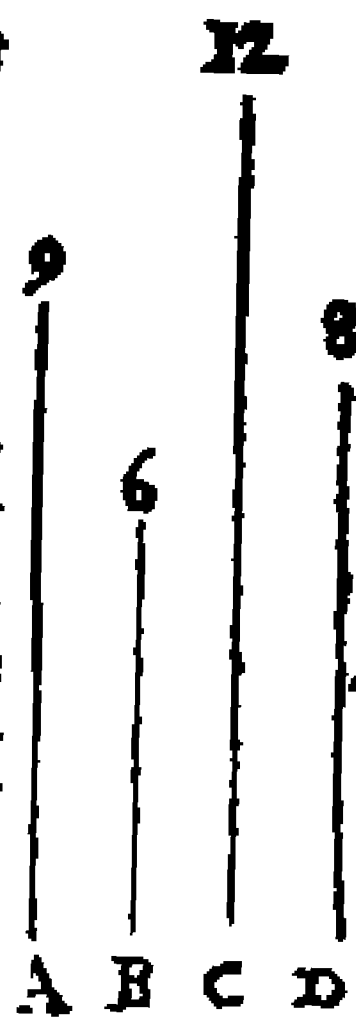


D; cum nulla sit proportio linea ad numerum, aut contra, vt perspicuum est ex defin. 5. In alijs autem modis argumentandi, qui sequuntur, possunt esse priores magnitudines in vno genere magnitudinis; & posteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonstrationibus huius lib. 5. constabit.

X I I I.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, seu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

Vt si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, vt D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportionem. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores: Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel e contrario, erit quoque B, ad A, vt D, ad C. Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in corollario propof. 4. huius lib. Porro duae priores magnitudines possunt esse vnius generis, & posteriores alterius. Rectē namq; licebit inferre; vt se habet linea A, ad lineā B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D. Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad triangulum, seu numerum C, vt ex corollario propof. 4. constabit.

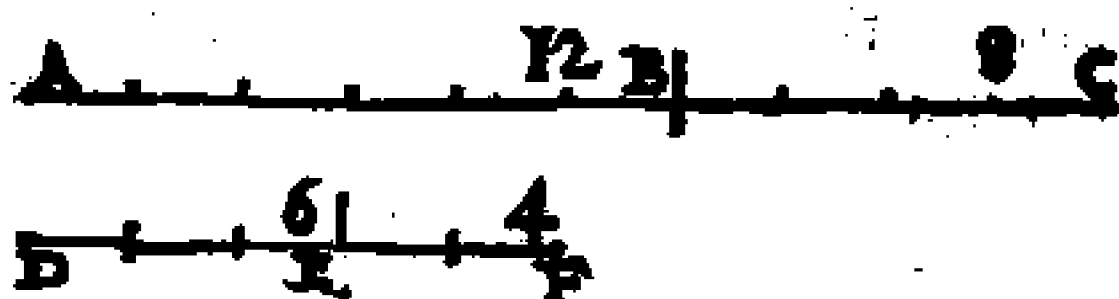


COMPOSIT.

XIII.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cū consequente, seu vilius ad ipsam consequentem.

Si *r* proportio *AB*, ad *BC*, qua *DE*, ad *EF*; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionem totius *AC*, nempe antecedentis cum consequente, ad *BC*, consequentem, quam habet tota *DE*, antecedens



nimirum cum consequente, ad *EF*, consequentem; dicatur huiusmodi argumentatio compositio rationis, eadem ex antecedente & consequente componatur aliud novum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores reperies in hac argumentatione: Vt *AB*, ad *BC*,

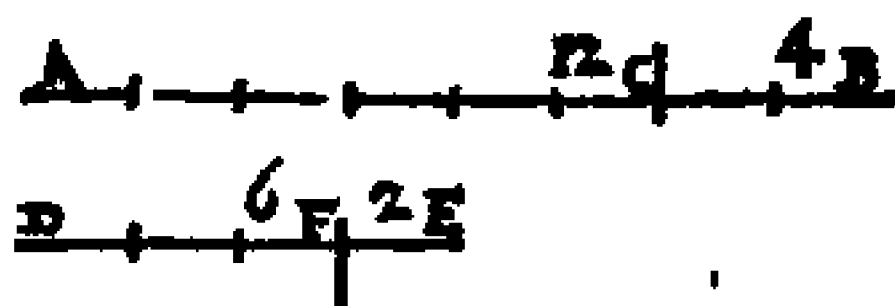
ita *DE*, ad *EF*; componendo ergo erit & *AC*, ad *BC*, vt *DE*, ad *EF*. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propof. 18.

*Pr*imo modo argumentandi per compositionem rationis addi possunt alij duo: Primum dici potest, Compositio rationis conuersa; quando nimirum sumitur antecedens, & consequens, veluti vna, qua cum antecedente conferatur. Vt si est, vt *AB*, ad *BC*, ita *DE*, ad *EF*, inferimusq; Ergo vt *AC*, ex antecedente & consequente conflata, ad antecedentem *AB*, ita est *DE*, ex antecedente & consequente composita, ad antecedentem *DE*: Quam argumentationem esse validam, demonstrabimus ad propof. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compositionem rationis conuersam.

*Al*ter modus dici potest, Compositio rationis contraria: quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & consequentem, seu ad vnā. Vt si est, vt *AB*, ad *BC*, ita *DE*, ad *EF*, inferimusq; per compositionem rationis contrariam. Igitur erit vt *AB*, antecedens ad totam *AC*, ex antecedente, & consequente compositam, ita *DE*, antecedens ad *DE*, ex antecedente, & consequente compositam. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad propof. 18. huius lib. ostendemus.

XV.

DIVISIO rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.



Vt si dicatur, qua proportio est totius *AB*, ad *CB*, ea est totius *DE*, ad *FE*; Igitur erit & *AC*, excessus, quo antecedens consequentem superat, ad *CB*, consequentem, vt *DE*, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad *FE*, consequentem. In diuisione autem hac rationis ita loquuntur auctores: ergo

diuidendo, &c. Ilac porro illatio ostendetur propof. 17. huius lib.

*Poss*unt etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuisionem rationis conuersam dicere possumus: quando nimirum consequens ad excessum, quo consequentem superat antecedens, refertur. Vt si est, vt *AB*, ad *CB*, ita *DE*, ad *FE*, concludimusq; per diuisionem rationis conuersam. Ergo erit, vt *CB*, consequens ad *AC*, excessum, quo antecedens consequentem superat, ita *FE*, consequens ad *DE*, excessum, quo antecedens superat consequentem. Valere autem hanc argumentationem, ostendemus ad 17. propof. huius lib.

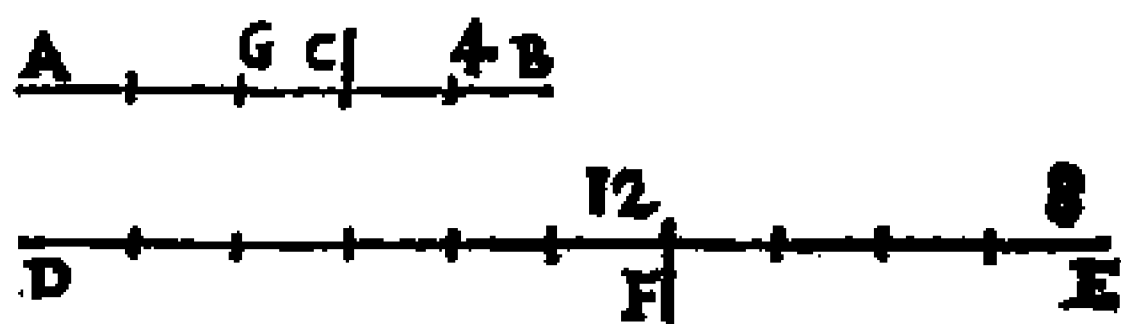
*Perspic*uum autem est, vt vtraque harum argumentationum per Diuisionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & nostra, antecedentem debere esse maiorem consequente. Alias Diuisio fieri non posset.

*Al*ter modus appellari potest Diuisionem rationis contraria: quando videlicet confertur antecedens cum excessu, quo consequens antecedentem superat. Vt cum dicimus: Ita se habet *AC*, ad *AB*, vt *DE*, ad *DE*. Igitur erit quoq; per diuisionem rationis contrariam vt *AC*, antecedens ad *CB*, excessum, quo consequens antecedentem superat, ita *DE*, antecedens ad *FE*, excessum, quo antecedentem superat consequens. Qui modus argumentandi demonstrabitur etiam a nobis ad propof. 17. huius libri.

Porro manifestum est, in hac diuisione rationis contraria consequentem debere esse maiorem antecedente, vt sumi possit excessus, quo consequens antecedentem superat.

XVI.

CONVERSIo rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.



*Q*uo si colligamus hoc modo: Sicut est tota magnitudo ad *AB*, ad *CB*, ita tota *DE*, ad *FE*: Igitur ita etiam erit eadem *AB*, ad *AC*, excessum, quo consequentem superat antecedens, vt *DE*, ad *DE*; Dicemus per conuersionem rationis argumentari. Vnde sic ferè lo-

quuntur scriptores: Igitur per conuersionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in corollario propof. 19. huius libri.

LIQVIDO etiam constat, in hoc modo argumentandi per conuersionem rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.

XVII.

Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his alia multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per subtractionem mediorum.

Si n. plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, sint q. binæ ac binæ in eadem proportionē, hoc est, A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionē A, ad C, prima ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, prima magnitudinis ad vltimam in secundis magnitudinibus; dicitur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, siue ex æqualitate, in qua scilicet extrema magnitudines, subductis medijs, colliguntur habere vnā, eandemq. inter sese proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam verò duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando sumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportionē, ordinatè procedendo, altero verò, cum ordo inuertitur; explicat Euclides duabus sequentibus definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.

XVIII.

ORDINATA proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

Vt quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; dicitur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quam in secundis seruetur; cum vtroque conferatur primum prima cum secunda; deinde secunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate seruetur Ordinata proportio, demonstratur propos. 22. huius lib. eam argumentationem esse bonam.

XIX.

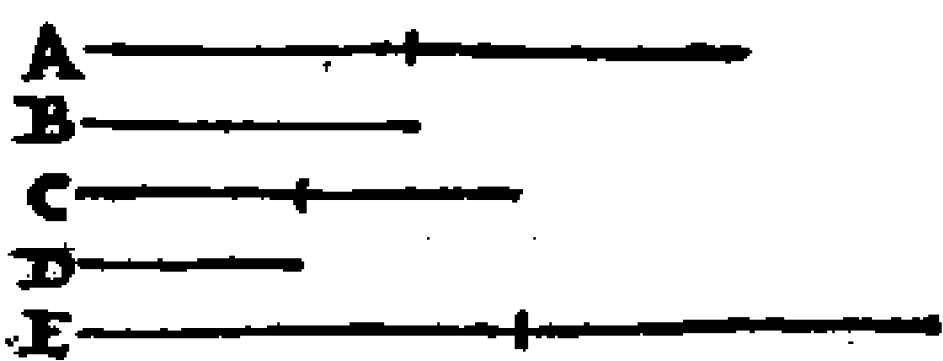
PERTURBATA autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs, quæ sint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem. Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

Si autem sit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde vt in primis magnitudinibus B, consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam, D, ad E, antecedentem magnitudinem; nuncupabitur huiusmodi proportio, Perturbata: quod non seruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum secunda, at in secundis secunda cum tertia; deinde in primis secunda cum tertia, at in secundis prima cum secunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate seruetur Perturbata proportio, demonstratur, eam argumentationem esse bonam, propositione 23. huius libri. Porro tam perturbata proportio, quam ordinata, semper infert ex æqualitate eandem extremorum proportionem, etiam si plures magnitudines ponantur, quam tres, vt ex propos. 22. & 23. huius libri perspicuum fiet.

Vt vnt r. Euclidis interpretes hoc libro, & in alijs, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axioma quodam, quod vt hic subijceremus, nō inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est:

QVAM

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quævis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamvis magnitudinem propositam.



VT, quæ proportionem habet A, ad B, eandem, habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quæpiam alia E, ad propositam C. Quamvis enim ignoremus interdum, quanam sit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non est, eam esse posse in rerum natura, cum

id contradictionem non implicet, vt Philosophi loquuntur, neq; absurdi aliquid ex eo consequatur.

THEOR. I. PROPOS. I.

1.

SI sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æquæ multiplices; quàm multiplex est vnus vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum E, F, æquæ multiplices. Dico magnitudines AB, CD, simul, tam esse multiplices magnitudinū E, F, simul, quàm est multiplex AB, ipsius E, vel CD, ipsius F. Cum enim AB, CD, sint æquæ multiplices ipsarum E, & F, si



AB, diuidatur in magnitudines AG, GH, HB, ipsi E, æquales, & CD, quoque in magnitudines CI, IK, KD, ipsi F, æquales: (Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum AB, CD, sint ipsarum E, F, æquæ multiplices, atque ideo toties E,

in AB, perfectè contineatur, quoties F, in CD, vt ex iis, quæ in defin. 2. huius libri scripsimus, constat.) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot sunt magnitudines CI, IK, KD. Quoniam verò AG, & E, æquales inter se sunt, & ipsis addantur æquales CI, & F, erunt AG, CI, simul æquales ipsis E, & F, simul. Eodem modo erunt GH, & IK, simul, æquales ipsis E, & F, simul; Necnon HB, & KD, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties & E, F, simul, in AB, CD, simul comprehenduntur: Ideoque, quàm multiplex est AB, ipsius E, tam sunt multiplices AB, CD, simul ipsarum E, & F, simul, vt constat ex iis, quæ in definitione 2. huius libri scripsimus. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinū, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. pron.

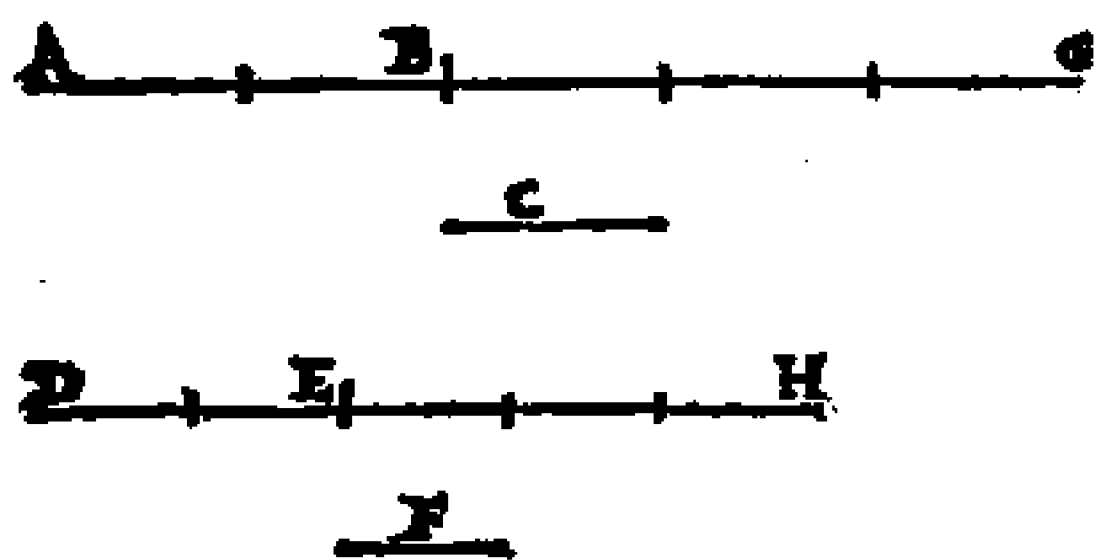
SCHOLIUM.

Hoc idem demonstrabitur vniuersè propof. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quàm irrationalis. Necessarium autem fuit, id ipsum prius hoc loco in proportionem multiplici demonstrare: quia ex eo alia propositiones demonstranda sunt, antequam propofitio 12. possit demonstrari.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI prima secundæ æquæ fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æquæ multiplex, atque sexta quartæ; erit & composita prima cum quinta, secundæ æquæ multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.



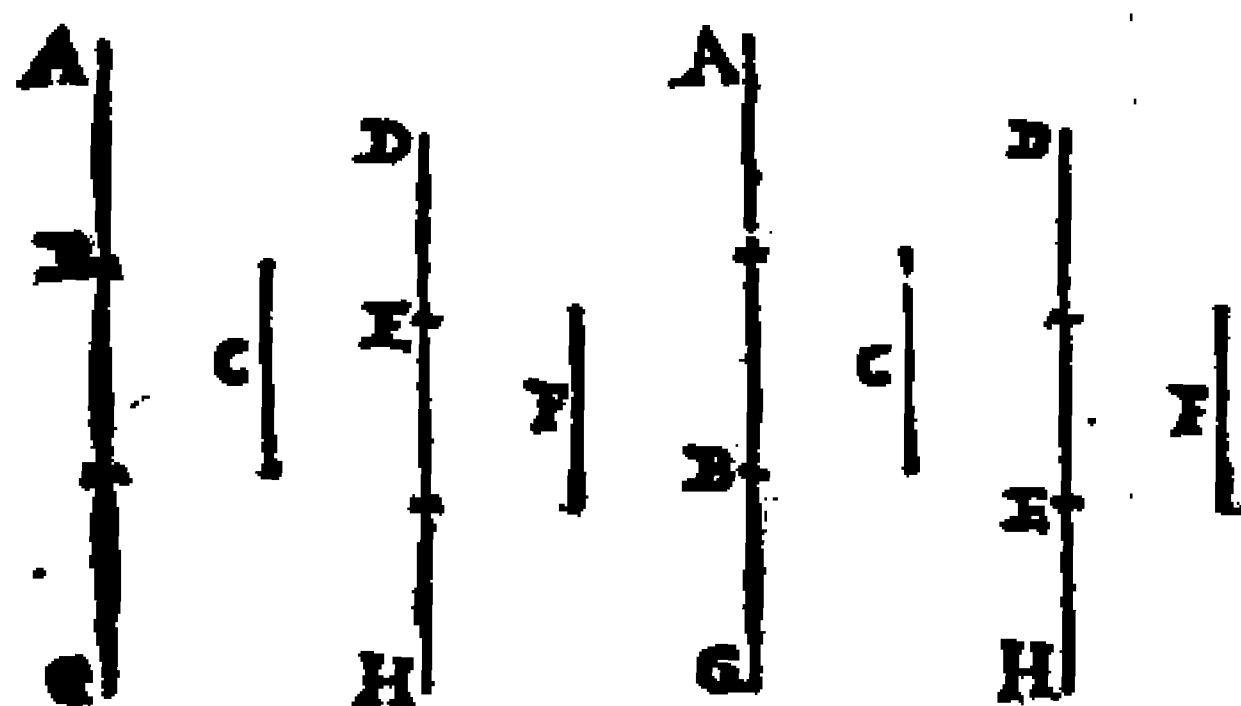
SIT magnitudo prima AB, tam multiplex secundæ C, quàm est multiplex DE, tertia, quartæ F; Rursus tam sit multiplex BG, quinta ipsius C, secundæ, quàm multiplex est EH, sexta ipsius F, quartæ. Dico AB, primam cum BG, quinta compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quàm multiplex est DE, tertia composita cum sexta EH, ipsius F, quartæ. Cum enim AB, DE, sint æquæ multiplices ipsarum C, F, erunt in AB, tot magnitudines ipsi C, æquales, quot sunt in DE, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt & in

BG, tot æquales ipsi C, quot sunt in EH, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus AB, DE, addantur æquales multitudines BG, EH, erunt totæ multitudines AG, DH, æquales. Quare toties comprehenditur C, in AG, quoties F, in DH; Ideoque tam multiplex est AB, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ, quàm multiplex est DH, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.

b 1. pron.

SCHOLIUM.

Quod si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ; Quinta verò & sexta, æquæ



multiplices secunda, & quarta. Vel prima, & tertia, aequè multiplices fuerint, secunda & quarta; At quinta & sexta, aequales secunda, & quarta: Erit eadem ratione tota A G, (prima & quinta) tam multiplex secunda C, quam multiplex est tota D H, (tertia ac sexta) ipsius F, quarta. Semper enim A G, multitudo magnitudinum æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi D H, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, ut perspicuum est in appositis figuris. Si verò tam

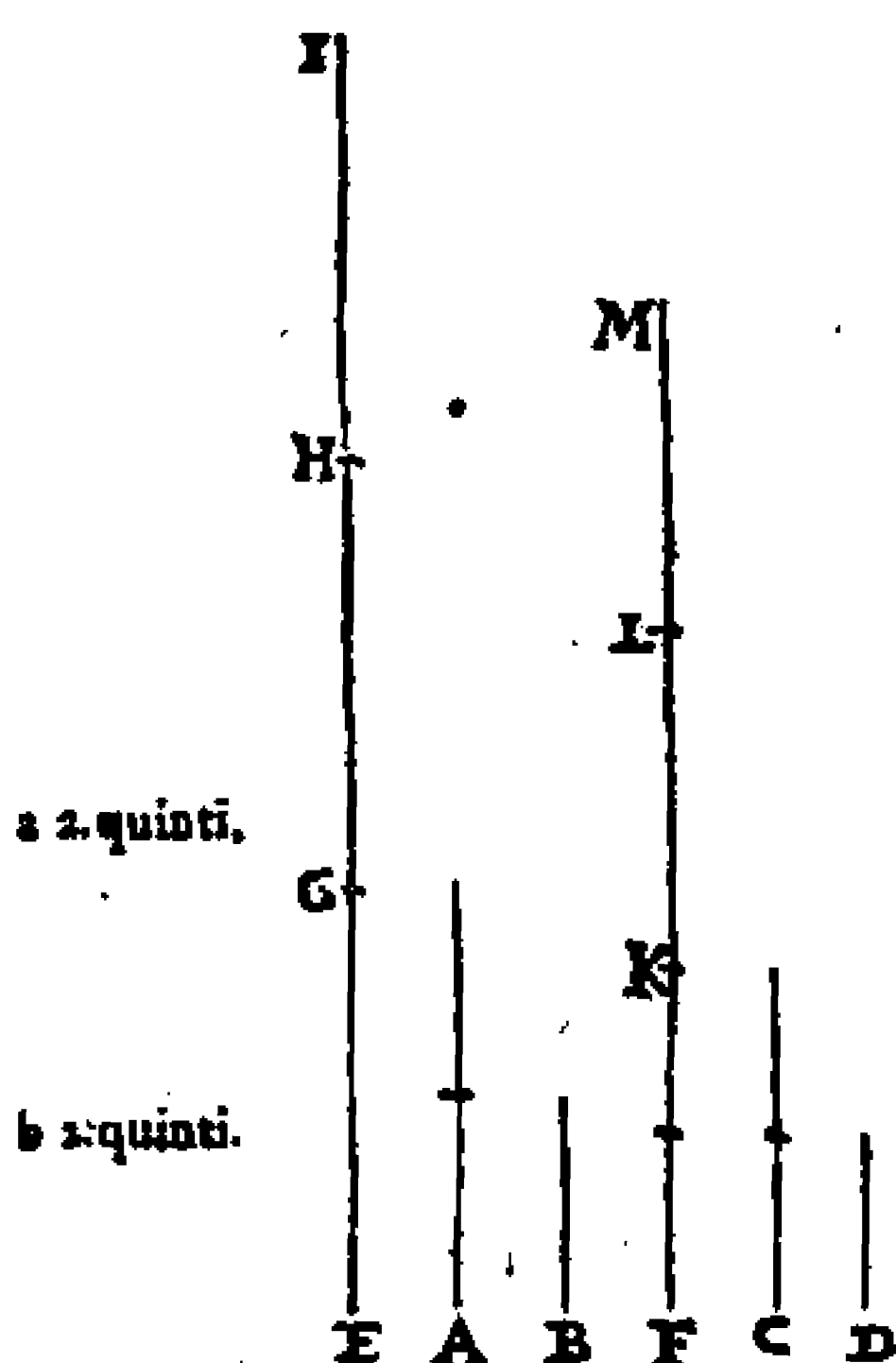
prima & tertia, quam quinta, & sexta aequales ponantur secunda, & quarta, luce clarum est, primam & quintam simul, atque tertiam & sextam simul, aequè multiplices esse, nimirum duplices, secunda & quarta magnitudinum.

Hoc quoque ab Euclide concludetur in omni genere proportionis vniuersè propos. 24. sed opera pretium fuit, id ipsum prius in proportionem multiplici demonstrare, ut ea, quæ sequuntur, demonstrari possint.

3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI sit prima secundæ æquemultiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtrique vtriusque æquemultiplex; altera quidem secundæ, altera autem quartæ.



Si r prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quam multiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, F, æquemultiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartæ. Nam cum E, & F, sint æquemultiplices ipsarum A, & C; si distribuuntur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, ut in E G, G H, H I, & F K, K L, L M; erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam verò E G, F K, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, æquemultiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & E G, F K, earundem B, & D, æquemultiplices. Pari ratione erunt G H, K L, Item H I, L M, æquemultiplices earundem B, & D. Quoniam igitur E G, prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quam est multiplex F K, tertia quartæ D. Item G H, quinta tam multiplex est eiusdem secundæ B, quam multiplex est K L, sexta eiusdem quartæ D. Erit & E H, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est multiplex F L, composita ex tertia & sexta, quartæ D. Rursus cum sit E H, prima tam multiplex secundæ B, quam multiplex est F L, tertia quartæ D, ut proximè demonstratum est; sit autem & H I, quinta, tam multiplex secundæ B, quam est L M, sexta multiplex quartæ D. Erit & E I, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est F M, composita ex tertia ac sexta, multiplex quartæ D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in E, & F. Si sit ergo prima secundæ æquemultiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

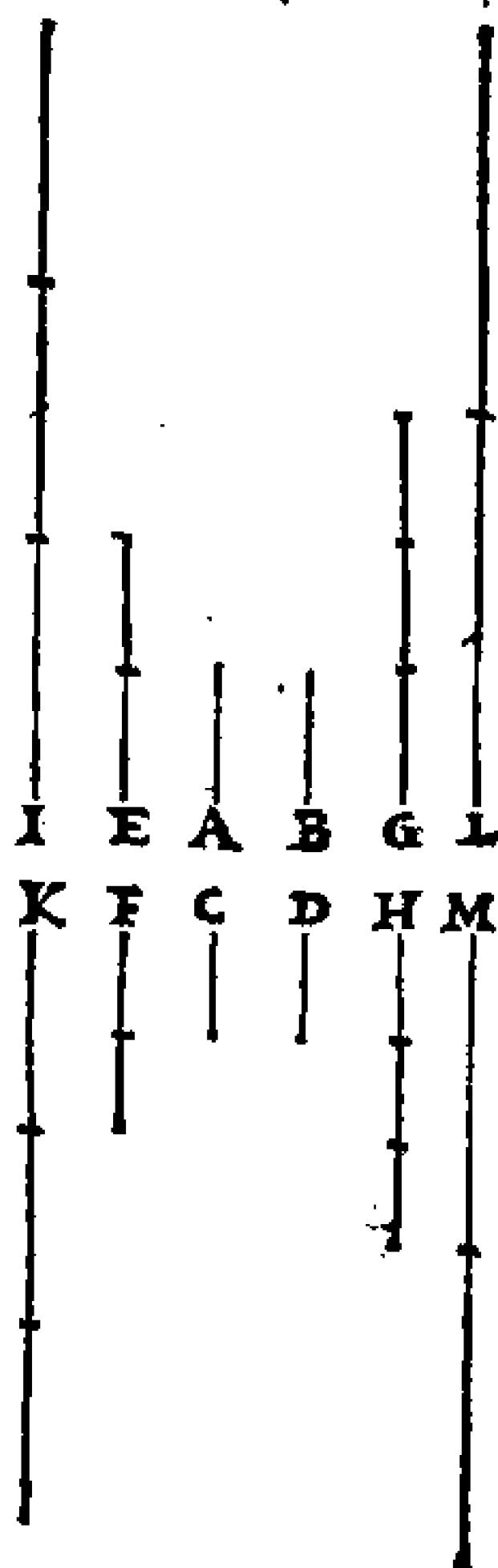
OSTENDITUR hoc theorema, propositione 22. non solum in magnitudinibus æquemultiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ binæ sumptæ eandem habent proportionem, siue rationalem, siue irrationalem: sed necessarium fuit, ipsum prius hic in proportionem multiplici demonstrare, ut insequens propositione 4. demonstrari possit.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æquemultiplices primæ & tertiæ, ad æquemultiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si, prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

Si r proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æquemultiplices E, & F. Item, secundæ B, & quartæ D, æquemultiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationem: siue E, F, ita multiplices sint ipsarum A, C, sicut G, H, ipsarum B, D, siue non. His positis, constat ex definitione 6. huius lib. si E, deficit à G, etiam F, deficere ab H. Et si E, æqualis est ipsi G, etiā F, æqualem esse ipsi H. Et denique si E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6. eadem

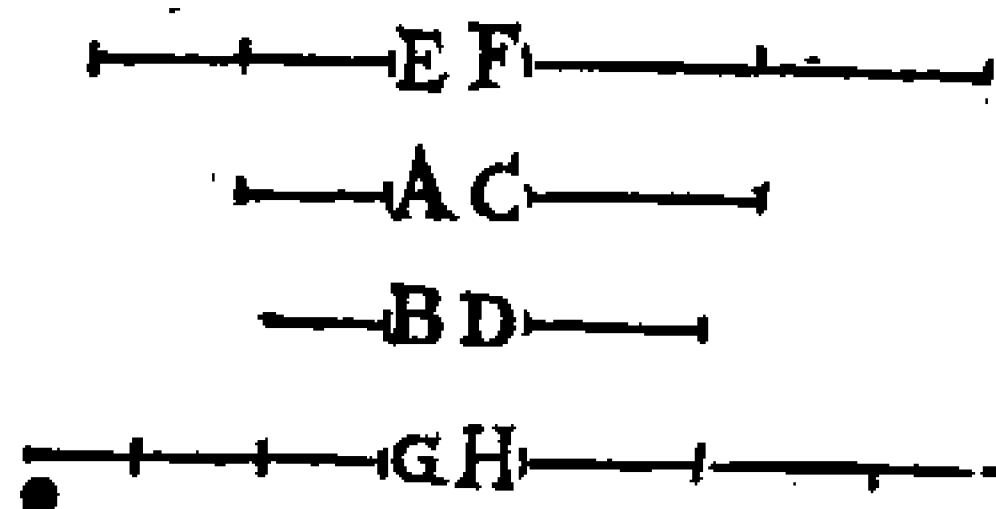


eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æquemultiplicia non semper ita se haberent. Dico iam, multiplicia primæ ac tertiæ, non solum vnâ deficere à multiplicibus secundæ ac quartæ, aut vnâ æqualia esse, aut vnâ excedere, vt diximus: sed eandem quoque inter se proportionem habere, nimirum ita esse E, multiplicem primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, vt F, multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc est, si rursus E, statuatur prima magnitudo: G, secunda: F, tertia: & H, quarta: sumanturque ipsarum E, F, æquemultiplicia quælibet: Item ipsarum G, H, quæcunque etiam æquemultiplicia: Multiplicia ipsarum E, F, à multiplicibus ipsarum G, H, vel vnâ deficere, vel vnâ æqualia esse, vel vnâ excedere, vt vult defin. 6. Idem namque est, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æquemultiplicia sumpta, vt diximus, vel vnâ deficere, vel vnâ æqualia esse, vel vnâ excedere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æquemultiplices: Item L, M, æquemultiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quàm F, tertia ipsius C, quartæ: sumptæ sunt autem & I, K, æquemultiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: ^{a 3. quinti.} Erunt quoque ex æquo I, K, æquemultiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B, D, æquemultiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam: ostensæque sunt I, K, æquemultiplices primæ & tertiæ, A, C: Item L, M, æquemultiplices secundæ & quartæ, B, D: ^{b 6. definit. quinti.} fit vt si I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ necessariò deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessariò æqualis: & denique si I, excedit ipsam L, etiam K, excedat necessariò ipsam M: Idemque ostendetur in quibuscunque æquemultiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H: quia semper hæc æquemultiplicia, quæcunque sint, æquemultiplicia quoque erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaque cum I, & K, sint æquemultiplices primæ E, & tertiæ F: Item L, & M, æquemultiplices secundæ G, & quartæ H: o-

stensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quàm L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoque esse, quàm M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: ^{d 6. definit. quinti.} Erit, vt E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM

Hinc facile demonstrabitur Inversa ratio, quam Euclides definitione decimatertia explicauit; hoc est, si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem & contrà, seu inuversa ratione, proportionales esse. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico esse conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E,



F, æquemultiplicibus ipsarum A, C, prima, ac tertiæ: Item G, H, æquemultiplicibus ipsarum B, D, secunda & quarta: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, secundam se habet, vt C, tertia ad D, quartam, ^{a 6. definit. quinti.} necessariò sequitur, si E, multiplex primæ minor fuerit, quàm G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel

maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quàm H, multiplicem quartæ: Perspicuum est, si è contrario G, maior fuerit, quàm E, vel æqualis, vel minor, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel minorem, quàm F, secundum quamcunque multiplicationem sint sumpta hæc æquemultiplicia. Nam si vtræque E, F, minor est, quàm vtræque G, H, erit contrà vtræque G, H, maior, quàm vtræque E, F: & si vtræque E, F, æqualis est vtrique G, H, erit è contrario, vtræque G, H, vtrique E, F, quoque æqualis: Et denique si vtræque E, F, maior est, quàm vtræque G, H, erit vice versa, vtræque G, H, minor, quàm vtræque E, F. Itaq, quoniam primæ B, & tertiæ D, sumpta sunt æquemultiplicia G, H; Item secunda A, & quarta C, æquemultiplicia E, F, ostensumq, est G, H, vel vnâ excedere E, F, vel vnâ æqualia esse, vel vnâ deficere, secundum quamcunque multiplicationem ea multiplicia su-

manetur; * erit ut B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonstrandum.

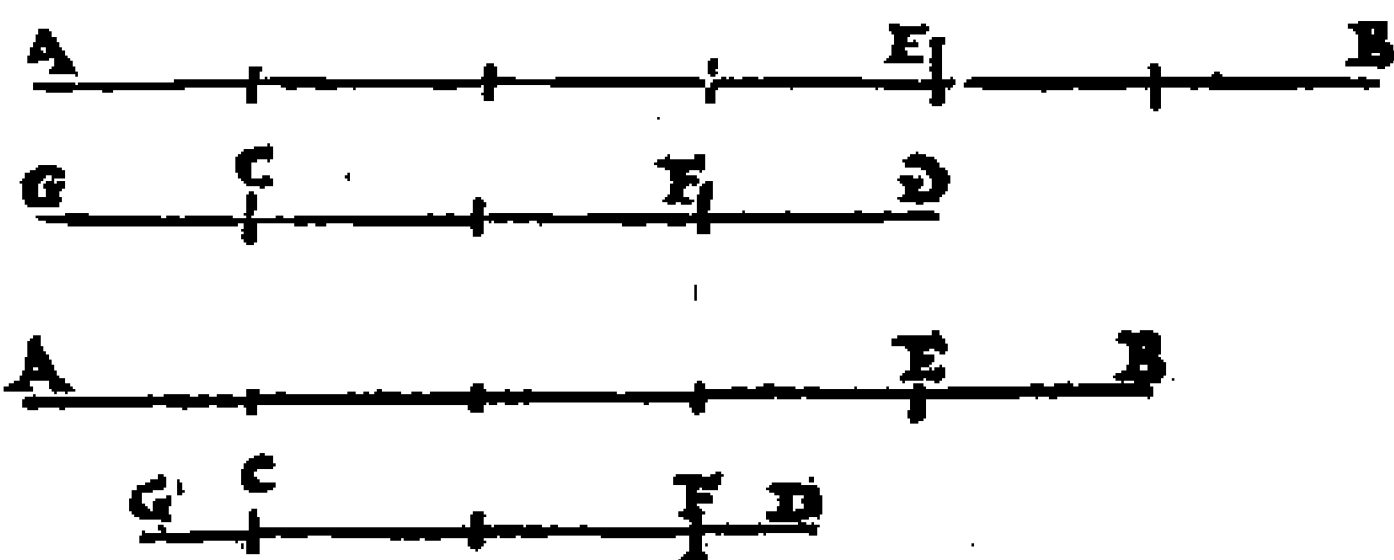
S C H O L I U M.

HÆC propositio cum suo corollario vera est, siue duæ magnitudines A, B, sint eiusdem generis cum duabus magnitudinibus C, D, siue non, ut ex demonstratione liquet.

ORONTIUS quartū hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propos. huius lib. ostendit I, K, esse æquemultiplices magnitudinum A, C, item L, M, esse æquemultiplices magnitudinum B, D, insert statim per conuersum 6. definitionis, iuxta suam expositionem, ita esse I, ad L, ut K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, ut F, ad H. Quæ quidem demonstratio admodum est vitiosa, tum quia secundum hunc sensum demonstratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus proportionabilibus, æquemultiplices prima ac tertia ad æquemultiplices secunda & quarta eandem habere proportionem, ex eo, quod ex 6. defin. ut ipse explicauit, æquemultiplices prima ac tertia ad æquemultiplices secunda & quarta eandem habent proportionem; quod est absurdum: tum etiam, quia eodem modo statim à principio licuisset illi inferre, sic esse, per 6. defin. E, ad G, ut F, ad H, sine acceptione novarum magnitudinum æquemultiplicium. Non enim est maior ratio in illis, quam in his. Reijcienda est ergo huiusmodi demonstratio, vna cum expositione 6. definitionis, ut supra diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis, constat solū, si I, minor est, quam L, vel æqualis, vel maior, etiam K, minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quam M; quemadmodum & idem constat in æquemultiplicibus E, F, G, H, & in quibuscunque alijs, si sumantur, prout inter se respondent. Vnde ex 6. defin. recte colligitur, ita esse E, primam ad G, secundam, ut est F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illis 6. definitio conuenit.

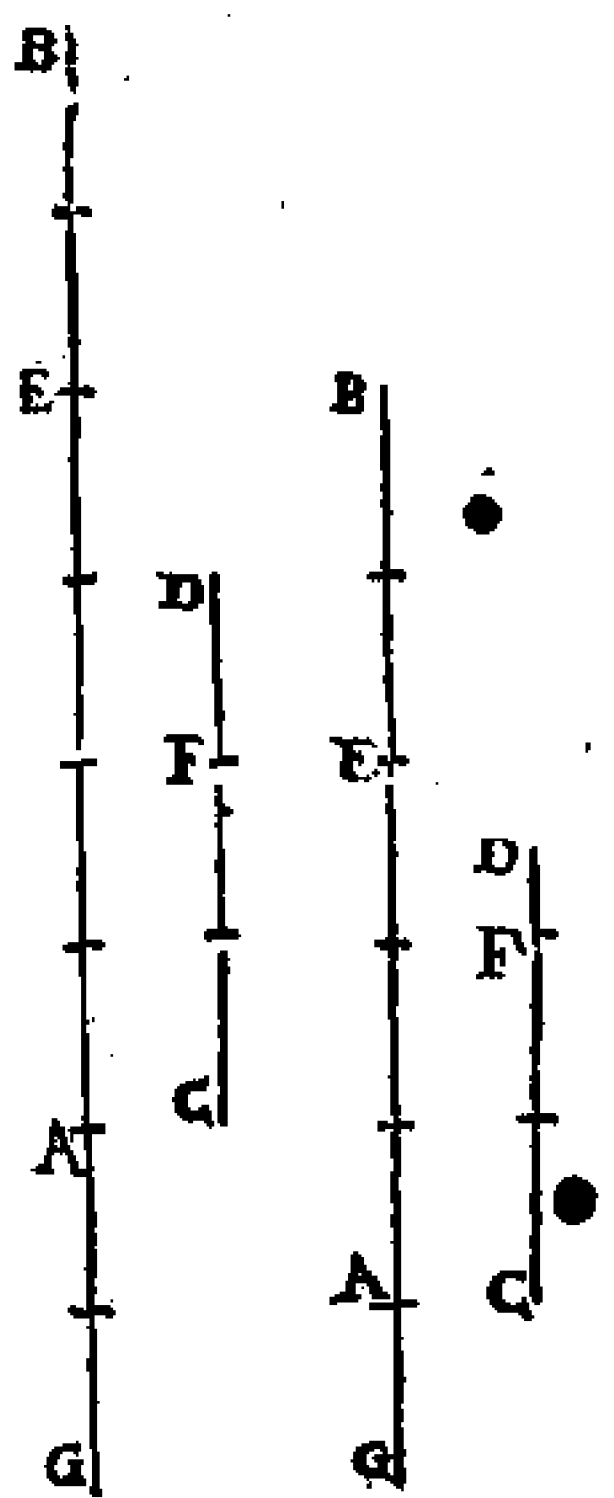
THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atque ablata ablata: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, ut tota totius.



Ita multiplex sit tota AB, totius CD, ut est multiplex AE, ablata ablata: CF, siue AE, CF, ablatae sint totis AB, CD, commensurabiles, ut in prima figura: siue incommensurabiles, ut in secunda figura. Ite siue AE, CF, compositæ sint ex eisdem partibus, ex quibus totæ AB, CD, componuntur, ut in priori figura: siue non ex eisdem, ut in posteriori figura. Dico reliquam EB, ita esse multiplicem reliquæ FD, ut est tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis, videlicet ipsius GC, ut est AE, multiplex ipsius CF, vel tota AB, totius CD. Quoniam igitur AE, EB, æque sunt multiplices ipsarum CF, GC; * erit tota AB, totius GF, ita multiplex, ut AE, ipsius CF, hoc est, omnes omnium, ut vna vnius: Sed tam multiplex etiam ponitur AB, ipsius CD, quam est multiplex AE, ipsius CF. Igitur AB, tam est multiplex ipsius GF, quam multiplex est ipsius CD; atque idcirco æquales sunt GF, CD. Ablata igitur communi CF, æquales erunt GC, FD. Tā multiplex igitur erit EB, ipsius FD, quā multiplex est ipsius GC. Sed ita multiplex posita fuit EB, ipsius GC, ut AE, ipsius CF, hoc est, ut tota AB, totius CD. Quare tā multiplex est reliqua EB, reliquæ FD, quā est tota AB, totius CD: quod est propositū.

ALITER. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, ut ablata AE, ablata CF. Dico reliquam EB, reliquæ FD, esse sic multiplicem, ut est tota totius. Posita enim GA, ita multiplici ipsius FD, ut est AE, ipsius CF, vel ut tota AB, totius CD: quoniam AE, GA, æquè multiplices sunt ipsarum



a 6. definit.
quinti.

at. quinti.

b 6. pron.

rum

rum CF, FD ; erit tota GE , sic multiplex totius CD , ut AE , ipsius CF : Sed ita quoque multiplex est AB , eiusdem CD , ut AE , ipsius CF , ex hypothesi. *a 1. quinti.* Equemultiplices sunt igitur GE, AB , ipsius CD , atque adeo inter se æquales. Quare dempta communi AE , æquales erunt GA, EB : Ideoque æquemultiplices ipsius FD ; cum GA , sit multiplex posita ipsius FD : Atqui ita est multiplex posita GA , ipsius FD , ut AB , ipsius CD . Igitur & EB , reliqua sic erit multiplex ipsius FD , reliquæ, ut AB , tota totius CD , quod est propositum. Si magnitudo itaque magnitudinis æquæ fuerit multiplex, &c. Quod erat demonstrandum. *q 6. pron.*

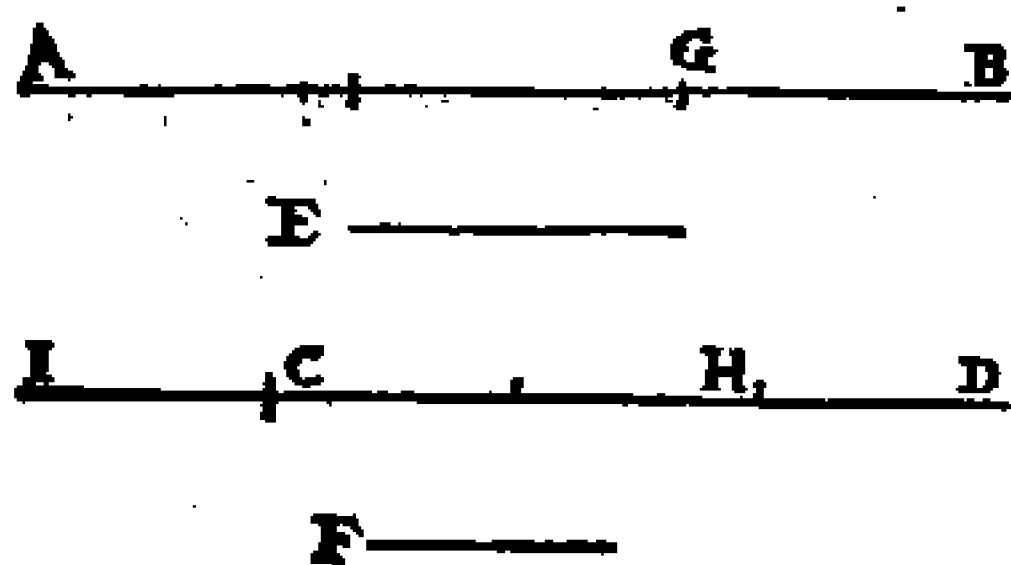
S C H O L I V M.

V N I V E R S I idipsum demonstrabitur propof. 19. in magnitudinibus cuiuscunque proportionis, & non tantum multiplici, ut hic factum est.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

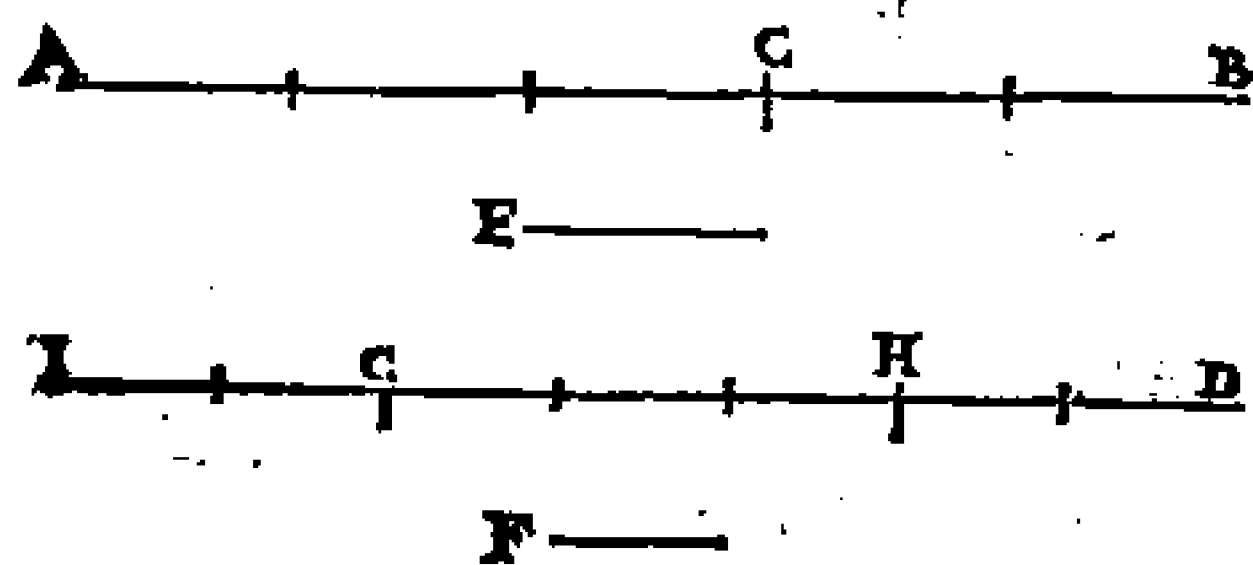
6.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æquemultiplices, & detractæ quædam sint earundem æquemultiplices: & reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æquæ ipsarum multiplices.



Sint magnitudines AB, CD , æquemultiplices ipsarum E, F ; & detractæ AG, CH , earundem E, F , æquemultiplices. Dico reliquas GB, HD , aut esse æquales eisdem E, F , aut certe earundem æquemultiplices. Cum enim AB , sit multiplex ipsius E , & ablata quoque AG , eiusdem E , multiplex; erit reliqua GB , vel æqualis ipsi E , vel eius multiplex; aliâs inæqualis, vel nō multiplex magnitudo, addita multiplici, componeret multiplicem, quod est absurdum. Sit igitur primū GB , æqualis ipsi E . Dico etiam HD , ipsi F , esse æqualem. Ponatur enim

CI , æqualis ipsi F . Et quia prima AG , tam est multiplex secundæ E , quā CH , tertia multiplex est quartæ F ; & quinta GB , æqualis est secundæ E , sicut & CI , sexta æqualis est quartæ F ; erit AB , prima cum quinta, ita multiplex secundæ E , ut HI , tertia cū sexta multiplex est quartæ F : Atqui CD , ipsius F , erat quoque tam multiplex quā AB , multiplex est ipsius E . *a 2. quinti.* Equemultiplices igitur sunt HI, CD , ipsius F ; Ideoque æquales inter se. Quare dempta CH , cōmuni, remanebunt GI, HD , æquales. Cum igitur CI , posita sit æqualis ipsi F , erit quoque HD , eidem F , æqualis. Quod est propositū. *d 6. pron.*



Si r deinde GB , multiplex ipsius E . Dico ita quoque esse multiplicem HD , ipsius F . Posita namque CI , ita multiplici ipsius F , ut est multiplex GB , ipsi E ; erit, ut prius, AB , ita multiplex ipsius E , ut HI , multiplex est ipsius F . Quare iterum æquales erunt HI, CD ; atque adeo dempta communi CH , & reliquæ GI, HD , æquales erunt: Sed CI , est ita multiplex ipsius F , ut GB , ipsius E , multiplex est, ex hypothesi. Igitur & HD , tam

multiplex erit ipsius F , quā GB , ipsius E , multiplex est. quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æquemultiplices, &c. Quod ostendendum erat.

S C H O L I V M.

H O C quoque ostendemus vniuersè propof. 24. in omni genere proportionis.

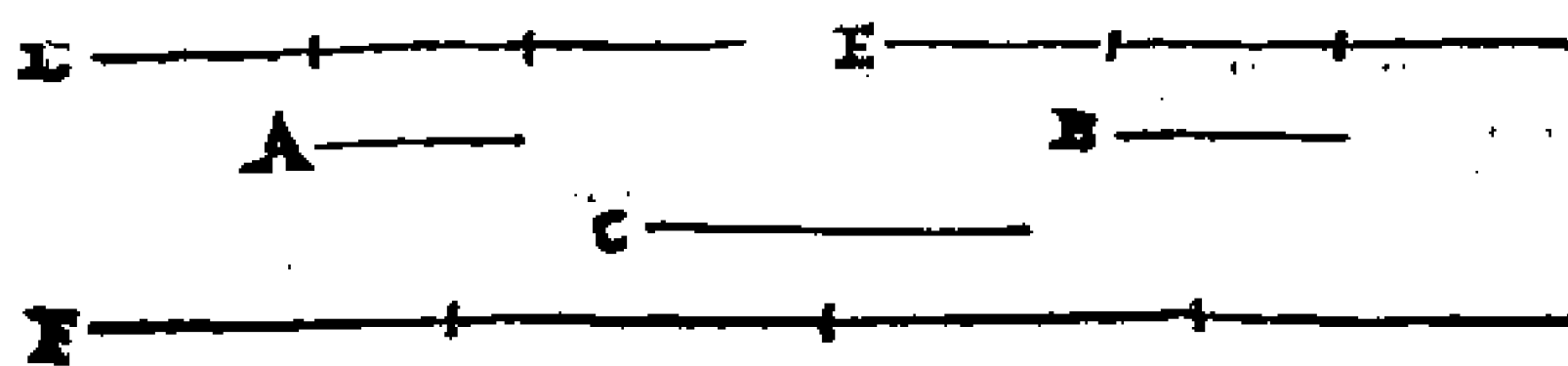
B R E V I V S totam propof. ita demonstrabimus. Quoniam AB, CD , sunt ipsarum E, F , æquemultiplices; erūt in AB , tot magnitudines æquales ipsi E , quot sunt magnitudines in CD , æquales ipsi F . Rursus quia AG, CH , earundem E, F , æquemultiplices sunt; erūt quoque in AG , tot magnitudines ipsi E , æquales, quot sunt magnitudines in CH , ipsi F , æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus AB, CD , demantur multitudines æquales AG, CH ; remanebunt multitudines GB, HD , æquales. Quare toties continebitur E , in GB , quoties F , continebitur in HD : ac proinde si GB , æqualis sit ipsi E , erit quoque HD , ipsi F , æqualis: Si autem GB , multiplex sit ipsius E ; erit ita multiplex HD , ipsius F , ut GB , multiplex est ipsius E : quandoquidem toties E , in GB , continetur, quoties F , in HD , existit, ut ostensum est.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

ÆQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad, æquales.

Sint duæ magnitudines A, B , æquales inter se, & tertia quævis C . Dico $A, & B$, habere eandem proportionem ad C . Item C , vicissim ad $A, & B$, eandem quoque proportionem habere. Sumantur D, E , æquemultiplices ipsarum æqualium A, B , & eruntque D, E , æquales inter se. Capiatur rursus F , ut, cunque multiplex ipsius C . Quoniam igitur D, E , æquales sunt, sit ut utraque vel minor sit quā F , vel



æqualis, vel maior, iuxta quam-
cunque multiplicationem ea
multiplicia sumantur. Quare
cū D, E, æquemultiplices pri-
mæ A, & B, tertiæ, minores sint
ipsa F, multiplice secundæ &

a 6. definit.
quinti.

quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores: erit ea pro-
portio primæ A, ad C, secundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.

d 6. definit.
quinti.

Eodem pacto ostendemus F, vel minorem esse utraque D, E, vel utrique æqualem, vel maio-
rem. Igitur cū F, multiplex primæ & tertiæ C, vñ deficiat à D, & E, æquemultiplicibus secundæ
A, & quartæ B; vel vñ æqualis sit, vel maior; Erit quoque ea proportio primæ C,
ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Posset brevius
secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inuersione ratione. Cū enim osten-
sum iam sit, esse A, ad C, ut B, ad C; erit conuertendo C, ad A, ut C, ad B. Æquales ergo
ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales, quod erat demonstrandum.

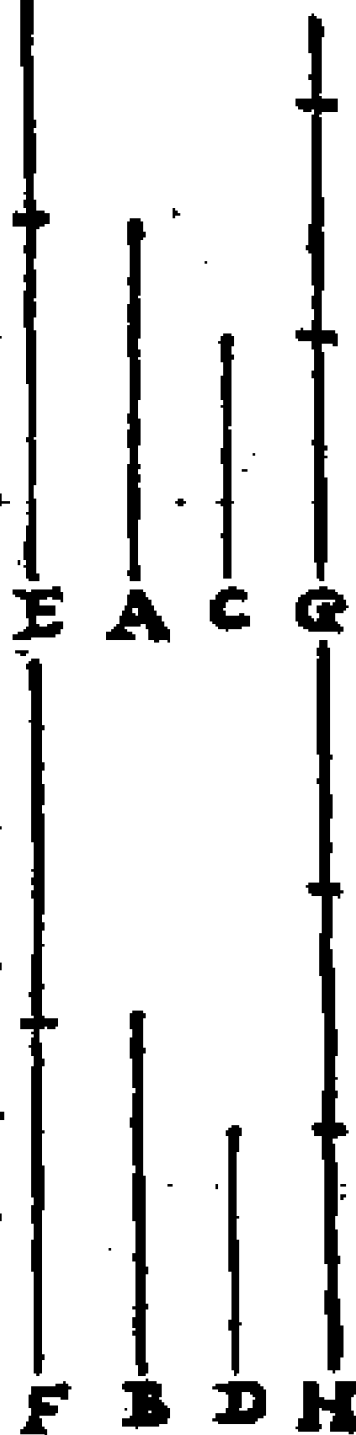
SCHOLIUM.

PERSPICUUM est, nihil posse in hac propos. colligi ex 6. defin. iuxta expositionem Cam-
pani ac Orontij. Neg, enim per demonstrationem constat, veramq, multiplicem D, & E, ean-
dem habere proportionem ad multiplicem F: sed solum cū illa sint æquales, utramque esse vel
minorem, vel æqualem, vel maiorem multiplici F. Idemq, cernitur in omnibus fere propositio-
nibus, quæ per 6. defin. propositum colligunt: Ut merito illa expositio reiecta sit à nobis.

a 6. pron.

Eodem fere modo ostendimus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales, eandem
habere rationem, si loco multiplicis F, sumantur dua æquemultiplices: quod Euclides ob faci-
litatem omisit: utitur tamen eo nonnunquam in iis, quæ sequuntur, perinde ac si in hac pro-
positione 7. esset demonstratum. Sint enim tam A, & B, inter se æquales, quàm C, & D, inter
se. Dico esse A, ad C, ut B, ad D. Sumptis enim E, & F, æquemultiplicibus ipsarum A, & B, pri-
mæ & tertiæ. Item G, & H, æquemultiplicibus ipsarum C, & D, secundæ & quartæ; erunt
tam E, & F, inter se æquales, quàm G, & H, inter se. Quare si E, multiplex prima deficiat à G,
multiplice secundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplice quartæ deficiet: & si æqualis,
æqualis: & si superat, superabit. Eadem ergo est proportio A, prima ad C, secundam, quæ B,
tertia ad D, quartam. Quod est propositum.

b 6. defin.
quinti.

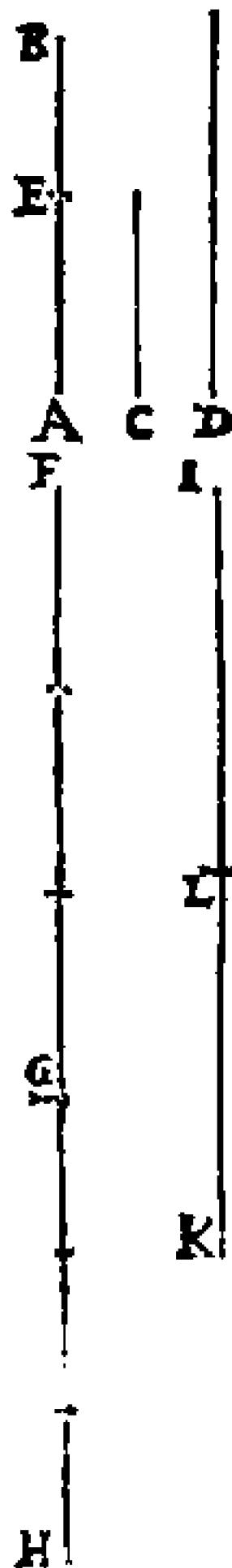


8.

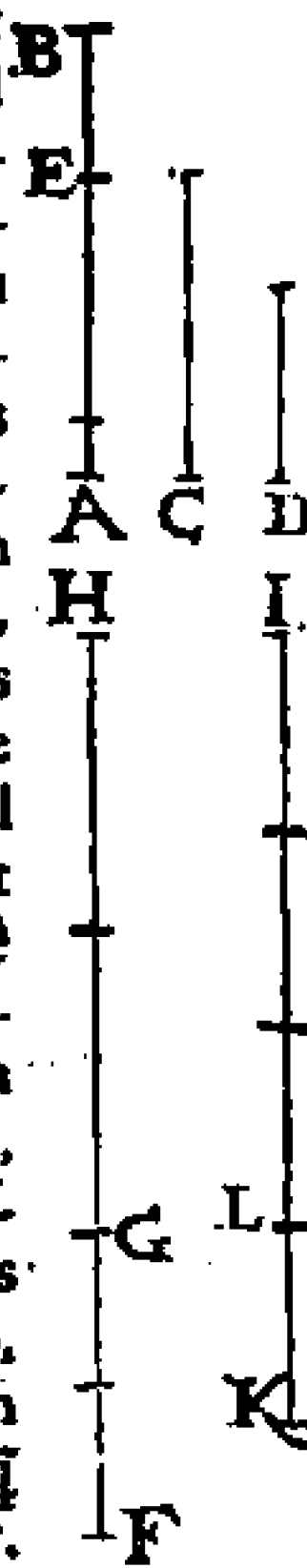
THEOR. 8. PROPOS. 8.

INÆQUALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem ra-
tionem habet, quàm minor: Et eadem ad minorē, maiorem rationem
habet, quàm ad maiorem.

a 1. quinti.



SINT magnitudines inæquales, AB, maior, & C, minor: Tertia autem quælibet
D. Dico proportionem AB, ad D, maiorem esse proportionem C, ad D. At
è conuerso, maiorem esse proportionem D, ad C, quàm D, ad AB. Intel-
ligatur enim in AB, magnitudine maiore, magnitudo AE, æqualis mi-
nori C, ut sit reliqua EB. Utraque deinde EB, AE, æqualiter multi-
plicetur, hac lege, ut GF, multiplex ipsius EB, maior quidem sit, quàm
D: At HG, multiplex ipsius AE, non sit minor eadem D, sed vel ma-
ior, vel æqualis. In priori figura necesse fuit sumere GF, HG, triplas
ipsarum EB, AE, quia dupla ipsius AE, esset minor, quàm D. Loco tri-
plarum potuissent accipi quæcunque aliz æquemultiplices maiores. In
posteriori autem figura satis est, sumere ipsarum EB, AE, duplas GF,
HG; quia utraque GF, HG, maior est, quàm D. Possent tamen pro duplis
sumi quæcunque aliz maiores æquemultiplices. Quoniam igitur duæ
FG, GH, æquemultiplices sunt duarum BE, EA; erit & tota FH, ita mul-
tiplex totius AB, ut HG, ipsius AE, hoc est, ipsius C, cū æquales sint
positæ C, & AE. Capiatur quoq; ipsius D, multiplex IK, quæ proximè
maior sit, quàm HG, nempe dupla, ut in priori figura. Quod si du-
pla maior non fuerit, quàm HG, sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In
posteriori figura accepta est IK, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla,
quàm tripla minor est, quàm HG, at quadrupla iam maior est. Abscis-
sa ergo LK, quæ æqualis sit ipsi D, non erit IL, maior, quàm HG, (aliàs
IK, non esset multiplex ipsius D, proximè maior quàm HG; sed & IL,
maior quoque esset quàm HG. Quod si IK, dupla sit ipsius D, perspicuum
est, IL, non esse maiorem, quàm HG, cū HG, posita sit non minor quàm
D, hoc est, quàm IL,) & idcirco HG, erit vel æqualis ipsi IL, vel maior.



Et

Et quia FG, maior est posita, quàm D: LK, verò æqualis eidem D: erit quoque FG, maior quàm LK. Cum ergo HG, non minor sit quàm IL, vt demonstratum est, sed vel æqualis, vel maior: erit tota FH, maior quàm IK. Itaque cum FH, HG, sint æquemultiples primæ AB, & tertiæ C: atque IK, multiplex ipsius D, quæ instar est secundæ & quartæ: sit autem FH, multiplex primæ, maior quàm IK, multiplex secundæ: At HG, multiplex tertiæ non sit maior, quàm IK, multiplex quartæ, immò minor, ex hypothesi: (sumpta enim est IK, multiplex ipsius D, maior quàm HG,) ^{a 8. definit. quinti.} erit maior proportio AB, primæ ad D, secundam, quàm C, tertiæ ad D, quartam.

QUONIAM verò è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertiæ: At C, secunda, & AB, quarta) maior est quàm HG, multiplex secundæ C: At IK, multiplex tertiæ D, maior non est, quàm FH, multiplex quartæ AB, immò minor, cum FH, maior sit, quàm IK, vt ostensum est: ^{b 8. definit. quinti.} erit maior proportio D, primæ ad C, secundam, quàm D, tertiæ ad AB, quartam: quod est propositum. Inæqualium igitur magnitudinū maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

RECTE autem animaduertit Petrus Nonius in sua Algebra de Proportionibus agens, per hanc propos. 8. probari non posse, angulum rectum maiorem habere proportionem ad quemvis alium angulum, quam angulum semicirculi ad eundem illum angulum, quanquam rectus angulus maior sit angulo semicirculi: quia excessus anguli recti supra angulum semicirculi, qui est angulus contingentia, quantumvis multiplicatus superare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propos. demonstratione requiritur. Nam FG, multiplex excessus EB, superare debet tertiam magnitudinem D, vt patuit. Neq. hoc mirum cupiam videatur. Nam angulus rectus ad angulum semicirculi nō dicitur proprie habere proportionem, cum eum excedat angulo contactus, qui non eiusdem naturæ est cum utroque angulo, quod ita multiplicari non possit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim, si ad lineam vnius palmi addi posset vnū punctum, vt fieret linea vno puncto lineam vnius palmi excedens, non diceretur proprie linea illa composita maior, quàm linea vnius palmi, propterea quod excessus est indiuisibilis, & alterius naturæ: Item quemadmodum, si ad figuram planam quancumq. apponeretur linea vnius palmi, non diceretur hac magnitudo ex diuersis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam habere proprie proportionem maioris inæqualitatis: quod excessus non sit eiusdem naturæ cum plana illa figura: Ita quoq. non habet angulus rectus proprie ad angulum semicirculi proportionem maioris inæqualitatis: quippe cum angulo semicirculi adiectus sit angulus contactus, vt efficiatur angulus rectus: atq. adeo rectus angulus angulum semicirculi excedat quantitate diuersæ naturæ, vt dictum est. Itaq. non solum ea magnitudines proportionem proprie non habent, quarum alterutra multiplicata alteram superare nequit, vt ad defin. 5. huius lib. diximus: sed neq. ea proprie dicuntur habere proportionem, vt idem Petrus Nonius annotauit, quarum excessus diuersam ab eis naturam habet, cuiusmodi sunt angulus rectus, & angulus semicirculi. Adeo vt tunc solum proprie magnitudines dicantur habere proportionem inter se, quando & alterutra multiplicata alteram superare potest, & excessus earum multiplicatus superare quoq. potest vtramq. Fateor rem hanc esse perobscuram, & quæ vix recte intelligi possit: Verum hoc prouenit ex indiuisibilitate anguli contactus per lineam rectam. Huius generis sunt alia nonnulla in rebus Geometricis, quæ verissima quidem sunt propter demonstrationem euidentem, sed alia ex parte talem inducunt difficultatem, vt ab ea non facile intellectus se expediat. Verbi gratia, Verissimum est sphaeram tangere planum in puncto, vt à Theodosio demonstratur propos. 3. lib. 1. Sed qua ratione fiat, vt hinc non sequatur, si globus continuè moueatur super planum, lineam rectam describi compositam ex punctis, nemo ad hunc vsq. diem sic explicauit, vt omni ex parte difficultas sit sublata.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

QUAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, & quoque sunt inter se æquales.

HABRANT primū A, & B, eandem rationem ad C. Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, maior, & B, minor. ^{c 8. quinti.} Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quàm B, minoris ad eandem C: quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B: Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor: ^{d 8. quinti.} haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quàm ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quàm B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

CONVERTIT hac propositio nona vtramque partem theorematis septimi, vt manifestum est.



EVCLIDIS GEOMETRIÆ THEOR. 10. PROPOS. 10.

10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

a 7. quinti.
b 8. quinti.

c 7. quinti.
d 8. quinti.

HABEAT primum A, ad C, maiorem proportionem, quàm B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quàm B. Si enim A, foret ipsi B, æqualis, & haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quàm B, haberet B, maior ad C, proportionem maiorem, quàm A, minor ad eandem C: quod est cōtra hypothesin. Non est igitur A, æqualis vel minor quàm B, sed maior. Habeat secundo C, ad B, maiorem proportionem, quàm ad A. Dico B, minorem esse, quàm A. Non enim æqualis erit B, ipsi A: alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B: quod est contra hypothesin. Neque verò B, maior erit, quàm A: aliàs haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem, quàm ad B, maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quàm A: quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinē rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

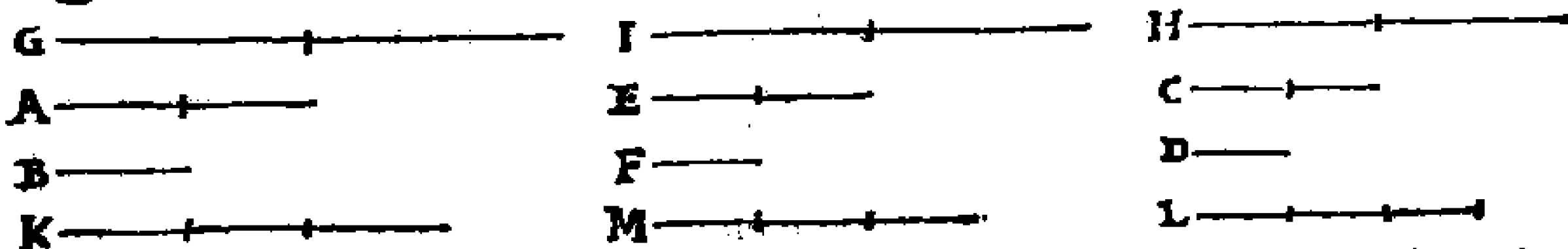
S C H O L I V M.

Hæc quoque propositio convertit utramque partem theorematu 8. ut perspicuum est.

11.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

QUAE eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem.



e 6. definit.
quinti.

f 6. definit.
quinti.

g 6. definit.
quinti.

SINT proportiones A, ad B, & C, ad D, eadem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se secundum defin. 6. hoc est, sumptis æquemultiplicibus ipsarum A, C: Item æquemultiplicibus ipsarum B, D, semper contingere, ut multiplices ipsarum A, C, à multiplicibus ipsarum B, D, vel vnā deficient, vel vnā æquales sint, vel vnā excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æquemultiplices quæcunque G, H, I: & ad omnes consequentes B, D, F, aliz quæcunque æquemultiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam ut E, tertia ad F, quartam: fit, ut si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ: Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit I, ipsi M, vel maior: Sed (ut eodem modo ostendetur) si I, minor est, quàm M, vel æqualis, vel maior, est quoque H, minor, quàm L, vel æqualis, vel maior: propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D: Et si G, æqualis est, vel maior quàm K, etiam H, æqualis erit, vel maior quàm L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque aliis æquemultiplicibus. Quapropter erit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem. Quod erat ostendendum.

S C H O L I V M.

| | | | |
|-------|-------|--------|-------|
| A, 3. | B, 2. | C, 6. | D, 4. |
| E, 9. | F, 6. | G, 12. | H, 8. |

EAD E M ratione, Quæ eisdem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem. Ut si sit, ut A, ad B, ita C, ad D: sit autem E, ad F, ut A, ad B. & G, ad H, ut C, ad D: erit quoque E, ad F, ut G, ad H.

a 11. quinti.

b 11. quinti.

Quia enim proportionibus E, ad F, & C, ad D, eadem sunt proportioni A, ad B: erit ut E, ad F, ita C, ad D. Rursus quia proportionibus E, ad F, & G, ad H, eadem sunt proportioni C, ad D: erit quoque ut E, ad F, ita G, ad H.

| | | | | | |
|--------|-------|--------|--------|--------|--------|
| A, 3. | B, 2. | C, 6. | D, 4. | E, 9. | F, 6. |
| G, 12. | H, 8. | I, 18. | K, 12. | L, 30. | M, 20. |

R V R s v s, si sint proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eadem inter se: sit autem ut A, ad B, ita G, ad H; & ut C, ad D, ita I, ad K;

& ut E, ad F, ita L, ad M, erunt quoque proportionibus G, ad H; I, ad K; & L, ad M, eadem inter se. Nam ut proxime in quatuor proportionibus ostensum est, ut G, ad H, ita est I, ad K; propterea quod hæ proportionibus similes sunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodem modo erit ut I, ad K, ita L, ad M; cū proportionibus I, ad K, & L, ad M, eadem sint proportionibus C, ad D, & E, ad F, quæ æquales sunt. Item erit ut G, ad H, ita L, ad M: cū hæ proportionibus eadem sint proportionibus A, ad B, & E, ad F, quæ æquales ponantur. Eadem ratio est de pluribus.

THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

12.

Si sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.



Quod in propol. 1. de proportionibus multiplicibus demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B, C, D, E, F, proportionales, hoc est, sit A, ad B, vt C, ad D, & E, ad F. Dico vt est vna antecedentium ad vnam consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus consequentium, erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, vt vna vnus, nempe vt G, ipsius A; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, vt vna vnus, nimirum vt K, ipsius B. Quoniam verò ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam, sit vt si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M; Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior: Ac proinde si G, minor est, vel æqualis, vel maior quam K; & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores sint, vel æquales, vel maiores. Quocirca vt est A, prima ad B, secundam: ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

a 1. definit.

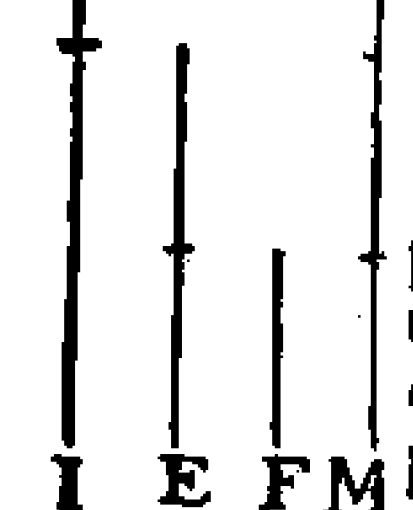
b 8. definit. quinti.

c 6. definit. quinti.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

13.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.



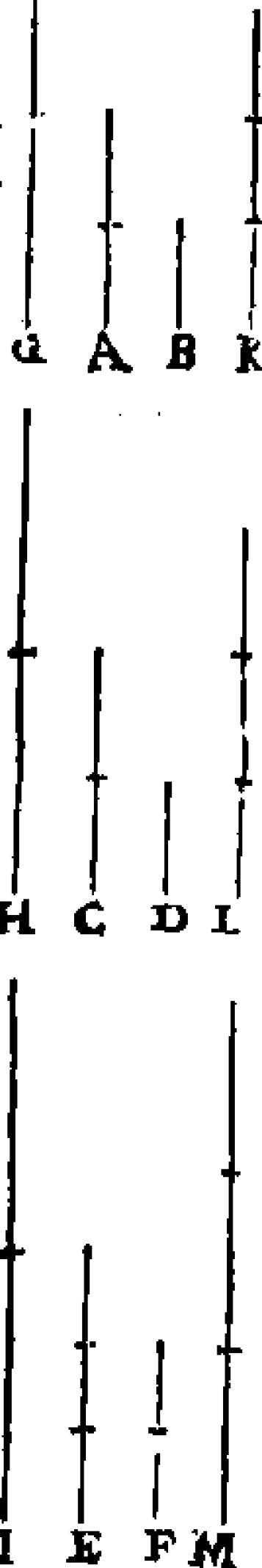
Si r prima A, ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, secundam esse maiorem, quam E, quintæ ad F, sextam, secundum definitionem 8. hoc est, sumptis æque multiplicibus ipsarum A, E: Item æque multiplicibus ipsarum B, F, contingere posse, vt multiplex ipsius A, excedat multiplicem ipsius B, at multiplex ipsius E, multiplicem ipsius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium: Et K, L, M, æque multiplicibus consequentium, cum sit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam, sit vt si G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipsam L, non necessario I, excedit ipsam M, sed æqualis aliquando erit, vel minor, quod maior ponatur proportio C, primæ ad D, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Igitur si G, excedit K, non necessario I, excedit M. Maior est ergo proportio A, primæ ad B, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quam ob rem si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod ostendendum erat.

S C H O L I V M.

Quod si proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, sextam, erit quoque proportio A, primæ ad B, secundam minor quam E, quintæ ad F, sextam. Si enim proportio C, ad D, minor est quam E, ad F, hoc est, proportio E, primæ ad F, secundam maior, quam C, tertiæ ad D, quartam, sit vt si I, excedit ipsam M, non necessario H, excedat ipsam L, sed aliquando deficiat, vel ei æqualis sit. Sed si H, deficiat ab L, vel ei æqualis est, etiam G, deficiet à K, vel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare si I, excedit ipsam M, non necessario G, excedet ipsam K, atq; idcirco maior erit proportio E, primæ ad F, secundam, quam A, tertiæ ad B, quartam, hoc est, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F: Quod est propositum.

Eodem modo: Si prima ad secundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque multò magis ad secundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

Quod si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque multò magis ad secundam, minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.



d 6. definit. quinti.

e 8. definit. quinti.

f 8. definit. quinti.

a 8. definit. quinti.

b 6. definit. quinti.

c 8. definit. quinti.

14.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima verò quàm tertia maior fuerit, erit & secunda maior, quàm quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si verò minor, & minor erit.

SI T enim A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico si A, maior fuerit, quàm C, fore quoque B, maiorem quàm D. Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quoque esse B, ipsi D: Si denique A, minor fuerit quàm C, minorem quoque esse B, ipsi D. Sit primum A, maior, quàm C, eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quàm C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam: Proportio autem A, tertiæ ad B, quartæ, maior est, vt ostendimus, quàm C, quintæ ad B, sextam: ^b Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quàm C, quintæ ad B, sextam. ^c Minor est ergo D, quàm B: Ideoque B, maior erit quàm D. Quod est propositum.

SI T deinde A, æqualis ipsi C: ^d eritque idcirco A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportionibus C, ad D, & C, ad B, eadem sunt proportioni A, ad B, ^e erunt quoque inter se eadem proportionibus C, ad D, & C, ad B: ^f Ideoque æquales erunt B, & D. Quod est propositum.

SI T tertio A, minor quàm C: ^g eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quàm A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam: est autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quàm C, quintæ ad B, sextam: ^h Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quàm C, quintæ ad B, sextam: ⁱ Ideoque B, minor erit, quàm D. quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

Q U O D si secunda maior sit, vel æqualis, vel minor, quàm quarta: erit quoque eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quàm tertia. Sit enim primum B, maior, quàm D, vt in prima figura. Dico & A, maiorem esse, quàm C. Cum enim B, maior sit, quàm D: ^a erit maior proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur est, vt prima A, ad secundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam ostensa est maior, quàm C, quintæ ad B, sextam: ^b erit quoque proportio A, primæ ad B, secundam maior, quàm C, quintæ ad B, sextam: ^c ac proinde A, maior erit, quàm C. quod est propositum.

D E I N D E sit B, æqualis ipsi D, vt in secunda figura. Dico & A, ipsi C, esse æqualem. Cum enim B, ipsi D, sit æqualis: ^d erit C, ad B, vt C, ad D: Est autem quoque A, ad B, vt C, ad D. ^e Igitur erit quoque ita A, ad B, vt C, ad B: ^f proptereaq; A, ipsi C, æqualis erit. quod est propositum.

T E R T I O sit B, minor quàm D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem esse, quàm C. Cum enim B, minor sit, quàm D, ^g erit minor proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur est, vt A, prima ad B, secundam: ita C, tertia ad D, quartam: Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam ostensa est minor, quàm C, quintæ ad B, sextam: ^h erit quoque proportio A, primæ ad B, secundam minor, quàm C, quintæ ad B, sextam: ⁱ Igitur maior erit C, quàm A: ac proinde A, minor erit, quàm C. quod est propositum.

N O N demonstrauit autem Euclides, si prima maior est, vel æqualis, vel minor, quàm secunda, tertiam quoque maiorem esse, vel æqualem, vel minorem, quàm quartam: (quo tamen argumentandi modo plerique Geometrarum, tum veterum, tum recentiorum vtuntur) quia id perspicuum est ob similitudinem proportionum. Hinc enim fit, si vtræque est proportio maioris inæqualitatis: vtramque antecedentem magnitudinem, id est, primam ac tertiam maiorem esse vtræque magnitudine consequente, hoc est, secunda ac quarta: Si verò vtræque proportio est æqualitatis, vtramque magnitudinem antecedentem vtrique consequenti æqualem esse. Si denique vtræque proportio est minoris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem vtræque consequente esse minorem.

V E R B I gratia, si est vt A, ad B, ita C, ad D: erit vtræque proportio vel maioris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Quocirca si A, prima maior est, quàm B, secunda, erit & C, tertia maior, quàm D, quarta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. Quod est propositum. Quod tamen Geometricè ostendemus cum Federico Commandino, licet id non sit necessarium, ad propositionem decimam sextam

huius libri.

THEOR.

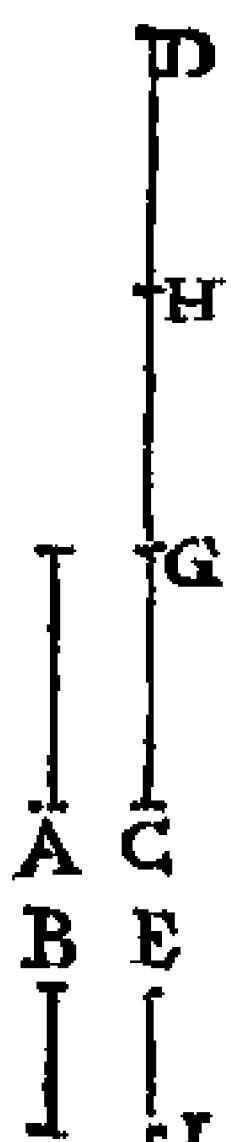
LIBER QUINTVS.
THEOR. 15. PROPOS. 15.

271

15.

PARTES cūm pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si pro-
ut sibi mutuò respondent, ita sumantur.

SINT partium A, & B, æquemultiplices CD, & EF. Dico ita esse CD, ad EF,
vt A, ad B. Cūm enim CD, & EF, sint æquemultiplices ipsarum A, & B: contine-
bitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Diuidatur ergo CD, in partes CG, GH,
HD, æquales ipsi A; & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipsi B: ^{a 7. quinti.} eritque CG, ad
EI, vt A, ad B, quòd CG, & A, æquales inter se sint, necnon EI, & B. Eadem ratio-
ne erit GH, ad IK; & HD, ad KF, vt A, ad B: ^{b 11. quinti.} ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quocirca vt CG, ad EI, hoc est, vt A, ad B, ^{c 12. quinti.}
ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, simul, ad omnes EI, IK, KF, si-
mul. quod est propositum. Partes itaque cūm pariter multiplicibus, &c. Quod e-
rat demonstrandum.

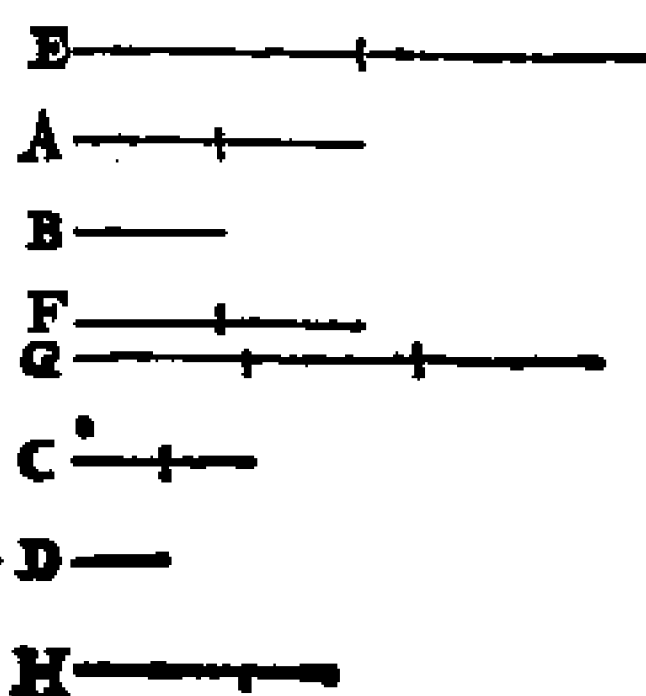


THEOR. 16. PROPOS. 16.

16.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim pro-
portionales erunt.

Hic demonstratur Alterna, siue Permutata pro-
portio, seu ratio, quæ definitione 12. explicata est. Sit
enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim, seu permu-
tando, esse quoque A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim
ipsarum A, B, primæ, ac secundæ, æquemultiplices E,



F: Item ipsarum C, D, tertiæ & quartæ, æquemultiplices G, H: ^{d 15. quinti.} erit-
que E, ad F, vt A, ad B: cūm E, & F, sint pariter multiplices partium
A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cūm igitur propor-
tiones E, ad F, & C, ad D, sint eadem proportioni A, ad B: ^{e 11. quinti.} erunt &
ipsæ inter se eadem. Rursus quia proportionibus E, ad F, & G, ad H, ex-
dem sunt proportioni C, ad D: ^{f 11. quinti.} erunt & ipsæ eadem inter se: hoc est,
vt est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. ^{g 14. quinti.} Quare si E, prima maior est, quàm
G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque F, secunda maior, quàm H, quarta, vel æqualis, vel
minor, in quacunque multiplicatione accepta sint æquemultiplicia E, F, & æquemultiplicia G,
H. ^{h 6. definiti.} Est igitur A, prima ad C, secundam, vt B, tertia ad D, quartam (cūm E, & F, sint æquemultipli-
ces primæ A, & tertiæ B; At G, & H, æquemultiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vnà
deficiant, vel vnà æquales sint, vel vnà excedant, &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur ma-
gnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.

S C H O L I V M.

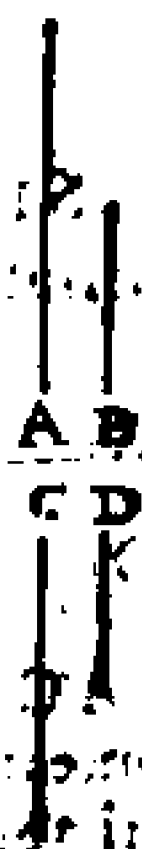
PORRO demonstratio huius propositionis locum solum habet, quando quatuor magnitudines sunt eius-
dem generis. Nam si dua A, B, essent vnius generis, & dua C, D, alterius, essent quoque, multiplices E, F, vnius ge-
neris, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius, in quo nimirum existunt C, D. Quare nō posset
dici E, maior quàm G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vsurpanda igitur
erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli Philosophi nō ad-
uertentes in graues errores incidunt, cūm eam adhibeant in rebus diuersorum generum.

Ex hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionū osten-
dimus, recepinusque nos demonstraturos hoc loco, videlicet.

Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima ve-
rò, quàm secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quàm quarta; Et si æqualis, æ-
qualis; & si minor, minor.

QUANQUAM id, quod hic proponitur, per se notum sit, vt ad propositionem 14. diximus,
demonstrabimus tamen illud cum Federico Commandino, hoc modo: Sit vt A, prima ad B, secun-
dam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quàm B, secunda; & C, tertiam maio-
rem esse quarta D, & si æqualis, æqualem: & si minor, minorem. ^{a 16. quinti.} Erit enim permutando, vt A,
ad C, ita B, ad D. ^{b 14. quinti.} Quare si A, prima maior est, quàm B, tertia, erit & C, secunda maior, quàm D,
quarta; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod est propositum.

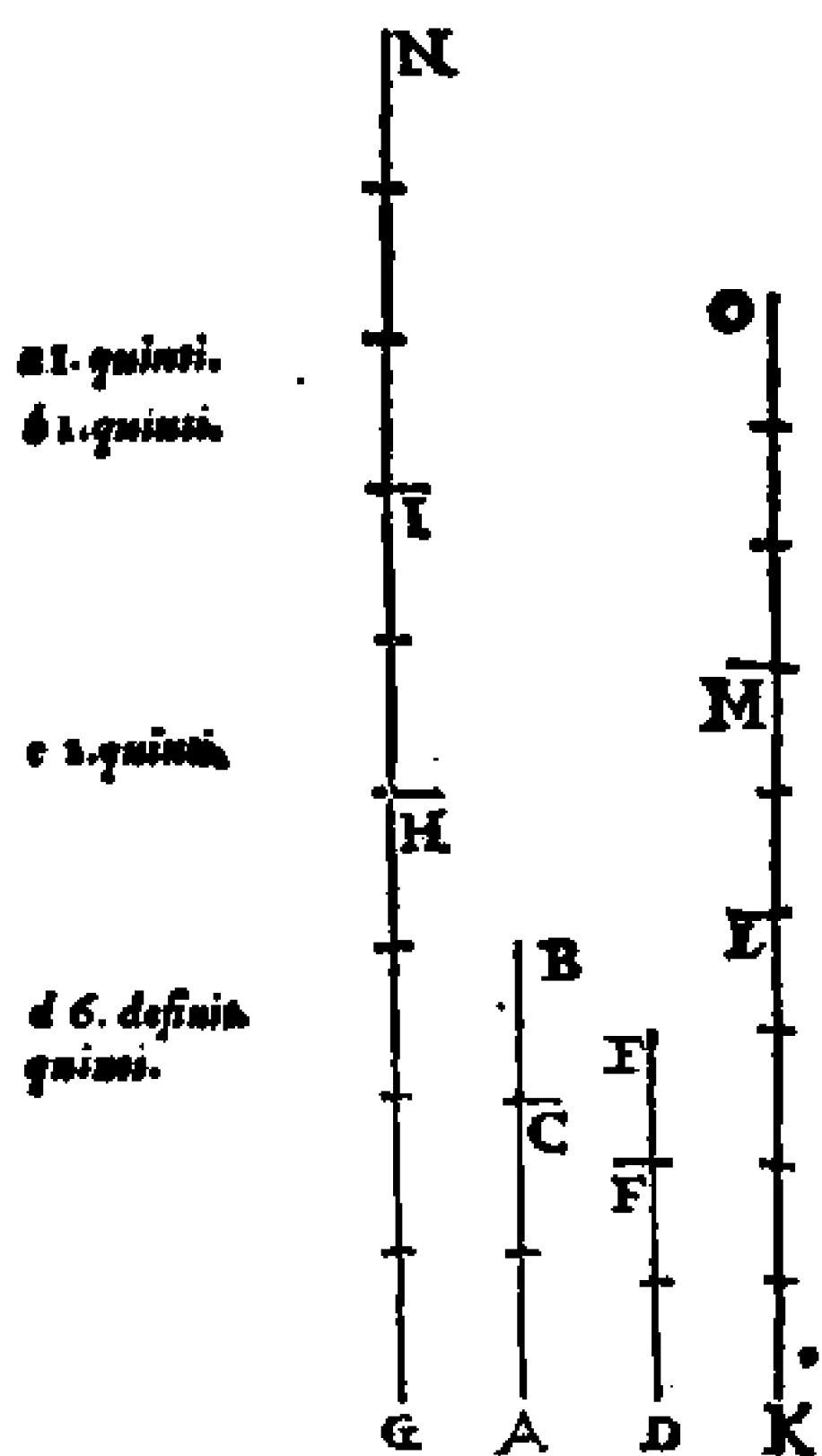
SED & hac demonstratio locum duntaxat habet, cūm quatuor magnitudines sunt eiusdem
generis. Quare satius est illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propositionem de-
cimam quartam factum est. Ita enim verum erit semper id, quod proponitur, etiam si magnitudi-
nes A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: imò verò licet A, B, sint quantitates conti-
nuæ, & C, D, numeri, &c.



47.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

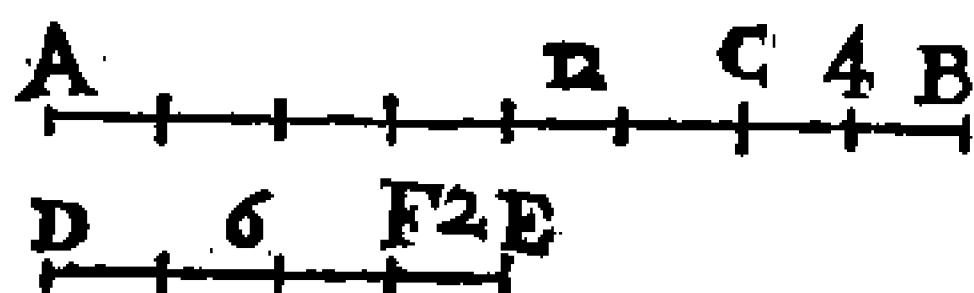
Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.



Hoc loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quam definitione 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, ut DE, ad FE. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, ut est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE, in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æquemultiplices capiatur eodem ordine GH, HI, KL, LM: ^a eritque GI, ita multiplex ipsius AB, ut est GH, ipsius AC, hoc est, ut KL, ipsius DE. Sed ut est multiplex KL, ipsius DE, ^b ita quoque multiplex est KM, ipsius DE. Æquemultiplices ergo sunt GI, KM, ipsarum AB, DE. Capiantur rursus IN, MO, æquemultiplices ipsarum CB, FE. Quoniam igitur sic est multiplex HI, prima secundæ CB, ut LM, tertia quartæ FE: Item tam est multiplex IN, quinta secundæ CB, quam multiplex est MO, sexta quartæ FE: ^c erit & HN, sic multiplex secundæ CB, ut LO, multiplex est quartæ FE. Itaque cum sit AB, prima ad CB, secundam, ut DE, tertia ad FE, quartam: sumptæque sint æquemultiplices GI, KM, primæ ac tertiæ AB, DE: Item secundæ & quartæ CB, FE, æquemultiplices HN, LO, ^d sit ut si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE: & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Quod si deficiat tã GI, ab HN, quam KM, ab LO: ablati communibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL, ab MO. Et si GI, æqualis fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO, ablati communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipsi IN, & KL, ipsi MO. Et si denique GI, excefferit ipsam HN, & KM, ipsam LO: ablati communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipsam IN, & KL, ipsam

MO. Quam ob rem cum GH, KL, sumptæ sint æquemultiplices primæ AC, & tertiæ DF, Item IN, MO, æquemultiplices secundæ CB, & quartæ FE: ostensumque sit, (in quacunque multiplicatione illæ æquemultiplices fuerint acceptæ) æquemultiplices primæ & tertiæ ab æquemultiplicibus secundæ & quartæ, vel vnâ deficere, vel vnâ æquales esse, vel vnâ excedere: ^e Erit AC, prima ad CB, secundam, ut DF, tertia ad FE, quartam. quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.^o

SCHOLIUM.



Ex his facile demonstrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 11. Diuisionem rationis conuersam diximus: Hoc est, si est, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE; esse quoque, ut CB, ad AC, ita FE, ad DF. quod ita patet. Quoniam est ut AB, ad CB, ita DE, ad FE; ^a erit diuidendo, ut AC, ad CB, ita

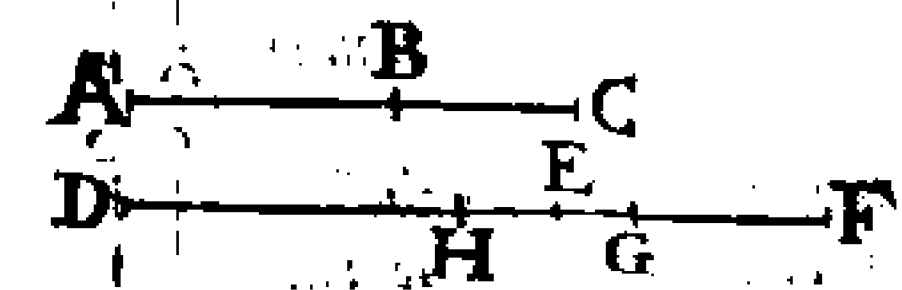
DF, ad FE. Igitur conuertendo erit quoque, ut CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.

Nr 110 etiam negotio demonstrabitur modus ille argumentandi, quem ad eandem definit. 15. Diuisionem rationis contrariam appellauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est, quam consequens: non autem maior, ut in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proximè demonstrauimus. Sit enim ut AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico esse quoque per Diuisionem rationis contrariam, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. ^b Ergo diuidendo, ut CB, ad AC, ita FE, ad DF: Ac proinde conuertendo rursus, ut AC, ad CB, ita DE, ad FE. Quod est propositum.

18.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.



DEMONSTRAT hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales, hoc est, AB, ad BC, ut DE, ad EF. Dico & compositas proportionales esse, hoc est, ut est AC, ad BC, ita esse DF, ad EF. Si enim non est, ut AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit DF, ad aliquam magnitudinem minorem ipsa EF, vel maiorem, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primum DF, ad GF, minorem ipsa EF, si fieri potest, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur est, ut AC, ad BC, ita DF, ad GF

ad GF; ^a Erit diuidendo quoque, vt AB, ad BC, ita DG, ad GF: Sed vt AB, ad BC, ita posita quoque est DE, ad EF. ^b Igitur erit etiam, vt DG, prima ad GF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DG, prima maior sit, quam DE, tertia, ^c erit quoque GF, secunda maior, quam EF, quarta, pars quam totum. Quod est absurdum.

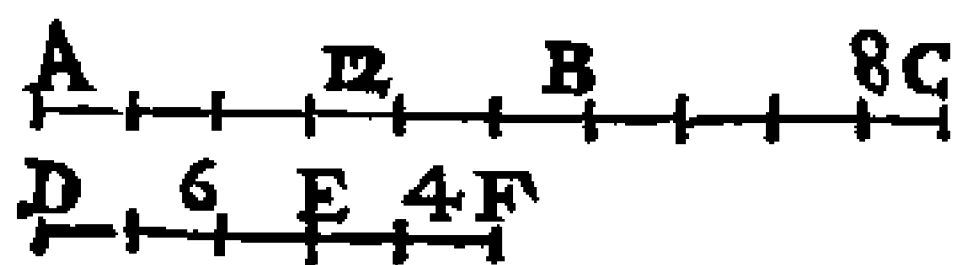
HABEAT deinde, si fieri potest, DF, ad HF, maiorem ipsa EF, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur est, vt AC, ad BC, ita DF, ad HF; ^d erit diuidendo quoque vt AB, ad BC, ita DH, ad HF. Sed vt AB, ad BC, ita posita etiam est DE, ad EF. ^e Igitur erit quoque vt DH, prima ad HF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DH, minor sit, quam DE, tertia, ^f erit quoque HF, secunda minor, quam EF, quarta, totum quam pars. quod est absurdum. Non igitur habebit DF, ad minorem ipsa EF, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo DF, ad ipsam EF, erit, vt AC, ad BC, quod est propositum. Itaque si diuise magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I V M.

HÆC propositiorem demonstrant nonnulli cum Campano eadem sermone ratione, qua antecedentem propositionem Euclides demonstrauit, hoc videlicet modo: Sint diuise magnitudines AC, CB, DF, FE, proportionales: hoc est, AC, ad CB, vt DF, ad FE. Dico eas etiam compositas proportionales esse, vt AB, quidem ad CB, ita DE, ad FE. Sumatur enim, vt in antecedente propositione, ipsarum AC, CB, DF, FE, æquemultiplices GH, HI, KL, LM: Item ipsarum CB, FE, alia æquemultiplices IN, MO; ^a eruntque rursus GI, KM, ipsarum AB, DE, æquemultiplices. ^b Item HN, LO, ipsarum CB, FE, vt in precedenti Theoremate ostensum est. Quoniam verò ponitur esse AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam: sumptaque sunt GH, KL, æquemultiplices prima ac tertia AC, DF: Item secunda & quarta CB, FE, æquemultiplices IN, MO, ^c sit vt si GH, multiplex prima AC, deficit ab IN, multiplice secunda CB, etiam KL, multiplex tertia DF, deficit ab MO, multiplice quarta FE: & si æqualis, æqualis: & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GH, ab IN, quam KL, ab MO; additis communibus HI, LM, deficiet quoque GI, ab HN, & KM, ab LO. Et si GH, æqualis fuerit ipsi IN, & KL, ipsi MO: additis communibus HI, LM, erit & GI, ipsi HN, æqualis, & KM, ipsi LO. Et denique, si GH, excefferit ipsam IN, & KL, ipsam MO; additis communibus HI, LM, excedet quoque GI, ipsam HN, & KM, ipsam LO. Quoniam ergo si GI, multiplex prima AB, deficit ab HN, multiplice secunda CB: etiam KM, multiplex tertia DE, deficit ab LO, multiplice quarta FE: & si æqualis, æqualis: & si excedit, excedit: ^d erit AB, prima ad CB, secundam, vt DE, tertia ad FE, quartam. Quod est propositum. Itaque si diuise magnitudines sint

proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

VERVM hac demonstratio non rectè colligit propositum ex defin. 6. propterea quod HN, LO, non sunt ita multiplices ipsarum CB, FE, vt multiplices accepta sunt IN, MO, earundem CB, FE. Vnde merito dubitare quis posset, an secundum quamcunque multiplicationem æquemultiplices seruent eam conditionem defectus, æqualitatis, atque excessus, quam Euclides in 6. defin. postulauit; quandoquidem in hac demonstratione liberum nō est assumere ipsarum CB, FE, quasunque æquemultiplices: sed tales duntaxat, quales consergunt ex HI, IN, & ex LM, NO, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propositionis demonstratione obijci non potest: quippe cum IN, MO, sumpta sint ipsarum CB, FE, æquemultiplices qualescunque, ipseque eadem remanent æquemultiplices earundem CB, FE, in diuise proportionalitate. Quam ob rem præferenda est Euclidis demonstratio huic demonstrationi Campani. Libuit autem eam quoque explicare, ne tam studiosus Lector, relicta illa Euclidis, arripere, vt bonam: præsertim cum ostensua sit, illa vero Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non potest.



HÆC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defin. 14. descripsimus. Priorem diximus compositionem rationis conuersam. Sit enim vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conuersam, esse quoque vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quoniam enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF,

erit conuertendo; vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. ^e Igitur & componendo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. quod est propositum.

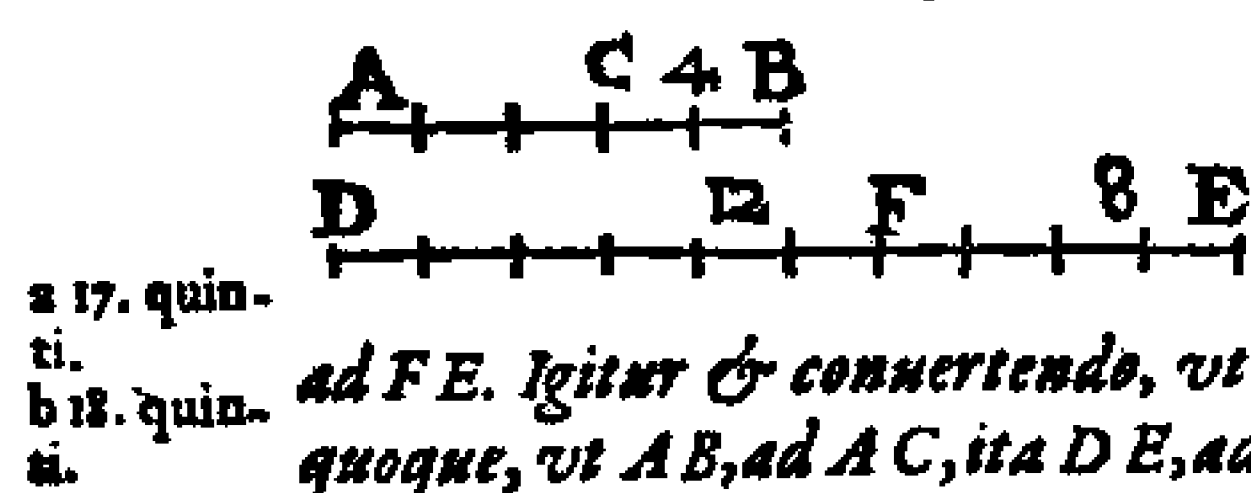
POSTERIOREM modum vocauimus compositionem rationis contrariam. Sit ergo rursus vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam, esse quoque vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quoniam enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF: erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. ^f Igitur & componendo erit vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: ac proinde conuertendo rursus erit, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: ut reliquum ad reliquum, ut totum ad totum se habebit.

Quod in propof. 5. demonstratum est de multiplici proportionione, hoc loco de omni proportionione, etiam irrationali demonstratur. Sit enim tota AB, ad totam CD, ut ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, esse ad reliquam FD, ut est tota AB, ad totam CD. Cum enim sit AB, ad CD, ut AE, ad CF, ^a erit & permutando AB, ad AE, ut CD, ad CF. ^b Dividendo ergo erit EB, ad AE, ut FD, ad CF. ^c Quare permutando rursus erit EB, ad FD, ut AE, ad CF, hoc est, ut tota AB, ad totam CD: cum posita sit AB, ad CD, ut AE, ad CF. Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM

Hinc facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur à conversione rationis, iuxta 16. defin.



Sit enim, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conversionem rationis esse quoque, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE, ^a erit quoque dividendo, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE.

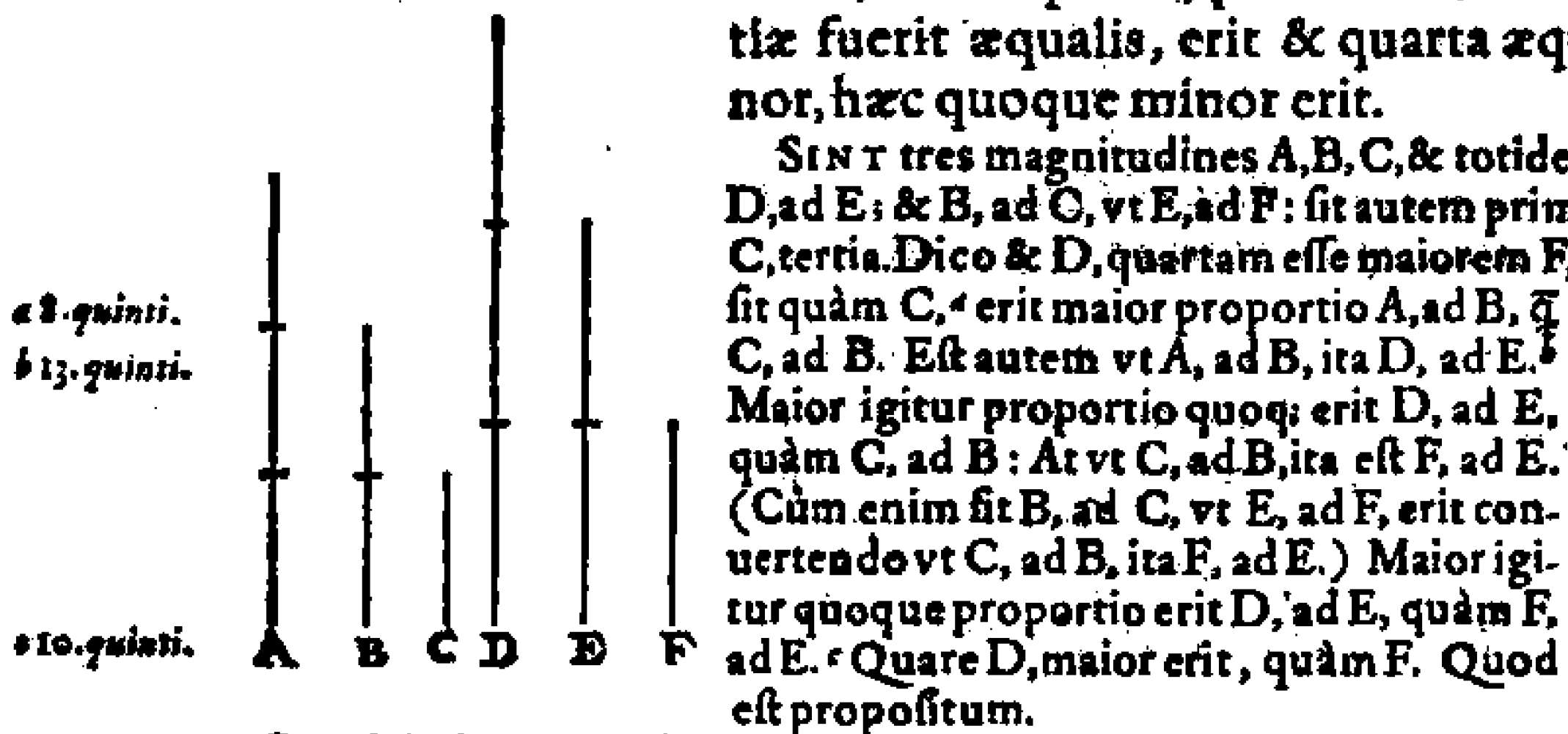
Igitur & convertendo, ut CB, ad AC, ita FE, ad DF: ^b ac propterea componendo quoque, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

SCHOLIUM

Omnes Euclidis interpretes conversionem rationis demonstrant hac ratione. Quoniam est, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE; ^c erit permutando, ut tota AB, ad totam DE, ita CB, ad FE. ^d Igitur ut tota AB, ad totam DE, ita erit quoque reliqua AC, ad reliquam DF. Et proinde permutando rursus, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

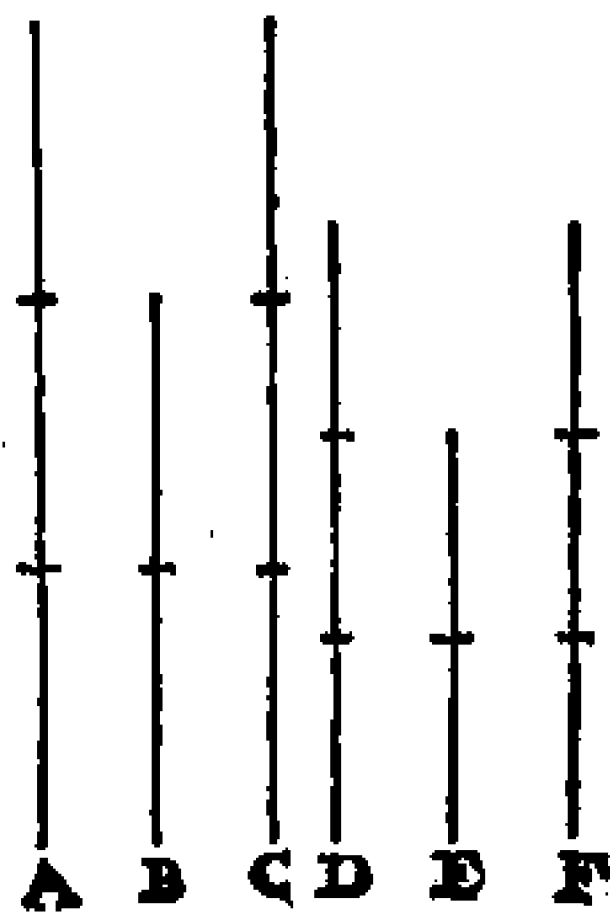
SE D quis non videt, hanc demonstrationem convenire solum magnitudinibus eiusdem generis, cum in ea usurpetur alterna, siue permutata proportio, quæ vim tantum habet in eiusdem generis magnitudinibus, ut & in defin. 12. & in propof. 19. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometra modum hunc argumentandi à conversione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione; nostram aliam excogitavimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiam si priores duæ quantitates AB, CB, sint unius generis, nimirum lineæ, posteriores verò duæ DE, FE, alterius generis, nimirum vel superficies, vel anguli, vel corpora, vel deniq; numeri: propterea quod in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.

Si sint tres magnitudines, & alia ipsi æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quàm tertia maior fuerit, erit & quarta, quàm sexta, maior. Quod si prima tertia fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

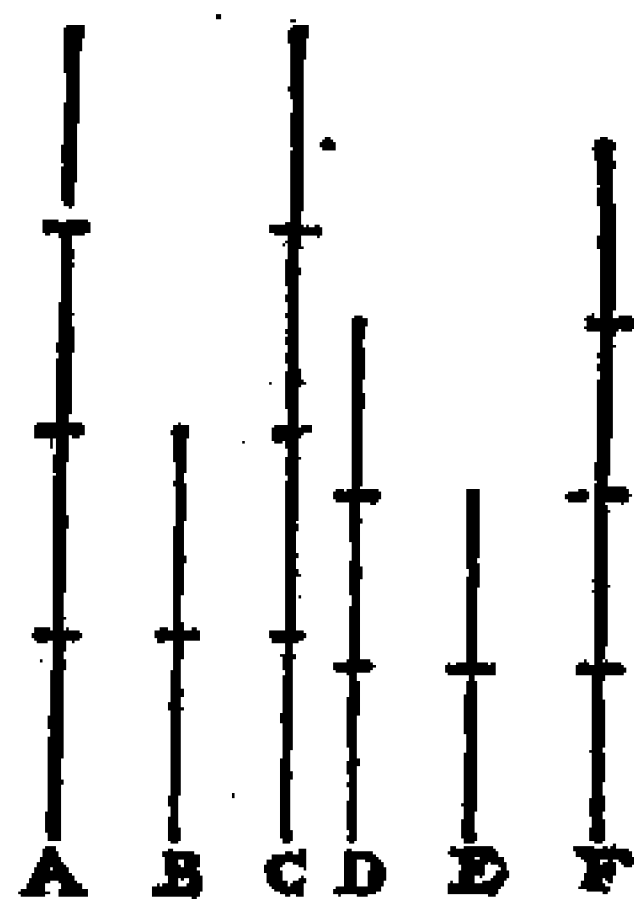


Sint tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F: sit autem primam A, prima maior quàm C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sextam. Cum enim A, maior sit quàm C, ^a erit maior proportio A, ad B, quàm C, ad B. Est autem ut A, ad B, ita D, ad E. ^b Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quàm C, ad B: At ut C, ad B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, ut E, ad F, erit convertendo ut C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quàm F, ad E. ^c Quare D, maior erit, quàm F. Quod est propositum.

Sit deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C, æqualis, ^d erit A, ad B, ut C, ad B. Est autem ut A, ad B, ita D, ad E. ^e Igitur erit & D, ad E, ut C, ad B: At ut C, ad B, ita est F, ad E, per invertisam rationem, uti prius. Quare erit quoque D, ad E, ut F, ad E. ^f Ideoque æquales erunt D, & F. Quod est propositum.



SIT



SI TERTIO A, minor quam C. Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, ^a erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed ut A, ad B, ita est D, ad E. ^b Minor ergo quoque proportio est D, ad E, quam C, ad B. Est autem conuertendo, ut prius, ut C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoque proportio D, ad E, quam F, ad E, ^c propterea quod D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliae ipsis aequales numero, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

PORRO propositio 22. ostendet Euclides, A, & D, magnitudines non solum esse maiores, vel aequales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, ut hic demonstrat: sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex aequalitate: quod quidem demonstrare non poterat, nisi prius theorema hoc ostendisset, ut ex eadem propos. 22. erit perspicuum.

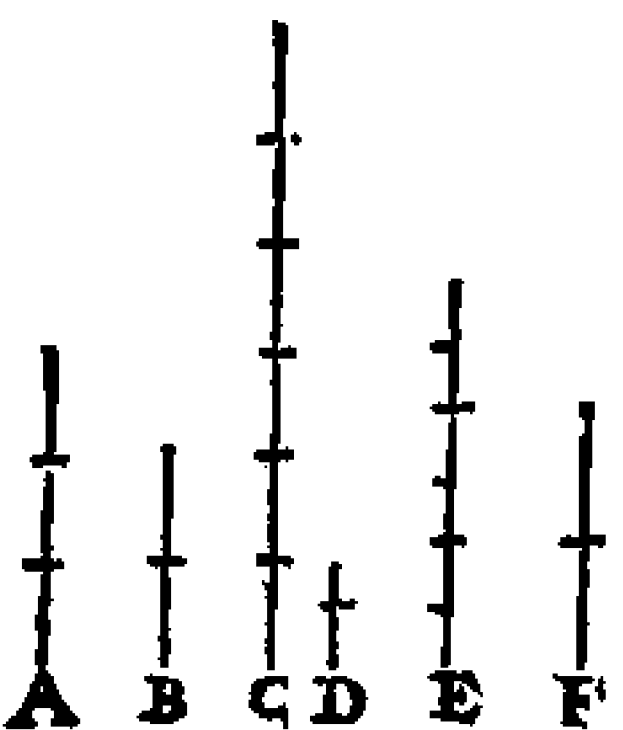
THEOR. 21. PROPOS. 21.

21.

SI sint tres magnitudines, & aliae ipsis aequales numero, quae binae, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio: ex aequo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta maior. Quod si prima tertiae fuerit aequalis, erit & quarta aequalis sextae; sin illa minor, haec quoque minor erit.



SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F: quae binae, & in eadem ratione sumantur: sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit ut A, ad B, ita E, ad F, & ut B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sextam F. Cum enim A, maior sit quam C, erit maior proportio ^d A, ad B, quam C, ad B: Est autem ut A, ad B, ita E, ad F. ^e Maior ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam verò ut B, ad C, ita est D, ad E, erit conuertendo ut C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D: ^f Idcirco maior erit D, quam F. Quod est propositum.

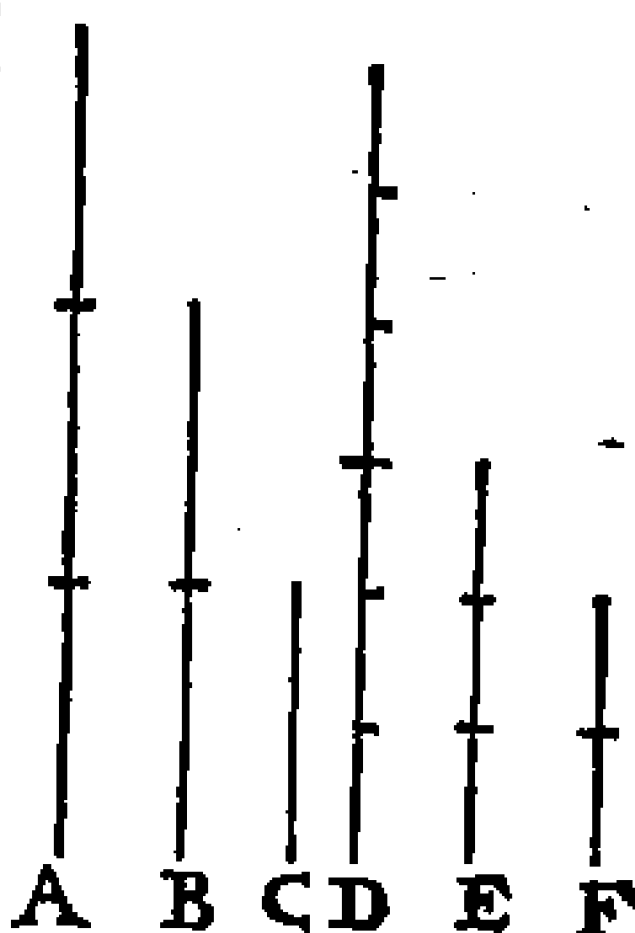


SI T deinde A, ipsi C, aequalis. Dico D, quoque ipsi F, esse aequalem. Cum enim A, sit aequalis ipsi C, ^g erit A, ad B, ut C, ad B: Sed ut A, ad B, ita est E, ad F. ^h Igitur erit ut C, ad B, ita E, ad F: Est autem ex inuersa ratione, ut C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque ut E, ad F, ita E, ad D: ⁱ atque idcirco D, ipsi F, aequalis erit. Quod est propositum.

SI T tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, sit minor quam C, ^k erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Ut autem A, ad B, ita est E, ad F. ^l Minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam verò, ut antè, ex inuersa ratione, est ut C, ad B, ita E, ad D: erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D: ^m ac propterea D, minor erit, quam F. quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliae ipsis aequales numero, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

CAETERVM propositio 23. ostendet Euclides duas magnitudines A, & D, non solum esse maiores, vel aequales, vel minores, duabus magnitudinibus C, & F, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex aequalitate: quod quidem sine auxilio huius theoremati demonstrare non poterat, ut ex propositione illa vigesima tertia patebit.



^k 8. quinti.
^l 13. quinti.
^m 10. quinti.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

22.

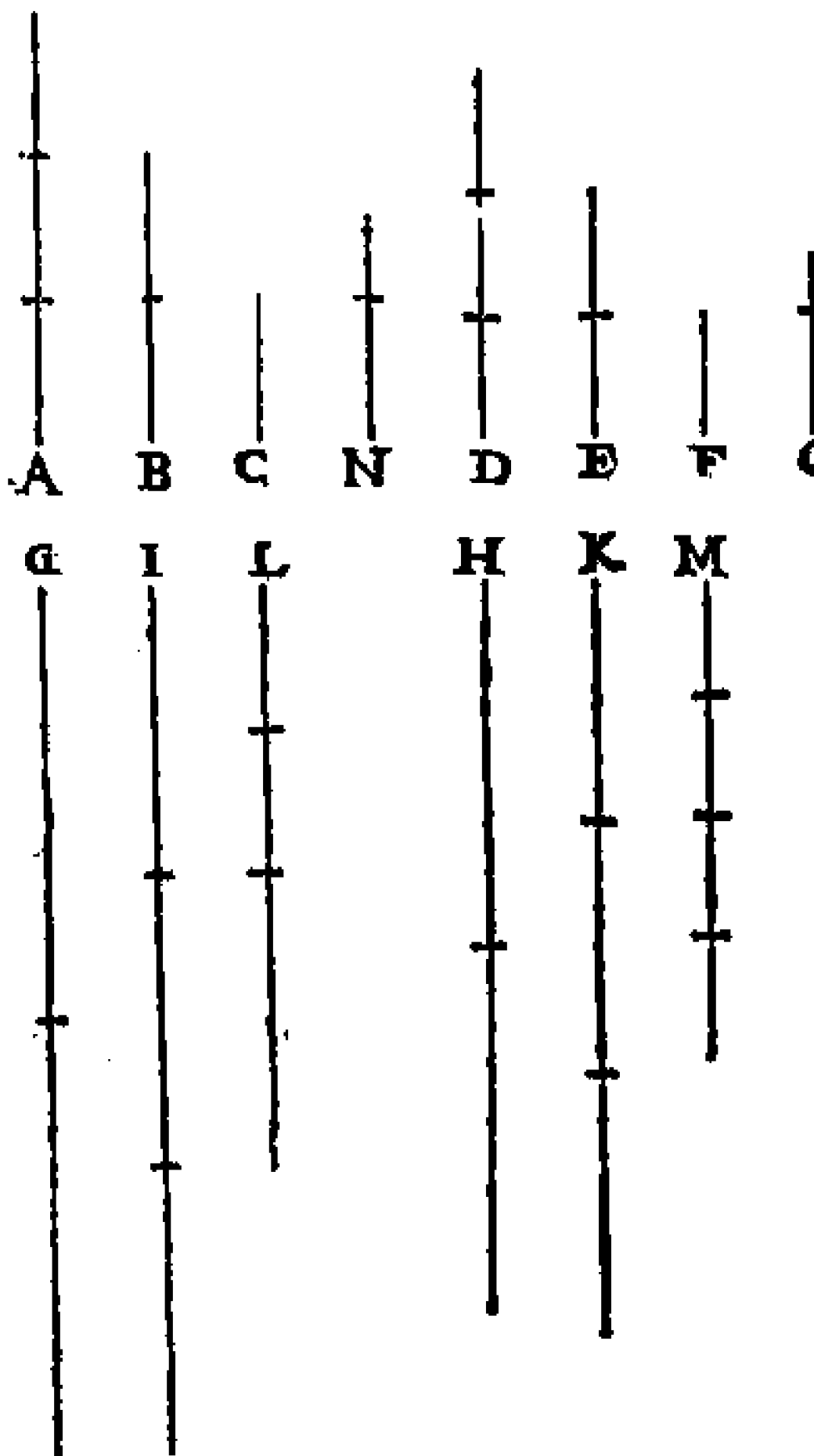
SI sint quotcunque magnitudines, & aliae ipsis aequales numero, quae binae in eadem ratione sumantur: Et ex aequalitate in eadem ratione erunt.

IAM hic demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex aequalitate, quando proportio est ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliae tres D, E, F: sitque

a 4. quinti.

b 4. quinti.

c 10. quinti.

d 6. definit.
quinti.

A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, ut D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æquemultiplicibus G, H; Item ipsarum B, E, æquemultiplicibus I, K; Item ipsarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, ut D, tertia ad E, quartam, erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B, ut H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secundam, ut E, tertia ad F, quartam; erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, ut K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportionem sumuntur; sit ut si G, prima superat tertiam L, superet necessario quoque H, quarta sextam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficient vna ab L, M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna æquales sint, vel vna excedant: in quacunque multiplicatione sumptæ sint ea multiplicia; erit A, prima ad C, secundam, ut D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

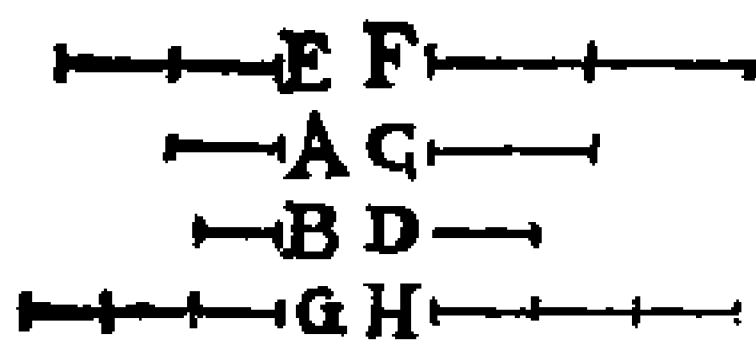
DEINDE sint plures magnitudines tribus, ita ut sit etiam C, ad N, ut E, ad O. Dico adhuc esse ut A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, ut D, ad F, ponatur autem C, ad N, ut E, ad O; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa,

rursus erit, ut A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor: sicut id in quatuor demonstratum fuit, per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint quocunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I U M.

CÆTERVM non videtur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare, quanquam à nemine, quod sciam, sit adhuc demonstratum. Id autem eiusmodi est.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æquemultiplices primæ ac tertiæ, ad secundam & quartam, eandem rationem: Item æquemultiplices secundæ, & quartæ ad primam & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contrà, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æquemultiplices primæ & tertiæ: Item prima ac tertia ad æquemultiplices secundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.



Si enim ut A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam; sumanturq; E, F, ipsarum A, C, æquemultiplices: Item G, H, æquemultiplices ipsarum B, D. Dico ita esse E, ad B, ut F, ad D: Item ita G, ad A, ut H, ad C. Et contrà, ita esse B, ad E, ut D, ad F: Item ita A, ad G, ut C, ad H. Quoniam enim est, ut E, ad A, ita F, ad C, ex constructione, cum utro-

2 22. quin- ti. b 22. quin- ti. *bique sit eadem proportio multiplex; poniturq; ut A, ad B, ita C, ad D; erit ex æquo, ut E, ad B, ita F, ad D. Rursus quia est, ut G, ad B, ita H, ad D, quod utrobique sit eadem proportio multiplex, ex constructione; estq; ut B, ad A, ita D, ad C; (Cum enim ponatur, ut A, ad B, ita C, ad D, erit convertendo, ut B, ad A, ita D, ad C.) erit ex æquo, ut G, ad A, ita H, ad C.*

c 22. quin- ti. d 22. quin- ti. *DEINDE, quia est ut B, ad A, ita D, ad C, per inuersam rationem; Et ut A, ad E, ita C, ad F, quod ex constructione utrobique sit eadem proportio submultiplex; erit ex æquo, ut B, ad E, ita D, ad F. Rursus quia ponitur, ut A, ad B, ita C, ad D; estq; ut B, ad G, ita D, ad H, quod ex constructione sit utrobique eadem proportio submultiplex; erit ex æquo, ut A, ad G, ita C, ad H. Quod est propositum.*

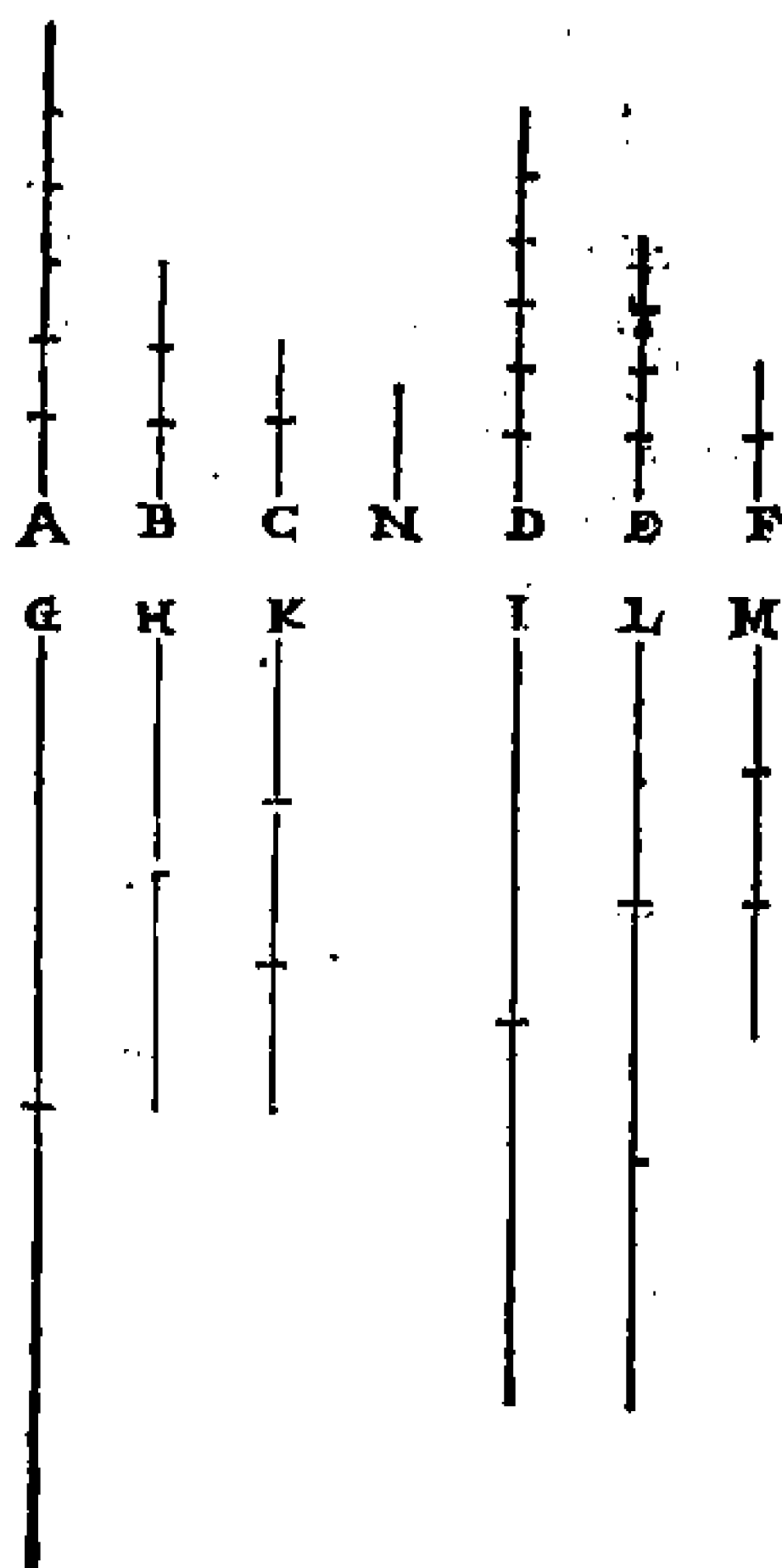
Ex quo constat modus argumentandi, quo frequentissime vtuntur Geometra, maxime Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon, & alij. Videlicet ut A, ad B, ita est C, ad D. Ergo ut E, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius A, ad B, ita quoq; erit F, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius C, ad D. Item ut A, ad B, ita est C, ad D. Igitur ut A, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius B, nimirum ad G, ita erit quoq; C, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius D, videlicet ad H.

THEOR.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

23.

Si sint tres magnitudines, aliaque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.



Demonstratur hic ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & alia tres D, E, F, sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit ut A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse ut A, ad G, ita D, ad I. Sumptis enim ipsarum A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I. Item ipsarum C, E, F, æquemultiplicibus K, L, M. Erunt ut A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarum A, B, æquemultiplices. At ut A, ad B, ita est E, ad F. Igitur ut G, ad H, ita quoque est E, ad F. Sed ut B, ad F, ita quoque est L, ad M, quod L, M, sint ipsarum E, F, æquemultiplices. Igitur erit quoque ut G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, ut D, tertia ad E, quartam; erit quoque ut H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & alia tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione sumuntur, estque earum proportio perturbata: cum ostensum sit esse ut G, ad H, ita L, ad M: Et ut H, ad K, ita I, ad L; sit ut si G, prima superat tertiam K, superet quoque quarta I, sextam M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaque cum G, & I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vnâ deficient, vel vnâ æquales sint, vel vnâ excedant; erit ut A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam, quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I V M.

Quod si fuerint plures magnitudines tribus, fueritque earum proportio perturbata, nimirum si fuerit A, ad B, ut F, ad O; & B, ad C, ut E, ad F; & C, ad N, ut D, ad E. Dico adhuc esse ut A, ad N, ita D, ad O. quamquam proportio ex æqualitate, quando proportio est perturbata, apud Geometras in usu non sit in pluribus magnitudinibus, quam in tribus. qua causa fuit, cur Euclides antecedentem propositionem de quotquot magnitudinibus, hanc autem de tribus duntaxat proposuerit, quamvis vera etiam sit de pluribus. quod ita probatur. Cum iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, ut E, ad O: Ponatur autem esse ita C, ad N, ut D, ad E, erunt tres magnitudines A, C, N, & alia tres D, E, O, quæ binæ in eadem sumuntur proportionem, & earum proportio est perturbata. Ergo rursus ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, erit ut A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, sicut id in quatuor fuit demonstratum, per tres; Et sic de pluribus. Quod est propositum.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

24.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

Quod proposit. 2. demonstrauit Euclides de sola proportionem multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportionem, etiam irrationali. Sit enim A B, prima ad C, secundam, ut D E, tertia ad F, quartam; Item B G, quinta ad C, secundam, ut E H, sexta ad F, quartam. Dico ita esse A G, composita ex prima ac quinta, ad secundam C, ut est D H, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit ut B G, ad C, ita E H, ad F, erit conuertendo ut C, ad B G, ita F, ad E H. Quoniam igitur est A B, ad C, ut D E, ad F; & C, ad B G, ut F, ad E H; erit ex æquali A B, ad B G, ut D E, ad E H. Componendo igitur erit ut tota A G, ad B G, ita tota D H, ad E H. Itaque cum rursus sit A G, ad B G, ut D H, ad E H; & B G, ad C, ut E H, ad F; erit ex æquali A G, ad C, ut D H, ad F. quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

HÆC propositio vera est, siue magnitudines $AB, BG, \& C$, sint eiusdem generis cum magnitudinibus $DE, EH, \& F$, siue non, ut ex demonstratione constat.

Eodem modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate 6. huius lib. demonstratum est in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet:

Si duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem; & detractæ quædam habeant ad easdem eandem proportionem: & reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt.

HABEANT enim AG, DH , ad $C, \& F$, eandem proportionem, hoc est, sit AG , ad C , ut DH , ad F . Item detracta AB, DE , ad easdem C, F , eandem habeant proportionem; ita ut sit quoque AB , ad C , ut DE , ad F . Dico & reliquas BG, EH , eandem habere proportionem ad easdem C, F , hoc est, esse BG , ad C , ut EH , ad F . Cum enim sit ut AB , ad C , ita DE , ad F ; erit convertendo ut C , ad AB , ita F , ad DE . Quoniam igitur est AG , ad C , ut DH , ad F ; & C , ad AB , ut F , ad DE ; ^a erit ex aequalitate AG , ad AB , ut DH , ad DE . ^b Dividendo ergo erit quod, ut BG , ad AB , ita EH , ad DE . Itaq; cum rursus sit BG , ad AB , ut EH , ad DE ; & AB , ad C , ut DE , ad F ; erit ex equali BG , ad C , ut EH , ad F . Quod est propositum.

25.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

SIT enim AB , ad CD , ut E , ad F , sitque AB , omnium maxima, & F , minima. Dico duas $AB, \& F$, simul esse maiores duabus $CD, \& E$, simul. Auferatur enim ex AB , magnitudo AG , æqualis ipsi E ; & ex CD , alia CH , æqualis ipsi F . Erigitur AG , ad CH , ut E , ad F , hoc est, ut AB , ad CD . Quare cum sit tota AB , ad totam CD , ut ablata AG , ad ablatam CH ; erit quoque ut tota AB , ad totam CD , ita reliqua GB , ad reliquam HD : Est autem AB , (cum sit omnium maxima) maior, quam CD . Igitur & GB , maior erit quam HD . Quoniam verò $AG, \& E$, æquales sunt; si ipsis addantur æquales $F, \& CH$, nimirum F , ipsi AG , & CH , ipsi E ; fient $AG, \& F$, simul æquales ipsi $E, \& CH$, simul. Additis igitur inæqualibus $GB, \& HD$, fient $AB, \& F$, simul maiores quam $E, \& CD$, simul, cum GB , sit maior quam HD . Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

NECESSARIO autem sequitur, si antecedens magnitudo unius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam: ut in proposito exemplo ternere licet. Cum enim sit ut AB , ad CD , ita E , ad F , & AB , prima maior, quam tertia E : ^a erit quoque CD , secunda maior quam F , quarta. Item quia maior est AB , quam CD , erit quoque E , maior, quam F , ob eandem proportionem AB , ad CD , & E , ad F , ut in scholio propositionis 14. ostendimus. Quod si è contrario antecedens unius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, ut constat, si dicatur esse F , ad E , ut CD , ad AB . Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset una magnitudo componi ex maxima & minima, immò neque ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non dissimile, videlicet:

Si tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quam dupla reliquæ.

SIT ut A , ad B , ita B , ad C , sitq; A , maxima, & C , minima. Dico $A, \& C$, simul maiores esse dupla ipsius B . Sumpta enim D , ipsi B , aequali, erit ut A , ad B , ita D , ad C . Igitur $A, \& C$, simul maiores erunt, quam $B, \& D$, simul, ^b ut proximè demonstratum est, hoc est, quam dupla ipsius B . Quod est propositum.

Hic finem Euclides imponit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpe numero gravissimi scriptores, ut Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij utuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri potest, breuitate demonstrare, necnon in numerum ac seriem propositionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus impropotionalibus, quarum prima hac est.

THEOR.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

26.

SI prima ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem esse proportionem D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad B; ac propterea A, maior erit quam E. Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed vt est B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor est quoque, quam D, ad C. Quod est propositum.

SCHOLIUM.

EODEM ferè modo demonstrabimus, si prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, conuertendo maiorem esse proportionem secunda ad primam, quam quarta ad tertiam; dummodo vocem maiorem mutemus in vocem minorem, & contra.

SIT enim minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico conuertendo B, ad A, maiorem habere proportionem, quam D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, etiam minor, quam E, ad B, ac propterea A, minor erit, quam E. Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quam B, ad E, maiorem. Sed vt B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior est, quam D, ad C. Quod est propositum.

ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D; erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B. Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quam B, ad A, ac proinde maior erit proportio B, ad A, quam D, ad C. Quod est propositum.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

27.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.

HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior etiam, quam E, ad B; Ideoque A, maior erit, quam E. Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C. Quoniam verò permutando est, vt E, ad C, ita B, ad D. (cùm posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit, quam B, ad D. Quod est propositum.

SCHOLIUM.

SIMILITER ostendemus, si prima ad secundam minorem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam, vicissim prima ad tertiam minorem esse proportionem, quam secunda ad quartam.

SIT namque minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque esse proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, minor quoque, quam E, ad B; ac propterea A, minor erit, quam E.

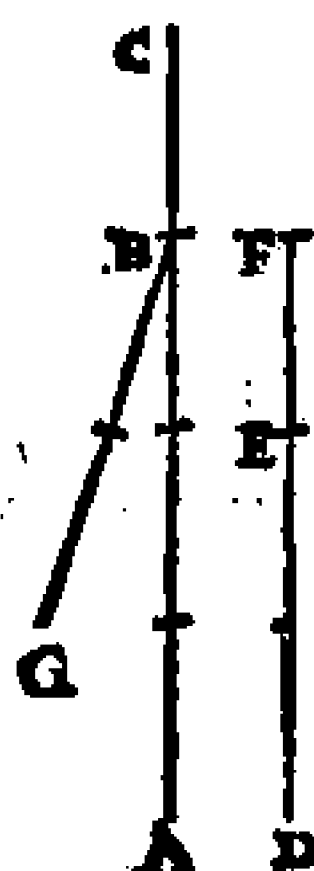
Quare minor erit proportio A, ad C, quam E, ad C. Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D. (cùm posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoque erit, quam B, ad D. Quod est propositum.

ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D; erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B. Ergo permutando, maior etiam erit proportio C, ad A, quam D, ad B; ac proinde conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quam B, ad D. Quod est propositum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 18. quinti.



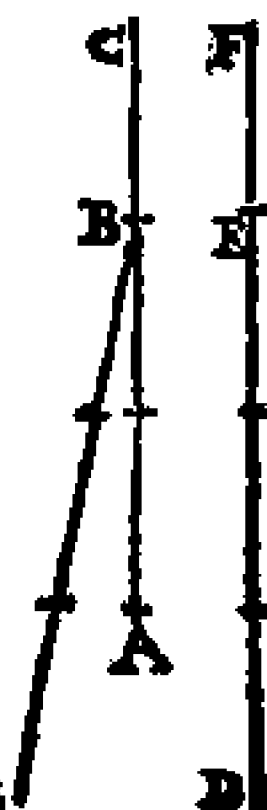
Si t maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo maiorem esse proportionem AC, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, ut DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, maior quoque, quam GB, ad BC: ^a Ideoque AB, maior quam GB. Addita ergo communi BC, fiet AC, maior quam GC, ^b maiorque; propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, ^c ut est GC, ad BC, ita est DE, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, ut DE, ad EF.) Maior ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.

SCHOLIUM.

EAD E M ratione ostendemus, si proportio prima ad secundam minor fuerit, quam tertia ad quartam, minorem quoque esse proportionem prima & secunda simul, ad secundam, quam tertia & quarta simul ad quartam.

Si t enim minor proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo minorem esse proportionem AC, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, ut DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, minor quoque, quam GB, ad BC, ^a ideoque AB, minor erit, quam GB. Addita ergo communi BC, fiet AC, minor quam GC; ^b minorque propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, ut GC, ad BC, ita est DE, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, ut DE, ad EF.) Minor ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.

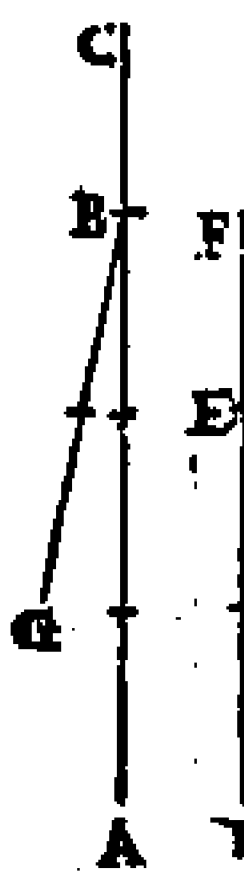
ALITER. Quoniam minor est proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF, erit maior proportio DE, ad EF, quam AB, ad BC. ^c Igitur componendo, maior quoque proportio erit DE, ad EF, quam AC, ad BC, ac propterea, minor erit proportio AC, ad BC, quam DE, ad EF. quod est propositum.



THEOR. 29. PROPOS. 29.

Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 17. quinti.

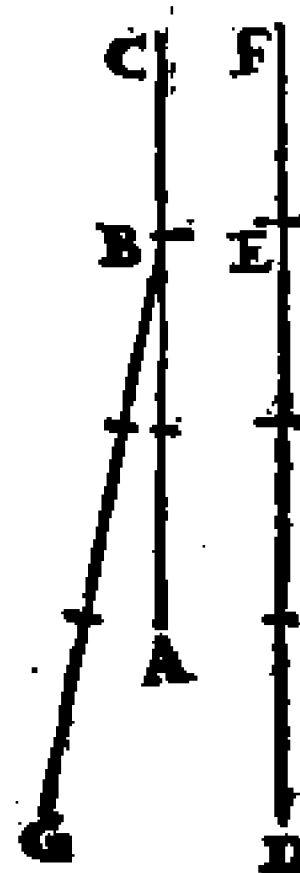


Si t maior proportio AC, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & diuidendo maiorem esse proportionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, ut DE, ad EF; eritque proportio AC, ad BC, maior quoque, proportionem GC, ad BC: ^a ideoque maior erit AC, quam GC. Ablata ergo communi BC, maior erit AB, quam GB: ^b Ac propterea maior erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC. ^c Sed diuidendo, ut est GB, ad BC, ita est DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, ut DE, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.

SCHOLIUM.

Q U O D si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam.

Si t enim minor proportio AC, ad BC, quam DE, ad EF. Dico diuidendo quoque minorem esse proportionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, ut DE, ad EF, eritque proportio AC, ad BC, minor quoque, quam GC, ad BC: ^a ideoque minor erit AC, quam GC. Ablata ergo communi BC, minor erit AB, quam GB: ^b Ac propterea minor erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC: ^c Sed diuidendo est, ut GB, ad BC, ita DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, ut DE, ad EF.) Igitur minor quoque proportio erit AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.



ALITER.

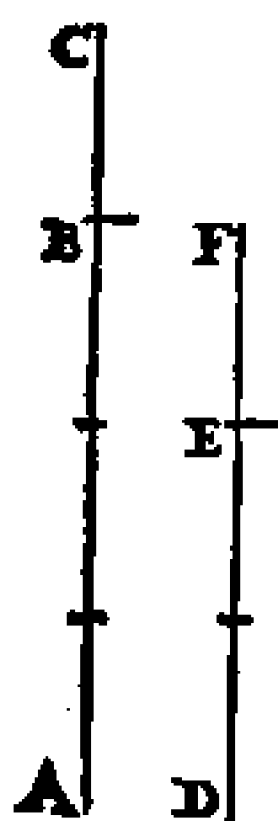
ALITER. Quoniam minor proportio est AC , ad BC , quàm DF , ad EF ; erit maior proportio DF , ad EF , quàm AC , ad BC .^a Igitur & diuidendo, maior erit proportio DE , ad EF , quàm AB , ad BC ; atq; idcirco minor erit proportio AB , ad BC , quàm DE , ad EF . Quod est propositum.

a 29. quinti.
ti.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

30.

Si composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quàm tertia cum quarta, ad tertiam.



Si t maior proportio AC , ad BC , quàm DF , ad EF . Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionem AC , ad AB , quàm DF , ad DE . Cum enim sit AC , ad BC , maior proportio, quàm DE , ad EF ;^a erit & diuidendo, maior proportio AB , ad BC , quàm DE , ad EF .^b Quare conuertendo, minor erit proportio BC , ad AB , quàm EF , ad DE .^c Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius AC , ad AB , quàm totius DF , ad DE . Quod est propositum.

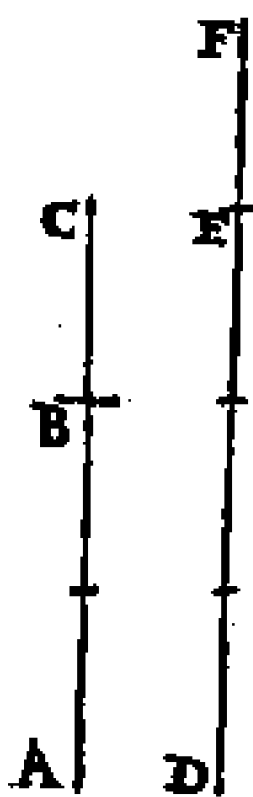
a 29. quinti.
b 26. quinti.
c 28. quinti.

SCHOLIUM.

Non dissimiliratione ostendemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quàm composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem prima & secunda ad primam, quàm tertia & quarta ad tertiam.

Si t enim minor proportio AC , ad BC , quàm DF , ad EF . Dico per conuersionem rationis maiorem esse proportionem AC , ad AB , quàm DF , ad DE . Cum enim minor sit proportio AC , ad BC , quàm DF , ad EF ;^a erit & diuidendo minor proportio AB , ad BC , quàm DE , ad EF . Quare^b conuertendo, erit maior proportio BC , ad AB , quàm EF , ad DE .^c Ac proinde & componendo maior proportio erit AC , ad AB , quàm DF , ad DE . Quod est propositum.

ALITER. Quoniam minor est proportio AC , ad BC , quàm DF , ad EF ; erit maior proportio DF , ad EF , quàm AC , ad BC .^d Ergo per conuersionem rationis minor erit proportio DF , ad DE , quàm AC , ad AB : Hoc est, maior proportio erit AC , ad AB , quàm DF , ad DE . Quod est propositum.

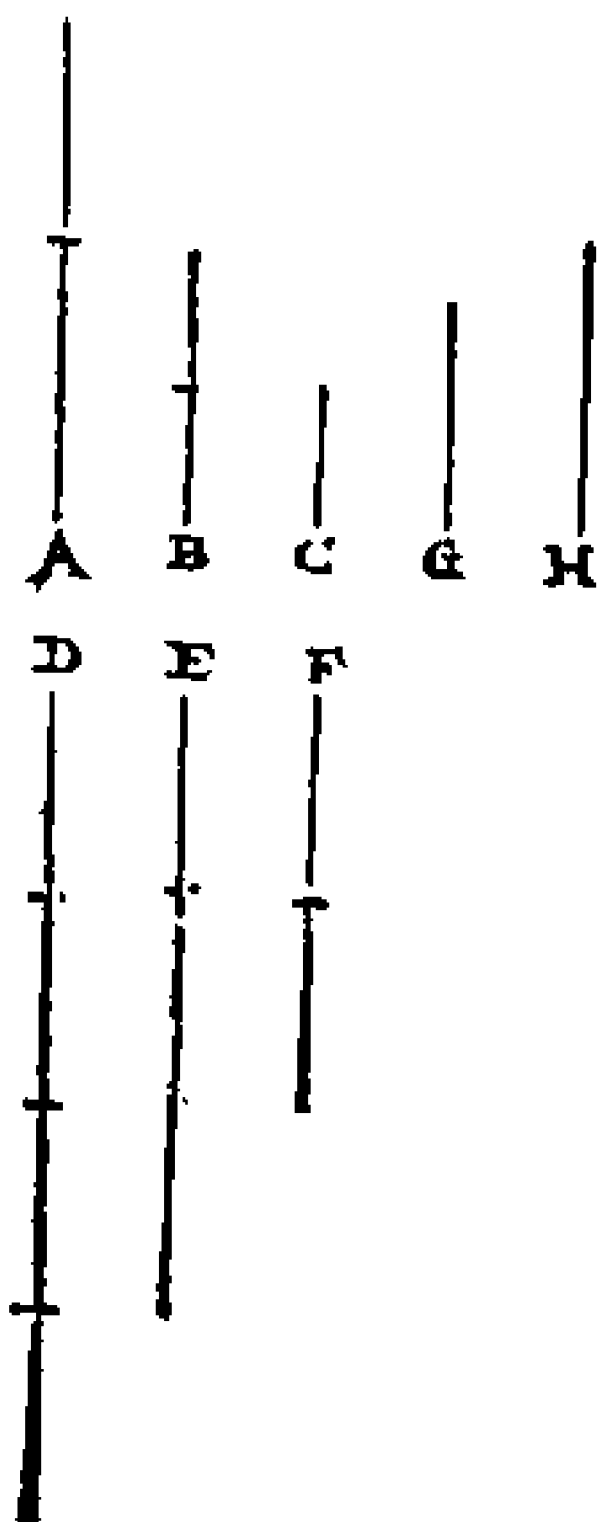


a 29. quinti.
ti.
b 26. quinti.
ti.
c 28. quinti.
ti.
d 30. quinti.
ti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

31.

Si sint tres magnitudines, & alie ipsi æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quàm primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quàm secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.



Si n tres magnitudines A, B, C , & alie tres D, E, F , sitque maior proportio A , ad B , quàm D , ad E ; Item maior B , ad C , quàm E , ad F . Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A , ad C , quàm D , ad F . Intelligatur enim esse G , ad C , ut E , ad F ; eritque propterea proportio B , ad C , maior, quàm G , ad C .^a Ideoque B , maior erit, quàm G . Quare^b maior erit proportio A , ad G , minorem quàm A , ad B , maiorem. Ponitur autem proportio A , ad B , maior quàm D , ad E . Multo ergo maior erit proportio A , ad G , quàm D , ad E . Intelligatur rursus esse H , ad G , ut D , ad E ; eritque propterea maior proportio A , ad G , quàm H , ad G .^c Ideoque A , maior erit, quàm H .^d Quare maior quantitas A , ad C , habebit maiorem proportionem, quàm minor quantitas H , ad eandem C .^e Atqui ut H , ad C , ita est, ex æqualitate D , ad F . (quoniam ut D , ad E , ita est H , ad G ; & ut E , ad F , ita G , ad C .) Maior ergo proportio quoque erit A , ad C , quàm D , ad F . Quod est propositum.

a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 10. quinti.
d 8. quinti.
e 22. quinti.

SCHOLIUM.

Eadem ratione ostendemus, si fuerit proportio A , ad B , quæ D , ad E : At B , ad C , maior quàm E , ad F : Vel contrà, si proportio A , ad B , fuerit maior quàm D , ad E : At B , ad C , eadem, quæ E , ad F ; ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A , ad C , quàm D , ad F .

Si t enim primum A , ad B , ut D , ad E , sed maior proportio B , ad C , quàm E , ad F . Intelligatur esse G , ad C , ut E , ad F ; eritque propterea proportio B , ad C ,

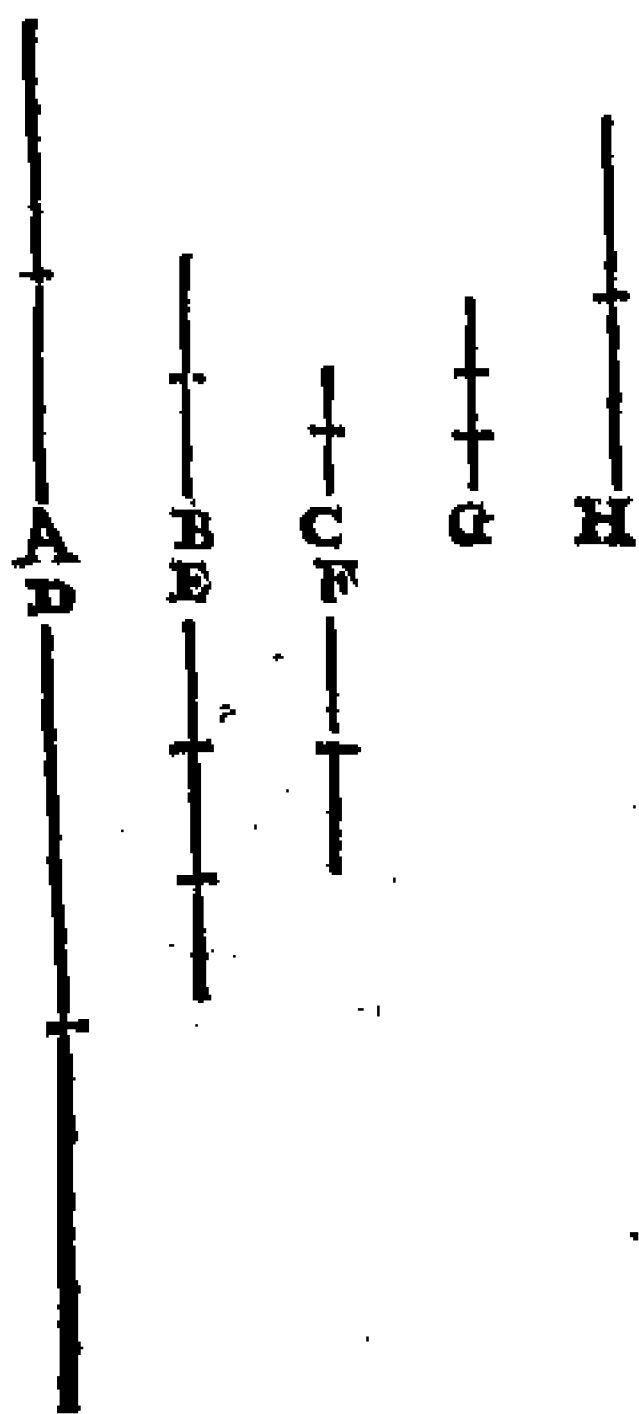
a 10. quinti.
b 8. quinti.

c 10. quin-
ti.
d 8. quinti,
e 22. quin-
ti.

f 9. quinti
g 7. quinti.

h 10. quin-
ti.

i 8. quinti.
k 11. quin-
ti.



maior, quàm G, ad C: ^a Ideoq, B, maior erit, quàm G. ^b Quare maior erit pro-
portio A, ad G, quàm A, ad B. Ponitur autem A, ad B, vt D, ad E. Igitur & pro-
portio A, ad G, maior erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D,
ad E; eritq, propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G: ^c Ideoq, A, maior
erit, quàm H. ^d Quare maior erit proportio A, ad C, quàm H, ad C. ^e Atqui vt
H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G. &
vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoq, erit A, ad C, quàm D, ad F.
Quod est propositum.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm D, ad E, sed B, ad C, vt E, ad
F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F; eritq, propterea etiam B, ad G, vt G, ad
C: ^f Ideoq, B, ipsi G, æqualis erit. ^g Quare erit A, ad G, vt A, ad B. Ponitur an-
tem proportio A, ad B, maior quàm D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior
erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritq, propterea
maior proportio A, ad G, quàm H, ad G: ^h Ideoq, A, maior erit, quàm H. ⁱ Qua-
re maior proportio erit A, ad C, quàm H, ad C. ^k Atqui vt H, ad C, ita est, ex æ-
qualitate D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad
C.) Maior ergo erit quoque proportio A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.

NOX dissimiliter demonstrabimus, si proportionem priorum magnitudi-
num minores fuerint, etiam proportionem extremarum esse minorem. Idemq,
eueniet, si fuerit A, ad B, vt D, ad E; sed minor sit proportio B, ad C, quàm E,
ad F: Aut contra, si proportio A, ad B, fuerit minor, quàm D, ad E; at B, ad C,

fit, vt E, ad F. Eadem namque semper erit demonstratio, si modo vocem, maioris, ubique permutet in vocem
minoris, vt patet.

Q'uo si plures fuerint magnitudines tribus, siue omnes proportionem in vno ordine magnitudinum sint
maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum; siue vna tantum maior, quàm
vna vel dua, &c. ostendemus maiorem vel minorem quoque esse proportionem primæ priorum ad ultimam, quàm
primæ posteriorum ad ultimam, ea methodo, quam propos. 22. tradidimus: adhibendo propos. 22. loco huius
propos. 31. quando tres magnitudines vnius ordinis proportionales sunt tribus magnitudinibus alterius or-
dinis: item vsurpando hoc scholium, quando vna tantum proportio in tribus magnitudinibus æqualis est vni
tantum proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

l 31. quinti.
m 31. quin-
ti.

n 21. quin-
ti.

| | |
|----|----|
| A. | E. |
| B. | F. |
| C. | G. |
| D. | H. |

NAM si maior est proportio A, ad B, quàm E, ad F; & maior B, ad C, quàm F, ad G; & maior
C, ad D, quàm G, ad H: ^l erit ex æquo maior proportio A, ad C, quàm E, ad G. Quia igitur rursus
maior proportio est A, ad C, quàm E, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H, ^m erit quoque ex æquo
maior proportio A, ad D, quàm E, ad H.

Q'uo si tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, proportionales sint, sed maior sit propor-
tio C, ad D, quàm G, ad H; ⁿ erit ex æquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc scholio, maior propor-
tio erit A, ad D, quàm E, ad H.

Si verò maior proportio sit A, ad B, quàm E, ad F; sed tres B, C, D, proportionales sint tribus F, G, H; erit
ex hoc scholio maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: Et rursus maior A, ad D, quàm E, ad H.

Si autem maior sit proportio A, ad B, quàm E, ad F: sed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D,
quàm G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F; sed maior proportio B, ad C, quàm F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H. erit
semper ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: ac proinde rursus maior A, ad D, quàm E,
ad H, &c.

IDEO concludes, si omnes proportionem, vnius ordinis siue minores omnibus proportionibus alterius or-
dinis, vel vna, vel dua. Item si sint plures magnitudines, vt propositione 22. diximus.

22.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

Si sint tres magnitudines, & alie ipsi æquales numero, sitque maior propor-
tio primæ priorum ad secundam, quàm secundæ posteriorum ad tertiam; Item se-
cundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ posteriorum ad secundam: Erit
quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ
posteriorum ad tertiam.

SINT tres magnitudines A, B, C, & alie tres D, E, F, sitque maior proportio A, ad B, quàm E, ad F.
Item maior B, ad C, quàm D, ad E. Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad
C, quàm D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E; eritque propterea proportio B, ad C,
maior quàm G, ad C: ^a Ideoque maior erit B, quàm G. ^b Quare maior erit proportio A, ad G, mi-
norem, quàm eiusdem A, ad B, maiorem: Est autem proportio A, ad B, maior, quàm E, ad F. Mul-
to ergo maior est proportio A, ad G, quàm E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritque
propterea

propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G; ^a ideoque maior erit A, quàm H. ^b Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quàm H, minor ad eandem C: At ut H, ad C, ita est ex æqualitate D, ad F. (Quoniam ut D, ad E, ita est G, ad C, & ut E, ad F, ita est H, ad G.) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.

S C H O L I V M.

EAD E M ratiōe, si fuerit proportio A, ad B, quàm E, ad F; At B, ad C, maior quàm D, ad E. Vel contra, proportio A, ad B, maior quàm E, ad F: At B, ad C, eadem, quàm D, ad E; ostendemus, ex æqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quàm D, ad F, ut in proposita figura perspicitur.

H A V D secus ostendemus, si proportionem priorum magnitudinū minores fuerint, etiam extremarum proportionem esse minorem, &c.

Q U O D si fuerint plures magnitudines tribus, demonstrabimus, maiorem quoque vel minorem esse proportionem primæ priorum ad ultimam, quàm prima posteriorum ad ultimam, ea arte, quæ usi sumus propos. 23. &c. Quæ omnia perspicua sunt, si diligenter demonstrationes scholæ præcedentis propositionis considerentur.

THEOR. 33. PROPOS. 33.

33.

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quàm totius ad totum.

Si t maior proportio totius A B, ad totam C D, quàm ablatæ A E, ad ablatam C F. Dico & proportionem reliquæ E B, ad reliquam F D, maiorem esse, quàm totius A B, ad totam C D. Cum enim maior sit proportio A B, ad C D, quàm A E, ad C F: ^a erit quoque permutando maior proportio A B, ad A E, quàm C D, ad C F: ^a ac, propterea per conuersionem rationis, minor erit proportio A B, ad E B, quàm C D, ad F D. ^b Permutandū igitur, minor quoque erit proportio A B, ad C D, quàm E B, ad F D; hoc est, E B, reliqua ad reliquā F D, maiorem habebit proportionem, quàm tota A B, ad totam C D. Quod est propositum.

S C H O L I V M.

Q U O D si tota ad totam habuerit minorem proportionem, quàm ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quàm tota ad totam, ut ex modo demonstrandi liquet, ponendo semper vocem, minoris, pro voce, maioris; & vocem maioris, pro voce, minoris.

THEOR. 34. PROPOS. 34.

34.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsi æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quàm secundæ ad secundam; & hæc maior quàm tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam posteriorum.

S I N T primū tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: Sit autem maior proportio A, ad D, quàm B, ad E: Item maior B, ad E, quàm C, ad F. Dico proportionem ipsarum A, B, C, simul ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportionem ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F, simul; minorem verò, proportionem A, ad D; maiorem denique etiam proportionem C, ad F. Cum enim maior sit proportio A, ad D, quàm B, ad E; ^a erit permutando maior A, ad B, quàm D, ad E. ^b Igitur componendo, maior erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quàm ipsarum D, E, simul ad E. ^c Permutando ergo rursus, maior erit proportio

a 33. quinti. A, B, simul ad D, E, simul, quàm B, ad E. Itaque cùm tota A, B, ad totam D, E, maiorem habeat proportionem, quàm ablata B, ad ablatam E, ^a habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quàm tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad E, quàm totius B, C, ad totam E, F. Multò ergo maior erit proportio A, ad D, quàm B, C, totius ad totam E, *b 27. quinti.* F. ^b Permutando igitur, maior erit proportio A, ad B, C, quàm D, ad E, F, ^c & componendo ergo *c 28. quinti.* maior est proportio totius A, B, C, ad B, C, quàm totius D, E, F, ad E, F. ^d Et rursus permutando, maior *d 27. quinti.* proportio omnium A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul, quàm B, C, ad E, F, quod est primum.

ITAQUE cùm sit maior proportio totius A, B, C, ad totam D, E, F, quàm ablata B, C, ad ablatam E, F, ^e erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quàm totius A, B, C, ad totam D, E, F, quod est secundum.

f 27. quinti. QUONIAM verò maior est proportio B, ad E, quàm C, ad F, ^f erit permutando maior quoque *g 28. quinti.* B, ad C, quàm E, ad F, ^g & componendo, maior totius B, C, ad C, quàm totius E, F, ad F, ^h & rursus *h 27. quinti.* permutando, maior B, C, ad E, F, quàm C, ad F. Est autem maior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt ostendimus, quàm B, C, ad E, F. Multò ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quàm ultimæ C, ad ultimam F, quod est tertium.

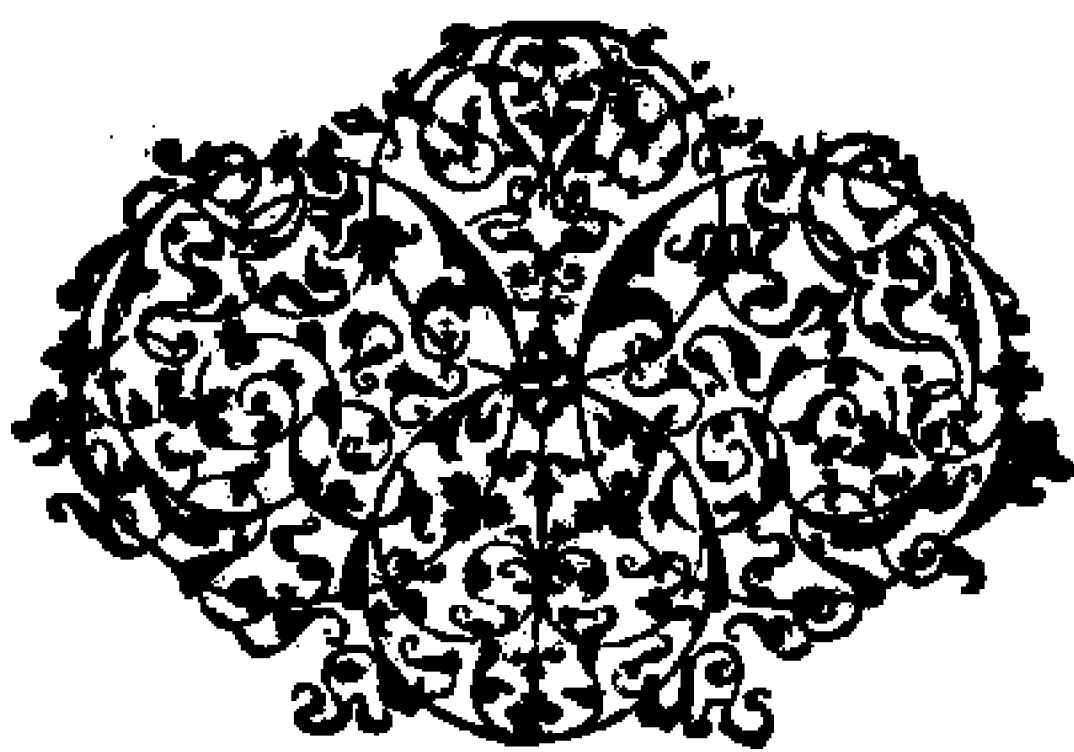
DAINDA sint quatuor magnitudines vtrobique cum eadem hypothefi, hoc est, sit quoque maior proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quàm G, quartæ ad H, quartam. Dico eadem consequi. Vt enim iam in tribus est ostensum, maior est proportio B, ad E, quàm B, C, G, ad E, F, H. Multò ergo maior erit A, ad D, quàm B, C, G, ad E, F, H. ⁱ Permutando ergo, maior erit A, ad B, C, G, quàm D, ad E, F, H, ^k & componendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quàm D, E, F, H, ad E, F, H, ^l & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quàm B, C, G, ad E, F, H, quod est primum.

ITAQUE cùm sit maior proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quàm ablata B, C, G, ad ablatam E, F, H, ^m erit & reliquæ A, ad reliquam D, maior proportio, quàm totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quod est secundum.

QUONIAM verò, vt in tribus est demonstratum, maior est proportio B, C, G, ad E, F, H, quàm G, ad H, & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quàm B, C, G, ad E, F, H, vt fuit ostensum, multò maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quàm ultimæ G, ad ultimam H, quod est tertium.

EADÈM arte concludes, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor, & in sex per quinque, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.



ELEMENTVM

SEXTVM



DEFINITIONES.

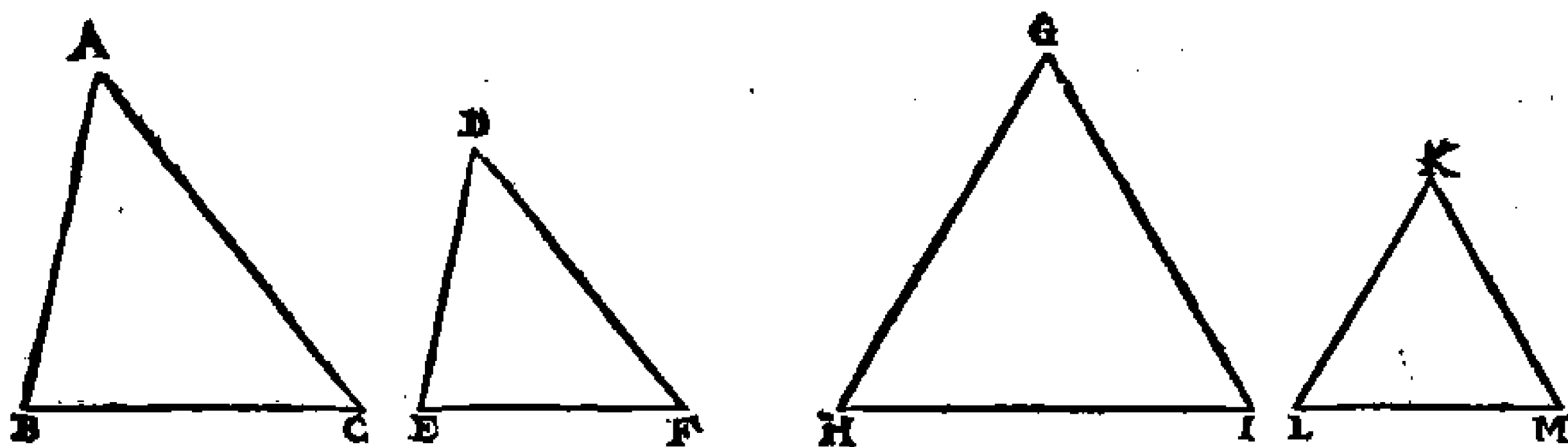
I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.



V triangula ABC, DEF similia dicentur, si fuerint æquiangula; ita ut angulus A æqualis sit angulo D ; & B , ipsi E ; & C , ipsi F , æqualis sit: Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, ut AB , ad AC , ita DE , ad DF ; & ut AB , ad BC , ita DE , ad EF ; & ut AC , ad CB , ita DF , ad FE .

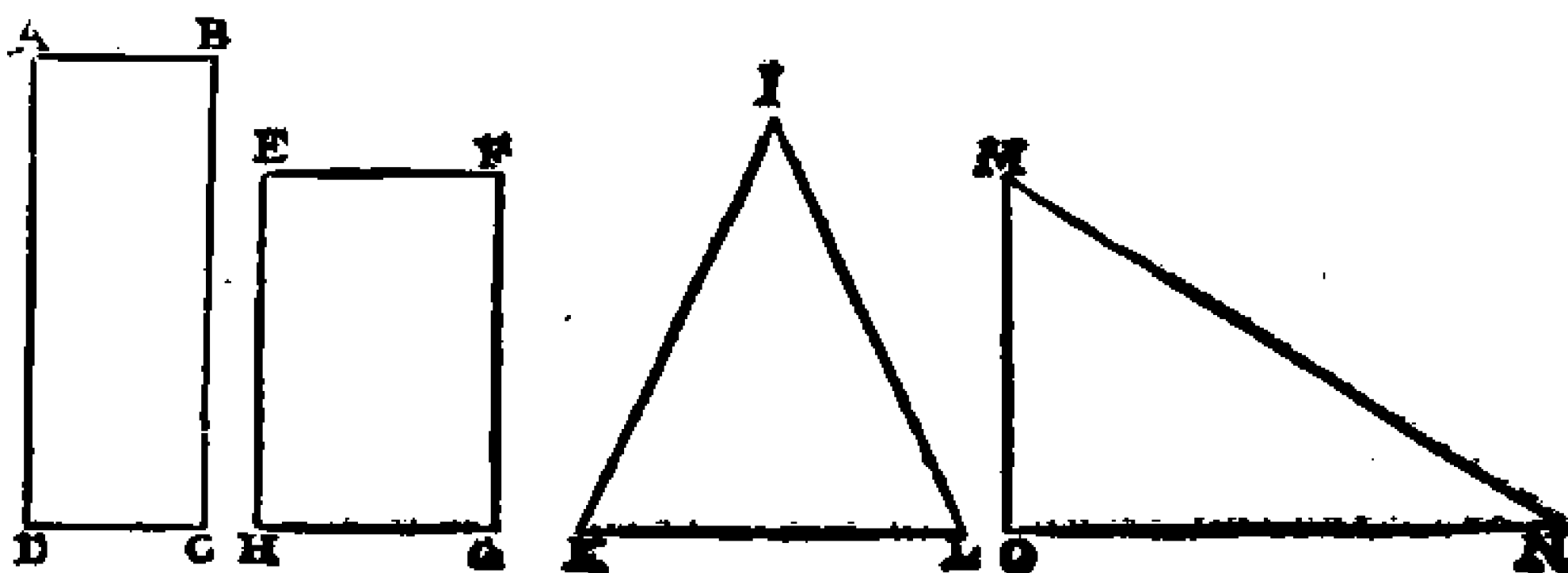
QUOD si anguli unius æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contrā; non dicentur tales figurae similes: cuiusmodi sunt quadratum, & figura altera parte longior. Hæ etenim figurae habent quidem angulos æquales, ut puta rectos, at latera unius lateribus alterius proportionalia non sunt; quip-



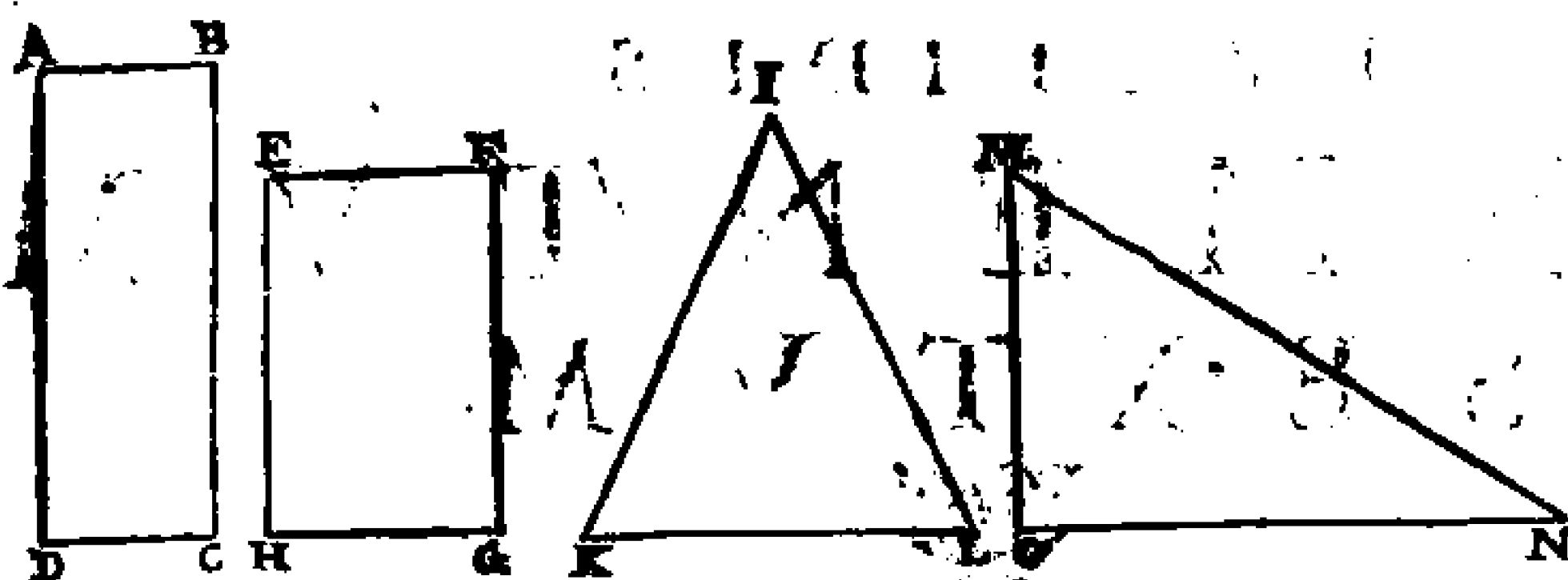
pe cum latera quadrati circa quemvis angulum rectum habeant proportionem æqualitatis: latera vero figura altera parte longioris circa quemvis angulum rectum, proportionem inæqualitatis. Ex quibus constat, omnes figuras rectilneas æquiangulas, & æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse similes, quanquam inter se maximè sint inæquales. Cuiusmodi sunt trian- gula æquilatera GHI, KLM . Propter laterum enim æqualitatem, erit GH , ad GI , ut KL , ad KM : Item GH , ad HI , ut KL , ad LM : & GI , ad IH , ut KM , ad ML , cum semper sit proportio æqualitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus figuris rectilineis æqui- angulis, atque æquilateris.

II.

RECIPROCAE autem figuræ sunt, cum in vtraque figura antecedentes & con- sequentes rationum termini fuerint.



Vt si in parallelogrammis $ABCD, EFGH$, latera AB, BC , ita proportionalia fuerint lateribus EF, FG , ut vtrubi- que sit & antecedens & cōsequens diuersarū proportionū, hoc est, ut sit ea proportio



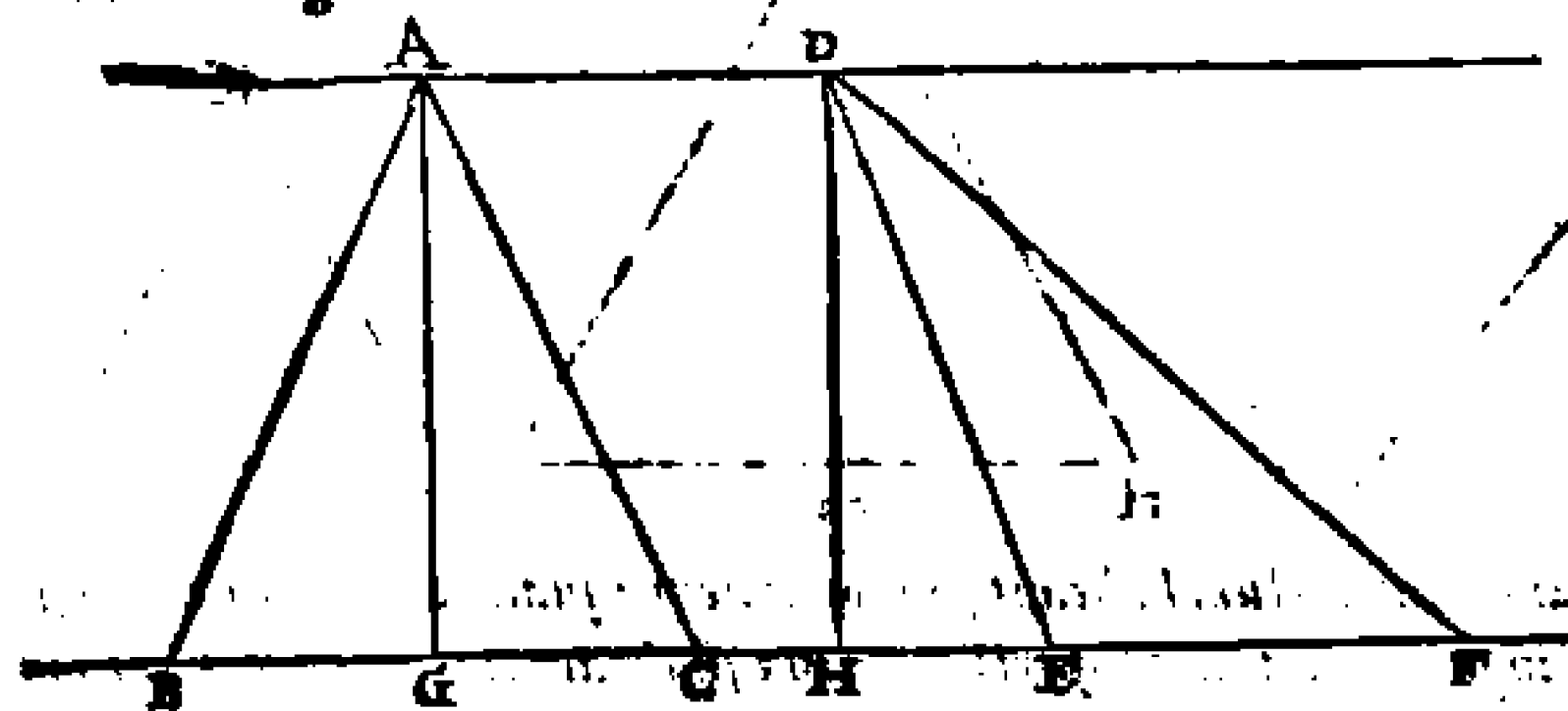
modo EF, est consequens unius, & FG, antecedens alterius; vel secundo modo FG, consequens, & EF, antecedens, in figura EFGH, dicuntur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamvis similia non sint. Similiter erunt triacula IKL, MNO reciproca, si fuerit ut IK, ad MN, ita MO, ad IL; vel ut IK, ad MO, ita MN, ad IL. Neq. memini me inuenisse apud Geometras usum reciprocarum figurarum in aliis figuris, quam in parallelogrammis, & triangulis.

SECUNDVM extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum ut tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

Si linea recta quavis AB, ita dividatur in C, inaequaliter, ut sit, quemadmodum tota AB, ad maius segmentum AC, ita AC, maius segmentum ad CB, minus segmentum; dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quamquidem diuisionem docebit Euclides propof. 30. huius lib. eamq. sub aliis verbis iam docuit lib. 2. propof. 11. ut fiet perspicuum propof. 30. huius lib. Sunt autem penes innumera dignitates, atq. utilitates linea hoc modo diuisa, ut ex libro Stereometria constabit, praesertim lib. 3. ut non immerito a quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea eo modo est diuisa.

ALTITUDO cuiusq. figure est linea perpendicularis a vertice ad basin deducta

Si a vertice A, trianguli ABC, ad basin BC, perpendicularis ducatur AG; dicetur hac perpendicularis, altitudo trianguli ABC, ita ut tantam dicatur habere altitudinem triangulum, quanta est perpendicularis AG. Sic etiam perpendicularis DH, ducta a D, vertice trianguli DEF, ad basin EF, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli DEF. Itaq. si duarum figurarum perpendiculares a verticibus ad bases (sive hae protractae sint, sive no) demissa fuerint aequales, eandem dicentur huiusmodi figura habere altitudinem. Tunc autem huiusmodi



perpendiculares erunt aequales, cum bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint paralleli, cuiusmodi sunt perpendiculares AG, DH, triangulorum ABC, DEF, in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli AGH, DHG, interni ex eadem parte sint duobus rectis aequales, immo duo recti; erunt rectae AG, DH, parallelae. Sunt autem & AD, GH, parallelae, eo quod ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG; at propterea latera opposita AG, DH, aequalia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quod si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases vero AB, & DE, non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad basin DE, protractam aequalis non est perpendiculari ex C, ad basin AB, deducta; cum nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, ut manifestum est.

RECTE vero ab Euclide altitudo figura cuiusvis definita est per lineam perpendicularem, qua a vertice ad basin deducitur: quoniam, ut scribit Ptolemaeus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de Dimensione, mensura cuiuscunq. rei debet esse fixata, determinataq. & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas merito Geometra, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinataq. longitudinis, alia autem omnes incerta indeterminataq. Qua de re plura scripsimus ad initium commentariorum, quos in Spharam Ioan. de Sacro bosco edidimus.

RATIO ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatae, aliquam effecerint rationem.

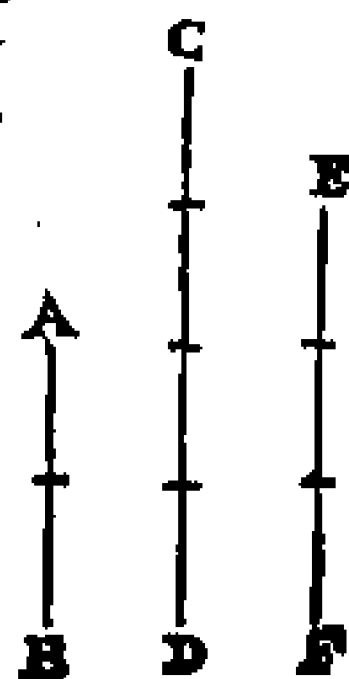
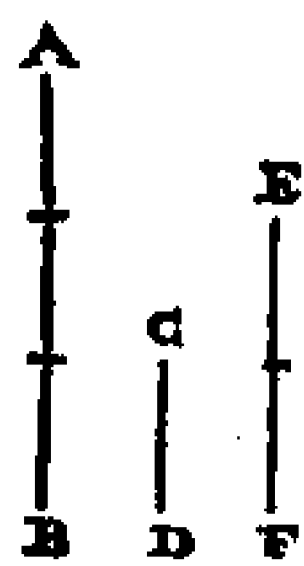
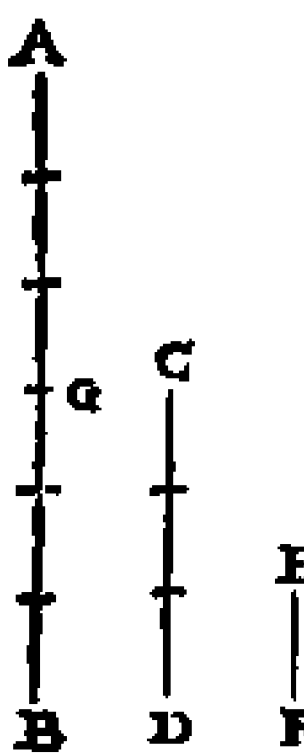
QUONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (vt denominator quadrupla proportionis, nempe 4. ostendit, in quavis proportionem quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem: denominator vero proportionis subquadrupla, videlicet $\frac{3}{4}$. indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator à Geometris, quantitas proportionis: vt idem significet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur hac definitio proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicata effecerint illam proportionem, seu (vt vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & sextupla: quoniam denominator proportionis duodecupla, nimirum 12. producit ex multiplicatione denominatoris dupla proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextupla, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producit idem denominator 12. duodecupla proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quintupla. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorem illius. Sic etiam proportio dupla dicitur componi ex sesquialtera, & sesquitercia: quia sesquialtera denominator $1\frac{1}{2}$. ductus in $1\frac{2}{3}$. denominatorem sesquitercia, gignit 2. denominatorem dupla. Rursus eadem proportio dupla componitur ex sesquiseptima, & supertripartiente quarta. Nam harum proportionum denominatores $1\frac{1}{7}$. $1\frac{3}{4}$. inter se multiplicati procreant 2. denominatorem dupla. Item eadem dupla proportio componi dicitur ex sesquiquarta, & dupla sesquialtera; propterea quod harum denominatores $\frac{4}{3}$. $2\frac{1}{2}$. inter se multiplicati producant quoque eundem denominatorem 2. proportionis dupla. Atque ita ex infinitis alijs proportionibus componi dicitur dupla proportio: quod etiam de quavis alia proportionem dici potest, vt paulo post patebit.

PORRO quemadmodum in magnitudinibus continuè proportionalibus, proportio prima ad ultimam componi dicitur ex proportionem prima ad secundam, & secunda ad tertiam, tertia ad quartam, &c. cum illa ex his intermedijs constet & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producat, vt quinto libro defin. 10. exposuimus: ita vt si fuerint duae proportionem aequales intermediae, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio prima magnitudinis ad ultimam duplicata proportionem prima ad secundam, si tres, triplicata, &c. Sic etiam in magnitudinibus quibuscunque ordine positus, proportio prima ad ultimam dicitur componi ex proportionem prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad quartam, &c. donec extiterit proportio: quoniam denominator proportionis prima magnitudinis ad ultimam confurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis. Quod quidem primum inductione quadam Theonis Alexandrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde vero idem duabus demonstrationibus, quarum vnà traditur ab Eutocio Ascalonita lib. 2. Archimedi de Sphaera & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergaei de Conicis elementis, propos. 11. Altera autem à Vitellione lib. 1. propos. 11. sua Perspectiua, comprobabimus.

THEON igitur rem propositam ita conatur absolueret. Habeat AB, ad CD, rationem datam, veluti duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; & CD, ad EF, eandem quoque datam. Dico quod ipsius AB, ad EF, ratio constet ex AB, ad CD: & ex CD, ad EF, ratione: vel quod ipsius AB, ad CD, rationis quantitas multiplicata in ipsius CD, ad EF, rationis quantitate, efficit ipsius AB, ad EF, rationis quantitate. Sit enim primum AB, quam CD, maior, & CD, quam EF: & sit quidem AB, ipsius CD, dupla & CD, ipsius EF, tripla. Quoniam igitur CD, ipsius EF, tripla est, ipsius autem CD, dupla est AB, erit AB, ipsius EF, sextupla. Quoniam si triplum alicuius duplicamus, fit sextuplum: hoc enim est proprie compositio. Vel sic. Quoniam AB, dupla est ipsius CD, diuidatur AB, in ipsis CD, equalia, hoc est, AG, & GB: & quoniam CD, ipsius EF, tripla est; aequalis autem est AG, ipsi CD: & AG, igitur ipsius EF, tripla est: Id propterea & GB, ipsius EF, tripla est. Tota igitur AB, ipsius EF, sextupla est. Ipsius igitur AB, & EF, ratio connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD: & CD, ad EF, ratione.

SIMILITER autem, & si minor fuerit CD, vtraq; ipsarum AB, & EF, id ipsum colligitur. Sit enim rursus AB, ipsius CD, tripla: At CD, ipsius EF, sit dimidia. Et quoniam CD, ipsius EF, dimidia est: Ipsius autem CD, tripla est AB; erit AB, sesquialtera ipsius EF. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipsum semel, & dimidium. At quoniam AB, ipsius CD, tripla est: & CD, ipsius EF, dimidia: qualium AB, equalium ipsi CD, trium, talium est EF, duorum. Quare sesquialterum est AB, ipsius EF. Igitur ratio ipsius AB, ad EF, connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD: & CD, ad EF, ratione.

SEDIAM rursus sit CD, vtraq; ipsarum AB, & EF, maior: & sit quidem AB, ipsius CD, dimidium, & CD, ipsius EF, sesquitercium. Quoniam igitur, qualium est AB, duorum, talium est CD, quatuor: qualium autem CD, quatuor, talium EF, trium. Et qualium igitur AB, duorum, talium EF, trium. Connectitur igitur rursus ratio ipsius AB, ad EF, per CD, medium



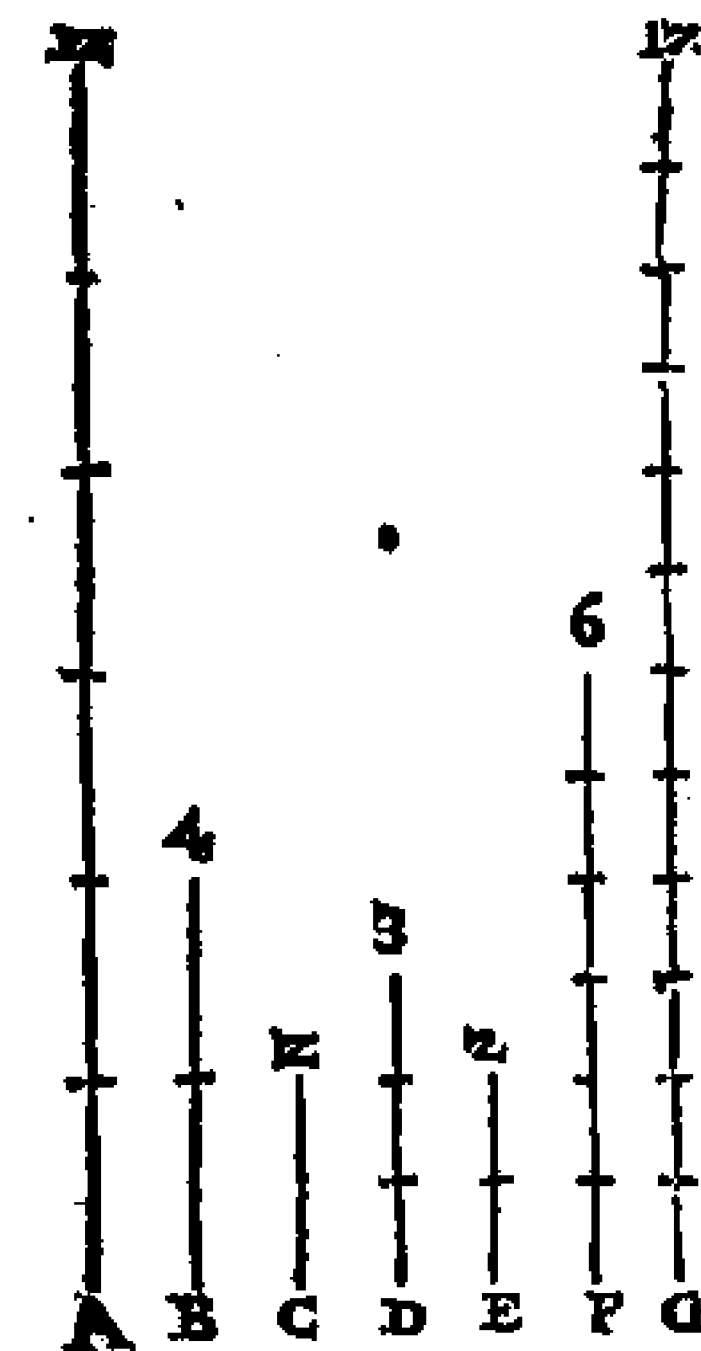
limitem, quæ duorum est ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quod si à composita ratione quavis una compositum auferatur, uno simplicium cuncto, reliqua compositarum assumetur.

HÆC ad verbum desumpsimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

EVTOCII vero demonstratio ita se habet.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Quod quidem facile demonstrabitur, assumpto prius hoc principio: Quantitatem, seu denominatorem cuiusvis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinem proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundum denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere ante-

cedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicata in 4. producant 12. Item quia 4. ad 20. habent proportionem subquadruplam, cuius denominator est $\frac{1}{4}$. fit, ut $\frac{1}{4}$. in consequentem 20. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D: proportionis vero B, ad C, denominator sit E; & D, multiplicans E, producat F. Dico F, esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C, produci A. Producatur namque G, ex multiplicatione F, in C. Dico G, ipsi A, equalem esse, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cum enim D, sit denominator proportionis A, ad B, si multiplicetur D, in B, producat A. Eadem ratione, si E, multiplicetur in C, producat B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producant G, & B; (nam ex F, in C, fit G; & ex E, in C, fit B, ut dictum est,) erit ut F, ad B, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B, producat F; & A, erit ut E, ad B, ita F, ad A; & permutando ut E, ad F, ita B, ad A; & convertendo rursus, ut F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur ut A, ad B, ita G, ad B: Ideoq; æquales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cum G, producat ex F, in C, producat quoque A, ex F, in C; propterea q; F, quan-

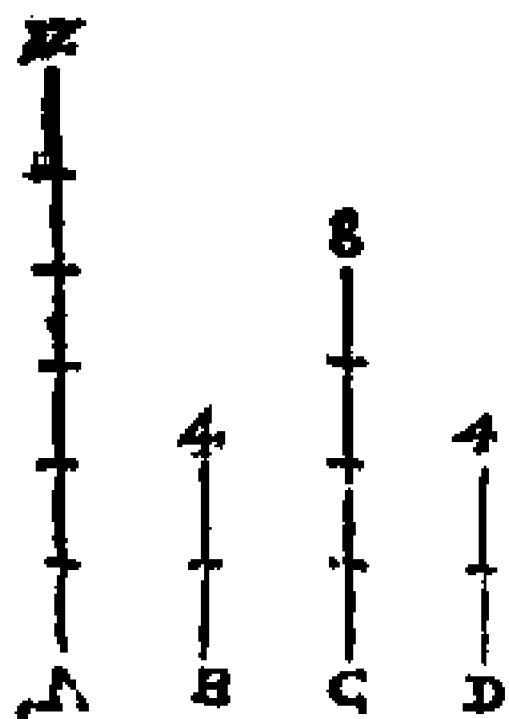


a 18. septi.
mi.
b 17. septi.
mi.

| | | |
|---------|--------|-------|
| A, 100. | B, 20. | C, 5. |
| D, 5. | E, 4 | |
| G, 100. | F, 20. | |

titas erit proportionis A, ad C. Quod est propositum.

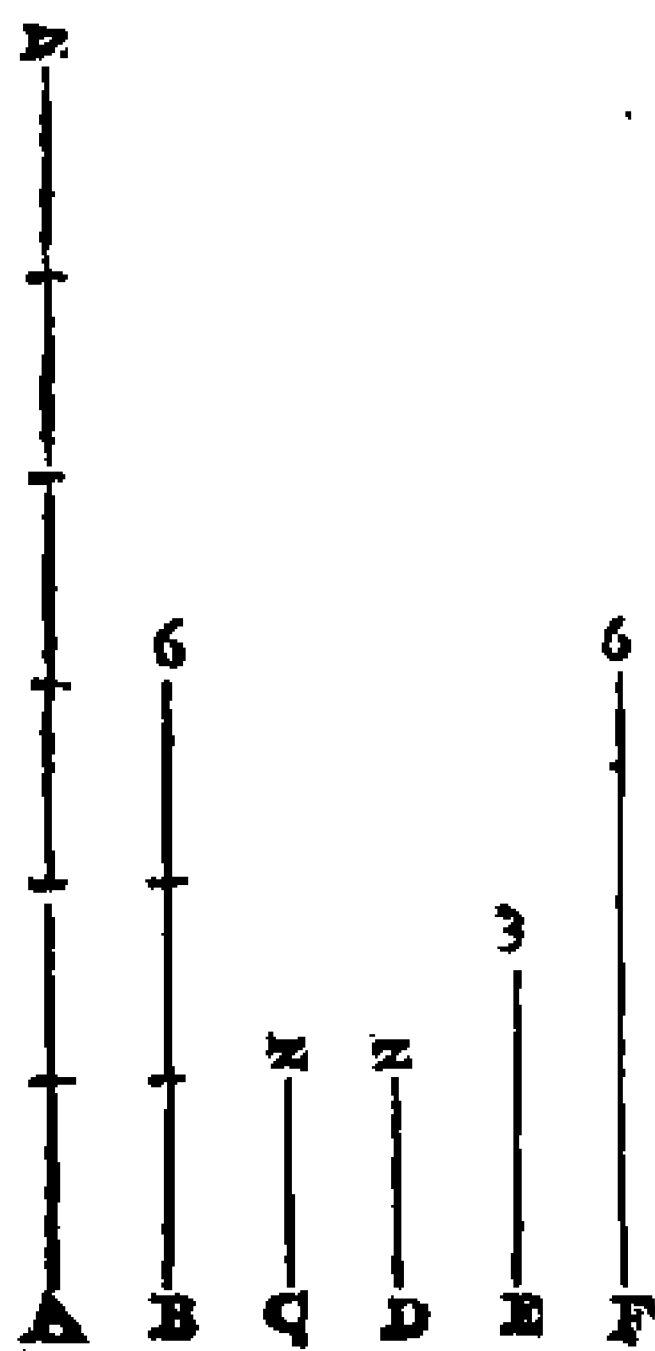
SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio prima ad ultimam componetur ex proportionibus prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C, & C, ad D, ut ostensum est: At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoq; ex proportionibus A, ad E; B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quocunque magnitudinibus.



VITELLIO denique huiusmodi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C, Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocio. Denominator videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis, producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C; At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E, quod ita fiet: Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam produci-
tur, æquale est ei, quod ex D, secunda in E, tertiam gignitur, cum semper producat A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem produciatur A, antecedens: similiter ex D, denominatore in B, consequentem produciatur antecedens A,) erit ut F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producat antecedentem F. Quod est propositum. Hac Vitellio.

| | | |
|---------|--------|-------|
| A, 100. | B, 20. | C, 5. |
| D, 5. | E, 4. | |
| F, 20. | | |



c 19. septi.
mi.

IDEM ostendetur in pluribus magnitudinibus, ut prius ex Eutocio. Veluti datis sex magnitudinibus A, B, C, D, E, F, componetur proportio A, ad F, ex proportio-

| A. | B. | C. | D. | E. | F. |
|-----|----|----|----|----|----|
| 12. | 6. | 3. | 2. | 1. | 4. |

proportionibus A, ad B; B, ad C; C, ad D; D, ad E; & E, ad F. Nam vt ostensum est, proportio A, ad F, componitur ex proportione A, ad B; & B, ad F. Hac autem proportio B, ad F, componitur ex proportione B, ad C, & C, ad

F. Et hac proportio C, ad F, componitur ex proportione C, ad D, & D, ad F: Atq; hac tandem proportio D, ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A, ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc est, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinque proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

Ex his liquido constat id, quod ad defn. 10. lib. 5. docuimus: nimirum Continuatũ quotlibet quantitativis continue proportionalibus, proportionem prima ad ultimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs aequalibus, hoc est, denominatorem proportionis, quam prima ad ultimam habet, produci ex denominatore proportionis, quam prima habet ad secundam, in seipsum multiplicato, & ex eodem in numerũ productum, & sic deinceps, donec tot multiplicationes fiant, vna minus, quot proportiones inter primam quantitatem, & ultimã sunt interposita: Adeo vt duplicata proportio alicuius proportionis consurgat, cum huius proportionis denominator bis ponitur, (propter duas aequales proportiones inter primam quantitatem & tertiam positas) atque ita in se multiplicatur: triplicata verò, quando idem denominator ter ponitur, (propter tres proportiones aequales inter primam quantitatem, & tertiam positas) atq; ita multiplicatur, primum in se, deinde iterum in numerum productum. Et sic de quadruplicata, quintuplicata, & de alijs dicendum est in infinitum. Est enim eadem demonstratio in magnitudinibus continue proportionalibus, & in magnitudinibus non proportionalibus: Solum in illis denominatores aequales erunt. Vt si A, B, C, ponantur continue proportionales, aequales erunt denominatores D, E, & F, erit denominator proportionis duplicata, &c.

ET SI autem demonstratio tam Eutocy, quam Vitellionis proprie quadrat in proportionestantum rationales, cum vtraque propositionibus lib. 7. Euclidis nitatur: quia tamen, qua de numerorum proportionibus demonstrantur, conueniunt quoq; magnitudinibus incommensurabilibus, hoc est, proportionibus irrationalibus, dici potest vtraq; demonstratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiamsi non constaret, propositis pluribus magnitudinibus denominatorem proportionis, quam prima ad ultimã habet, produci ex multiplicatione denominatorũ intermediarum proportionũ inter se, vt demonstrauimus; nõ tamen propterea demonstrationes, in quibus compositio proportionũ adhibetur, minus certa erunt: quippe cũ in illis hac denominatorũ multiplicatio non vsurpetur. Nam quemadmodũ, propositis pluribus magnitudinibus continue proportionalibus, primã ad tertiam dixit Euclides defn. 10. lib. 5. habere proportionẽ duplicatam eius, quã prima habet ad secundam: nimirum compositã ex duabus proportionibus intermedijs aequalibus: primã verò ad quartam habere proportionem triplicatam eius, quã prima ad secundam habet, hoc est, compositam ex tribus intermedijs proportionibus aequalibus: & sic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorũ: Ita quoq; si ponatur ordine plures magnitudines eiusdem generis non continue proportionalibus, dicetur prima ad ultimã habere proportionẽ compositam ex omnibus proportionibus intermedijs, licet inter se non sint omnes aequales, siue aliqua sint maioris inaequalitatis, & aliqua aequalitatis, & aliqua minoris inaequalitatis, siue omnes eiusdem generis sint, solum eam ob causam, q; illa proportionẽ intermedia sint inter extremas duas magnitudines interiecta; quemadmodũ defn. 10. lib. 5. proportio prima ad tertiam dicebatur duplicata, hoc solo nomine, quia duae proportionẽ aequales interpositae sunt inter extremas duas magnitudines: Adeo vt nõ sit aliud discrimen inter hanc compositionẽ proportionum, & illam duplicationẽ, triplicationẽ, &c. qua lib. 5. explicata est, q; quod in duplicatione, triplicatione, &c. proportionũ interijciuntur proportionẽ omnes aequales: in cõpositione verò proportionũ non necesse est, interpositas proportionẽ aequales esse. Multiplicatio tamen denominatorũ utilis est, vt sciamus, quam sit illa proportio qua alterius dicitur duplicata, triplicata, etc. vel qua ex propositis proportionibus cõposita esse dicitur:

VERBI gratia. Vt sciamus, qua proportio sit illa, qua dicitur duplicata proportionis decupla, ponemus 10. denominatorem decuplae proportionis his hoc modo, 10. 10. & vnum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100. denominator est proportionis, qua decupla est duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, qua eiusdem decupla triplicata dicitur, ponemus 10. denominatorem ter hoc modo, 10. 10. 10. & primum in secundum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decupla triplicatam. Quod de alijs quoq; proportionibus dicendum est. Sed hoc etiam discemus absq; denominatorum multiplicatione. Nam si continuentur tres numeri in proportione data, vt in tractatu proportionum, cum de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datae proportionis duplicatam: si verò continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datae proportionis. Conferendus autem est maior cum minore, quando data proportio est maioris inaequalitatis: minor verò cum maiore, cum data proportio minoris inaequalitatis est. Veluti si desideretur proportio decupla proportionis duplicata, continuabimus tres numeros in proportione decupla, hoc modo, 1. 10. 100. Vel 3. 30. 300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. qua centupla est, dicitur decupla duplicata. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. qua subcentupla est, dicitur duplicata proportionis subdecupla 1. ad 10. vel 3. ad 30.

EADEM ratione, vt cognoscamus, quam sit proportio illa, qua (verbi gratia) cõponi dicitur ex tripla,

dupla, sesquialtera, & sesquitertia, statuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3. 2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. eosque inter se multiplicabimus, primum 3. in 2. deinde productum numerum 6. in $1\frac{1}{2}$. & hunc rursus numerum procreatum 9. in $1\frac{1}{3}$. & sic deinceps. si plures essent denominatores. Vltimus enim productus 12. est denominator proportionis, quæ ex datis proportionibus componi dicitur, ita ut proportio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia. Hoc autem intelligemus etiam sine hac multiplicatione denominatorum. Si namque proportionibus componentes continuantur in numeris, ita ut primus ad secundum habeat primam proportionem componentem, secundus ad tertium secundam, tertius ad quartum tertiam, quartus ad quintum quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad ultimum, composita ex datis proportionibus. Ut in proximo exemplo proportionibus data, videlicet tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. $1\frac{1}{2}$. 1. Vbique enim primus numerus ad secundum proportionem habet triplam, secundus ad tertium duplam, tertius ad quartum sesquialteram, & quartus ad quintum sesquitertiam. Proportio ergo primi ad ultimum, quæ duodecupla est, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, ut prius. Quo pacto autem quotius proportionibus continuanda sint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propof. 4.

ITAEQUE cum Euclides demonstrat hoc lib. propof. 23. equiangula parallelogramma habere proportionem compositam ex duabus proportionibus, quas duo latera circa unum angulum unius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quam si duæ illæ proportionibus laterum continuantur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogramma inter se habere, quam prima quantitas ad tertiam habet. Ut si proportio unius lateris primi parallelogrammi ad unum latus secundi fuerit, ut 8. ad 3. proportio vero alterius lateris ad alterum latus, ut 1. ad 2. nihil aliud est intelligendum, quam si sumantur tres numeri, 24. 9. 18. quorum primus ad secundum est, ut 8. ad 3. & secundus ad tertium, ut 1. ad 2. proportionem parallelogrammi primi ad secundum esse eandem, quam habet primus numerus 24. ad tertium 18. quæ est sesquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur, ut dictum est, ex proportionibus 24. ad 9. & 9. ad 18. hoc est, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera esse diximus.

PORRO quemadmodum interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatam proportionem, & triplicatam, &c. verè esse maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem esse intelligendam de magnitudinibus continue proportionalibus in proportionem maioris inæqualitatis, quod tamen falsum esse ibi indicavimus: ita idem volunt etiam in hac compositione proportionum, extremorum proportionem, quæ ex proportionibus intermediis componi dicitur, verè esse maiorem qualibet intermediarum componentium, utpote constatam ex additione omnium intermediarum proportionum inter se, ac proinde omnes intermediarum proportionem debere esse minores extremorum proportionem. Verum hoc falsum est, & Euclidi omnino repugnans, ut ex proximo exemplo, quod ex propof. 23. huius lib. protulimus, perspicuum est. Nam propositis tribus hisce numeris, 24. 9. 18. qui habent easdem proportionem ordine inter se, quas latera unius parallelogrammi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrammi ad parallelogrammum eadem, quæ 24. ad 18. nimirum ex laterum proportionibus composita, ut Euclides demonstrat. Quis autem non videt, proportionem 24. ad 18. quæ sesquitertia est, multò minorem esse proportionem 24. ad 9. quæ dupla est superbipartiens tertias? Sed de hac re plura scribemus ad finem lib. 9.

HEC cum ita sint, si quis velit habere quotlibet proportionibus datam proportionem componentes, id est, quarum denominatores inter se multiplicati gignant datam proportionis denominatorem, statuendi erunt inter duos numeros datam proportionis quoscunque, tot numeri medij quicunque, quot proportionibus componentes desiderantur, minus uno. Ut si quis velit tres proportionibus, ex quibus cæupla proportio componatur, satisfiet questionem, si inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. Nam extremorum proportio 100. ad 1. componitur ex intermediis tribus, hoc est, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoque, si alios numeros statuamus medios hoc modo, 100. 10. 3. 1. componetur eadem proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla, sesquitertia, & tripla. Sic etiam vides hic, 2. 3. 1. 10. 1. duplam proportionem compositam esse ex quatuor, nimirum ex subsesquialtera, tripla, subdecupla, & decupla. Quod si quis petat quotius proportionibus datam proportionem componentes, quæ etiam omnes datae sint præter unam, continuabimus ab uno extremo datam proportionem omnes datas proportionibus componentes ordine. Hæ enim cum proportionem, quam ultimus medius ad alterum extremum datam proportionem habet, componet datam proportionem. Ut si quis dicat, Da mihi quinque proportionibus, quarum quatuor sint, dupla, tripla, sesquialtera, & quintupla sesquitertia, componentes proportionem sesquialteram inter 9. & 6. statuemus hos quatuor numeros medios, 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. 6. ita ut 9. ad $4\frac{1}{2}$. habeant proportionem duplam, & $4\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{2}$. triplam & $1\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{3}$. sesquialteram: & $1\frac{1}{3}$. ad $\frac{3}{2}$. quintuplam sesquitertiam. Ex his etenim quatuor, una cum proportionem $\frac{3}{2}$. ad 6. quæ eadem est, quæ 1. ad 32. componitur proportio sesquialtera 9. ad 6. Idem eveniet, si data quatuor proportionibus continuantur à minori extremo 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. ita ut 12. ad 6. habeant proportionem duplam, & 36. ad 12. triplam, & 54. ad 36. sesquialteram, & 288. ad 54. quintuplam sesquitertiam. Nam quinta proportio 9. ad 288. eadem est, quæ prius $\frac{3}{2}$. ad 6. qualis est 1. ad 32.

EX his nullo negotio satisfaciemus questionem, quæ quispiam postulat sibi dari quotius numeros, qui inter se multiplicati procreent datum quemcunque numerum. Si namque sumantur duo numeri habentes proportionem

portionem à dato numero denominatam, & inter eos statuatur tot numeri quicunq, minus vno, quot numeri desiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, qui queruntur. Nam si inter se multiplicati producant denominatorem proportionis extremorum, ut demonstratum est, hoc est, numerum datum. Veluti si quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignantur 100. statuamus inter duos numeros 500. 5. centuplam proportionem habentes, duos medios numeros quoscunq, hoc modo, 500. 250. 50. 5. erunt q, tres quæsi numeri, 2. 5. 10. nimirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250. ad 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5. fiunt 10. & ex 10. in 10. fiunt 100. Quod si quis postulet vnum numerum, qui vnà cum quolibet aliis datis, si inter se multiplicentur, producat datum quemcunque numerum: Sumendi erunt rursus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui produci debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuanda proportionem à datis aliis numeris denominata. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum erit numerus, quem querimus. Ut si dentur hi quatuor numeri, 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{2}$. queraturq, quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum $1\frac{1}{2}$. accipiemus duos numeros 9. & 6. proportionem sesquialteram habentes à dato numero $1\frac{1}{2}$. denominatam; & à 9. continuabimus quatuor proportionem à 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{2}$. denominatas, hoc modo, 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. 6. Quintus enim numerus quæsitus erit denominator proportionis $\frac{3}{2}$. ad 6. nimirum $\frac{1}{3}$. Nam quinq, hi numeri, 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. quorum priores quatuor dati sunt, quintus autem inuenietur, inter se multiplicati procreant datum numerum $1\frac{1}{2}$. idem quintus numerus $\frac{1}{3}$. inuenietur, si quatuor proportionem à datis numeris denominata continuentur à numero 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. Denominator enim proportionis 9. ad 288. est $\frac{1}{32}$. ut prius. Sic etiam si querendi sint quatuor numeri, qui inter se multiplicati procreant 1. statuamus inter quosuis datos numeros aequales proportionem aequalitatis ab 1. denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, ut hic vides, 4. 2. 1. 3. 4. Nam denominatores proportionum 4. ad 2. & 2. ad 1. & 1. ad 3. & 3. ad 4. nimirum 2. $2\frac{1}{2}$. $\frac{3}{4}$. sunt quatuor numeri, qui queruntur, quippe cum inter se multiplicati gignant 1.

FACILIS huiusmodi quæstiones soluantur, si tot numeri quicunq, minus vno, quot petuntur, inter se multiplicentur, & per vltimum numerum productum diuidatur datus numerus qui gigni debet. Quotiens enim & assumpti numeri, qui multiplicati inter se sunt, erunt quos querimus. Ut in proxima quæstione, si hi tres numeri, verbi gratia, 4. 5. 6. inter se multiplicentur, & per numerum productum 120. diuidatur 1. qua produci debet, fiet Quotiens $\frac{1}{120}$. Quatuor ergo numeri quæsi sunt 4. 5. 6. $\frac{1}{120}$. Nam ex 4. in 5. fiunt 20. & ex 20. in 6. fiunt 120. & ex 120. in $\frac{1}{120}$. fit 1.

POSTREMO neq, hoc pratermittendum est, videlicet: Quemadmodum, ordine positis quocunque numeris, denominator proportionis extremorum producit ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, ut demonstrauimus: ita positis quocunq, numeris ordine, ita tamen, ut quilibet insequens sit suo antecedente maior, differentia extremorum coaceruatur ex omnibus differentiis intermediarum numerorum. Ut hic 3. 7. 12. 20. 30. 100. 713. differentia inter 3. & 713. est 710. At differentia inter 3. & 7. est 4. Inter 7. & 12. est 5. Inter 12. & 20. est 8. Inter 20. & 30. est 10. Inter 30. & 100. est 70. Inter 100. deniq, & 713. est 613. qua omnes differentie, 4. 5. 8. 10. 70. 613. conficiunt 710. differentiam extremorum.

AT QV hac dicta sint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. lib. positis, quibus addendam esse censemus sequentem sextam, qua multum conducet, ut facilius intelligantur 27. 28. 29. & 30. propositiones huius libri, & quamplurima alia decimi libri. Ea autem est eiusmodi.

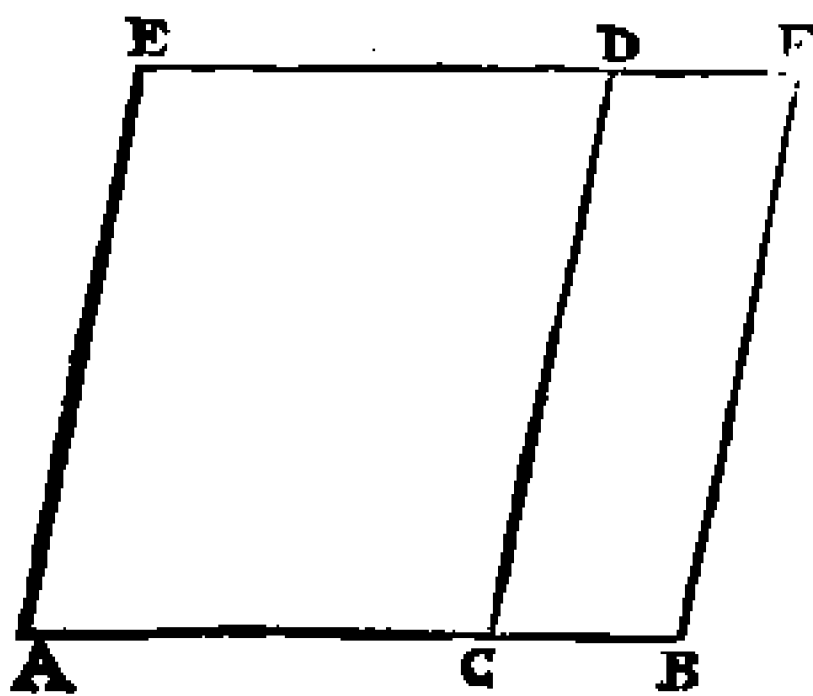
V I.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogramo, quando non occupat totam lineam: Excedere verò, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quam applicatur: ita tamen, ut parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatq; cum eo totum vnum parallelogrammum.

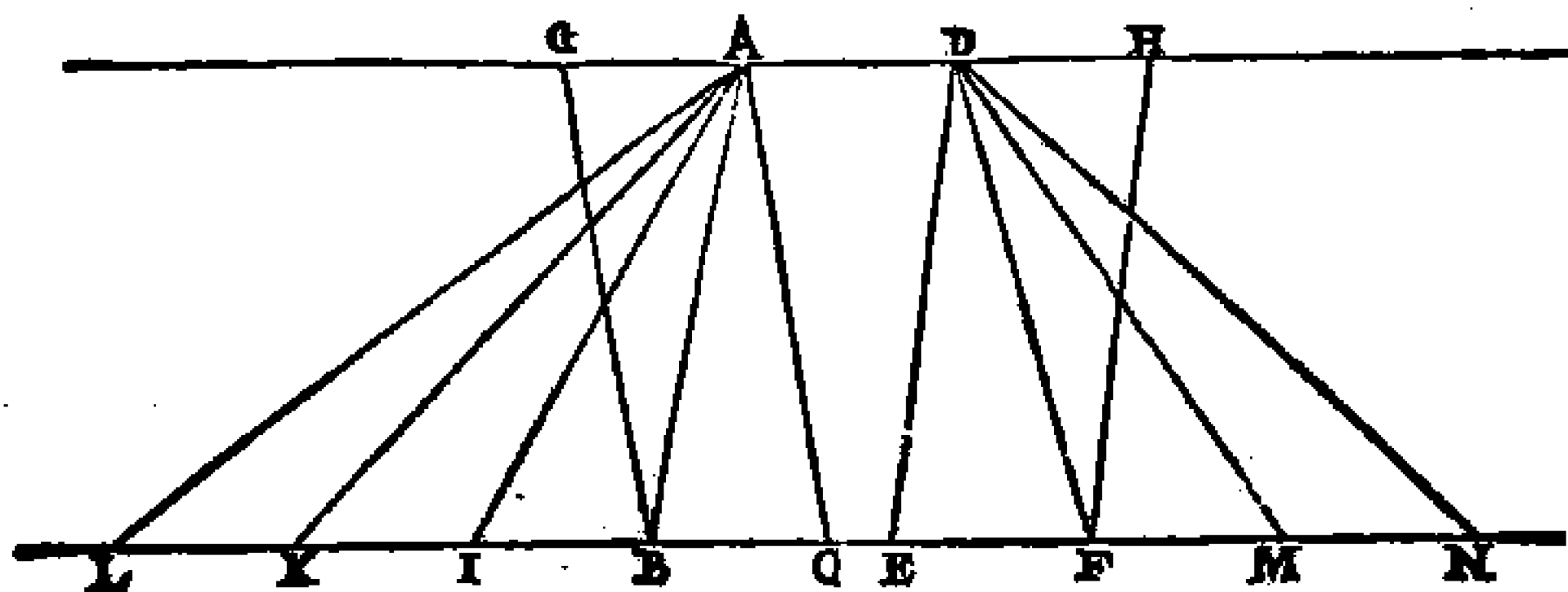
SIT data recta linea AB, supra quam constituatur parallelogrammum ACDE, quod non occupet totam lineam AB, sed desit CB; & ducta BF, parallela ipsi CD, donec cum ED, protracta cõueniat in F, compleatur totum parallelogrammum ABFE. Parallelogrammum igitur AD, applicatum secundum rectam AB, deficere dicitur parallelogrammo DB, ita ut DB, appelletur defectus.

RVS sit data recta linea AC, supra quam constituatur parallelogrammum ABFE, quod habeat latus AB, maius recta data AC; & ducatur CD, ipsi BF, parallela. Parallelogrammum igitur AF, applicatum secundum rectam AC, excedere dicitur parallelogrammo DB, ita ut DB, vocetur excessus.

HIC autem defectus DB, vel excessus, in rectangulis quidem esse potest vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides, ut perspicuum est.



TRIANGULA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.



SINT duo trian-
gula ABC, DEF,
eandem habentia al-
titudinem, quorū ba-
ses BC, EF. Itē duo
parallelograma CG,
EH, eiusdem altitu-
dinis, quorū eadem
bases BC, EF. Dico
ita esse triangulum
ABC, ad triagulum

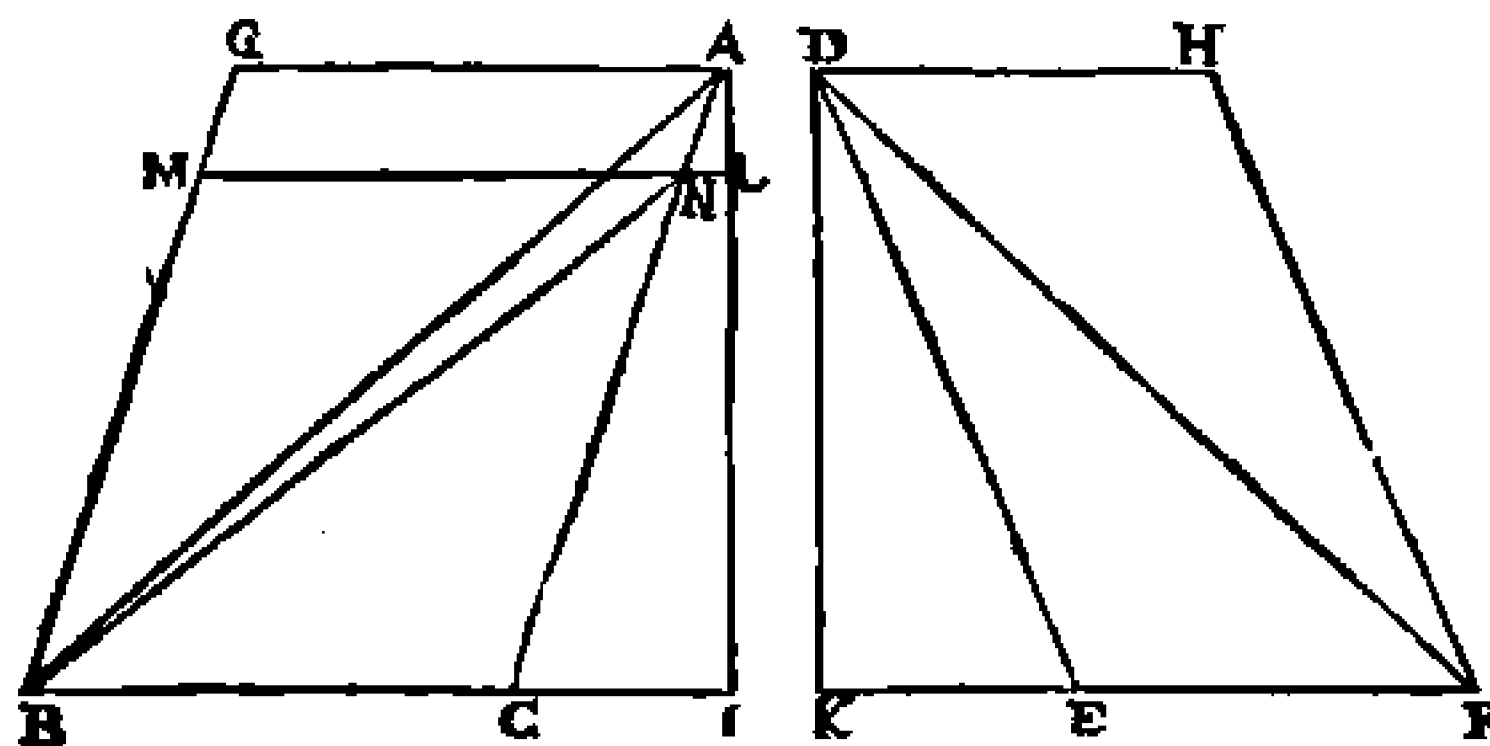
DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH, vt est basis BC, ad basin EF. Hoc
est, si basis BC, statnatur prima magnitudo, & basis EF, secunda: At triangulum ABC, vel paral-
lelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta: æquemulti-
plicia primæ ac tertiæ ab æquemultiplicibus secundæ & quartæ vel vnâ deficere, vel vnâ æqualia
esse, vel vnâ excedere, vt definitio 6. lib. 5. exigit. Collocentur enim tam triangu-
la, quàm parallelogramma inter easdem parallelas GH, LN. (Nam vt in definitione 4. dictum est, triangu-
la & pa-
rallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta
parallelas: sic enim perpendiculares à verticibus ad bases demissæ æquales erunt,) & ex BL, su-
mantur quotcunque rectæ BI, IK, KL, ipsi BC, æquales; Item ex FN, abscindantur quotcunque
a 38. primi. rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AL, AK, AL, DM, DN.
Erunt igitur triangu-
la ABC, AIB, AKB, ALK, super æquales bases, & inter easdē parallelas con-
stituta, inter se æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangu-
la DEF, DFM, DMN. Quam mul-
tiplex est ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC;
& quā multiplex est recta EN, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trian-
guli DEF: quia in tot triangu-
la æqualia sunt diuisa tota triangu-
la ACL, DEN, in quot rectas æ-
quales sectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam verò si basis CL, æqualis fuerit basi EN, b
necessariò triangulum ACL, æquale est triangulo DEN: ac proinde si CL, maior fuerit quàm EN,
necessariò ACL, maius est, quàm DEN, & si minor, minus: deficient propterea vnâ CL, recta, &
triangulum ACL, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab EN, recta, &
triangulo DEN, æquemultiplicibus secundæ EF, & quartæ DEF, vel vnâ æqualia erunt, vel vnâ
c 6. definit. excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. c Quare quæ proportio est primæ BC, ad secun-
dum EF, basis ad basin, ea est tertiæ ABC, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur
basis ad basin, ita est triangulum ad triangulum. quod est propositum.

QVONIAM autē d vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est parallelogrammum CG,
d 15. quinti. (quod duplum est trianguli ABC.) ad parallelogrammum EH: (quod est duplum trianguli
e 34. primi. DEF.) perspicuum est, & ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogrammū, vt est basis ad
f 34. primi. basin. Quod tamen eodem argumento confirmari potest, quo vsi sumus in triangulis, si prius ex
g 11. quinti. punctis I, K, L, eduxerantur rectæ parallelæ ipsi BG: nec non ex punctis M, N, parallelæ ipsi FH, &c.
Triangu-
la igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo: ita se habent inter se, vt ba-
ses. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

SED & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet:

TRIANGULA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent
altitudines, vel eandem.



a 1. sexti.

b 11. quin-
ti.

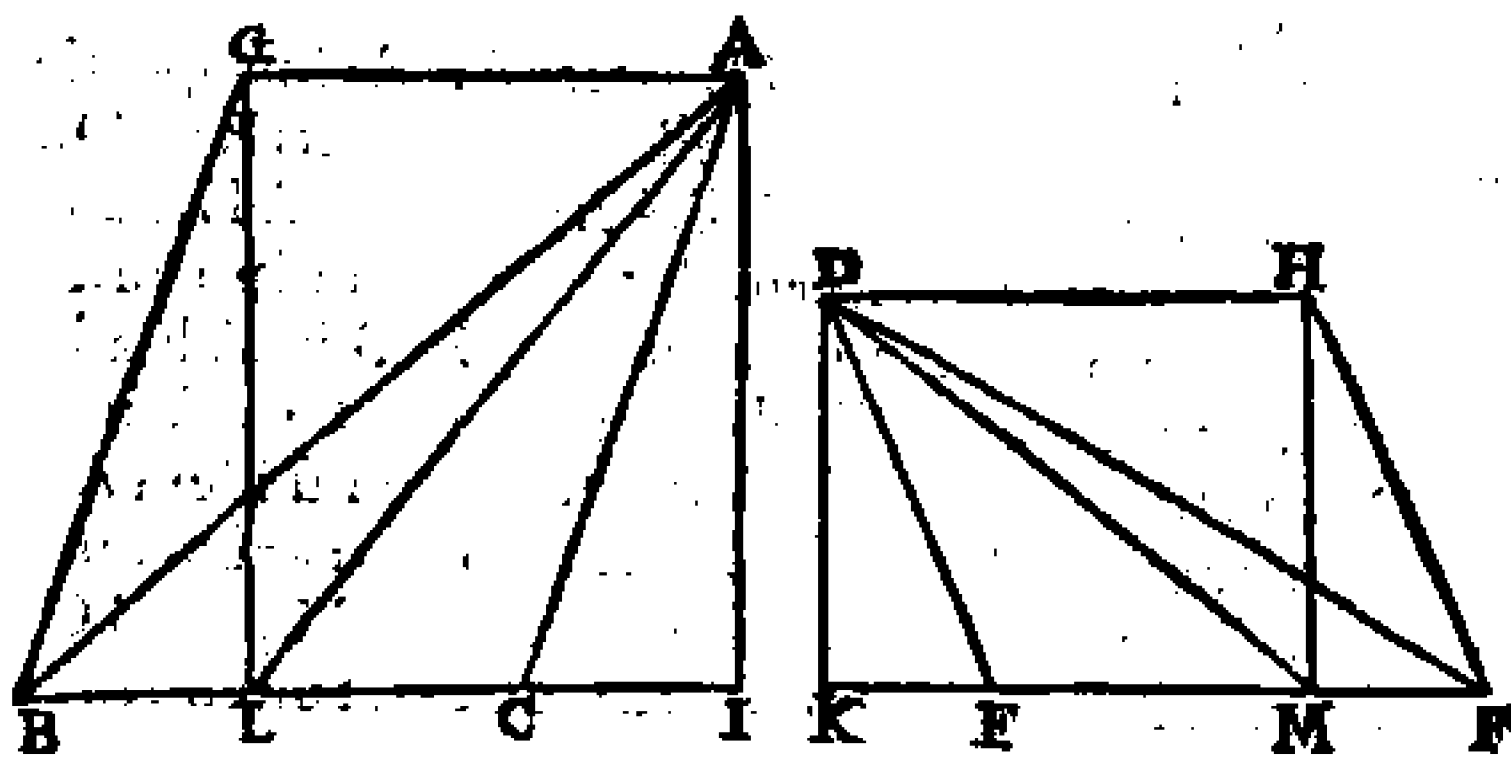
c 9. quinti.

vt basis BC, ad basin EF; cum altitudines LI, DK, ponantur æquales: Sed fuit etiam ABC, ad DEF,
vt BC, ad EF. b Igitur triangu-
la NBC, ABC, ad triangulum DEF, eandem habent proportionem: c

Ac proinde equalia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inaequales sunt altitudines AI, DK , sed aequales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus, parallelogramma $NMBG, AGBC$, equalia esse, si altitudines AI, DK inaequales dicantur, & LI, DK , aequales.

AD DIT hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonstrabimus. Videlicet

TRIANGULA, & parallelogramma, quorum aequales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, ut altitudines.



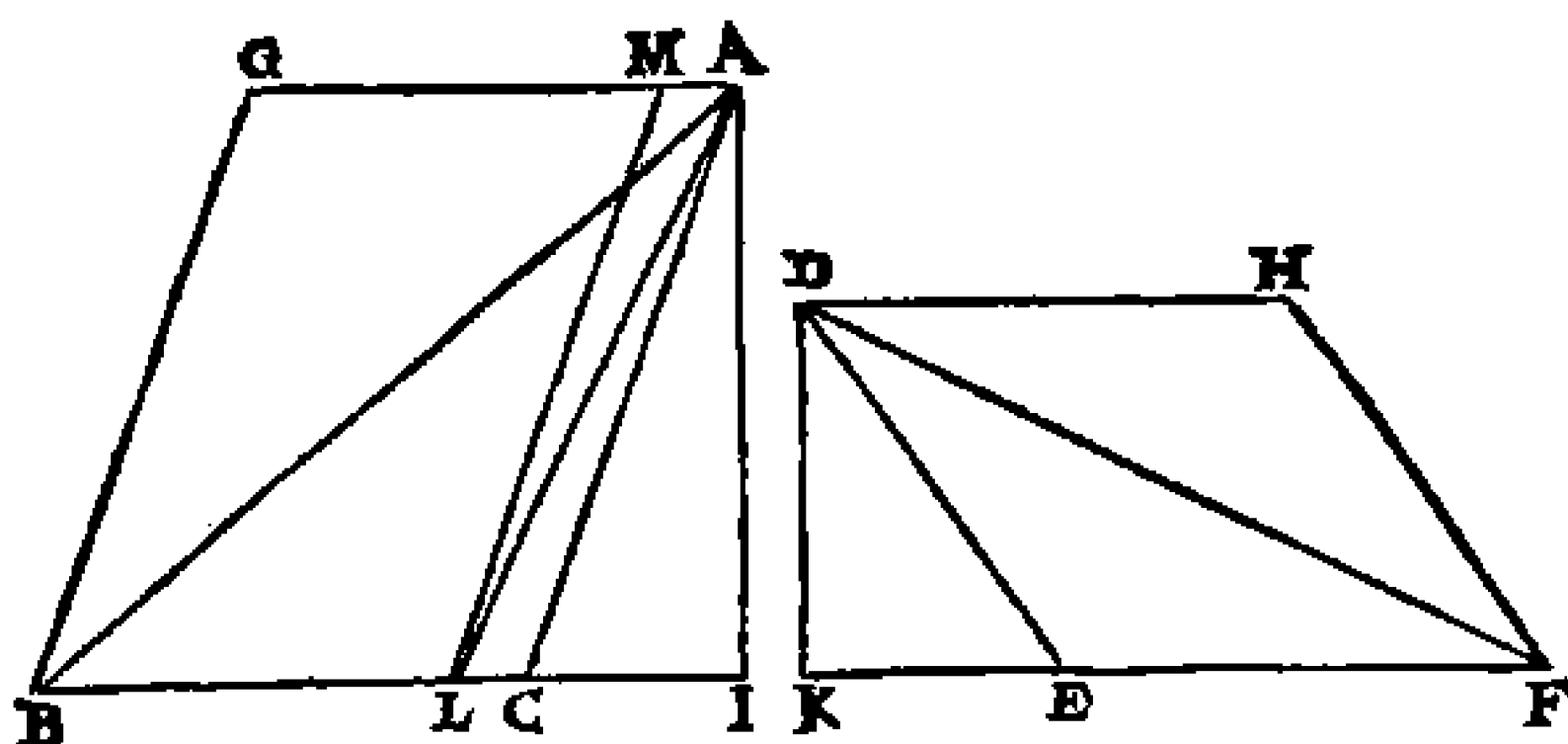
SINT duo triacula ABC, DEF ; & parallelogramma $AGBC, DEFH$, habentia bases aequales BC, EF . Dico esse triangulum ABC , ad triangulum DEF , & parallelogrammum $AGBC$, ad parallelogrammum $DEFH$, ut altitudo AI , est ad altitudinem DK . Si enim sumantur rectae IL, KM , basibus BC, EF , aequales, ducanturque rectae LA, MD ;

^a erit triangulum ALI , triangulo ABC , aequale, cum sint super bases aequales LI, BC , & inter easdem parallelas AG, IB . Eodem modo aequale erit triangulum DKM , triangulo DEF . Quare erit ut ABC , ad DEF , ita ALI , ad DKM . ^c Est autem, ut ALI , ad DKM , ita AI , ad DK . (Nam si bases ponantur AI, DK , erunt rectae aequales LI, KM , altitudines.) Igitur & ABC , ad DEF , erit, ut AI , ad DK . Quod est propositum.

QUONIAM vero est, ^d ut ABC , ad DEF , ita parallelogrammum $AGBC$, ^e quod trianguli ABC , duplum est ad parallelogrammum $DEFH$, ^f quod trianguli DEF , est duplum: & Erit quoque, $AGBC$, ad $DEFH$, ut AI , ad DK . Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectae ducantur LG, MH . Idem sequetur, si triacula, & parallelogramma eandem habuerint basin.

Hoc vero conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGULA, & parallelogramma, quae ita se habent inter se, ut altitudines, aequales habent bases, si vnam & eandem non habeant.



SIT triangulum ABC , ad triangulum DEF ; & parallelogrammum $AGBC$, ad parallelogrammum $DEFH$, ut altitudo AI , ad altitudinem DK . Dico eorum bases BC, EF , aequales esse. Si enim non sunt aequales, sit BC , si fieri potest, maior, quam EF . Abscissa igitur EL , ipsi EF , equali, ducta, rectae LA ; erit, ut proxime demonstrauimus, ABL , ad DEF , ut

AI , ad DK : Sed ut AI , ad DK , ita ponitur esse ABC , ad DEF . Igitur ABL, ABC , ad DEF , eandem habent proportionem. Ac proinde inter se equalia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inaequales sunt bases BC, EF , sed aequales. Eademque est ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento, ducta LM , ipsi GB , parallela, ostendemus, parallelogramma $MGBL, AGBC$, equalia esse, si bases BC, EF , dicantur inaequales, & BL, EF , aequales.

IN omnibus autem his non variabitur demonstratio, etiam si triacula & parallelogramma sint rectangula, ita ut altitudines sint ipsorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum vero non. Nos assumpsimus casum difficiliorem, quando scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio maiore indiget non nunquam constructione.

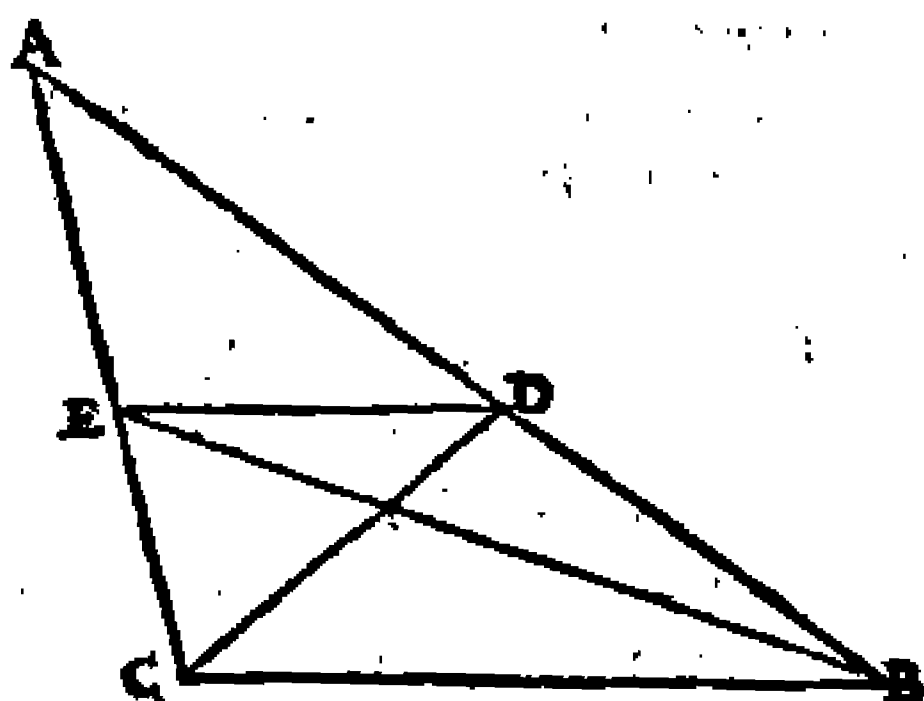
THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quaedam linea, haec proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quae ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

IN triangulo ABC , ducatur primum recta DE , parallela lateri BC . Dico latera AB, AC , secta esse proportionaliter in D, E , hoc est, esse ut AD , ad DB , ita AE , ad EC . Ductis enim rectis CD, BF , erunt triacula DEB, DEC , super eandem basin DE , & inter easdem parallelas DE, BC , constituta, inter se aequalia. Quare ut triangulum ADE , ad triangulum DEB , ita est triangulum idem ADE , ad triangulum DEC . Atqui ut triangulum ADE , ad triangulum DEB , ita est

¶ 11. quinti.



b 1. sexti.

¶ 11. quinti.

d 1. sexti.

¶ 11. quinti.

f 9. quinti.

E 39. primi.

D B, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem ut AD, ad DB, ita AE, ad EC. Igitur erit ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita AE, ad EC. Sed rursus ut basis AE, ad basin EC, ita est triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum sint altitudinis eiusdem. Igitur ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum ADE, ad triangulum DEC. Equalia ergo sunt triangula DEB, & DEC: Ac propterea cum eandem habeant basin DE, & inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est DE, ipsi BC. quod est propositum. Si itaq; ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

basis AD, ad basin DB. (cum hæc triacula sint eiusdem altitudinis, ut constat, si per E, agatur parallela recta ipsi AB.) & eadem ratione, ut triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita est basis AE, ad basin EC. Ut igitur AD, ad DB, ita est AE, ad EC, (cum hæc duæ proportionesezdem sint, proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, & eiusdem trianguli ADE, ad triangulum DEC,) quod est propositum.

Si ceterum deinde recta DE, latera AB, AC, proportionalliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC. Ductis enim rursus rectis CD, BE, erit ut basis AD, ad basin

3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.

h 17. primi.

i 29. primi.

k 29. primi.

l 6. primi.

m 7. quinti.

n 2. sexti.

o 11. quinti.

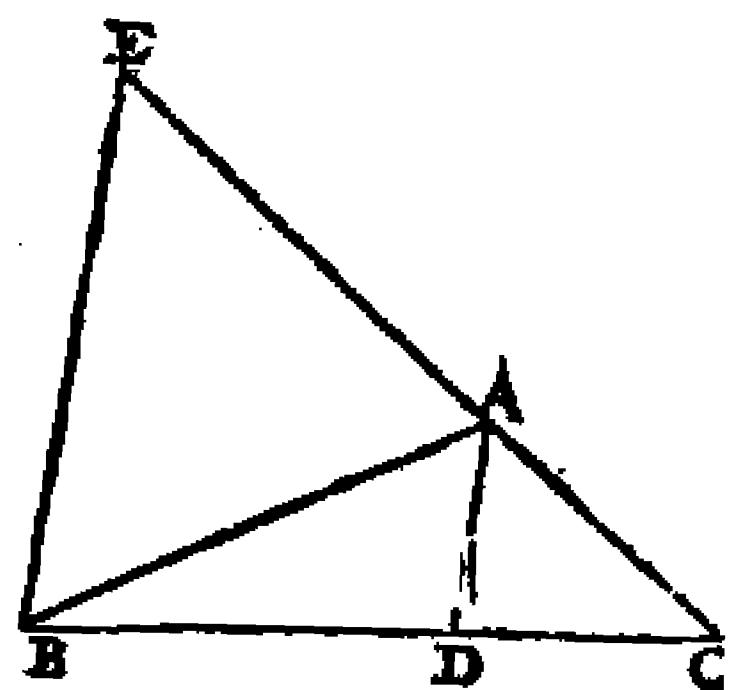
p 2. sexti.

q 11. quinti.

r 9. quinti.

s 5. primi.

t 29. primi.



IN triangulo ABC, recta AD, secet primò angulum BAC, bifariam. Dico esse ut BA, ad AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per B, recta BE, parallela ipsi AD, donec cum CA, producta conveniat in E; (coibunt autem omnino BE, CA, propterea quod anguli C, & CBE, minores sunt duobus rectis. Cum enim C, & CDA, minores duobus rectis sint: sit autem angulus CDA, angulo CBE, externus interno, æqualis: erunt quoq; C, & CBE, duobus rectis minores.) & eritq; angulus EBA, æqualis alterno BAD: & angulus E, externo DAC. Cum igitur duo anguli BAD, DAC, æquales ponantur, erunt & anguli EBA, & E, inter se æquales: Ideoq; & rectæ BA, EA, inter se æquales. Ut igitur EA, ad AC, ita BA, ad eandem AC: Atqui ut EA, ad AC, ita est BD, ad DC, cum in triangulo BCE, recta AD, sit parallela lateri BE. Igitur ut BA, ad AC, ita est BD, ad DC. quod est propositum.

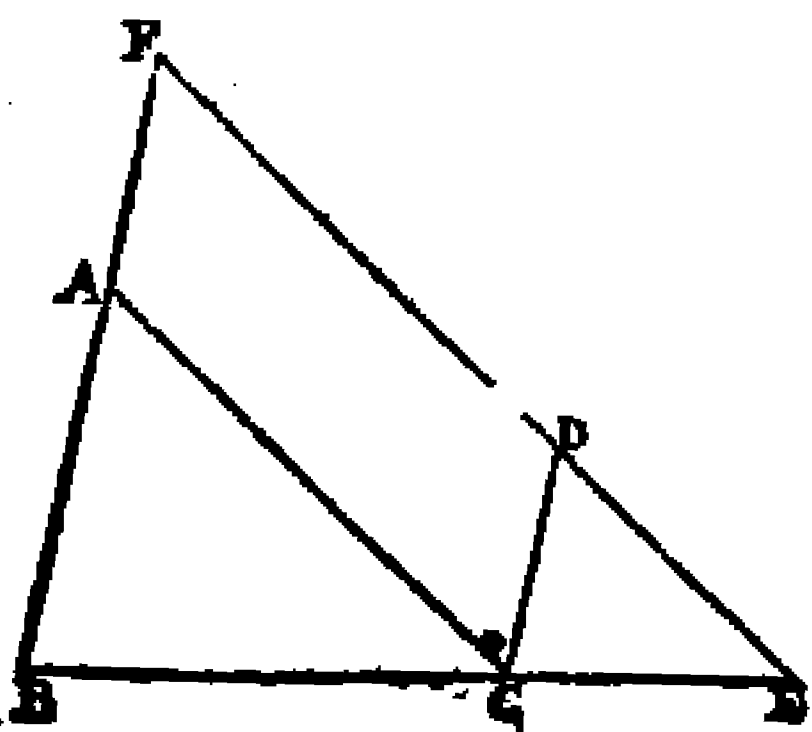
Si r deinde ut BA, ad AC, ita BD, ad DC. Dico rectam AD, bifariam secare angulum BAC. Agatur enim rursus per B, recta BE, ipsi AD, parallela coiens cum CA, protracta in E. Quoniam igitur ut BA, ad AC, ita ponitur BD, ad DC. Ut autem BD, ad DC, ita est EA, ad AC: (quod in triangulo BCE, recta AD, sit lateri BE, parallela.) Erit ut BA, ad AC, ita EA, ad eandem AC. Equales igitur sunt BA, & EA, inter se, & propterea anguli ABE, & E, æquales quoq; erunt. Cum igitur angulus ABE, æqualis sit alterno BAD: & angulus E, externo DAC, erunt & duo anguli BAD, DAC, inter se æquales. quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

ÆQUIANGVLORVM triangulorū proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

¶ 17. primi.



SINT æquiangula triacula ABC, DEC, sintque æquales anguli ABC, DEC, & ACB, DEC, & BAC, CDE. Dico esse AB, ad BC, ut DC, ad CE; & BC, ad CA, ut CE, ad ED; & AB, denique ad AC, ut DC, ad DE. Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaq; sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur. hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera BC, CE, secundum lineam rectam, ita ut angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC; pariterq; externus ACB, interno DEC. Et quia duo anguli ABC, ACB, minores sunt duobus rectis: est autem angulus ACB, æqualis angulus

gulus DEC, erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. Quare rectæ BA, & ED, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam verò angulus externus DCE, æqualis est interno opposito ABC, & parallelæ erunt CD, & BE eadem ratione, parallelæ erunt CA, & EF; quod angulus externus ACB, sit æqualis interno DEC. Parallelograminū est igitur ACDF; propterea, recta AF, æqualis rectæ CD, & recta CA, rectæ DE. Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela est lateri EF, erit AB, ad AF, hoc est, ad DC, (quæ æqualis est ipsi AF,) vt BC, ad CE. Permutando igitur erit AB, ad BC, vt DC, ad CE. Rursus quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, erit BC, ad CE, vt FD, hoc est, vt CA, (quæ æqualis est ipsi FD,) ad ED. Permutando igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED. Cum igitur sit AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED: erit & ex æquali AB, ad CA, vt DC, ad ED. Quod est propositum. Aequiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

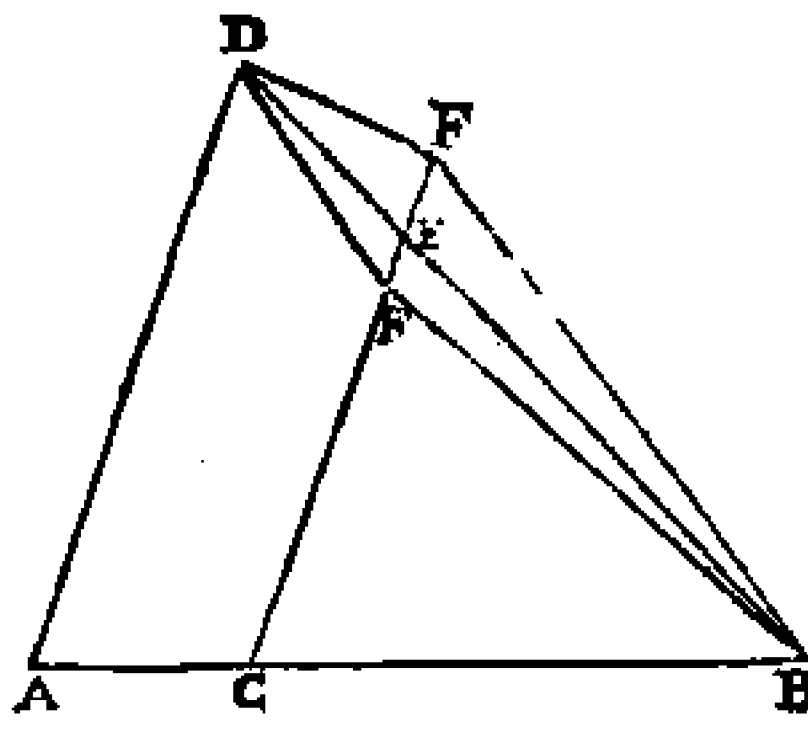
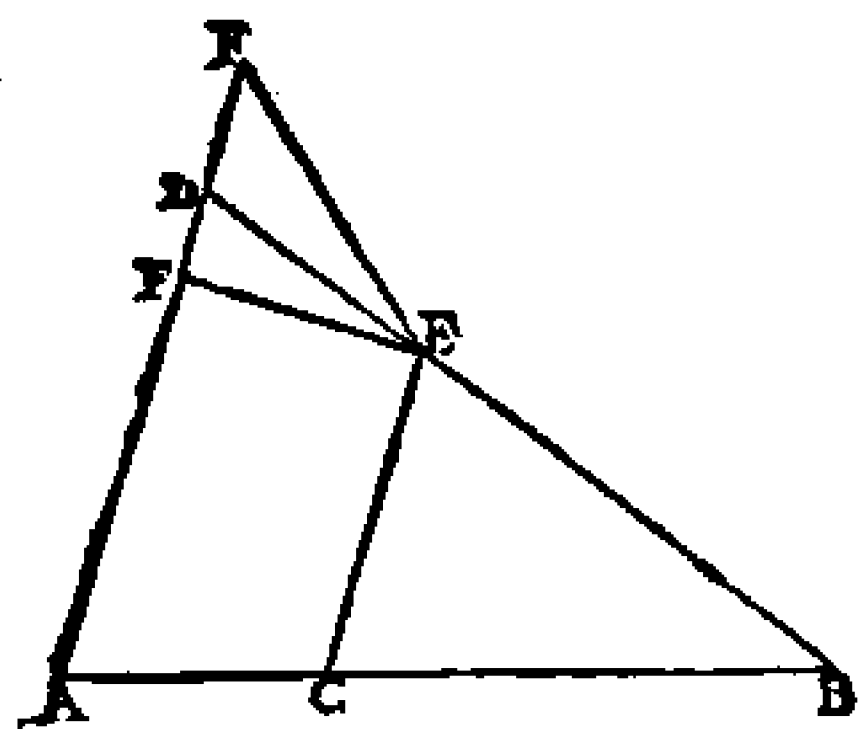
COROLLARIUM

Hæc sit, lineam rectam, quæ parallela ducitur uni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triângulo simile. Ducatur enim in triângulo ABC, lateri BC, parallela DE. Dico triângulū ADE, toti triângulo ABC, esse simile. Aequiangula namq, sunt, cū anguli ADE, AED, æquales sint angulis ABC, ACB, externi internis; & angulus A, communis. Quare, vt demonstratum est, habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.

SCHOLIUM

Non alienum à nostro instituto esse puto, si hic demonstremus duo theorematà, quorum primum Federicus Commandinus demonstrat in libello Archimedis de ys, quæ vehuntur in aqua: Secundum verò in Commentarijs in Apollonij Conica. Horum primum est:

Si ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorū alterum sit extremum, alterū verò intra lineam, duæ parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita vt proportionē habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum inclulæ: Recta coniungens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ, transibit per extremū alterius lineæ.



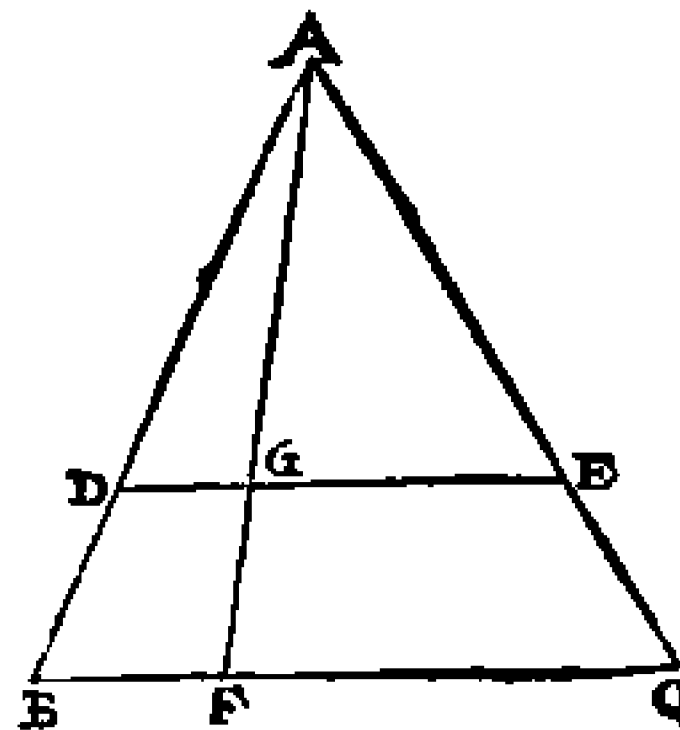
Si recta AB, & ex punctis A, & C, educantur duæ parallelæ AD, CE, proportionem habentes, quam AB, BC, ita vt sit AD, ad CE, sicut AB, ad BC; vel CE, ad AD, vt BC, ad AB. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, transire per punctum D. Item rectam, quæ coniungit extrema B, & D,

transire per punctum E. Si enim recta BE, nō transit per D, coeat cū AD, in F, puncto, quod sit vel supra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur p coroll. huius propos. triângula BAF, BCE, similia sunt; erit vt AB, ad AF, ita BC, ad CE. Et permutando, vt AB, ad BC, ita AF, ad CE. Vt autem AB, ad BC, ita erat quoq, AD, ad CE. Igitur erit, vt AF, ad CE, ita AD, ad CE: Ac propterea æquales erunt rectæ AF, AD, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta BE, per punctum D. Quod est primum.

Rursus si recta BD, non transit per E, transeat per F, punctum, quod sit vel supra E, vel infra, vt in secunda figura. Quoniam ergo p coroll. huius propos. triângula BAD, BCF, similia sunt; erit, vt AB, ad AD, ita BC, ad CF. & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF: Vt autem AB, ad BC, ita quoq, erat AD, ad CE. Igitur erit, vt AD, ad CF, ita AD, ad CE: Ac proinde æquales erunt rectæ CF, CE, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta BD, per E. Quod est secundum. ALTERVM verò est:

Si in triângulo quouis vni lateri parallela recta agatur, & ex quocunq; puncto illius lateris ad angulū oppositū recta educat linea: diuidentur linea parallela, & latus illud in easdē rationes.

In triângulo ABC, ducta sit DE, lateri BC, parallela, & ex puncto F, quocunq, ad angulū A, recta extendatur FA, secans DE, in G. Dico esse, vt BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quoniam enim triângula AFB, AGD, ex coroll. huius propos. similia sunt; erit vt AF, ad BF, ita AG, ad DG; & permutando, vt AF, ad AG, ita BF, ad DG. Arg, eodem argumento concludemus esse, vt AF, ad AG, ita FC, ad GE. Igitur erit, vt BF, ad DG, ita FC, ad GE; & permutando vt BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quod est propositum.

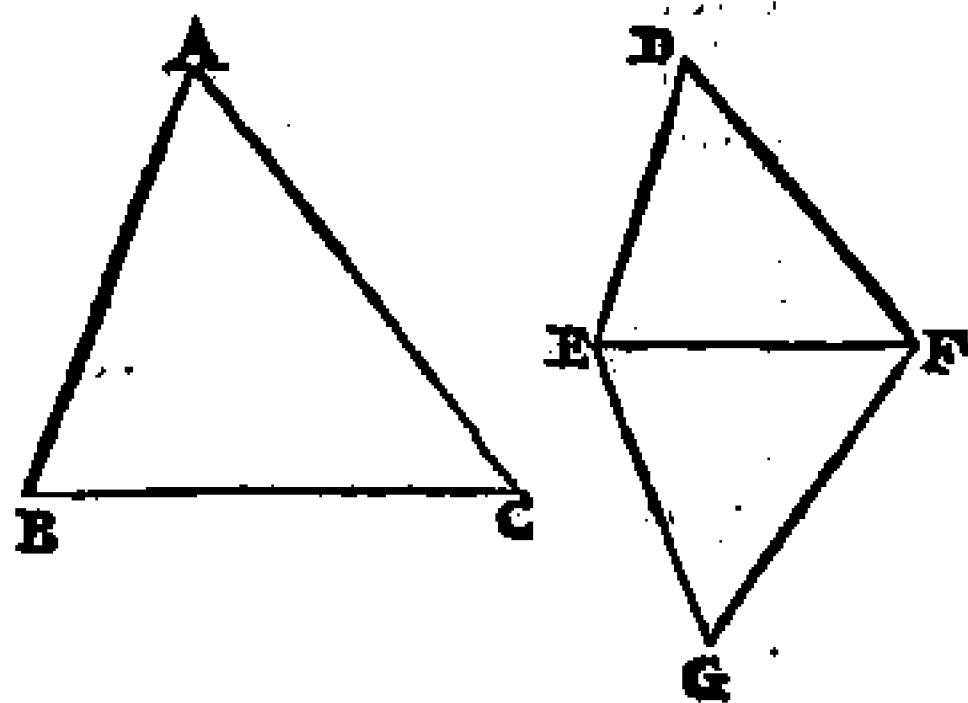


ALITER. Quoniam triangula ABF , ADG , similia sunt, nec non triangula AFC , AGE , per corollari-
 a 4. sexti. rium huius propositionis erit, ut BF , ad FA , ita DG , ad GA . Item ut FA , ad FC , ita GA , ad GE . Ex quo
 b 22. quin- igitur, ut BF , ad FC , ita erit DG , ad GE . Quod erat demonstrandum.

5.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.



a 32. primi.

b 4. sexti.

c 11. quinti.

d 9. quinti.

e 4. sexti.

f 11. quinti.

g 9. quinti.

h 8. primi.

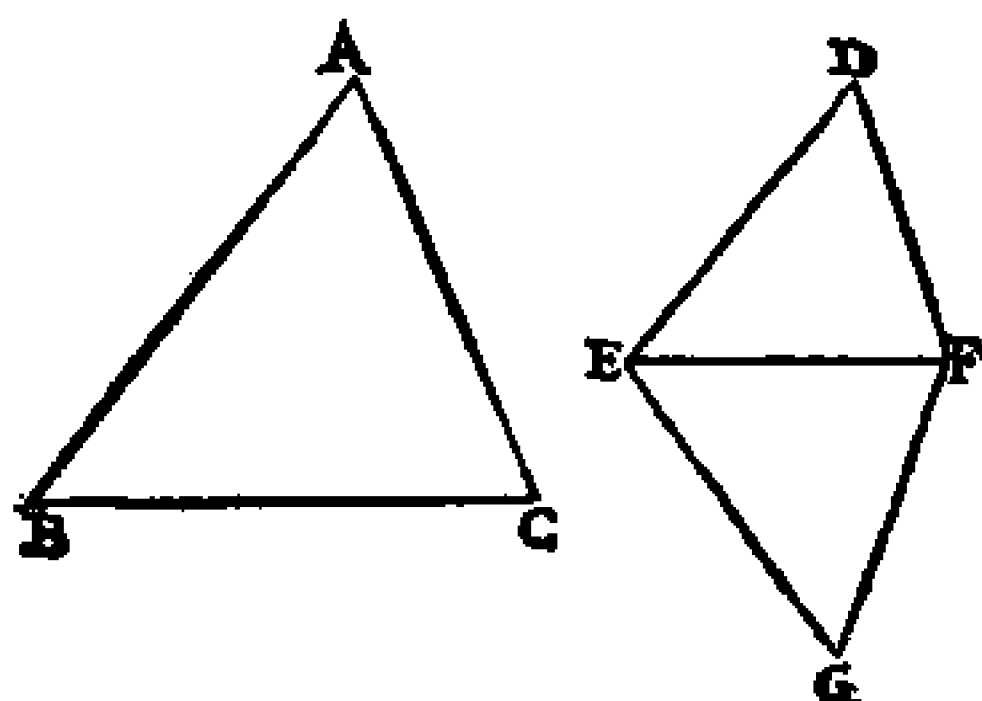
i 4. primi.

HABEANT triangula ABC , DEF , latera proportio-
 nalia, sitque AB , ad BC , ut DE , ad EF ; & BC , ad CA ,
 ut EF , ad FD ; & AB , demique ad AC , ut DE , ad DF . Di-
 co triangula esse æquiangula, angulum scilicet A , æqua-
 lem esse angulo D ; & angulum B , angulo E ; & angulum
 C , angulo F . Sic enim anguli æquales respiciunt homo-
 loga latera. Fiat angulus $FE G$, æqualis angulo B ; & an-
 gulus $EF G$, angulo C ; convenientque rectæ EG , FG ,
 in G : eritque reliquus angulus G , reliquo angulo A , æ-
 qualis. Æquiangula igitur sunt triangula ABC , GEF .
 Quare ut AB , ad BC , ita est GE , ad EF . Ut autem AB ,
 ad BC , ita ponitur DE , ad EF . Igitur ut GE , ad EF , ita est DE , ad EF , eandem: proptereaque
 æquales erunt GE , DE . Rursum, quoniam ut BC , ad CA , ita est EF , ad FG ; Ut autem BC , ad
 CA , ita ponitur EF , ad FD ; erit ut EF , ad FG , ita eadem EF , ad FD ; & ideoque æquales erunt
 FG , FD . Itaque cum latera EG , FG , æqualia sint lateribus DE , DF , utrumque utrique; & basis
 communis EF , erunt anguli G , & D , æquales; ac propterea & reliqui anguli GEF , GFE , reli-
 quis angulis DEF , $D FE$, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G , æqualis sit angulo A ; erit
 & angulus D , eidem angulo A , æqualis, eodemque modo angulus DEF , angulo B , & angulus $D FE$,
 angulo C , æqualis erit. quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia ha-
 beant, &c. Quod ostendendum erat.

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angu-
 los latera proportionalia habuerint; æquiangula erunt triangula, æqualesque ha-
 bebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.



a 4. sexti.

b 11. quinti.

c 9. quinti.

d 4. primi.

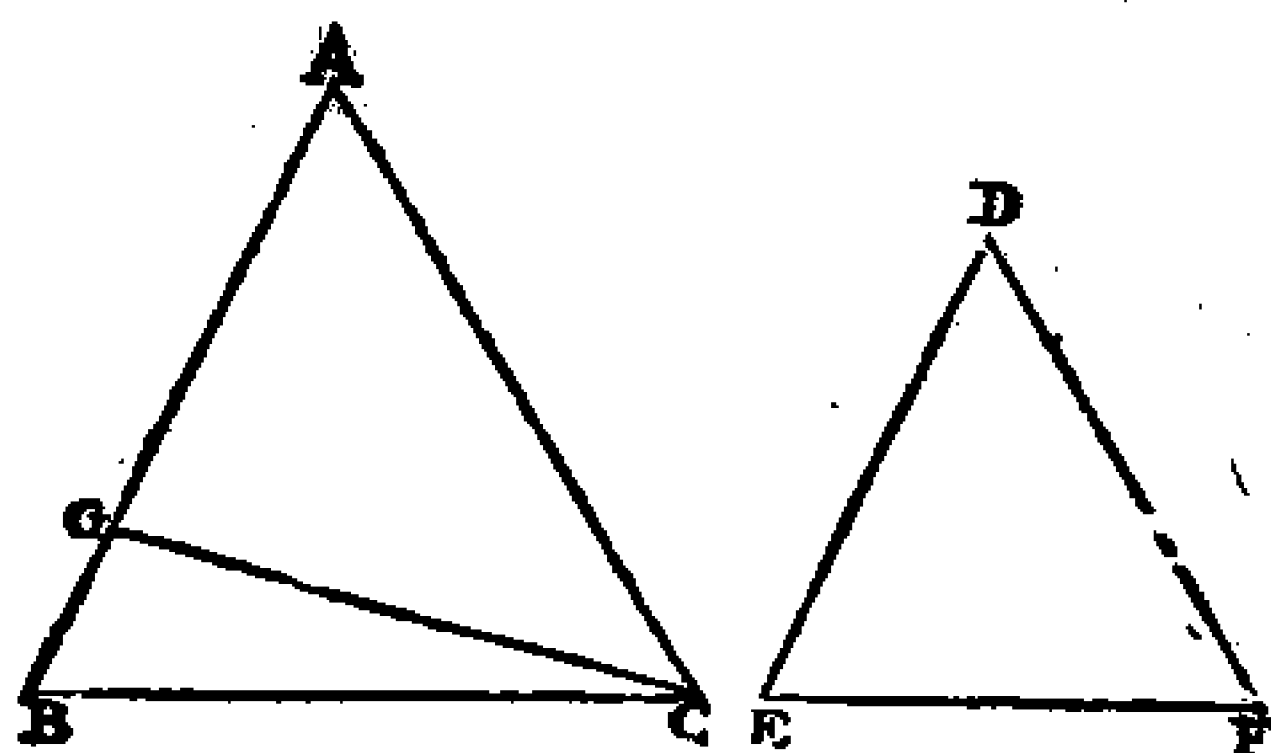
SIT angulus B , trianguli ABC , æqualis angulo E ,
 trianguli DEF , sintque latera AB , BC , proportionalia
 lateribus DE , EF , hoc est, sit AB , ad BC , ut DE , ad EF .
 Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, an-
 gulum scilicet A , angulo D , & angulum C , angulo F . Ita
 enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat
 angulus B , æqualis angulus $FE G$; & angulo C , angulus
 $EF G$; eritque, ut in precedenti propositione dictum est,
 triangulum GEF , triangulo ABC , æquiangulum. Qua-
 re ut AB , ad BC , ita est GE , ad EF . Sed ut AB , ad BC ,
 ita ponitur DE , ad EF . Igitur ut DE , ad EF , ita est GE ,
 ad eandem EF ; atque idcirco DE , GE , æquales erunt. Itaque cum latera DE , EF , æqualia sint la-
 teribus GE , EF , & anguli ipsis contenti æquales quoque: (Nam angulo B , cui factus est æqualis
 angulus $FE G$, æqualis est positus angulus DEF , proptereaque æquales ad invicem erunt anguli
 DEF , $G EF$.) erunt reliqui anguli D , EFD , reliquis angulis G , $EF G$, æquales. Cum ergo an-
 gulus G , sit æqualis angulo A , & angulus $EF G$, angulo C ; erunt etiam angulis A , C , æquales an-
 guli D , EFD ; & ob id æquiangula erunt triangula ABC , DEF , quod est propositum. Si igitur duo
 triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.

7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios an-
 gulos latera proportionalia habeant, reliquorum verò simul utrumque aut mino-
 rem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt
 eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

SIT angulus A , trianguli ABC , æqualis angulo D , trianguli DEF ; & latera AC , CB , circa an-
 gulum C , proportionalia lateribus DF , FE , circa angulum F , hoc est, sit ut AC , ad CB , ita DF ,
 ad FE ; hac tamen lege, ut quilibet reliquorum angulorum B , & E , sit vel minor recto, vel non mi-
 nor.



ad FE, ita ponitur AC, ad CB. ^a Vt igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC, ad CB; ^d ac propterea ^c æquales erunt CG, CB; & anguli CBG, CGB, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & CGB, minor recto, ideoque ei deinceps AGC, recto maior; ^f cum AGC, CGB, sint duobus rectis æquales: Est autem ostensus angulus AGC, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est quoque angulus E: Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum. a 32. primi.
b 4. sexti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 5. primi.
f 13. primi.

Si r deinde tam B, angulus, & E, recto non minor; eritque vt prius, angulus B, angulo CGB, æqualis; ideoque & CGB, recto non minor erit ac propterea angulus CBG, CGB, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel æquales duobus rectis. quod est absurdum. ^g Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli ACB, & E, sed æquales, ^h atque idcirco reliqui etiam anguli B, & F, æquales erunt. Quod est propositum. Si duo itaque triacula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat. g 17. primi.
h 32. primi.

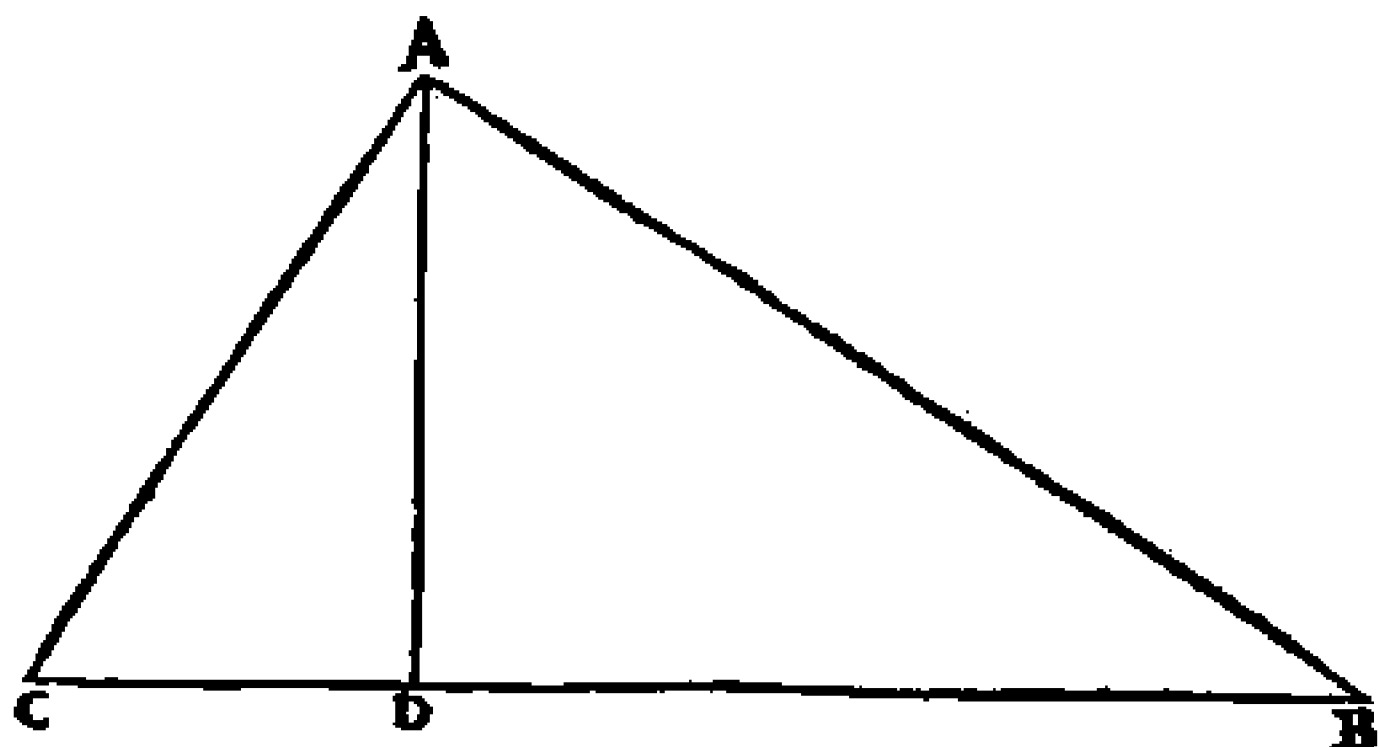
S C H O L I V M.

AD D I D I T Euclides, vtrumque angulorum reliquorum B, & E, debere esse vel minorem recto, vel non minorem. Nam aliàs, manente tota hypothefi, non sequeretur, triacula esse æquiangula. Si enim in eodem triangulo ABC, fit CG, æqualis ipsi CB, (quod fieri potest, quando angulus B, acutus est, & maior angulo A. Sic enim ^a erit latus CA, latere CB, maius. Si igitur ex C, ad intervallum CB, circulus describatur, secabit is rectam AB, priusquam rectam AC, qua longior est, quam CB, secet. Secabit autem ille circulus necessario rectam AB, propterea quod ob acutum angulum B, recta AB, intra eum circulum cadit: quippe cum infra contingentem lineam ducatur, qua ad B, angulum rectum constituit cum CB, vt patet ex propositione 16. lib. 3.) habebunt duo triacula ABC, AGC, vnum angulum vni angulo æqualem, immò angulum A, communem; & circum alios angulos ACB, ACG, latera proportionalia, hoc est, ^b vt AC, ad CB, ita erit eadem AC, ad CG, cum æquales ponantur rectæ CB, CG: & tamen non sunt vilo modo æquiangula triacula ABC, AGC, vt constat. Quod idè euenit, quia non vterque angulorum ABC, AGC, minor est recto, vel non minor. Immo ABC, est quidem recto minor; AGC, verò recto maior. Cum enim CG, CB, latera æqualia sint, ^c & idè anguli CBG, CGB, æquales, ^d erit vterque eorum recto minor, ^e ac propterea AGC, recto maior. a 19. primi.
b 7. quinti.
c 2. primi.
d 17. vel 32. primi.
e 13. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triacula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.



IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, à quo ad basin perpendicularis agatur AD. Dico triacula ADB, ADC, similia esse, & toti triangulo ABC, & inter se. Cum enim in triangulis ABC, DBA, anguli BAC, & ADB, sint recti, & angulus B, communis; ^a erunt & reliqui anguli ACB, & DAB, æquales. Equiangulum est igitur triangulū DBA, triangulo ABC; ^b ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc a 32. primi.
b 4. sexti.

est, erit vt CB, ad BA, ita BA, ad BD; & vt BA, ad AC, ita BD, ad DA; & vt BC, ad CA, ita BA, ad AD. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, vt vult propositio 4. huius libri. Quare simile est triangulum ADB, toti triangulo ABC. Eodem modo ostendetur, triangulum ADC, simile eidem triangulo ABC. Nam anguli BAC, & ADC, sunt recti, & angulus C, cōmunis; ^c ac propterea reliqui anguli ABC, & CAD, æquales. Quare ^d vt BC, ad CA, ^d 4. sexti. c 32. primi.
d 4. sexti.

e 4. sexti.

ita est CA , ad CD ; & ut CA , ad AB , ita CD , ad DA ; & ut CB , ad BA , ita CA , ad AD . Sic enim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus, ex præscripto propof. 4. huius lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangu-
la ADB , & ADC , cum anguli ADB , ADC , sint recti, & anguli ABD , CAD , ostensi æquales, nec non anguli BAD , ACD : Atque idcirco sit & ut BD , ad DA , ita DA , ad DC ; & ut DA , ad AB , ita DC , ad CA ; & ut AB , ad BD , ita CA , ad AD . Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

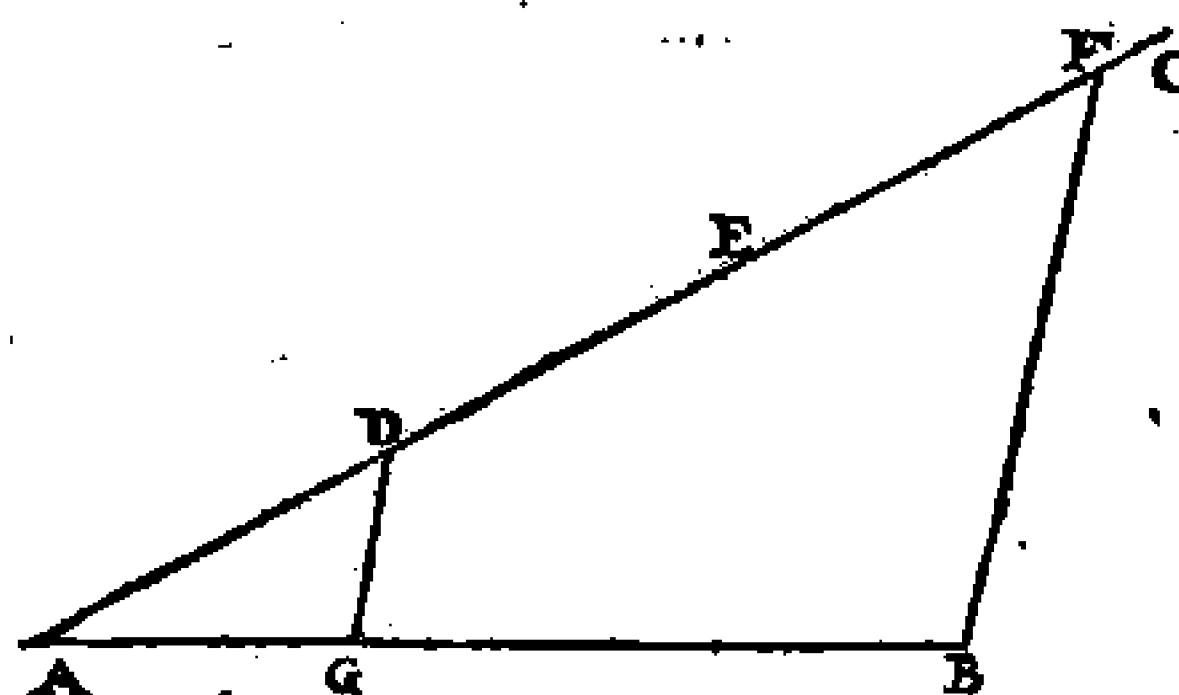
Ex hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse medium proportionalem inter duo basis segmenta: Item utrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionalem inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adiacet.

OSTENSUM est enim, esse ut BD , ad DA , ita DA , ad DC ; ac propterea DA , esse medium proportionalem inter BD , & DC : Item esse ut CB , ad BA , ita BA , ad BD : & idcirco BA , medium esse proportionalem inter CB , & BD : Denique esse ut BC , ad CA , ita CA , ad CD ; ideoque CA , esse proportionalem medium inter BC , & CD . Quod est propositum.

11.

PROBL. I. PROPOS. 9.

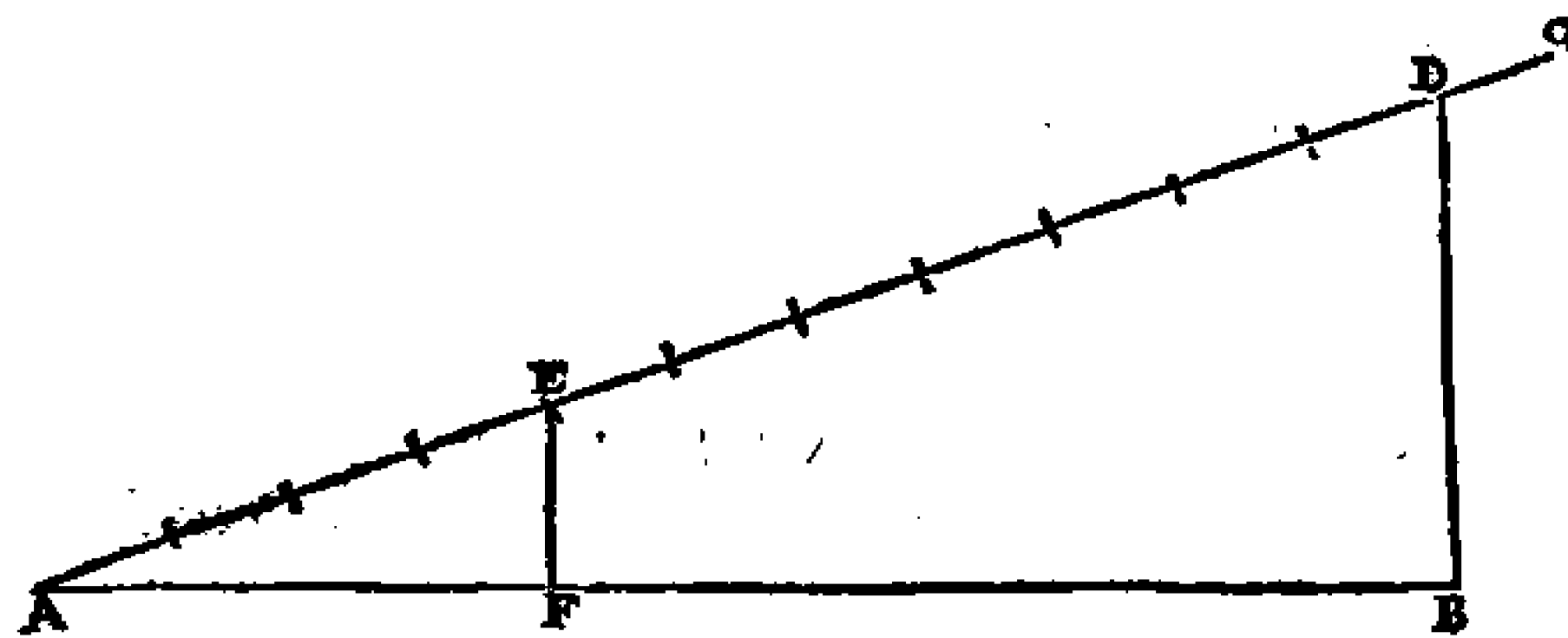
A DATA recta linea imperatam partem auferre.

b 2. sexti.
e 18. quinti.

IMPERATUR, ut ex linea AB , auferamus partem tertiam. Ex A , ducatur recta AC , utcumque faciens angulum CAB ; & ex AC , abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quæ pars detrahenda est ex AB , ut in proposito exemplo tres AD , DE , EF . Deinde ex F , ad B , recta ducatur FB , cui per D , parallela agatur DG . Dico AG , esse partem tertiam imperatam rectæ AB . Nam cum in triangulo ABF , lateri FB , parallela sit recta DG ; erit ut FD , ad DA , ita BG , ad GA . Componendo igitur, ut FA , ad DA , ita

BA , erit ad GA : Sed FA , ipsius AD , est tripla, ex constructione. Igitur & BA , ipsis AG , erit tripla, ideoque AG , tertiapars erit ipsius AB , quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

SCHOLIUM.



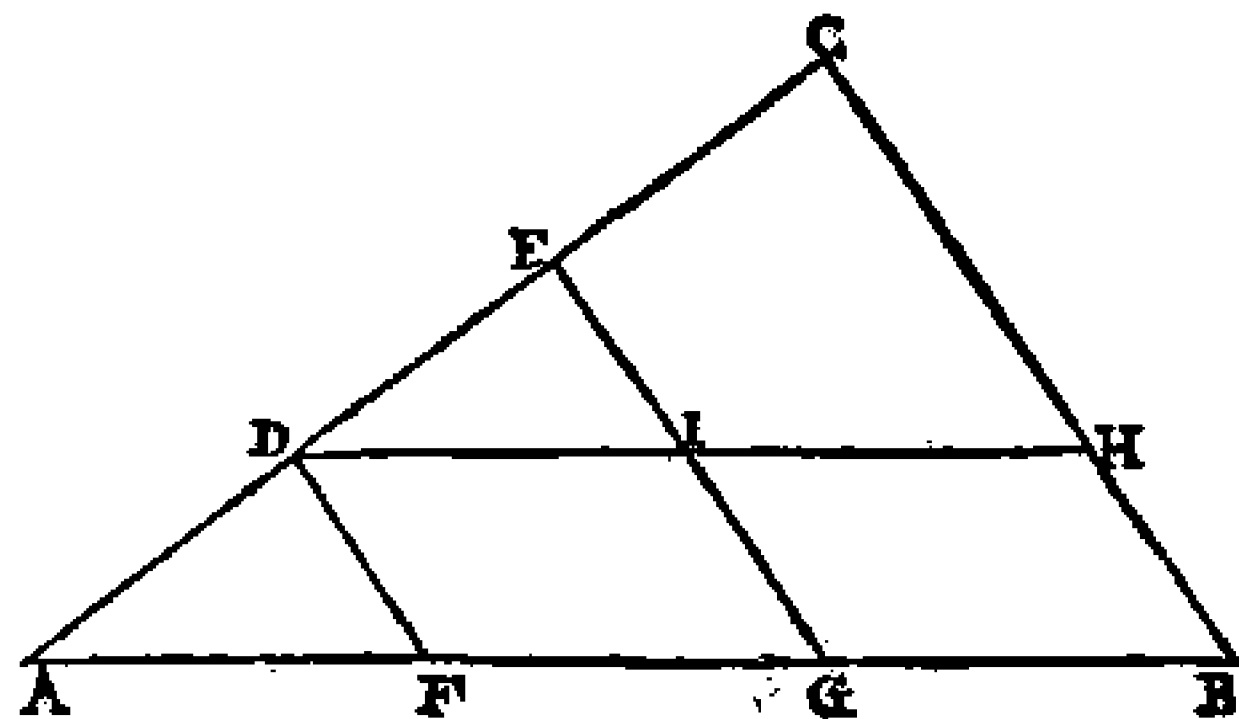
Quod si ex AB , auferenda sit pars non aliquota sed quæ plures aliquotas non efficientes unam complectatur, nimirum quæ contineat quatuor undecimas ipsius AB , sumenda erunt ex AC , undecim partes æquales usque ad D , punctum, ex quo ad B , recta ducatur

DB ; & huius parallela EF , ex E , termino quatuor partium. Nam AF , erit pars imperata. Erit enim rursus ut DA , ad AE , ita BA , ad AF : Quare & convertendo, ut AE , ad AD , ita AF , ad AB : Est autem AE , pars continens quatuor undecimas ipsius AD , ex constructione. Igitur & AF , eadem pars erit rectæ AB . Quod est propositum. Non aliter detrahatur ex AB , pars complectens quotcumque partes ipsius aliquotas, non facientes unam.

12.

PROBL. 2. PROPOS. 10.

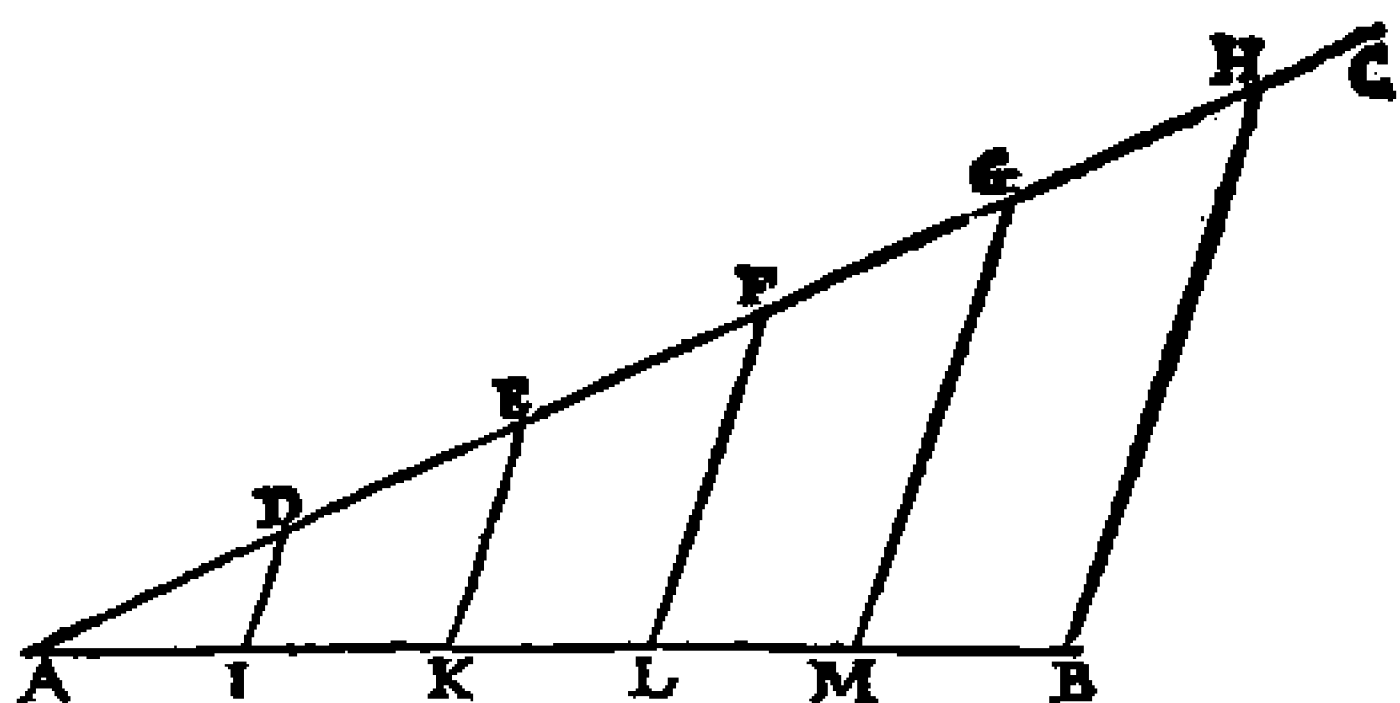
DATAM rectam lineam insectam similiter secare, ut data altera recta secta fuerit.



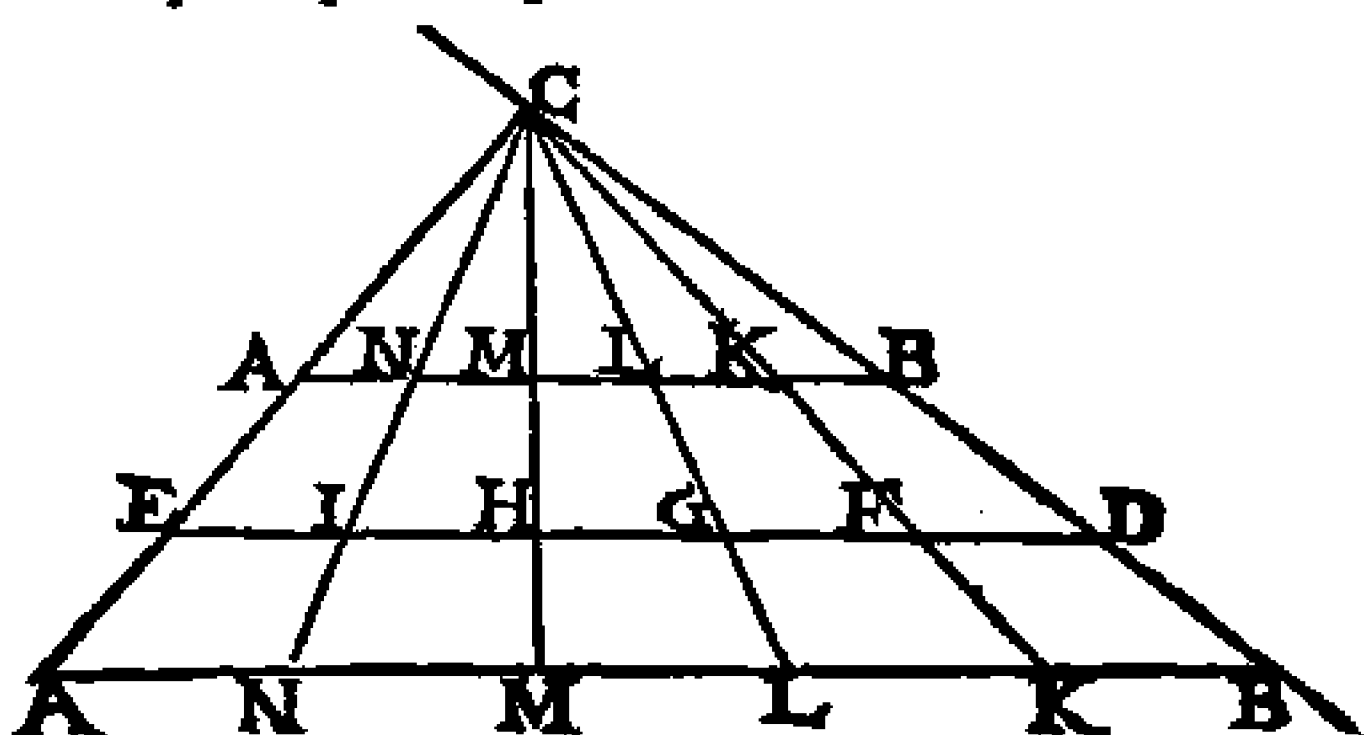
Si τ recta AB , secanda similiter, ut secta est recta AC , in D , & E : hoc est, in partes, quæ sint partibus AD , DE , EC , proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A , facientes angulum quemcumque BAC , & connectatur recta BC . Deinde ex D , E , agantur DF , EG , parallelæ ipsi BC . Dico rectam AB , similiter esse sectam

sectam in E, & G, ut est secta AC, in D, & E. Nam ut AD, ad DE, ita est AF, ad FG. Proportio-
 les ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans
 EG, in I; ^{a 2. sexti.} erit rursus, ut DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; ^{b 2. sexti.} quod FG, ipsi DI, &
 GB, ipsi IH, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus DE, EC.
 Eademq; ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam
 rectam lineam in sectam similiter secumus, ut data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

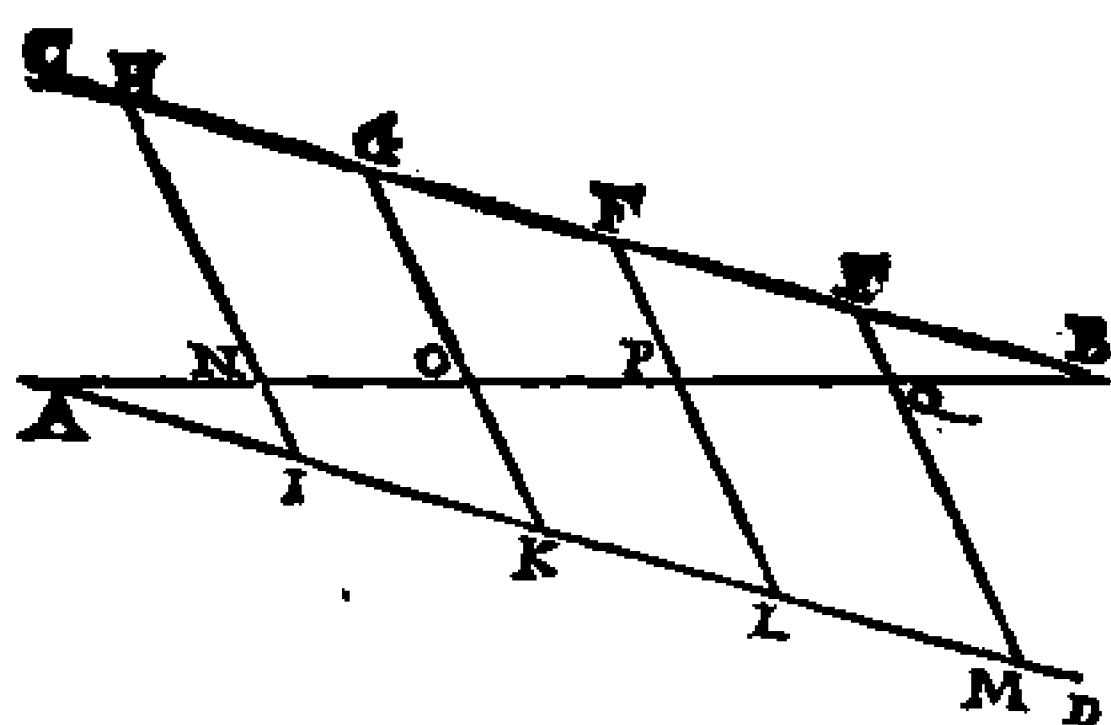
SCHOLIUM.



tur linea recta AH, utrunque est diuisa, si ex H, ad B, ducatur recta HB, & hinc ex punctis D, E, F, G, paral-
 lela agantur DI, EK, FL, GM; erit AB, similiter diuisa, ut AH, ut constat ex demonstratione huius problema-
 ti. Cum igitur AH, sit diuisa in quinque partes aequales, erit & AB, in totidem aequales partes diuisa. Haud
 aliter in plures partes aequales diuidetur eadem recta AB.



partes DE, FG, GH, HI, IE, ea lege tamen, ut si D, est supra B, recta DE, ex quinque partibus aequalibus con-
 stans, minor sit, quam AB, maior verò, si D, existit infra B. Postremo ex A, per E, recta ducatur AC, occurrens
 ipsi BC, in C, puncto, à quo per puncta F, G, H, I, recta ducantur CK, CL, CM, CN, quas dico diuidere rectam
 AB, in quinque partes aequales. Cum enim DE, sit parallela ipsi AB, diidentur EH, & AM, in triangulo
 CAM, proportionaliter, ex scholio propof. 4. huius lib. Cum ergo EH, secta sit bifariam in I, secta quoq; erit
 AM, bifariam in N. Eadem ratione recta NL, in triangulo CNL; & recta MK, in triangulo CMK; & recta
 LB, in triangulo CLB, secta erit bifariam. Est ergo AN, ipsi NM, & NM, ipsi ML, & ML, ipsi LK; & LK,
 ipsi KB, æqualis; ac proinde AB, secta erit in quinque partes aequales. Quod est propositum.



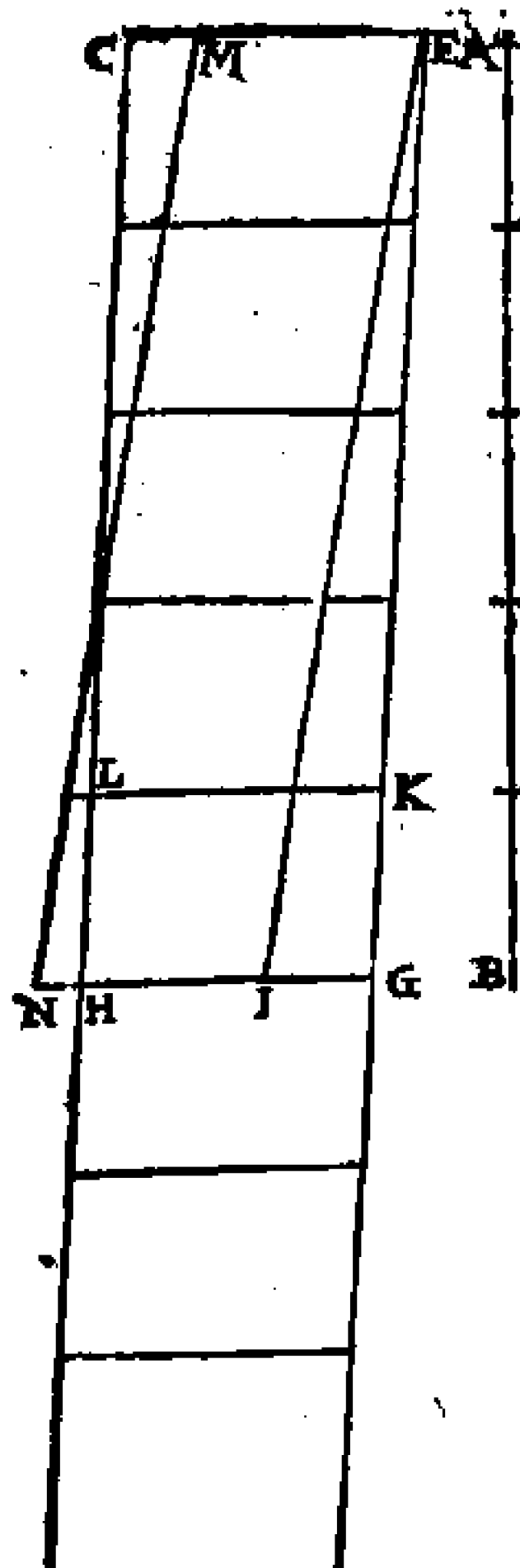
ALITER. Ab extremis punctis A, & B, educuntur
 due rectæ BC, AD, inter se parallela; hoc est, consti-
 tuentes angulos AB, æquales: Et ex BC, abscindantur qua-
 tuor partes aequales BE, EF, FG, GH, ut sint tot partes,
 una minus, in quor est linea diuidenda; His autē ex AD,
 totidem aequales refecentur AI, IK, KL, LM. Ductis igitur
 rectis EM, FL, GK, HI, secantibus rectam AB, in N,
 O, P, Q, dico ipsam AB, sectam esse in quinque partes æ-
 quales. Cum enim æquales sint, & parallela GH, IK, &
 HI, GK, parallela; Eademq; ratione parallela e-
 runt GK, FL, EM. Quare cum AM, secta sit in quatuor

æquales partes, erit & AQ, similiter in quatuor partes aequales diuisa, ut constat ex demonstratione huius 10.
 propof. Eadem ratione diuisa erit & BN, in quatuor partes aequales, eo quod BH, in totidem est partes æ-
 quales diuisa. Quare cum tam AN, quam BQ, æqualis sit singulis partibus NO, OP, PQ; erunt omnes quin-
 que partes AN, NO, OP, PQ, QB, inter se æquales. Quod est propositum.

ALITER. Præparetur prius instrumentum huic rei accommodatum in hunc modum: Ductis duabus re-
 ctis inter se parallelis utrunque CD, EF; ex utraq; abscindantur partes inter se æquales quoruncque, saltem
 tot, in quos partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta correspondentia linearum rectis iungantur. Dein-
 de beneficio circini capiatur longitudo rectæ AB, diuidenda, eaq; ex aliquo puncto linea CE, ut ex E, transfe-
 ratur in instrumentum ad punctum I, illius linea transversa, quæ tot spatia terminat, in quos partes linea

a 33. primi.

b 34. primi.



proponitur dividenda, qualis in exemplo est recta GH: ea enim includit quinque spatia. Postremo ex E, ad I, recta ducatur EI, quam dico diuisam esse in quinque aequales partes. Cum enim GK, HL, aequales sint, & parallelae, erunt quoque GH, KL, parallelae. Eodemque modo omnes lineae inter rectas CD, EF, inter se parallelae ostendentur. Quare, ut ex demonstratione huius 10. propositionis liquet, quemadmodum EG, diuisa est in quinque partes aequales, ita similiter in totidem diuisa erit EI. Nam si punctum E, sumptum non fuerit idem quod E, vel C, producenda est IE, donec cum FE, vel DC, coeat. Tunc enim, ut in hac 10. propos. probatum est, erunt rectae EI, EG, similiter diuisae. Quod si forte IE, nec cum FE, nec cum DC, concurrat, sed utrique sit parallela, erunt singulae partes rectae EI, singulis partibus rectae EG, aequales, ob parallelogramma inter parallelas inclusa. Cum ergo omnes partes rectae EG, sint aequales, erunt quoque omnes partes rectae EI, aequales. Si igitur beneficio circini singulae partes lineae EI, transferantur in rectam propositam AB, ipsi EI, aequalem, diuisa erit & AB, in quinque partes aequales. Quod est propositum.

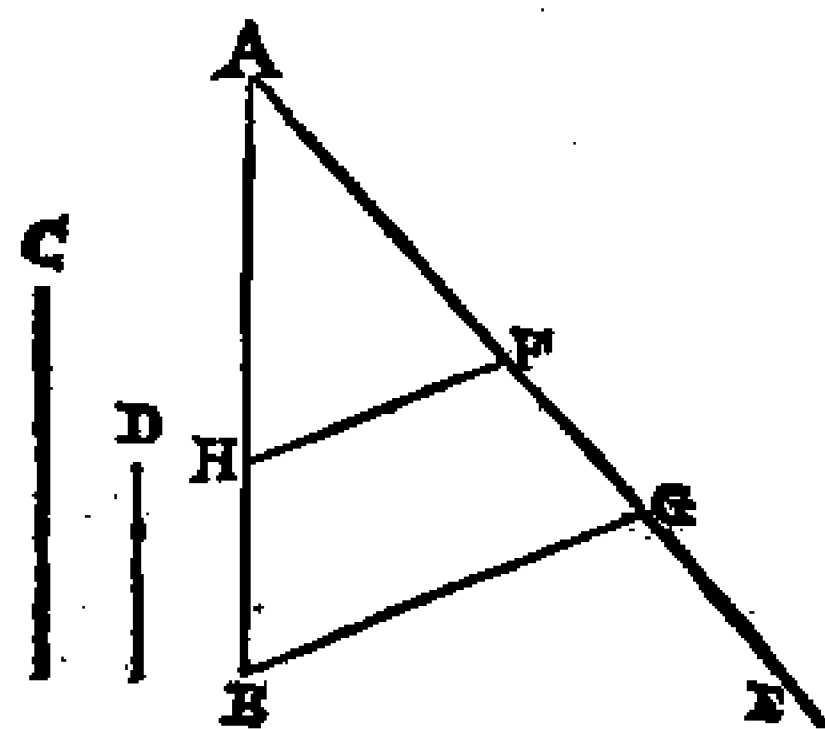
EST autem nonnunquam necesse lineas parallelas extra instrumentum producere. Ut si eadem linea transferatur ab M, usque ad N, punctum lineae GH, protracta, erit quoque MN, diuisa in quinque partes aequales. Vt constat, si ducatur ex M, ipsi EG, parallela, usque ad rectam GH: Vel si NM, producat, donec cum GE, producta conueniat. Quod si linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipiendae erunt partes parallelarum CD, EF, minores, &c. Si verò linea sit longiuscula, & diuidenda in paucas partes aequales; transferri poterit in duplo plura spatia, vel in triplo plura, vel quadruplo plura, &c. Nam duo, vel tria, vel quatuor spatia, &c. dabunt vnā partem. Vt si diuidenda sit in tres partes, transferaturque in sex spatia, dabunt duo spatia vnā partem: si transferatur in quindecim spatia, dabunt quinque spatia vnā partem: si transferatur in quindecim spatia, dabunt quinque spatia vnā partem: si transferatur in quindecim spatia, dabunt quinque spatia vnā partem.

nam partem, propterea quod quinque spatia faciunt tertiam partem quindecim spatiorum. Sic si linea diuidenda in duas aequales partes transferatur in octodecim spatia, dabunt nouem spatia vnā partem; quippe cum nouem spatia constituent semissem octodecim spatiorum: & sic de ceteris.

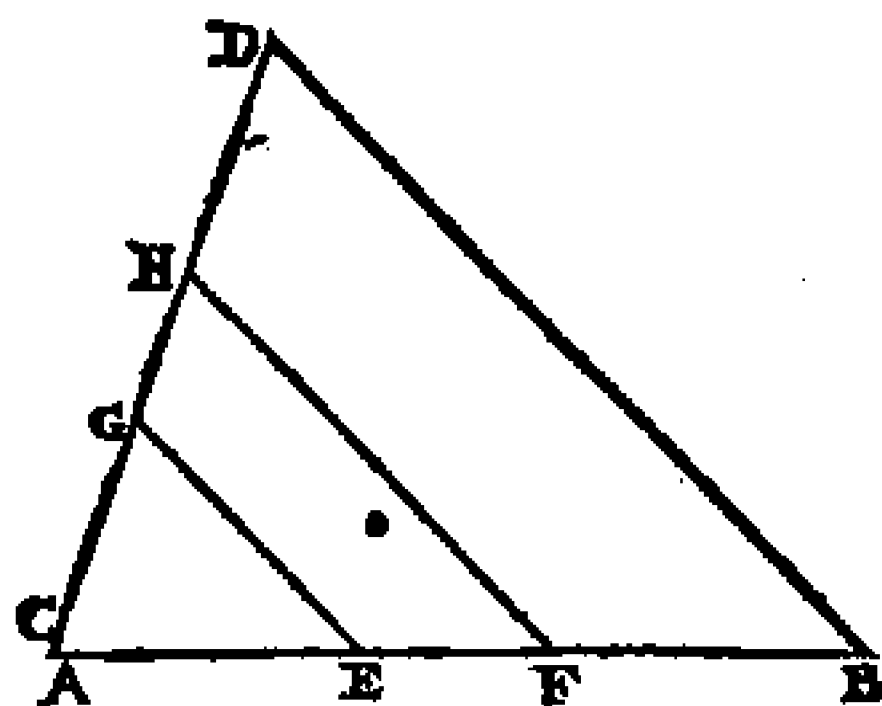
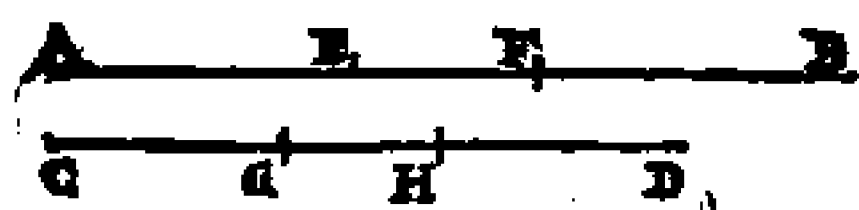
EODEM modo, ad similitudinē huius propositionis, licebit nobis facili negotio sequens problema, quod non raro à Geometris adhibetur, demonstrare, quod est eiusmodi:

DATAM rectam secare in duas partes, quae habeant proportionē quamcunque datam.

c 1. sexti.



Si duae rectae lineae secantur in binis punctis proportionaliter, erunt quoque intermediae sectiones in eadem proportionē cum quibuslibet segmentis duobus.



d 21. quinti.

FB, ad EF, ita HD, ad GH. Quod est primum.

SIT secunda recta AB, in duas partes, quae habeant proportionem inter se, quam recta C, & D. Ex A, ducatur linea AE, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abscindatur recta AF, ipsi C, & FG, ipsi D, aequalis: ducta deinde GB, ducatur ei per F, parallela FH. Dico AB, sectam esse in H, secundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifestum est, cum sit, ut AE, ad FG, atque adeo, ut C, ad D, ita AH, ad HB.

POSTREMO inferemus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in lib. Archimedi de his quae videntur in aqua: Nimirum:

SECENTUR rectae AB, CD, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita ut sit AE, ad EB, sicut CG, ad GD; Item AF, ad FB, ut CH, ad HD. Dico sectiones inter medias EF, GH, proportionales quoque esse cum duobus segmentis FB, HD; vel cum duobus AE, CG, hoc est, esse FB, ad EF, ut HD, ad GH. Item AE, ad EF, ut CG, ad GH. Cum enim sit, ut AE, ad EB, ita CG, ad GD; erit componendo, ut AB, ad EB, ita CD, ad GD. Item cum sit, ut AF, ad FB, ita CH, ad HD; erit componendo, ut AB, ad FB, ita CD, ad HD; & conuertendo, ut FB, ad AB, ita HD, ad CD. Itaque cum sit ut FB, ad AB, ita HD, ad CD; Et ut AB, ad EB, ita CD, ad GD; Erit ex aequo, ut FB, ad EB, ita HD, ad GD; Et conuertendo, ut EB, ad FB, ita GD, ad HD; Et per conuersionem rationis, ut EB, ad EF, ita GD, ad GH; Et diuidendo, ut

RVSVS.

R^o s^o s^o, quia est, ut A E, ad E B, ita C G, ad G D: Et ut E B, ad E F, ita G D, ad G H, ut ostensum est; Erit ex aequo, ut A E, ad E F, ita C G, ad G H. Quod est secundum.

B R E V I^o s idem demonstrabitur hoc modo. Conueniant duo puncta A, & C, in vnum, ut fiat angulus B C D, vel B A D; iunganturq; recta D B, H F, G E. Quia igitur ponitur, ut A E, ad E B, ita C G, ad G D; ^a Pa- 22. sexti.
rallela erit G E, ipsi D B. Rursus cum ponatur, ut A F, ad F B, ita C H, ad G D; ^b Parallela erit quoque H F, ipsi 21. sexti.
D B. ^c Quare & G E, H F, inter se parallela erunt: Ac propterea ^d erit, ut A E, ad E F, ita C G, ad G H. Quod 20. primi.
est secundum. d 2. sexti.

E O D E M modo, si puncta extrema B, D, conueniant in vnum, & c. ostendemus esse, ut B F, ad E F, ita H D, ad G H; & conuertendo, ut E F, ad F B, ita G H, ad H D. Quod est primum.

S E D neq; omittendum videtur hoc loco theorema, quod sequitur.

S i linea recta sit secta in quocunque partes Arithmetice proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quae easdem inter se, quas illae, proportionales habeant: erunt quoque partes huius lineae Arithmetice proportionales.

R E C T A linea A B, secta sit in partes A C, C D, D B, Arithmetice proportionales, hoc est, habentes eundem excessum. ^e Secetur autem recta E F, in partes E G, G H, H F, illis pro- 10. sexti.
portionales. Dico has partes eundem quoq; habere excessum, hoc est, Arithmetice esse propor-
tionales. Sit enim C I, ipsi A C; & D K, ipsi C D, equalis: ut I D, sit excessus inter C D, A C;
& K B, excessus inter D B, C D, atque aded ipsi I D, equalis. Sit quoque G L, ipsi E G, & H M,
ipsi G H, equalis: ut L H, excessus sit inter G H, E G; & M F, excessus inter H F, & G H. Pro-
bandum est, excessus L H, M F, aequales esse. Quoniam igitur est, ut A C, ad C D, ita E G, ad
G H; erit permutando quoque ut A C, ad E G, ita C D, ad G H. Item quoniam est, ut C D, ad
D B, ita G H, ad H F; erit quoque permutando, ut C D, ad G H, ita D B, ad H F. Atque ita si
plures fuerint partes, habebunt semper partes lineae A B, ad partes lineae E F, singula ad sin-
gulas, eandem proportionem, quamuis partes vnius lineae non sint continue proportionales.
Itaque cum sit, ut C D, ad G H, ita A C, ad E G, hoc est, ita C I, ad G L; ^f erit quoque reliqua 19. sexti.
I D, ad reliquam L H, ut tota C D, ad totam G H. Rursus quia est, ut D B, ad H F, ita C D, ad
G H, hoc est, ita D K, ad H M; ^g erit quoq; reliqua K B, ad reliquam M F, ut tota D B, ad totam 19. sexti.
H F, vel ut ablata D K, ad ablatam H M, hoc est, ut C D, ad G H. Erat autem quoque I D, ad L H, ut C D, ad
G H. ^h Igitur erit ut I D, ad L H, ita K B, ad M F. Est autem I D, ipsi K B, equalis. ⁱ Igitur & L H, ipsi M F, e- 11. quinti.
qualis erit: atque idcirco E G, G H, H F, Arithmetice proportionales erunt, cum excessus habeant aequales. 14. quinti.
Quod est propositum.

H o c theorema nullo modo conuerti potest. Non enim sequitur, si dua linea secta sint in partes Arith-
metice proportionales, partes vnius habere easdem proportionem, quas partes alterius habent. Nam si linea
E F, secunda pars statuatur G M, ita ut excessus inter E G, G M, sit L M: Deinde ipsi G M, post M, sumatur por-
tio ipsi G M, equalis, eiq; adiciatur idem excessus L M, fient tres partes Arithmetice proportionales in linea
E F, & tamen non habent easdem proportionem inter se, quas habent partes lineae A B: ^k quippe cum minor 8. quinti.
sit proportio E G, ad G M, quam E G, ad G H, hoc est, quam A C, ad C D.

I N F E R T U R hinc aliud hoc theorema.

S i duae lineae inaequales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad mi-
norem, & maior ad maiorem, erit quoque excessus priorum ad excessum posteriorum, ut
priorum vna ad vnam posteriorum.

V t in superiori figura, quoniam erat, ut A C, ad E G, hoc est, ut C I, ad G L, ita C D, ad G H; ostensum est
ita quoque esse excessum I D, ad excessum L H, ut C D, ad G H. Itaque si A C, C D, sint dupla, aut dimidiata
partes ipsarum E G, G H, erit quoque I D, dupla vel pars dimidiata ipsius L H, & c.

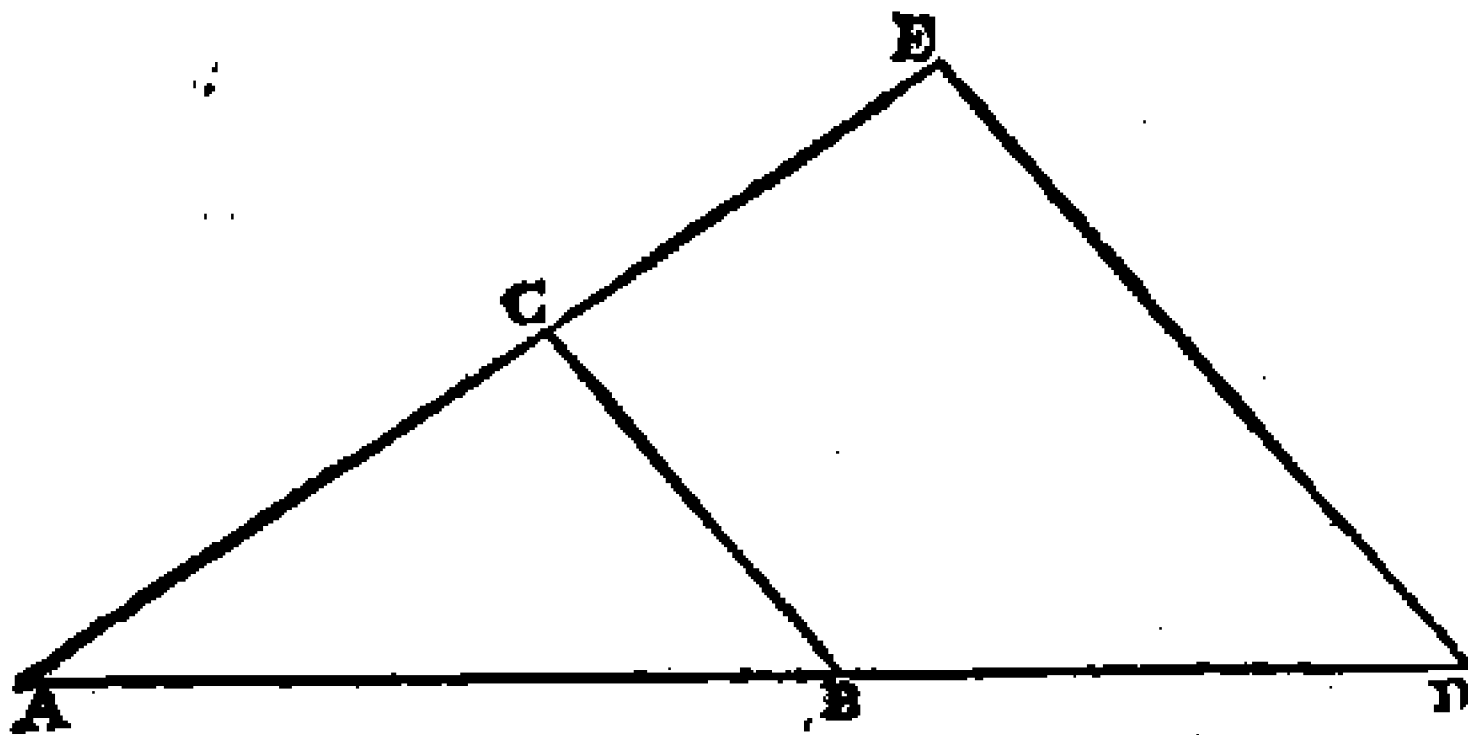
E x his quoque hoc problema absoluemus.

L I N E A M rectam datam in quouis partes Arithmetice proportionales secare.

S i t enim recta E F, secanda in tres partes Arithmetice proportionales. Sumantur tres rectae A C, C D,
D B, quomodocunque Arithmetice proportionales componentes rectam lineam A B. Si igitur data recta
E F, ^l secetur similiter in G, H, ut A B, in C, D, secta est; erunt partes E G, G H, H F, Arithmetice proportio- 10. sexti.
nales, ut demonstratum est.

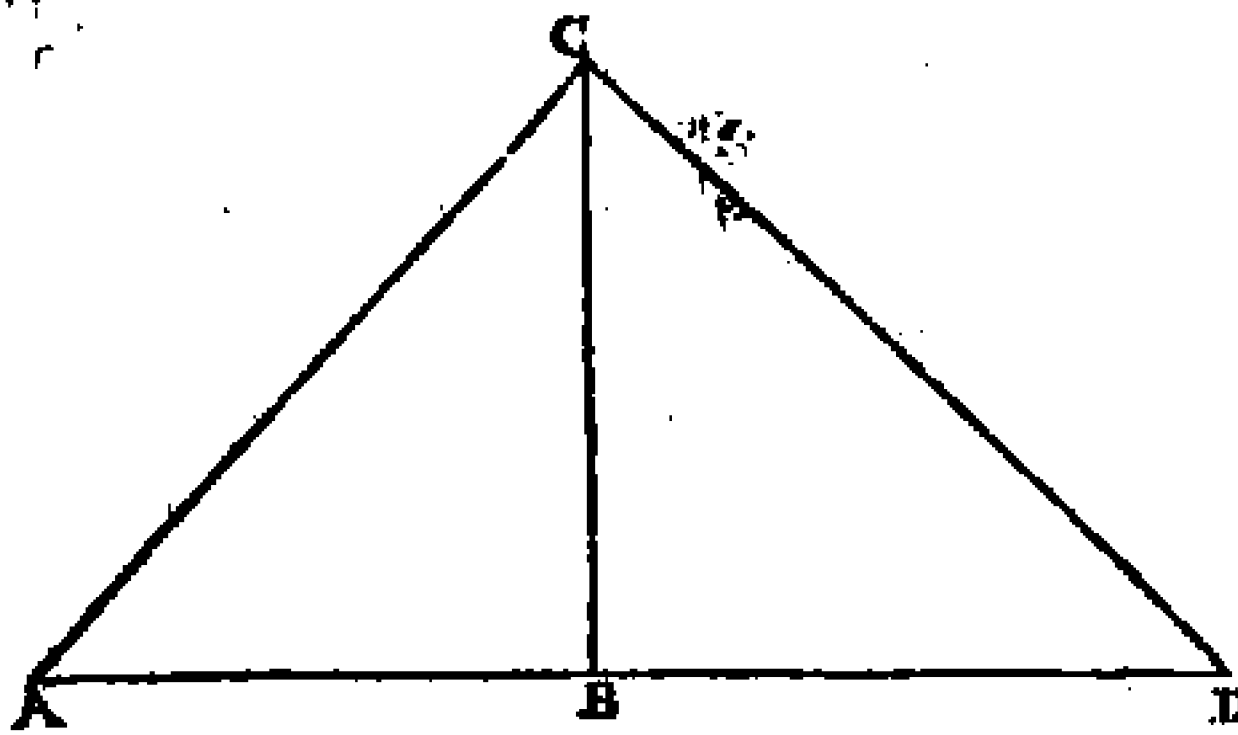
H A E C omnia vera etiam sunt in numeris, & in quibuscumque aliis magnitudinibus, cum semper eadem
sit demonstratio. Atque ex his desumpsimus in 10. regula proportionalitatis Arithmetica postremam ratio-
nem distribuendi datum numerum in quouis partes Arithmetice proportionales. Nam per eam diuiditur
datus numerus in partes, quae easdem habent proportionem, quas assumpti numeri proportionalitatis Arith-
meticae: cum semper fiat ut summa assumptorum numerorum ad datum numerum, ita singuli numeri assum-
pri ad aliud; Hinc enim fit, numeros assumptos cum partibus dati numeri inuentis eandem habere propor-
tionem. Quare ut hic ostensum est, partes inuenta sunt Arithmetice proportionales.

DE ABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.



proportionalem: hoc est, esse ut AB , ad AC , ita AC , ad CE . Cum enim in triangulo ADE , lateri DE , parallela sit recta BC : erit ut AB , ad BD , ita AC , ad CE :^b Sed ut AB , ad BD , ita eadem AB , ad AC , æqualem ipsi BD . Ut igitur AB , ad AC , ita AC , ad CE . quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIV M.

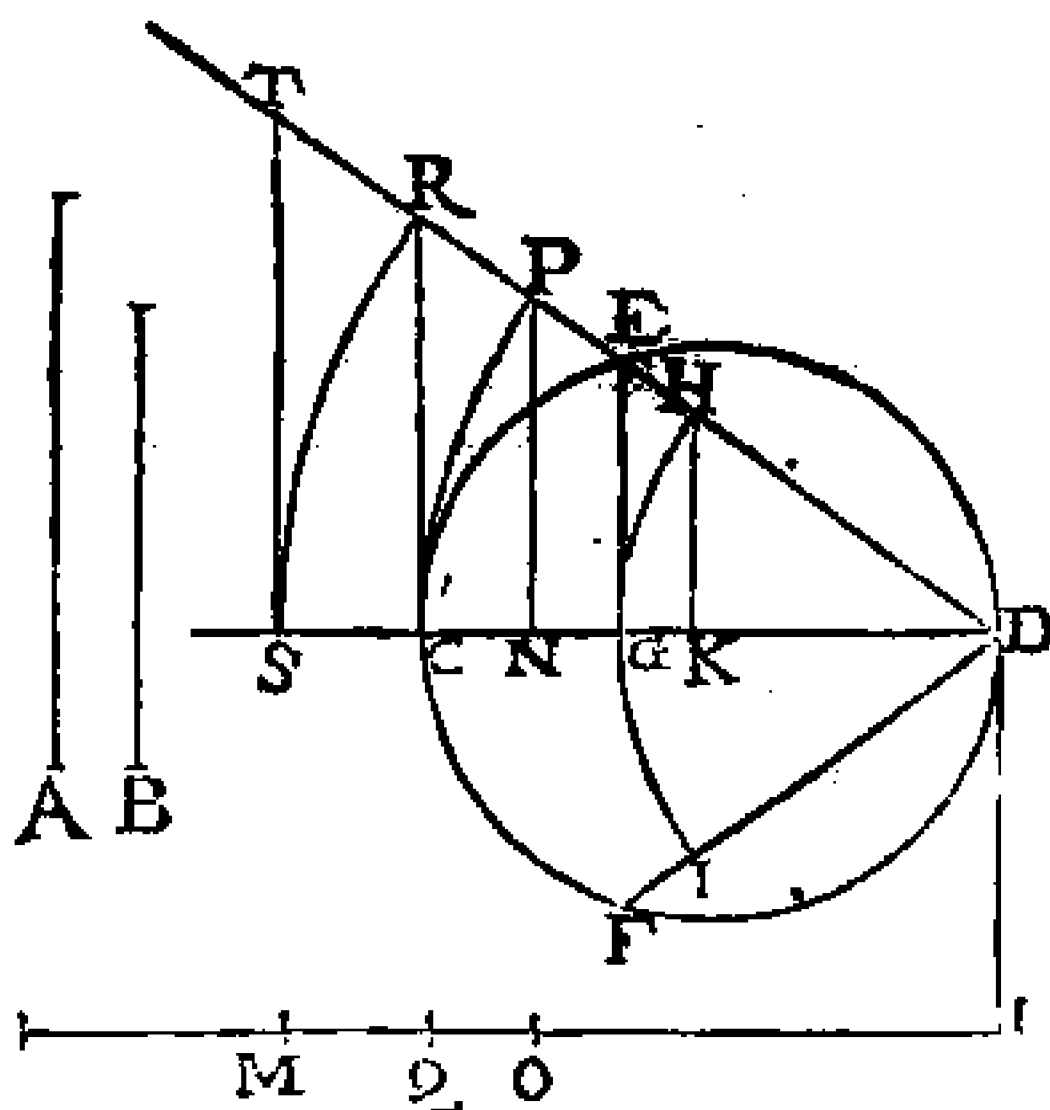


ALITER idem demonstrabimus, hoc modo: Duae rectae datae AB, BC , constituentur ad angulum rectum ABC , & coniungatur recta AC . Producta autem AB , antecedente, ducatur ex C . ad $A C$. perpendicularis CD , occurrens ipsi AB , productae in D . Dico BD . esse tertiam proportionalem. Cum enim in triangulo ACD . angulus ACD . sit rectus, & ab eo ad basin AD . deducta perpendicularis CB ; erit per corollarium propositionis 8. huius libri, BC . media proportionata inter AB , & BD , hoc est, ut AB ,

Ad BC, ita erit BC, ad BD. Quod est propositum.

INVENTA autem tertia linea continuè proportionali, si primam omiseris, & alijs duabus tertiâ inueneris, habebis quatuor lineas continuè proportionales. Ut si lineis A. & B. adinueniatur tertia proportionalis C. & duabus B. & C. tertia proportionalis D. erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continuè proportionales. Eadē arte reperietur quinta, sexta, septima, octaua. & sic in infinitū.

EX PEDITUR reperiemus quotlibet lineas continuè p-
 portiones in data proportione, hoc modo: Sit primum data pro-
 portio lineæ A, maioris ad minorem B. Circa rectam CD, ipsi A,



aqualem describatur circulus $CEDF$, in quo applicentur DE, DF ipsi B aequales. Applicata autem regula punctis E, F ducatur recta EG , quae ad CD perpendicularis erit. Cum enim recta DC , per centrū transiens secet arcum ECF , bifariam, (ablati enim aequalibus arcibus DE, DF ex semicirculis aequalibus DEC, DFC , reliqui arcus CE, CF , aequales erunt.) secabit eandem & recta ductam EF , bifariam, per ea, quae in scholio propof. 27. lib. 3. ostendimus.^a Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam, si diceretur recta EC ,^b angulus ad E , in semicirculo rectus esset; erit ex coroll. propof. 8. huius lib. DE media proportionalis inter CD, DG : ac proinde DG erit tertia proportionalis ipsis CD, DE , hoc est, datus duobus A, B . Quod si ex D per G arcus describatur secans rectam DE, DF , in H, I : applicata aq. regula ad puncta H, I , ducatur recta HK , erit DK , quarta proportionalis. Nam propter angulos $H DG, ID G$, (qui^c ob aequales arcus $EC,$

F C, æquales sunt) ^d arcus H G, I G, æquales erunt, ac propterea, ex scholio propof. 27. lib. 3. recta ducta H I bifariam secabitur in K, ^e ideoz, & ad angulos rectos. ^f Parallela ergo sunt E G H K. 8 Ut igitur recta E D, ad D G, ita erit D H hoc est, D G ad D K. Sunt ergo quatuor lineæ C D, D E D G, D K, continue proportionales. Quod si ex D, per K, alius arcus describatur, secans rectas D E, D F, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atq, ita in infinitum.

DEINDE fit data proportio linea B, minoris ad maiorem A. Ductis duabus rectis DC, LM, ad DL. perpendi-

pendicularibus, abscindantur recta DN, LO , minori B , aequales: applicataq; regula ad puncta O, N , ducatur recta NP .^a quae ad DC , perpendicularis erit, cum sit parallela ipsi DL . Sumpta deinde recta DC , aequali ipsi A , maiori, describatur ex D , per C , arcus secans rectam NP , in P , extendaturq; ex D , per P , recta DPT , eritq; DP , ipsi DC , hoc est, ipsi A , aequalis. Abscissa quoq; LQ , ipsi DC , aequali, applicataq; ad punctum Q, C , regula, ducatur recta CR , quae eadem ratione ad DC , perpendicularis erit, & ipsi NP , parallela.^c Et quoniam est, ut ND , ad DP , hoc est, ut B , ad A , (quod ND, DP , ipsis B, A , accepta sint aequales) ita CD , ad DR , hoc est, ita DP , ad DR ; erunt tres rectae ND, DP, DR , continue proportionales: ideoq; DR , ipsis B, A , tertia proportionalis erit. Quod si ex D , per R , arcus describatur secans DC , in S , & recta DS , aequalis auferatur LM : applicataq; regula ad puncta M, S , recta ducatur ST , erit DT , quarta proportionalis. Nam eadem ratione erit ST , ipsi CR , parallela, & ad DC , perpendicularis.^d Quare erit, ut CD , ad DR , hoc est, ut A , ad DP , ita SD , id est, DR , ad DT . Sunt ergo quatuor lineae ND, DP, DR, DT , continue proportionales. Quod si ex D , per T , alius arcus describatur, secans rectam DC , protractam, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.

a 29. primi.
b 33. primi.

c 2. vel 4.
fexti.

d 2. vel 4.
fexti.

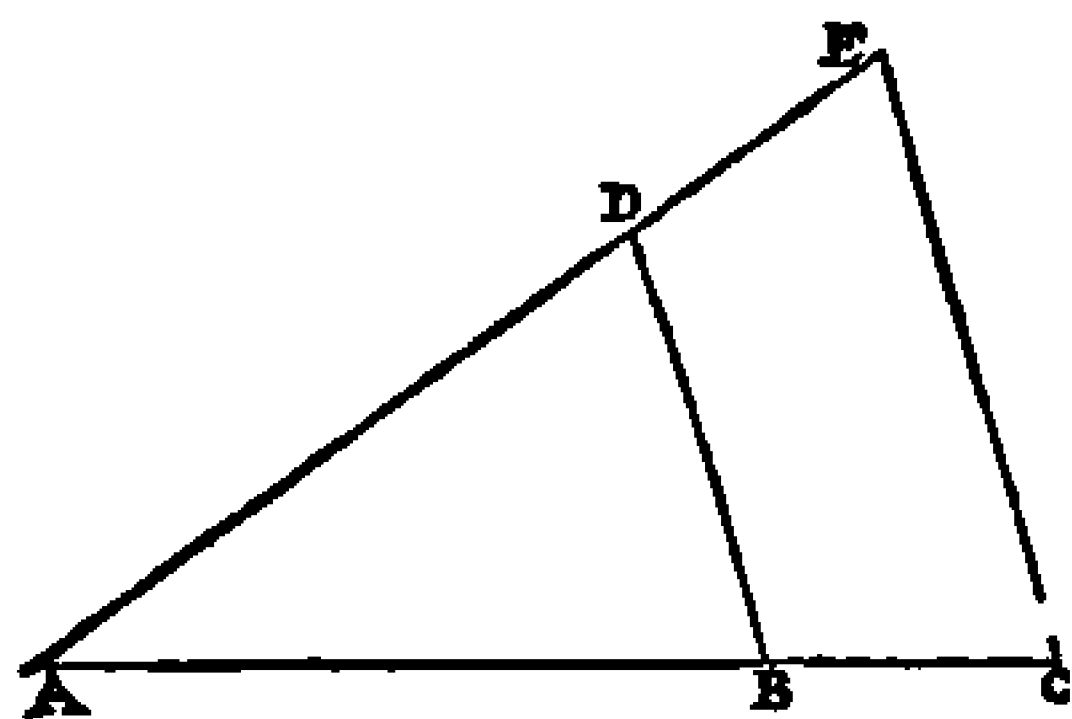
Ex his sane magno labore inter duas rectas datas reperimus duas medias proportionales, non quidem Geometricè omnino, sed quasi attentando, & praxim ipsam iterum atq; iterum repetendo, donec id, quod quærimus, assequamur. Ut si inter CD, DK , inuenienda sint dua media proportionales, descripto circa maiorem CD , circulo $CEDF$, erigemus ex K , ad CD , perpendicularem KH , ducemusq; DH , ea lege, ut ex puncto E , (ubi DH , circumferentia occurrit) perpendicularis ad CD , demissa EG , auferat rectam DG , recta DH , aequalem, hoc est, ut arcus ex D , per H , descriptus transeat per punctum G . Hoc enim facto, erunt DE, DH , inter CD, DK , media proportionales. Nam, ut ostendimus, est ut CD , ad DE , ita DE , ad DG , ex coroll. propos. 8. huius lib. Et ut DE , ad DG , ita DH , hoc est, DG , ad DK . Sunt ergo quatuor rectae CD, DE, DH, DK , continue proportionales, ac proinde DE, DH , inter CD, DK , media proportionales sunt. Quod si recta DH, DG , comperiantur non esse aequales, siquidem DH , fuerit minor, eleuanda erit DH , magis: si verò maior, magis deprimenda, donec deprehendantur aequales DH, DG .

e 2. vel 4.
fexti.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

10.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.



SINT tres lineae rectae AB, BC, AD , quibus inuenienda sit quarta proportionalis: sicut quidem AB , ad BC , ita AD , ad quartam. Disponantur primae duae AB, BC , secundum lineam rectam, quae sit AC : Tertia verò AD , cū prima AB , faciat angulum A , quemcunque. Deinde ex B , ad D , recta ducatur BD , cui per C , parallela ducatur CE , occurrens rectae AD , productae, in E , puncto. Dico DE , esse quartam proportionalem. Cū enim in triangulo ACE , lateri CE , acta sit parallela BD ,^a erit ut AB , ad BC , ita AD , ad DE . Quare DE , quarta est proportionalis:

a 2. sexti.

ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendū erat.

SCHOLIUM.

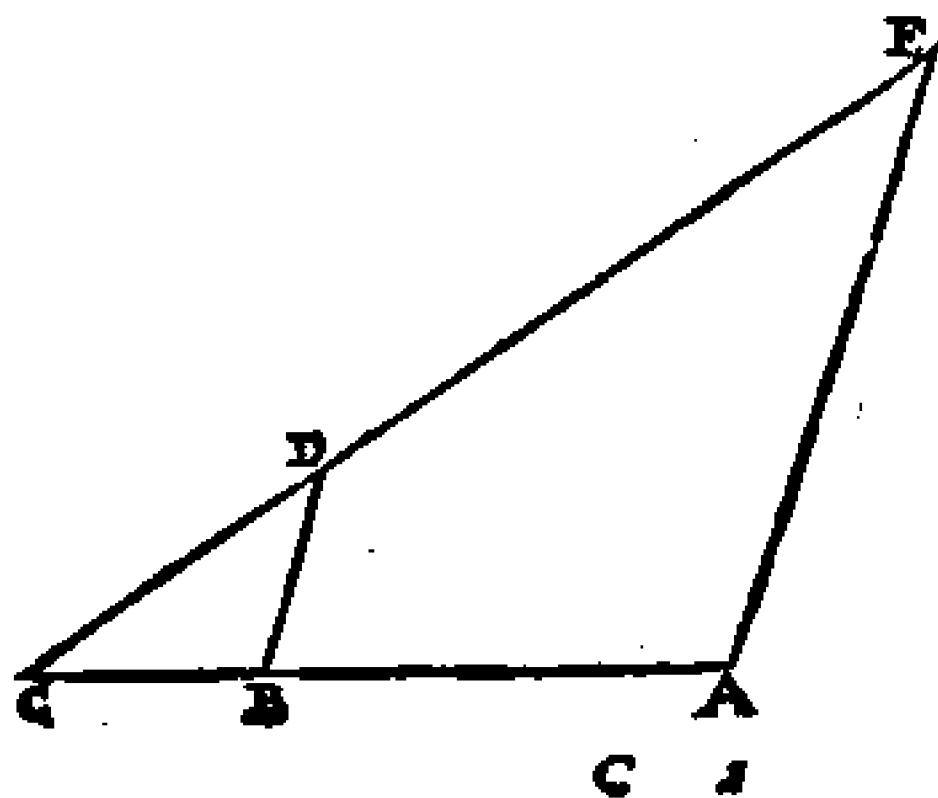
HINC facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, dua aliae in eadem cum illis proportionem reperiri possint. Si enim data sint dua rectae lineae A, B , in quacunque proportionem, si tertia qualibet accipiat C , & ei quarta proportionalis inueniatur D , ut sit quemadmodum A , ad B , ita C , ad D , factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineae, octo, decem, duodecim, &c. quarū binae semper eandem habeant proportionem.

OSTENDEMVS etiam cum Pappo sequens Problema. Videlicet;

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quae sit ad tertiam, ut prima ad secundam.

SINT tres rectae AB, BC, CD , oportetque inuenire quartam, quae ad CD , tertiam sit, ut AB , prima ad BC , secundam. Disponantur primae duae AB, BC , in directum, ut faciant rectam AC : Tertia verò CD , cū secunda BC faciat angulum C quemcunque. Deinde ex B , ad D , recta ducatur BD , cui per A parallela ducatur AE , occurrens rectae CD , productae in E . Dico ED , esse quartam, hoc est, esse ED , ad DC , tertiam, ut est AB , prima ad BC secundam. Hoc autem manifestum est, cum AC, EC proportionaliter secentur in B , & D punctis.

ALITER. Ex secunda CB fiat prima, & ex prima AB , fiat



a 2. sexti.

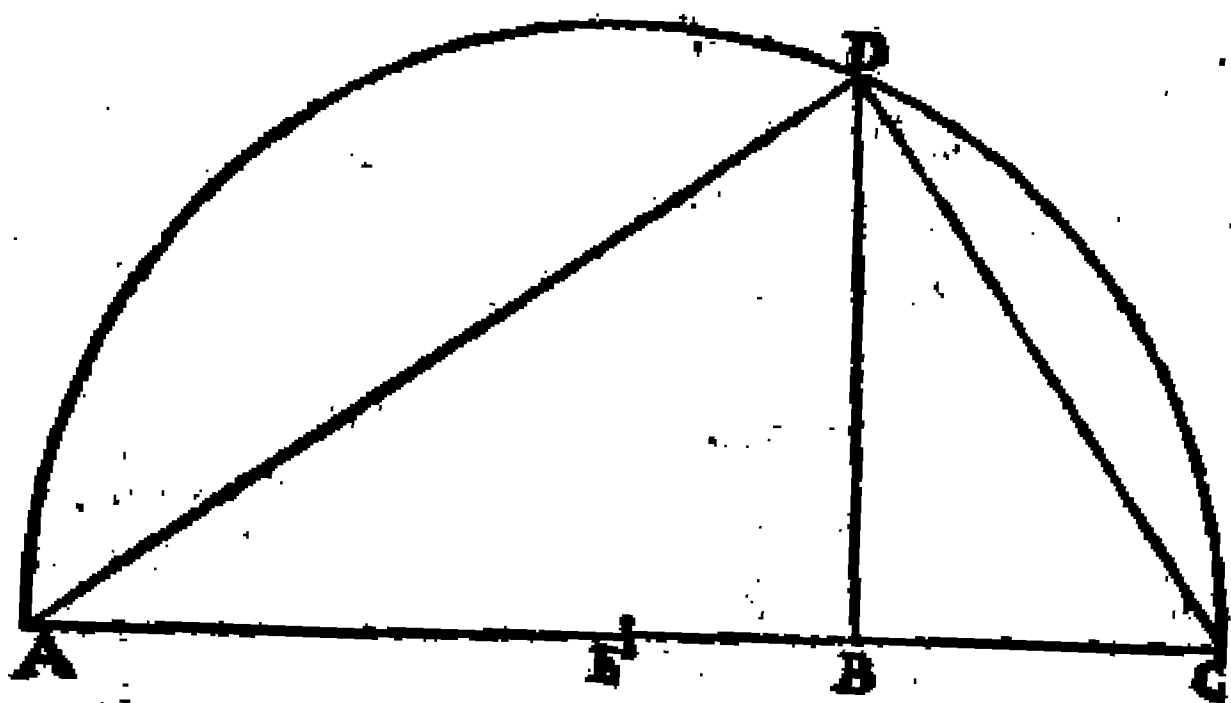
ar. sexti. *secunda, ^a atque inueniatur tribus CB, BA, CD, quarta proportionalis DE: Ut sit secunda CB, ad primam BA, ut tertia CD, ad quartam DE. Erit enim & conuertendo AB, prima ad BC, secundam ut DE, quarta ad CD, tertiam.*

9.

PROBL. 5. PROPOS. 13.

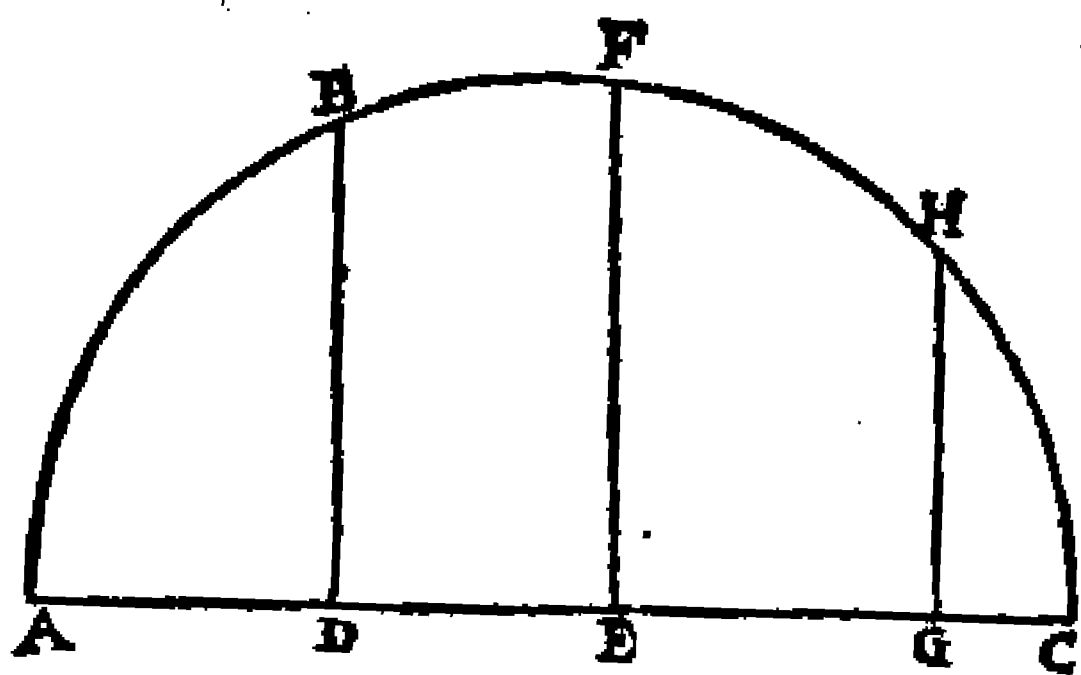
DUABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

a 36. tertij.



Ita sit ad basin AC perpendicularis DB, erit per corollarium propositionis 8. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

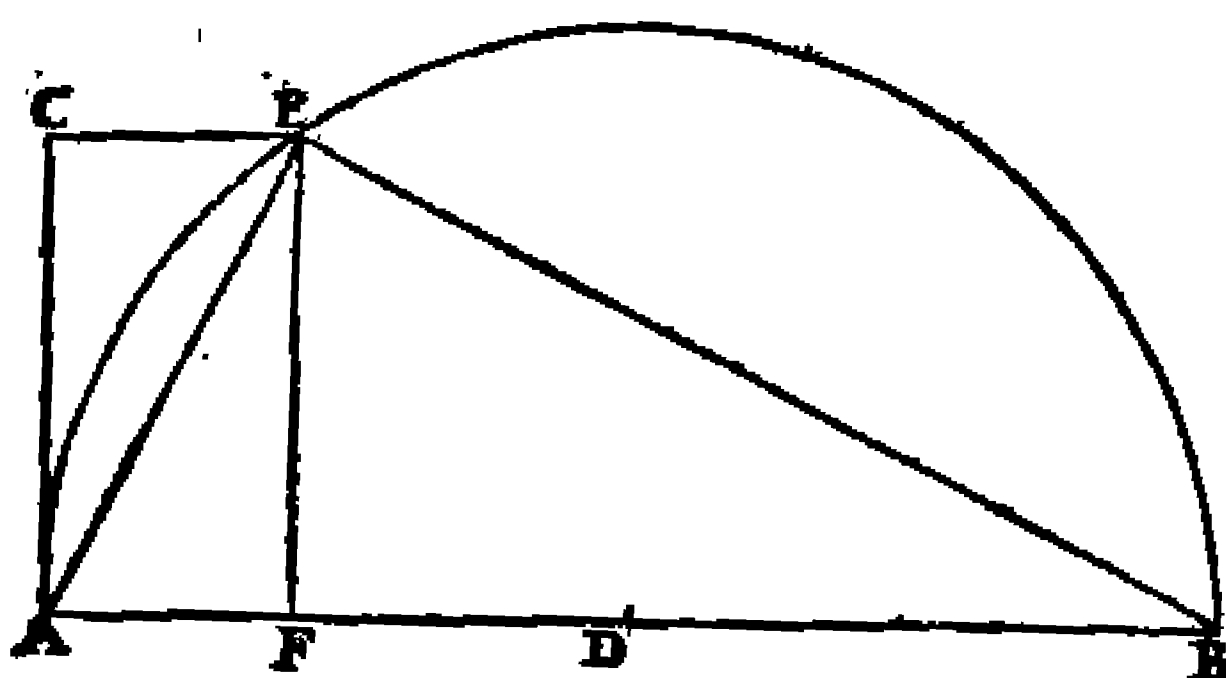
SCHOLIUM.



a 31. tertij. *ducantur recta AB, CB, ^a fiet angulus ABC, rectus. Quare per corollarium propof. 8. constat propositum. Eadem ratione erit perpendicularis EF, media proportionalis inter AE, & EC. Item GH, inter AG, & GC, atque eodem modo de alijs quibuscunque dicendum est, quæ ex quibusvis punctis diametri ad ipsam diametrum perpendiculares ducentur.*

EXPELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, ut data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.



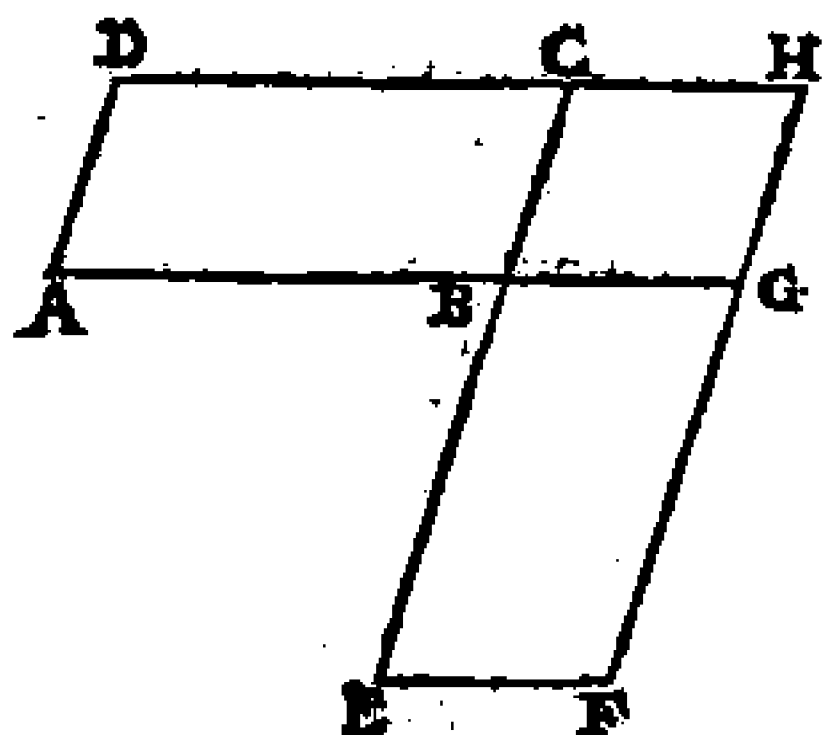
Nam si minor sit quàm dimidium recta AB, hoc est, minor, quàm semidiameter ad angulos rectos erecta ex D, secabit circumferentiam: tanget autem eandem circumferentiam, si equalis sit dimidio recta AB, hoc est, equalis semidiametro ex D, ad angulos rectos erecta. Cum ergo positum sit AC, non esse maiorem dimidio recta AB, secabit necessario AC, circumferentiam, aut tanget. a quo demittatur ad AB, perpendicularis EF. Dico AC, esse mediam proportionalem inter segmenta AF, FB. Ductis enim rectis AE, BE, erit, ut iam est demonstratum ex corollario propof. 8. huius libri, EF, media proportionalis inter AF, & FB. b Cum igitur EF, equalis sit ipsi AC, è quòd parallelogrammum sit ACEF: (est enim CE, ipsi AF, parallela per constructionem, ^c & AC, ipsi EF, propter angulos rectos CAF, & EFA,) erit & AC, media proportionalis inter AF, & FB. Quod est propositum.

THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 14.

13.

ÆQUALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



SINT duo parallelogramma æqualia $ABCD$, $BEFG$, habentia angulos ABC , EBG , æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB , ad BG , ita EB , ad BC . Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt AB , & BG , vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC , EBG , sint æquales, erunt & EB , BC , vna recta linea, vt ad propol. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur iam DC , & FG , donec cœcant in H . Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma DB, BF :^a erit vt DB , ad BH , ita BF , ad idem BH : Sed vt DB , ad BH ,^b ita est AB , basis ad basin

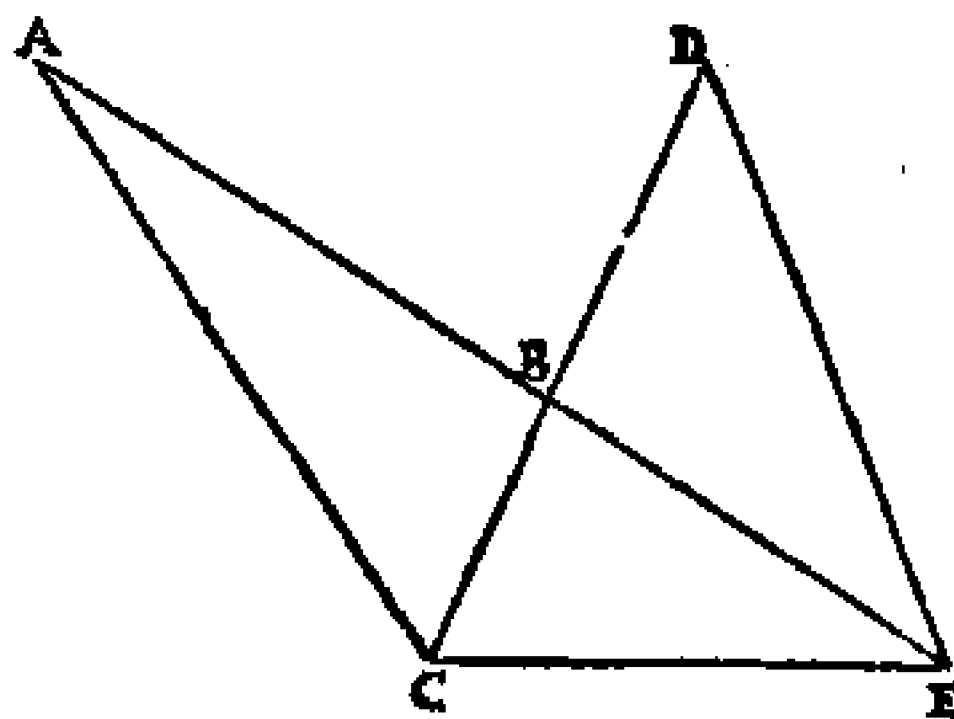
BG , quod parallelogramma sint eiusdem altitudinis: & similiter vt BF , ad BH , ita est basis EB , ad basin BC . Igitur vt AB , ad BG , ita est EB , ad BC . Quod est propositum.

CONTRARIO, sint iam latera circa æquales angulos ABC , EBG , reciproca, hoc est, vt AB , ad BG , ita EB , ad BC . Dico parallelogramma DB, BF , esse æqualia. Facta enim eadem constructione, cum sit, vt AB , ad BG , ita EB , ad BC :^c Vt autem AB , ad BG , ita DB , ad BH ; & vt EB , ad BC , ita BF , ad idem BH : erit quoque vt DB , ad BH , ita BF , ad idem BH :^d Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma DB, BF . Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 10. PROPOS. 15.

14.

ÆQUALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



SINT duo triangu-
la æqualia ABC , DBE , habentia angulos, qui ad B , æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB , ad BE , ita DB , ad BC . Coniungantur enim triangu-
la ad angulos æquales, ita vt AB , BE , vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC , DBE , sint æquales, erunt & DB , BC , vna recta linea, vt demonstratum est ad propol. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta CE : quoniam æqualia sunt triangu-
la ABC , DBE :^a erit vt ABC , ad BCE , ita DBE , ad idem BCE . Sed vt triangu-
lum ABC , ad triangu-
lum BCE ,^f ita est basis AB , ad basin BE , quod hæc triangu-

la eiusdem sint altitudinis: & similiter vt DBE , ad BCE , ita est basis DB , ad BC . Quare vt AB , ad BE , ita est DB , ad BC . Quod est propositum.

IA M verò contrà, sint latera circa angulos æquales, qui ad B , reciproca, hoc est, vt AB , ad BE , ita DB , ad BC . Dico triangu-
la ABC , DBE , esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit vt AB , ad BE , ita DB , ad BC : vt autem AB , ad BE , ita triangu-
lum ABC , ad triangu-
lum BCE : & vt DB , ad BC , ita triangu-
lum DBE , ad triangu-
lum idem BCE : Erit vt ABC , ad BCE , ita DBE , ad idem BCE :^b proptereaque æqualia erunt triangu-
la ABC , DBE . Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

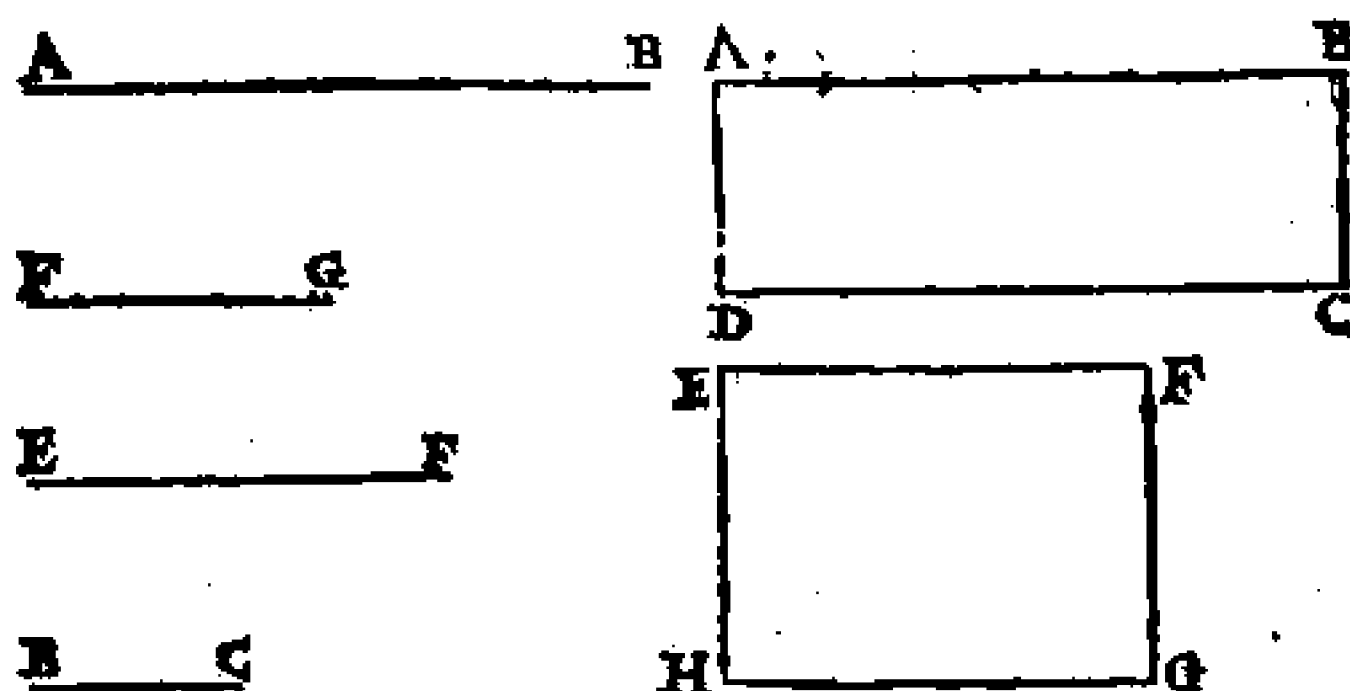
THEOR. 11. PROPOS. 16.

15.

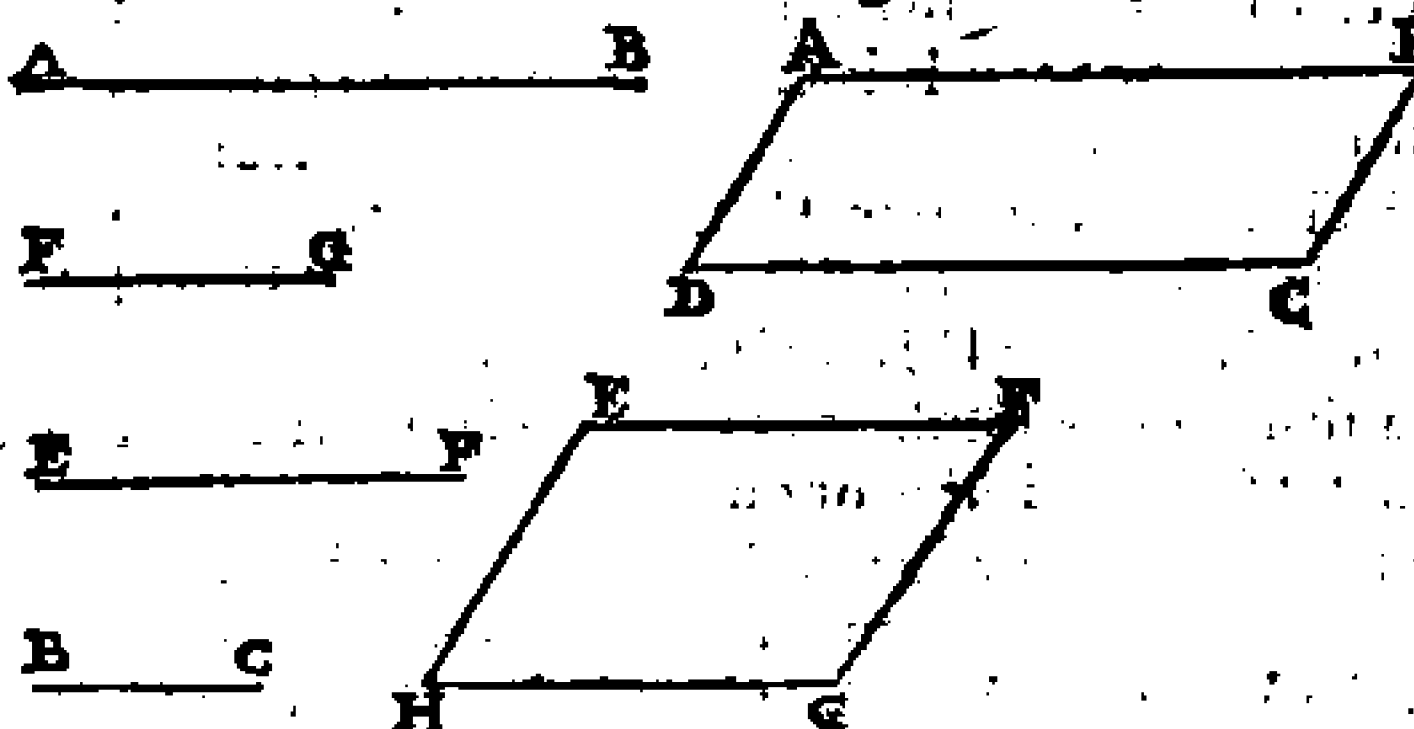
SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales AB, FG, EF, BC : vt quidem AB , ad FG , ita EF , ad BC : Sitque rectangulum $ABCD$, comprehensum sub extremis AB, BC ; rectangulum verò $EFGH$,

a 14. sexti.



b 14. sexti.



cōprehensum sub mediis EF, FG. Dico rectangula AC, EG, esse æqualia. Cum enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit ut AB, ad FG, ita EF, ad BC, erūt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. Quare parallelograma AC, EG, æqualia erūt. Quod est propositum.

CONTRA verò, sint iam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, esse proportionales, hoc est, esse ut AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, EG, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & F, erunt latera circa hosce angulos reciproca sicut quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

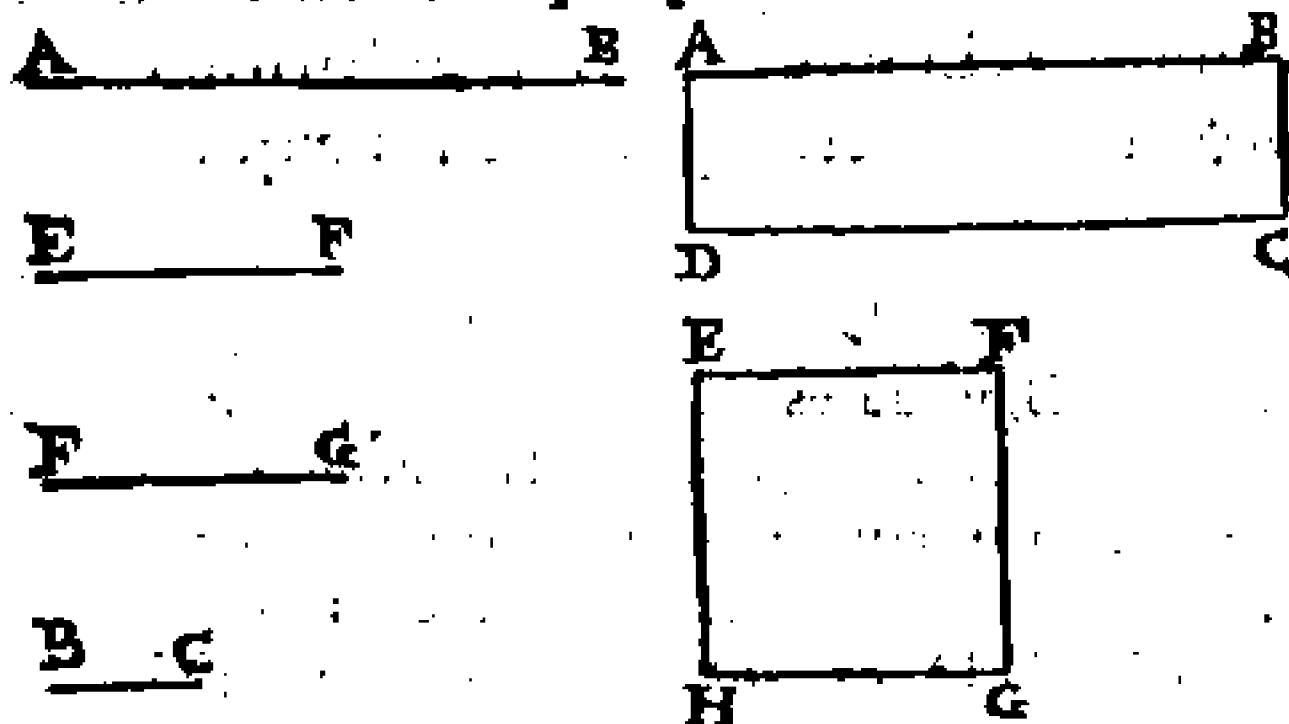
S C H O L I V M.

Idem verū est, etiam si parallelogramma AC, EG, non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita ut anguli dicti rectis lineis comprehensi sint æquales. Veluti manifestum est in hac figura. Eadem enim prorsus est demonstratio.

16.

THEOR. 12. PROPOS. 17.

Si tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



c 16. sexti.

rum EF, FG. Quare rectangulum AC, comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato EG, hoc est, rectangulo sub mediis EF, FG, comprehenso. Quod est propositum.

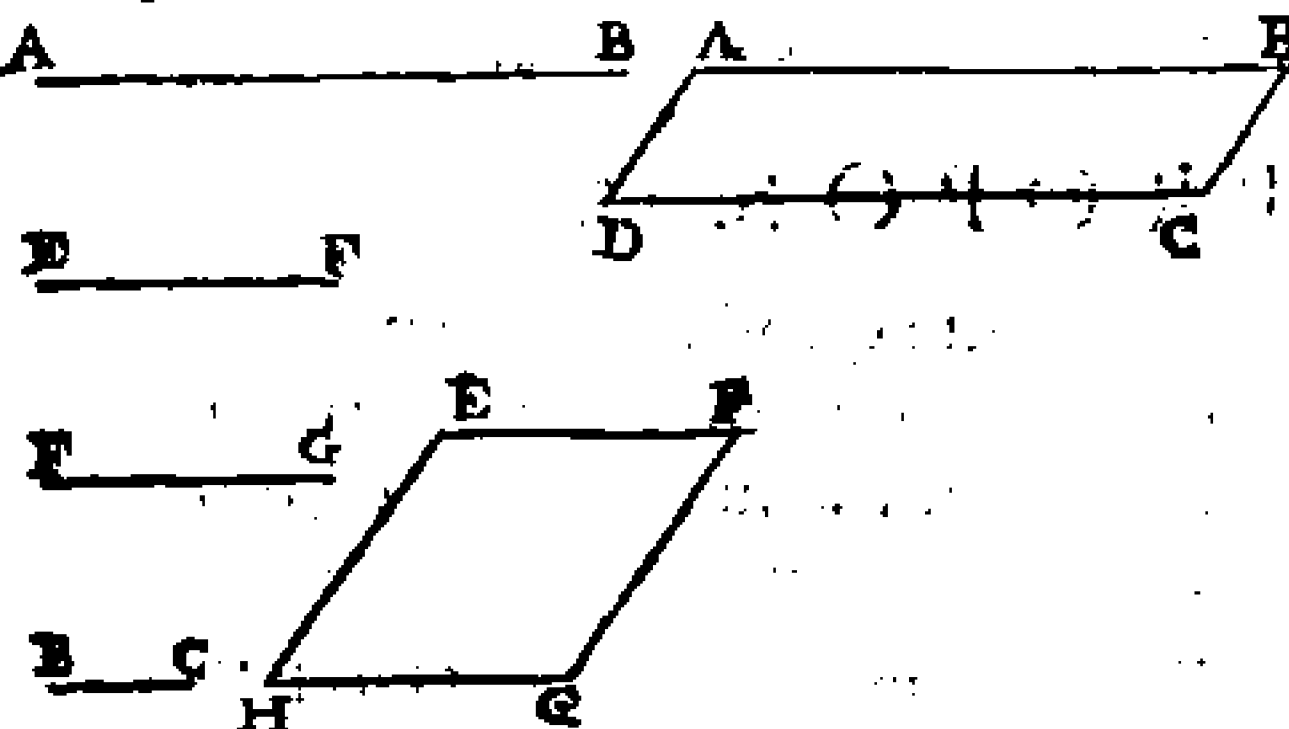
d 16. sexti.

e 7. quinti.

Sed sint iam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico esse ut AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, & EG, erit ut AB, ad EF, ita FG, ad BC. Ut autem FG, ad BC, ita est EF, ipsi FG, æqualis, ad eandem BC. Quare ut AB, ad EF, ita est EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I V M

Ex posteriori huius theorematu parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasvis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod recta AB, BC, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ EF, ostensum fuit, esse ut AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media est proportionalis inter AB, & BC.



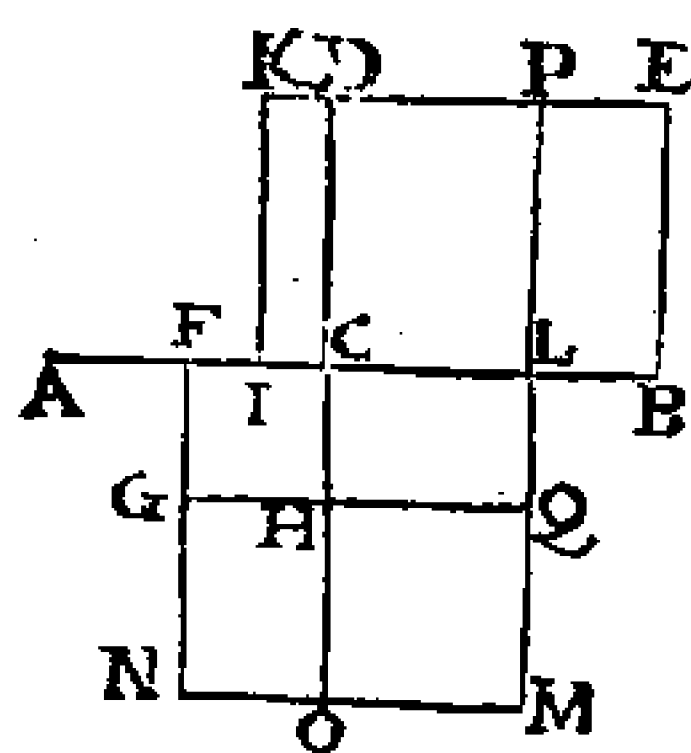
S C H O L I V M.

Eadem omnino consequuntur, etiam si parallelogramma non sint rectangula, dummodo sine æquiangula, ita ut EG, sit Rhombus, & AC, Rhomboides. Non enim dissimilis erit in his demonstratio, ut figura indicat.

LIBET hoc loco cum Peletario demonstrare problema non inutile ad lineas proportionales spectans; quod est eiusmodi:

S E C T A

SECTA linea recta in duas partes vtrunque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, ut omnes tres partes sint continuè proportionales.



Si t recta AB, diuisa in C, vtrunque, oporteatq, partem CB, ita secare in duas alias partes, ut omnes tres partes continuè proportionales sint. Setetur AC, bifariam in F; & FC, iterū bifariam in I, ut CI, quarta pars sit prima partis AC: & ex B, I, erigatur due perpendiculares BE, IK, prima parti AC, aequales, ducaturq, recta EK, ita ut rectangulum IE, comprehensum sit sub AC, prima parte, & recta IB, cōposita ex altera parte BC, & ex CI, quarta parte prima partis. Et quoniam AC, diuisa est bifariam in F, eiq, addita in rectum CB, erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato ex CF, aequale quadrato ex BF. Est aut rectangulum IE, minus rectangulo sub AB, BC, vna cū quadrato ex CF. (Ducta enim CD, ad AB, perpendiculari, erit rectangulum CE, contentū sub AC, CB, minus rectangulo sub AB, BC: At rectangulum CK, quadrato ex CF, aequale, cum vtrunque, quarta pars sit quadrati ex

AC, rectangulum quidē CK, quia sic est rectangulum CK, ad quadratū ex AC, hoc est, ad rectangulum sub AC, CD, ut CI, ad CA ac proinde cū CI, sit quarta pars recta AC, erit & CK, quarta pars quadrati ex AC: At verò quadratum ex CF, quarta pars est eiusdem quadrati ex AC, ex scholio propof. 4. lib. 2.) Igitur minus quoq, erit quadrato ex BF. Si igitur fiat quadratū rectangulo IE, aequale, erit eius latus minus recta FB, maius autē, q, FC: quippe cū quadratū ex FC, aequale sit ostensū rectangulo CK, ac propterea minus rectangulo IE. Sit ergo latus illud FL. Dico partē CB, ita sectam esse in L, ut tres partes AC, CL, LB, sint continuè proportionales. Describatur enim ex FL, quadratū FM, rectaq, DC, extendatur ad O, & latus ML, ad P, sumprisq, duabus FG, LQ, ipsi CF, aequalibus, ducatur recta GQ, secans CO, in H. Eritq, CG, quadratum recta CF, ob equalitatem rectorum CF, FG. Et quia ablati aequalibus FC, FG, ex aequalibus FL, FN, reliqua CL, GN, aequales sunt; & est CL, ipsi HQ, & GN, ipsi HO, aequalis: aequales quoq, erunt HQ, HO, ideoq, HM, quadratū erit recta CL. Rursus quia tam rectangulum CQ comprehenditur sub CL, & CH, siue CF, semisse ipsius AC, q, rectangulum GO, sub GN, siue CL, & GH, siue CF, semisse eiusdem AC, siue CD: erunt duo rectangula CQ, GO simul aequalia rectangulo CP, comprehenso sub eadem CL, & CD, quae ipsi CH, & H, simul aequalis est. Itaq, cū rectangulum IE, quadrato FM, aequale sit; & rectangulum CK, quadrato CG; & rectangulum CP, duobus rectangulis CQ, GO, simul: erit reliquum rectangulum LE, comprehensum sub BE, siue AC, & BL, reliquo quadrato HM, aequale. Quocirca cū datis tribus rectis AC, CL, LB, rectangulum LE, sub extremis AC, BL, comprehensum aequale sit quadrato HM, media CL; erunt it, tres lineae AC, CL, LB, continuè proportionales. Quod est propositum.

I. numeris idem problema ita perficietur. Posteriori parti numeri propositi adiciatur prioris partis pars quarta, & conflatu numerus in priorē partē ducatur. Huius deinde producti numeri quadrata radix eruat. Nam si ex radice inuenta dematur semissus prioris partis, reliqua fiet secunda pars proportionalis, quam si ex posteriori parte dati numeri subtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti si linea AB ponatur 76. pars autem AC, 36. & CB, 40. adiciemus CI, hoc est, 9. quartā partē prioris partis 36. ad CB, id est, ad 40. posteriorē partem, & conflatu numerum 49. lineam scilicet IB, in priorē partē 36 siue in lineam AC, ducemus, atque ex producto numero 1764. hoc est, ex rectangulo IE, radicem quadratā eruemus 42. pro linea FL. ex qua si detrahemus CF, semissim partis AC, nimirū 8. reliqua erit pars CL, 24. Hac ablata ex tota posteriori parte CB, 40. remanebit tertia pars LB, 16. Sunt ergo tres partes AC, CL, LB, numeri AB, 76. ha tres, 36 24 16. continuè proportionales. Ex quo constat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto problema effici nō posse in numeris. Atq, hinc intelligentur ea, qualib. 5. in tractatione proportionū prope finem si ripsimus cū de ortu proportionalitatis Geometrica ex Arithmetica proportionalitate ageremus. Sed quādo hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus disputauimus, non alienū erit à nostro instituto, de eis. in quoq, cū Pappo Alexandrino differere, qui datis duobus terminis ex tribus cuiuscunq, Medietatis siue Arithmetica siue Geometrica siue Harmonica, tertium inquirat: Et in Geometrica proportionalitate aliter, quam ab Euclide factum est. Hoc autem exequemur sequentibus propositionibus, quarum prima hac sit.

I.

(inuenire.

DATIS duabus rectis lineis, mediā proportionalem in Arithmetica proportionē dicite

Si t datae duae rectae AB, & C, (quae p unitates in longū dispositas hic representantur) inter quas media in proportionalitate Arithmetica sit inuenienda. Minori C, ponatur aequalis FH, & ex maiore AB abscindatur alia aequalis AD. Diuiso autē segmento BD, bifariam in E, samatur ipsi DE, aequalis HG. Dico FG, esse mediā Arithmetice proportionale inter AB, & C. excedit. n. AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH. siue DE. Cū ergo duo excessus BE, DE, sint aequales, ex constructione, liquidū cōstat rectas AB, FG, & C, Arithmetice proportionales esse. H. n. c. efficitur mediā lineā FG, esse semisse summa ex extremis conflata. Cū enim tam AD, q, C ipsi FH, sit aequalis, erit summa ex AD, & C, ipsius FH, dupla. Est autem & DB, ipsius HG, dupla. Igitur & summa ex AB, & C, totius FG, dupla erit; ac proinde FG, semissus erit summa extremarum. Quod est propositum.

C 4

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.

SIN T in eadem figura, data dua recta AB , & FG , quibus inuenienda sit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore FG , detrahatur recta GH , excessui BE , quo AB , ipsam FG , superat, aequalis: & ipsi FG , ponatur aequalis C . Dico C , esse tertiam proportionalem minorem. Excedit enim AB , ipsam FG , excessu BE ; & FG , ipsam C , excessu GH : qui quidem duo excessus BE , GH , ex constructione aequales sunt.

I I I.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

SIN T in eadem figura, data dua recta C , & FG , quibus inuenienda sit tertia maior in Medietate Arithmetica. Sumatur AE , ipsi FG , aequalis, eiq; addatur EB , excessui GH , quo FG , ipsam C , superat, aequalis. Dico AB , esse tertiam proportionalem maiorem; ita ut tres AB , FG , & C , sint proportionales Arithmetice. Nam AB , excedit ipsam FG , excessu BE ; & FG , ipsam C , excessu GH . Cum ergo duo excessus BE , GH , ex constructione sint aequales, patet propositum.

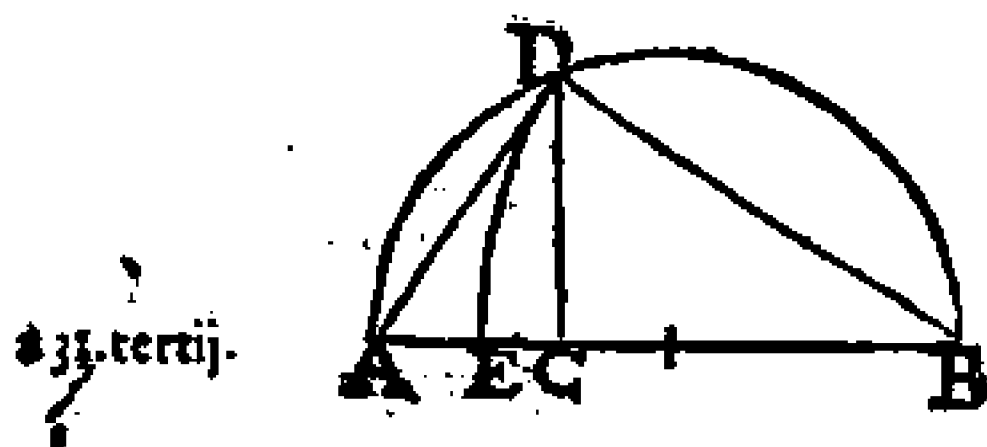
IT A Q V E datis duobus numeris inaequalibus 30. 16. si semissus excessus, nimirum 7. minori 16. adjiciatur, conflabitur medius proportionalis Arithmetice, 23. ut hic apparet, 30. 23. 16. Vel medius terminus habebitur, si summa extremorum semissus sumatur, ut in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum est 46, & eius semissus 23. medium terminum constituit.

S I vero ex minore 16. detrahatur excessus 14. reliquum erit minus extremum 2. in Medietate Arithmetica, ut hic vides, 30. 16. 2.

S I denique maiori 30. adjiciatur excessus 14. conficietur maius extremum 44. in proportionalitate Arithmetica, ut hic patet, 44. 30. 16.

I I I I

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.



SIN T data recta AB , BC , eundem terminum B , habentes, inter quas inuenienda sit media Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem AB , semicirculo ADB , excitetur ex C , ad AB , perpendicularis CD ; & ex B , per D , arcus describatur secans AB , in E . Dico BE , mediam proportionalem esse inter AB , BC , in proportionalitate Geometrica. Ductis enim rectis AD , BD , erit angulus ADB , rectus. Igitur ex coroll. propof. 8. huius lib. recta BD , hoc est, ipsi aequalis BE , media proportionalis erit inter AB , BC . Quod est propositum.

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire.

SIN T in eadem figura, data recta AB , BE , eundem possidentes terminum B , quibus inuenienda sit minor tertia Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem AB , semicirculo ADB , describatur ex B per E , arcus secans circumferentiam ADB , in D , puncto, ex quo ad AB , perpendicularis demittatur DC . Dico BC , tertiam proportionalem esse ipsis AB , BE . Ductis enim rectis AD , BD , erit angulus ADB , rectus. Igitur ex coroll. propof. 8. huius lib. erit BD , hoc est, ipsi aequalis BE , media proportionalis inter AB , BC : id est, erit AB , ad BE , ut BE , ad BC . Quod est propositum.

V L

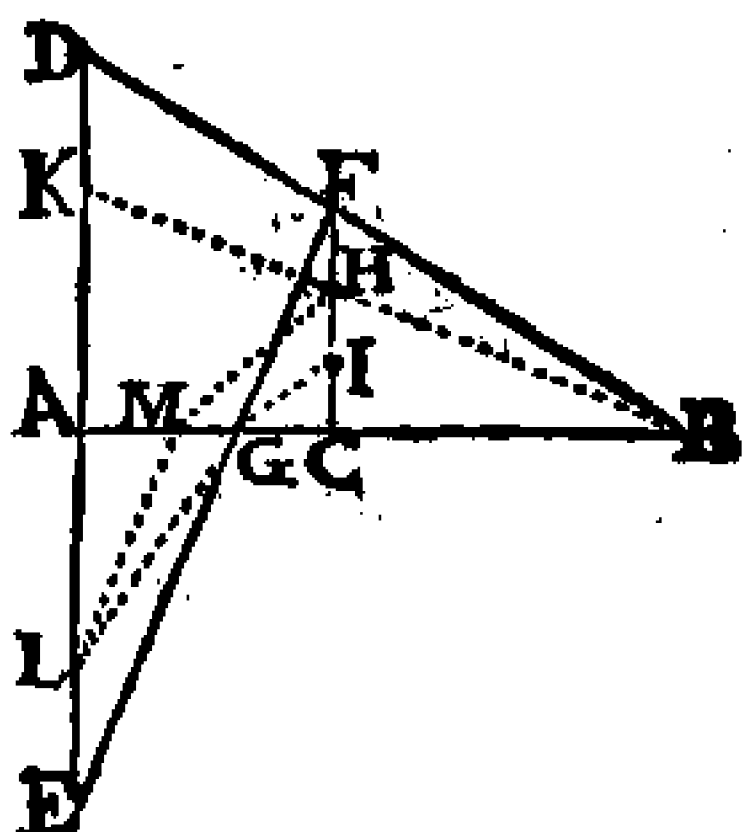
DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SIN T in eadem figura, data recta CB , BE , eundem terminum B , possidentes, quibus inuenienda sit maior tertia Geometricè proportionalis. Ex C , termino minoris excitetur ad EB , perpendicularis CD , quam arcus ex B , per E , descriptus secet in D . Ducta autem recta BD , excitetur ad eam in D , perpendicularis DA secans BE , productam in A . Dico AB , tertiam proportionalem esse ipsis CB , BE . Quoniam enim angulus ADB , rectus est, erit ex coroll. propof. 8. huius lib. BD , hoc est, BE , ipsi aequalis, media proportionalis inter BC , & AB : Hoc est, erit CB , ad BE , ut BE , ad AB . Quod est propositum.

V I I.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.

SIN T data recta AB , BC , eundem terminum B , possidentes, inter quas inuenienda sit media Harmonicè proportionalis. Ducta per A , ad AB , perpendiculari DE , ponantur aequales AD , AE , quantacunque. Excitetur quoque ex C , ad AB , perpendicularis CF , secans ductam rectam BD , in F , puncto, ex quo ad E , recta ducatur



catur FE, secans AB, in G. Dico BG, esse mediam Harmonicè proportionalem inter AB, BC: hoc est, esse AB, primam ad tertiam BC, ut AG, excessum inter primam AB, ac mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC. Quoniam enim ^a CF, parallela est ipsi DE, ob rectos ^a 18. priml. angulos A, C; erit ex scholio propof. 4. huius libri triangulum BCF, triangulo BAD, simile: hoc est, erit ut AB, ad AD, ita BC, ad CF; & permutando, ut AB, ad BC, ita AD, ad CF: hoc est, ita AE, ad CE. Rursus ob similitudinem triangulorum AEG, CFG, ^b erit ut AE, ad AG, ita CE, ad CG; & permutando ut AE, ad CE, ita AG, ad GC. Erat autem ut AE, ad CE, ita AB, ad BC. Igitur erit quoque AB, ad BC, prima linea ad tertiam, ut AG, excessum inter primam AB, & mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC. Quod est propositum.

Non determinatur autem magnitudines rectarum AD, AE: quia utcumque sumantur, siue maiores, siue minores, eadem media BG, inuenietur. Sint enim alia aequales AK, AL: Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, iungaturq; recta LH: quam dico per G, transire. Si enim transeat per aliud punctum, ut per M, inter A, & G; ostendemus eodem modo, esse ut AB, ad BC, ita AM, ad MC. Fient enim rursus triacula aquiangula ALM, MHC, si recta est HML. Est autem ut AB, ad BC, ita AG, ad GC, ut ostensum est. Igitur erit quoq; AM, ad MC, ut AG, ad GC. quod est absurdum. Nam ^c minor est proportio AM, ad GC, quam AG, ad GC: Sed adhuc minor est proportio AM, ad MC, ^c 8. quintl. ad GC. Multo ergo minor erit proportio AM, ad MC, quam AG, ad GC. Non ergo ita est AM, ad MC, ut AG, ad GC: ac propterea HL, non secabit AG, in M. Eodem modo non secabit GC. Transsit igitur per G: atq; idcirco eadem media BG, inuenietur per rectas AK, AL, aequales.

VIII

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.

SI & T in eadem figura, data recta AB, BG, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Harmonicè proportionalis. Ducta DE, ad AB, perpendiculari, ponantur aequales AD, AE, quantacunque: iuncta autem recta BD, ducatur ex E, per G, recta secans BD, in F, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur FC. Dico BC, ipsis AB, BG, esse Harmonicè proportionalem: Hoc est, esse AB, primam ad BC, tertiam, ut AG, excessum inter primam & secundam, ad GC, excessum inter secundam ac tertiam. Quod quidem demonstrabitur, ut in precedenti propositione.

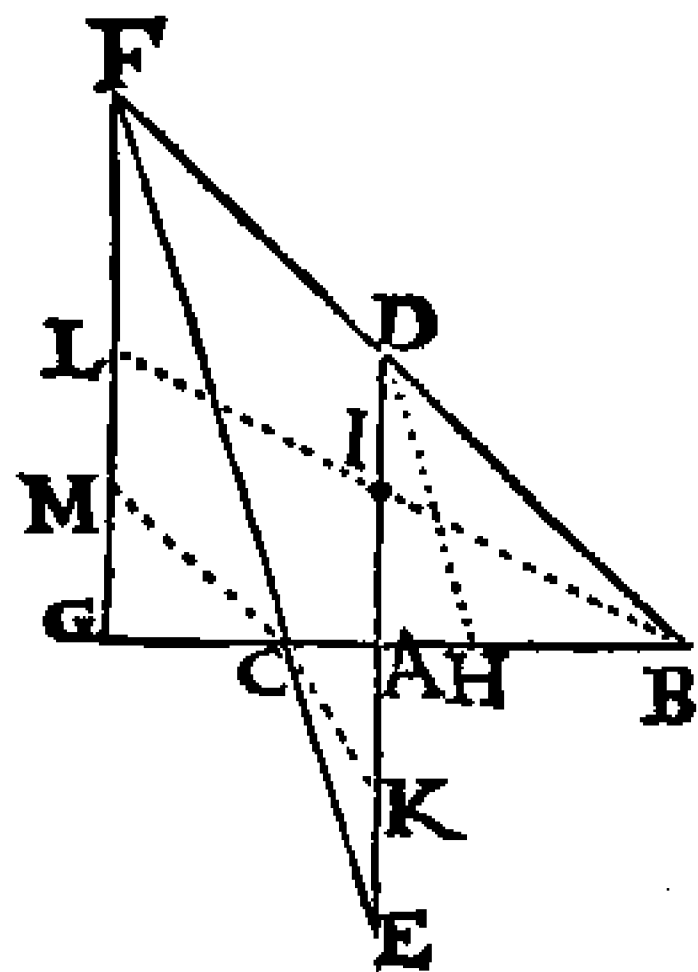
Non determinatur etiam hic magnitudines rectarum AD, AE: quia utcumque sumantur, siue maiores siue minores, eadem tertia BC, reperietur. Sint enim alia aequales AK, AL: Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, iungaturq; recta LG: quam dico cadere in H. Si enim cadat infra, ut in I: ostendemus eodem modo, esse ut AB, ad BC, ita AK, ad CH: hoc est, ita AL, ad CH. Ut autem AB, ad BC, ita erat AG, ad GC. Erit igitur quoq; ut AG, ad GC, ita AL, ad CH. Et quia, si recta linea est LGI, ob similitudinem triangulorum ALG, CIG, ^d est ut AL, ad AG, ita CI, ad GC, erit permutando, ut AL, ad CI, ita AG, ad GC. ^d 4. sexti. Cum ergo ostensum sit, esse ut AG, ad GC, ita AL, ad CH; erit AL, ad CH, ut ad CI. ^e Aequales sunt igitur ^e 9. quinti. CH, CI, totum & pars. quod est absurdum. Non ergo cadet LG, infra H: eodemq; modo ostendemus non cadere supra. Cadit ergo in H, ubi BK, perpendicularem CF, secat; ac proinde ex H, demissa perpendicularis HC, ad AB, exhibebit eandem tertiam minorem BC, proportionalem Harmonicè.

Hic sequitur, datis tribus rectis Harmonicè proportionalibus, minimam esse maiorem excessu, quo media minimam superat. Cum enim sit, ut AB, ad BC, ita AG, ad GC: sit autem AB, prima maior, q. AG, excessum inter primam AB, & mediam BG, ^f erit quoq; BC, tertia maior, q. GC, excessum inter mediam BG, & minimam BC. ^f 14. quinti.

IX

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.

SIN T data recta AB, BC, eundem habentes terminum B, quibus inuenienda sit maior tertia Harmonicè proportionalis. Ducta per A, ad BG, perpendiculari DE, ponantur aequales AD, AE, quantacunque, ducaturq; recta BD, quam productam secet EC, producta in F, puncto, (quod autem conueniant BD, EC, mox demonstrabimus) ex quo ad BC, productam demittatur perpendicularis FG. Dico GB, ipsis CB, BA, Harmonicè proportionalem esse: Hoc est, esse GB, primam ad BA, tertiam, ut GC, excessum inter primam GB, & mediam BC, ad CA, excessum inter mediam CB, & tertiam BA. ^g 28. priml. Quoniam enim GF, ipsi AD, parallela est, ob angulos rectos G, A, erit ex scholio propof. 4. huius lib. triangulum BAD, triangulo BGF, simile: id est, erit ut GB, ad GF, ita BA, ad AD; & permutando, ut GB, ad BA, ita GF, ad AD: hoc est, ad AE. Rursus ob similitudinem triangulorum FGC, EAC; ^h ^h 4. sexti.



est HI, ad AL. Igitur erit quoq, A G, primum ad EC, tertium, vt HI, excessus inter primum ac medium, ad AL, excessum inter medium ac tertium. Quod est propositum.

IT. 4. Q. V. E. si AE, ponatur 6. & EB, 4. erit summa AB, 10. quam si ducamus in AE, & EB, fiet AG, 60. & EC, 40. Duplum autem eius, quod fit ex AE, in EB, hoc est, H LIA EG, fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonice proportionales erunt 60. 48. 40. quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri 6. 4. Cum enim eadem summa 10. ex 6. & 4. collecta multiplicans vtrung, 6. 4. produxerit extremos 60. 40. ^a erit 60. ad 40. vt 6. ad 4. Quod etiam patet ex figura. ^b Est enim AG, id est, 60. ad EC, id est, ad 40. vt AE, id est, 6. ad EB, id est, ad 4.

a 17. septimi.

b 1. sexti.

H. 4. c. arte si summa quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in vtrumq, seorsum, gignitur extremi termini proportionalitatis Harmonice eandem habentes proportionem, quam dati duo numeri. Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter se.

ALITER.

INTER datos duos numeros 6. 4. statuatur medius Arithmetice proportionalis, 5. nimirum semissus eorum summa, hoc modo. 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignat 30. & 20. inter quos statuatur medius 24. quem extremi inter se multiplicati producant, hoc modo, 30. 24. 20. Dico hos tres esse Harmonice proportionales. Quoniam enim tres numeri 60. 48. 40. qui sunt ex summa 10. datorum numerorum 6. 4. in datos numeros 6. & 4. & ex 4. in 6. bis, dupli sunt tria numerorum hic inuicem, quod hi producti sint ex semisse summa datorum numerorum in datos numeros, & ex 4. in 6. semel, vt perspicuum est: erit quoq, tam excessus inter 60. & 48. duplus excessus inter 30. & 24. quam excessus inter 48. & 40. ipsius excessus inter 24. & 20. vt ad propof. 10. ostendimus.

| | | |
|-----|-----|-----|
| 60. | 48. | 40. |
| 30. | 24. | 20. |

Cum ergo tres numeri 60. 48. 40. sint Harmonice proportionales, vt in precedenti problemate demonstrauimus erunt quoq, eorum semisses, 30. 24. 20. eandem habentes proportionem, Harmonice proportionales: quoniam quidem & excessus eandem proportionem habent, quam excessus numerorum, 60. 48. 40. quippe cum excessus numerorum 30. 24. 20. semisses sint horum numerorum 60. 48. 40. excessum, vt dictum est.

c 15. quinti.

XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonice proportionalem inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & BC, 10. inter quos inueniendus sit medius proportionalis Harmonice. Dematur ex maiore AB, 15. numerus BD, minori BC, 10. aequalis, & reliquus numerus AD, 5. nimirum

A...E...D.....B.....C

differentia datorum numerorum, ducatur in minorem BC, 10. productusq, numerus 50. diuisus per AC, 25. summam datorum numerorum, faciat Quotientem DE, 2. qui additus minori BD, 10. faciat BE, 12. Dico BE, esse medium proportionalem Harmonice inter AB, BC, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex AD, in BC, fit, diuiso per AC, Quotiens est DE: producet idem numerus diuisus ex DE, Quotiente in diuisorem AC, vt constat ex desin. Diuisionis. Quia igitur idem numerus fit ex AC, primo, in DE, quartum, qui ex BC, vel BD, secundo, in AD, tertium, ^d erit AC, primus ad BC, secundum, vt AD, tertius ad DE, quartum: Et diuidendo, AB, ad BC, primus datus ad tertium datum, vt AE, excessus inter primum AB, & medium inuentum, BE, ad DE, excessum inter medium BE, & BD, siue tertium BC, Sunt ergo AB, BE, BC, nimirum 15. 12. 10. Harmonice proportionales. Quod est propositum.

d 9. septimi, vel 16. sexti.

IT. 4. Q. V. E. si differentia datorum numerorum ducatur in minorem, numerusq, productus diuidatur per datorum numerorum summam, ac deniq, Quotiens minori adijciatur, constabitur medius terminus Harmonice proportionalitatis.

XII.

DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & AC, 12. quibus inueniendus est minor Harmonice proportionalis.

A.....E...C...B...D

Addatur BD, aequalis ipsi BC, excessui inter datos numeros. Per hanc summam AD, 18, collectam ex maiore numero, & differentia datorum numerorum, diuidatur numerus 36. factus ex minore dato AC, in BC, differentiam datorum numerorum, & Quotiens CE, ex minore dato AC, detrahatur. Dico reliquum AE, 10. esse terminum tertium minorem quaesitum, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex AC, in BC, fit, diuiso per AD, Quotiens est CE producet idem numerus diuisus ex CE, Quotiente in diuisorem AD, multiplicato, vt ex Diuisionis desin. manifestum est. Quia igitur idem numerus gignitur ex AD, primo, in CE,

A.....E...C...B...D

quartum, qui ex BC, secundo in AC, tertium; ^e erit AD, primus ad BC, secundum, hoc est, ad BD, vt AC, tertius ad CE, quartum. Et diuidendo, AB, ad BD, hoc est, ad BC, vt AE, ad CE: Et permutando, AB, primus datus, ad AE, tertium inuentum, vt BC, excessus inter primum AB, & medium AC, ad CE, excessum inter

e 19. septimi vel 16. sexti.

medium $A C$, & tertium $A E$. Sunt igitur tres numeri $A B$, $A C$, $A E$, id est, 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.

Ita $A Q V E$ si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam dividatur numerus ex minore numero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus, Quotiensq; ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

A L I T E R.

Sint rursus dati duo numeri $A B$, 15. & $A C$, 12. quibus inveniendus sit minor in Harmonica Medietate. Maiori $A B$, addatur $B D$, aequalis differentia $B C$, 3. datorum numerorum: Et per summam $A D$, 18. dividatur

$A \dots \dots \dots E \dots C \dots B \dots D$

a 19. septi-
mi. vel 16.
sexti.

numerus 180. ex multiplicatione datorum numerorum $A B$, $A C$, hoc est, 15. 12. inter se procreatus, sitq; Quotiens $A E$, 10. Dico $A E$, minorem extremum esse in Medietate Harmonica. Quoniam enim numero, qui ex $A B$, in $A C$, gignitur, diviso per $A D$, Quotiens sit $A E$ producetur idem numerus divisus ex $A E$, Quotiente in divisorem $A D$, multiplicato, ut ex defn. Divisionis constat. Quia igitur idem numerus sit ex $A D$, primo in $A E$, quartum, qui ex $A B$, secundo in $A C$, tertium, ^a erit $A D$, primus ad $A B$, secundum, ut $A C$, tertius ad $A E$, quartum; ac proinde cum $A D$, maior sit, quam $A B$, erit quoque $A C$, maior quam $A E$. Quare erit & dividendo $B D$, id est, $B C$, ad $A B$, ut $C E$, ad $A E$: Et convertendo $A B$, ad $B C$, ut $A E$, ad $C E$: Et permutando $A B$, primus ad $A E$, tertium inuentum, ut $B C$, excessus inter primum $A B$, & medium $A C$, ad $C E$, excessum inter medium $A C$, & tertium $A E$. Sunt igitur tres numeri $A B$, $A C$, $A E$, hoc est, 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.

Ita $A Q V E$ si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam dividatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonica Medietatis.

XIII.

Datis duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate invenire.

Sint dati duo numeri $A B$, 10. & $A C$, 12. quibus inveniendus sit tertius maior in Medietate Harmonica.

$A \dots \dots \dots D \dots B \dots C \dots E$

b 19. septi-
mi vel 16.
sexti.

Ex minore $A B$, detrahatur $B D$, aequalis differentia $B C$, 2. datorum numerorum. Et per reliquum numerum $A D$, 8. dividatur numerus 24. factus ex maiore numero $A C$, 12. in differentiam datorum numerorum $B C$, 2. vel $B D$. Quotiens autem $C E$, 3. maiori numero $A C$, 12. adiciatur. Dico summam $A E$, 15. esse terminum maiorem in proportionalitate, siue Medietate Harmonica, hoc est, tres numeros $A E$, $A C$, $A B$, nimirum 15. 12. 10. esse Harmonicè proportionales. Quoniam enim numero, qui ex $A C$, in $B D$, fit, diviso per $A D$, Quoties sit $C E$, producetur idem numerus divisus ex $C E$, Quotiente in divisorem $A D$, multiplicato. Quia igitur idem numerus gignitur ex $A C$, primo in $B D$, quartum, qui ex $C E$, secundo in $A D$, tertium, ^b erit $A C$, primus ad $C E$, secundum, ut $A D$, tertius ad $B D$, quartum. Et componendo $A E$, ad $C E$, ut $A B$, ad $B D$, hoc est, ad $B C$: Et permutando $A E$, primus ad $A B$, tertium, ut $C E$, excessus inter primum $A E$, & medium $A C$, ad excessum $B C$, inter medium $A C$, & tertium $A B$. Sunt ergo tres numeri $A E$, $A C$, $A B$, nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.

Ita $A Q V E$ datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum dividatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotiensq; maiori numero adiciatur, conflabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonica.

A L I T E R.

Sint rursus duo dati numeri $A B$, 10. & $A C$, 12. quibus inveniendus sit maior in Harmonica Medietate. Ex minore $A B$, dematur $B D$, aequalis excessus $B C$, datorum numerorum: Et per reliquum numerum $A D$, 2. dividatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum $A B$, 10. & $A C$, 12. procreatus, Quotiensq; sit $A E$, 15. Dico $A E$, esse terminum maiorem in proportionalitate Harmonica. Quoniam enim numero,

$A \dots \dots \dots D \dots B \dots C \dots E$

c 19. septi-
mi vel 16.
sexti.

qui sit ex $A B$, in $A C$, diviso per $A D$. Quotiens est $A E$ producetur idem numerus divisus ex $A E$, Quotiente in divisorem $A D$, ex defn. Divisionis. Quia igitur idem numerus gignitur ex $A B$, primo in $A C$, quartum, qui ex $A D$, secundo in $A E$, tertium, ^c erit $A B$, primus ad $A D$, secundum, ut $A E$, tertius ad $A C$, quartum; ac proinde cum $A B$, maior sit quam $A D$, erit & $A E$, maior quam $A C$. Et cum sit, ut $A E$, ad $A C$, ita $A B$, ad $A D$; erit per conversionem rationis $A E$, ad $C E$, ut $A B$, ad $B D$, hoc est, ad $B C$: Et permutando $A E$, primus inuentus ad $A B$, tertium, ut $C E$, excessus inter primum $A E$, & medium $A C$, ad $B C$, excessum inter medium $A C$, & tertium $A B$. Igitur tres numeri $A E$, 15. $A C$, 12. $A B$, 10. Harmonicè proportionales sunt. Quod est propositum.

Ita $A Q V E$ datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum dividatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se genitus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonica.

Postremo libet quoq; ex Pappo praxes illas demonstrare, quibus ad finem tractationis proportionum

num

num ex aequalitatis proportionione omnes proportioniones rationales, & vicissim ex, inaequalitatis proportionione quilibet aequalitatem, ac denique ex quavis proportionalitate Geometrica & Geometricam, & Arithmeticam, & Harmonicam, oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate Geometrica tam aequalium terminorum, quam inaequalium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inaequalium terminorum.

XIII.

PROPOSITIS tribus terminis Geometricè proportionalibus, siue æqualibus, siue inæqualibus; Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa conflata ex secundo & tertio semel: ac tertius semel, sunt Geometricè proportionales.

| | | | | | |
|-------|-------|-------|--------|-------|-------|
| A, 1. | B, 1. | C, 1. | A, 12. | B, 6. | C, 3. |
| D, 4. | E, 2. | F, 1. | D, 27. | E, 9. | F, 3. |

Si tres termini continuè proportionales Geometricè, A, B, C: sitq; D, summa ex A, semel, & B, bis, & C, semel collecta: At E, summa ex B, & C, semel conflata, ac denique F, ipsi C, aequalis. Dico D, E, F, Geometricè quoque proportionales esse. Cum enim sit A, ad B, ut B, ad C; erit quoque componendo A, B, simul ad B, ut B, C, simul ad C. ² Igitur omnes antecedentes simul, nimirum A, B, & B, C, ad omnes consequentes simul, nimirum ad B, C, ut una antecedens, hoc est, B, C, ad unam consequentem C. Est autem D, aequalis ipsis A, B, & B, C: Et E ipsis B, C: ac denique F, ipsi C. Igitur erit quoque D, ad E, ut E, ad F: ac proinde D, E, F, Geometricè sunt proportionales. Quod est propositum. 212. quinti.

| |
|----------|
| A, B, C, |
| 1. 1. 1. |
| D, E, F. |
| 4. 2. 1. |

Hinc manifestum est, si termini A, B, C, sint aequales; D, E, F, esse duplos. Nam B, C, simul dupli erunt ipsius C; ac propterea & E, ipsius F: quod E, ipsis B, C; & F, ipsi C, sit aequalis. Cum ergo D, E, F, sint continuè proportionales, ipsi erunt in dupla proportionione. Quod si termini aequales A, B, C, sint unitates, generabitur dupla proportionalitas D, E, F, in minimis terminis 4. 2. 1. propterea quod F, aequalis est ipsi C, hoc est, unitati.

| |
|----------|
| A, B, C, |
| 1. 1. 1. |
| D, E, F. |
| 4. 2. 1. |

Si verò A, B, C, sint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam si B, ipsius C, duplus est; erit summa ex B, C, collecta, id est, E, ipsius C, hoc est, ipsius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplam habebunt. Atque eodem modo ex tripli orientur quadrupli, ex quadrupli quintupli, & sic in infinitum.

| |
|----------|
| A, B, C, |
| 1. 2. 4. |
| D, E, F. |
| 9. 6. 4. |

At si termini A, B, C, sint dupli inuerso ordine, erunt D, E, F, geniti, sesquialteri. Nam cum B, sit semis ipsius C, erit summa ex B, C, collecta, hoc est, E, ipsius C, siue ipsius F, sesquialtera. Eodem modo si A, B, C, sint conuerso ordine tripli, erunt procreati D, E, F, sesquitercij. Nam B, erit ipsius C, tertia pars. Igitur summa ex B, C, conflata, id est, E, continebit C, siue F, semel & insuper eius partem tertiam: ac propterea D, E, F, habebunt continuam proportionem sesquiterciam. Pari ratione ex quadrupli inuersis nascentur sesquiquarti, & ex inuersis quintupli sesquiquinti, atque ita in infinitum. Non aliter monstrabimus, aliarum proportionum generationes ex alijs proportionibus rectè esse prescriptas in tractatione proportionum. Item rectè quamcunque proportionem inaequalitatis ad aequalitatem reuocari: quippe cum in ea reductione reuexamus quodammodo operationem, qua inaequalitatis proportionem ex aequalitate gigni tradidimus.

| |
|----------|
| A, B, C, |
| 4. 2. 1. |
| D, E, F. |
| 9. 3. 1. |

| |
|------------|
| A, B, C, |
| 1. 3. 9. |
| D, E, F. |
| 16. 12. 9. |

XV.

PROPOSITIS tribus terminis, siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata: ac denique tertius semel, sunt Arithmeticè proportionales.

| | | | | | |
|-------|-------|-------|--------|--------|-------|
| A, 1. | B, 1. | C, 1. | A, 12. | B, 6. | C, 3. |
| D, 5. | E, 3. | F, 1. | D, 39. | E, 21. | F, 3. |

Si tres termini Geometricè proportionales A, B, C: sitq; D, summa collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, semel: At E, summa conflata ex A, B, C, semel: ac denique F, ipsi C, aequalis. Dico D, E, F, esse Arithmeticè proportionales. Quoniam enim summa ex A, bis, & B, bis, & C, semel, hoc est, terminus D, superat summam ex A, B, C, semel, hoc est, terminum E, aggregato ex A, B, semel collecto: Item summa ex A, B, C, hoc est, terminus E, superat terminum C, siue F, eodem aggregato ex A, B, semel collecto; erit idem excessus inter D, & E, qui inter E, & F: ac propterea D, E, F, Arithmeticam proportionalitatem, siue Medietatem constituent. Quod est propositum.

| |
|------------|
| A, E, C, |
| 3. 20. 1. |
| D, E, F. |
| 47. 24. 1. |

Eadem prorsus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuscunque, etiam si non sint proportionales: ut in hoc exemplo perspicuum est.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus Geometricè proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel: ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel: & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coaceruata, Harmonicè proportionales sunt.

| | | | | | |
|-------|-------|-------|--------|--------|-------|
| A, 1. | B, 1. | C, 1. | A, 12. | B, 6. | C, 3. |
| D, 6. | E, 3. | F, 2. | D, 45. | E, 15. | F, 9. |

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: fitq; D, summa collecta ex A, bis, ex B, ter, & ex C, semel: At E summa ex B, bis, & C, semel conflata: Ac denique F, summa ex B, semel, & C, semel collecta. Dico D, E, F, constituere proportionalitatem, siue Medietatem Harmonicam. Quoniam enim est, ut A, ad B, ita B, ad C; erunt ex scholio propof. 22. lib. 5. ut A, bis ad B, ita B, bis ad C. Igitur componendo, ut A, bis, & B, semel, ad B, ita B, bis, & C, semel ad C. ^a Igitur ut omnes antecedentes simul, nimirum A bis, & B, ter, & C, semel, hoc est, terminus D, ad omnes consequentes simul, nimirum ad summam ex B, C, id est, ad F, ita vnum antecedens, nimirum A, bis, & B, semel ad B. Est autem A, bis, & B, semel excessus, quo A, bis, & B, ter, & C, semel, superant B, bis, & C, semel: hoc est, excessus inter D, primum terminum, & medium E: At B, excessus, quo B, bis, & C, semel, superant summam ex B, C, hoc est, excessus inter E, medium, & F tertium. Igitur ut D, primum ad F, tertium, ita excessus inter primum & medium, ad excessum inter medium ac tertium: ideoq; D, E, F, Harmonicè proportionales erunt. Quod est propositum.

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, sunt unitates; ut in exemplis prolati manifestum est. Quando autem A, B, C, non sunt unitates, etiam si in sua proportionem minimi sint, non semper creantur minimi termini D, E, F. Id quod liquido constat in his exemplis.

| | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A, 9. | B, 6. | C, 4. | A, 1. | B, 4. | C, 16. | A, 9. | B, 12. | C, 16. |
| D, 40. | E, 16. | F, 10. | D, 30. | E, 24. | F, 20. | D, 70. | E, 40. | F, 28. |

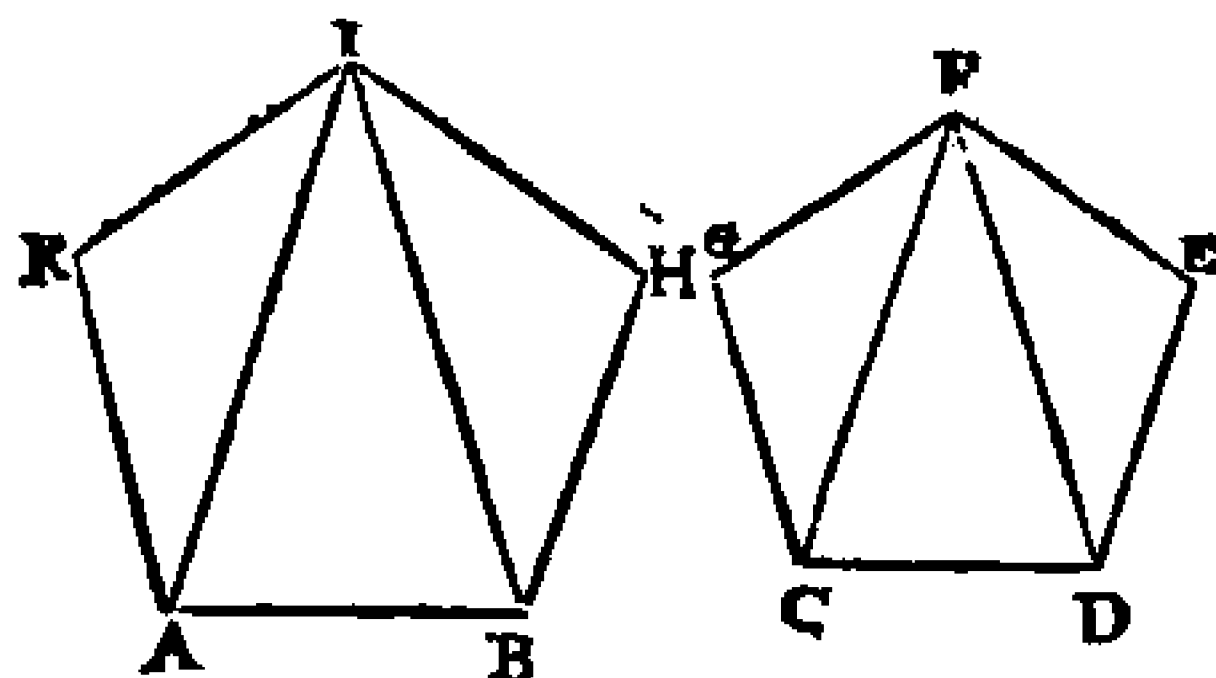
In primo enim exemplo, ex minimis terminis proportionis sesquialtera, & in secundo ex minimis terminis subquadrupla proportionis, & in tertio ex minimis terminis subsestertia proportionis, gignuntur res in proportionalitate Harmonica non minimi. Quod si termini inuertantur, rum demum (quod mirum est) minimi termini Medietati Harmonicæ procreabuntur, ut hac exempla demonstrant.

| | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|
| A, 4. | B, 6. | C, 9. | A, 16. | B, 4. | C, 1. | A, 16. | B, 12. | C, 9. |
| D, 35. | E, 21. | F, 15. | D, 45. | E, 9. | F, 5. | D, 77. | E, 33. | F, 21. |

19.

PROBL. 6. PROPOS. 18.

A' DATA recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere.



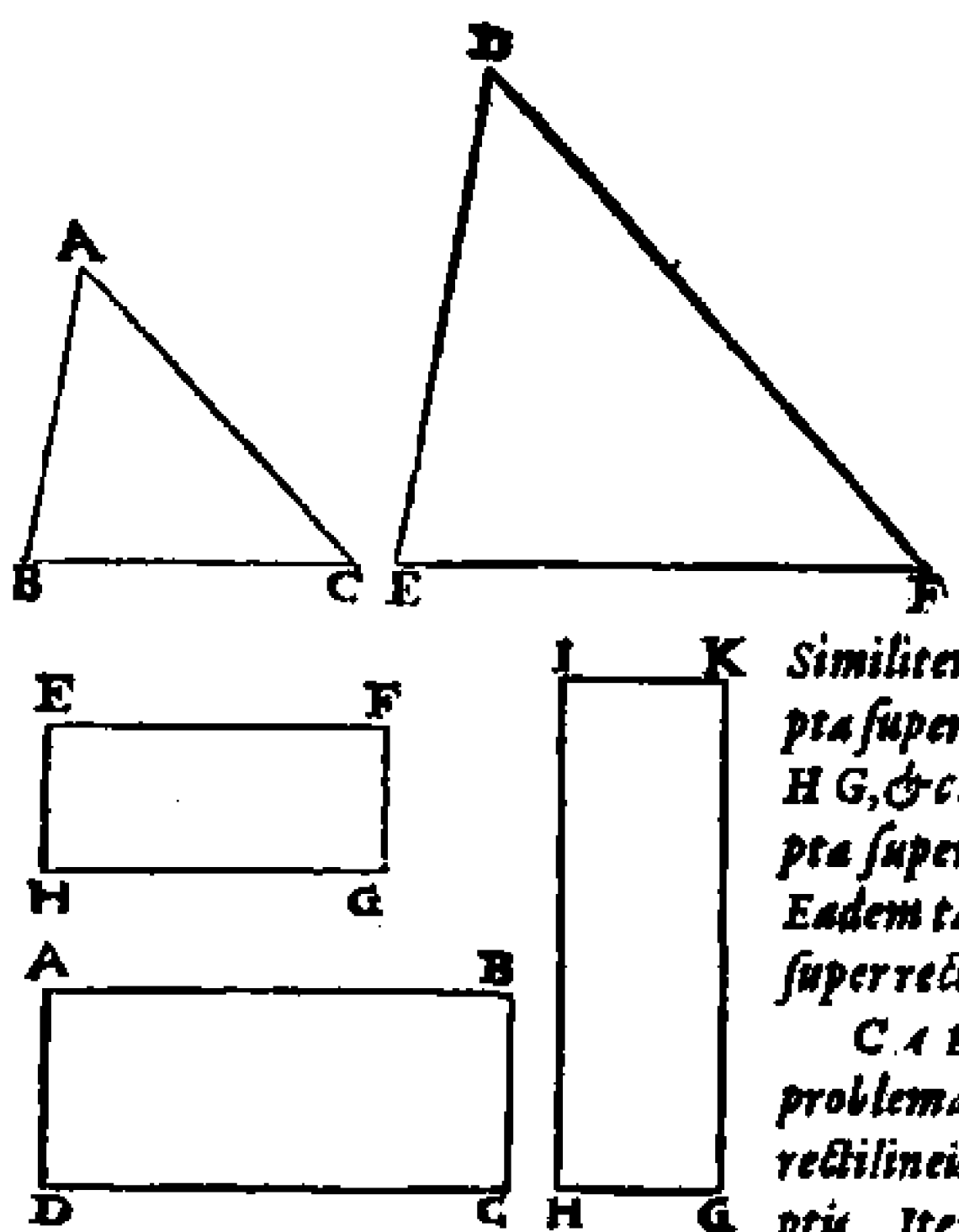
SIT data recta AB, super quâ describendū sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similiterque positum. Ducantur ex quolibet angulo, ut ex F, ad singulos angulos oppositos, rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in trianguula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDE, angulus ABI, cocantque rectæ AI, BI, in puncto I: (coibunt enim omnino, propterea quod duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores sunt, cum æquales sint duo-

^a 17. primi. bus angulis FCD, FDC, ^a qui duobus rectis sunt minores.) ^b eritque reliquo angulo CFD, ^b reliquus angulus AIB, æqualis totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. ^c 17. primi. Rursus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus DIH: Et quia duo anguli EDF, FED, minores sunt duobus rectis; erunt quoque duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Cocant ergo in puncto H: eritque eadem ratione triangulū BHI, triangulo DEF, æquiangulū. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo FCG, angulus IAK: ^d Et quia duo anguli GCF, GFC, minores sunt duobus rectis; erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, cōueniēt in aliquo pūcto. Conueniant

Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoque AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, simile esse, similiterque positum. Cum enim angulus IAB, constitutus sit æqualis angulo FCD, & angulus IAK, angulo FCG, erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit; & reliqui reliquis, ut constat ex constructione: cum singule partes vnius singulis partibus alterius factæ sint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG. Quoniam verò, ^a ita est AB, ad BI, ut CD, ad DF; & ita BI, ad BH, ut DF, ad DE; ^b erit ex æquo ita AB, ad BH, ut CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia sunt, ^c quæ admodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula BHI, DEF. ^d Rursus ita est HI, ad IB, ut EF, ad FD; & ita IB, ad IA, ut FD, ad FC; & ita IA, ad IK, ut FC, ad FG. ^e Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK, ut EF, ad FG; & ideo latera quoque circa æquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterque descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum descripsi-
mus. Quod faciendum erat.

^a 4. sexti.
^b 22. quinti.
^c 4. sexti.
^d 4. sexti.
^e 22. quinti.

SCHOLIUM.

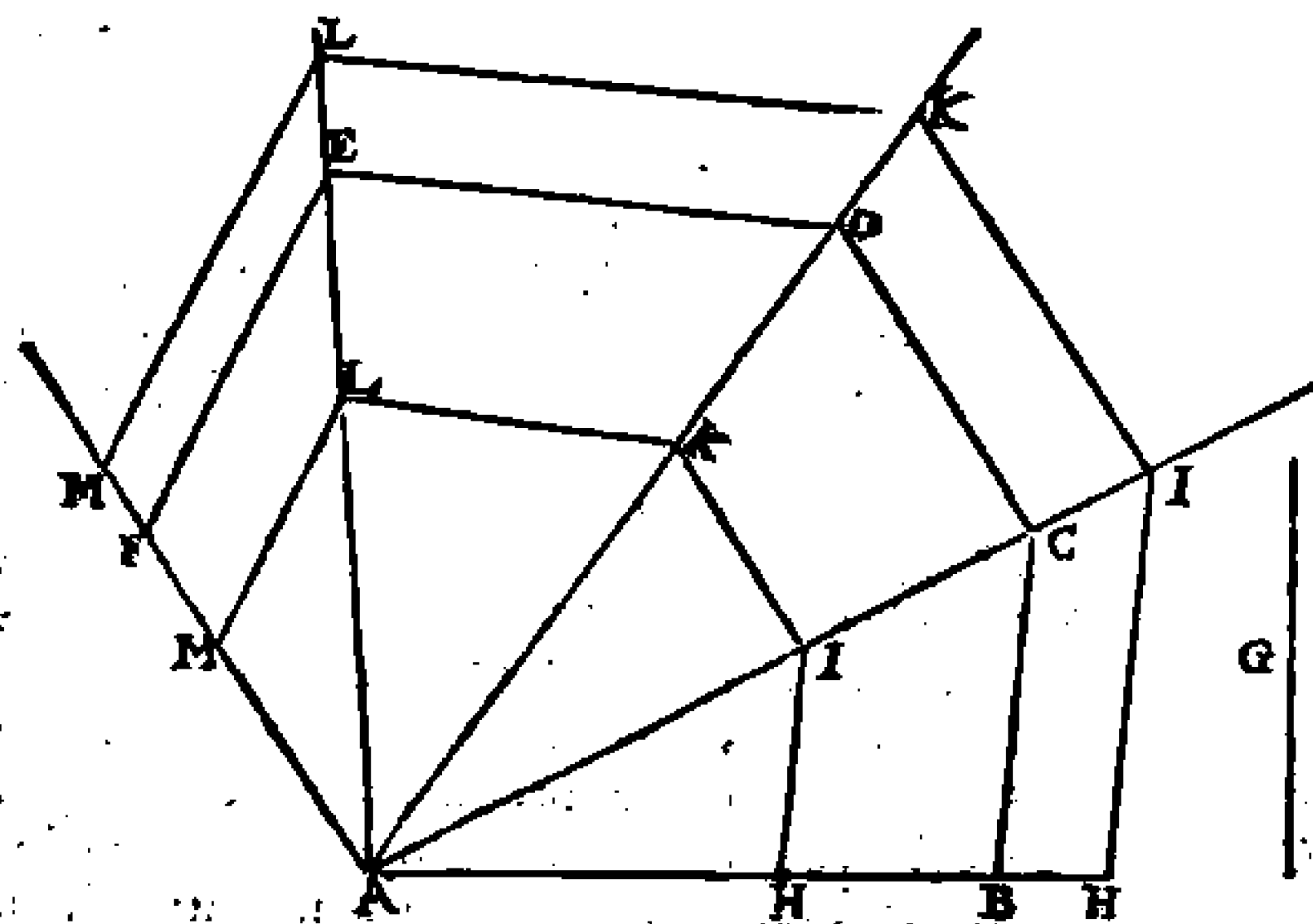


DICUNTUR autem rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia, & similiter posita, quando anguli aequales constituuntur super ipsas rectas lineas, & tam reliqui aequales anguli, quæ latera proportionalia semper ordine sese consequuntur. Vt triangula ABC, DEF, non solum erunt similia, sed etiam super rectas BC, EF, similiter descripta, si anguli BC, æquales fuerint angulis E, F, & ita sit AB, ad BC, ut DE, ad EF, etc. At supra rectas BC, DE, non dicentur similiter esse descripta, (quamvis similia sint,) cum anguli BC, non sint æquales angulis D, E.

Similiter rectangula AC, EG, similia, dicentur similiter esse descripta super rectas DC, HG, quoniam ut AD, ad DC, ita est EH, ad HG, &c. At verò rectangula AC, IG, non dicentur similiter descripta super rectas DC, HG, quamuis sint similia, ut manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas DC, IH, vel super rectas AD, HG.

CÆTERVM omnes figura secundum constructionem huius problematis descripta, sunt necessario similiter posita, ut patet in rectilineis ABHIK, CDEFG, super lineas AB, & CD, descriptis. Item omnes æquilatere figura, & æquiangula, sunt quo-

que posita similiter super qualibet earum latera.



FORTASSIS autem expediri Problema propositum con-
ficiemus ad hunc modum: Sit da-
to rectilineo ABCDEF, super
datam rectam G, vel aliam ei æ-
qualem, describendum simile re-
ctilineum, similiterque positum.
Productis duobus lateribus AB,
AF, circa angulum A, educantur
ex A per omnes alios angulos rectæ
AC, AD, AE, quantilibet. Dein
de ex AB, abscindatur AH, aqua-
lis datæ rectæ G, vel certè ex ipsa
AB, ulterius producta, si forte G,
fuerit maior, quam AB. Post hac

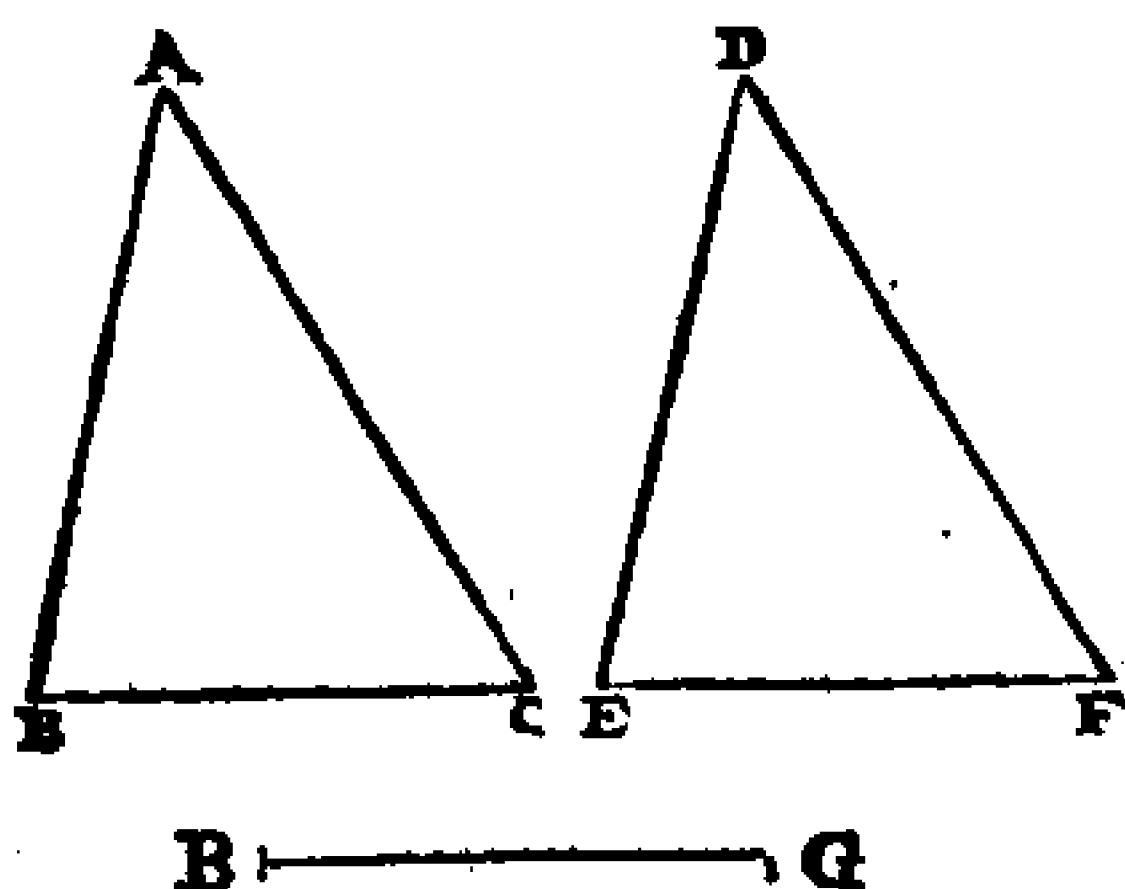
per H, agatur recta HI, lateri BC, parallela, & per I, recta IK, lateri CD, parallela, & sic deinceps, donec om-
nia latera suas habeant parallelas demptis duobus lateribus productis AB, AF: factumque erit, quod proponi-
tur; hoc est, figura AHILKM, super rectam AH, datæ rectæ G, æqualem, similis erit, similiterque posita figura
proposita ABCDEF, super rectam AB, constituta. Cum enim angulus HAM, sit communis, & angulus ABC,
AFE, æquales sint anguli AHI, AML; Item angulus ACB, ACD, æquales sint anguli AIH, AIK, hoc est, toti angulo BCD, æqualis sit angulus totus HIK; Eodemque modo angulus CDE, DEF, æquales sint anguli
IKL, KLM: Aequiangula erunt rectilinea ABCDEF, AHILKM. Sed & latera circum æquales angulos

habent proportionalia. Cum enim triangula AHI, AIK, AKL, ALM similia sint, per coroll. propof. 2. libri, triangulis ABC, ACD, ADE, AEF ; Erit, ² ut AB , ad BC , ita AH , ad HI . Rurſus, ut BC , ad CD , ita HI , ad IA ; Et ut CA , ad CD , ita IA , ad IK : Ac proinde, ex aquo, ut BC , ad CD , ita HI , ad IK . &c. Igaur, ex defin. similia ſunt rectilinea $ABCDEF, AHIKLM$, atq; adeo ſimiliter poſita, per ea, qua proxime hoc ſcholio ſcripſimus.

THEOR. 13. PROPOS. 19.

17.

SIMILIA trianguſa inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.



SINT trianguſa ſimilia ABC, DEF , habentia angulos æquales $B, & E$; Item $C, & F$, &c. Et ſit ut AB , ad BC , ita DE , ad EF , &c. Dico trianguſa inter ſe rationem habere duplicatã eius, quam habet latera homologa $BC, & EF$; vel $AB, & DE$; vel $AC, & DF$: hoc eſt, ſi homologis lateribus BC, EF , inveniatur tertia proportionalis BG , ita eſſe trianguſum ABC , ad trianguſum DEF , ut rectã BC , ad rectã BG : ac proinde cũ ex defin. 10. lib. 5. proportio BC , ad BG , dicatur duplicata proportionis BC , ad EF ; proportionẽ trianguſi ad trianguſum dici quoq; duplicatã proportionis laterum homologorum BC, EF . Ita ut nihil aliud ſit, trianguſa duo, vel duas quilibet figuras ſimiles, ſimili-

terq; poſitas habere proportionẽ duorum laterum homologorũ duplicatã, q̃ ita eſſe trianguſum ad trianguſum, vel figurã ad figurã, ut eſt prima linea ad tertiam, cũ tres lineæ fuerint continuæ proportionales in proportionẽ duorũ laterũ homologorum: quales hĩc ſunt tres lineæ rectæ BC, EF, BG , continuæ proportionales in proportionẽ homologorum laterum BC, EF . Sint ergo primũ latera BC, EF , æqualia, ac proinde & tertia proportionalis BG , illis æqualis: ita ut, pportio BC , ad BG , quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC , ad latus EF , ſit proportio æqualitatis.

Quoniam igitur trianguſa ABC, DEF , habent quoq; proportionem æqualitatis, ⁴ q̃ ipſa inter ſe æqualia ſint, ob angulos B, C , angulis E, F , æquales, & æqualitatẽ laterũ BC, EF , quibus adiacent: erit trianguſum ad trianguſum, ut rectã BC , ad rectã BG . Cũ ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF , dicetur quoque proportio trianguſi ABC , ad trianguſum DEF , proportionis, quam latus BC , ad latus EF , habet, duplicata. Quod etiã hĩc conſtare poteſt. Quoniam, ut dictũ eſt, trianguſa ABC, DEF , æqualia ſunt, hoc eſt, proportionem æqualitatis habent, ſicut & latera homologa BC, EF : Proportio autem æqualitatis duplicata ſoldũ efficit proportionem æqualitatis: (Poſitis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatã proportionis, quã habet prima ad ſecundã, ut conſtat ex defin. 10. lib. 5. cũ tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, ſicuti & prima ad ſecundã,) habebit trianguſum ABC , ad trianguſum DEF , proportionem duplicatã eius, quam habet latus BC , ad latus EF . Quod eſt propoſitum.

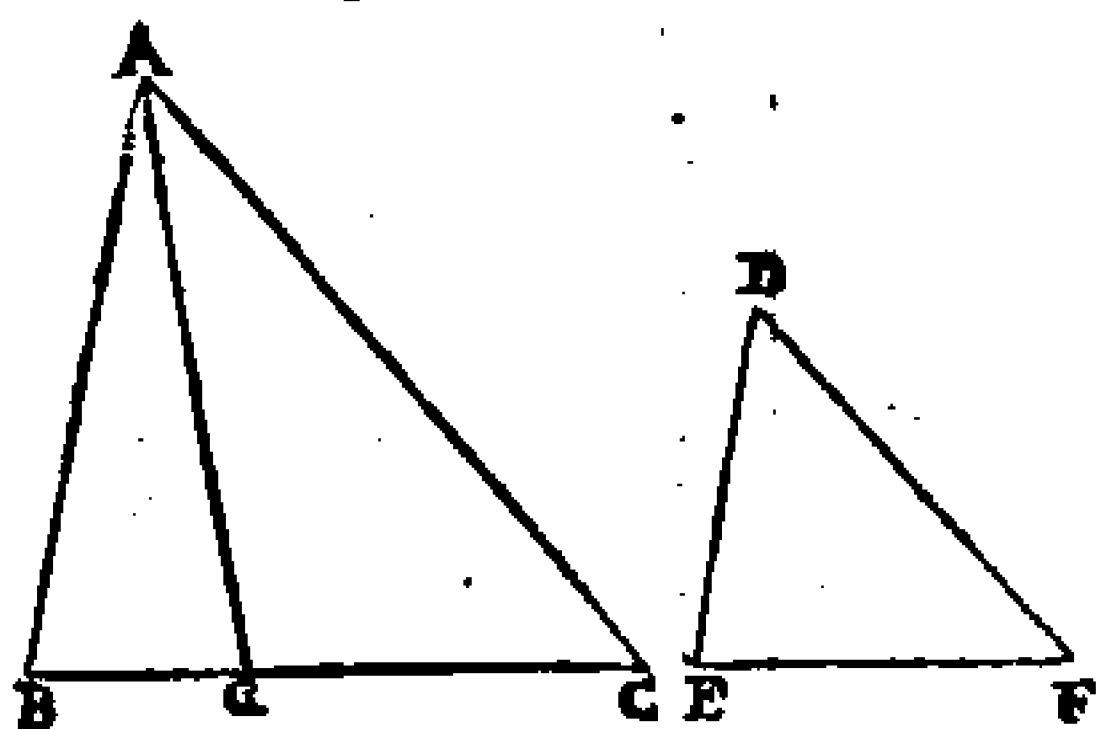
b 11. ſexti.

c 11. quinti.

d 15. ſexti.

e 7. quinti.

f 1. ſexti.

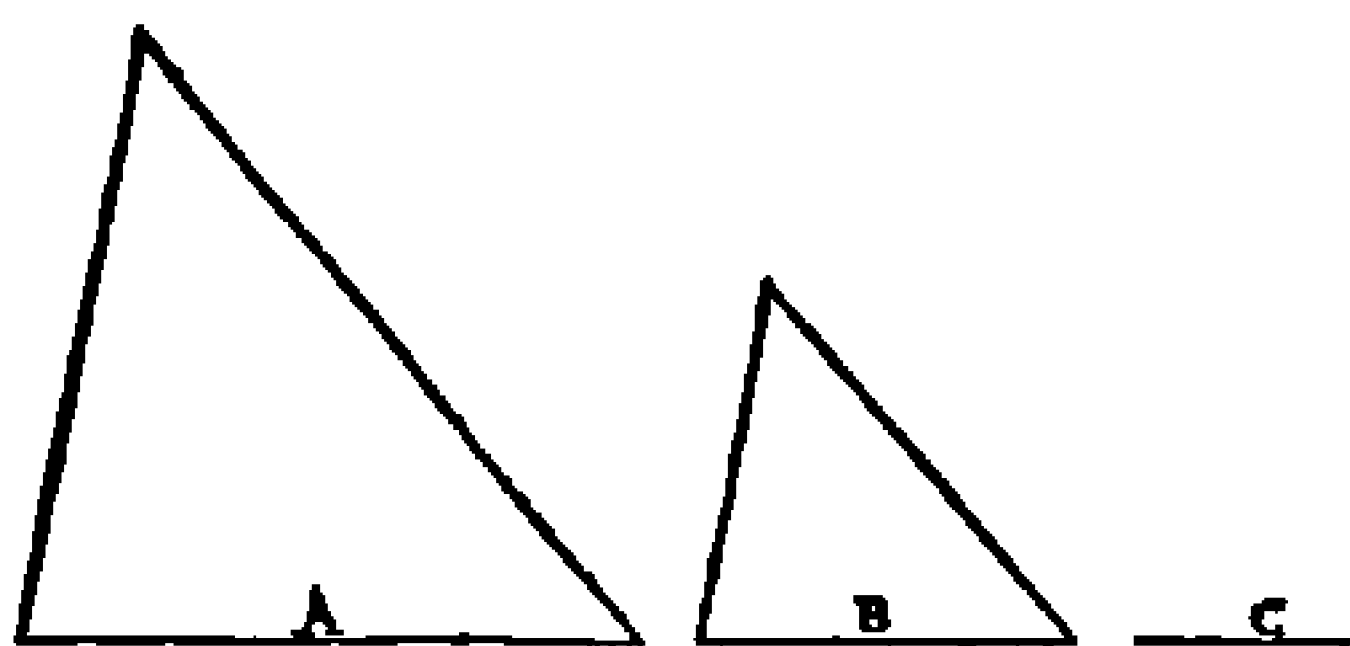


ABC , ad trianguſũ ABG , eiũdẽ altitudinis, ſi ita eſt baſis BC , ad baſin BG . Igitur ut trianguſum ABC , ad trianguſum DEF , ita eſt BC , ad BG . Atqui cũ tres lineæ BC, EF, BG , ſint continuæ proportionales, proportio primæ BC , ad tertiã BG , duplicata dicitur proportionis BC , primæ ad EF , ſecundã. Igitur & trianguſũ ABG , ad trianguſũ DEF , pportionẽ habet duplicatã proportionis lateris BC , ad latus EF . Similia igitur trianguſa inter ſe ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM

Hĩc manifestum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut eſt prima ad tertiam, ita eſſe trianguſũ ſuper primã deſcriptũ ad trianguſũ ſuper ſecundã ſimile ſimiliterq; deſcriptũ.

SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C ; & ſuper primã A , & ſecundã B , conſtituta trianguſa A , & B , ſimilia, ſimiliterq; deſcripta. Dico, ut eſt rectã A , primã ad rectã C , tertiã, ita eſſe trianguſum A , ad trianguſum B . Nam proportio rectæ A , ad rectã C , eſt, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A , ad

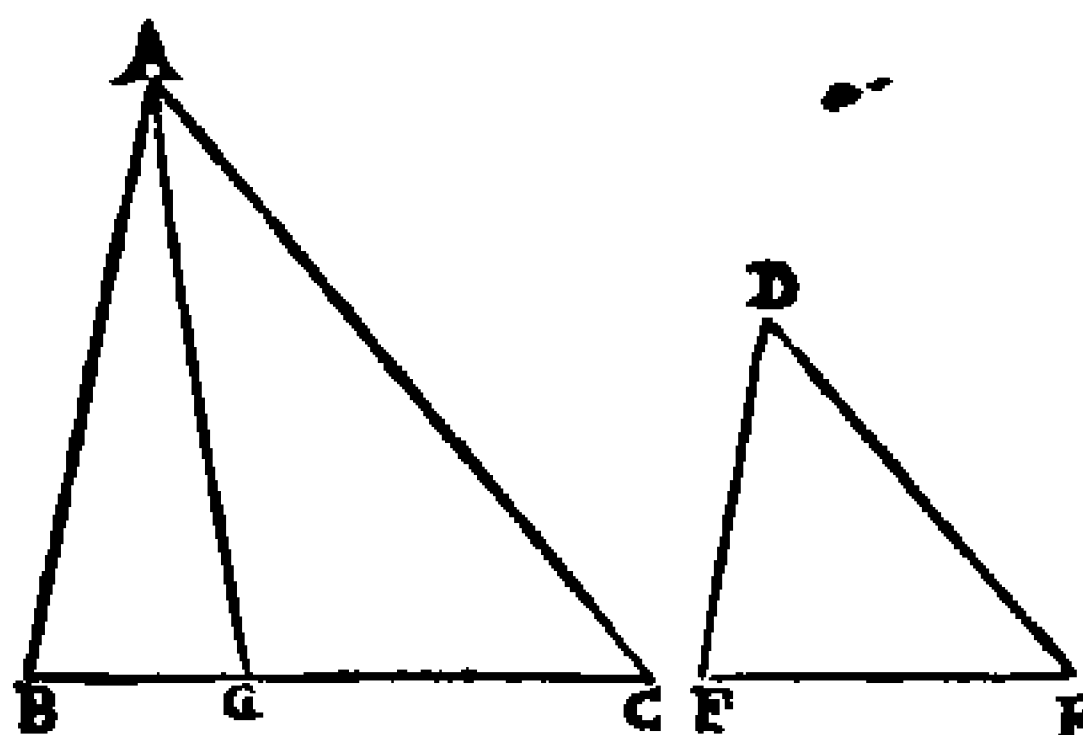


ad rectam B. ^a Cum igitur triangulum A, ad ^a 19. sexti. triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam recte A, ad rectam B, erit ut recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.

Eodem modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiam simile similiterque descriptum, ut est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A,

tertiam constituentur triacula similia similiterque posita B, & A. Dico, ut est recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C ad A, duplicata, est proportio C, ad B, hoc est, recta B, ad rectam A. ^b Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam recte B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa; Erit ut C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A. ^b 19. sexti.

S C H O L I V M.



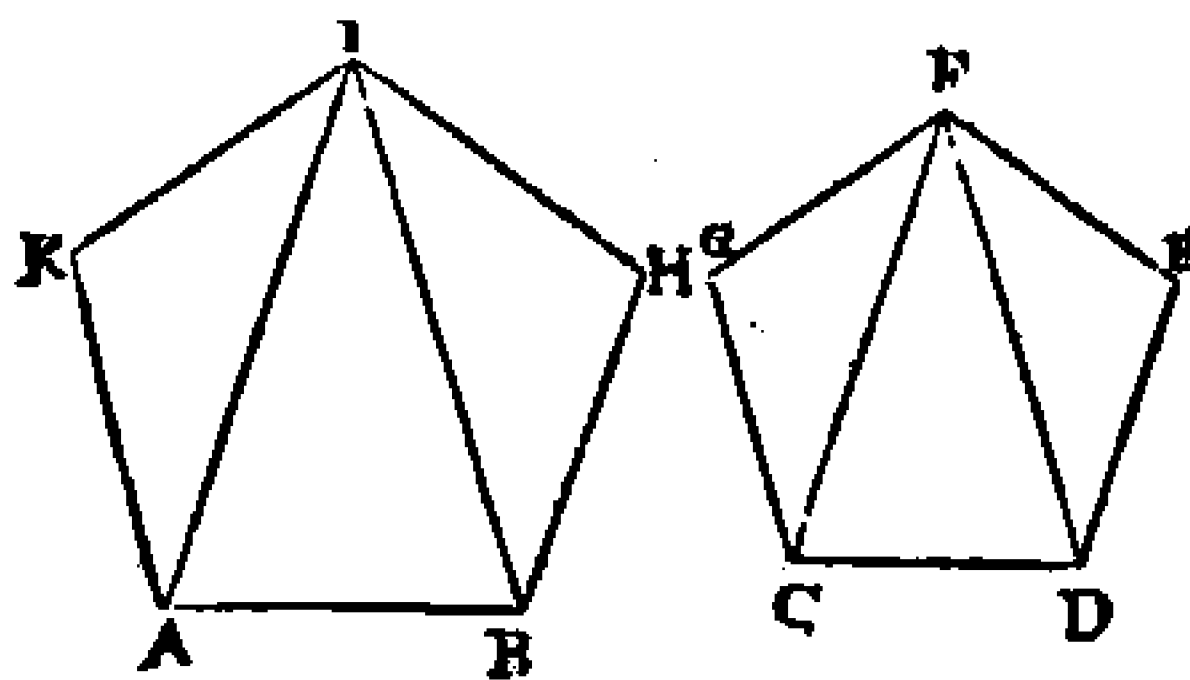
Itaque si proportio lateris BC, ad latus EF, nota sit in numero, nimirum ut 6. ad 5. cognoscemus quoque ex hac propos. in numero, quam proportionem habeat triangulum ABC ad triangulum DEF. Si enim proportio 6. ad 5. continetur in tribus numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulum ad triangulum, ut 36. ad 25. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{1}{5}$. Quia enim proportio 36. ad 25. est duplicata proportionis 36. ad 30. sine 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem & triacula proportionem laterum homologorum duplicatam, ut hoc theoremate ostensum est: erit triangulum ad triangulum, ut 36. ad 25. Eandem proportionem triangulorum cognoscemus. si denominatorem proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{5}$, in se multiplicemus. Productus enim numerus $\frac{3}{5}$, id est, $1\frac{1}{5}$, erit denominator proportionis, qua duplicata est proportio laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quod habet etiam duplicata sit eiusdem proportionis laterum.

Si etiam, si latera homologa haberent proportionem, quam 10. ad 1. haberent triacula proportionem, quam 100. ad 1. cum hac illius sit duplicata, ut hic apparet, 100. 10. 1. vel etiam quia denominator decupla proportionis, id est, 10. in se multiplicatus gignit 100. denominatorem proportionis, qua decupla duplicata est.

THEOR. 14. PROPOS. 20.

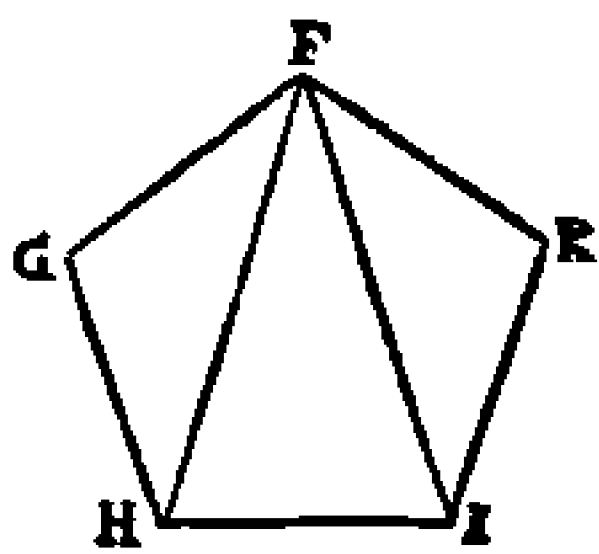
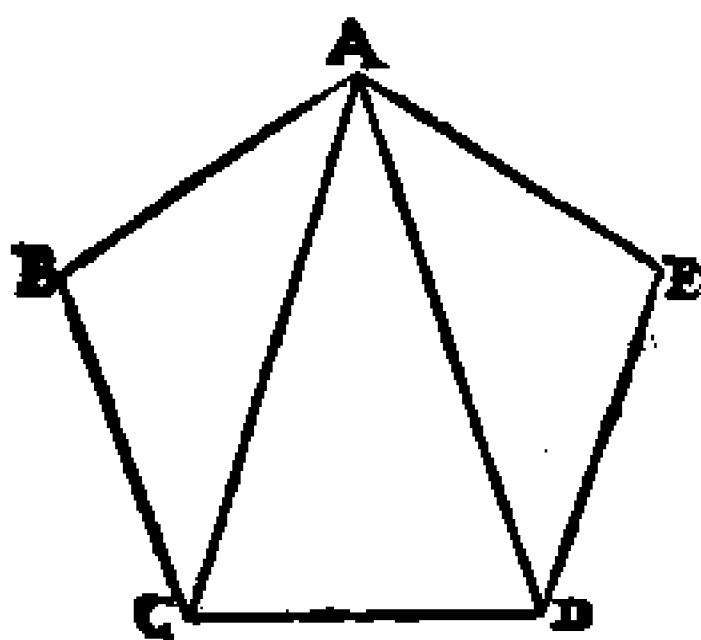
18.

SIMILIA polygono in similia triacula diuiduntur, & numero æqualia & homologa totis: Et polygona duplicata habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



SINT polygona similia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK: Item angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales: ut quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH: & ut BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona diuidi in triacula similia, quæ sunt numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint AC, AD, FH, FI: diuisaque erunt polygona in triacula numero æqualia. Quoniam verò

angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia, æquiangularia ^a 6. sexti. erunt triacula ABC, FGH, habentia angulos BAC, GFH, æquales: Item angulos ACB, FHG, lateribus homologis oppositos: Ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia: ac ^b 4. sexti. propterea inter se similia erunt: Eadem ratione erunt similia triacula AED, FKI, habentia angulos EAD, KFI, & angulos ADE, FIK, æquales. Deinde quia est ut AC, ad CB, ita FH, ad HG, ^c 4. sexti. ob similitudinem triangulorum ABC, FGH, ut autem CB, ad CD, ita est, ex hypothesi, HG, ad HI, ob similitudinem polygonorum: ^d erit ex æquo ut AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI: est autem & ablatum ACB, ostensus æqualis ablato FHG: erit & reliquum ACD, reliquo FHI, æqualis. Quare triacula ACD, FHI, cum habeant ^e 6. sexti.



e19. sexti.

e12. quinti.

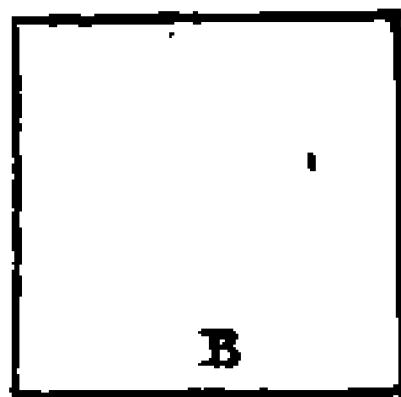
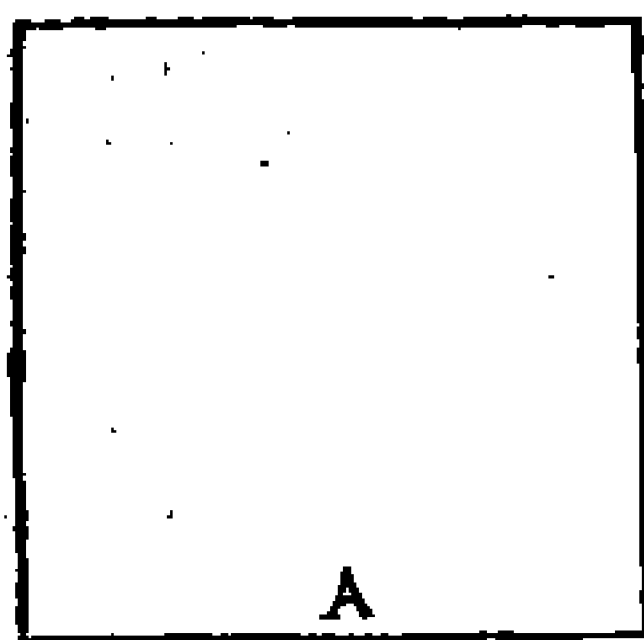
e19. sexti.

latera, circa æquales angulos ACD, FHI , proportionalia, æquiangula erunt, ideoq; similia. Eademq; ratio est de aliis omnibus triangulis, si plura fuerint. Dico præterea triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in vno polygono, ad suū correspondens triangulum in altero polygono, ut polygonū ad polygonū. Quoniam enim similia sunt triangula ABC, FGH ; erit eorū proportio duplicata proportionis homologorū laterum

AC, FH . Atq; eodē argumento proportio triangulorū ACD, FHI , duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC, FH . Quare ut triangulum ABC , ad triangulum FGH , ita erit triangulum ACD , ad triangulum FHI , cum vtrique hæc proportio triangulorum sit duplicata eiusdem proportionis lateris AC , ad latus FH . Neque dissimili ratione concludetur quodque esse triangulum ADE , ad triangulum FIK , ut ACD , ad FHI : Atq; ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita ut triangula vnius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Ut autem vnum antecedens ad vnum consequens, ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur ut quodlibet triangulum vnius polygoni ad sibi respondēt triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoq; triangula homologa erunt totis polygonis.

Dico postremò, polygonæ inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa: hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG , inueniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum $ABCDE$, ad polygonū $FGHIK$, ut est prima linea AB , ad tertiam inuentam: ac proinde, cum proportio AB , ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB , ad FG ; dici quoque proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG . Cum enim sit, ut triangulum ABC , ad triangulum FGH , ita polygonum $ABCDE$, ad polygonum $FGHIK$; Triangulum verò ABC , ad triangulum FGH , habet proportionem duplicatam eius, quā habent latera homologa AB, FG , hoc est, eandem quam habet AB , ad illam tertiam inuentam; habebunt quoque polygonæ inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG , hoc est, eandem, quam habet AB , ad illam tertiam inuentam. Itaq; similia polygonæ in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.



C

Hinc manifestum est, si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, ut est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile, similiterq; descriptū: Vel ita esse polygonum super secundam descriptum ad polygonum super tertiam simile similiterq; descriptum.

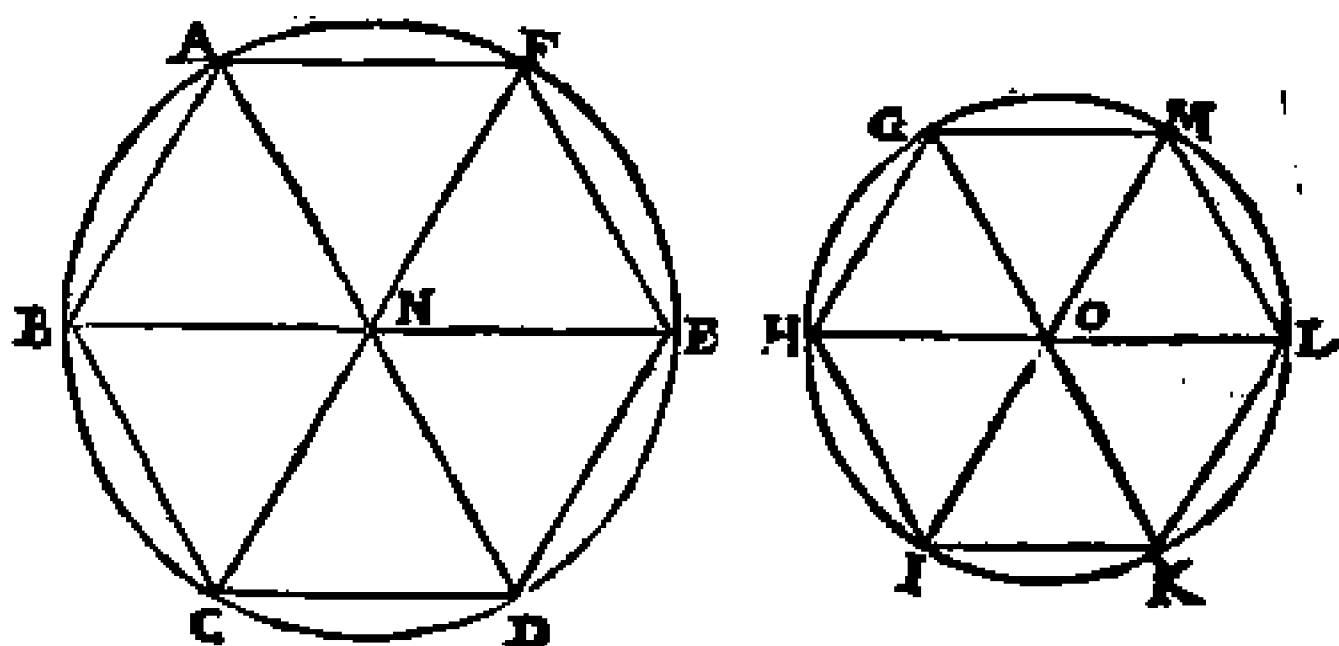
Hoc nō aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quàm ostensum fuit corollarium precedentis theoremati ex suo theoremate: Ut perspicuum est in hac figura apposita.

SCHOLIUM.

Quando polygonæ similia sunt pentagona, ut in figura, demonstrabitur etiam hoc modo triangula media ACD, FHI , similia esse. Quoniam anguli ACB, FHG , æquales sunt, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH ; si auferantur ex angulis BCD, GHI , qui æquales etiam sunt, ob similitudinem polygonorum: æquales erunt & reliqui anguli ACD, FHI . Eademq; ratione æquales ostendentur anguli ADC, FIK : ac propterea, & reliqui CAD, HFI , æquales erunt. Igitur cum æquiangula sint triangula ACD, FHI , habebunt latera circa angulos æquales proportionalia, ac proinde similia erunt.

At verò quando polygonæ habent plures angulos, demonstrandum est, triangula media similia esse, ex æqualitate, & propof. 6. huius lib. ut in propositione factum est: quia nō possunt probari anguli æquales, præter vnum, qui videlicet prope præcedens triangulum simile existit, qualis est angulus ACD & FHI . Nam angulus ADC , ostendi non potest æqualis angulo FIK ; q; tunc alia adhuc triangula supersint vsq; ad triangula similia AED, FKI , &c. Hoc idē dixerim, ne quis existimet, frustra in propof. nos dixisse, ita esse AC , ad CB , ut FH , ad HG : Et ita CB , ad CD , ut HG , ad HI ; ac proinde ex æqualitate ita AC , ad CD , ut FH , ad HI ; ideoq; cum anguli ACD, FHI , sint æquales, similia esse triangula ACD, FHI . Hæc enim demonstratio est omnino necessaria, conuenitq; omnibus polygonis quocunq; angulorū, cum omnia triangula media eo modo ostendantur

ostendantur esse similia, ut perspicuum est. Nam si triangula ADE, FIK , non essent vltima, demonstrarentur similia hoc modo: Quoniam est ut AD , ad DC , ita FI , ad IK , ob similitudinem triangulorum ACD, FHI : Item ut DC , ad DE , ita IK , ad KL , ob similitudinem polygonorum; erit ex aquo, ut AD , ad DE , ita FI , ad IK . Et quia angulus CDE , equalis ponitur angulo HIK : Est autem & ablatum ADC , ostensus ablato FHI , equalis; erit & reliquus ADE , reliquo FIK , equalis. ^a Quare triangula ADE, FIK , similia erunt; cum habeant latera circa aequales angulos ADE, FIK , proportionalia. Atque ita deinceps, si fuerint plura triangula. 26. sexti.

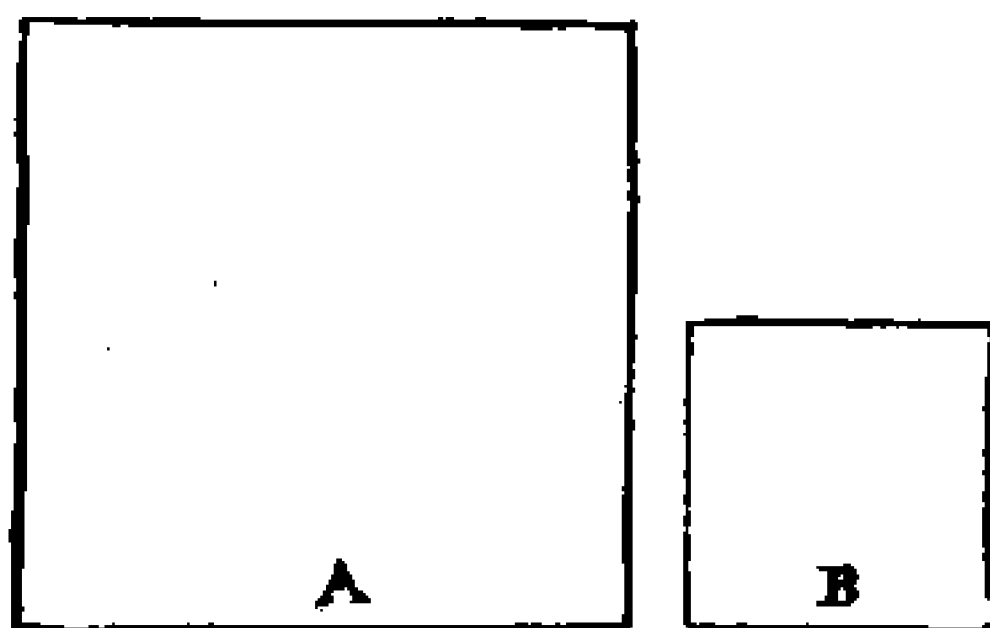


Quod si polygona similia, fuerint equilatera & equiangula, diuidentur quoque in similia triangula, & numero equalia, & homologa totis; ductis e centro circularum ipsa circumscripturum ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, equilatera, & equiangula $ABCDEF, GHIKLM$, qua circumscribantur a circulis circa centra N, O , ex quibus recte ducantur NA, NB , &c. Dico triangula NCD, OIK , similia esse, & homologa totis polygonis.

Quonia enim anguli CND, IOK , aequales sunt, (quod aequè submultiplices sint quatuor rectorum. Nam utrumque spatium N, O , quatuor rectis aequiualens, ex corollario 2. proposit. 15. libri 1. diuiditur in angulos & numero, & magnitudine aequales. Cum enim anguli in centro N , insistant aequalibus arcibus, ipsi inter se aequales erunt: eademque ratione anguli in centro O , aequales erunt.) Sunt autem & latera circumscriptos proportionalia, cum utrobique sit proportio equalitatis: ^b Similia erunt triangula NCD, OIK . Eademque est ratio de ceteris. At verò hac triangula esse homologa totis polygonis, nullo negotio demonstrabitur. Cum enim tota polygona sint ipsorum triangulorum aequè multiplicia, ut patet; ^c habebunt utique eandem cum ipsis proportionem. b 27. tertij. c 6. sexti.

Porro ex hoc theoremate perspicue demonstrabimus theorema illud, quod iam aliter in scholio propositionis 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum:

Si linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratū illius quadruplum erit quadrati huius: Et contrà, si quadratū quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.



Si T primum recta A , dupla rectæ B . Dico quadratum A , quadruplum esse quadrati B . Cum enim omnia quadrata sint similia, ut constat ex defin. 1. huius lib. erit, per hanc propositionem, proportio quadrati A , ad quadratum B , duplicata proportionis laterum homologorum A, B ; quæ cum inter se proportionem habeant duplam, erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est dupla proportionis, ut hic apparet. 1 2. 4.

Si T deinde quadratum A , quadruplum quadrati B . Dico latus A , duplum esse lateris B . Cum enim proportio qua-

dratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, ut dictum est, habebunt latera homologa A, B proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis dupla, ut in exemplo adducto superius apparet.

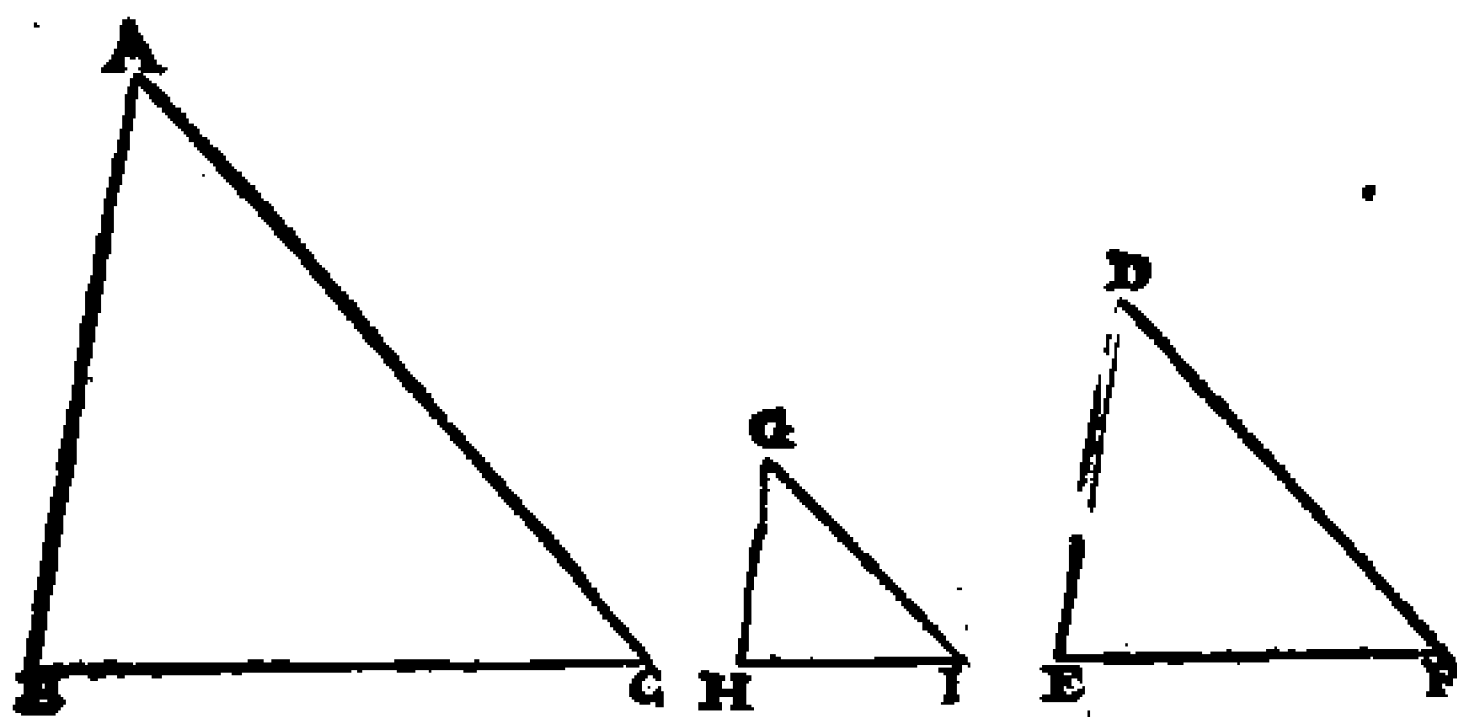
Itaque si proportio laterum A, B , ad latus FG , in polygonis, quæ in propof. descripsimus, nata sit in numeris, nimirum ut 5. ad 4. cognoscemus quoque ex hac propof. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum $ABCDE$, ad polygonum $FGHIK$. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, ut 25. ad 16. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est 16. Quia enim proportio 25. ad 16. est duplicata proportionis 25. ad 20. siue 5. ad 4. quam homologa latera AB, FG , ponuntur habere; demonstratumque est hoc theoremate, polygonum quoque habere duplicatam proportionem eius, quæ latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, ut 25. ad 16. Idem de denominator proportionis polygonorum cognoscetur, si denominator proportionis laterum homologorum, nimirum 20. in se multiplicetur. Productus enim numerus 20. id est, 400. erit denominator proportionis, quæ duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex his, quæ in defin. 10. lib. 5. scripsimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum; cum hac sit etiam duplicata eiusdem proportionis laterum homologorum.

Si c etiam, si latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygonum proportionem centuplam; cum hac illius sit duplicata, ut hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator 10. proportionis decupla in se multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centupla, quæ decupla duplicata dicitur.

THEOR. 15. PROPOS. 21.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

a 1. prop.



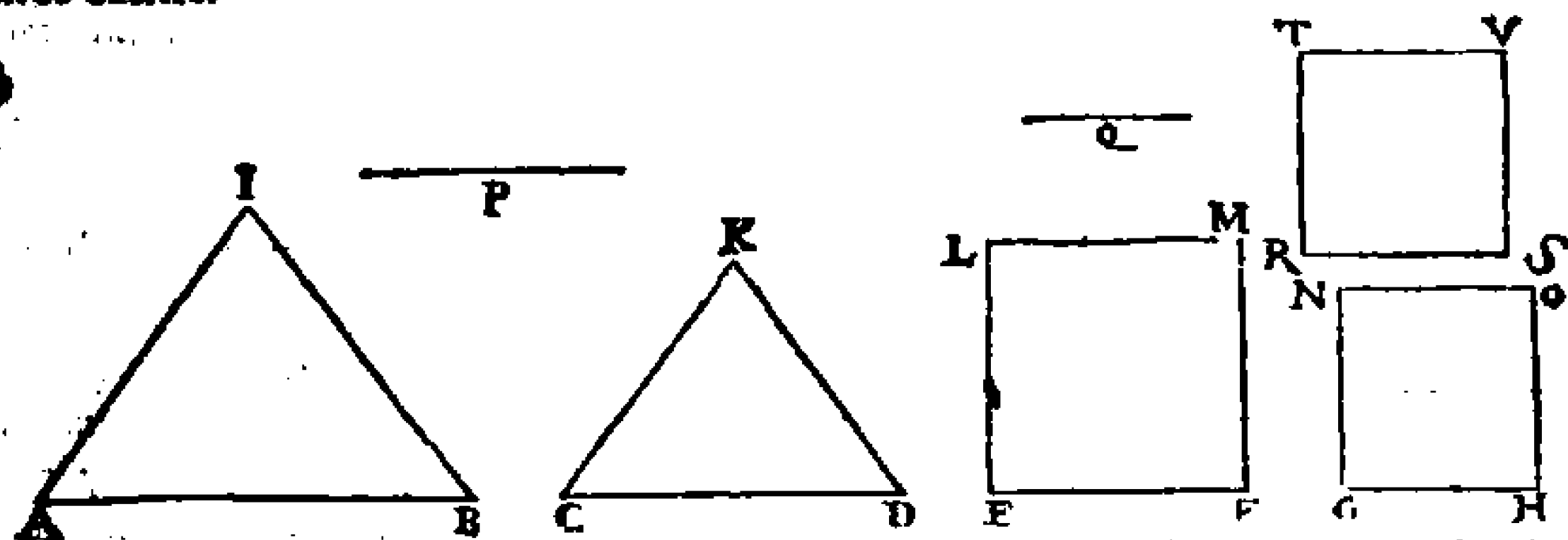
b 11. quinti.

Rectilinei ABC, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet iis, quæ circum æquales sunt angulos: Item eandem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei GHI: ^b erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum iis, quæ angulos ambiunt æquales. Atq; adeo per definitionem, similia existēt rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

21.

THEOR. 16. PROPOS. 22.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint; ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.



e 11. sexti.

d 12. quinti.

e 11. quinti.

Sint primū quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, ut quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH: Constituanturque super AB, CD, duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta ABLCDK: Item super EF, GH, alia duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta, EFMLGHON. Dico, & hæc rectilinea esse proportionalia, ut quidem ABL, ad CDK, ita EM, ad GO. ^e Inveniatnr enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. ^d eritque ex æquo, ut AB, ad P, ita EF, ad Q: Ut autem AB, ad P, ita est rectilineum ABL, ad rectilineum CDK, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius libri. vel si fuerint triangula, ex corollario propositionis 19. Et eadem ratione ut EF, ad Q, ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. ^e Igitur ut ABL, ad CDK, ita erit EM, ad GO. Quod est propositum.

f 12. sexti.

g 21. sexti.

h 11. quinti.

i 9. quinti.

k 7. quinti.

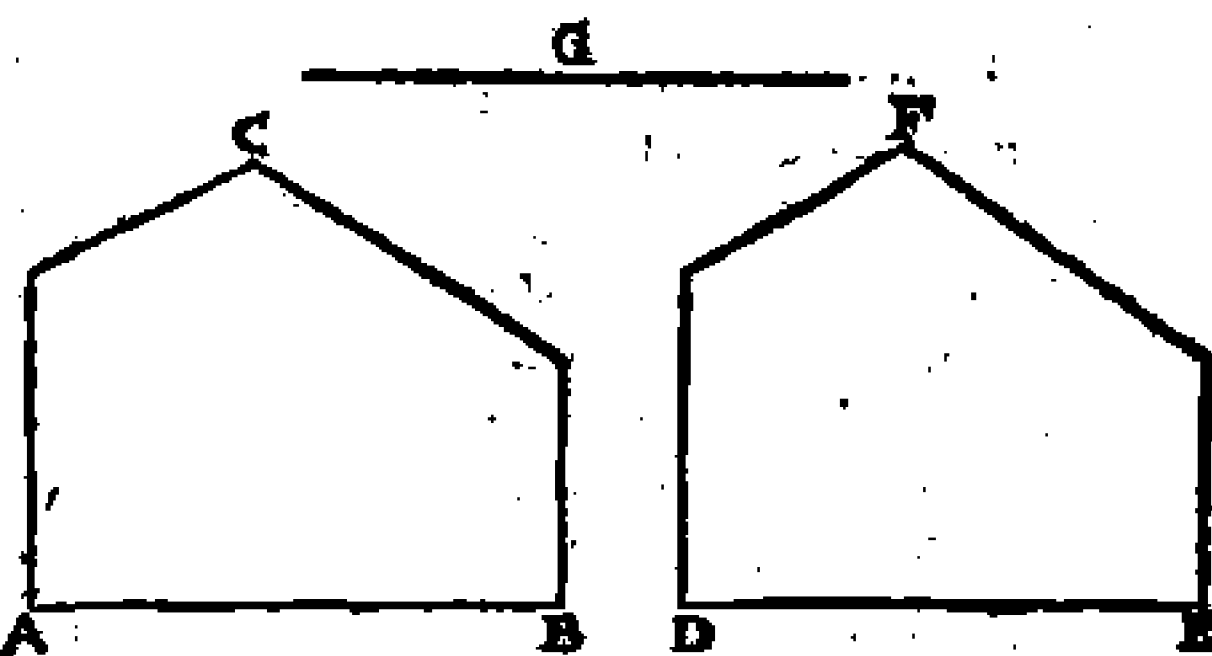
l 11. quinti.

Deinde sint ABLCDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, esse quoque proportionales, ut quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH. ^f Inveniatnr enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quâ describatur rectilineum RSVT, simile rectilineo EM, similiterque positum; ^g & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, ut AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque, ut iam est ostensum, ut ABL, ad CDK, ita EM, ad RV. Ut autem ABL, ad CDK, ita quoque ponitur EM, ad GO. ^h Igitur erit ut EM, ad RV, ita EM, ad GO. ⁱ Atque idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cum sint similia similiterque posita, consistent necessario, ut mox ostendemus, super rectas RS, GH, æquales. ^k Quare erit, ut EF, ad RS, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, ut AB, ad CD. ^l Igitur erit quoque ut AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

L E M M A.

^m Quod autem equalia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV, consistunt super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt GH, RS; sit GH, maior. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit ut GH, ad HO, ita RS, ad SV; Ponatur autem GH, maior quam RS; ⁿ erit quoque HO, maior quam SV; & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cum hoc intra ipsum possit consistere; quod est absurdum, cum sit contra hypothesein. Non ergo inæquales sunt rectæ GH, RS. Quod est propositum.

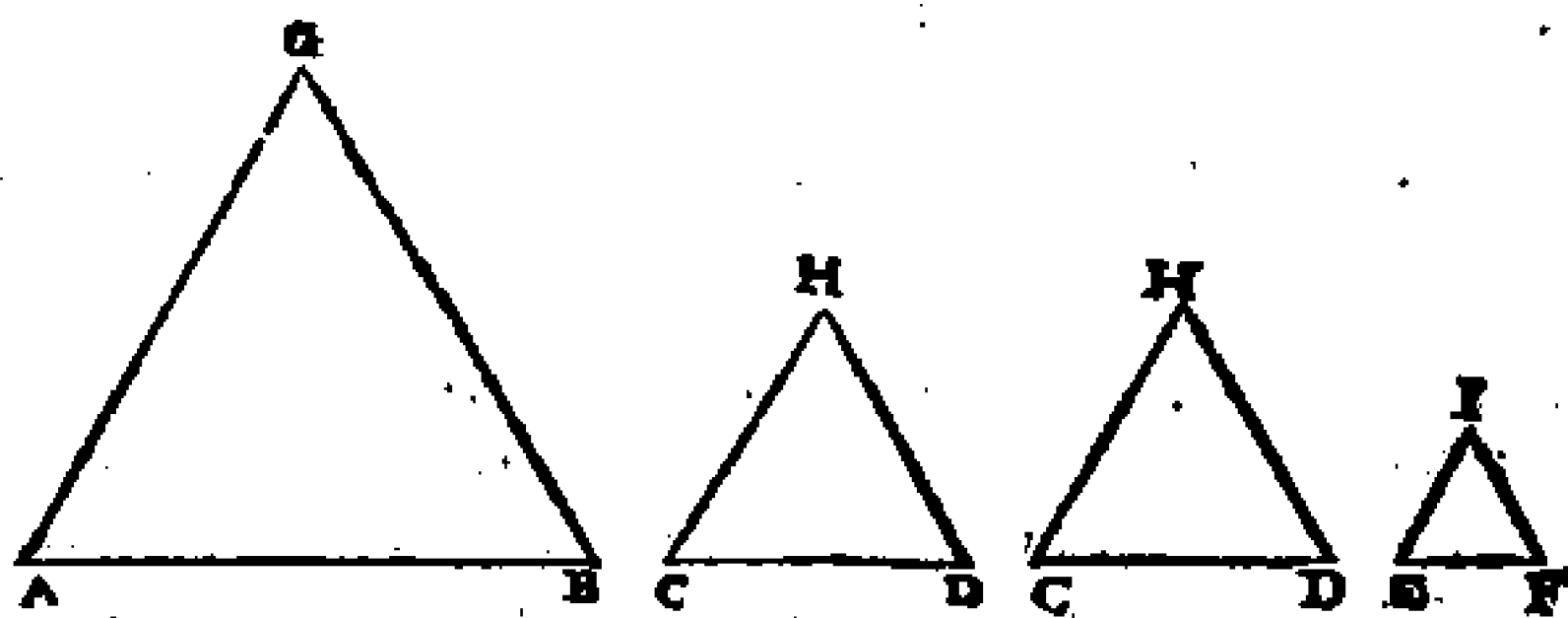
ALITER.



ALITER. Sint duo triangula ABC , DEF , equalia, & similia similiterq. posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt recta AB , DE , esse equalia. Si enim nō credantur equalia, sit AB maior, quā DE ; inueniaturq. rectis AB , DE , tertia proportionalis G . Quoniā ergo est, ut AB , ad DE , ita DE , ad G ; Est autē AB , maior, quā DE ; Erit quoq. DE , maior, quā G ; ac propterea

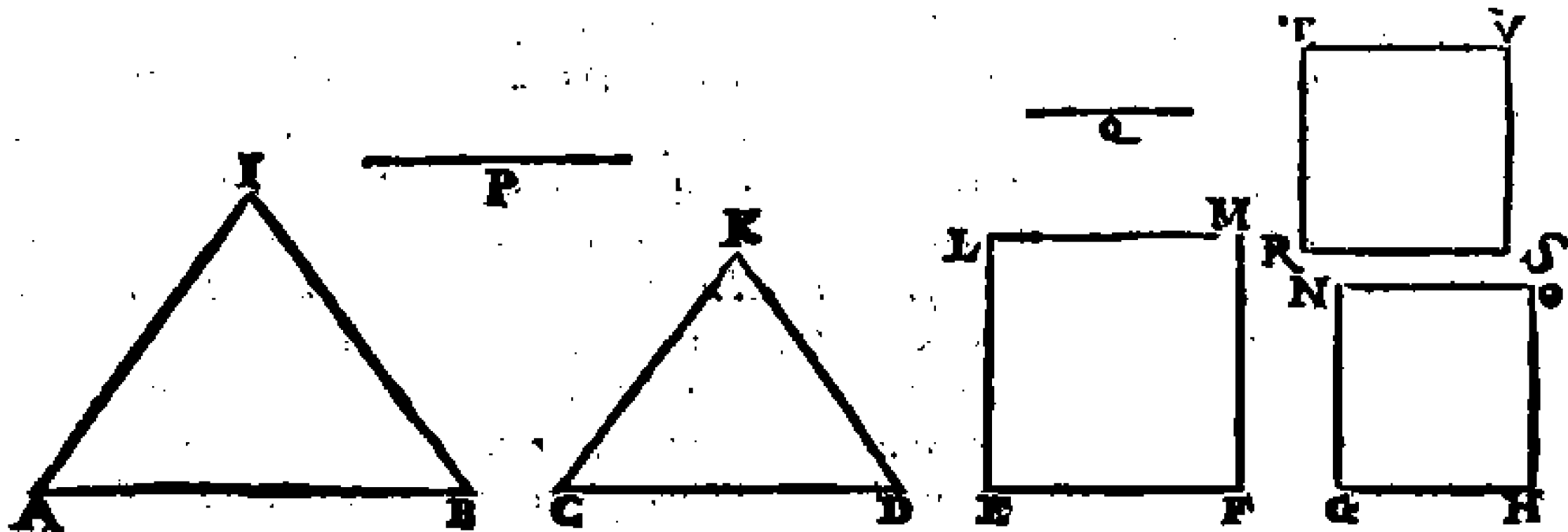
multo maior AB , quā G . Vt verō AB , ad G , ita est rectilineū ABC , ad rectilineum DEF , per corollarium propositionis 19. vel 20. huius libri. Igitur cum AB , maior sit, quā G ; erit quoque rectilineum ABC , maius rectilineo DEF : quod est absurdum, cum positum sit aequale. Non ergo maior est AB , recta, quā recta DE . Sed neque minor erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC , minus ostenderetur rectilineo DEF : quod est contra hypothesin. Quare equalia sunt recta AB , DE .

SCHOLIUM.



da est descriptum, aequale sit ei, quod a tertia, immo idem: manifestum est quod proponitur.

Eodem modo, si fuerint tres recte proportionales; erunt & rectilinea similia similiterq. descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, cuius rectilineum bis, habebuntur quatuor recte proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, ut hic Euclides demonstrat. Cum igitur id, quod a secunda



BREVIVS tota hac propositio demonstrabitur, hoc modo: Ponatur primum esse ut AB , ad CD , ita EF , ad GH . Dico esse quoq. ut AB , ad CD , ita EF , ad GH . Cum enim sit proportio rectilinei AB , ad CD , duplicata proportionis AB , ad CD ; Item proportio rectilinei EM , ad rectilineum GO , duplicata proportionis EF , ad GH ; erunt proportionēs AB , ad CD ; & EM , ad GO , equalēs, quandoquidem duplicatae sunt proportionum equalium AB , ad CD ; & EF , ad GH . Quod est primum.

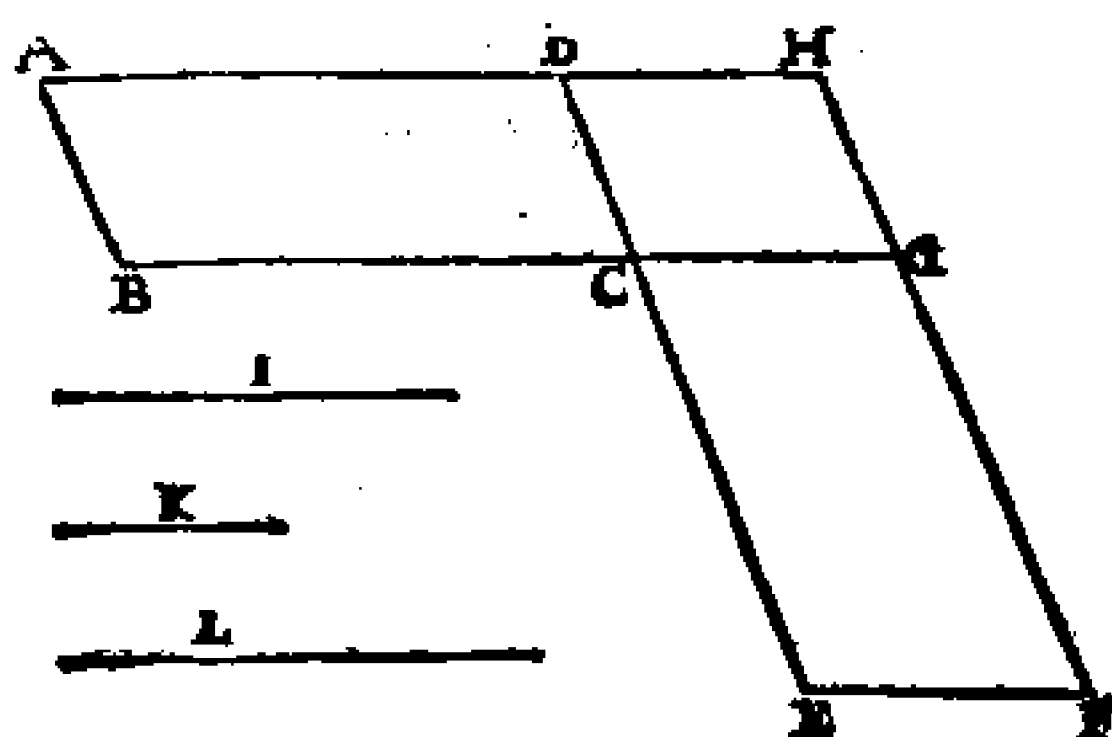
Ponatur deinde esse, ut AB , ad CD , ita EF , ad GH . Dico esse quoque, ut AB , ad CD , ita EF , ad GH . Cum enim sit proportio AB , ad CD , duplicata proportionis AB , ad CD ; Item proportio EM , ad GO , duplicata proportionis EF , ad GH ; erunt proportionēs AB , ad CD ; & EF , ad GH , equalēs: quandoquidem earum proportionēs duplicatae AB , ad CD ; & EM , ad GO , equalēs ponuntur. Quod est secundum.

THEOR. 17. PROPOS. 23.

24.

AEQVIANGULA parallelogramma inter se rationem habent eam, quae ex lateribus componitur.

Sint parallelogramma aequiangula AC , CE , habentia angulos BCD , ECG , aequales. Dico proportionem eorū esse compositā ex duabus proportionibus, quas habet duo latera vnius circa angulum aequale, ad duo latera alterius circa angulū aequale, ita ut antecedentia proportionū sint in vno parallelogrammo, & consequentia in altero: hoc est, proportionē AC , parallelogrammi ad parallelogrammum CE , compositam esse ex proportionibus rectae BC , ad CG , rectam, & rectae DC , ad rectam CE : Vel etiam ex proportionibus rectae BC , ad rectam CE , & rectae DC , ad rectam CG .



Id est, si sumantur tres lineæ I, K, L, ita ut I, ad K, sit, sicut B C, ad latus C G; & K, ad L, ut latus D C, ad latus C E; ita esse parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, ut est recta I, ad rectam L: ac proinde cum ex definitione 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F, dici compositam esse ex eisdem proportionibus, hoc est, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita

ut B C, C G, efficiant vnam lineam rectam: Quo posito, cum anguli B C D, E C G, sint æquales, erunt & D C, C E, vna recta linea, ut ad propositionem 15. libri 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur deinde A D, F G, donec conueniant in H: Sumptaque recta I, quacunque, inueniatur tribus B C, C G, & I, quarta proportionalis K: Item tribus D C, C E, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur est, ut B C, ad C G, ita A C, ad C H. Ut autem B C, ad C G, ita posita est I, ad K: erit quoque ut A C, ad C H, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, ut H C, ad C F, ita K, ad L. Nam ut D C, ad C E, ita est H C, ad C F. Cum ergo posita sit K, ad L, ut D C, ad C E, erit quoque H C, ad C F, ut K, ad L. Ex æquo igitur erit, ut A C, ad C F, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus B C, ad C G; & D C, ad C E. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoque proportio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F. Eademque ratione ostendemus, proportionem A C, ad C F, componi ex proportionibus B C, ad C E, & D C, ad C G; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, ut B C, C E, efficiant vnam rectam lineam, &c. Equiangula itaque parallelogramma inter se rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I V M.

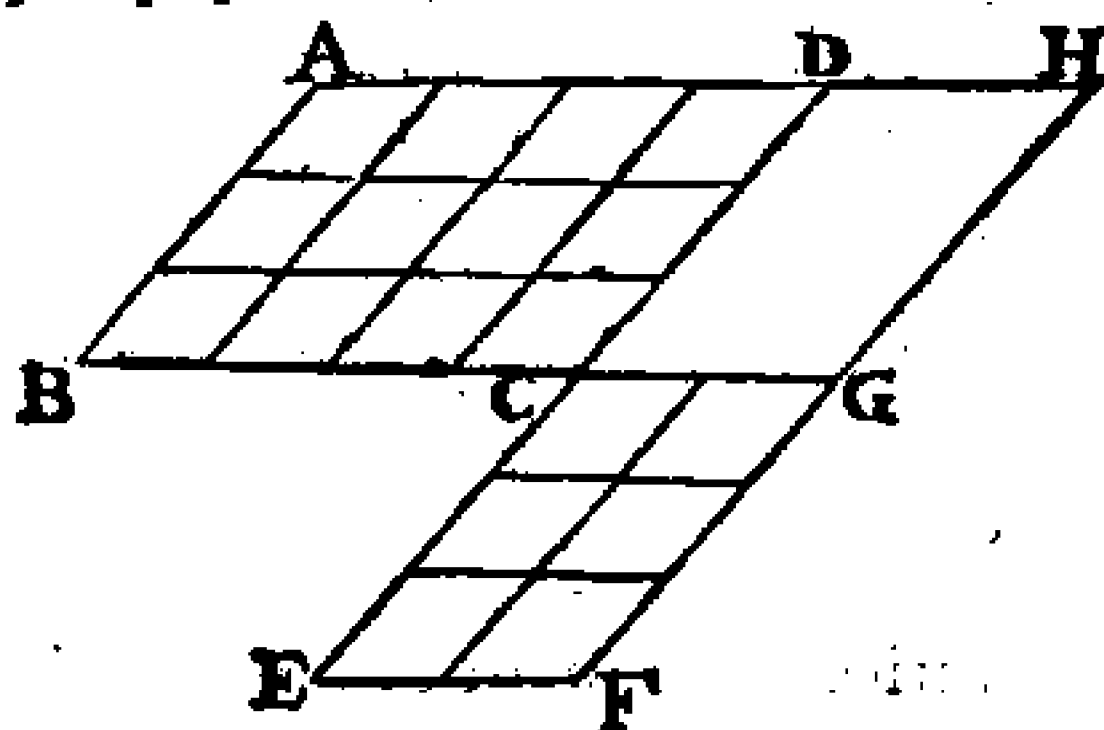
a 12. sexti.

EXPEDITIV s idem demonstrabitur, hoc modo: Coniunctis parallelogrammis, ut prius; Cum sit ut A C, ad C H, ita B C, ad C G: & ut C H, ad C F, ita D C, ad C E: Proportio autem A C, ad C F, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus A C, ad C H, & C H, ad C F; componetur quoque eadem proportio A C, ad C F, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E, quæ illis intermedijs sunt æquales. Quod est propositum.

HANC porro propos. demonstrat etiam Euclides in numeris lib. 8. propos. 5.

b 13. sexti.

ITAEQUE si proportionēs laterum, nimirum B C, ad C G, & D C, ad C E, nota sint in numeris, veniemus quoque ex hac propos. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F, in numeris, hoc modo: Sit proportio B C, ad C G, eadem, quæ 11 ad 5. & D C, ad C E, eadem, quæ 7. ad 11. atque hæc due proportionēs continuantur in tribus numeris 77. 35. 55. ita ut sit 77. ad 35. sicut 11. ad 5. & 35. ad 55. ut 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55, hoc est, ex proportionibus laterum, erit ut 77. ad 55. ita parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, quod proportio parallelogrammorum sit etiam composita ex eisdem proportionibus laterum: hoc est, proportio parallelogrammorum denominabitur à $1\frac{2}{5}$. Continuabuntur autem due data proportionēs in tribus numeris vel ex 95, quæ propos. 4. lib. 8. demonstrantur, vel certe hoc modo: Post priorē proportionē 11. ad 5. fiat ut 7. ad 11. (quæ est posterior proportio) ita 5. ad aliud, inuenieturque numerus 77. Itaque stabunt tres numeri habentes duas illas proportionēs 11. 5. 77. Quod si tertius reuocetur ad hanc vnicam fractionem $\frac{5}{7}$, & alij duo numeri per denominatorem 7. multiplicentur, erunt duo producti numeri 77. 35. & numerator 55. tres numeri integri in eisdem proportionibus.



parallelogrammum A C, 12. rhombos æquales, ac C F, solum 6. atque adeo parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, duplam proportionem habebit, ut dictum est.

PERSPICUUM autem est, alteram proportionū componentium posse esse maiorem proportionē composita, & æqualem. In priori enim exemplo proportio laterum B C, ad C G, est ut 11. ad 5, hoc est, cuius denominator est $2\frac{1}{5}$, quæ maior est proportionē parallelogrammorum, cum huius denominator sit $1\frac{2}{5}$. In posteriori vero exemplo proportio laterum B C, ad C G, est dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum.

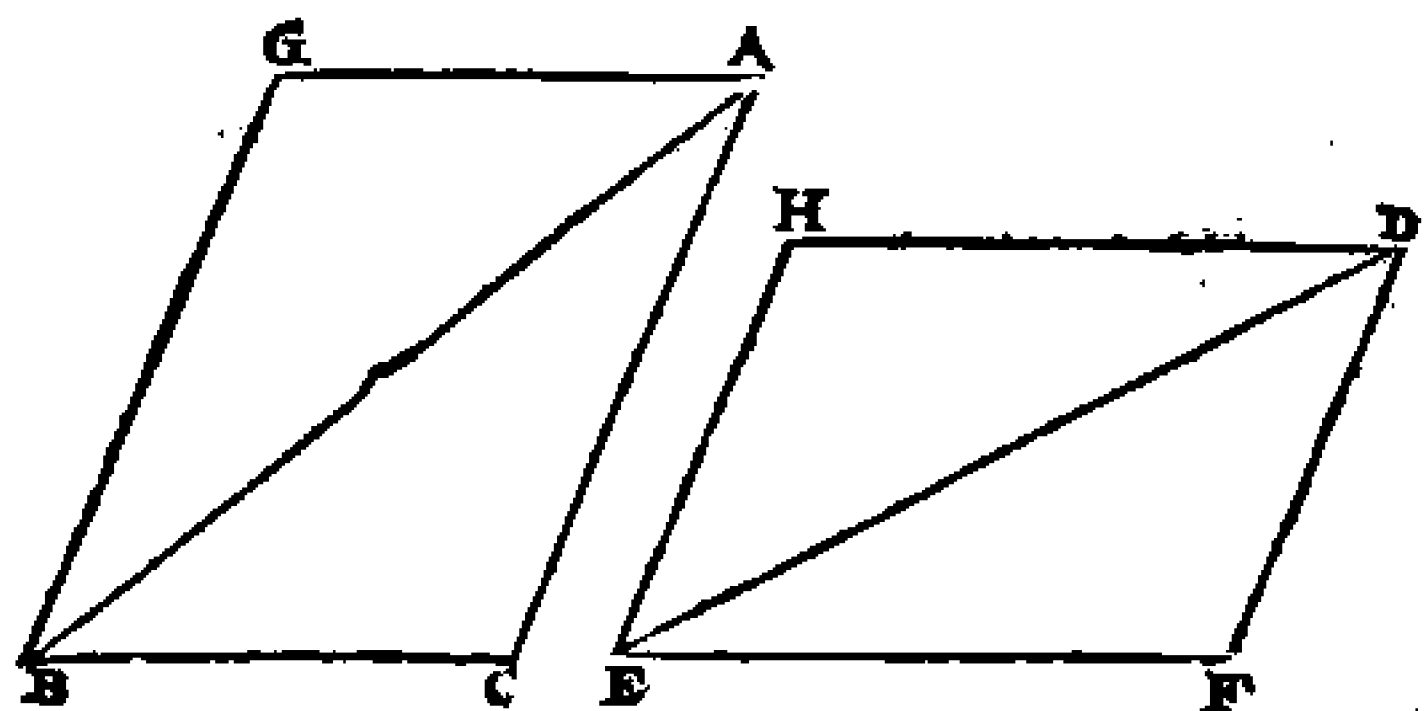
Vt.

Ve vel hinc etiam constare possit, hanc proportionum compositionem non esse additionem, ut nonnulli interpretes volunt. Item proportionem maioris inaequalitatis posse componi tum ex proportionem minoris inaequalitatis, tum ex aequalitatis proportionem; quod idem interpretes negant. In exemplo namque priori proportio lateris DC , ad CE , est minoris inaequalitatis, in posteriori vero, aequalitatis. Sed hoc de re plura scribemus ad finem libri 9.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quae vel ad compositionem proportionum pertinent, vel ex ea demonstrantur, non inutilia, quae nos quoque, asserre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus: Sunt autem ea, quae sequuntur.

I.

TRIANGULA, quae vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam.



SINT triangula ABC, DEF , angulum C , angulo F , habentia æqualem. Dico proportionem trianguli ABC , ad triangulum DEF , compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportionem BC , ad EF , & ex proportionem AC , ad DF : Vel ex proportionem BC , ad DF , & ex proportionem AC , ad EF . Completi enim parallelogrammum CG, FH , erunt ea equiangulara; ^a atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur. Cum ergo triangula

223. sexti.

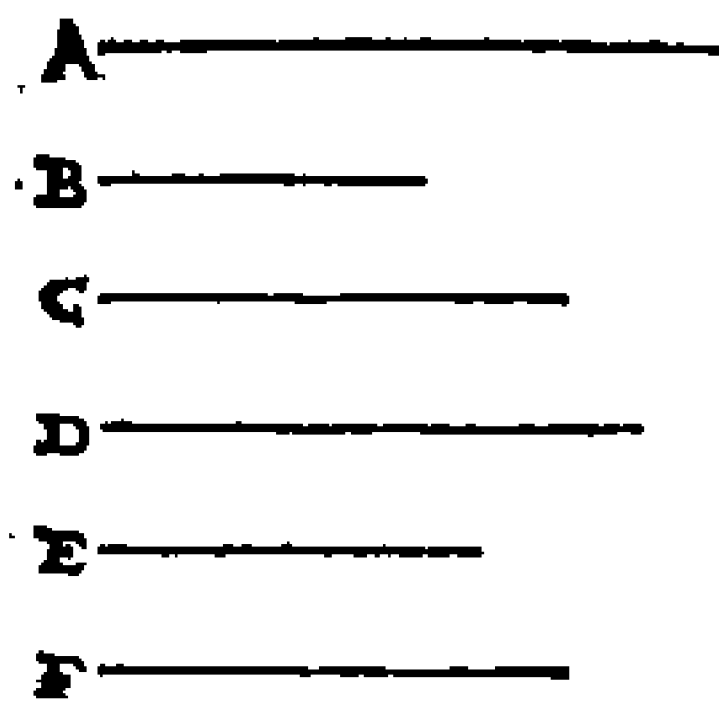
^a ABC, DEF , cum ipsis, ^b quorum sunt dimidia, ^c eandem habeant proportionem: Erit quoque, proportio trianguli ABC , ad triangulum DEF , composita ex proportionibus laterum BC, AC , ad latera EF, DF .

b34. primi.

c15. quinti.

I I.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.

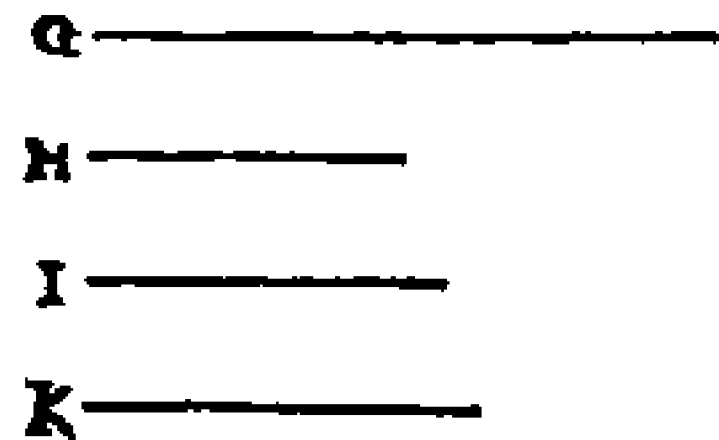


Hoc, quo modo fiat, facile colligitur ex demonstratione huius propos. 23. Sint enim tres proportionem A , ad B ; C , ad D ; & E , ad F , in lineis exhibitae. Oportet iam ex ipsis vnā proportionem componere. ^d Fiat ut A , ad B , ita G , ad H ; & ut C , ad D , ita H , ad I ; & ut E , ad F , ita I , ad K . Dico proportionem G , ad K , compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cum enim ea composita sit ex proportionibus G , ad H ; H , ad I ; & I , ad K , per definitionem 5. huius libri, composita etiam erit ex proportionibus A , ad B ; C , ad D ; & E , ad F ; quod his illa sumpta sint æquales.

d 12. sexti.

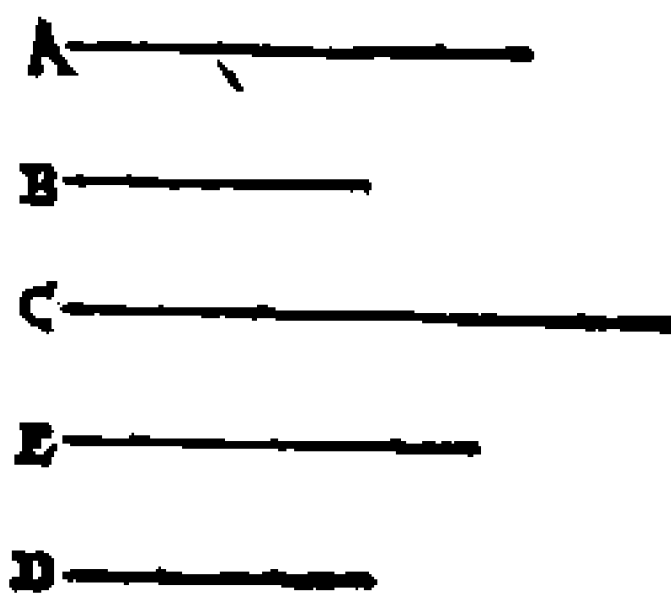
I I I.

PROPORTIONE M minorem ex maiore auferre.



Si r proportio A , ad B , minor auferenda ex proportionem maiore C , ad D . ^e Fiat, ut A , ad B , ita C , ad E ; statuaturque, E , terminus medius inter C , & D . Dico ablatam esse proportionem A , ad B , ex proportionem C , ad D , reliquamque, esse proportionem E , ad D . Cum enim proportio C , ad D , componatur ex proportionibus C , ad E , & E , ad D : Si proportio C , ad E , hoc est A , ad B , auferatur, relinquetur proportio E , ad D .

VERVM hac compositio, & detractio proportionum non est additio, & subtractio propriæ, quia aliàs totū esset æquale parti, & minus, & maior proportio posset detrahi ex minore, ut ad finem lib. 9. ostendemus.



e 13. sexti.

I I I I.

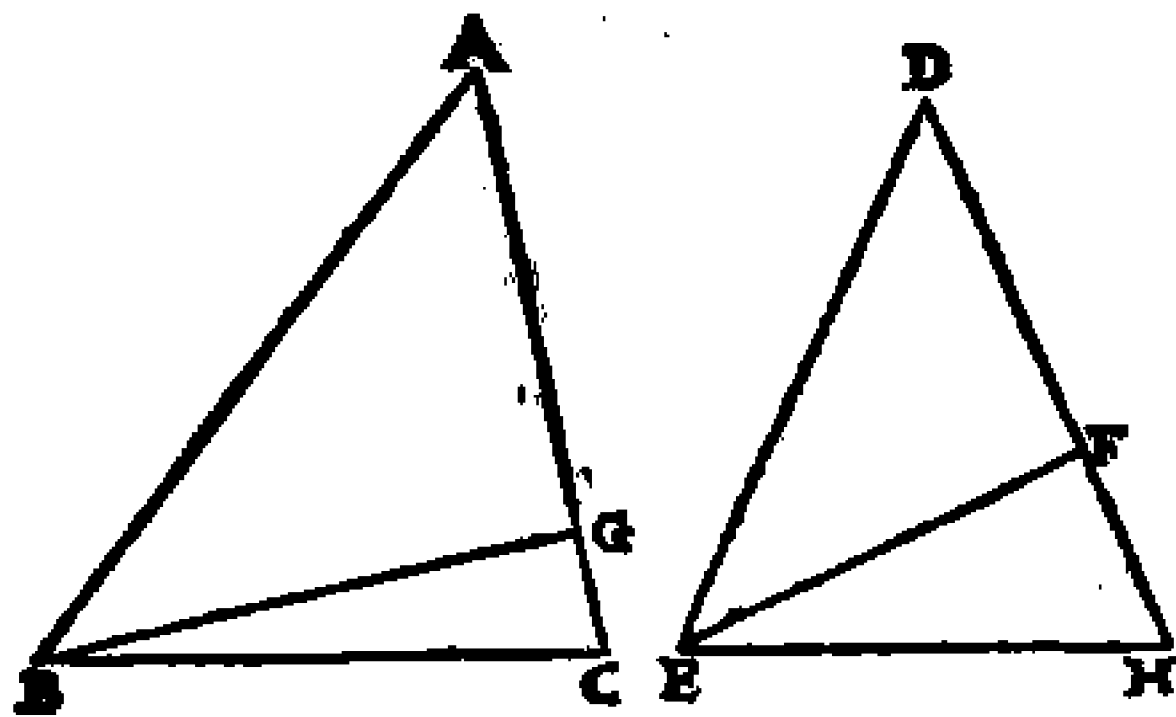
TRIANGULA, quae vnum angulum vni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quae sub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

SINT triangula ABC, DEF , angulum A , angulo D , habentia æqualem. Dico esse triangulum ABC , ad triangulum DEF , ut rectangulum sub AB, AC , ad rectangulum sub DE, DF . Ductis enim ad AC, DF , perpendicularibus BG, EH ; erunt triangula ABC, DEH , equiangulara, ut constat ex corollario primo, propositionis 32. libri 1. cum duo anguli A, AGB , duobus angulis D, DHE , sint æquales. ^f Igitur erit, ut GB , ad BA , ita HE , ad ED : Ut autem GB , ad BA , & ita est rectangulum sub BG, AC , ad rectangulum sub AB, AC . (Nam si bases ponantur GB, BA , erit eorum eadem altitudo AC .) Et eadem ratione, ut

f 4. sexti.

g 1. sexti.

a 11. quinti.

bis. quinti.
e 41. primi.

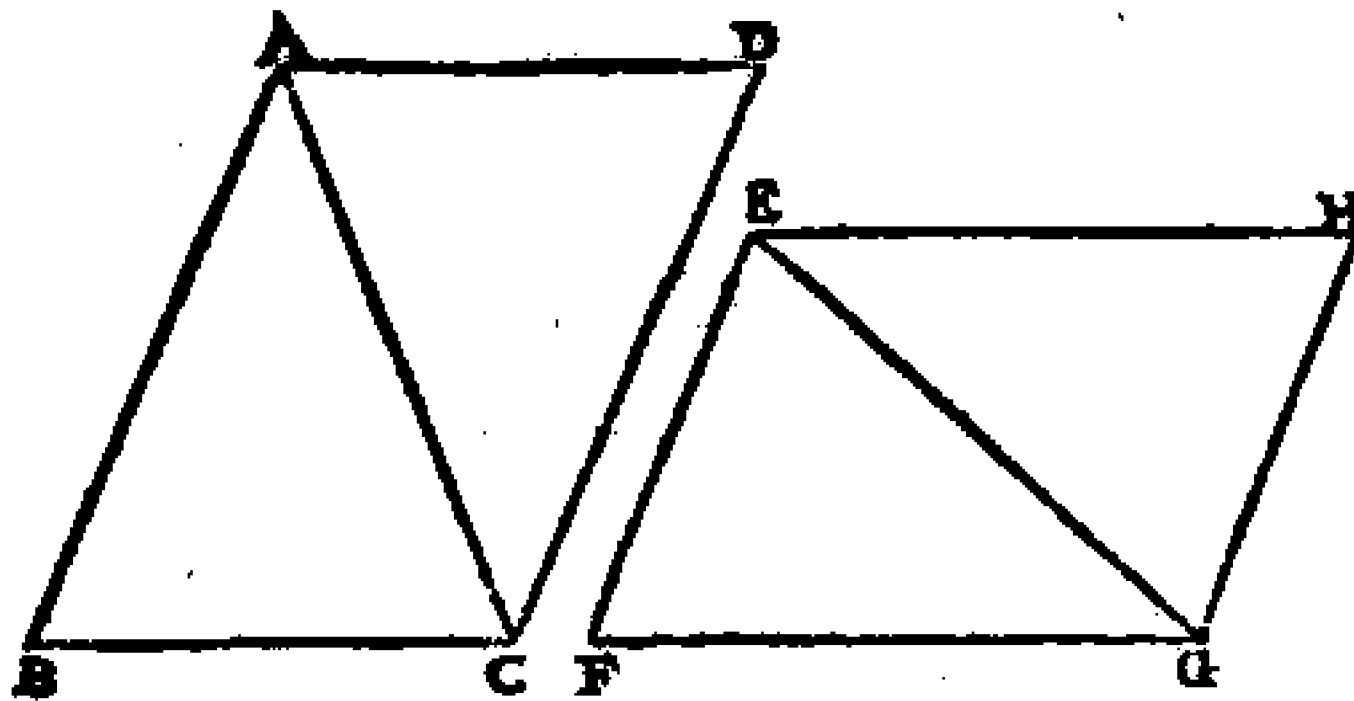
HE, ad ED, ita est rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF. * Rectangulum igitur sub BG, AC, ad rectangulum sub AB, AC, est, ut rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF; & permutando, rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF, ut rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Sed ut rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, quod hac triangula sint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim easdem

cum illis bases AC, DF, altitudinesq, easdem BG, EH: ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta.) Igitur erit quoq, triangulum ABC, ad triangulum DEF, ut rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Quod est propositum.

ALITER, & facilius. Ex theoremate 1. huius scholij, proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita est ex proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF: Sed & proportio rectanguli sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF, ex eisdem proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DE, composita est. Igitur erit triangulum ABC, ad triangulum DEF, ut rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Quod est propositum.

V.

PARALLELOGRAMMA inter se æquiangulara, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa.

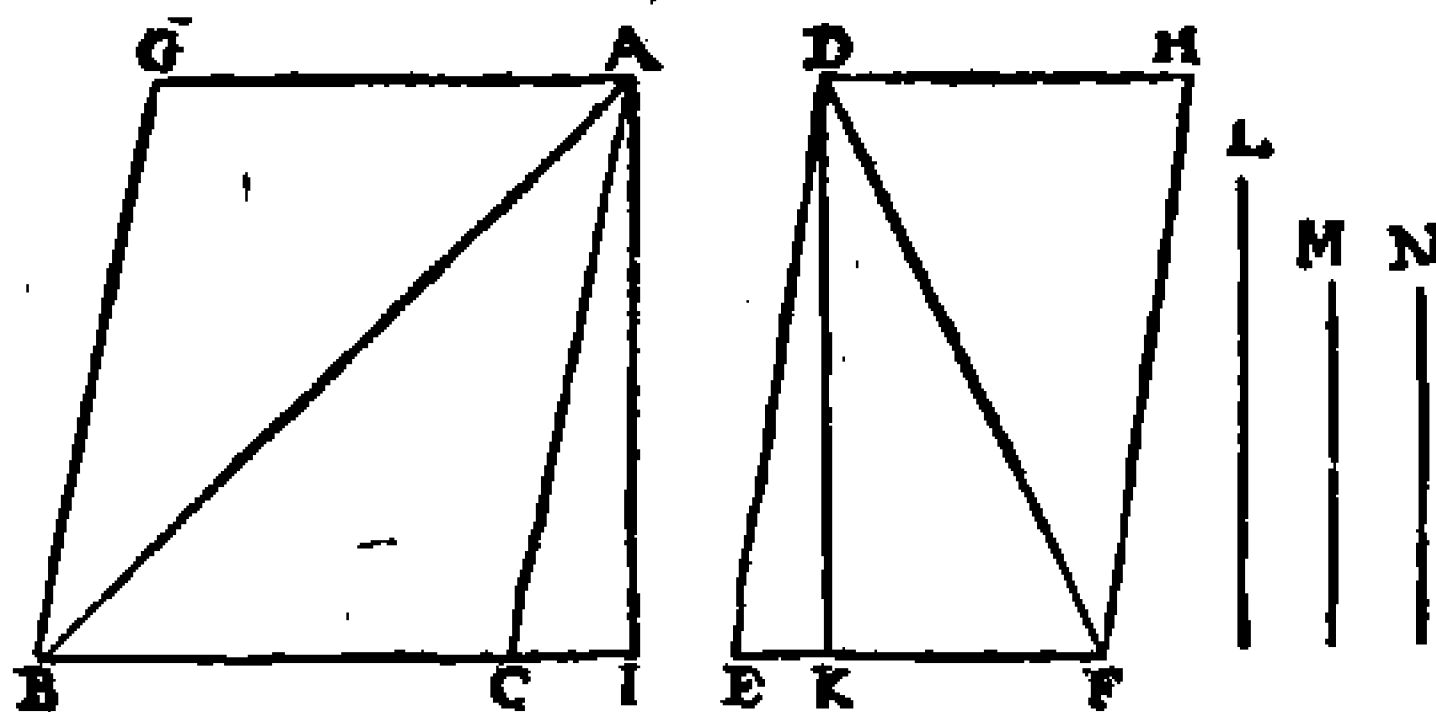


SINT parallelogramma ABCD, EFGH, æquiangulara inter se, quorum anguli B, & F, sint æquales. Dico esse, ut parallelogrammum BD, ad parallelogrammum FH, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Ductis enim diagonalibus AC, EG, quæ angulos æquales B, F, subtendant; habebunt triangula ABC, EFG, angulū B, angulo F, æqualem. Quare, ut iam demonstravimus, erit, ut trian-

gulum ABC, ad triangulum EFG, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. * Cum ergo parallelogramma BD, FH, eandem habeant proportionem, quam triangula ABC, EFG, quod hac ipsorum sint dimidia; Erit quoq, ut parallelogrammum BD, ad FH, parallelogrammum, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Quod est propositum.

VI.

TRIANGULA & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportionibus basium, & proportionibus altitudinum.

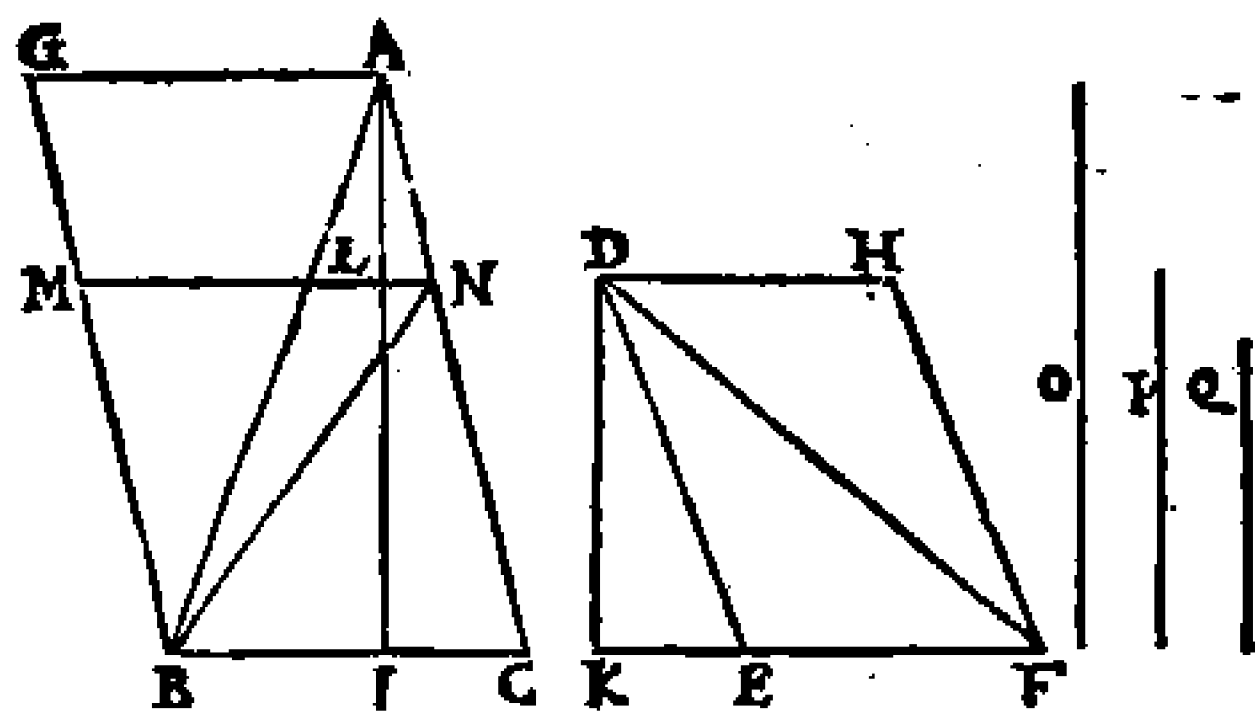


SINT triangula ABC, DEF, & parallelogramma CG, EH, quorum altitudines AI, DK. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportionibus basium BC, ad EF, & proportionibus altitudinum AI, ad DK. Sint enim primum altitudines æquales, bases verò vel æquales etiam, vel inæquales: Fiatq, ut BC, ad EF, ita L, ad M. Ut aut AI, ad DK, ita M, ad N. Quo facto erit M, ipsi N, æqualis. & AI,

ipsi DK, æqualis ponatur; Ac proinde erit L, ad N, ut L, ad M, hoc est, ut BC, ad EF. At verò ut BC, ad EF, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH. Igitur quoq, erit, ut L, ad N, ita triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH: Sed proportio L, ad N, composita est ex proportionibus L, ad M, hoc est, ex proportionibus basium BC, ad EF, & ex proportionibus altitudinum AI, ad DK. Proportio ergo trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH, ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.

SINT iam altitudines AI, DK, inæquales, & AI, maior, bases verò BC, EF, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, ut AI, ad DK, ita O, ad P; & ut BC, ad EF, ita P, ad Q. Abscissa deinde I, æqualis ipsi DK, ducatur per L, ipsi BC, parallela LM, secans AC, in N, iungaturq, recta BN. Quoniam igitur est triangulum ABC, ad

ABC, ad



ABC, ad triangulum NBC; & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum CM, ut altitudo AI, ad altitudinem IL, vel ad DK, ipsi IL, æqualem, hoc est, ut O, ad P, per ea, quæ ad 1. propositionem huius libri ex Commandino ostendimus; quod triangulorum & parallelogrammorum eadem sit basis BC: Et ut triangulum NBC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum EH, ita est basis BC, ad basin EF, (cum eadem sit altitudo) hoc est, ut P,

21. sexti.

ad Q: b erit ex æquo ABC, ad DEF, & CG, ad EH, ut O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc est, ex proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK; & ex proportione P, ad Q, hoc est, ex proportione basis BC, ad basin EF: Ex eisdem proportionibus componitur proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH. Quod est propositum.

b 22. quinti.

Eodem pacto ostendetur proportio trianguli DEF, cuius altitudo minor est, ad triangulum ABC, & parallelogrammi EH, ad parallelogrammum CG, composita esse ex proportione basis EF, ad basin BC, & proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI. Si enim fiat, ut EF, ad BC, ita Q, ad P; & ut DK, ad AI, ita P, ad O, & reliqua fiant, ut prius; c erit triangulum DEF, ad triangulum NBC, & parallelogrammum EH, ad parallelogrammum CM, ut EF, ad BC, hoc est, ut Q, ad P. Item triangulum NBC, ad triangulum ABC, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum CG, ut LI, seu DK, ad AI, hoc est, ut P, ad O. ex his, quæ ad propo. 1. huius lib. ex Commandino demonstrauimus. d Ex æquo igitur erit, ut DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ita Q, ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc est, ex proportione basis EF, ad basin BC; & ex proportione P, ad O, id est, ex proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI; componetur etiam proportio DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ex eisdem proportionibus. Quod est propositum.

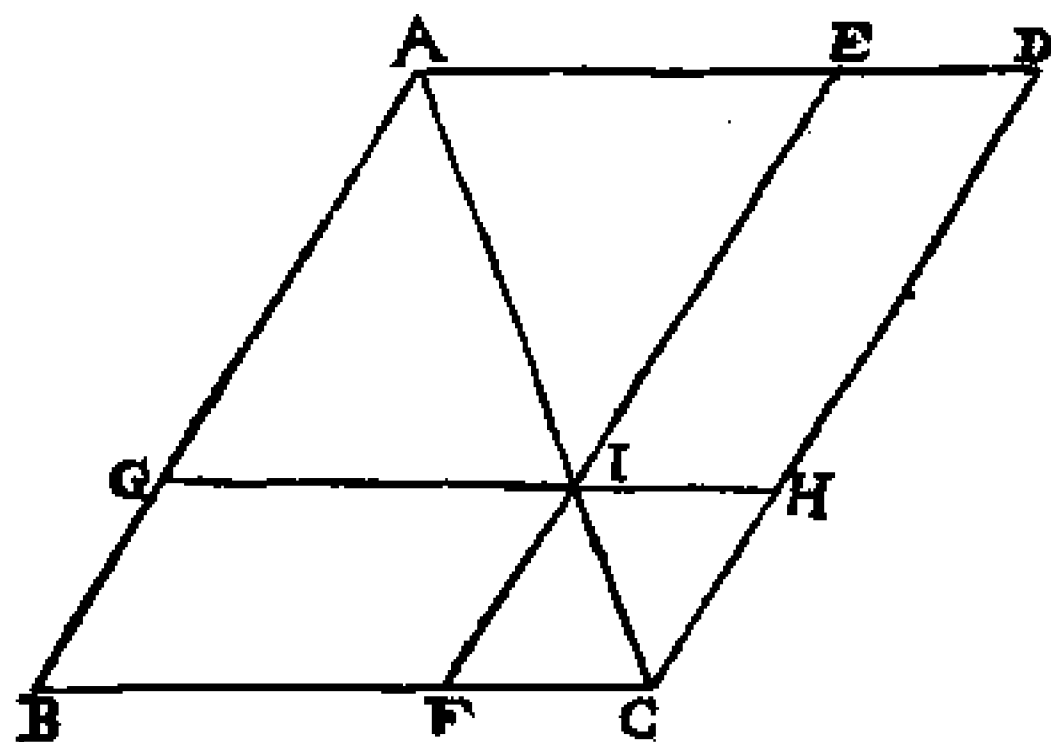
c 1. sexti.

d 22. quinti.

PROBL. 18. PROPOS. 24.

22.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.



EST o parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma EG, FH, circa diametrum, similia esse & toti parallelogrammo, & inter sese. Quod enim æquiangulara sint toti, facile ostendetur. Nam angulus GAE, idein est, qui angulus BAD; & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus AGI, externus interno ABC; & angulus EIG, externus interno BFI; & hic externus interno BCD. Quare æquiangularum est EG, parallelogrammum parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD, æquiangularum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangularum sit triangulo ABC; & triangulum AEI, triangulo ADC, ut perspicuum est ex 29. propositione libri 1. vel etiam ex corollario propositionis 4. huius libri,

a 29. primi.

b erit ut AB, ad BC, ita AG, ad GI; atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus c erit, ut BC, ad CA, ita GI, ad IA; Item ut CA, ad CD, ita IA, ad IE. d Ex æquo igitur, ut BC, ad CD, ita est GI, ad IE; ac propterea & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare per definitionem, simile erit parallelogrammum EG, toti parallelogrammo BD. Eadem arte ostendes parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo BD; e atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

b 4. sexti.

c 4. sexti.

d 22. quinti.

f 21. sexti.

SCHOLIUM.

INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius esse talia, quæ habeant unum angulum cum toto parallelogrammo communem, ut manifestum est ex forma demonstrationis.

Quod si circa diametrum alicuius parallelogrammi productam consistat parallelogrammum aliud, ita ut duo huius latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa huius sint parallelæ, ostenditur hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim ABCD, diameter BD, sit producta ad E, circa quam consistat parallelogrammum DEFG, cuius duo latera DE, DG, rectas lineas efficiant cum AD, DC, lateribus parallelogrammi AC. Dico parallelogrammum GE, simile esse parallelogrammo

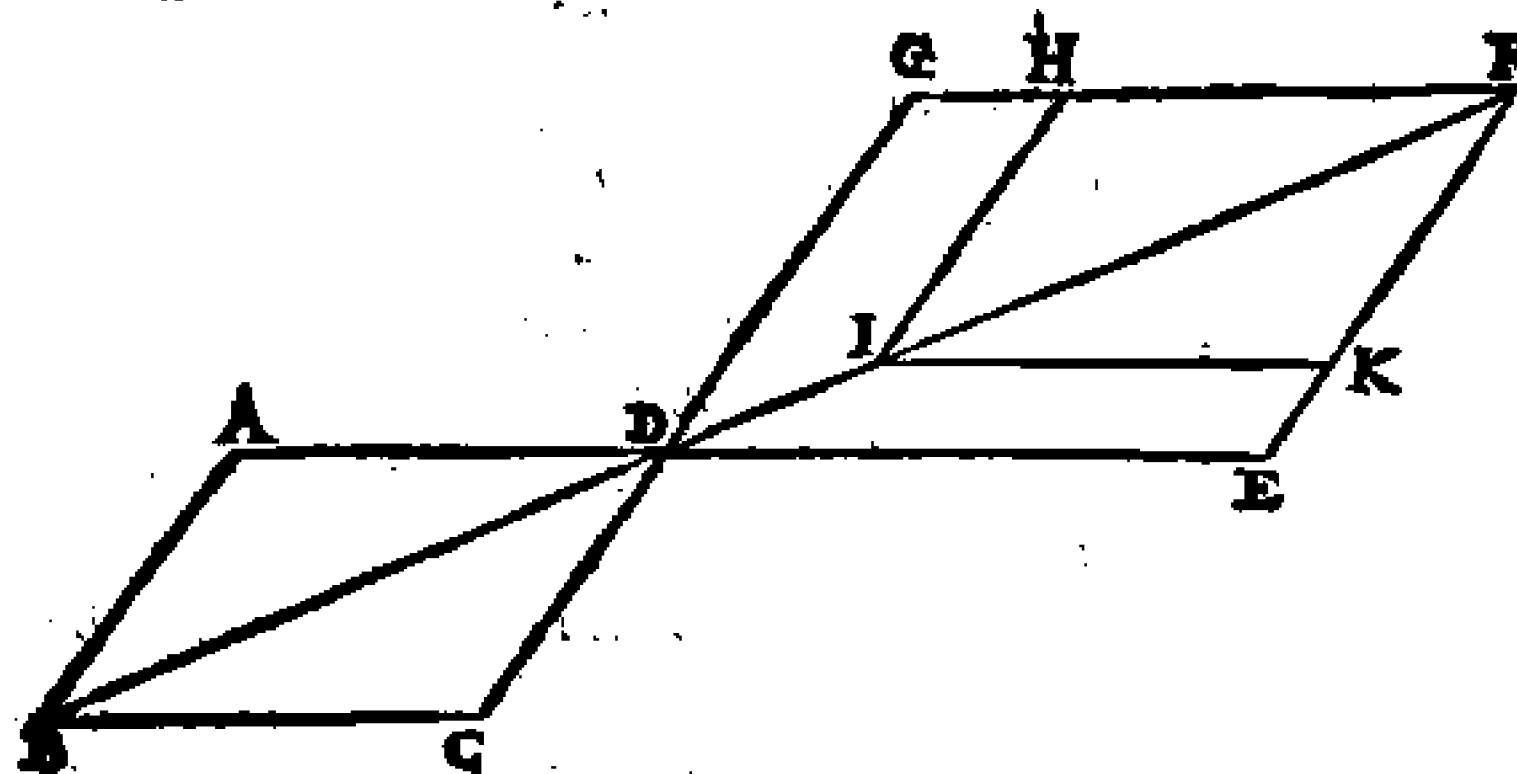
E

a29. primi.

b34. primi.

c15. primi.

d34. primi.



AC. Quod enim ambo inter se sint equiangula, facile ostenderur. ^a Nam quia angulus A, equalis est angulo alterno ADG; huic autem equalis quoque est alternus angulus G; erunt equales anguli A, & G. ^b Quare his oppositi C, & E, equales quoque erunt. ^c Rursus, quia anguli ADC, GDE, ad verticem, sunt equales, ^d erunt his quoque oppositi ABC, GFE, equales. Igitur equiangula sunt

e4. sexti.

f22. quinti.

GE, AC, parallelogramma. Quod autem latera habeant proportionalia circum equales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum BAD, equiangulum sit triangulo DGF, & triangulum BCD, triangulo DEF, ut constat ex propof. 29. lib. 1. ^e Erit ut BA, ad AD, ita DG, ad GF. Rursus ut AD, ad DB, ita GF, ad FE; & ut DB, ad DC, ita FD, ad FE, ^f ac propterea ex aquo ut AD, ad DC, ita GF, ad FE. Sunt igitur latera circa angulos A, ADC, proportionalia lateribus circa angulos G, GFE, qui illis equales sunt. Non secus ostendat, reliqua latera circa angulos equales proportionalia esse. Quare similia sunt parallelogramma AC, GE.

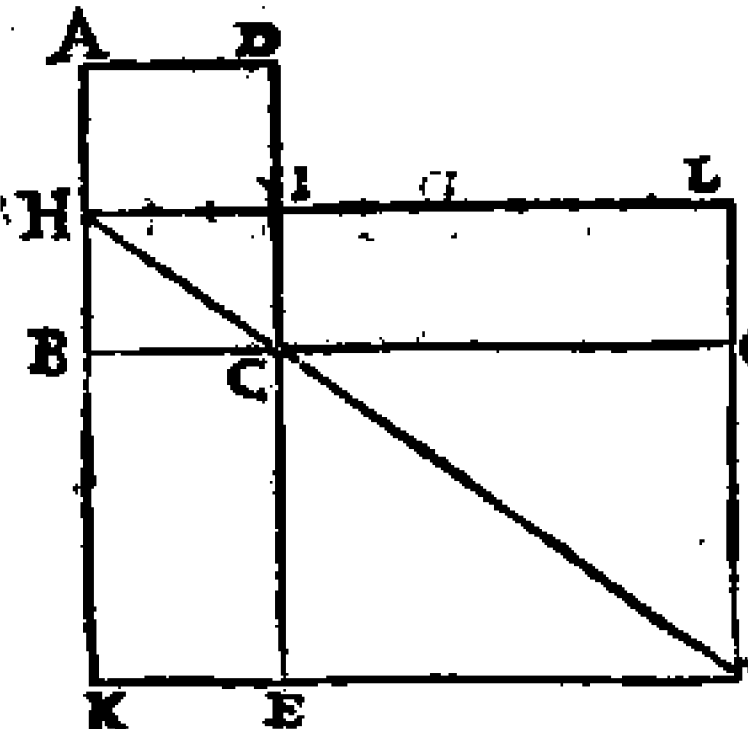
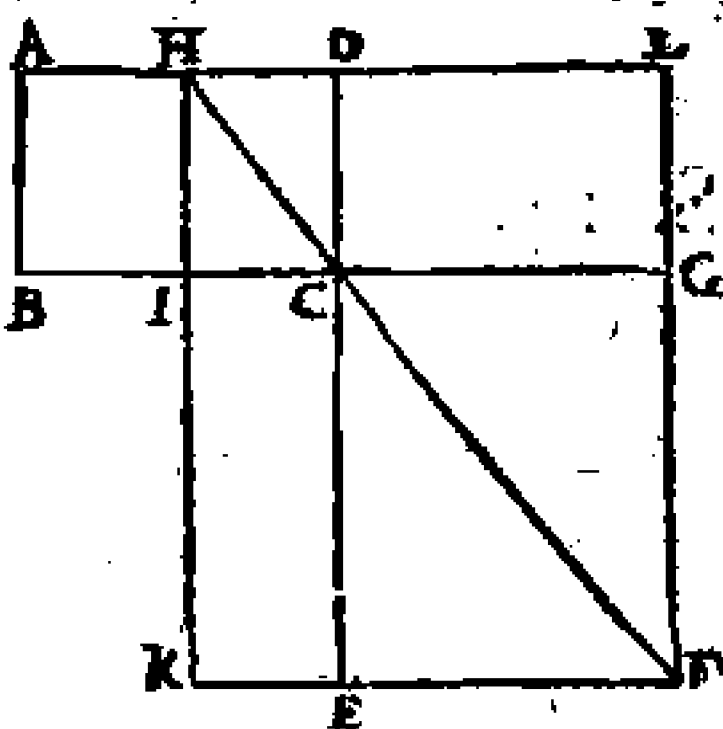
g34. sexti.

h11. sexti.

Quod si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum HIKF, habens latera parallela lateribus parallelogrammi AC, idem demonstrabitur. Nam productis AD, CD, donec occurrant rectis FK, FH, productis in E, & G; erit HK, simile ipsi GE, & ut Euclides demonstravit: Atque eadem GE, simile est quoque AC, ut nunc ostendimus. ^h Igitur & HK, AC, inter se similia sunt. Quod est propositum.

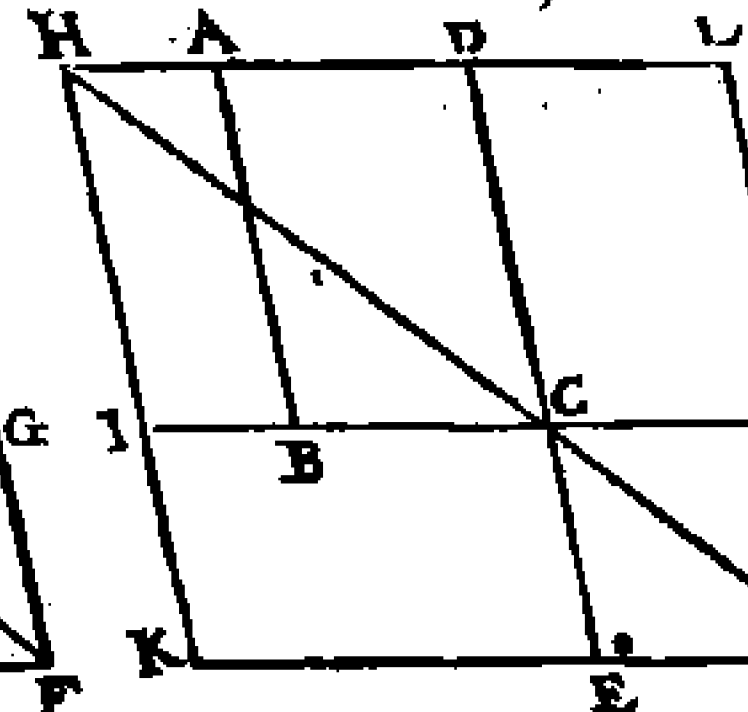
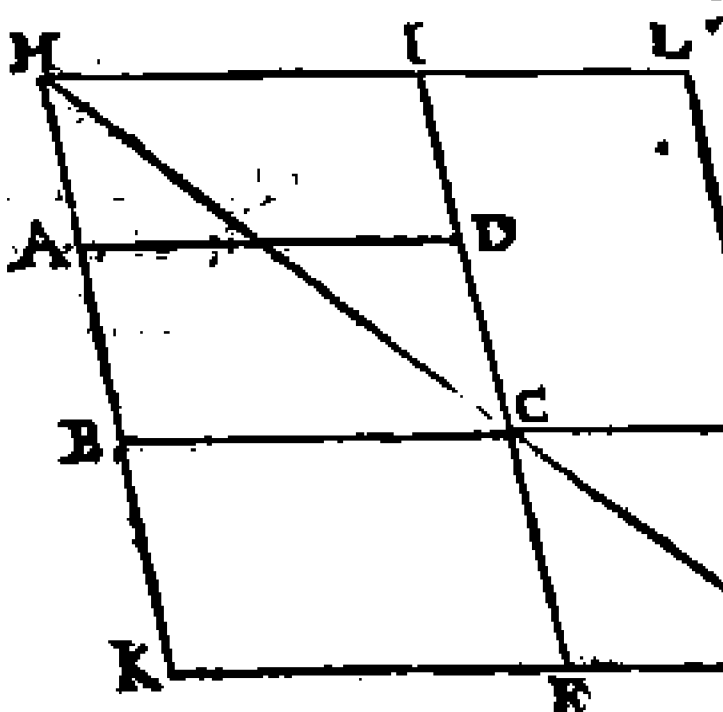
SE D & absolucmus cum Peletario sequens problema.

DATIS duobus parallelogrammis equiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile relectare.



DE o parallelogramma equiangula, sed non similia, sint ABCD, CEFG; & ex ABCD, abscindendum sit parallelogrammum ipsi CEFG, simile. Coniungantur ambo ad angulos equales BCD, ECG, ita ut sit una linea recta BCG, & propterea, ut ad propof. 15. lib. 1. demonstratum est, ECD, quoque una recta linea. Deinde ducta diameter FC, producat, donec in H,

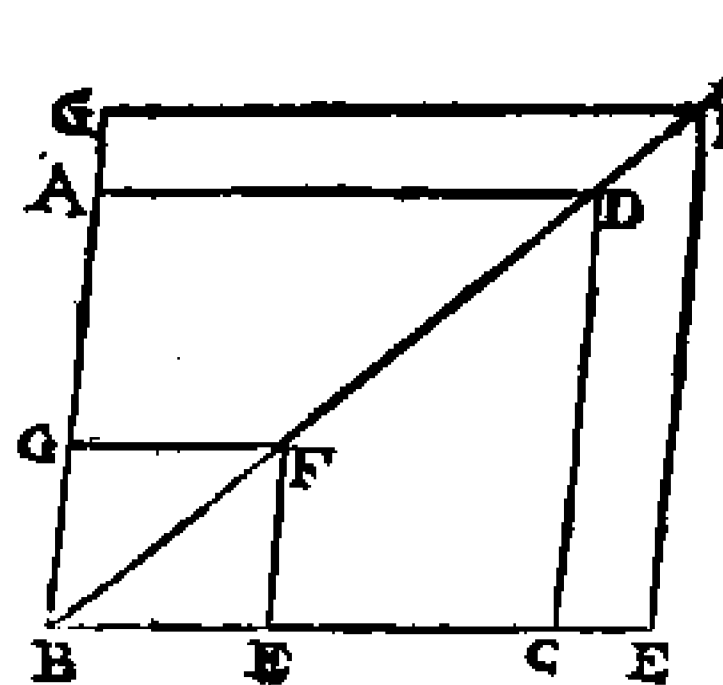
secet vel latus AD, vel latus AB; (Neque enim in punctum A, cadet: quia AC, esset simile ipsi CF, ut demonstratum est, quod est contra hypothesein) & per H, ducatur HI, parallela ipsi AB, vel ipsi AD. Dico parallelogrammum abscissum HC, simile esse ipsi CF. Si enim totum parallelogrammum KL, compleatur, erunt HC, CF, circa diametrum. Quare inter se similia erunt, ut Euclides demonstravit in hac propositione.



EAD EM autem arte se alterutrum ipsorum augeri poterit, ut fiat simile alteri. Sit enim augendum ABCD, ut fiat ipsi CEFG simile. Coniungatur uti prius, & diameter FC, extendatur, donec in H, secet vel latus BA, protractum, vel latus DA, protractum. Neque enim in punctum A, cadet: quia AC, esset ipsi CF simile, ut demonstratum est,

quod non ponitur. Deinde per H, ducatur HI, parallela ipsi AD, vel ipsi AB, donec secet vel latus CD, protractum, vel CE, protractum in I. Dico parallelogrammum auctum HC simile esse parallelogrammo CF. Nam si compleatur totum parallelogrammum KL, consistent HC, CF, circa diametrum. ⁱ Quare similia inter se erunt.

i24. sexti.



k24. sexti.

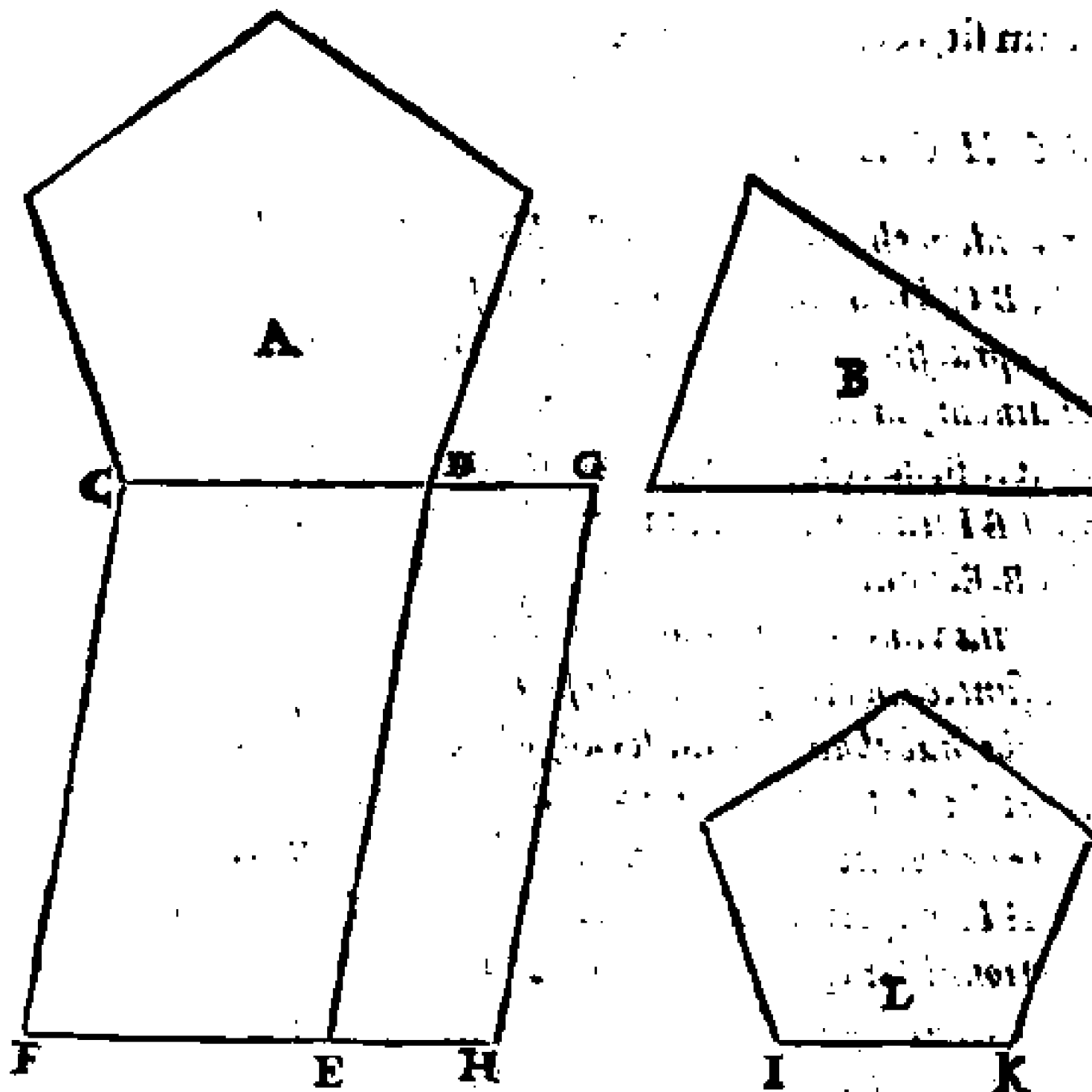
PERSPICUUM autem est, ex demonstratione huius theorematu facta ab Euclide, & ex probatione theorematu a nobis propositi in hoc scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia, verum etiam similiter posita. Unde proposito quouis parallelogrammo ABCD, si maius debeat describi illi simile similiterque positum, producendum erit latus unum, nempe BC; Atque ex E, quolibet puncto ultra C, ipsi CD, parallela EF, ducenda, secans diametrum BD, productam in F; & per F, ducenda FG, parallela ipsi AD, occurrens recte BA, producta in G. ^k Erit enim parallelogrammum GE, simile similiterque

similiterq; positum ipsi A C, & maius eodem. Quod si minus debeat describi, sumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, ut prius, ut figura indicat.

PROBL. 7. PROPOS. 25.

25.

DATO rectilineo simile, similiterque positum; & alteri dato æquale idem constituere.



SIT data duo rectilinea A, & B, sitque constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super CD, vnum latus rectilinei, cui simile debet constitui, constituitur parallelogrammum CE, in quo quis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam DE, in angulo BDG, qui æqualis sit angulo DCE, parallelogrammum DH, æquale ipsi B, eritq; tam CDG, quam FEH, linea vna recta, ut demonstratum est propositione 44. libri 1. Inueniatur iam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK; super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterque positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B. Cum enim sint proportionales tres rectæ CD, IK, DG, erit per corollarium propositionis 19. vel 20. huius libri, ut CD, prima ad DG, tertiam, ita A, rectilineum super primam CD, ad rectilineum L, super IK, secundam simile similiterque descriptum: Vt autem CD, ad DG, ita est parallelogrammum CE, ad parallelogrammum DH, eiusdem altitudinis. Igitur erit ut CE, ad DH, ita A, ad L. Vt autem CE, ad DH, ita est A, ad B: propterea quod parallelogrammum CE, rectilineo A; & parallelogrammum DH, rectilineo B, constructum est æquale. Quare erit, ut A, ad B, ita A, ad L: propterea quæ æqualia erunt rectilinea B, & L. Est autem & L, simile ipsi A, similiterque positum, per constructionem. Dato igitur rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

a 44. vel 45
primi.

b 13. sexti.

c 18. sexti.

d 1. sexti.

e 11. quinti.

f 7. quinti.

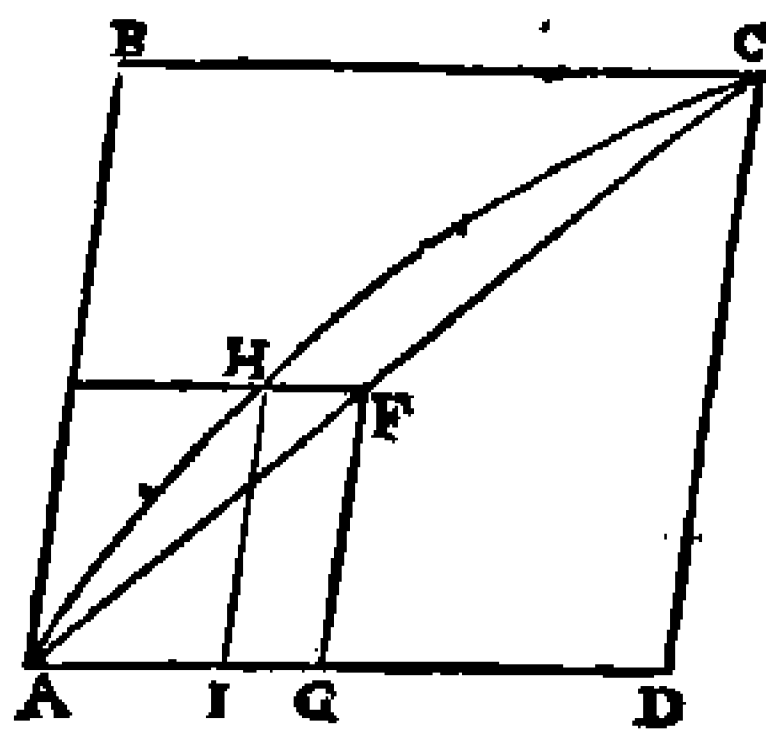
g 11. quinti.

h 9. quinti.

THEOR. 19. PROPOS. 26.

26.

SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.



Ex parallelogrammo BD, abscissum sit parallelogrammum EG, simile ei, similiterque positum, habens cum ipso angulum communem EAG. Dico EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ si fuerint vna linea recta, perspicuum est, cum AF, sit diameter ipsius EG, & AC, diameter ipsius BD, parallelogrammum EG, consistere circa diametrum AFC, totius parallelogrammi. Quod si AF, CF, non dicantur efficere lineam rectam; ducatur totius parallelogrammi diameter AC, secans latus EF, in H, puncto, per quod ipsi FG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD, EI, sunt circa eandem diametrum AHC; ipsa erunt similia, similiterque po-

i 24. sexti.

k 1. definiti.

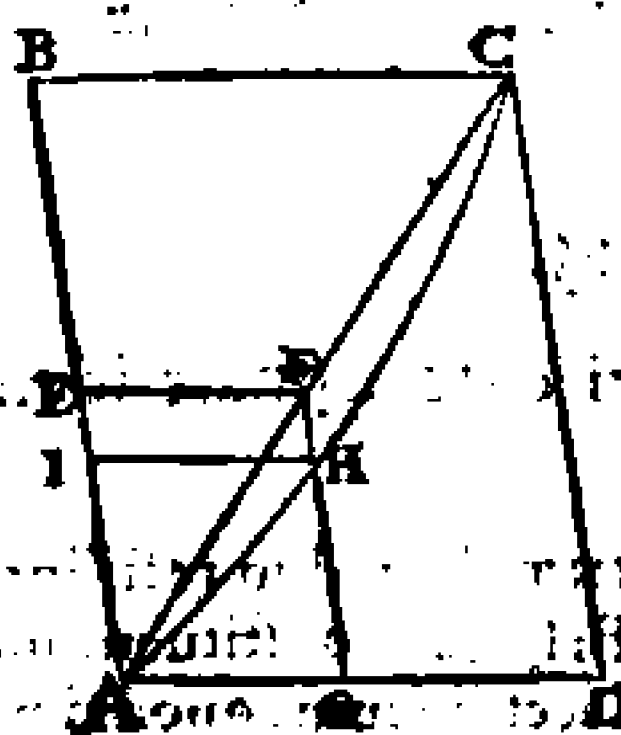
l 11. quinti.

m 9. quinti.

sita. Quare erit ut BA, ad AD, ita EA, ad AI: Sed ut BA, ad AD, ita quoque est EA, ad AG; quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam similia, similiterque posita. Igitur erit ut EA, ad AI, ita EA, ad AG. Ac propterea æquales erunt rectæ AI, AG; pars & totum. Quod est absurdum.

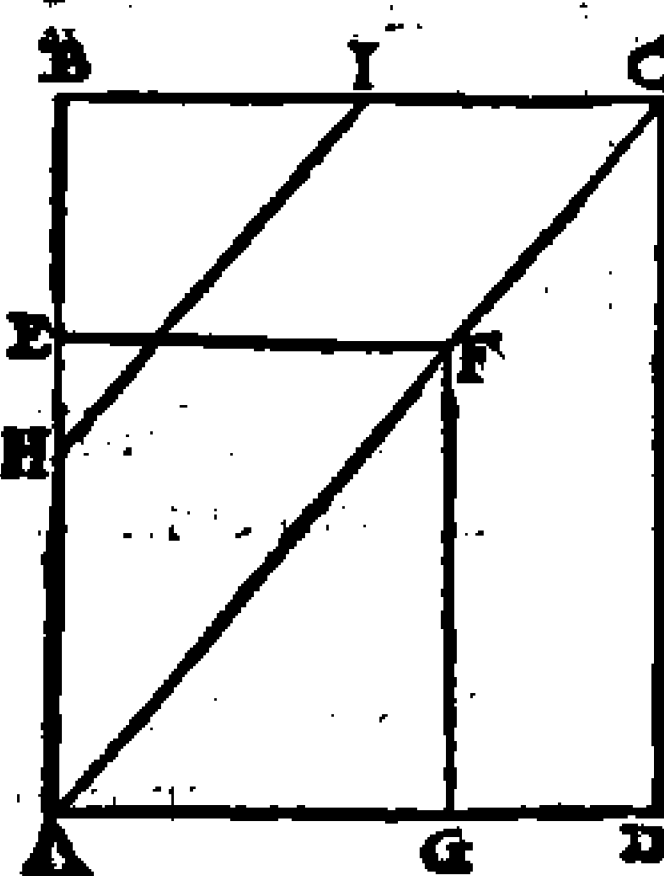
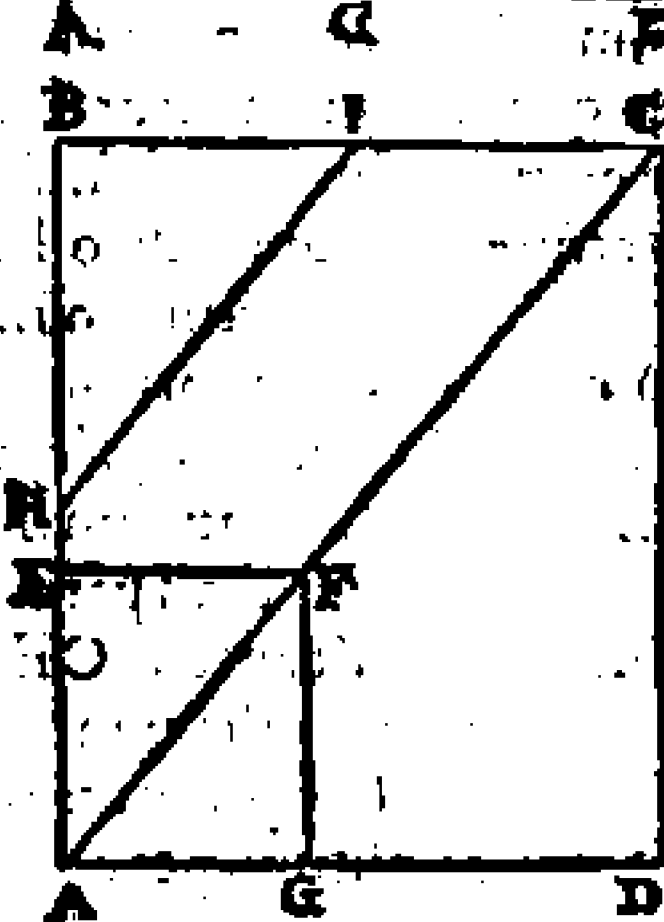
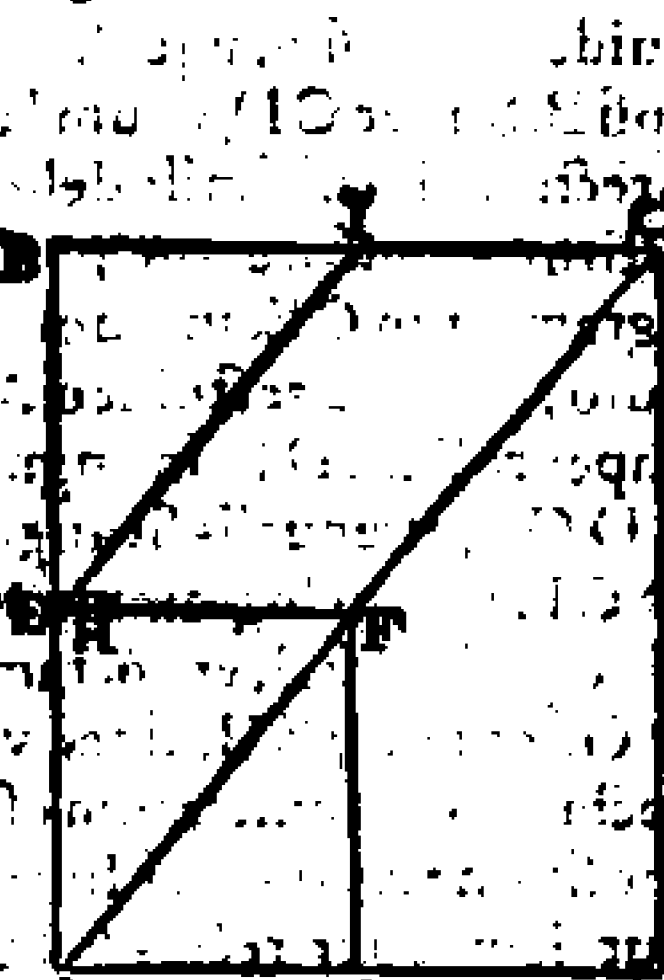
a 24. sexti.
b 1. definit.
sexti.

c 11. quinti.
d 9. quinti.



a 15. quinti.
b 11. quinti.

c 30. primi.
d 6. sexti.
e 18. primi.
f 5. sexti.

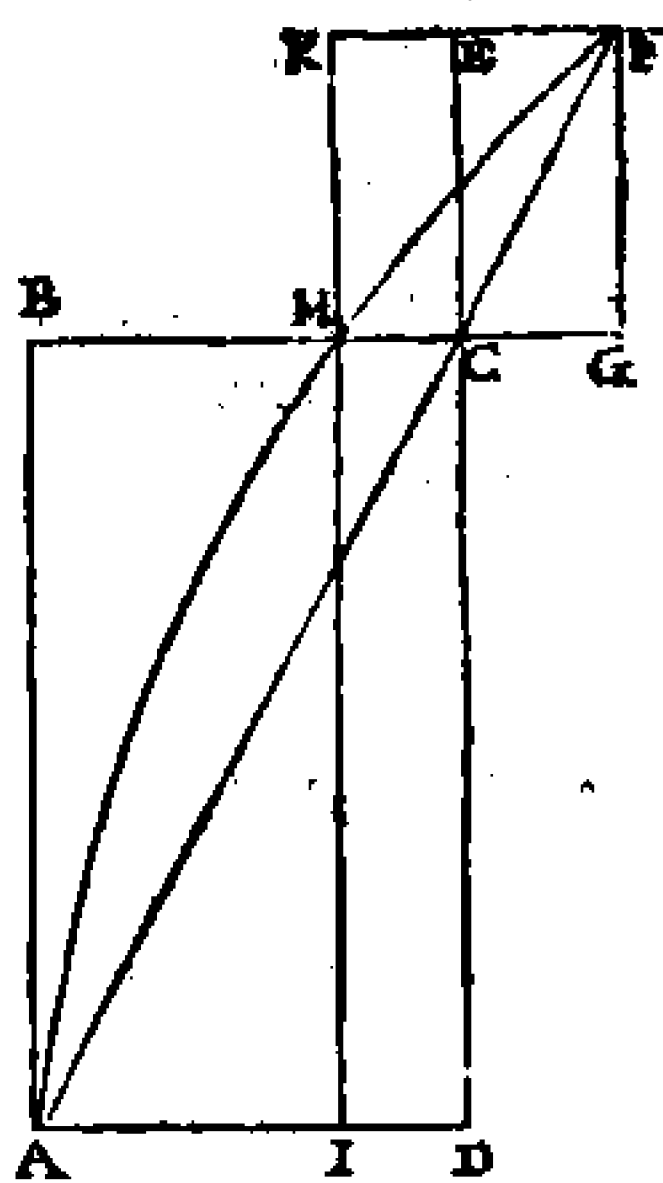


Quod si dicatur recta AHC, secare alterum latus FG, Tunc ducta HI, parallela ipsi BE, erunt rursus similia parallelogramma BD, IG, similiterque posita. Quare erit, ut DA, ad AB, ita GA, ad AI: Sed ut DA, ad AB ita quoque est GA, ad AB, ob similitudinem parallelogrammorum BD, EG. Igitur erit ut GA, ad AI, ita GA, ad AB: ideoque æquales erunt rectæ AI, AB: pars & totum. Quod est absurdum. Constituunt ergo rectæ AF, FC, unam rectam lineam: hoc est, ducta diameter AC, transiit per punctum F, & ducta diameter AF, cadit in punctum C. Itaque si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

ALITER idem theorema demonstrabimus ostensivè hoc modo: Divisis lateribus AB, BC, bisariam in punctis H, I, siue punctum H, cadat in punctum E, siue supra, siue infra; ducantur rectæ HI, AF. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est ut AB, ad BC, ita AE, ad EF; ut autem tota AB, ad totam BC; ita est dimidia HB, ad dimidiam BI; erit ut HB, ad BI, ita AE, ad EF. Triangula igitur HBI, AEF, cum habeant circa angulos B, E, (qui æquales sunt, ob similitudinem parallelogrammorum BD, EG: Vel quia unus est internus, & alter externus in parallelis BC, EF; quæ parallele sunt, cum utraq; parallela sit ipsi AD.) latera proportionalia, & erunt æquiangula, habebuntque æquales angulos BHI, EAF, externum, & internum inter rectas HI, AF. Quare parallela erunt rectæ HI, AF. Quoniam verò recta, quæ ex puncto A, ad punctum in C, duci concipitur, parallela quoque est rectæ HI; propterea quod latera AB, BC, trianguli tunc constituti ABC, proportionaliter essent, secta in H, & I, utpote bisariam; efficitur, ut ducta recta AC, eadem fiat, quæ AF, transeatque per punctum F: cum ex puncto A, solum una linea parallela rectæ HI, possit duci, ut manifestum est. Constituunt ergo BD, EG, parallelogramma similia, similiterque posita circa eandem diametrum AFC. Quod est propositum.

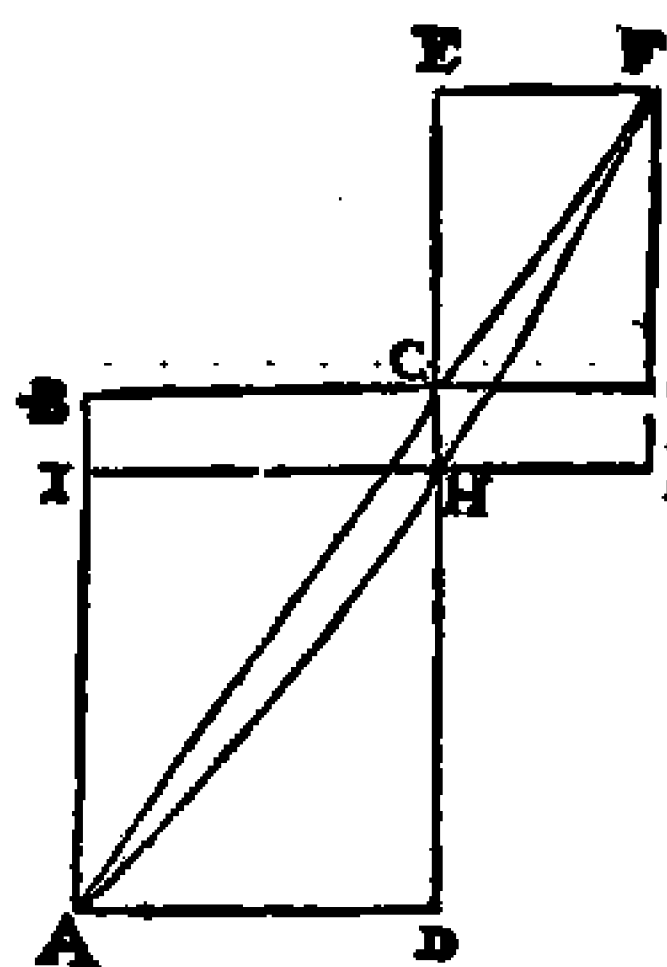
Quod si duo parallelogramma similia similiterque posita non habeant angulum communem, sed unum sit extra aliud, hac tamen lege, ut ita sint connexa inter se secundum duos eorum angulos æquales, ut duo latera unius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituent: demonstrabimus isdem ferè medijs, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia, similiterque posita BD, EG, quæ ad angulos æquales BCD, GCE, ita coniungantur, ut linea BC, CG, in directum iaceant, et ob id, per ea, quæ ad proposit. 15. lib. 1. ostendimus, linea DC, CE, unam quoque lineam rectam componant. Dico parallelogramma BD, EG, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum AC, cum diametro FC, unam rectam lineam conficere. Si enim AC, FC non faciunt unam lineam rectam,



ducatur ex A, ad F, linea recta secans BC, in H, puncto, per quod agatur HI, parallela ipsi CD, occurrens rectæ FE, producta in K. Quoniam igitur parallelogramma BI, KG, circa eandem diametrum AHF, producta consistunt, efficiuntque due rectæ BH, HI, cum duabus rectis HG, HK, duas lineas rectas, ipsæ erunt similia similiterque posita, per ea, quæ ad propositionem vigesimam quartam huius libri demonstravimus. Quare erit ut HB, ad BA, ita FK, ad KH. & Habet autem CB, maior ad BA, proportionem maiorem, quam HB, minor ad eandem BA: & est, ut CB, ad BA, ita FE, ad EC, eo quod parallelogramma BD, EG, ponuntur similia similiterque descripta. Igitur & FE, ad EC, hoc est, ad sibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem, quam HB, ad BA, hoc est, quam FK, ad KH. Quam ob rem si FE, ad KH maiorem habeat proportionem, quam FK, ad eandem KH, erit EF, maior quam FK: pars quam totum. Quod est absurdum.

Quod si quis dicat, rectam AHF, secare latus CD. Tunc per H, ducta recta BC, parallela HI, quæ oc-

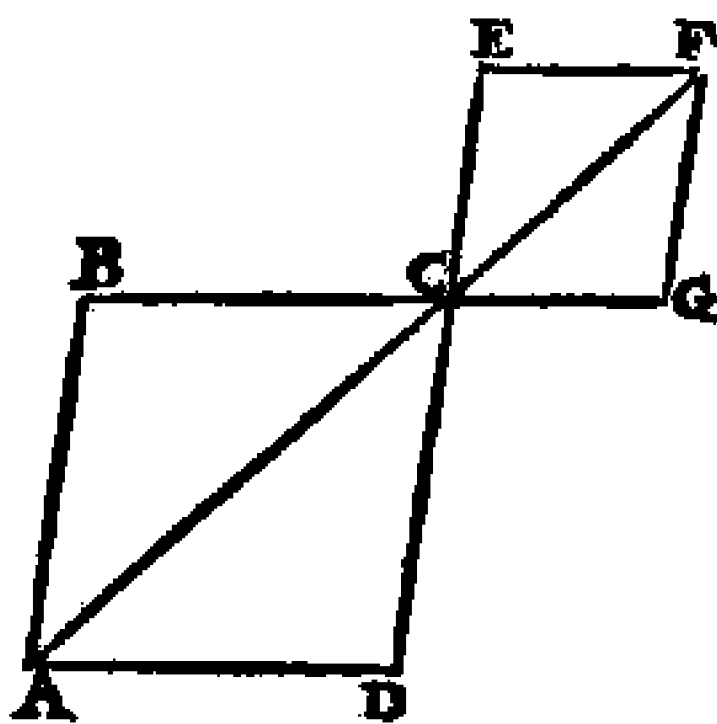
currat



cutrat recta FG, protrahat in K; erunt rursus similia similiterq; posita parallelogramma ID, EK, per ea, quae ad propof. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit ut HD, ad DA, ita FK, ad KH. * Habet autem CD, ad DA, maiorem proportionem, q̄ HD, ad DA, & est ut CD, ad DA, ita FG, ad GC; propterea quod parallelogramma BD, EG, similia similiterq; posita, sunt concessa. Igitur & FG, ad GC, hoc est, ad sibi aequalem KH; maiorem habebit proportionem q̄ FK, ad KH; b ideoq; FG, maior erit, q̄ FK; pari q̄ totū. Quod est absurdum. b 10. quinti.

OSTENSIV E idem hac ratione ostenditur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum BD, EG, anguli B, E, sunt aequales, est q̄, ut AB, ad BC, ita CE, ad EF; habebunt triangula ABC, CEF, circa angulos aequales B, & E, latera proportionalia; * atq; idcirco aequiangula erūt, habebuntq; angulos BCA, EFC, aequales. Addito ergo cōmuni angulo BCF, erūt duo anguli BCA, BCF, duobus angulis EFC, BCF, aequales; d Sed hi inter parallelas BC, EF, aequales sunt duobus rectis. Igitur & BCA, BCF, duobus erunt rectis aequales; * Ac propterea AC, FC, vnam component rectam lineam. e 14. primi.

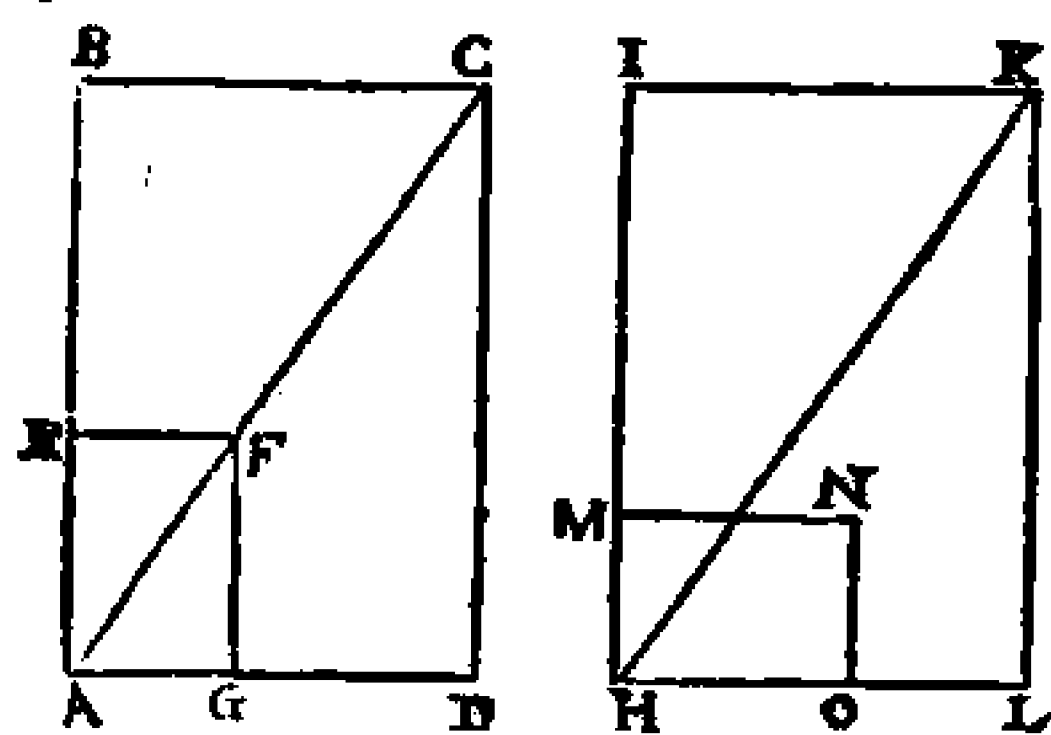
Quod est propositum.



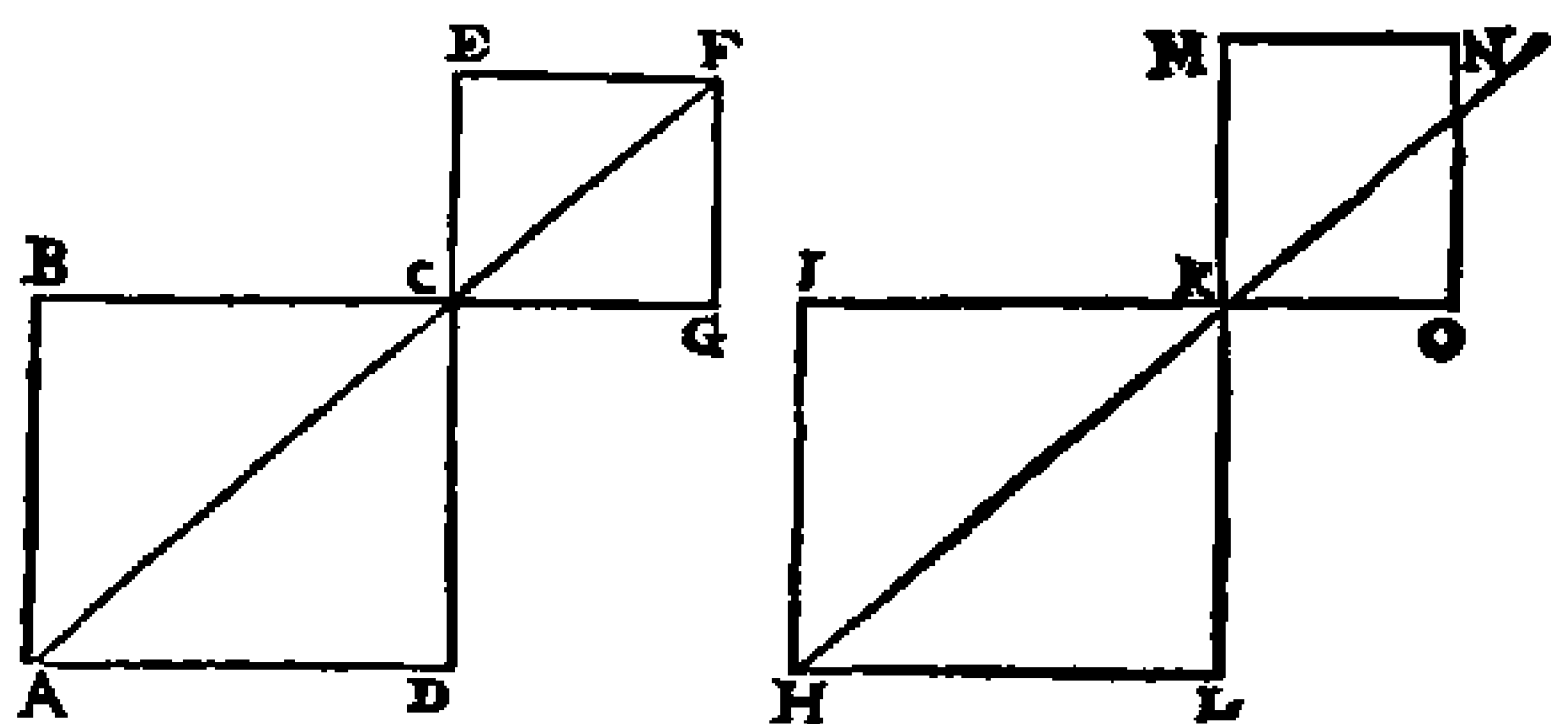
c 6. sexti.

d 29. primi.

e 14. primi.



RECT E autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum à toto ablatum nō solum esse toti simile, verum etiam similiter positū, ut ostendatur circa eandem esse cum toto diametrum. Nam si ex altera parte longiori BD, abscindatur altera parte longius EG, circa eandem cum toto diametrum consistens, f erit EG, simile similiterq; positum. f 24. sexti. At verò si in rectangulo IL, quod sit equilaterum & equiangulum ipsi BD, sumatur HM, aequalis ipsi EF, & MN, aequalis ipsi AE, & c. erit quidem rectangulum MO, aequale, & simile rectangulo EG, propter aequalitatem laterum, & angulorum, qui sunt recti; & ob id simile rectangulo IL; sed tamen quia non est similiter positum, non consistet circa eandem cum toto IL, diametrum.



ID E M quoq; hic perspicitur in rectangulis similibus, quorum vnum est extra alterum, secundum tamen angulos eorum ita inter se connexa, ut duo latera vnius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, quales sunt parallelogramma rectangula BD, EG; & IL, MO, in quibus EG, quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo BD, quoniam est similiter positum. At, verò MO, minimè consistit circa eandem diametrum cum rectangulo IL, quia non est similiter positum, quāvis simile sit, cum prorsus sit aequale ipsi EG. Nam KM, aequalis est ipsi EF, & MN, ipsi FC, & c.

fitum. At, verò MO, minimè consistit circa eandem diametrum cum rectangulo IL, quia non est similiter positum, quāvis simile sit, cum prorsus sit aequale ipsi EG. Nam KM, aequalis est ipsi EF, & MN, ipsi FC, & c.

THEOR. 20. PROPOS. 27.

26.

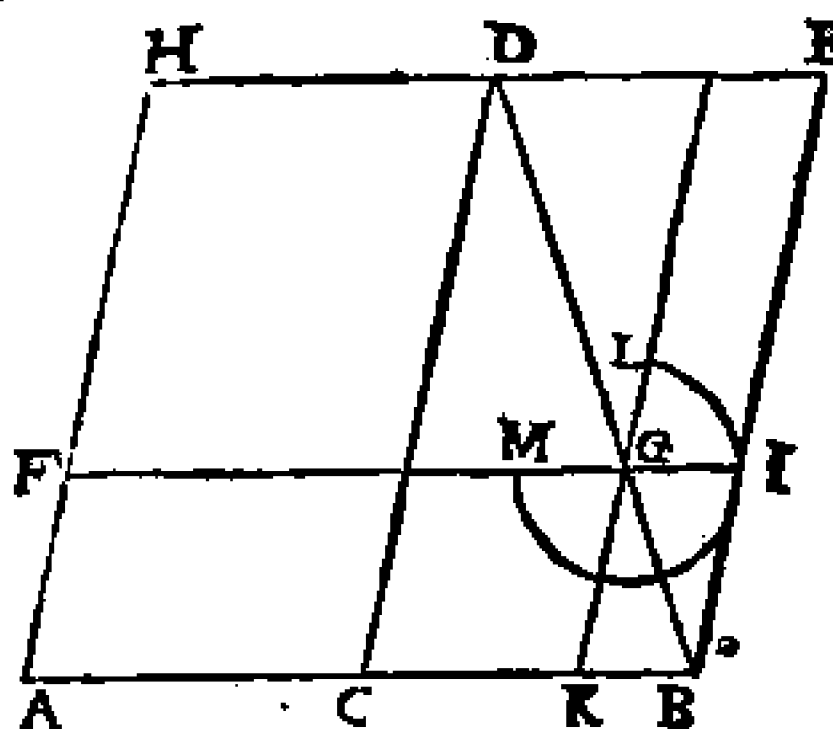
OMNIUM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterque positis, ei, quod à dimidia describitur; maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

DE RV R recta AB, diuisa bifariam in C, superque eius dimidiam BC, constitutatur quodcunque parallelogrammum CDEB, cuius diameter BD. Si igitur compleatur totum parallelogrammum AB EH, erit parallelogrammum AD, super dimidiam AC, consistens, applicatum secundum AB, deficiens parallelogrammo CE, & existens simile defectui CE. Dico parallelogrammum AD, ad dimidiam AC, applicatum deficiensque parallelogrammo CE, maximum esse omnium, quae secundum AB, rectam applicantur, deficientque parallelogrammis similibus similiterque positis ipsi CE. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro BD, & ductis p G, rectis FGI, KG, quae sint parallelae rectis AB, BE; erit parallelogrammum FK, secundum rectam AB, applicatū, deficiens parallelogrammo KI, * quod ipsi CE, simile est, similiterque positum, cum sit circa ean-

a 43. primi.

b 36. primi.

c 36. primi.



dem cum CE, diametrum. Quoniam verò complementa CG, GE, æqualia sunt: si addatur commune KI, erunt quoque æqualia CI, KE: Est autem CI, æquale ipsi CF, propter bases æquales AC, CB. Igitur & CF, KE, æqualia erunt: additoque cōmuni CG, æqualia erūt parallelogrammum AG, & gnomon LM. Quare cū CE, maius sit gnomone LM, (continet enim CE, præter gnomonē, parallelogrammum adhuc DG,) erit quoque AD, æquale existens ipsi CE, propter bases æquales AC, CB, maius q̃ parallelogrammū AG, eodem parallelogrammo DG. Eodemque modo ostendetur AD, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum re-

ctam AB, applicantur, ut punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupāt maiorem lineam semisse AC, habentq̃ minorem altitudinem, quā AD: dummodo defectus similes sint ipsi CE.

d 36. primi.

e 43. primi.

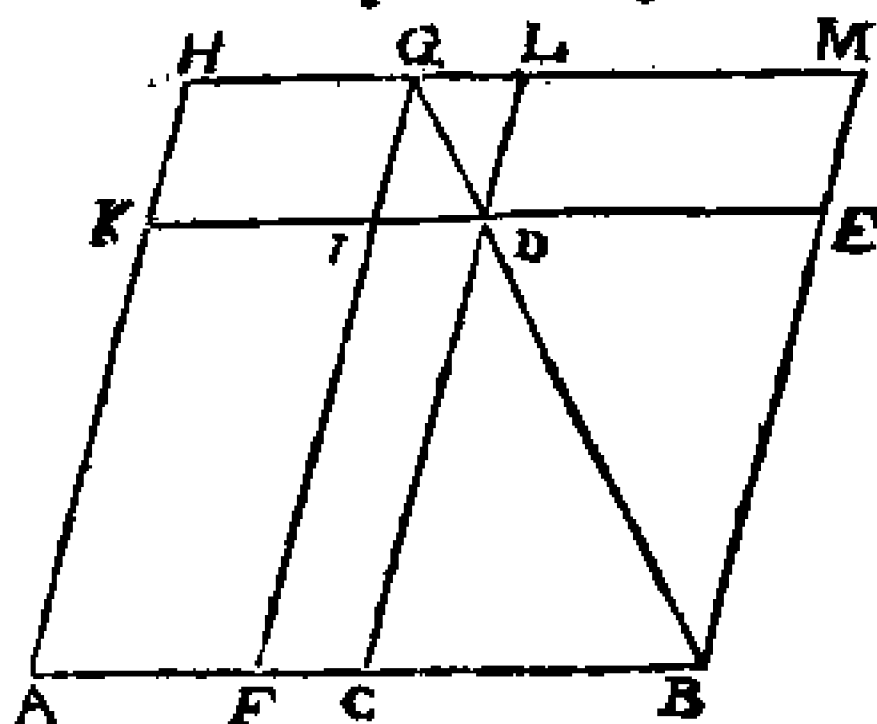
ALITER demonstrabitur AD, maius esse parallelogrammo AG, hoc modo: Parallelogramma FD, DI, sunt æqualia, cū bases HD, DE, sint æquales: Est autem DI, maius, quā GE, hoc est, quā complementum CG, (quod ipsi GE, æquale est,) parallelogrammo DG. Igitur & FD, maius erit, quā CG, parallelogrammo eodem DG. Atque idcirco addito cōmuni CF, maius erit AD, quā AG, parallelogrammo eodem DG.

f 24. sexti.

g 34. primi.

h 36. primi.

i 43. primi.



QVOD si punctum G, sumatur in diametro BD, producta extra parallelogrammum CE. Tunc ducta per G, recta HM, quæ sit parallela ipsi AB, occurratq̃ rectis AK, BE, protractis in H, & M. Item ducta GF, parallela ipsi AH: erit parallelogrammum AG, applicatum secundum rectam AB, deficiens parallelogrammo FM, f quod ipsi CE, est simile, similiterq̃ positū, cū sit circa eandem diametrum cum CE. Dico adhuc maius esse AD, ipso AG. Protracta enim CD, ad L, erūt æquales rectæ HL, LM, s cū æquales sint æqualibus AC, CB, h ideoq̃ æqualia parallelogramma HD, DM. Cū igitur DM, sit æquale complemen-

to DF: erit & HD, æquale ipsi DF. Est autem HD, maius quā HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, maius erit, quā HI, eodem parallelogrammo IL. Ac propterea cōmuni addito AI, maius erit AD, quā AG, eodem parallelogrammo IL. Iisdem argumentis concludes AD, maius esse quocunque parallelogrammo ita applicato secundum rectam AB, ut punctum G, sit ultra D, in diametro BD, producta: hoc est, quod occupat minorem lineam semisse AC, habetq̃ maiorem altitudinem, quā AD: dummodo defectus similis existat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorū secundum eandē rectam lineam applicatorū, &c. Quod erat demonstrandū.

S C H O L I U M.

MANIFESTUM autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel maiorem dimidiata AC, qualis est AK, in priori figura, vel minorem, cuiusmodi est AF, in figura posteriori: prout punctum G, sumitur vel in diametro BD, vel in ea producta ad partes D.

27.

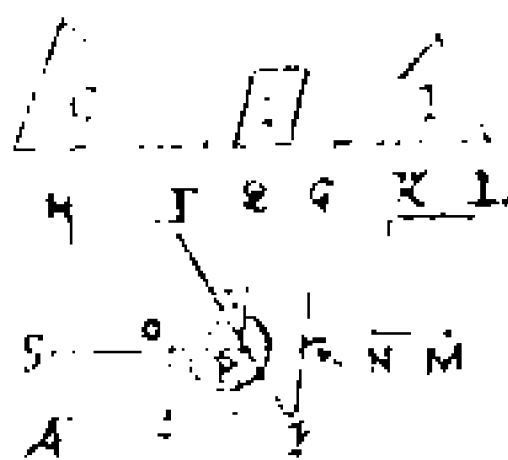
PROBL. 8. PROPOS. 28.

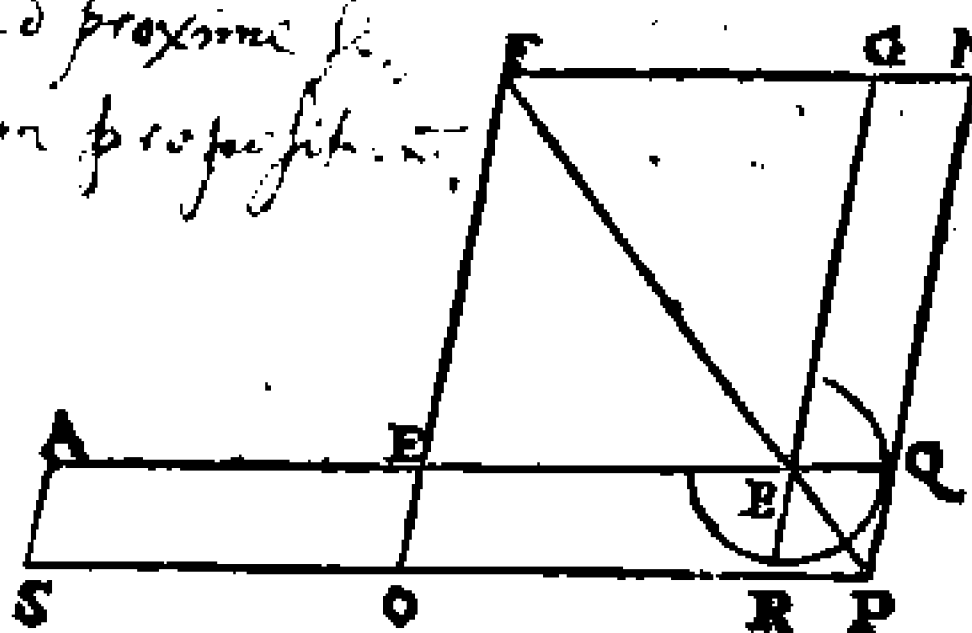
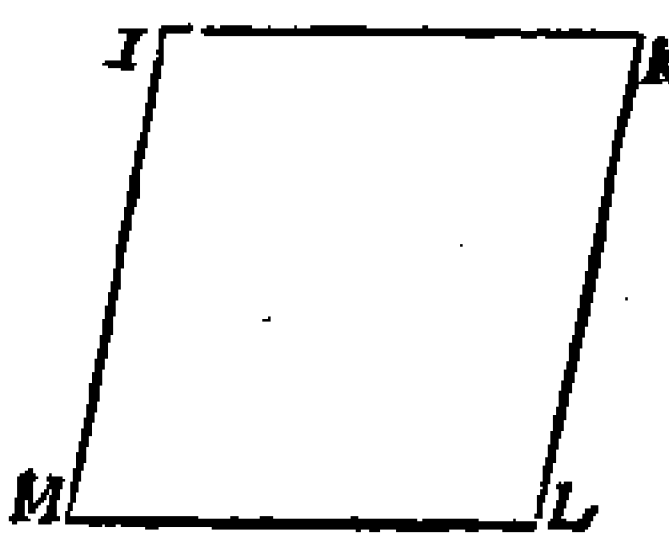
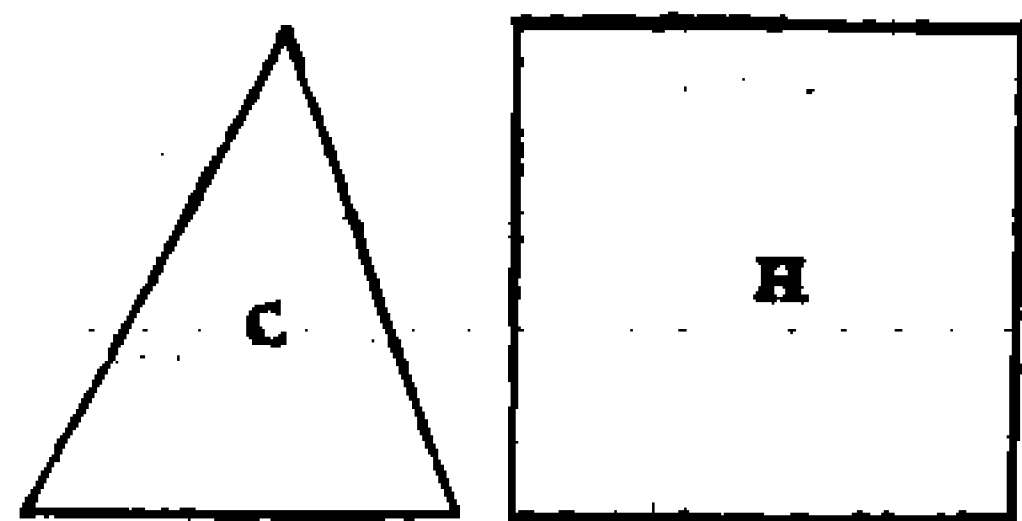
AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, nō maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cū similes fuerint defectus & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

A 18. sexti.

I 25. sexti.

AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta AB, bifariam in E, super medietatem EB, t describatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterq̃ positum: & compleatur totum parallelogrammum AHGB. Si igitur AF, æquale est ipsi C, cū sit applicatum ad AB, deficiens parallelogrammo EG, simili ipsi D: factum erit, quod iubetur. Si autem AF, maius est quā C, (Neque enim minus esse debet. Nam cū per propositionem præcedentem, ipsum sit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, non posset applicari ullum ad AB, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora. Propterea adiunxit Euclides: Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoque sibi æquale EG, maius q̃ C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua verò ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus, docuimus ad propof. 45. lib. I.) & constituatur parallelogrammum KLMN, simile quidem similiterq̃ positum ipsi D, seu ipsi EG, æquale verò excessui inuento I: ut sit EG, æquale rectilineo C, & parallelogrammo KM, simul: & ob id maius q̃ KM. Cū igitur ob similitudinem sit ut EF, ad FG, ita NK, ad KL, erunt quoq̃ latera EF, FG, maiora lateribus NK, KL. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, esset etiam EG, æquale ipsi NL, vel minus, ut constat. Quare abscissis rectis FO, FQ, quæ

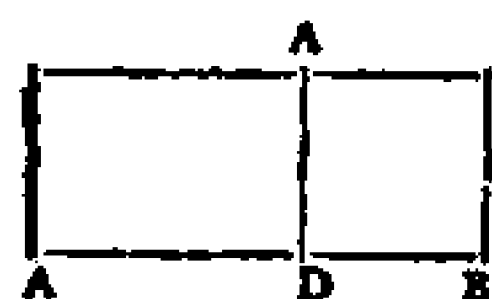




quæ sint æquales ipsis KN, KL , & completo parallelogrammo $FQPO$; erit hoc ipsi LN , æquale, & eidem simili similiterque positum, & propterea ipsi EG : ^{426. sexti.} atque adeo circa eandem diametrum cum EG , consistet, quæ sit BF . Productis iam rectis QP, OP , erit parallelogrammum AP , ad rectam AB , applicatum deficiens parallelogrammo PB , ^{624. sexti.} quod simile est ipsi EG , similiterque positum, & propterea ipsi D . Dico igitur AP , æquale esse ipsi C , rectilineo. ^{443. primi.} Nam cum PG , æquale sit complemento PE ; si addatur commune PB , erit & BQ , æquale ipsi ER , hoc est, ipsi ES , ^{436. primi.} quod æquale est ipsi ER , propter bases æquales EA, EB . Quare si æqualibus AO, BQ , commune addatur EP , erit AP , æquale gnomoni TV . Sed gnomon TV , æqualis est rectilineo C , (Nam cum EG , parallelogrammum æquale sit ipsi C , una cum LN ; si auferantur æqualia QO, LN , remanebit gnomon TV , ipsi C , æqualis.) Igitur & AP , eidem C , æquale erit. Ad rectam ergo AB , applicatum est parallelogrammum AP , deficiens parallelogrammo PB , quod simile est dato parallelogrammo D , & æquale existens rectilineo dato C . Quod faciendum erat.

SCHOLIUM.

MOVENT hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet; cum super EB , constituerimus EG , parallelogrammum non solum simile ipsi D , verum etiam similiter positum; quod ipsi minime fecerunt. Quæ de re, si placet, consule eorum Commentarios.

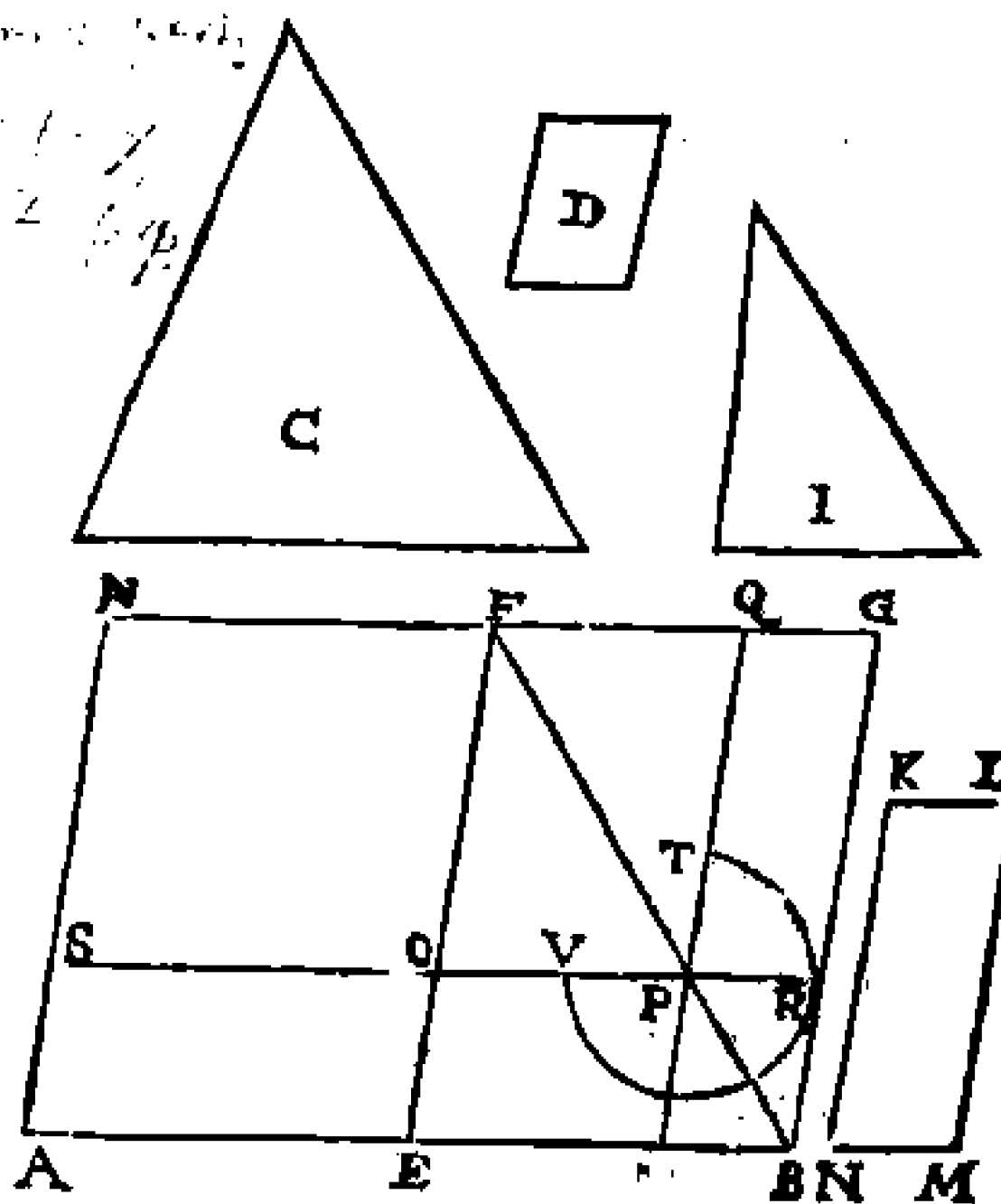


PERSPICUUM autem est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentu lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad AB , applicetur AC , deficiens quadrato CB , erit AC , applicatum, rectangulum contentum sub AD , & DB . Cum ergo DB , æqualis sit ipsi CB , propter quadratum CB ; continebitur quoque AC , sub segmentu AD , DB , per applicationem factis. Quod est propositum.

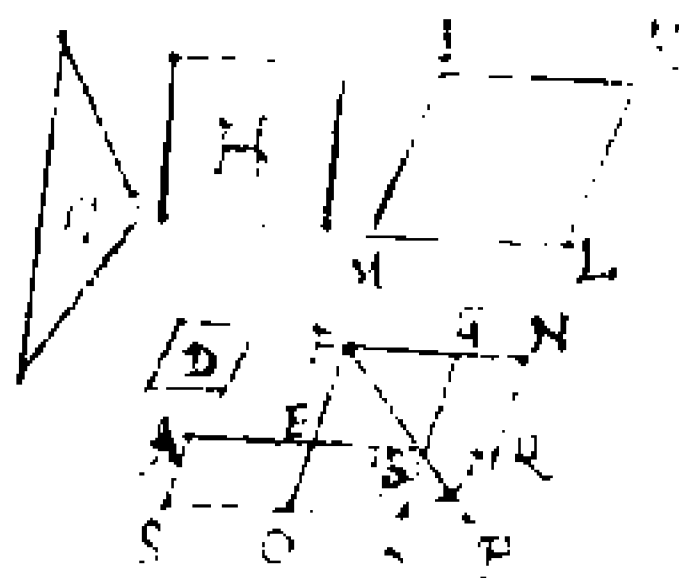
PROBL. 9. PROPOS. 29.

28.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.



AD datam rectam lineam AB , dato rectilineo C , applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D . Ducta AB , bisectam in E ; super dimidiam EB , construatur parallelogrammum $EFG B$, simile ipsi D , similiterque positum. ^{418. sexti.} Deinde rectilineo C , & parallelogrammo EFG , constituatur quadratum H , æquale; cui quidam fiat parallelogrammum $IKLM$, æquale, simile vero ipsi EG , similiterque positum: eritque propterea $IKLM$, maius quam $EFG B$, quandoquidem æquale est quadrato H , quod constructum est rectilineo C , una cum parallelogrammo EFG , æquale. Cum igitur ob similitudinem MK, EG , sit ut MI , ad IK , ita EF , ad FG , erunt quoque latera ML, IK , lateribus EF, FG , maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque MK , vel æquale ipsi EG , vel minus, ut perspicuum est. Productis igitur FE, FG , ut rectæ FO, FN , æquales sint rectis IM, IK , & completo parallelogrammo ON ; erit hoc simile similiterque positum ipsi EG , cum sit æquale ipsi MK , & simile, similiterque positum. ^{426. sexti.} Quare ON, EG circa eandem diametrum consistet, quæ sit FP . Productis iam AB, GB , ad $QR, & PO$, donec cum AS , ipsi FO , parallela conveniat in S , erit parallelogrammum AP , applicatum ad rectam AB , excedens



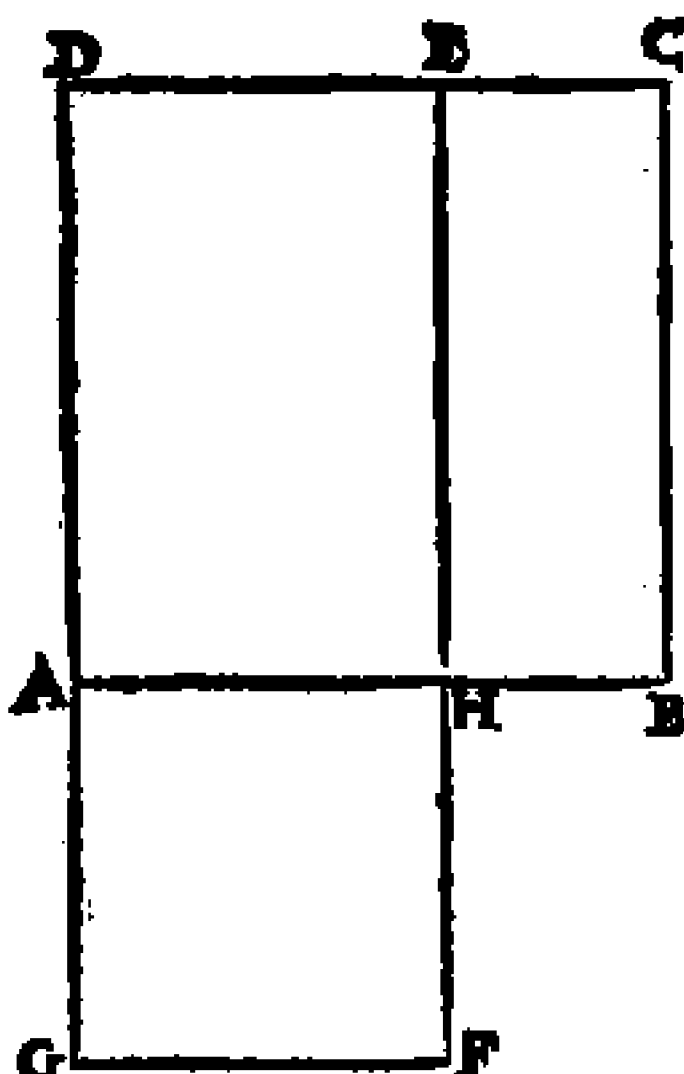
24. sexi. parallelogrammo QR , quod simile est ipsi EG , ac propterea ipsi D . Dico igitur AP , æquale esse
 36. primi. rectilineo C . Nam cum AO , ER , sint æqualia, & ER , æquale complemento RQ ; erit & AO ,
 43. primi. ipsi RQ , æquale. Addito ergo communi OQ , fiet AP , æquale gnomoni EPG . Atqui gnomon
 EPG , æqualis est rectilineo C . (Nam cum MK , hoc est, ON , æquale sit rectilineo C , una cum EG ;
 si auferatur commune EG , remanebunt æqualia gnomon EPG , & rectilineum C .) Igitur & AP ,
 æquale erit rectilineo C . Ad datam ergo rectam AB , dato rectilineo C , æquale parallelogrammum
 applicatum est AP , excedens parallelogrammo RQ , quod simile est alteri dato D . Quod facien-
 dum erat.

29.

PROBL 10. PROPOS. 30.

PROPOSITAM rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

29. sexi.



14. sexi.

SIT recta AB , secanda extrema ac media ratione. Descripto super
 eam quadrato $ABCD$; ad latus DA , applicetur rectangulum DF ,
 æquale quadrato AC , & excedens parallelogrammo AF , simili ipsi
 quadrato, ita ut sit AF , quoque quadratum, cum quadrato solum qua-
 dratum sit simile. Secet autem recta EF , rectam AB , in H . Dico AB ,
 in H , sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint
 DF , & AC , si dematur comune AE , remanebunt æqualia GH , HC ;
 quæ cum habeant angulos æquales AHF , BHE , utpote rectos; erunt
 latera circa illos reciproca: hoc est, erit ut EH , hoc est, ut AB , ipsi EH ,
 æqualis, ad HE , hoc est, ad AH , ipsi HF , æqualem, ut AH , ad HB . Qua-
 re cum sit, ut tota AB , ad segmentum AH , ita segmentum AH , ad se-
 gmentum HB , secta est AB , extrema ac media ratione, per definitio-
 nem. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat
 faciendum.

17. sexi.

medie AH : erunt ipsæ proportionales: ut AB , quidem prima ad AH , secundam, ita AH , secun-
 da ad HB , tertiam. Quare per definitionem secta est AB , in H , extrema ac media ratione.

21. secundi.



17. sexi.

ratione. Erunt enim rursus, ut prius, tres lineæ AB , AC , CB , continuè proportionales. Constat
 ergo propositum.

SCHOLIUM.

PRÆXIS divisionis lineæ rectæ extrema ac media ratione instituenda est, ut ad propositionem 11. lib. 2.
 tradidimus.

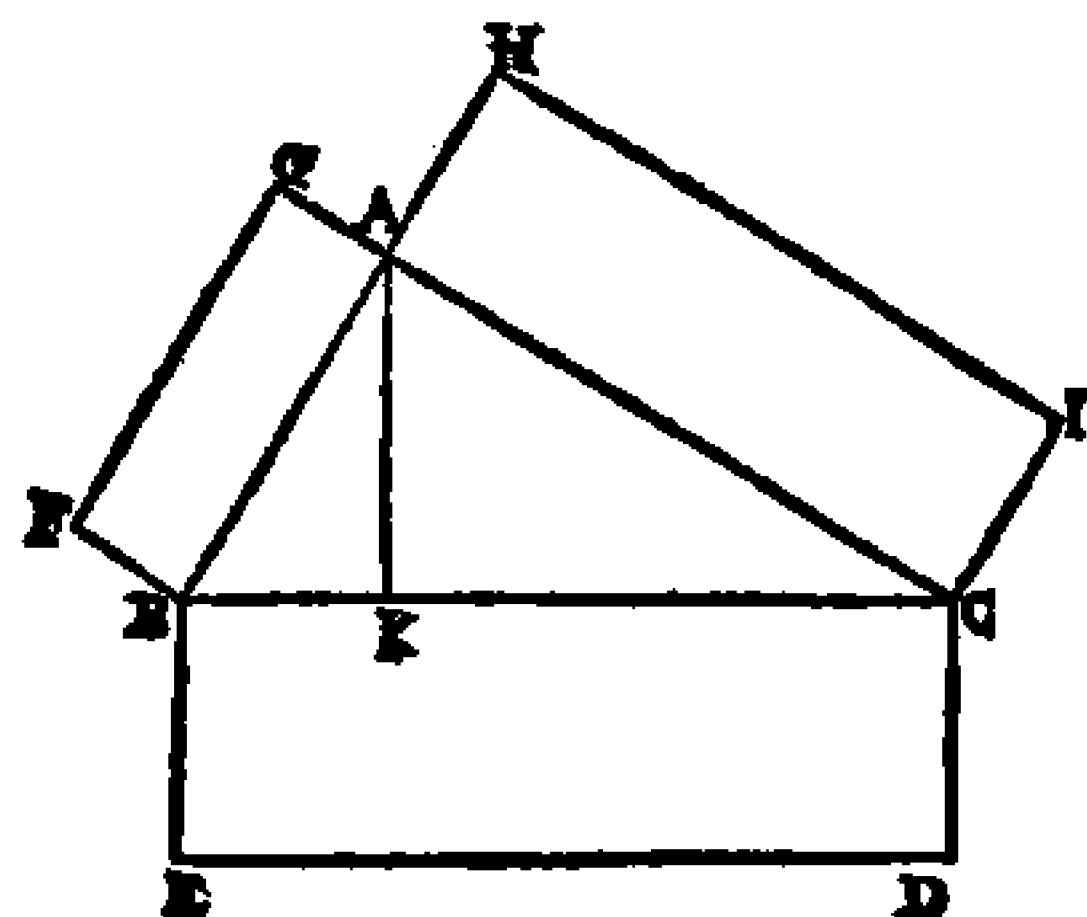
HABET autem admiranda hæc sectio lineæ extrema ac media ratione insignes utilitates proprietatesque,
 ut in libris Stereometria manifestum erit, ut non sine causa à plerisque Mathematicis lineæ ita divisa disti-
 nam quodammodo, ob admirabilem eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab alijs vero sim-
 pliciter vocetur divisa proportionatice.

31.

THEOR. 21. PROPOS. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quævis à latere rectum angulum subtendente
 descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus re-
 ctum angulum continentibus describuntur.

18. sexi.



TRIANGULUM rectangulum sit ABC , habens an-
 gulum BAC , rectum; describaturque super BC ; quæ-
 cunque figura rectilinea BDE , cui similes simili-
 terque positæ super AB , AC , constituentur $ABFG$,
 ACH . Dico figuram BD , æqualem esse duabus figu-
 ris AF , AI . Demissa enim ex A , ad BC , perpendiculari
 AK , erit per coroll. propof. 8. huius lib. ut BC , ad CA ,
 ita CA , ad CK . Quare ut BC , ad CK , prima linea ad
 tertiam, ita figura BD , super primam, ad figuram CH ,
 super secundam, similem similiterque positam, per co-
 rollarium propof. 19. vel 20. huius lib. & convertendo
 ut CK , ad BC , ita figura CH , ad figuram BD . Non se-
 cus ostendetur, esse quoque ut BK , ad BC , ita figuram
 BG , ad figuram BD ; cum tres lineæ BC , BA , BK , sint
 quoque proportionales, &c. Quoniam igitur est ut CK ,
 prima

prima quantitas ad B C, secundam, ita C H, tertia ad B D, quartam: Item vt B K, quinta quantitas ad B C, secundam, ita B G, sexta ad B D, quartam: ^{a24. quinti} erit vt prima C K, cum quinta B K, ad B C, secundam, ita tertia C H, cum sexta B G, ad B D, quartam: Sunt autem prima C K, & quinta B K, simul æquales secundæ B C. Igitur tertia C H, & sexta B G, simul æquales quoque erunt quartæ B D. Quod est propositum.

ALITER. Cum triangulo A B C, simile sit triangulum K A C, ^{b8. sexti.} sintque homologa latera ipsorum B C, C A: (Nam est vt B C, ad C A, in triangulo A B C, ita C A, ad C K, in triangulo K A C,) habebit triangulum K A C, ad triangulum A B C, duplicatam proportionem eius, quam habet C A, ad B C. ^{c19. sexti.} Habet autem & figura C H, ad figuram B D, proportionem duplicatam proportionis C A, ad B C. ^{d19. vel 20. sexti.} Quare erit vt triangulum K A C, ad triangulum A B C, ita figura C H, ad figuram B D. Eadem ratione ostendetur esse, vt triangulum K B A, ad triangulum A B C, ita figuram B G, ad figuram B D. Quoniam ergo rursus est, vt K A C, prima quantitas ad A B C, secundam, ita C H, tertia ad B D, quartam: Item, vt K B A, quinta ad A B C, secundam, ita B G, sexta ad B D, quartam: ^{e u. quinti.} erit & prima K A C, composita cum quinta K B A, ad secundam A B C, vt composita tertia C H, cum sexta B G, ad quartam B D: Sunt autem K A C, K B A, prima & quinta simul æquales secundæ A B C. Igitur C H, B G, tertia & sexta simul, æquales quoque erunt quartæ B D. Quod est propositum.

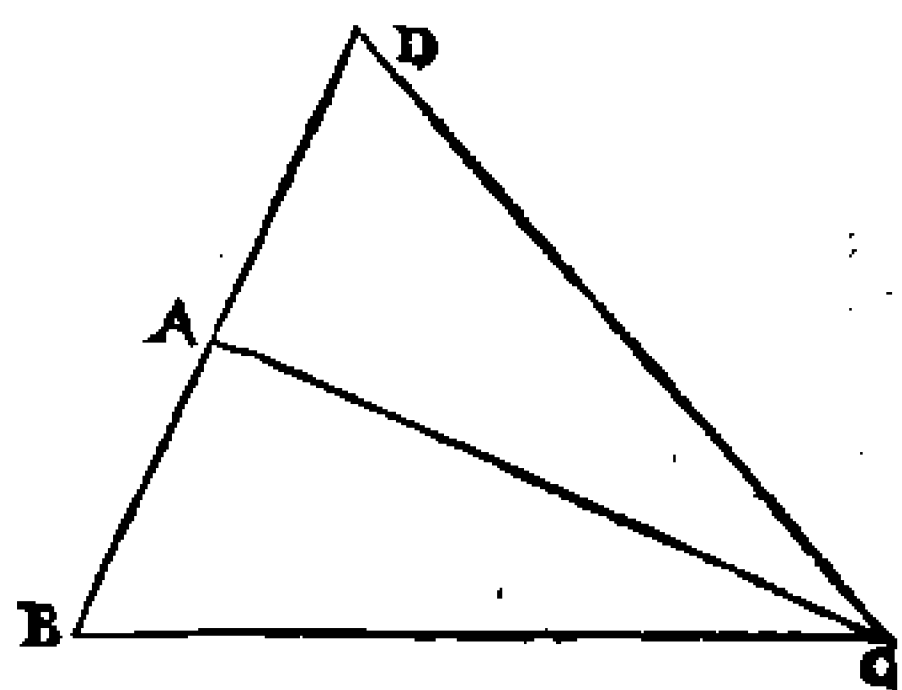
ALITER. Vt quadratum rectæ A C, prima quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundam quantitatem, ita est figura C H, tertia quantitas ad figuram B D, quartam quantitatem, ^{g19. vel 20. sexti.} & cum vtraque proportio sit duplicata proportionis A C, ad B C. Similiter erit, vt quadratum rectæ A B, quinta quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundam quantitatem, ita figura B G, sexta quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem. ^{h24. quinti.} Quoties erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ A C, cum quadrato rectæ A B, ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ B C, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura C H, cum figura B G, ad quartam, videlicet ad figuram B D: Sunt autem quadrata rectarum A C, A B, simul æqualia quadrato rectæ B C. Igitur & figura C H, B G, figura B D, æquales erunt. Quod est propositum. In rectangulis igitur triangulis, figura quævis, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I V M.

VIDES igitur, longè esse vniuersalius theorema hoc Euclidis, quod sese ad omnes figuras similes similiterq; descriptis extendit, quàm illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, vt propos. 47. primi lib. monuimus. Videtur tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonstrauimus, aliqua ex parte adhuc esse vniuersalius, quàm hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisq; etiam non similibus; Hoc verò de triangulo tantummodo rectangulo, figurisq; similibus, & similiter positis, proponatur.

CONFIRMEMVS etiam theorema hoc ex Campano non aliter, quàm 47. propositionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab vno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.



DETER triangulum A B C, sitq; figura quævis super latere B C, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus similiterq; descriptis super reliqua latera A B, A C. Dico angulum B A C, esse rectum. Ducatur enim A D, ad A C, perpendicularis, quæ sit ipsi A B, æqualis, & connectatur recta C D. Quoniam igitur angulus C A D, rectus est, ^{a31. sexti.} erit figura super C D, (quæ similis sit ei, quæ super B C, similiterq; posita) descripta æqualis figuris super A B, A C, descriptis, quæ ei similes sint, similiterq; posita: Est autem figura super A D, æqualis figura super A B, ob æqualitatem laterum. Igitur figura super C D, æqualis erit figuris super A B, A C. Cum igitur figura super

B C, eisdem figuris super A B, A C, æqualis ponatur, erunt figura super C D, B C, inter se æquales, ac propterea recta C D, B C, æquales erunt, vt constat ex lemmate propos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera A D, A C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus A B, A C, trianguli A B C, & basis D C, ostensa est quoq; æqualis basi B C, ^{b8. primi.} erunt anguli D A C, B A C, æquales. Quare cum D A C, rectus sit, ex constructione, rectus quoque erit B A C. Quod est propositum.

THEOR. 22. PROPOS. 32.

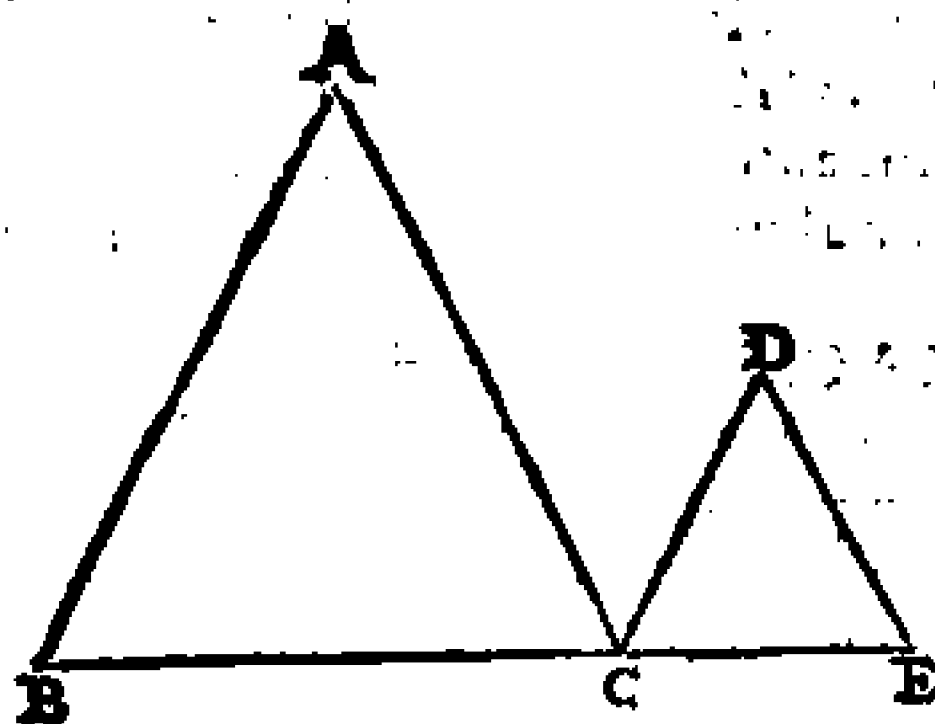
30.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

HABEANT triangula A B C, D C E, latera A B, A C, lateribus D C, D E, proportionalia, vt qui-

a 29. primi.

b 6. sexti.



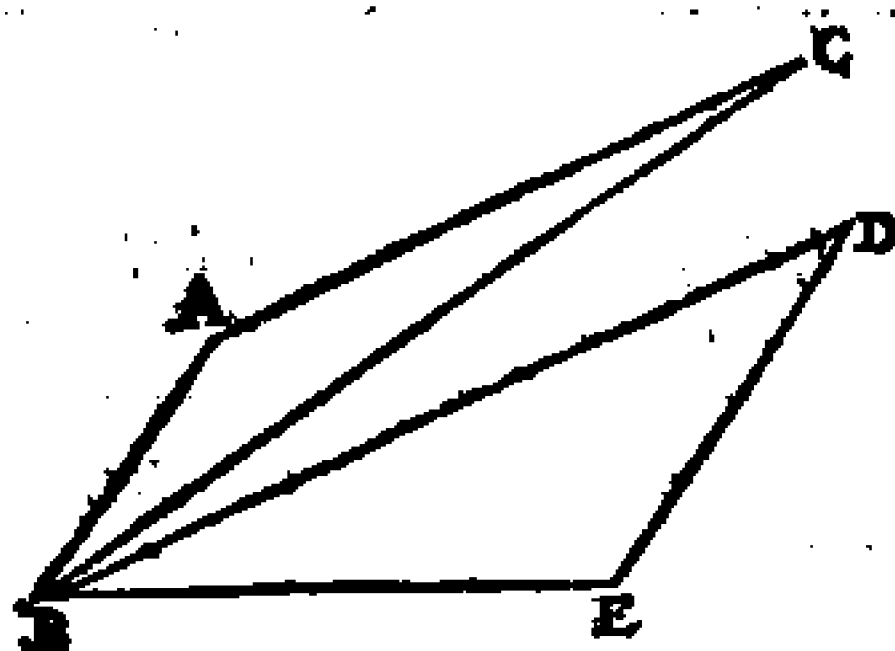
c 32. primi.

d 14. primi.

duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito comuni ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: Sed illi tres æquales sunt duobus rectis. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: Atque idcirco BC, CE, vnam rectam lineam constituent. Itaque si duo triacula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I V M.

DEBENT autem prædicta duo triacula ita secundum vnum angulum esse composita, ut vterque, angulorum à lateribus proportionalibus comprehensus, alterius sit illi angulo, secundum quem triacula componuntur, veluti in figura theoremati factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quem triacula sunt composita, alternus est tam angulus A, quam angulus D, quorum vterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales, & propterea triacula esse æquiangularia; atque adeo ex BC, CE, vnam rectam lineam componi, ut ex demonstratione liquet.



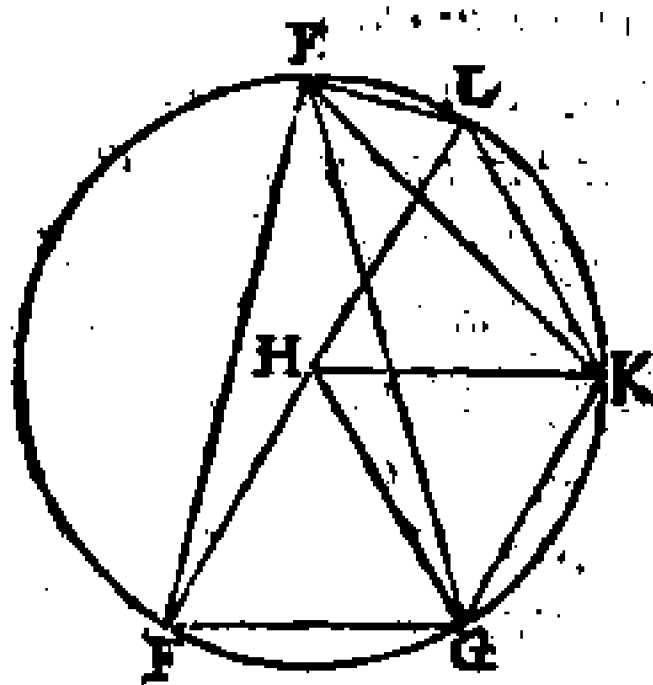
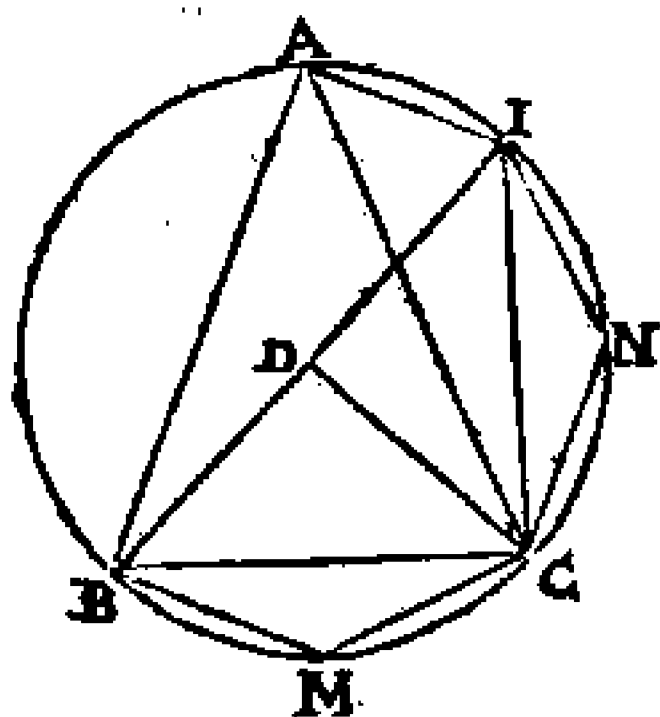
ut perspicuum est. Quamobrem demonstratio theoremati locum non habet.

Q U O D si vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triacula componuntur, licet reliqua hypotheses theoremati seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duo triacula ABC, DBE, habent duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DB, proportionalia, ut quidem AB, ad AC, ita DE, ad DB, composita, sunt ad angulum CBD, ita ut tam homologa latera AB, DE, quam AC, DB, sint parallela: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, non constituent vnam lineam rectam, propterea quod angulo CBD, non sit alternus vterque angulorum A, & D, immo neuter eorum,

THEOR. 23. PROPOS. 33.

32.

IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistent, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper verò & sectores, quippe qui ad centra consistunt.



e 1. quarti.

f 28. tertij.

g 27. tertij.

ad sectorem FHG, quem comprehendunt rectæ FH, HG, & arcus FG. Duæ enim rectæ BC, FG, applicentur ipsis in circulis æquales rectæ: CI, quidem ipsi BC: At verò GK, KL, ipsi FG: ducanturque rectæ ID, KH, LH. Quoniam igitur æquales sunt rectæ BC, CI, & erunt quoque æquales arcus BC, CI: & ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK, KHL. Quam multiplex ergo est arcus BC, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui BCI, anguli BDC: Et quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, insistentium, anguli FHG: quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam verò si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL,

FGKL,

FGKL, ^a necessariò angulus BDI, angulo FHL, æqualis est: Ac proinde si arcus BCI, maior fuerit arcu FGKL, necessariò angulus BDI, maior est angulo FHL; & si minor, minor: Deficiet propterea vna arcus BCI, & angulus BDI, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æquemultiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vnâ æqualia erunt; vel vnâ excedet; si ea sumantur, quæ inter se respondent. ^b Quare quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem. Atq; hoc verum etiam est de spatiis in centris: hoc est, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, vt spatium ad centrum D, insistent arcui BAC, ad spatium ad centrum H, insistent arcui FEG: vt ex demonstratione patet. Nam & hæc spatia, si æqualia sunt, insistent æqualibus arcibus; & si inæqualia, inæqualibus, &c.

QUONIAM verò vt angulus BDC, ad angulum FHL, ita est angulus BAC, ad angulum FEG; ^c ita cum illi horum sint dupli; perspicuum est, ita esse quoque angulum BAC, ad angulum FEG, vt est arcus BC, ad arcum FG. Quod tamen eisdem argumentis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centra constitutis, si prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c. Quod si ad circumferentias constituti sint anguli eiusmodi BAC, FEG, vt rectæ ductæ BD, CD; FH, GH, ad constituent angulos in centris versus arcus BMC, FG; sumenda erunt spatia BDC, FHG, quæ dupla etiam sunt angulorum ad circumferentias, ex schollio propos. 20. lib. 3.

CONSTITVANTVR iam in segmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, qui æquales erunt, cum insistant arcibus æqualibus BAC, CBAI. Quare similia erunt segmenta BMC, CNI, & atque adeò inter se æqualia, propterea quod sunt super rectas BC, CI, æquales. Additis igitur triangulis BDC, CDI, quæ æqualia quoque sunt, sicut sectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector BDI, sectoris BDC, quam est multiplex arcus BCI, ipsius arcus BC. Similiter ostendemus, sectorem FHL, tam multiplicem esse sectoris FHG, quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG. Quoniam verò si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, sector quoque BDI, sectori FHL, æqualis est: (vt in sectoribus BDC, CDI ostensum fuit,) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficiat propterea vna arcus BCI, & sector BDI, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab arcu FGKL, & sectore FHL, æquemultiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vnâ æqualia erunt; vel vnâ excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. Quamobrem quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit sectoris BDC, tertiæ magnitudinis, ad sectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, &c. Quod demonstrandum erat.

COMMODIVS fortasse instituetur demonstratio hoc modo: Sumantur quotuis circuli æquales circulo ABC, atque in singulis sumantur singuli arcus arcui BC, æquales, quibus insistant anguli tam ad centra, quam ad circumferentias. Erunt enim omnes hi anguli æquales angulis BDC, BAC, ob æqualitatem arcuum, quibus insistant; ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorum BDC, BAC, vt est multiplex aggregatum omnium arcuum ipsius arcus BC. Deinde sumantur etiam quotuis circuli æquales circulo EFG, & in singulis accipiantur singuli arcus arcui FG, æquales, &c. Hac enim ratione vitabitur confusio linearum, & angulorum in circulis ABC, EFG, quæ necessariò oritur, quando arcus BC, FG, sunt magni, & eorum multiplices accipiendi sunt, vt perspicuum est. Nam si arcus essent BCI, FGL, quibus insistant anguli BDI, FHL, ad centra, & BAI, FEL, ad circumferentias; non poterunt eorum multiplices sumi sine confusione, vt patet. Hæc autem confusio vitatur, si plures circuli æquales adhibeantur, vt diximus.

COROLLARIUM I.

Hinc manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, vt est angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem est proportioni arcus ad arcum. ^a Quare & inter se eadem erunt.

COROLLARIUM II.

PERSPICVVM quoque est, vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circumferentiam. Et contrà, vt sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circumferentiam ad arcum illi angulo subtensum.

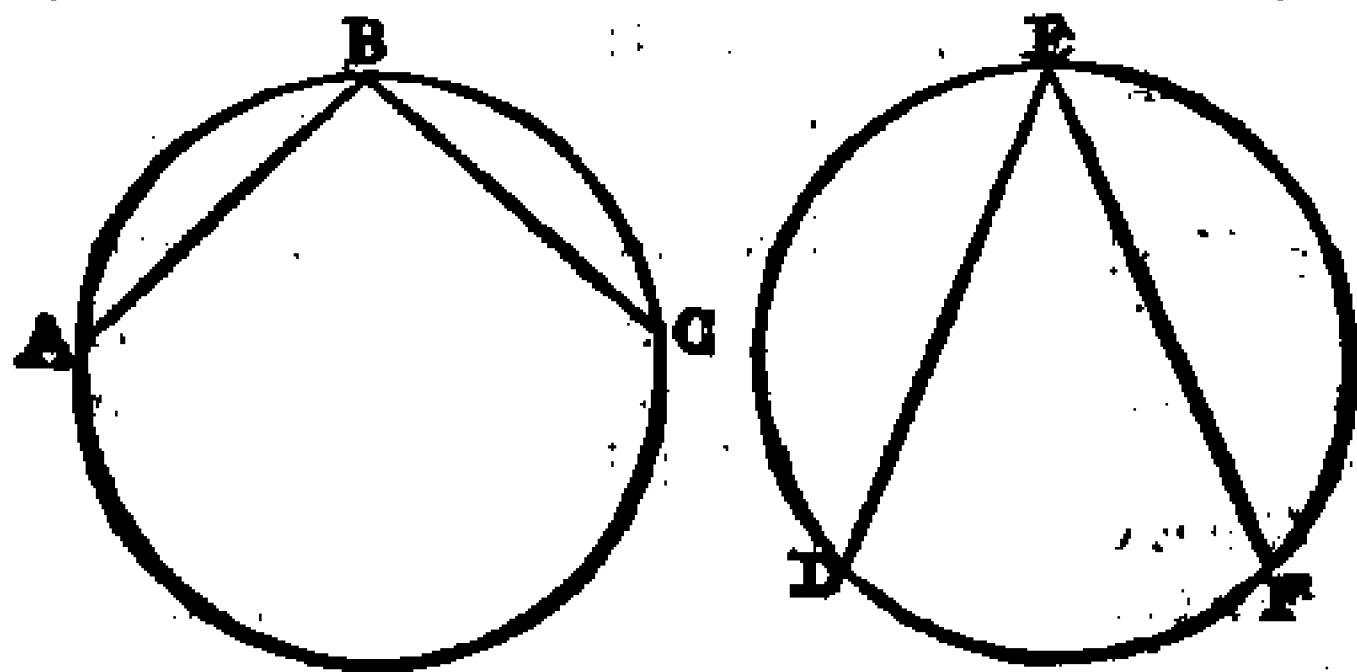
NAM vt est angulus in centro ad angulum rectum in centro, ita est arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos; ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiam, per ea, quæ ad 22. propos. lib. 5. demonstrauimus. Quod est primum. Quoniam igitur est, vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circumferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro subtensum. Quod est secundum. Verum hoc etiam ita demonstrabitur. Cum sit, vt angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoque, per ea, quæ ad propos. 22. lib. 5. ostendimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita qua-

duplum quæ ad præteritū, nimirum tota circumferentia, ad arcum illi angulo subtensum. Quod est propositum.

Idem verum est de spatio in centro: hoc est, ut est spatium in centro ad quatuor rectos, ita est arcus subtensus illi spatio ad totam circumferentiam, &c. ut ex demonstratione patet.

SCHOLIUM.

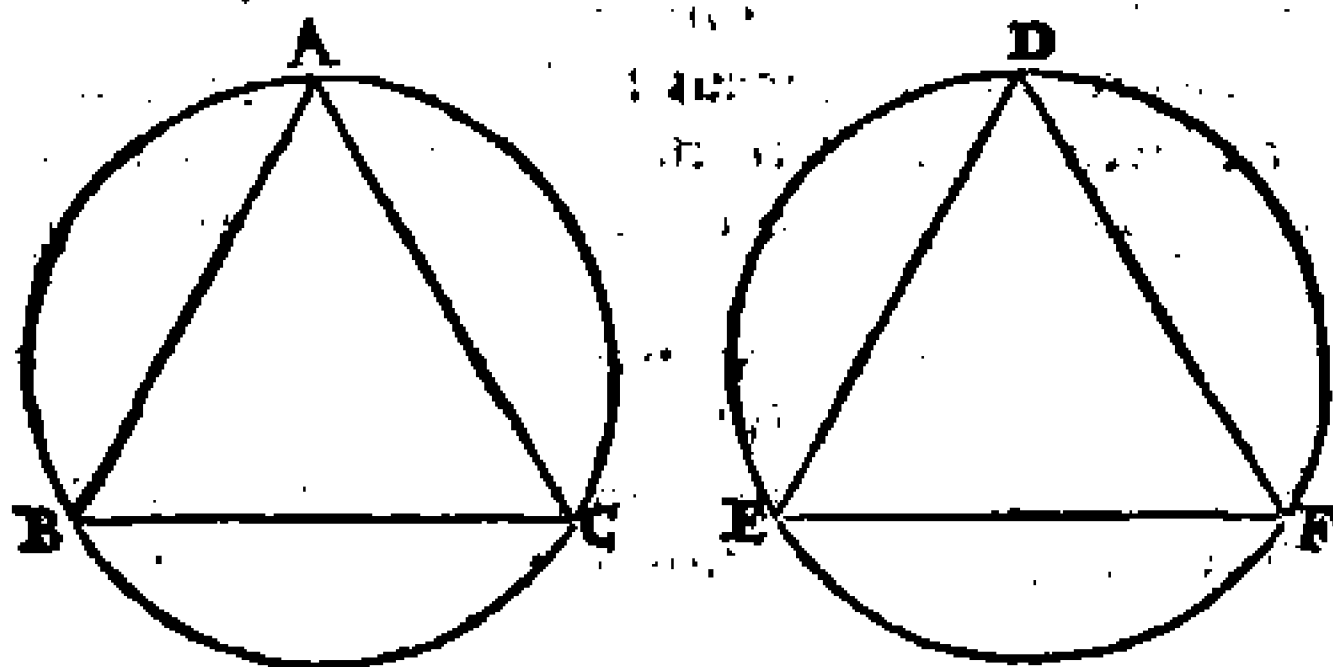
Cæterum ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum, qui circumferentia alicui insistit, referendum esse ad arcum, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum, in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, ut vult Euclides in proposito hoc theoremate. Sint enim



circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentiam constituti sint B, E; maior quidem B, minor autem E. Quo posito, erit arcus AC, maior arcu DF, ex scholio propof. 26. lib. 3. ac propterea reliquus arcus ABC, minor reliquo arcu DEF. Quare proportio anguli B, ad angulum E, est maioris inæqualitatis; proportio verò arcus ABC, ad arcum DEF, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem

est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod si sumamus arcus super quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus AC, DF, cum demum erit angulus B, ad angulum E, ut arcus AC, ad arcum DF, ut recte demonstravit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus, angulum insistere segmento, seu arcui. Id quod in expositione defin. 8. lib. 3. monuimus.

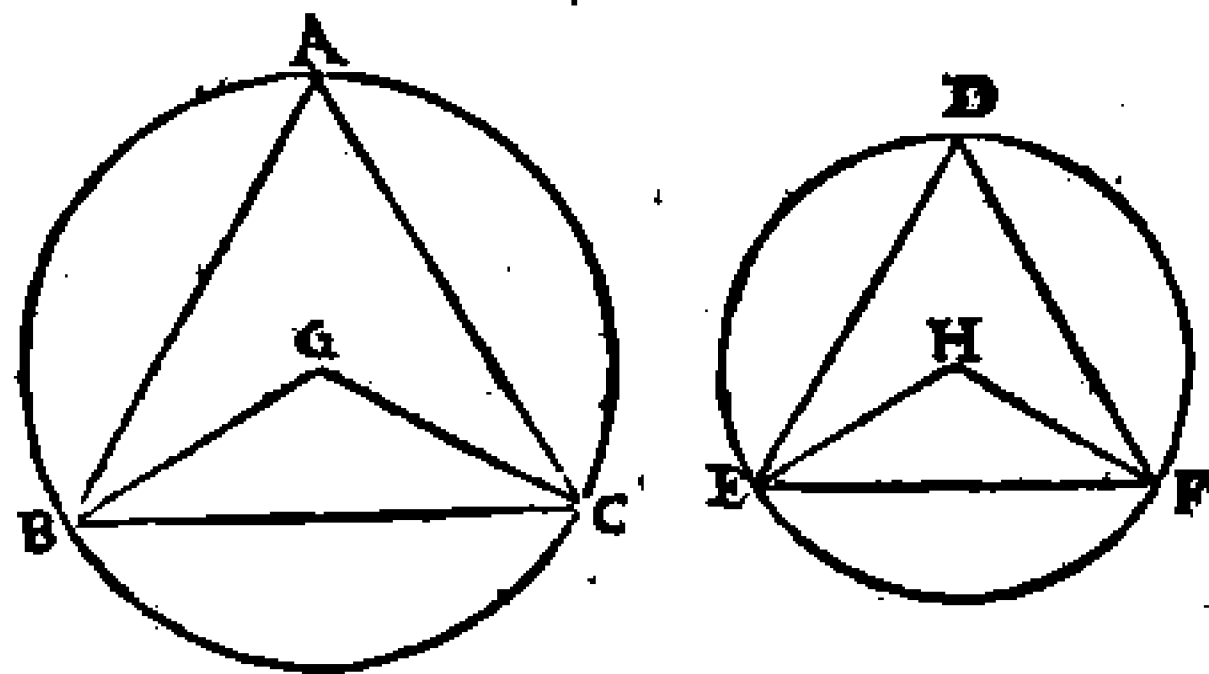
Non obscure quoque, ex hoc theoremate demonstrari potest, similitudinem segmentorum in circulis similium, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definitur per angulos æquales in ipsis segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circumferentia similes, ad integras circumferentias circularum eandem habeant proportionem: & propterea quando segmenta totius circuli commensurabilia sunt, qualis pars est una circumferentia totius sue circumferentiæ, talis quoque, sit alia circumferentia similis totius sue circumferentiæ: veluti in



expositione prædicta definitionis docuimus. Sint enim primum duo circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF: Quo posito, segmenta BAC, EDF, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circumferentias habere eandem proportionem ad integras circumferentias. Cum enim ob circularum æqualitatem, arcus BC, EF, quibus anguli

a 26. tertij.

æquales insistant, sint æquales: efficitur reliquas circumferentias BAC, EDF, esse quoque, æquales. Quare ad totas circumferentias, quæ æquales etiam ponuntur, eandem proportionem habebunt: Atque, idcirco, quæ pars est arcus BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEF D.



c 20. tertij

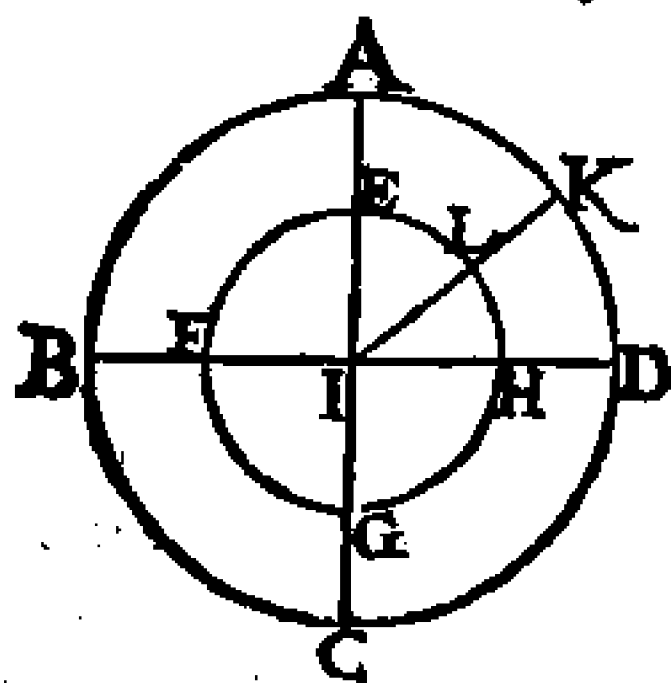
hi illorum dupli existant: Vel erunt spatia ad centra, æqualia, cum hæc quoque, sint angulorum ad circumferentias dupla, ex scholio propof. 20. lib. 3. Quare quatuor recti ad angulum, vel spatium G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum, vel spatium H. Atqui ut quatuor recti ad angulum, vel spatium G, ita est tota circumferentia ABCA, ad arcum BC: Et ut quatuor recti ad angulum, vel spatium A, ita est tota circumferentia DEF D, ad arcum EF, ex corollario 2. huius propof. 33. Igitur ut tota circumferentia ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circumferentia DEF D, ad arcum EF. Per conversionem ergo rationis erit quoque, ut tota circumferentia ABCA, ad arcum BAC, ita tota circumferentia DEF D, ad arcum EDF. Et convertendo, ut arcus BAC, ad totam circumferentiam ABCA, ita arcus EDF, ad totam circumferentiam DEF D. Quocirca quæ pars est arcus BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEF D. Quod est propositum.

CONSTANTINUS

CONSTAT igitur recte Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt aequales: quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.

FACILE ex his demonstrabitur, theorema illud, quod ad calcem cap. 1. in sphaera, & ad propof. 22. lib. 3. sine proportionibus ostendimus, videlicet:

Si duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti similes.



SINT duo circuli $ABCD$, $EFGH$, circa idem centrū I , descripti. Si igitur egrediantur e centro I , duæ rectæ IB , ID , efficietes vnā lineam rectam BD , manifestum est, arcus BA , DH , similes esse, cū sint semicirculi. Rursus si ex I , egrediantur duæ rectæ IA , ID , constituentes angulum rectū AID , perspicuum quoque est, arcus AD , EH , similes esse, cū ex scholio propof. 27. lib. 3. sint Quadrantes suorum circulorum.

EMITTANTUR etiam ex I , duæ rectæ ID , IK , faciētes quemcunque angulum nō rectum DIK . Dico adhuc arcus DK , HL , similes esse, hoc est, idē esse arcum DK , ad totam circumferentiam $ABCD$, vt est arcus HL , ad totam circumferentiam $EFGH$. Quoniā enim vt angulus DIK , ad quatuor rectos, ita

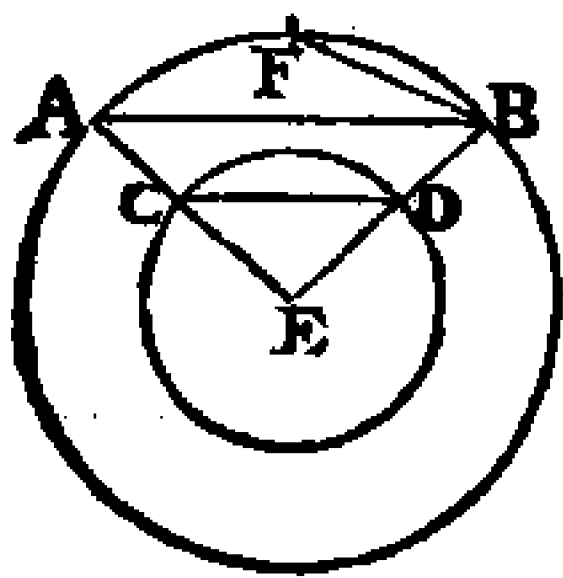
est ex coroll. 2. huius propof. tam arcus DK , ad totam circumferentiam $ABCD$, quā arcus HL , ad totam circumferentiam $EFGH$; erit vt arcus DK , ad totam circumferentiam $ABCD$, ita arcus HL , ad totam circumferentiam $EFGH$: ac proinde arcus DK , HL , similes erunt. Quod est propositum.

BR E V I V S idem confirmabitur hoc modo: Quoniam arcubus DK , HL , insistant in centro I , anguli aequales, immo idem; erunt ex scholio propof. 22. lib. 3. arcus DK , HL , similes: ac proinde ad totas circumferentias eandem proportionem habebunt, vt paulo ante ostensum est.

E A D E M ratione ostendemus arcus BA , FE , similes esse, id est, habere ad totas circumferentias eandem proportionem.

S E D placet etiam hic demonstrare lemma, quod ad propof. 6. lib. 3. Theodosii proposuimus, cū ad multa alia conducatur. Illud autem est eiusmodi.

A E Q V A L E S rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorque est arcus minoris circuli, quā vt similis sit arcui circuli maioris.



SINT circuli inæuales AB , CD , circa idem centrū E , descripti. Ducantur autē ex E , duæ rectæ vtcunque, EA , EB , secantes circulos in A , B , & C , D , punctis; eruntque arcus AB , CD , similes, vt proximè demonstrauimus. Et quoniam rectæ EA , EB , sectæ sunt in C , D , proportionaliter, quod tam EA , EB , q̃ EC , ED , inter se aequales sint: erūt ductæ rectæ AB , CD , parallelæ; atque idēd triangula EAB , ECD , ex coroll. propof. 4. huius lib. similia erunt. Erit igitur vt EA , ad AB , ita EC , ad CD . Est autem EA , maior q̃ EC . Igitur & AB , maior erit, q̃ CD . Accommodetur ergo ipsi CD , in circulo AB , æqualis BF ; eritque ex scholio propof. 28. lib. 3. arcus AB , maior arcu FB . Quare cū arcus CD , arcui AB , similis sit; erit

arcus CD , maior, quā vt similis sit ipsi FB . Aequales igitur rectæ CD , BF , ex circulis inæqualibus AB , CD , arcus inæuales auferunt, maiorque est arcus CD , circuli minoris, quā vt similis sit arcui FB , circuli maioris. Quod est propositum.

H I N C perspicuum est, multo magis minorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, q̃ vt similis sit ei, quem ex circulo maiore auferat linea minor. Cū enim rectæ CD , æqualis ipsi BF , auferat arcū CD , maiorem, quā vt similis sit arcui FB , multo magis linea maior, quā CD , auferet maiorem arcum, quā vt similis sit arcui FB ; cū illa maiorem arcum abscindat, q̃ CD , vt in scholio propof. 28. lib. 3. ostendimus.

H A E C autē demonstratio propositum tantū colligit, quando arcus abscissi sunt semicirculo minores, quales sunt BF , CD , vt ex ipsa demonstratione constat. Nam aliās non constitueretur angulus in E , centro communi: quod tamen ad demonstrationem requiritur. Verūm nihilominus erit, si arcus semicirculo minor circuli minoris maior est, quā vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris, multo maiorem esse arcum semicirculo maiorem circuli minoris, quā vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris. Quod si quando contingat, rectam CD , ex minori circulo auferre semicirculum, vt quando est diameter circuli; liquidd constat, semicirculum minoris circuli maiorem esse, quā vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris; neque opus tunc erit alia demonstratione.

H I N C etiam nullo negotio ostendemus, æquales rectas lineas ex circulis inæqualibus auferre arcus simpliciter, et absolute inæquales, ita vt arcus minoris circuli simpliciter maior sit arcui circuli maioris, & nō solum maior, q̃ vt similis sit. Sint enim rectæ lineæ CD , BF , æquales, auferatque CD , arcum minoris circuli CED , & BF , arcum circuli maioris FGB . Dico simpliciter arcū CED , maiorem esse arcu FGB . Congruente enim rectæ CD , rectæ BF , cadet necessariō arcus CED , extra arcum FGB ; atque idcirco arcus CED , maior erit arcui FGB , cū ille hunc totū intra se contineat, sintque ambo arcus in eandem partē caui, atque eadem extrema puncta habeant, vt vult Archimedes in suppositionibus ante lib. 1. de Sphaera & cylindro. Neque verō arcus CED ,

D G. Sit autē p. constructionē D E, ipsius D B, parti tertia, erit & D F, ipsius D G, tertia pars. Quod est propositū.

I I.

Dvobv: datis rectilineis tertiū proportionale inuenire.

Sint data duo rectilinea A, & B C D, quibus inueniendum sit tertiū proportionale. ^a Constituantur ipsi A, ^a 29. sexti. rectilineum *equale* E F G, simile verò similiterq; positum ipsi B C D. Deinde lateribus homologis E F, B C, ^b inue- ^b 11. sexti. niatur tertia linea proportionalis H I; ^c super quam con- ^c 18. sexti. stituantur rectilineum H I K, simile similiterque positum ipsis E F G, B C D. Dico H I K, esse tertiū proportio- nale. Cum enim proportionales sint recte E F, B C, H I; ^d erunt & rectilinea E F G, B C D, H I K, ab illis descripta ^d 22. sexti. (cum sint similia, similiterq; posita) proportionalia. Cum ergo E F G, per constructionem, *equale* sit ipsi A; erunt & rectilinea A, B C D, H I K, proportionalia. Quod est propositū.

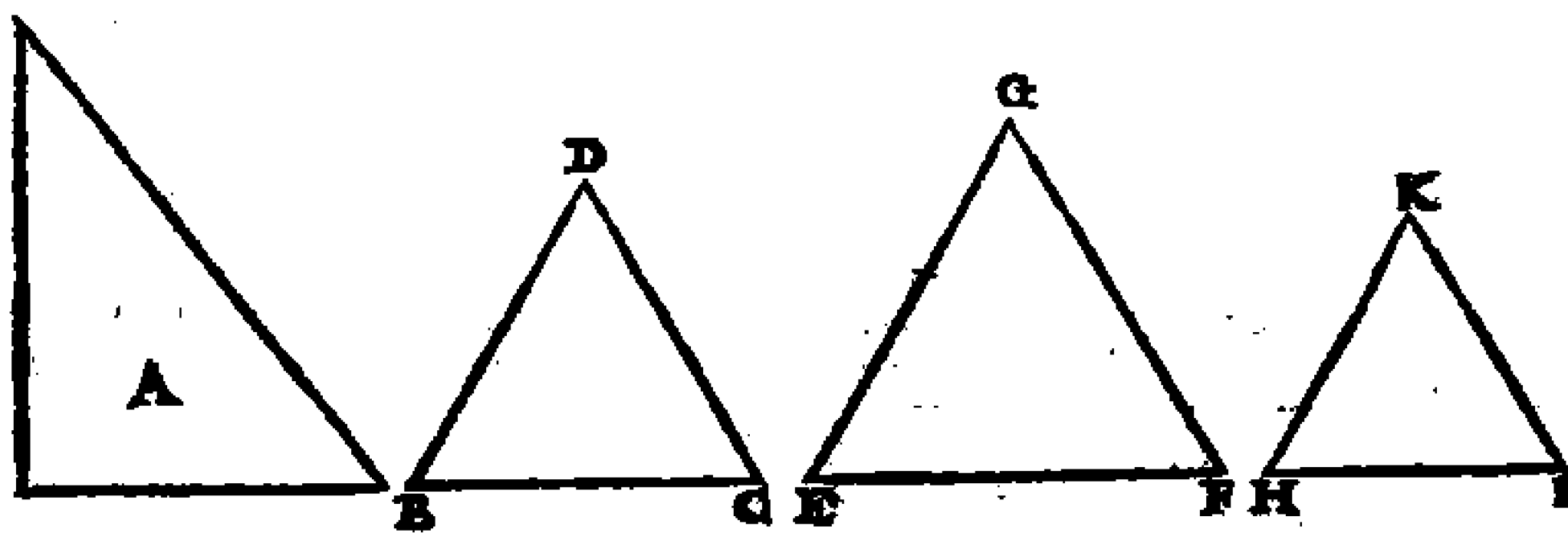
I I I.

Tribv: datis rectilineis, quartū proportionale inuenire.

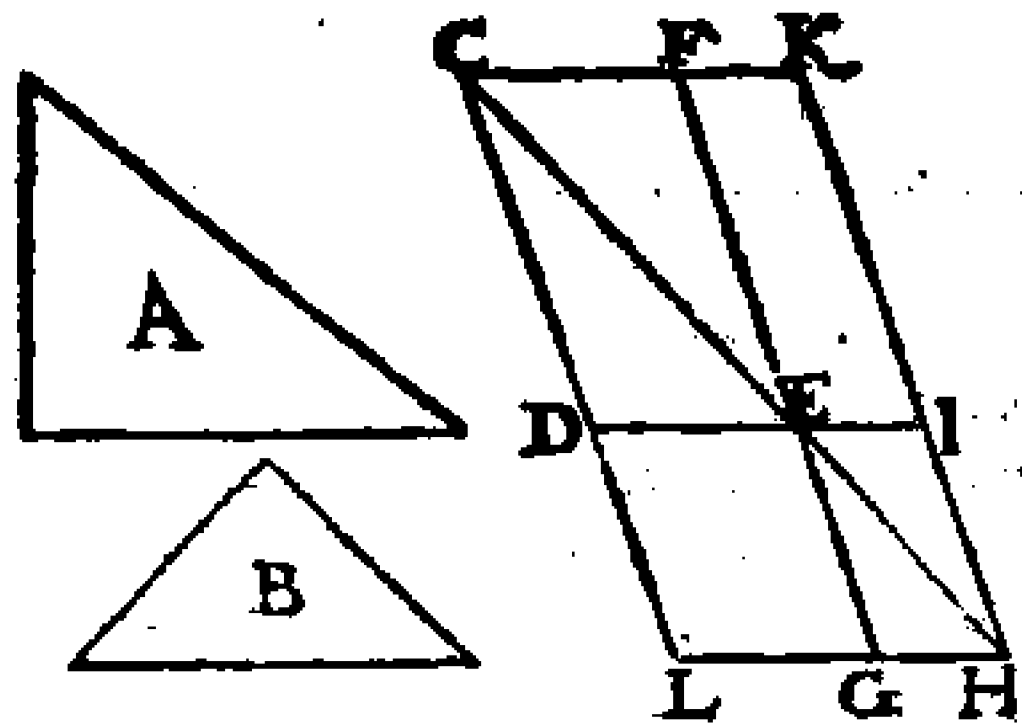
Tria rectilinea data sint A, B C D E, F G H, quibus ^e 25. sexti. quartum sit inueniendum proportionale. ^e Constituantur rectilineum I K L M, *equale* quidem ipsi A, simile verò si- militerq; positum ipsi B C D E. Tribus deinde rectis I K, B C, F G, ^f inuenta quarta proportionalis N O; & consti- ^f 12. sexti. tuatur super N O, rectilineum N O P, ipsi F G H, simile si- ^g 18. sexti. militerq; positum. Dico N O P, rectilineum esse quartum proportionale. Cū enim quatuor recte I K, B C, F G, N O, sint proportionales; ^h erunt & rectilinea similia similiterq; ^h 22. sexti. posita ab ipsis descripta I L, B D, F G H, N O P, proportionalia. Cū igitur I L, constructum sit *equale* ipsi A; erunt & quatuor rectilinea A, B D, F G H, N O P, proportionalia. Quod est propositum.

I I I I.

Dvobv: datis rectilineis, medium proportionale inuenire.



bus deinde rectis E F, B C, ^k inuenta media proportionalis H I; ^l construatursuper H I, rectilineum H I K, simi- ^k 13. sexti. le similiterq; positum ipsis E F G, B C D. Dico H I K, medium esse proportionale quæsitum. Cū enim propor- ^l 18. sexti. tionales sint tres recte E F, H I, B C; ^m erūt quoq; rectilinea ab ipsis descripta E F H, H I K, B C D, proportio- ^m 22. sexti. nalia, cū sint similia similiterq; posita. Cū ergo E F G, constructum sit, *equale* ipsi A; erunt quoq; rectili- nea A, H I K, B C D, proportionalia: hoc est, erit vt A, ad H I K, ita H I K, ad B C D: ac proinde H I K, medium pro- portionale erit inter A, & B C D. Quod est propositum.

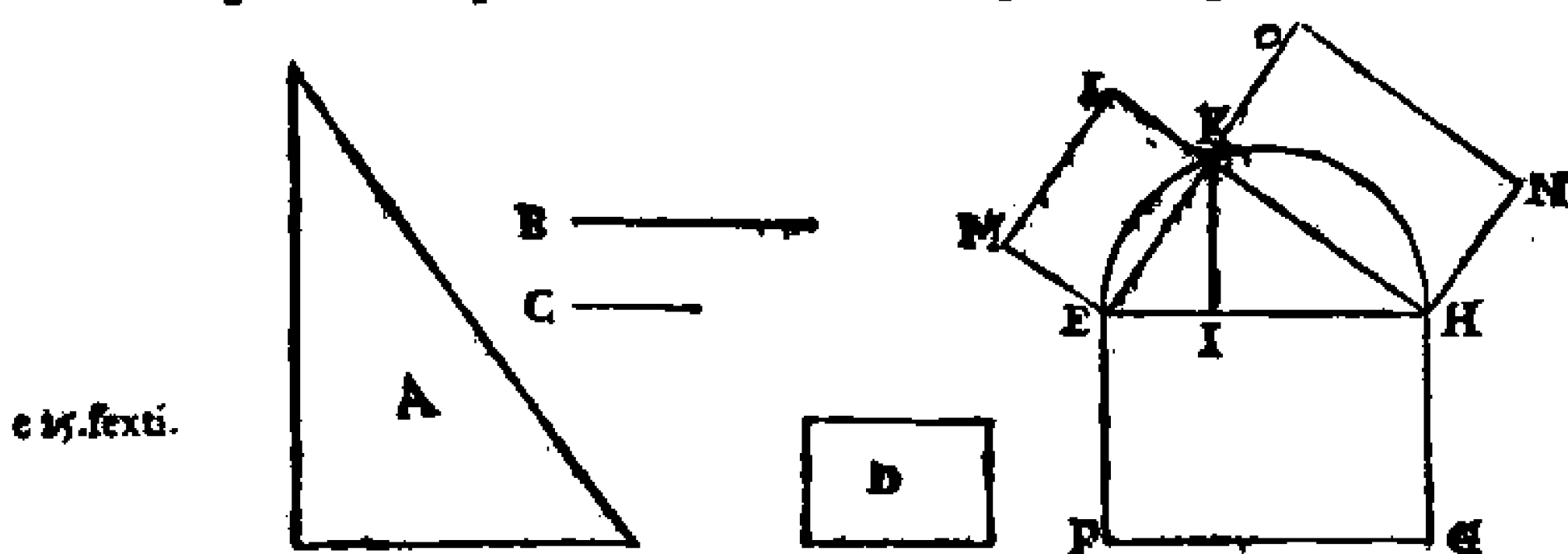


ALITER. Sit rursus inter rectilinea A, & B, perqui- rendum mediū proportionale. ⁿ Constituantur ipsi A, *aqua-* ⁿ 45. primi. le parallelogrammū quodcūq; C D E F; ^o ipsi verò B, *a-* ^o 25. sexti. quale parallelogrammū E G H I, simile verò similiterq; po- situm ipsi C D E F. Connectanturq; hac parallelograma ad angulos aequales, vt D E, E I, efficiant vnā lineā rectā, ac propterea p. ea, quæ ad propof. 15. lib. I. demonstrauimus, vnā quoq; lineæ rectæ cōponatur ex F E, E G, perficiaturq;

- totum parallelogrammum KL . Dico utrumlibet EK , vel EL , medietatem esse proportionalem inter DF , & GL , hoc est, inter A , & B . Cum enim similia sint, similiterq; posita DF , GL : erit ut DE , ad EF , ita GH , ad HL ; hoc est, ita EL , ad EG : ^a quod recta EL , & EG recta GH , HL aequales sint. Permutando ergo ut DE , ad EL , ita FE , ad EG : ^b ut autem DE , ad EL , ita est DF , ad EK , & ut FE , ad EG , ita EK , ad GL . Igitur ut DF , ad EK , ita EK , ad GL ; ac proinde EK , medium proportionale erit inter DF , GL , hoc est, inter A , & B . Quod est propositum.
- ^c Q uo d etiam in hunc modum confirmari potest: Cum DF , GL , similia sint, similiterq; posita, ^c consistant ea circa eandem diametrum. Quare complementa EK , EL , aequalia erunt. Ut autem DF , ad EK , ita est EL , ad GL , ^d quod utraque proportio eadem sit proportioni DE , ad EL . Igitur erit, ut DF , ad EK , ita EK , ad GL . Quod est propositum.

V.

DA T O rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterq; descripta cuicunque rectilineo, habeantq; inter se proportionem propositam quamcunque.



SI T datum rectilineum A , dataq; proportio recta B , ad C , oporteatq; constituere duo rectilinea, quæ ipsi A , aequalia sint, habeantq; proportionem, quam B , & C ; ac similia similiterq; posita sint rectilineo cuius D . ^c Constituatur rectilineum $EFGH$, æquale ipsi A , & simile similiterq; positum ipsi D . Diui-

e 25. sexti.

- so deinde latere eius EH , in I , secundum proportionem B , ad C , ex his, quæ ad propo. 10. huius lib. demonstrauimus describatur circa EH , semicirculus EKH , & ex I , ducatur ad EH , perpendicularis IK , connectanturq; recta EK , HK . ^e Describentur iam super EK , KH , rectilinea EKL , KHN , ipsi EG , vel ipsi D , similia similiterq; posita; quæ dico æqualia etiam esse ipsi EG , seu ipsi A , habereq; proportionem datam B , ad C . Cum enim angulus BKH , in semicirculo existens rectus sit, ^f erunt rectilinea EL , HO , aequalia rectilineo EG , cum sint similia inter se, similiterq; descripta. ^g Quoniam uero est, ut EL , ad IK , ita EK , ad KH , cum triangula EIK , EKH , similia sint: Est autem EL , ad IK , in proportionem duplicatam proportionis EL , ad IK ; quod tres EL , IK , IH , sint, ex corollario propo. 8. huius lib. proportionales: ^h Item EL , ad HO , in proportionem duplicatam eius, quam habet latus EK , ad latus homologum KH ; erit ut EL , ad IH ; hoc est, ut B , ad C , ita EL , ad HO . Dato ergo rectilineo A , exhibuimus duo similia æqualia EL , HO , quæ similia sunt, similiterq; posita, dato rectilineo D , habentq; proportionem inter se datam B , ad C . Quod est propositum.

f 18. sexti.

g 31. tertij.

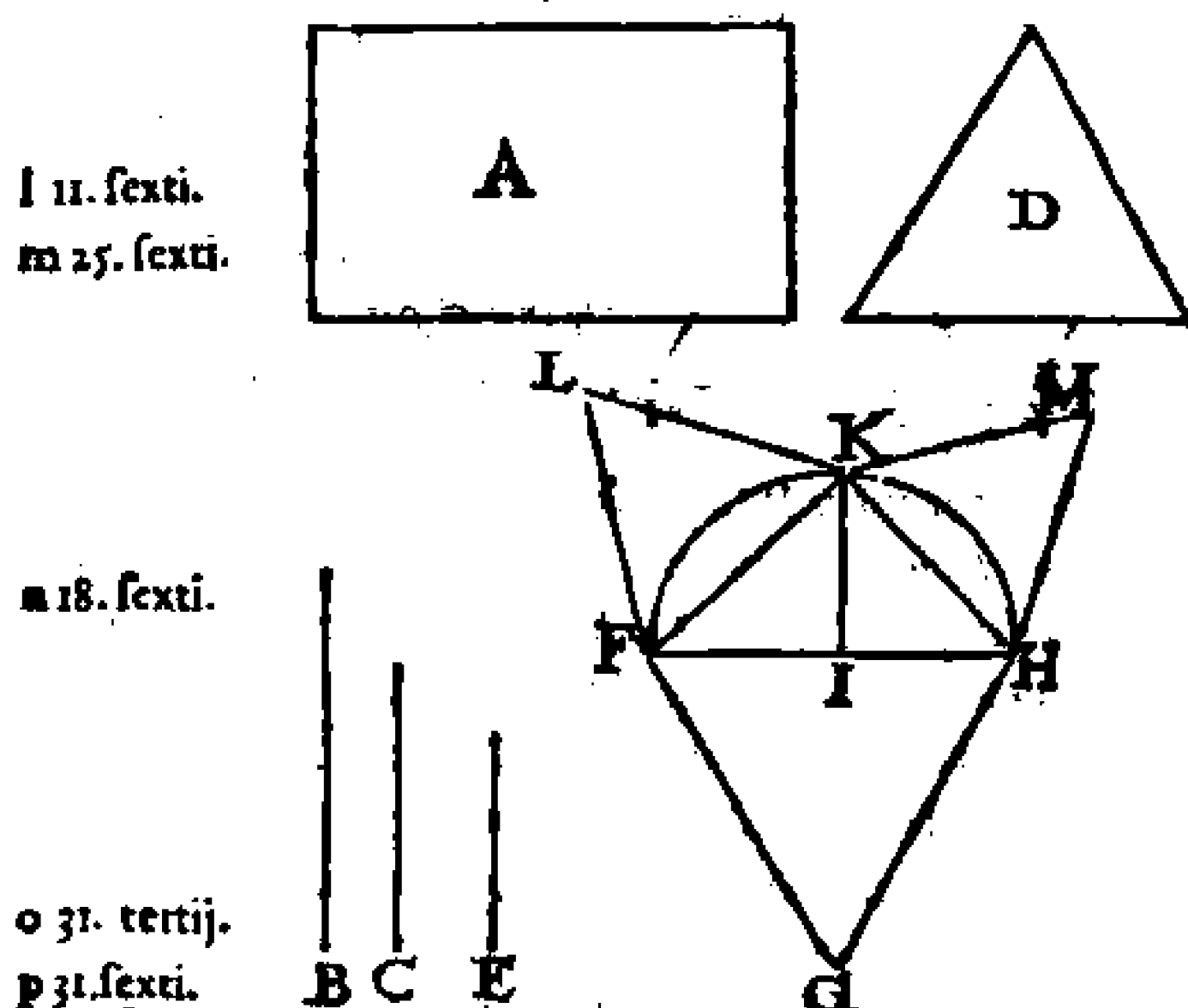
h 31. sexti.

i 4. sexti.

k 19. vel 20. sexti.

V I.

DA T O rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuius rectilineo similia sint, similiterque descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam.



l 11. sexti.

m 25. sexti.

n 18. sexti.

o 31. tertij.

p 31. sexti.

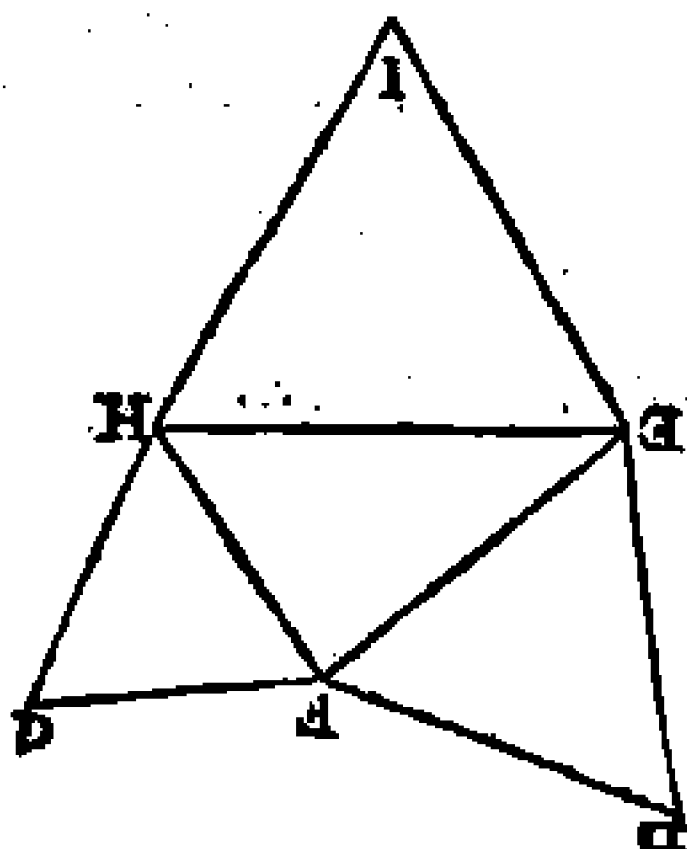
q 4. sexti.

DI T U R rectilineum A , & proportio recta B , ad rectam C ; oporteatq; constituere duo rectilinea ipsi A , aequalia, & similia ipsi D , proposito, similiterq; posita, quorū latera homologa proportionem habeant, quam B , ad C . ^a Inuenta ipsis B , C , tertia proportionali E ; ^b fiat rectilineum FGH , æquale ipsi A , & simile similiterq; positum ipsi D . Diuisoq; latere FH , in I , secundum proportionem B , ad E , ut ad propo. 10. huius libri ostendimus; describatur circa FH , semicirculus FKH ; & ex I , ducatur ad FH , perpendicularis IK , connectanturq; recta FK , HK . ^c Describentur iam super FK , HK , rectilinea FKL , HKM , ipsi FGH , vel ipsi D , similia similiterque posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi FGH , vel ipsi A , eorumq; latera homologa FK , HK , proportionem habere datam recta B , ad rectam C . ^d Cum enim angulus FKH , in semicirculo rectus sit; ^e erunt rectilinea FKL , HKM , rectilineo FGH , idq; & rectilineo A , aequalia. ^f Quoniam uero est, ut FI , ad IK , ita FK , ad HK , ob similitudinem triangulorum FIK , FKH : Est autem FI , ad IK , in proportionem duplicatam proportionis FI , ad IK ; (quæ tres FI , IK , IH , proportionales sint, ex coroll. propo. 8. huius lib.) ac propterea in proportionem duplicatam proportionis laterū homologorū FK , HK . Item & proportio B , ad E , (æqualis proportioni FI , ad IK , ex constructione,) in duplicata est proportionem proportionis B , ad C , ex defin. Igitur eadē erit proportio FK , ad HK , quæ B , ad C , quandoquidē ipsarū duplicatae proportionēs FI , ad IK , & B , ad E , æquales sunt. Constat ergo propositum.

DVORVS

VII.

Dvobvs datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuius rectilineo dato.

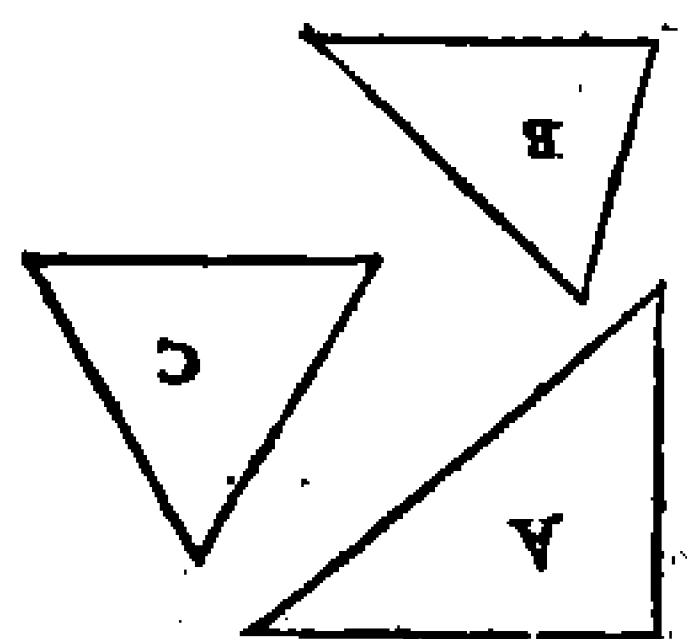


Dv o rectilinea data sint A, & B, quibvs æquale sit construendum, simile similiterq; positum ipsi C. ^a Fiat ipsi A, æquale DEF, simile autem similiterq; positum ipsi C. Item ipsi B, æquale constituatur GFH, simile vero eidem C, similiterq; positum. Deinde rectilinea DEF, GFH, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa EF, FH, constituent angulum EFH, rectum, cui subrendatur recta EH, ^b super quam describatur rectilineum, IHE, simile similiterq; positum ipsis DEF, GFH, hoc est, ipsi C. ^c Perspicuum autem est EHI, æquale esse duobus DEF, GFH: atq; idcirco duobus A, & B. Quod est propositum.

a 25. sexti.

b 18. sexti.

c 31. sexti.



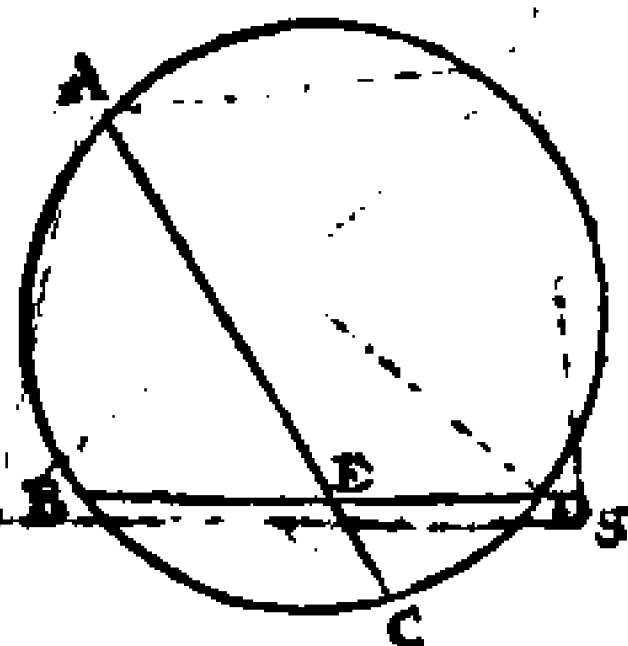
BREVIVS. Constituatur parallelogrammum æquale duobus rectilineis A, & B, per ea, qua adpropof. 45. lib. 1. docuimus. ^d Si enim huic parallelogrammo construxerimus æquale rectilineum EHI, quod simile sit, similiterq; positum alteri dato rectilineo C; constitutum erit rectilineum EHI, æquale duobus rectilineis A, B, & simile, simili ite q; positum rectilineo C. Quod erat faciendum.

d 25. sexti.

VIII.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secuerint: Erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca.

In circulo ABCD, se mutuò secent rectæ AC, BD, in E. Dico segmenta AE, EC, esse reciproca segmentis BE, ED: Hoc est, esse vt AE, ad BE, ita ED, ad EC: Vel vt AE, ad ED, ita BE, ad EC. ^e Cum enim rectangulum sub AE, EC, comprehensum æquale sit rectangulo sub BE, ED, contento; ^f erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum.

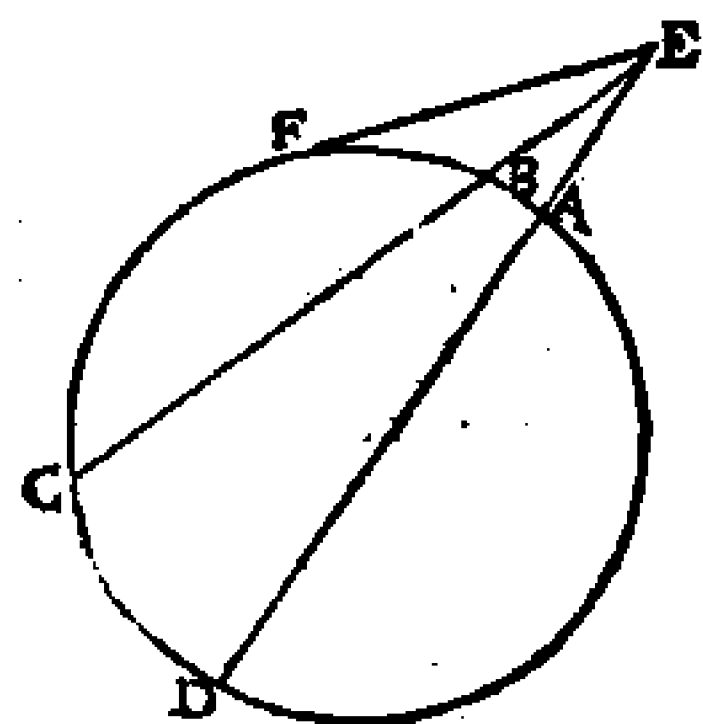


e 35. tertij.

f 14. sexti.

IX.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentum exterius.



EXTRA circulum ABCD, sumatur punctum E, à quo cadant rectæ EC, ED, secantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB, esse reciprocas rectis ED, EA: Hoc est, esse vt EC, ad ED, ita EA, ad EB: Vel vt EC, ad EA, ita ED, ad EB. Ducta enim EF, tangente circulum in F: ^g erit rectangulum sub EC, EB, quadrato rectæ EF, æquale: Item rectangulum sub ED, EA, eidem quadrato rectæ EF, æquale. Quare & rectangula sub EC, EB, & sub ED, EA, equalia erunt: ^h Ac propterea latera eorum circa angulos æquales reciproca. ⁱ Quoniam autem quadrato rectæ EF, æquale est tangens rectangulum sub EC, EB, quàm rectangulum sub ED, EA; ^k erunt tam tres rectæ EC, EF, EB, quàm tres ED, EF, EA, proportionales, atque adeo EF, media proportionalis inter quamlibet lineam, qua circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.

g 36. tertij.

h 14. sexti.

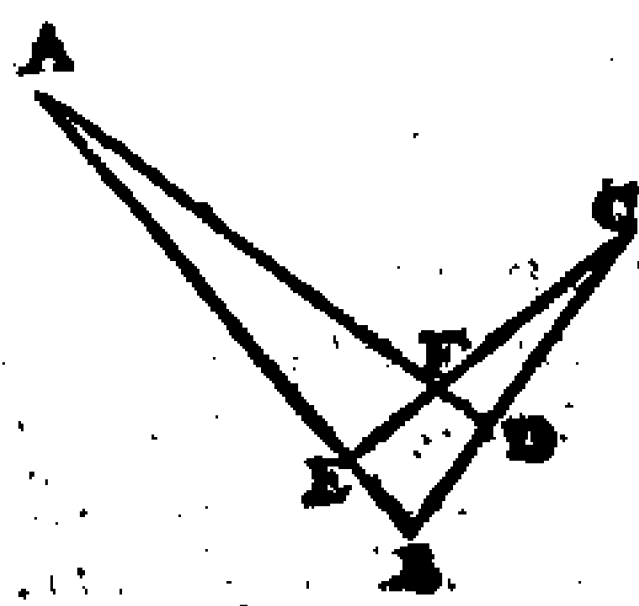
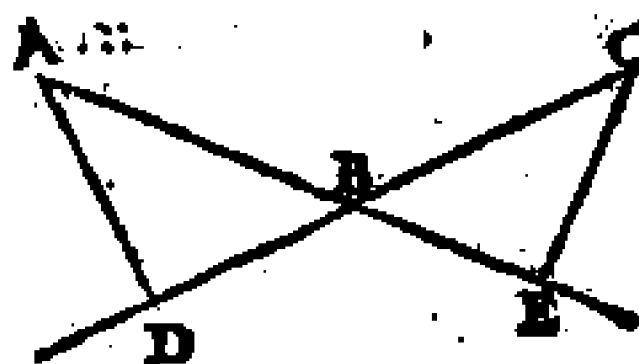
i 36. tertij.

k 17. sexti.

X.

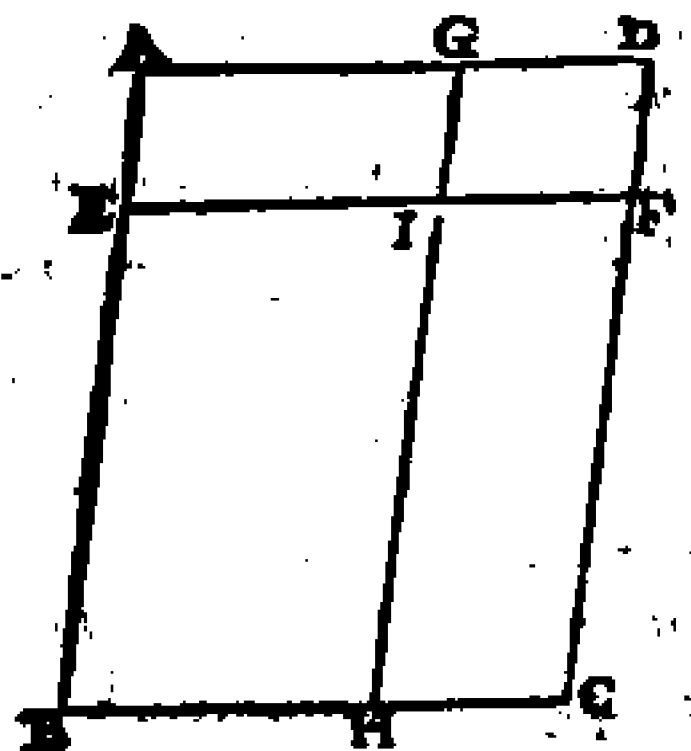
Si duæ rectæ lineæ sese mutuò secuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuò demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & sectionem, altera verò inter sectionem, & prioris lineæ assumptæ perpendicularem interiicitur, aliis duabus eodem modo inclusis reciproca.

Dvæ rectæ AB, CB, se mutuò secant in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares AD, quidem ad CB, ac verò CE, ad AB, quæ perpendiculares cadent in AB, CB, protractas ultra B, si angulus ABC fuerit obtusus. in ipsas verò introrsum si idem angulus acutus fuerit, vt figura indicant. Dico rectas AB, BE, (quarum prior interiicitur inter terminum A, & sectionem B: posterior verò inter sectionem B, & perpendicularem CE, quæ nimirum ad ipsam AB, assumptæ ducitur) reciprocas esse duabus CB, BD, (qua



F 3

- inter similes terminos includuntur) hoc est, esse ut AB , ad BC , ita BD , ad BE : Vel ut AB , ad BD , ita BC , ad BE . Cùm enim anguli ABD , ADB , trianguli ABD , æquales sint angulis CBE , CEB , trianguli CBE .
 a 15. primi. (Nam ADB , CEB , recti sunt; & ABD , CBE , ad verticem in priori figura æquales: in posteriori autem
 b 4. sexti. unus & idem angulus) erunt triangula ABD , CBE , æquiangula. ^b Quare erit ut AB , ad BD , ita CB , ad BE : Ac propterea permutando quoque, ut AB , ad BC , ita BD , ad BE . Quod est propositum.
 Po R R O eadem ratione segmenta perpendicularium AD , CE , in posteriori figura se mutuò secantium
 c 4. sexti. in F , erunt reciproca. Cùm enim triangula AFE , CFD , sint æquiangula; ^c erit ut AF , ad FE , ita CF , ad FD : Et permutando quoque, ut AF , ad CF , ita FE , ad FD . Quod est propositum.



d 1. sexti.
 e 11. quinti.

X I.

IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuò secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

IN parallelogrammo $ABCD$, duæ rectæ EF , GH , lateribus AD , DC , parallelæ se mutuò secant in I . Dico quatuor parallelogramma EG , GF , BI , IC , esse proportionalia. ^d Cùm enim sit, ut EI , ad IF , ita EG , ad GF : Item ut EI , ad IF , ita BI , ad IC ; ^e Erit quoque, ut EG , ad GF , ita BI , ad IC . Quod est propositum.

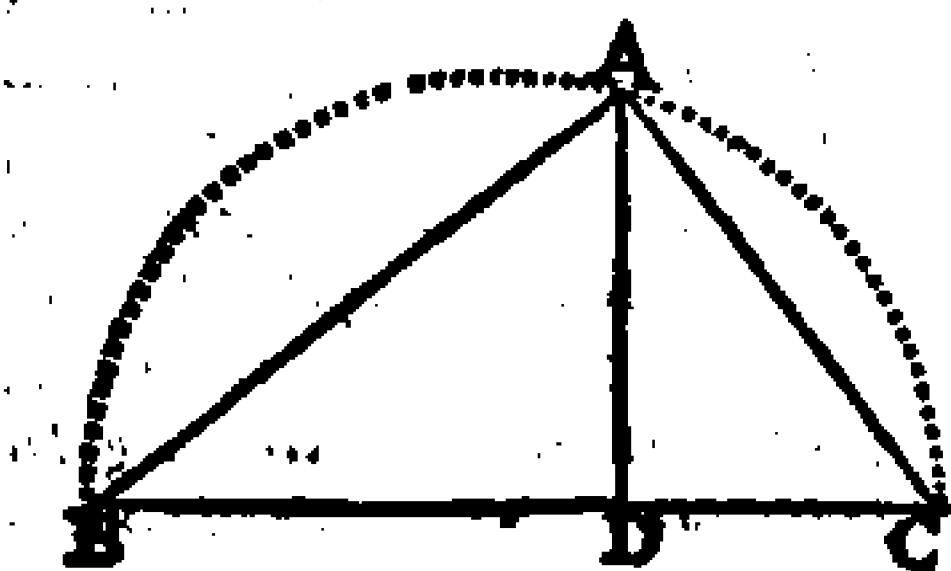
X I I.

OMNE quadrilaterum à duabus diametris se mutuò secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.

DIVIDANT diametri AC , BD , se mutuò secantes in E , quadrilaterum $ABCD$. Dico quatuor triangula AED , CEB , AEB , CED , esse proportionalia. ^f Erit enim ut AE , ad EC , ita triangulum AED , ad triangulum CEB ; & triangulum AEB , ad triangulum CED . ^g Quare ut triangulum AED , ad triangulum CEB , ita triangulum AEB , ad triangulum CED . Eademque ratione ostendes esse, ut BE , ad EA , ita BE , ad ED ; ^h cum utraq; proportio eadem sit proportioni BE , ad ED . Constat ergo propositum.

X I I I.

IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione, tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continuè proportionalia, perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione.



i 17. sexti.

k 17. sexti.

IN rectangulo triangulo ABC , ex angulo recto A , demissa perpendicularis AD , secet basim BC , in D , extrema ac media ratione, sitque maius segmentum BD ; ac propterea ex theoremate 9. ad propos. 47. lib. 1. latera AB , latere AC maius. Dico tria latera BC , BA , AC , esse continuè proportionalia. Quoniam enim per hypotbesin est ut BC , ad BD , ita BD , ad DC ; ⁱ erit quadratum ex BD , rectangulo sub BC , CD , æquale. Rursus quia ex coroll. propos. 8. huius lib. AC , media proportionalis est inter BC , CD ; ^k erit quoque quadratum ex AC , eidem rectangulo sub BC , CD , æquale.

Quare quadrata ex BD , AC , æqualia inter se erunt, ac proinde & rectæ ipsæ æquales erunt. Est autem, ex corollario propos. 8. huius lib. AB , inter BC , BD , media proportionalis. Igitur eadem AB , media proportionalis erit inter BC , AC : hoc est, erit ut BC , ad AB , ita AB , ad AC . Quod est propositum.

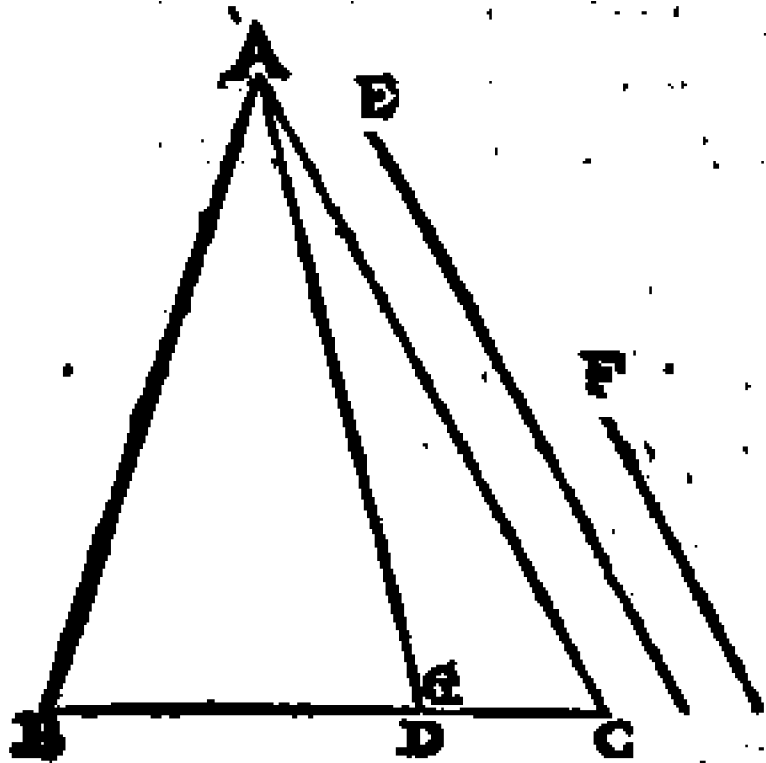
- SINT deinde tria latera BC , AB , AC , in triangulo rectangulo ABC , continuè proportionalia: hoc est, sit BC , ad AB , ut AB , ad AC , demittaturque perpendicularis AD , ad basim BC . Dico BC , sectam esse in D , extrema ac media ratione. Quoniam enim est, ut BC , ad AB , ita AB , ad AC : Est autem ut BC , ad AB , ita quoque AB , ad BD ; quod AB , media proportionalis sit inter BC , BD , ex coroll. propos. 8. huius lib. ^l erit ut AB , ad AC , ita AB , ad BD : ^m ac proinde æquales erant AC , & BD . ⁿ Ut igitur AC , ad CD , ita erit BD , ad CD . Sed ut AC , ad CD , ita est BC , ad AC , quod ex coroll. propos. 8. huius lib. AC sit media proportionalis inter BC , & CD . ^o Igitur erit quoque, BC , ad AC , hoc est, ad BD , ut AC , hoc est, ut BD , ad CD : ac propterea BC , in D , secta erit extrema ac media ratione. Quod est propositum.

IT A Q U E si super datam rectam BC , construendum sit triangulum rectangulum, cuius tria latera continuè proportionalia sint, secanda erit data recta BC , extrema ac media ratione in D . Descripto deinde semicirculo BAC , circa eandem datam BC , erigenda erit ad BC , perpendicularis DA , iungendaque recta BA , CA . Triangulum enim ABC , rectangulum erit, & cùm angulus BAC , in semicirculo rectus sit; ac proinde cùm perpendicularis AD , secet basim extrema ac media ratione; tria latera continuè proportionalia erunt, ut proximè demonstratum est.

A D A T O

XIII.

A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta, secundum proportionem datam.



BDA, ad triangulum CDA, secabit recta DA, triangulum datum secundum proportionem datam BG, ad GC, hoc est, E, ad F. Quod erat faciendum.

CADAT deinde punctum G, inter C, & D, ut in secunda figura. Ducatur ergo recta DA, cui per G, parallela agatur GH, coniungaturq; recta DH. Dico rectam DH, secare triangulum datum secundum proportionem datam, hoc est, esse trapezium BDHA, ad triangulum CDH, ut E, ad F, seu ut BG, ad GC. Ducta enim recta GA; ^b erunt triangula HGA, GHD, equalia, cum sint super eandem basin GH, & inter easdem parallelas GH, DA. Addito igitur communi triangulo CGH, fient equalia triangula CGA, CDH: ^c Ac proinde triangulum ABC, eandem habebit proportionem ad CGA, & ad CDH. ^d Diuidendo igitur, erit ut triangulum BGA, ad triangulum CGA, ita trapezium BDHA, ad triangulum CDH. ^e Est autem BGA, ad CGA, ut BG, ad GC. Igitur erit & trapezium BDHA, ad triangulum CDH, ut BG, ad GC, hoc est, ut E, ad F. Quod est propositum.

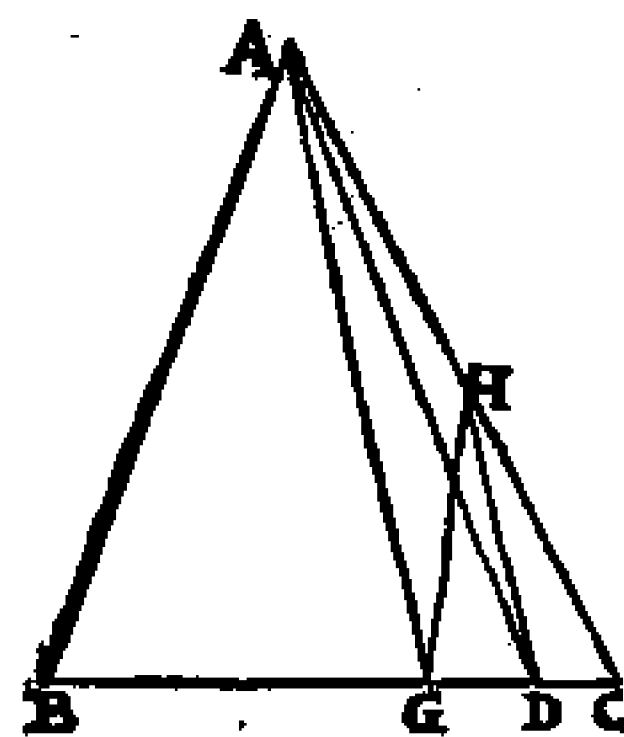
21. sexti.

b 37. primi.

c 7. quinti.

d 17. quinti.

e 1. sexti.



CADAT tertio punctum G, inter B, & D, ducaturq; recta DA, cui rursus per G, agatur parallela GH. Dico igitur rursus rectam ductam DH, secare triangulum ABC, secundum proportionem datam E, ad F, hoc est, esse triangulum BDH, ad trapezium CDHA, ut E, ad F. Ducta enim recta GA; ^f erunt, ut prius, triangula HGA, GHD, equalia; additoq; communi BGH, equalia fient BGA, BDH. ^g Quare erit ABC, ad BGA, ut ad BDH. ^h Diuidendo ergo erit CGA, ad BGA, ita trapezium CDHA, ad triangulum BDH; & conuertendo, ut BGA, ad CGA, ita BDH, ad trapezium CDHA. ⁱ Est autem BGA, ad CGA, ut BG, ad GC. Igitur & BDH, ad trapezium CDHA, erit ut BG, ad GC, hoc est, ut E, ad F. Quod est propositum.

f 37. primi.

g 7. quinti.

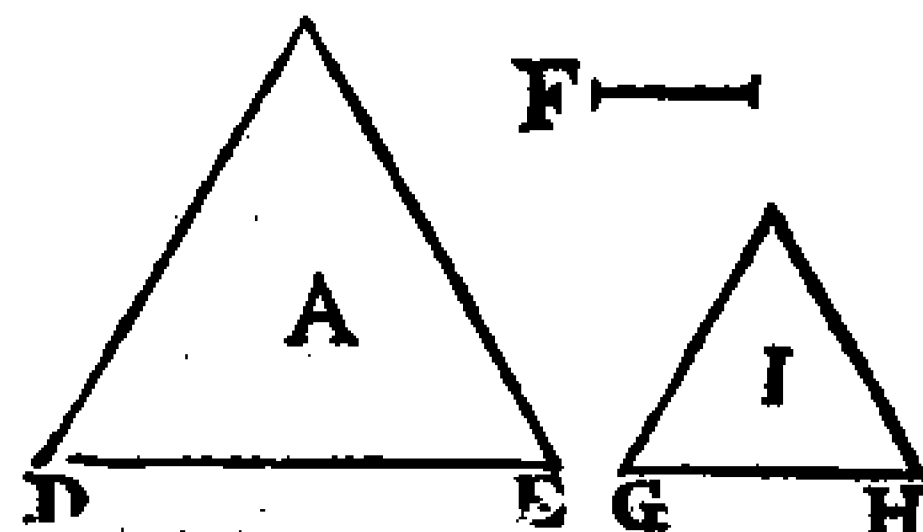
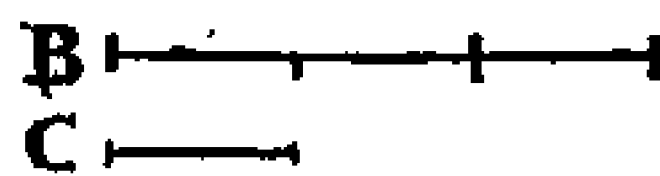
h 17. quinti.

i 1. sexti.

HINC perspicuum est, quoniam modo imperata pars ex triangulo sit auferenda per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam à dato puncto ductam diuidatur triangulum secundum proportionem multiplicem, cuius denominator unitate minor sit denominatore partis imperata, (ut secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, ut manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator equalis est denominatori partis proposita, cum priori denominatori proportionis multiplicis assumpta addatur unitas, quæ antè deest.

XV.

DATO rectilineo simile similiterq; positum rectilineum describere, maius, vel minus, secundum proportionem datam.



ut B, ad C, ita rectilineum A, super primam ad rectilineum I, super secundam, illi simile similiterq; positum. Quod erat faciendum.

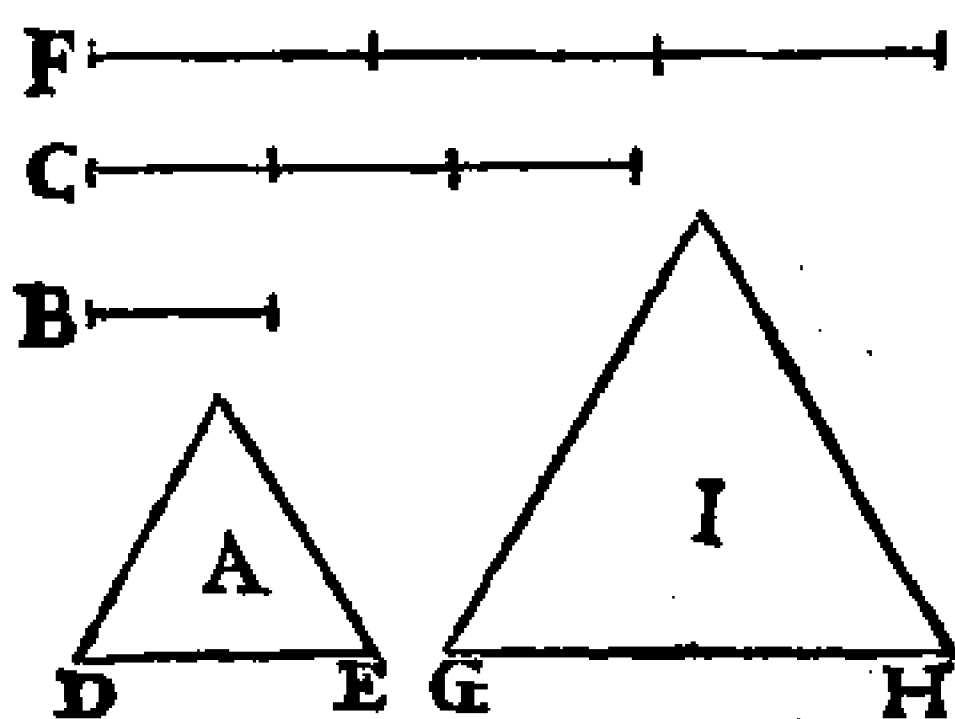
NON secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, describemus, illi simile, similiterque positum, secundum

Si rectilineum datum A, cui simile similiterq; positum sit describendum maius, secundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & DE, (sit autem DE, unum latus rectilinei dati quodcumq; ^k) inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus DE, & F, ^l inueniatur media proportionalis GH; ^m super quam ipsi A, describatur rectilineum I, simile, similiterque positum. Dico I, maius esse, quàm A, secundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales sint tres recte DE, GH, & F, erit per corollarium propositionis 19. vel 20. libri huius, ut DE, prima ad F, tertiam, hoc est, per constructionem,

k 12. sexti.

l 13. sexti.

m 18. sexti.

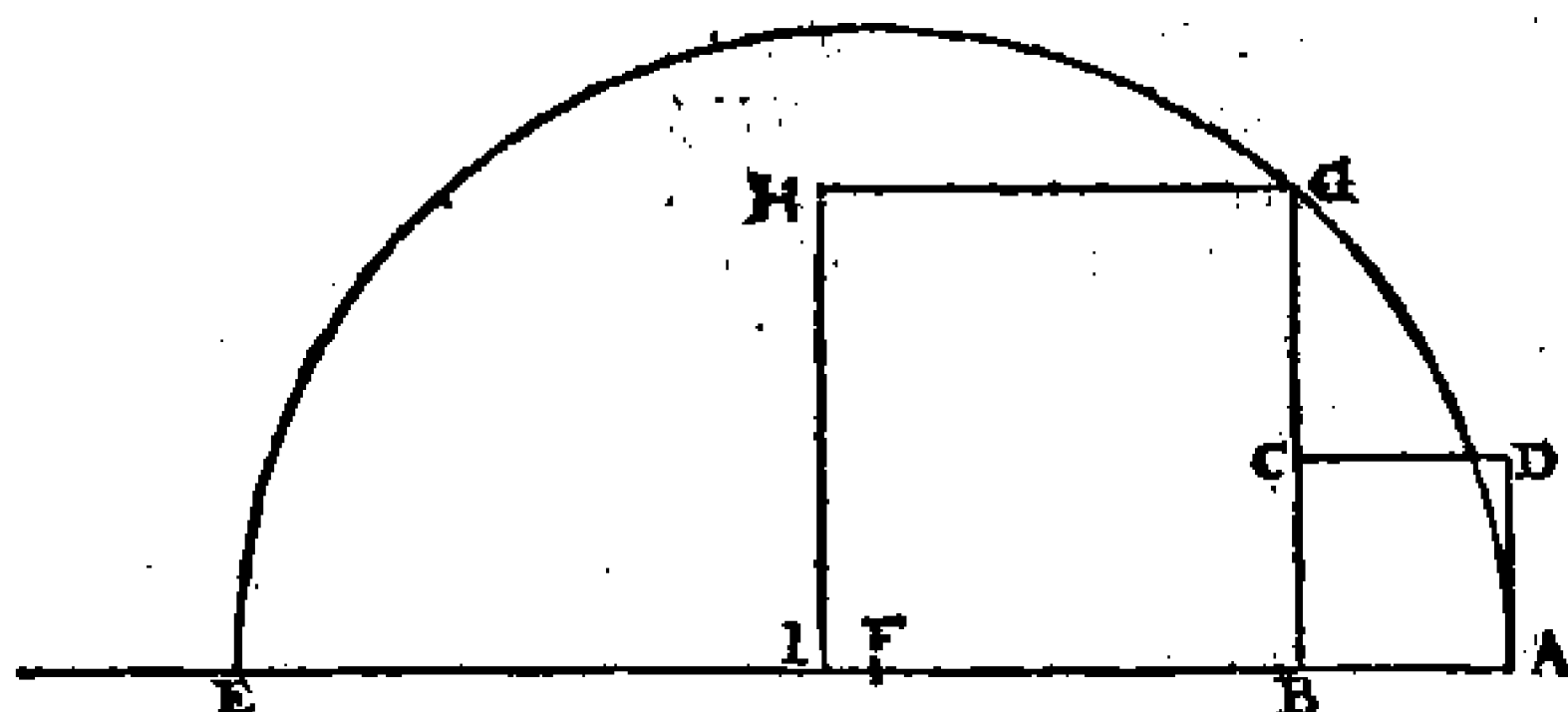


dum proportionem datam B, ad C. Veluti in hac figura factum esse cernis, eadē enim prorsus est constructio, atq; demonstratio.

Ex his igitur quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, &c. Atq; aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. servata nihilominus semper eadem rectilinearum similitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet similitudo. Si namq; proportio B, ad C, sumatur ut 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item ut 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua verò perficiantur, ut prius; habebitur rectilineum simile similiterq; descriptum, quod propositi

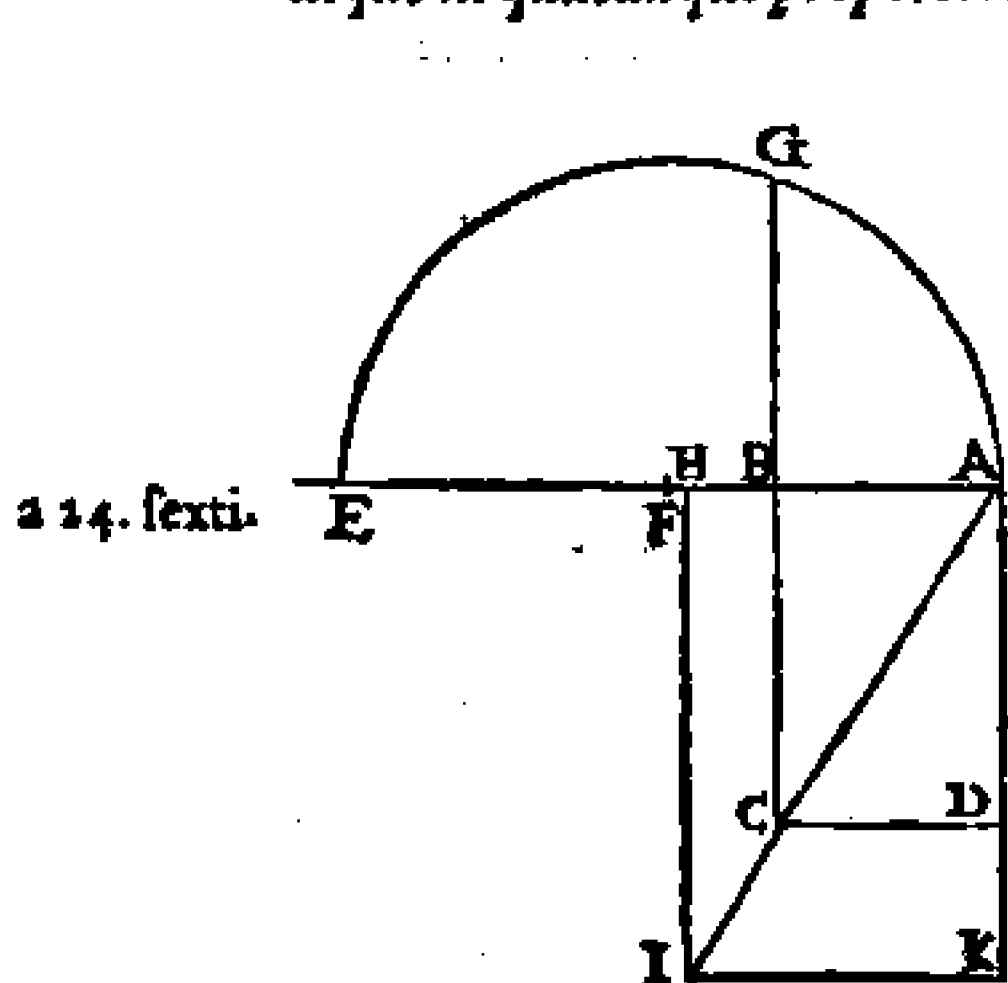
rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.

Non videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunque oblatū. Ex hac enim construemus quoq; rectilineum simile similiterq; descriptum cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tamen si autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, sed eam simpliciter proponit; non multum tamen eius demonstratio à precedenti differt, ut mox ostendemus.



ad circumferentiam usque in G. Dico quadratum BGHI, ex BG descriptū, quintuplum esse quadrati ABCD. Erit enim per corollarium propof. 13. huius libri BG, media proportionalis inter EB, BA. Igitur erit ut EB, prima ad BA, tertiam, ita BH, quadratum secunda, ad AC, quadratum tertia, ex corollario propof. 20. huius libri. Est autem EB, per constructionem, ipsius AB, quintupla. Igitur & quadratū BH, quadrati AC, quintuplum erit. Quod est propositum.

Quod si recta BE, sumatur sextupla lateris AB, erit & quadratum recta BG, quadrati ABCD, sextuplum: Si autem BE, fuerit tertia pars ipsius AB, erit & quadratum BH, tertia pars quadrati AC. Denique in quacunque proportionem sumatur BE, ad AB, eandem habebit quadratum BH, ad quadratum AC.



Si rursum rectangulum ABCD, cui inveniendum sit simile similiterque positum, quod duplum sit ipsius. Ex latere AB, producto sumatur BE, dupla ipsius AB. Divisa deinde tota AE, bisariam in F; & ex F, descripto semicirculo, ut prius, & producta CB, ad G; erit BG, unum latus rectanguli quesiti. Quare si abscindatur AH, aequalis ipsi BG, & per H, agatur ipsi BC, parallela HI, occurrens diametro AC, protracta in I, perficiaturq; parallelogrammum HK, erit HK, ipsi BD, simile similiterq; positum; quod etiam aio duplum esse ipsius BD. Cum enim proportionales sint tres recte EB, BG, BA, ex corollario propof. 13. huius libri; Erit ut prius, sicut EB, prima ad BA, tertiam, ita rectangulum HK, supra AH, secundam (sumpta enim fuit AH, ipsi BG, secunda aequalis) ad rectangulum BD, supra tertiam AB, quod est simile similiterq; descriptum. Quod est propositum.

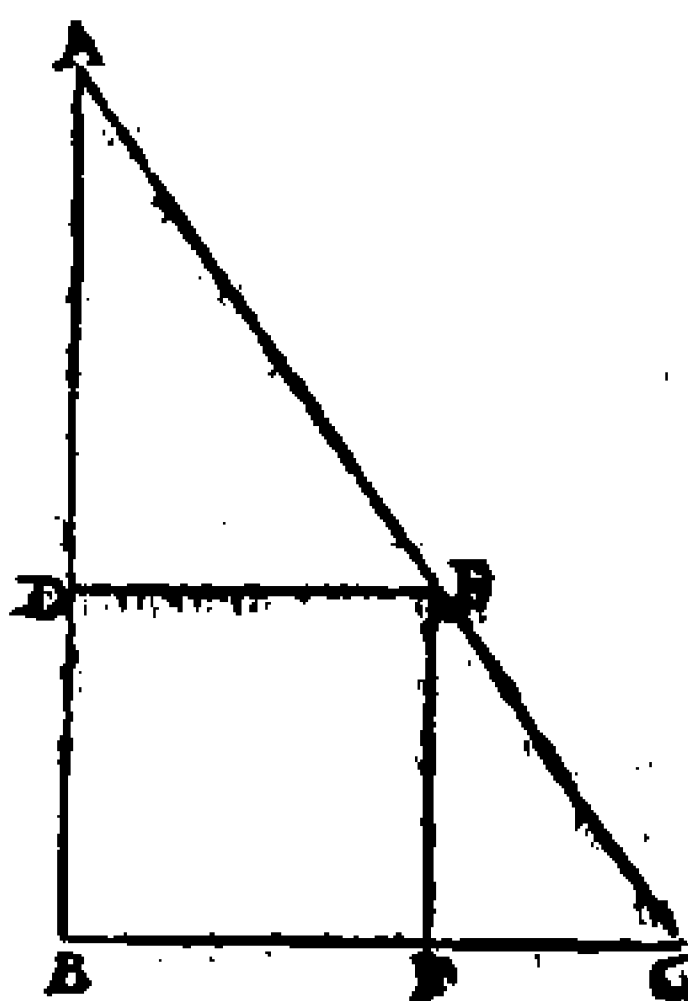
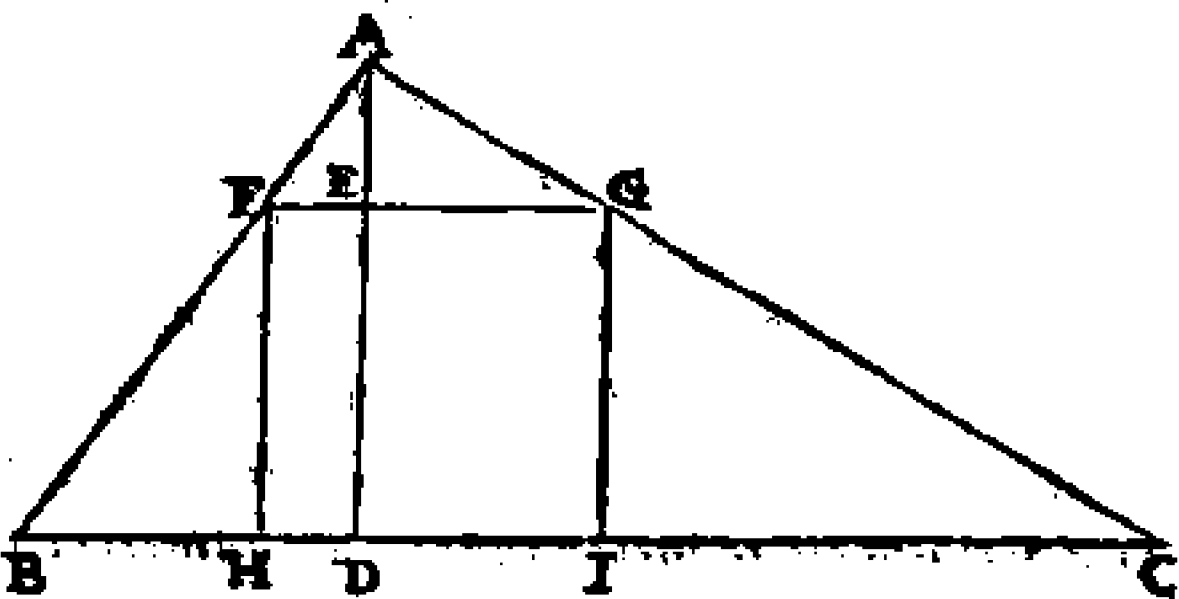
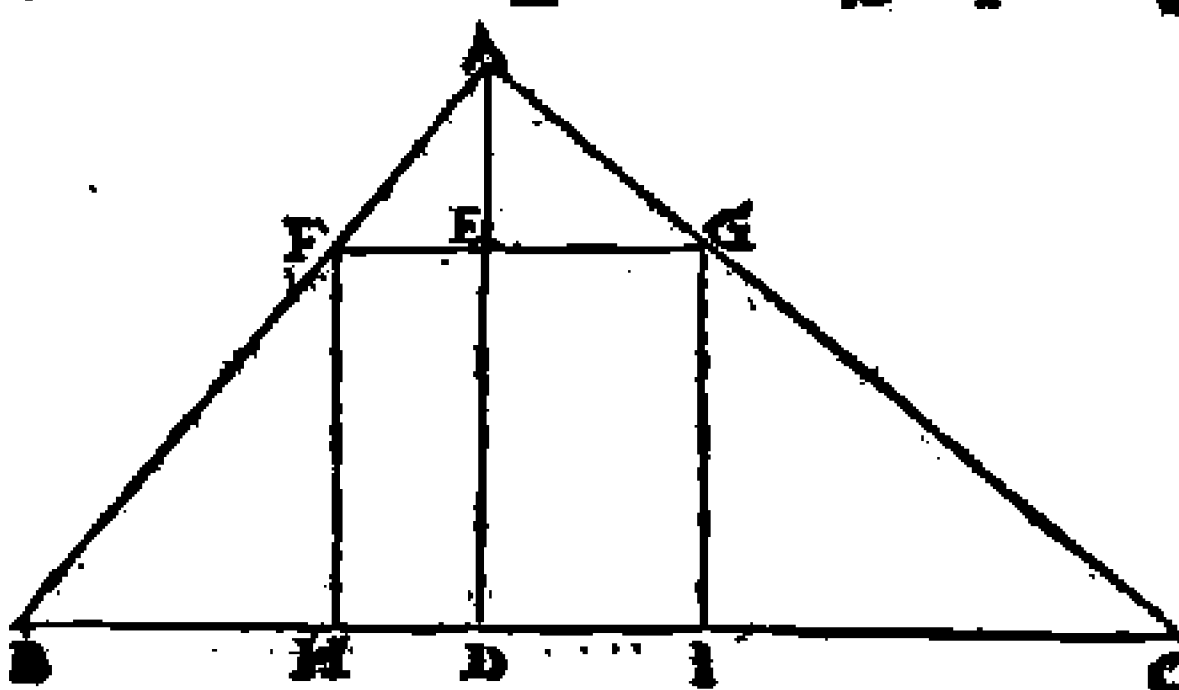
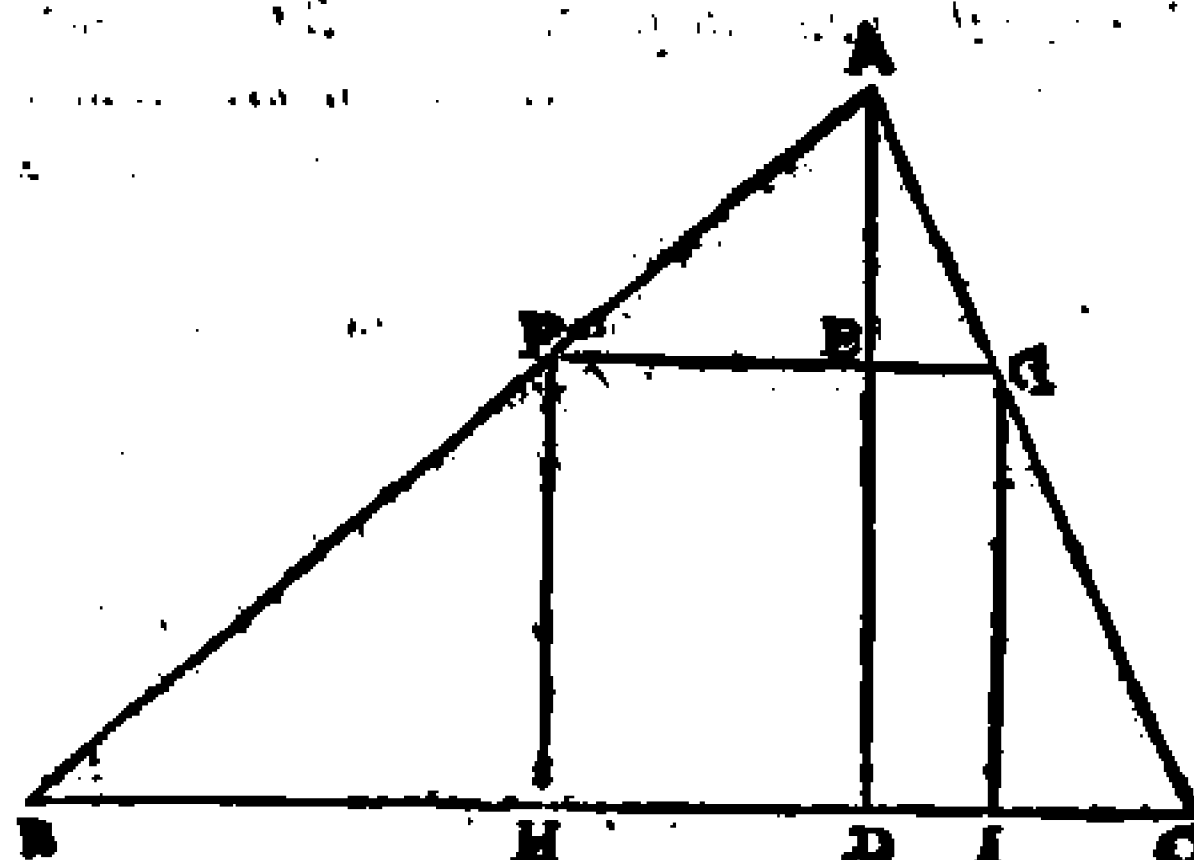
Eodem modo, si supra AB, constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex BG, illi simile, similiterq; positum describitur, ipsum duplum. Atq; in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex BG, ad rectilineum simile ex AB, quam habere ponetur recta EB, ad rectam BA, ex constructione.

Perspicuum autem est, hanc praxim vna cum eius demonstratione à nostra antea tradita nō differre, nisi quod hac simul tradit inventionē lineae mediae proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas EB, BA, quae proportionem habent datam, ut statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.

XVI.

In dato triangulo quocunque quadratum describere.

SIT



Si igitur datum triangulum ABC , acutangulum. Ex angulo quocunque A , ad BC , perpendicularis demittatur AD , quae intra triangulum cadet, ex scholio propof. 13. libri 2. Hae autem in E , ita fecerur per ea, quae in scholio propof. 10. huius libri docuimus, ut eadem sit proportio AE , ad ED , quae AD , ad BC . Deinde per E , agatur FG , ipsi BC , parallela. Postremo ex F , & G ipsi DE parallela ducantur FH , GI . Dico $FGIH$, rectilineum triangulum ABC , inscriptum, esse quadratum. Cum enim FG , ipsi BC , sit parallela; erit ut BD , ad DC , ita FE , ad EG , ex scholio propof. 4. huius lib. & componendo, ut BC ad DC , ita FG , ad EG . Sed ut DC , ad AD , ita est EG ad AE ; quod per coroll. propof. 4. huius lib. triangula ADC , AEG sunt similia. Igitur erit ex aequo, ut BC ad AD , ita FG , ad AE . Quia vero per constructionem est, ut AD , ad BC , ita AE , ad ED ; erit rursus ex aequo, ut BC , ad ED , ita FG , ad ED . Est autem BC , ipsi BC , aequalis, immo eadem. Aequalis igitur est & FG , ipsi ED . Quare cum FG , ipsi ED , & ED , ipsi FG , aequalis existat. Erunt quatuor latera FG , GI , IH , HF , aequalia inter se. Et quia anguli EDH , FHD , duobus rectis aequales sunt: Est autem EDH per constructionem, rectus: erit & FHD , rectus. Quocirca per ea, quae ad def. 1. lib. 2. demonstrauimus, & reliqui anguli HFG , FGI , GIH , recti sunt in parallelogrammo $FGIH$; Ac propterea $FGIH$, quadratum est. Quod est propositum.

Non secus idem problema absoluemus, si datum triangulum fuerit rectangulum, vel obtusangulum, dummodo ex angulo recto, vel obtuso perpendicularis demittatur, ut in posterioribus duobus triangulis apparet. Ita

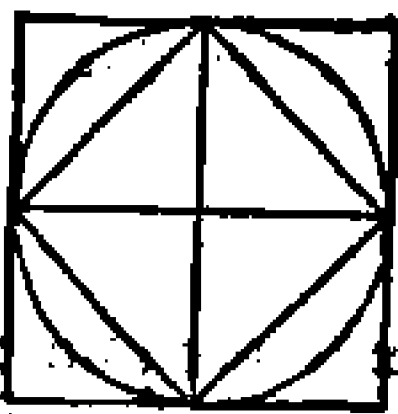
enim semper cadet perpendicularis AD , intra triangulum, ex scholio propositionis 13. lib. 2.

Quod si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita ut duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum nitantur, diuidemus perpendiculari AD , in D , ita ut eadem sit proportio AD ad DB , quae AB , ad BC , & per D , quidem ipsi BC , parallelam ducemus DE ; per E , vero ipsi AB , aliam parallelam EF . Quoniam igitur est, ut BC , ad AB , ita DE , ad AD ; quod triangula ABC , ADE , similia sint, per coroll. propof. 4. huius lib. Est autem per constructionem, ut AB , ad BC , ita AD , ad DB , & erit ex aequo, ut BC , ad BC , ita DE , ad DB : Est autem BC , sibi ipsi aequalis, immo eadem. Aequalis igitur est & DE , ipsi DB . Quare ut prius, $DEFB$, quadratum est. Quod est propositum.

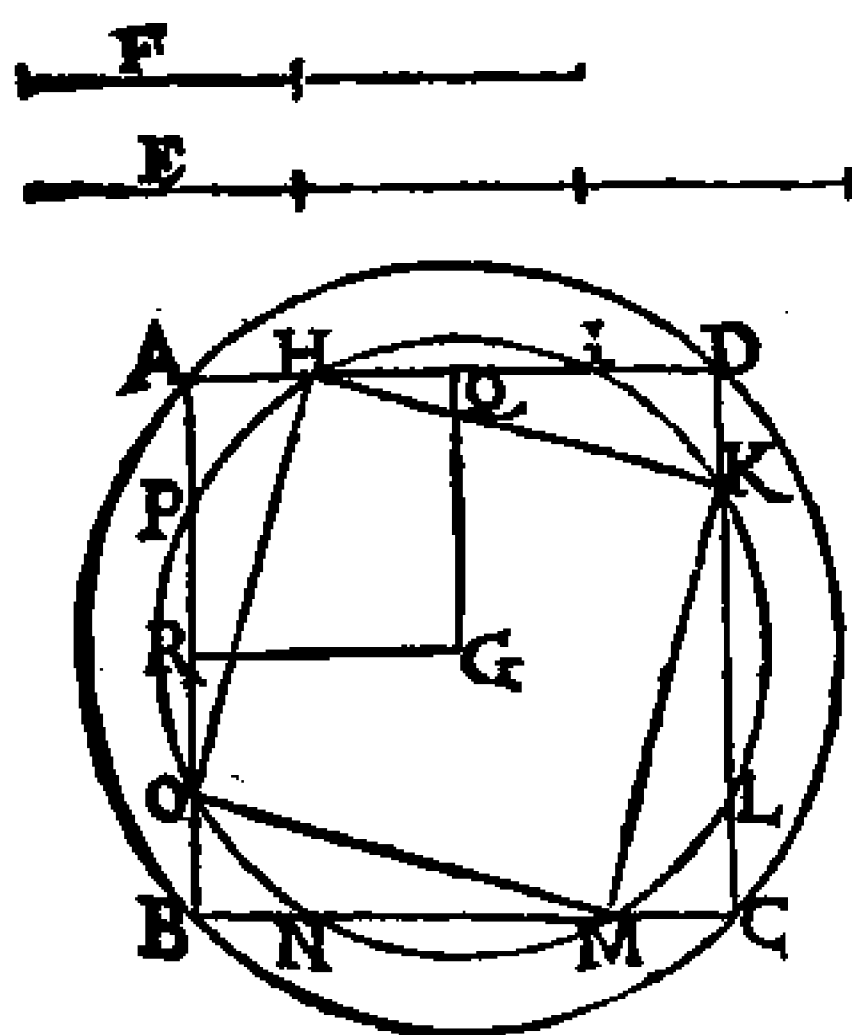
Verum in hoc problema commendari multo ingeniosius est id, quod sequitur.

XVII.

INTRA datum quadratum, aliud quadratum describere in data proportione maioris inaequalitatis. Oportet autem datam proportionem dupla non esse maiorem.



Si igitur quadratum $ABCD$, intra quod describendum sit quadratum, ad quod habeat quadratum $ABCD$, proportionem eandem maiorem inaequalitatis, quam recta E , ad rectam F , quaecunque ea sit, dummodo maior non sit, quam dupla. Nam si latera quadrati secantur bisariam, punctaque diuisionum rectis iungantur lineis, inscriptum erit quadratum intra aliud, ut ad finem libri 4. demonstrauimus, idem cum eo centrum habens. Et quia circulus intra quadratum $ABCD$, descriptus est quadrato illi inscripto circumscriptus, ut in hac figura perspicuum est, erit quadratum $ABCD$, illius quadrati inscripti duplum, ex scholio propof. 9. lib. 4. Cum ergo minus quadratum intra quadratum $ABCD$, describi nequeat, quam illud, cuius circulus circumscriptus latera quadrati $ABCD$, tangit, ut patet: liquido constat, quadratum $ABCD$, ad nullum quadratum inscriptum proportionem posse habere dupla maiorem. Sit igitur data proportio E , ad F , minor quam dupla; nimirum sesquialtera. Inueniatut ex propof. 15. huius lib.



a 3. tertij.

b 14. tertij.

c 14. tertij.

d 4. primi.

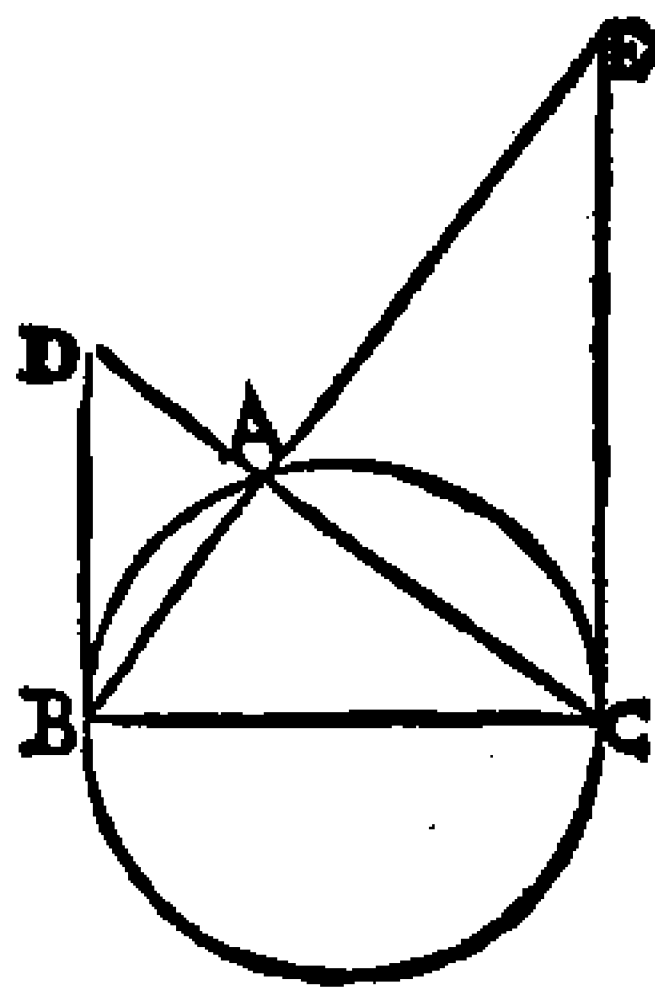
e 18. tertij.

f 31. tertij.

distabunt à centro G, propterea q^d & H I, O P, equaliter ab eodem centro distabunt. ^c Quare equaliter erunt H I, O P, ideoq^{ue} & earum semisses Q H, Q I, R O, R P, inter se erunt aequales. Sunt autē & semisses Q A, Q D, R A, R B, equalium laterum aequales. Igitur si illa ab his demantur, reliqua erunt aequales H A, D I, P A, O B. Eademq^{ue} ratione, si ducantur alia perpendicularares ad latera B C, C D, ostendentur aequales N B, M C, L C, K D, & inter se, & illis quatuor H A, D I, P A, O B. Item quia aequales sunt H I, O P, si addantur aequales I D, P A, fient tota aequales H D, A O: Atq^{ue} eadem de causa aequales erunt B M, K C, & inter se, & illis duabus H D, A O. Itaq^{ue} quia duo latera A O, A H, duobus lateribus D H, D K, equalia sunt, angulosq^{ue} continent aequales, nimirum rectos; ^d erunt & bases H K, H O, aequales. Eodemq^{ue} modo demonstrabuntur K M, M O, aequales & inter se, & duabus H K, H O. Aequilatera ergo est figura H K M O. Dico & rectangulam esse. Cum enim latera H K, K M, M O, O H, equalia sint, ^e erunt & quatuor arcus, quos subtendunt, aequales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi ergo sunt O H K, H K M, K M O, M O H, ^f ac proinde quatuor anguli H, K, M, O, in illis semicirculis recti erunt. Igitur H K M O, quadratum est, atque adeo inuenio quadrato aequale, cum idem circulus utrumque circumscribat. Circulus enim H K M O, descriptus est ad interuallum semidiametri circuli, inuenio quadrato circumscripti. Quod est propositum.

X V I I I.

Si ad diametrum circuli in extremis punctis duę perpendicularares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemq^{ue} punctum circumferentię duę alię rectę circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus; erit rectangulum comprehensum sub utralibet secantium, & eius segmento interiore, quadrato diametri æquale.



g 31. tertij.

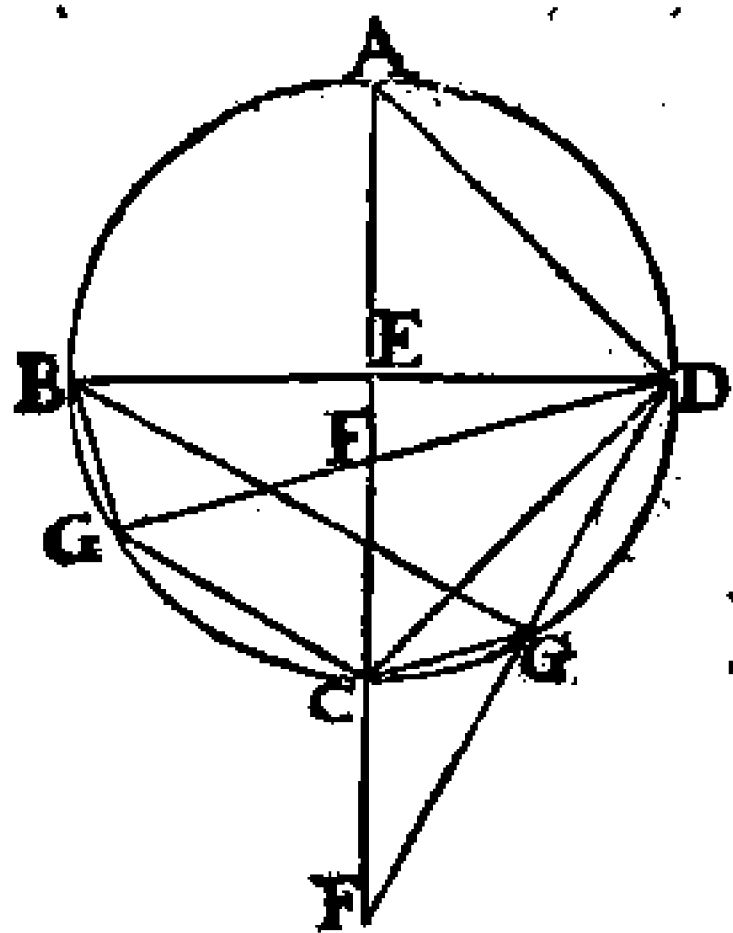
h 17. sexti.

H. A. E. C. propositio est Cardani libro 16. de Subtilitate, capite 1. sicut & qua sequitur. Vtramque autem demonstravit Ioannes Baptista Benedictus. Sit ergo circulus A B C, cuius diameter B C, ad quam in B, C, excitentur duę perpendicularares B D, C E, ac per assumptum quodunq^{ue} punctum A, in circumferentiā ex eisdem punctis B C, addita recta B A, C A, secant perpendicularares in E, D. Dico tam rectangulum sub E B, B A, quā sub D C, C A, quadrato diametri B C, æquale esse. Quoniam enim in triangulo rectangulo B C E, ex angulo recto C, demissa est C A, ad basin B E, perpendicularis; & quod angulus B A C, in semicirculo rectus sit: erit ex corollario propositionis 8. huius libri B C, media proportionalis inter E B, B A. Quare ^b rectangulum sub extremis E B, B A, æquale erit quadrato medię B C. Eademq^{ue} ratione eidem quadrato æquale erit rectangulum sub D C, C A: propterea quod B C, media quoq^{ue} proportionalis est inter D C, C A, ex eodem corollario propositionis 8.

huius libri. Constat ergo id, quod proponitur.

X I X.

Si in circulo duę diametri sese ad rectos angulos secant, & ab vnus extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circumferentiā, & alteram diametrum, siue productam, siue non productam; erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineę ductę: quorum vnum inter extremū punctum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum verò inter idem punctum extremum, & circumferentiā interiicitur, æquale quadrato intra circulum descripto.



232. print.

b 17.tertij.

c 27. tertij.

¶ 22. tertij.

e 13 primi.

f 4. sexti.

g 17. sexti.

h. 3. tertij.

i 32. primi

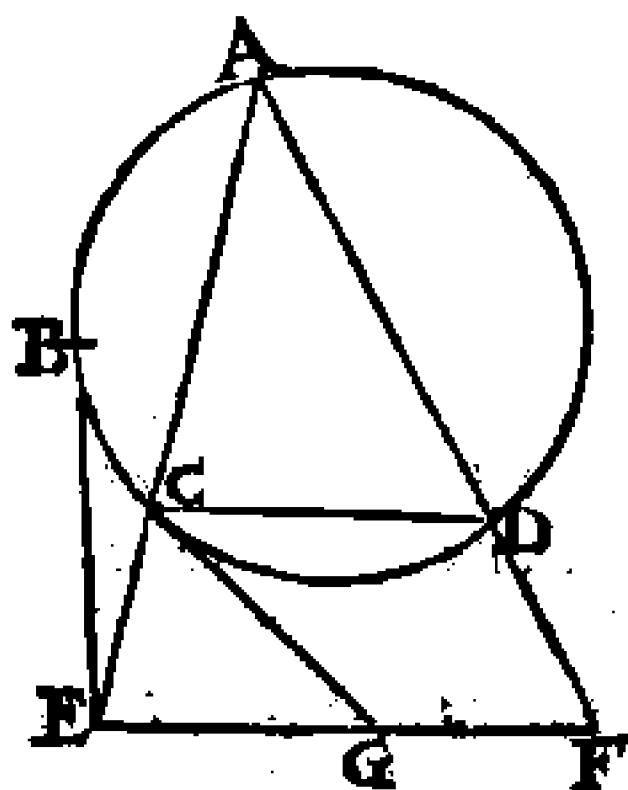
k₄. Iexti.

116. fexti.

m 17. text.

n 31.tertij.

X X.

[illegible]

4

17. sexti.

016. tertii.

22. Terü.

1

3. primi.

32. tertij. :

17. friends.

Figure 1

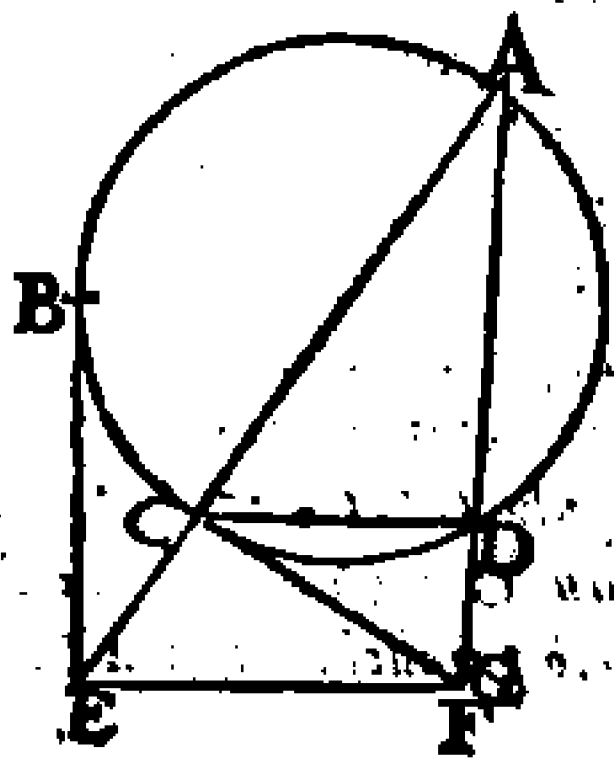
100

30. tertij.
4. 1899.

J. QUAKLEY

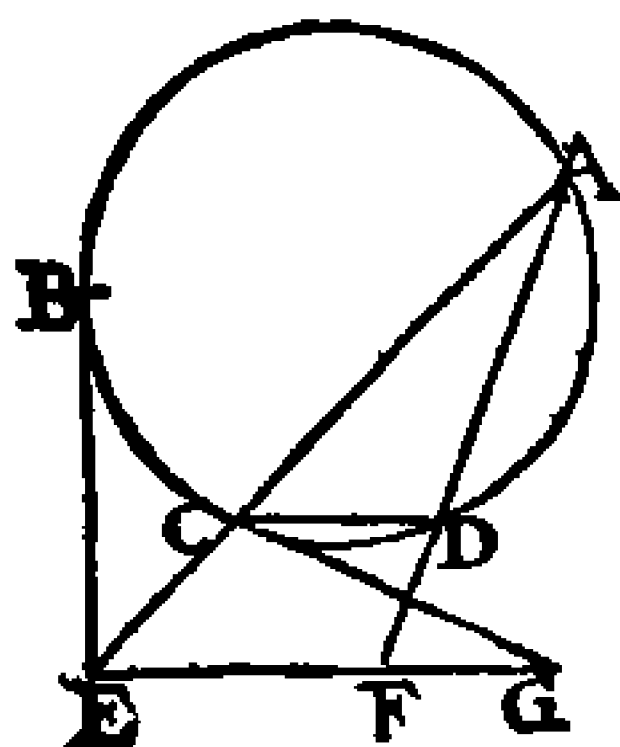
§ 7. (11) $\frac{1}{2}$

3206411



a 32. tertij. angulo A, in alterno segmento illius circuli aequalis erit: ^a Est autem & angulus FCD, eidem angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, aequalis. Igitur aequales inter se erunt anguli EFC, FCD: qui cum sint alterni, ^b erunt recta CD, EF, parallela. Quod est propositum.

c 17. sexti.
d 36. tertij.



e 21. tertij.

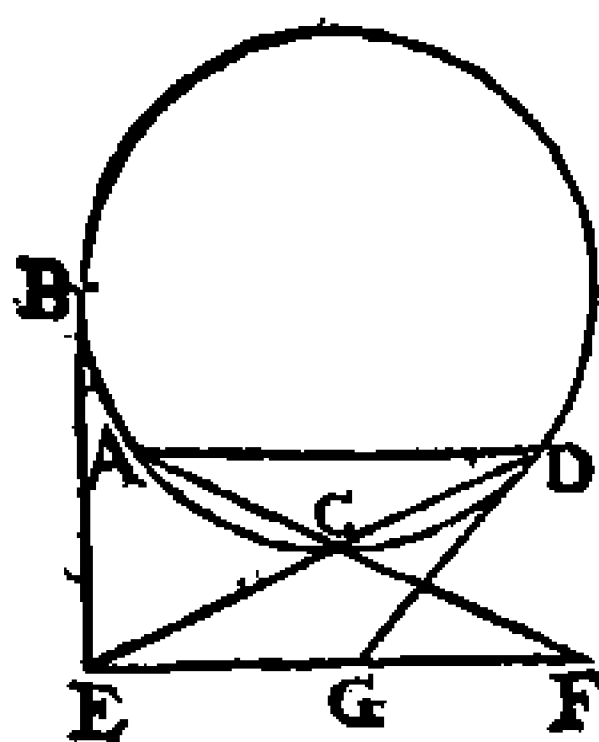
f 32. tertij.

g 27. primi.

CADAT tertio punctum G, ultra F. quod contingit, quando EF, minor est quam EB. Facta igitur eadem constructione, quoniam tres recta EF, EB, EG, continue proportionales sunt, ^c erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, aequale: ^d Est autem eidem quadrato ex EB, aequale rectangulum sub AE, EC. Igitur rectangulum sub EF, EG, hoc est, sub EG, EF, rectangulo sub EA, EC, aequale erit: ac proinde ex scholio propositionis 36. libri 3. per quatuor puncta A, C, F, G, circulus describi poterit, ^e Duo ergo anguli A, G, in eodem segmento CAGF, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta CF, inter se aequales erunt: ^f Est autem angulus GCD, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, aequalis. Igitur idem angulus GCD, angulo G, aequalis erit: ac proinde, cum duo hi anguli sint alterni, & parallela erunt CD, EF. Quod est propositum.

Si vero ex eisdem punctis datis E, F, ducenda sint dua recta ad aliquod punctum convexa circumferentia, qua producta secant concavam peripheriam in duobus punctis, ita ut recta per ea transiens sit parallela recta puncta E, F, connectenti, hoc modo procedemus. Ducta recta EB, circumulum tangente in B, inveniatur duabus rectis EF, EB, tertia proportionalis EG, cadatque primum G, punctum inter E, F. Ducta igitur ex G, recta GD, tangente circumulum in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur ED, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta eiciatur ex F, secans circumferentiam in A. Dico rectam AD, ductam esse recta EF, parallelam. Quoniam enim tres recta EF, EB, EG, continue sunt proportionales, ^h erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, aequale: ⁱ Est autem & rectangulum sub ED, EC, eidem quadrato ex EB, aequale. Igitur aequalia inter se erunt rectangula sub EF, EG, & sub ED, EC: ac proinde ex scholio propositionis 36. lib. 3. per quatuor puncta C, D, F, G, circulus describi potest. ^k Duo ergo anguli CDG, & F, in eodem segmento CDFG, illius circuli, cuius chorda esset ducta

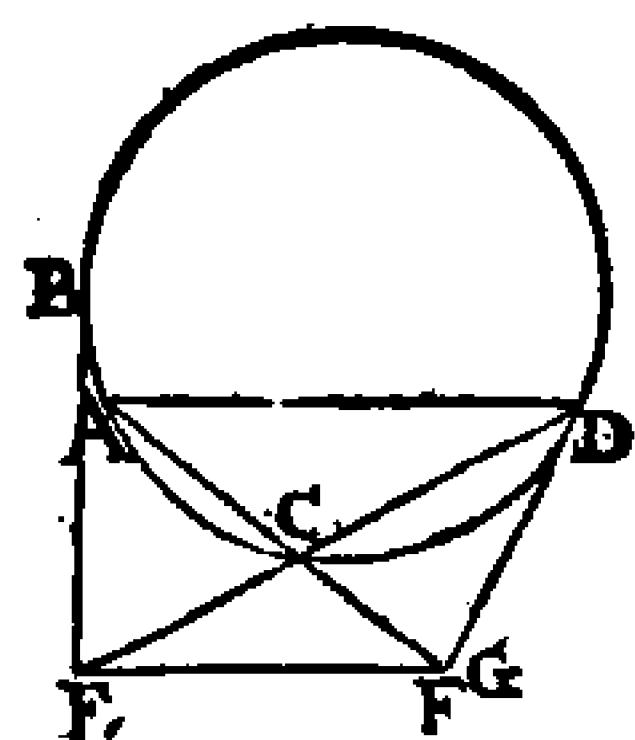
h 17. sexti.
i 36. tertij.



k 21. tertij.

l 32. tertij. ^l Ea recta CG, inter se erunt aequales. ^l Est autem angulus CDG, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, aequalis. Igitur & angulus F, angulo A, alterno aequalis erit, ^m ideoque parallela erunt AD, EF. Quod est propositum.

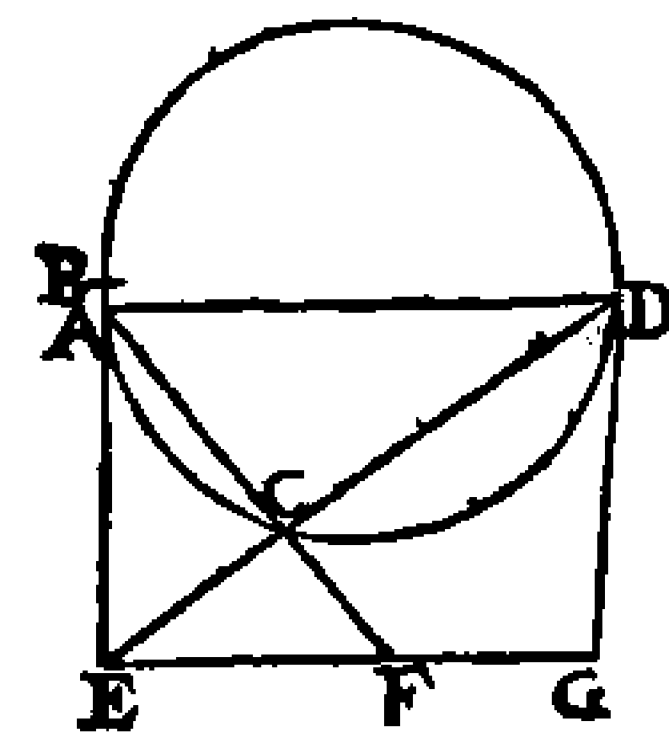
m 5. quarti.
n 37. tertij.
p 32. tertij.
q 32. tertij.



r 27. primi.

CADAT deinde punctum G, in F. Ducta igitur versus recta GD, tangente circumulum in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur recta ED, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta ducta ex F, secet circumferentiam in A. Dico ductam rectam AD, recta EF, parallelam esse. Cum enim aequales sint EB, EF, (quod sit EF, ad EB, ut EB, ad EF) erunt earum quadrata aequalia: Est autem rectangulum sub ED, EC, quadrato ex EB, aequale. Igitur & quadrato ex EF. Quia ergo, ⁿ si circa triangulum CDF, circulus describatur, recta ED, cum secat, & EF, applicata est, ^o tanget EF, eum circumulum. ^p Angulus ergo EFC, angulo FDE, in alterno segmento eius circuli aequalis erit: ^q Est autem angulus FDE, angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, aequalis. Igitur & angulus EFC, eidem angulo A, alterno aequalis erit. ^r Quare parallela erunt AD, EF. Quod est propositum.

s 17. sexti.
t 36. tertij.



u 22. tertij.

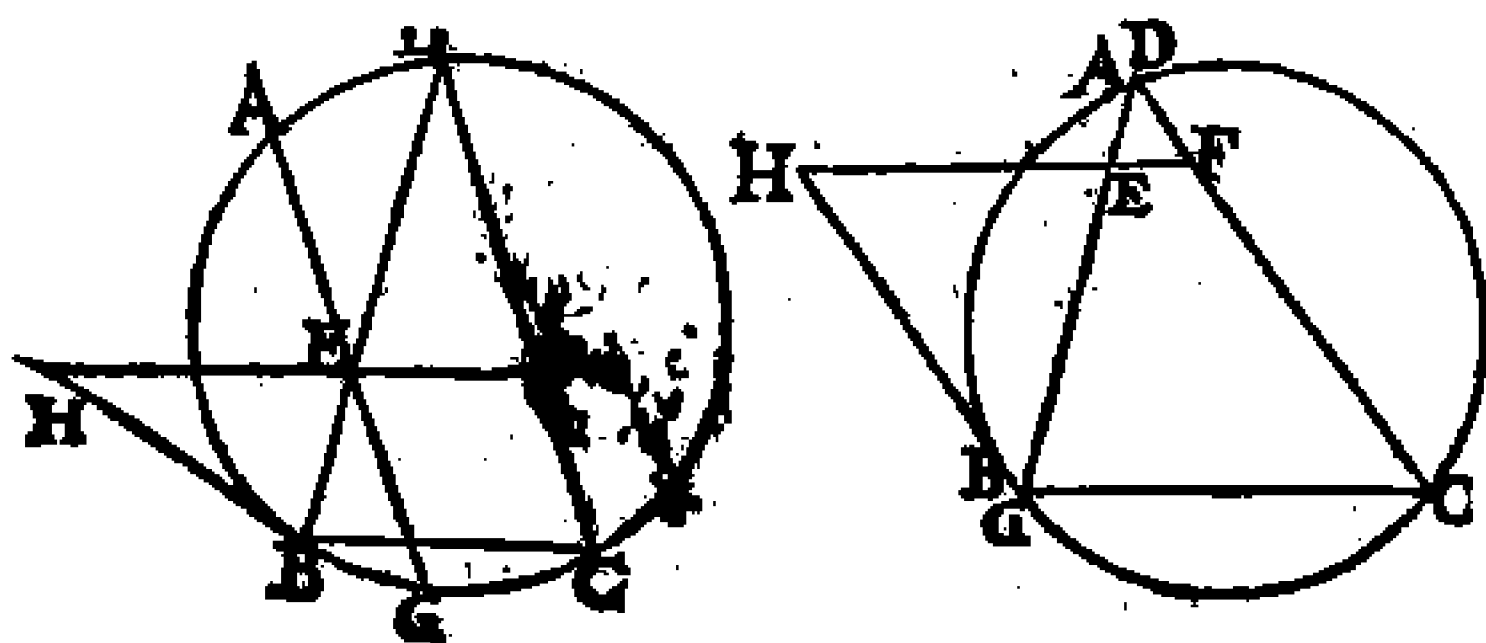
x 13. primi.
y 32. tertij.

z 27. primi.

CADAT tertio punctum G, ultra F. Facta ergo eadem constructione, cum tres recta EF, EB, EG, sint continue proportionales, ^s erit rectangulum sub EF, EG, sine sub EG, EF, aequale quadrato ex EB: ^t Est autem eidem quadrato aequale rectangulum sub ED, EC. Igitur rectangulum sub EG, EF, rectangulo sub ED, EC, aequale erit: proptereaque, ex scholio propositionis 36. libri 3. circa quatuor puncta C, D, G, F, circulus potest describi. ^u Duo ergo anguli EDG, CFG, oppositi in quadrilatero CDGF, intra eum circumulum descripto, aequales erunt duobus rectis, ac proinde aequales duobus angulis ad F. ^x qui etiam duobus sunt rectis aequalis: Dempto ergo communi CFG, reliquum CDG, reliquo CFE, aequalis erit: ^y Est autem angulus GDC, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, aequalis. Igitur & angulus CFE, eidem angulo CAD, alterno aequalis erit: ^z atque idcirco parallela erunt AD, EF. Quod est propositum.

Quod est propositum.

SE D sint iam data puncta E, F, intra circumulum ABCD. Ducta recta AG, per E, utcumque, inveniatur tribus



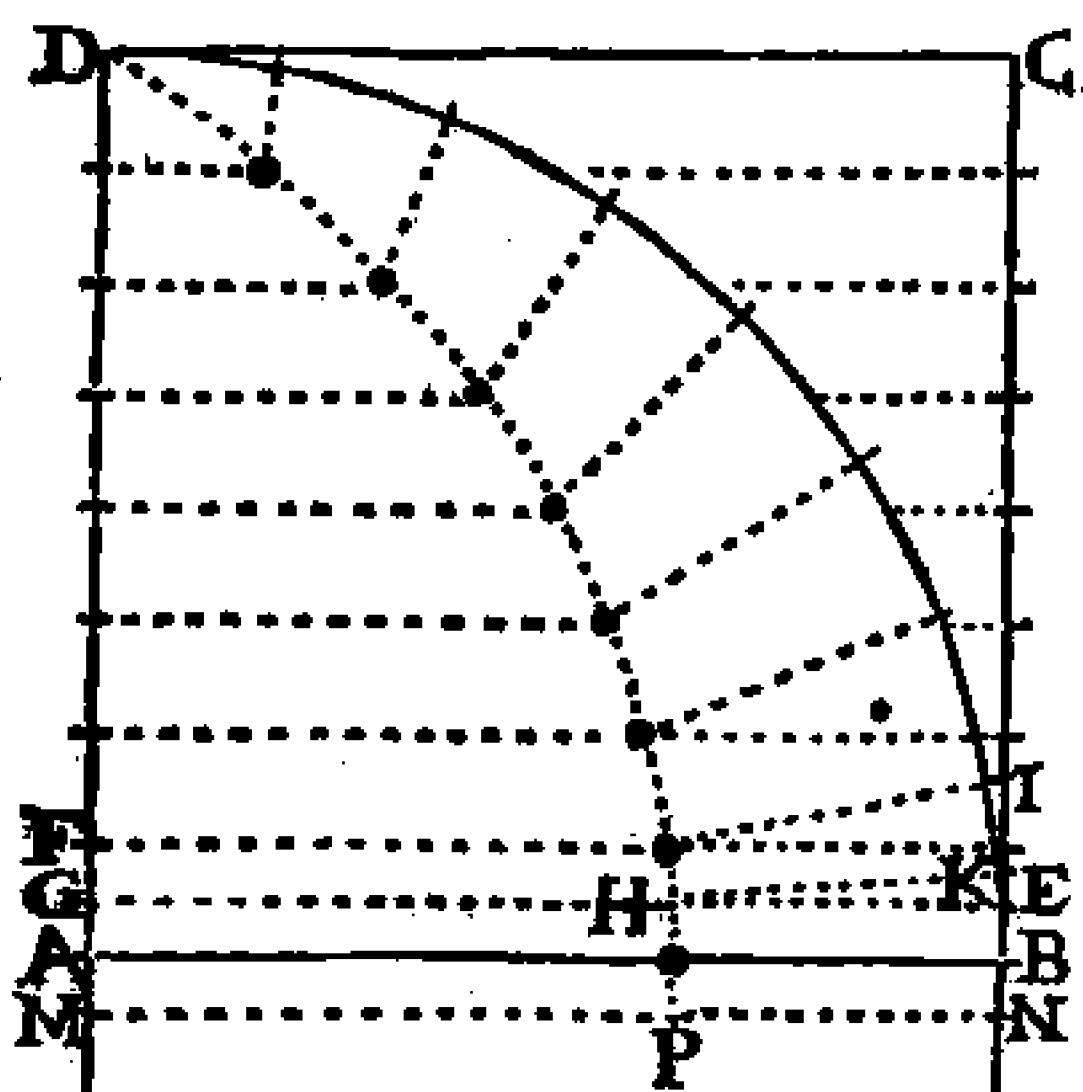
tur tribus rectis EF, EA, EG, quarta proportionalis, cui equalis sit EH,) cadetque necessarid punctum H, extra circulum. ^a Nam 216. sexti. cum rectangulum sub EF, EH, equalis sit rectangulo sub EA, EG; sic ut, si H, dicatur esse in circumferentia, describi possit circulus circa quatuor puncta A, F, G, H, ex scholio propos. 35. lib. 3. quod absurdum est, cum circulus per tria puncta A, G, & H, in circumferentia descriptus transeat ultra

F. Non ergo H, est in circumferentia. A fortiori non erit intra circulum: cadit ergo extra.) ducaturq; HB, circulum tangens in B. Ducta enim recta ex B, per E, secante circumferentiam in D, & ex D, per F, recta secante circumferentiam in C; dico ducta rectam BC, parallelam esse recta EF. Quia enim ita est EF, ad EA, ut EG, ad EH; ^b erit rectangulum sub EF, EH, equalis rectangulo sub EA, EG: ^c Est autem rectangulum sub EA, EG, equalis rectangulo sub ED, EB. Igitur & rectangulum sub EF, EH, eidem rectangulo sub ED, EB, ^c 16. sexti. ^c 35. tertij, quale erit; ac propterea ex scholio propos. 35. lib. 3. circa quatuor puncta B, H, D, F, circulus poterit describi. ^d Quare duo anguli HBD, & DFH, in eodem segmento DFBH, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta DH, ^d 21. tertij. ^e 32. tertij. aequales erunt. ^e Est autem angulus HBD, angulo C, in alterno segmento dati circuli ABCD, aequalis. Igitur & angulus DFH, angulo eidem C, equalis erit, externus interno. ^f Parallela ergo sunt recta BC, EF. ^f 18. primi. Quod est propositum.

Quo d si consingat, tangentem HB, cadere in punctum G, non erit ducenda alia linea BD, sed AG, qua in principio ducta est, propositum concludet, ut perspicuum est in secunda figura.

DE MIRABILI NATURA LINEAE CVIVS- dam inflexæ, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqua- lium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima per- ficiuntur.

FORTE superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, ubi lineam quandam inflexam explicat, quam, ut ait, Dinoftratus, & Nicomedes, & nonnulli iuniores excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoq; ab officio mathematica ab eisdem appellata est, à nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quamquam autem predicti auctores huiusmodi lineam conentur describere per duos motus imaginarios duarum rectarum, qua in re principium petunt, ut propterea à Pappo rejiciatur, tanquam inutile, & qua describi non possit: nos tamen eam sine illis motibus Geometricè describemus per inuentionem quotius punctorum, per qua duci debeat, quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse censuimus; propterea quod beneficio huius lineæ problemata Geometrica scitu periuicunda, & qua ad hunc usque diem desiderata sunt, summa facilitate conficiuntur. Id quod ad finem libri 4. facturos nos hoc loco recepimus, rejiciendo tamen pleniorẽ Quadraturæ circuli tractationem in librum de mensurationibus magnitudinum. Sic ergo descriptio lineæ Quadratricis fiet.

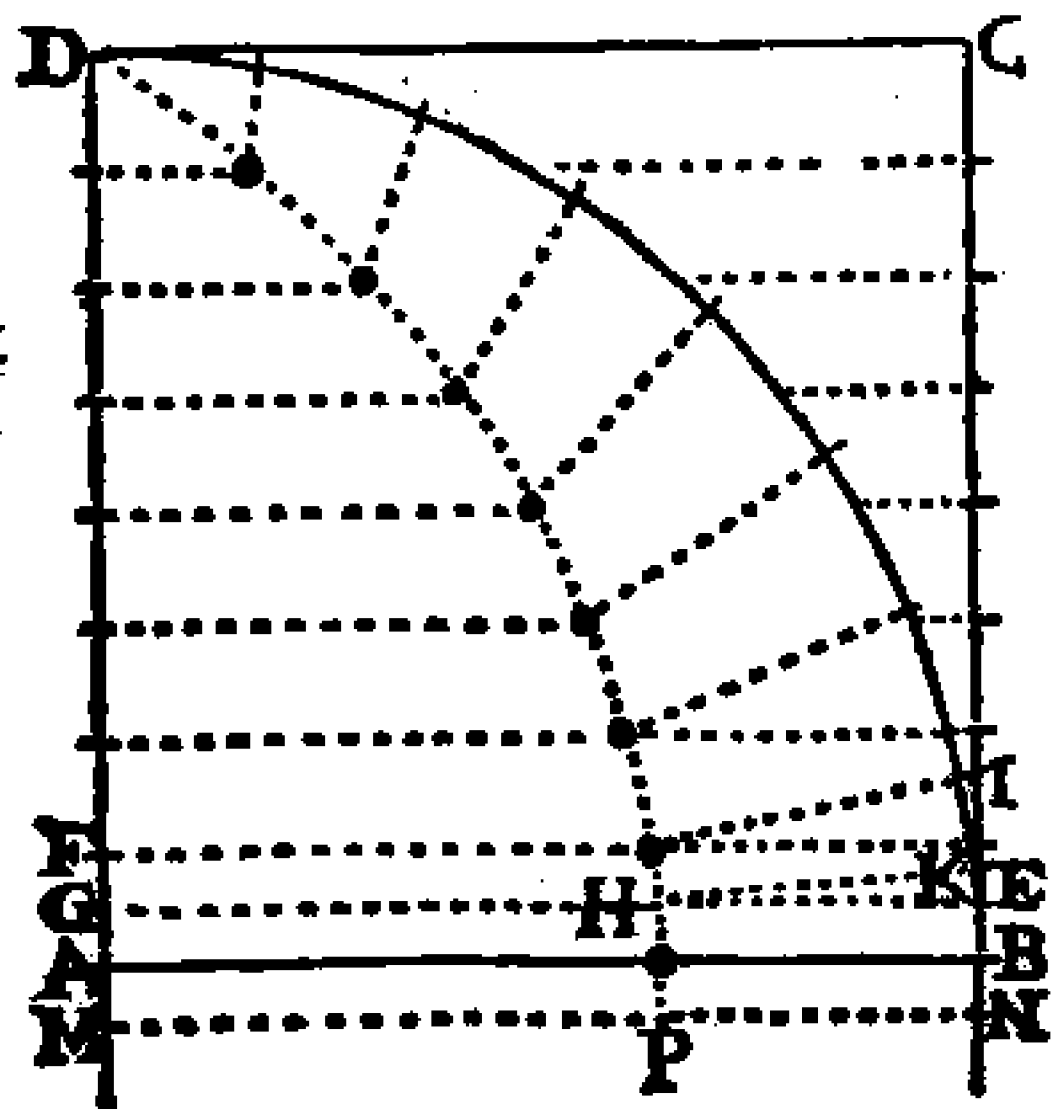


IN quadrato ABCD, describatur quadrans BD. Si igitur, ut volunt inuectores lineæ Quadratricis, tam semidiameter AD, æqualiter ferri intelligatur circa centrum A, q̃ latus supremum CD, deorsum versus æqualiter quoque, ita ut quo tempore punctum D, circumferentiam DB, uniformi semper motu percurrit, eodem recta DC, uniformi etiam motu descendens ad latus AB, perueniat, sic tamen, ut perpetuo lateri AB, sit parallela, & cum lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat; secabunt se continuè semidiameter in circumferentia DB, circumacta & recta DC, deorsum lata, in punctis, qua lineam Quadratricem describent, hoc est, per qua lineæ Quadratricis transibit, cuiusmodi est lineæ inflexa DE. Sed quia duo isti motus uniformes, quorum vnus per circumferentiam DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, effici nō possunt, nisi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam,

merito à Pappo descriptio hac reprehenditur: quippe cum ignota adhuc sit ea proportio, & qua per hanc lineam inuestiganda proponatur. Quare nos Geometricè eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo: Arcus DB, in quotius partes æquales diuidatur, & latus vtrumque AD, BC, in totidem æquales partes. Facillima diuisio erit, si & arcus DB, & vtrumque latus AD, BC, secetur primum bifariam, deinde vtraq; se-

missum iterum bifariam, & singula rursus partes iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit: Quo autem plures extiterint diuisiones, ad accuratius Quadratrix linea describeretur. Nos ad confusionem vitandam secimus tam arcum DB , quam duo latera AD , BC , in octo partes aequales.

DEINDE bina puncta laterum AD , BC , aequaliter distantia à latere DC , vel AB , coniungantur lineis rectis occultis, atque ex centro A , alia recta occulta ad singula diuisionum puncta Quadrantis DB , extendantur. Vbi enim haec rectae priores rectas interfecabunt, prima primam, secunda secundam, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita ut non sit sinuosa, sed aequaliter semper progrediatur; nullum efficiens gibbum, aut angulum alibi: qualis est linea inflexa DE , secans semidiametrum AB , in E .



SEDE quia punctum E , in latere AB , inueniri Geometricè non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesseret; ut illud sine notabili errore, qui scilicet sub sensum cadat, repetiamus, utemur hoc artificio. Infimam partem AF , lateris AD si satis exigua non sit, secabimus bifariam continue, donec infima particula sit perexigua: Eodemque modo infimam partem BI , arcus DB , bifariam continue diuidemus, donec tot fiant subdivisiones, quot in parte AF , factae sunt, ut particula BK , talis pars sit totius arcus DB , qualis pars est AG , totius lateris AD . Particula deinde AG , aequales abscindemus BL , BN , AM , ducemusque rectas occultas GL , MN . Ducta vero ex A , centro recta occulta AK , qua secet GL , in H , puncto, quod accuratissime notetur, sumemus ipsi GH , aequalem MP . Si enim Quadratricem usque ad H , descriptam continuabimus aequabili atque vniiformi extensione usque ad P , secabit Quadratrix linea latus AB , in E , puncto, quod quaritur.

Nam propter paruum rectarum GH , AE , MP , inter se distantiam, efficitur, ut ferme sint aequales, licet Geometricè loquendo, recta AE , semper maior sit aliquantulo, quantumuis parum ea recta inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi non potest. Id quod etiam in circumsferentia circuli contingit. Recta namque GL , AB , MN , si parum inter se distent, in circulo omnino aequales iudicabuntur, quamuis verè AB , aliquantulo maior sit. Itaque si tres illae rectae GH , AE , MP , perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E , in quo Quadratrix linea semidiametrum AB , secat ab eo, quod verè in Quadratrice ibi existit, non differre: dummodo puncta H , P , exquisitè, & summa adhibita diligentia, inuenta sint.

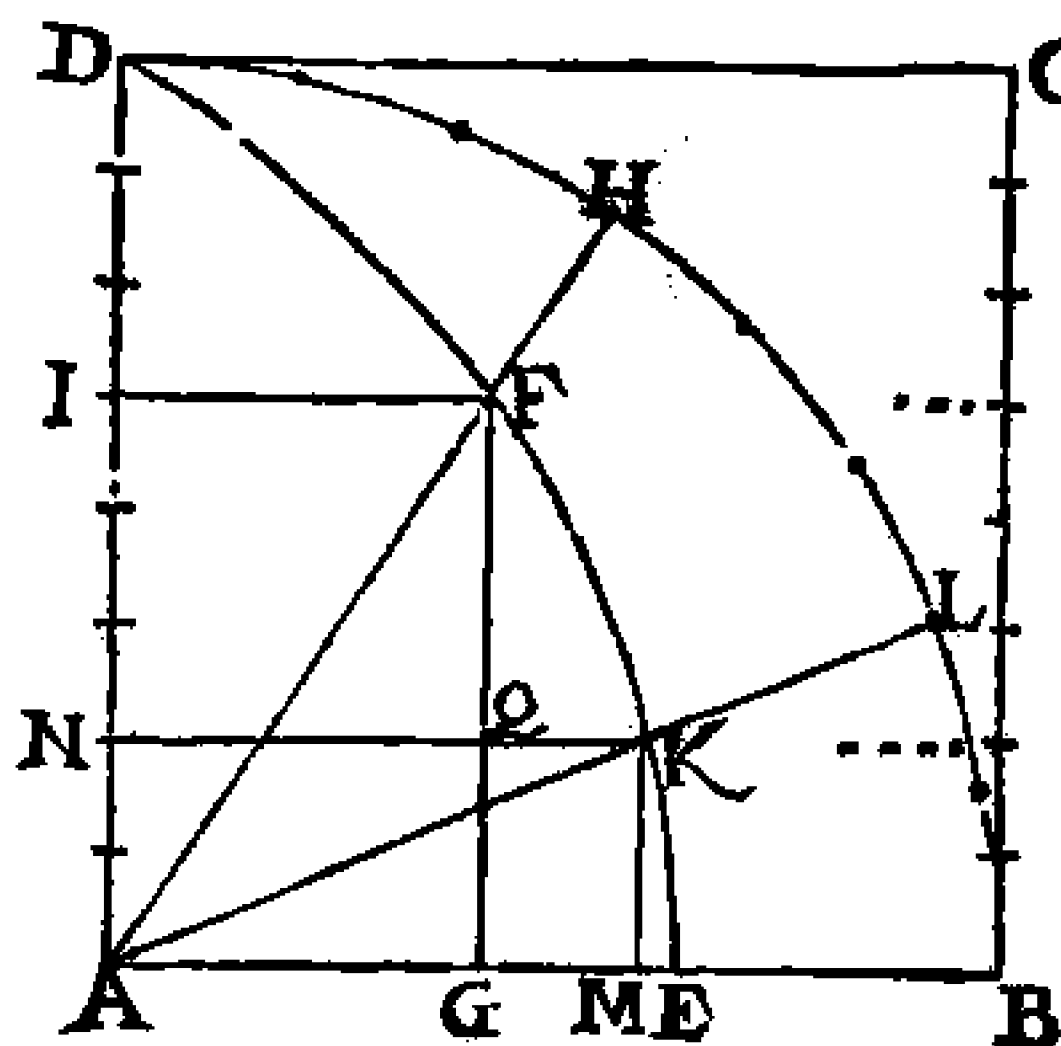
RECTAM porro AD , vocabimus latus Quadratricis, & rectam AE , eiusdem basin, ac denique punctum A , centrum.

ESSE autem hanc lineam inflexam DE , à nobis per puncta descriptam Geometricè tandem, quam Dinostratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter AD , circa centrum A , per arcum DB , eodem tempore moueatur vniiformi motu, quo latus DC , deorsum fertur motu quoque vniiformi; sit ut, quando semidiameter AD , pertransiit quamcunque partem arcus DB , tunc latus DC , similem partem laterum DA , CB , percurrerit: Alias aut duo illi motus non essent vniiformes, aut non eodem tempore ad latus AB , tam semidiameter AD , quam latus DC , peruenirent. Cum ergo recta ex centro A , per partes arcus DB , emissa, & linea parallela per partes laterum DA , CB , ducta, abscindant semper ex arcu DB , & ex lateribus DA , CB , partes similes ex constructione, liquido constat, puncta lineae inflexae DE , à nobis Geometricè inuenta à punctis, quae à duobus illis motibus reperirentur, non differre. Hac igitur est descriptio lineae Quadratricis, quae Geometrica appellari potest, quemadmodum & conicarum sectionum descriptiones, quae per puncta etiam fiunt, ut ab Apollonio traditur, Geometrica dicuntur, cum tamen magis errori sint obnoxia, quam nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quae ad earum descriptiones sunt necessariae, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam sectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergaeus persecutus est, ut propterea Magnus Geometra appellatus sit, reuocare velit, tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum existimo, cum sectiones conicae ad demonstrationes adhibuerint praestantissimi Geometrae. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vsus est in duarum linearum mediarum proportionalium inter quasuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipse multa praestare de eisdem sectionibus conicis demonstrauit: ac denique eiusmodi sectiones insignem vsum habent in re Gnomonica, ut ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur descriptionem hanc nostram Quadratricis lineae, ut Geometricam. Adde quod linea conchilis, quae Nicomedes duas medias lineas proportionales acutissime inuestigat, per puncta etiam describitur, ut in libro de Mensurationibus dicemus. Sed iam linea Quadratricis vsum nonnullis propositionibus exponamus.

I.

Si ex centro per quæuis puncta lineae Quadratricis rectae ducantur usque ad circumsferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basin demittan-

tur perpendiculares; & aliae rectae eidem basi parallelae: erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positos, proportionales.



Ex centro A, per puncta F, K, in Quadratrice utcumque accepta ducatur recta occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittanturq; ad basim AE, perpendiculares FG, KM: & ducantur FI, KN, eidem AE, parallela. Dico, ut est totus arcus DB, ad arcum HB, ita esse totum latus DA, ad perpendicularem FG, vel ad segmentum IA, &c. Quia enim eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, qua pars est recta DI, totius lateris DA, ut ex descriptione linea Quadratricis manifestum est, siue ea cogitetur descripta duobus illis modis proportionalibus Dinostrari, & Nicomedi, siue ea ratione, quam nos praescripsimus; cum in ea semper arcus DH, totius arcus DB, complectatur, quot partes totius rectae DA, recta DI, continet, propterea quod recta AH, IF, se intersecant in puncto F, Quadratricis: Neque hac similitudo impeditur, etiam si ea arcus DH, toti arcui DB, quam recta DI, toti lateri DA, sit incommensurabilis, cum perpe-

tuo Quadratrix eadem uniformitate progrediatur per omnia sua puncta. Si enim recta DI, non est talis pars, siue commensurabilis, siue incommensurabilis, totius lateris DA, qualis pars est arcus DH, totius arcus DB; si cogitetur talis pars minor, quam DI, vel maior, secabit parallela ex puncto eius extremo ducta recta AH, vel supra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix describenda est; ac proinde ea non transibit per F. quod est absurdum, & contra hypothesim. Quia, inquam, eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, qua pars est recta DI, totius lateris DA; erit quoque reliquus arcus HB, eadem pars totius arcus DB, qua pars est reliqua recta IA, totius lateris DA. Quocirca erit, ut totus arcus DB, ad arcum HB, ita totum latus DA, ad rectam IA, hoc est, ad rectam FG, quae ipsi IA, aequalis est, ac proinde & tam diuidendo erit, ut arcus DH, ad arcum HB, ita recta DI, ad rectam IA, vel FG, quam conuertendo, ut arcus HB, ad arcum DB, ita recta FG, vel IA, ad rectam DA, &c.

Eadem ratione erit, ut arcus DB, ad arcum LB, ita recta DA, ad rectam NA, siue ad KM, quae ipsi NA, aequalis est: Et ut arcus DL, ad arcum LB, ita recta DN, ad rectam NA, siue KM: Et ut arcus LB, ad arcum DB, ita recta KM, vel NA, ad rectam DA. Quoniam igitur est, ut LB, ad DB, ita KM, ad DA: Et ut DB, ad HB, ita DA, ad FG; erit ex aequo, ut LB, ad HB, ita KM, ad FG; Et conuertendo, ut HB, ad LB, ita FG, ad KN, hoc est, ita IA, ad NA: Et diuidendo ut HL, ad LB, ita IN, ad NA, vel ita FQ, ad QG.

Rursus quia est, ut DH, ad HB, ita DI, ad IA: Et ut HB, ad LB, ita IA, ad NA; erit ex aequo, ut DH, ad LB, ita DI ad NA, siue ad KM. Semper ergo arcus inter semidiametros intercepti perpendicularibus, siue segmentis semidiametri inter parallelas positos proportionales sunt. Quod est propositum.

I I.

DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.

Si T primum arcus HB, in figura antecedente diuidendus in proportionem datam rectae O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrum A, recta HA, secante Quadratricem in F, ducatur FH, basi AE, parallela. Deinde recta IA, ita secetur in N, ex scholio propof. 10. huius lib. ut sit IN, ad NA, quemadmodum O, ad P, Ducta quoque NK, basi AE, parallela secante Quadratricem in K, emittatur ex centro A, per K, recta secans arcum HB, in L. Dico arcum HB, in L, sectum esse in proportionem datam O, ad P. Quoniam enim, ut propof. 1. ostendimus, ut HL, ad LB, ita est IN, ad NA: Est autem IN, ad NA, ex constructione, ut O, ad P; erit quoque HL, ad LB, ut O, ad P.

O ————— 3

P ————— 2

R ————— 3

S ————— 5

T ————— 8

V ————— 2

DEINDE totus Quadrans DB, secandus sit in proportionem R, ad S. Diuisa semidiametro DA, in I, ut sit DI, ad IA, sicut R, ad S, ducatur IF, ipsi AE, parallela secans Quadratricem in F. Ducta igitur recta AFH, erit ex propof. 1. DH, ad HB, ut DI, ad IA, hoc est, ut R, ad S.

TERCIO sit idem Quadrans DB, secandus in duos arcus, ita ut totus Quadrans ad unum eorum habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, DA, inueniatur quarta proportionalis, cui equalis abscindatur AN. Ducta autem NK, ipsi AE, parallela secante Quadratricem in K, ducatur ex

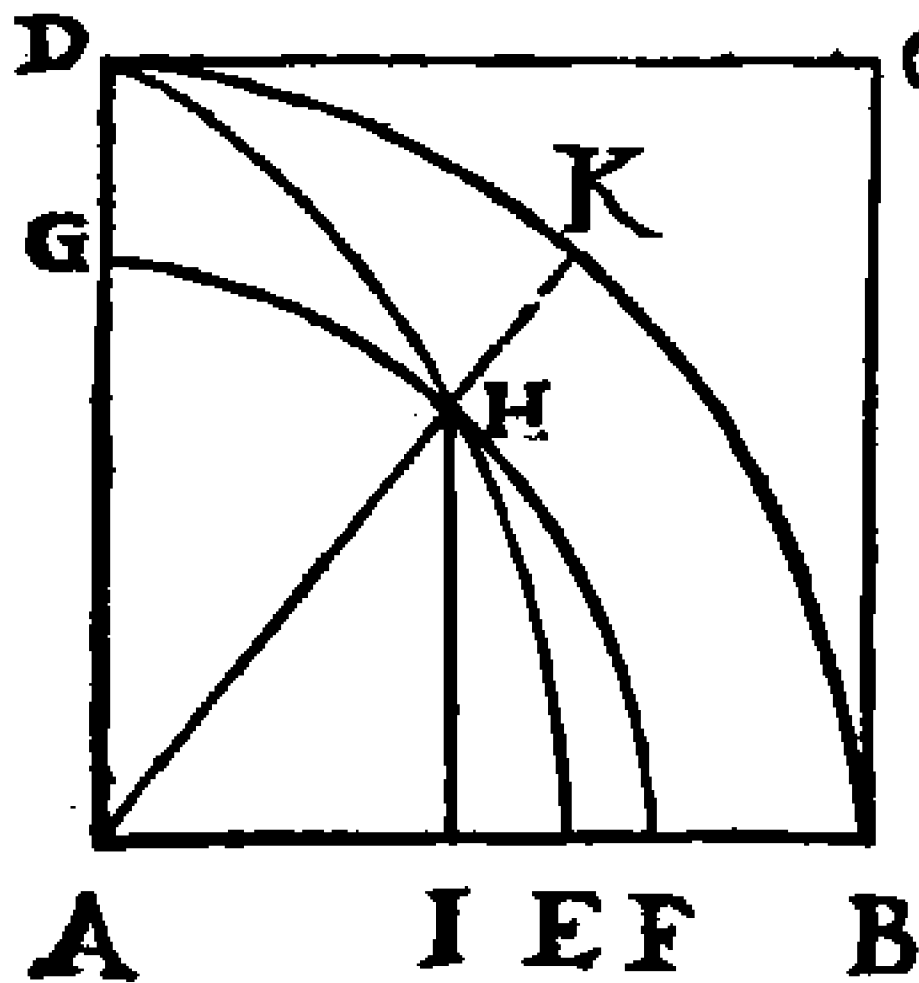
A, per K, recta AKL. Dico Quadrantem in L, sectum esse, ut proponitur. Est enim ex propof. 1. DB, ad LB, ut DA, ad NA, hoc est, ut T, ad V.

sur per priora omnes figura equilatera parium laterum: per posteriorem verò figura equilatera laterum imparium in circulo, ut ad finem lib. 4. ostendimus.

Idem efficiemus sine huiusmodi triangulis, si totam circumferentiam in tot aequales partes secemus, ut in corollario proximè antecedente docuimus, quot latera angulòve figura inscribenda habere debet, &c.

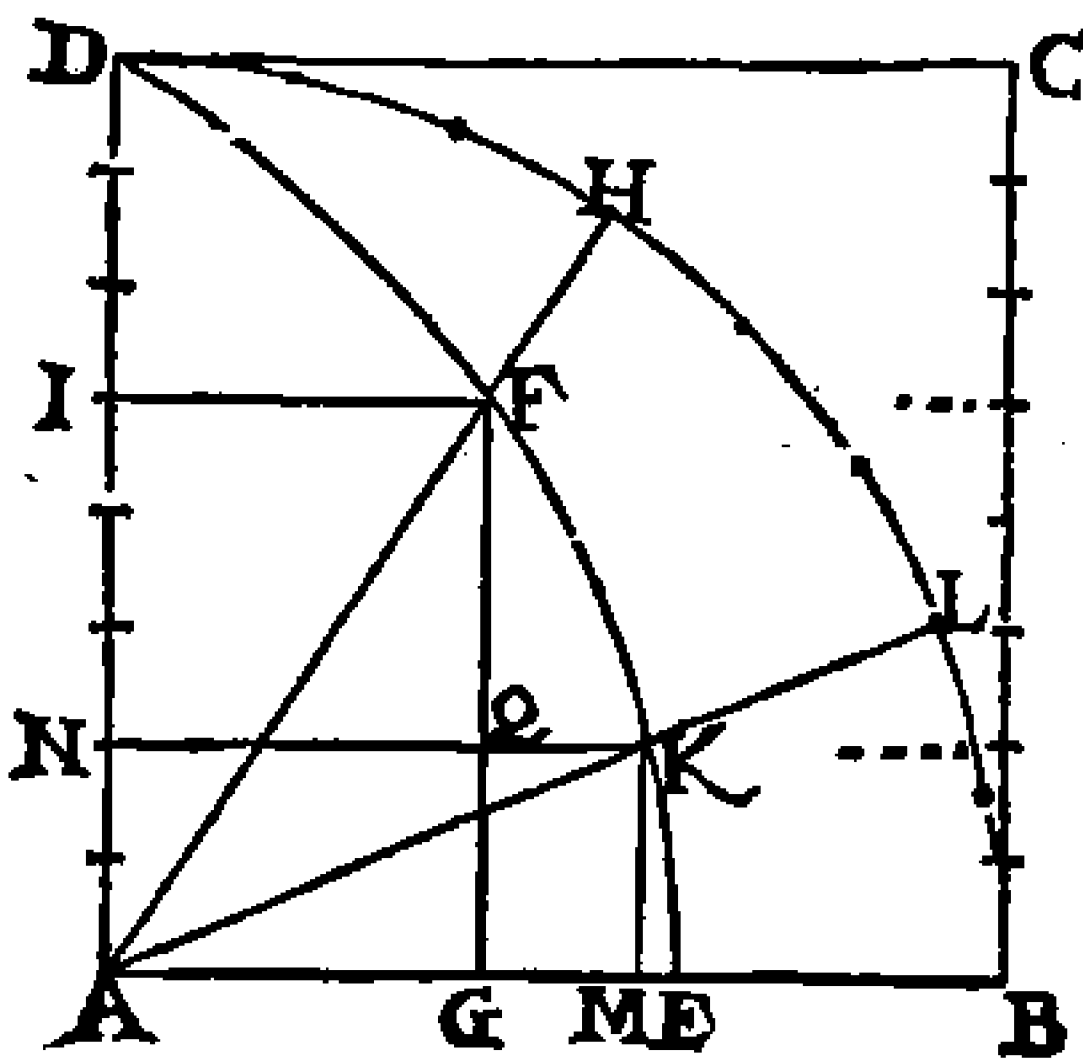
IIIL

Si Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis continuè proportionales.



Si r Quadrans, & Quadratrix ex eo descripta, ut supra. Dico arcum BD, semidiameter DA, & Quadratricis basin AE, continuè esse proportionales, hoc est, esse BD, ad DA, ut DA, ad AE. Sin minus, sit ut BD, ad DA, ita DA, ad AF, maiorem ipsa AE, minoremve, sitq; primum AF, maior quam AE. Descripto ex centro A, quadrante FG, per F, secante Quadratricem in H, ducatur per H, semidiameter AHK, demitratq; perpendiculari HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectam DA, ut DA, hoc est, ut AB, ad AF: estq; ut AB, semidiameter ad semidiameter AF, ita arcus BD, ad arcum FG; (Cum enim sit ex Pappi demonstrationibus, ut & nos in libro de Mensurationibus ostendimus, diameter ad diametrum, ut circumferentia circuli ad circumferentiam circuli; ^a erit quoque semidiameter AB, ad semidiameter AF, ut eadem circumferentia ad eandem circumferentiam; ^b ac proinde etiam ut quarta pars circumferentia ad

quartam partem circumferentia, hoc est, ut arcus BD, ad arcum FG;) ^c Erit quoque arcus BD, ad rectam DA, ut idem arcus BD, ad arcum FG: ^d ac propterea aequales erunt recta DA, & arcus FG. Quia verò ex theoremate 1. est, ut arcus BD, ad arcum BK, ita recta DA, ad rectam HI; & ut arcus BD, ad arcum BK, ita arcus FG, ad arcum FH, quòd arcus BD, BK, arcibus FG, FH, similes sint, ut supra in hoc scholio ostensum est: ^e Erit quoque recta DA, ad rectam HI, ut arcus FG, ad arcum FH. Cum ergo recta DA, ostensa sit arcui FG, aequalis; ^f erit quoque recta HI, arcui FH, aequalis. quod est absurdum. Est enim recta HI, minor arcu FH, cum ea sit semisus chorda subtendens arcum duplum arcus FH: (Nam recta AF, & secat eam chordam bisariam, ac proinde & arcum; ex scholio propositionis vigesima septima libri tertij.) chorda autem semper suo arcu minor sit. Non ergo est arcus BD, ad semidiameter DA, ut DA, ad rectam maiorem base AE, Quadratricis.



Si r deinde, si fieri potest, AF, minor, quam AE. Descripro igitur ex centro A, per F, Quadrante FG, erigatur ex F, ad AE, perpendicularis FL, secans Quadratricem in L, puncto, per quod semidiameter ducatur ALK, secans arcum FG, in H. Ostendimus ergo, ut prius, arcum FG, recta DA, aequalem esse: Item, ita esse arcum BD, ad arcum BK, hoc est, arcum FG, ad arcum FH, ut est recta DA, ad rectam LF. Quare cum arcus FG, ostensus sit aequalis recta DA, erit quoque arcus FH, aequalis recta LF. Quod est absurdum. Est enim recta LF, maior arcu FH: Nam si ex L, duceretur versus G, alia recta tangens circumferentiam FG, sicut LF, eundem tangit in F, essent haec tangentes aequales, ex scholio propos. 36. libri 3. arcusq; inter eas interceptus secaretur bisariam in H, propterea quòd ex scholio propos. 37. libri 3. angulus ab eis comprehensus bisariam divideretur, ^b ac proinde & angulus in centro A, si ad alterum punctum contractus recta adiungeretur; ^c ideoq; & arcus, quibus insistant, aequales forent. Igitur cum ex Archimede ad initium de Sphaera, & Cylindro, dua illa tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semisus LF, maior arcu FH, illius arcus. Non est ergo arcus BD, ad semidiameter DA, ut DA, ad rectam minorem base AE, Quadratricis: Sed neq; ut DA, ad maiorem, ut ostensum est. Igitur ut DA, ad ipsam basin AE. Quod est propositum.

geretur; ^d ideoq; & arcus, quibus insistant, aequales forent. Igitur cum ex Archimede ad initium de Sphaera, & Cylindro, dua illa tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semisus LF, maior arcu FH, illius arcus. Non est ergo arcus BD, ad semidiameter DA, ut DA, ad rectam minorem base AE, Quadratricis: Sed neq; ut DA, ad maiorem, ut ostensum est. Igitur ut DA, ad ipsam basin AE. Quod est propositum.

COROLLARIUM I.

Facile reperiemus rectam cuiuslibet arcui circuli, cuius Quadrans est BD, ex quo Quadratrix descripta est, aequalem.

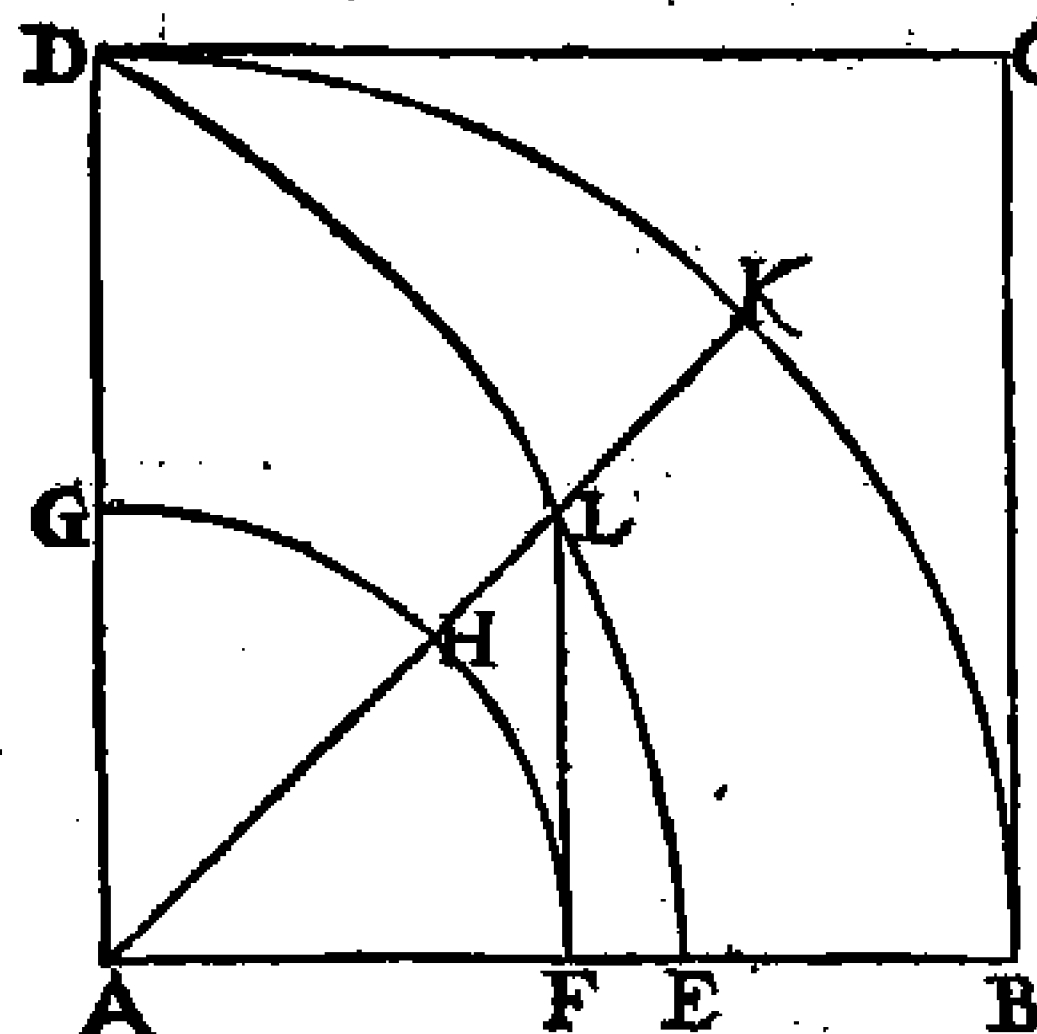
Si enim est arcus BD, ad DA, ut DA, ad AE; erit convertendo quoq; AE, ad DA, ut DA, ad

a 11. quinti.

b 9. quinti.

c 11. quinti.

d 14. quinti.

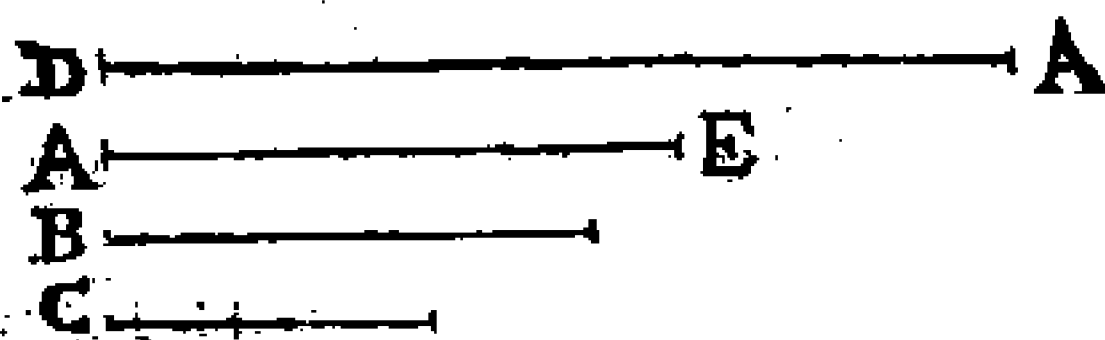


qualis erit arcui BK. Si vero arcui, qui maior sit quadrante, inuenienda sit recta equalis, reperienda primùm erit recta equalis Quadranti, vel semicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta equalis reliquo arcui, qui minor Quadrante est. Nam duæ hæc rectæ coniunctæ erunt toti arcui proposito æquales.

COROLLARIUM II.

SEQUITUR quodque ex his, si basis Quadratricis AE, fiat maior semidiameter alicuius circuli eius latus AD, Quadranti eiusdem circuli esse æqualem, & lineam lateris duplam esse æqualem semicircumferentia eiusdem circuli, & lineam quadruplam toti circumferentia esse æqualem.

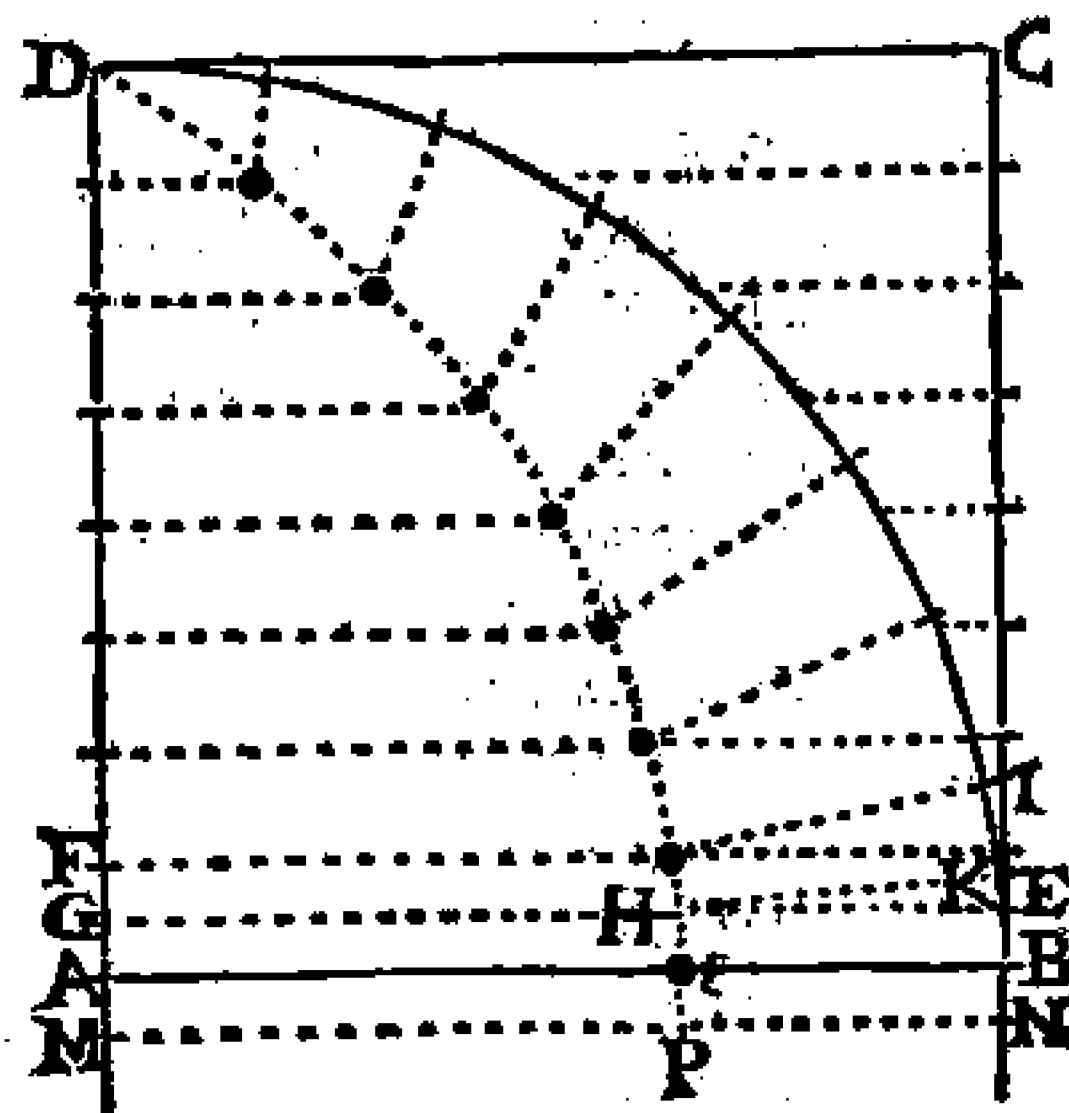
Cum enim, ut supra ex Pappo diximus, semidiametri semicircumferentis circulorum, atque adeo & quadrantibus sint proportionales. erit ut DA, ad AE, hoc est, ut tertia illa proportionalis ad DA, ita Quadrans BD, ad Quadrantem semidiametri AE: Est autem tertia illa proportionalis equalis Quadranti BD, ut ostensum est. Igitur & recta DA, Quadranti semidiametri AE, equalis erit. Dupla linea ergo ipsius DA, semicircumferentia circuli, cuius semidiameter AE, & quadrupla toti circumferentia erit equalis.



EADDEM ratione, si duæ rectæ eandem proportionem habeant, quam DA, AE, & minor ponatur semidiameter alicuius circuli, ostendetur maior equalis Quadranti illius circuli, &c. Sit enim DA, ad AE, ut recta aliqua B, ad rectam C. Erit ergo permutando DA, ad B, ut AE, ad C. Ut

autem AE, ad C, ita est Quadrans semidiametri AE, ad Quadrantem semidiametri C, ut supra ex Pappo dictum est. Igitur erit quoque DA, ad B, ut quadrans semidiametri AE, ad quadrantem semidiametri C. Cum ergo DA, equalis sit, ut ostensum est, quadranti semidiametri AE, erit quoque B, equalis quadranti semidiametri C. Quod est propositum.

g 15. quinti.



SE D si lubeat per numeros explorare, quamnam proportionem plus minus habeat ex hoc præclaro inuento circumferentia circuli ad eius diametrum, vel (quod idem est) semicircumferentia ad semidiametrum, & cum sit ut circumferentia ad diametrum, ita semicircumferentia ad semidiametrum, efficiemus id hoc modo: Cogitemus Quadrantem DB, in figura, in qua Quadratricem descripsimus, diuisum esse in gradus 90. & singulos gradus in Min. 60. ut totus arcus DB, complectatur 5400. particulas æquales. Si igitur latus DA, concipiamus in totidem æquales particulas diuisum esse, erit parallela ex vltima particula vsque ad Quadratricemeducta ferme equalis basi AE, ob exiguam distantiam illius parallela, & basis AE, cum in ea figura parallela quoque GH, auferens AG, particulam sextamdecimam, quæ $\frac{1}{60}$, multò maior est, quam $\frac{1}{5400}$, vix à base AE, superetur: ita ut sine errore notabili eam parallelam pro base accipere possimus. Quia vero vltima

illa particula lateris DA, est sinus arcus Min. 1. & parallela illa sinus complementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. ut constat, si ponatur AG, vltima particula, & arcus BK, vltimum Minutum, ducaturque recta AH. Nam GH, erit sinus anguli GAH, grad. 89. Min. 59. ac proinde AG, sinus anguli AHG, Min. 1. posito sinu toto AH, ut in tractatione Sinuum ostendimus. Si igitur sinus totus AH, statuatur 10000000. (Ita enim exq. è

sinus

fitium proportio optata inuenietur, q̄ si sinus totus ponatur tantum 100000. cū in hoc sinus grad. 89. Min. 59.
 à sinu toto non differat.) erit A G, 2909. & G H, 999999. at totū latus D A, earūdem partū erit 15708600.
 vt constat, si 5400. particule lateris D A, ducātur in vnā à G, quam dēximus esse 2909. Duplum ergo lateris
 D A, erit 31417200. Et quoniam ex coroll. 2. huius propos. 4. duplum lateris D A, aequale est semicircunferētiæ,
 cuius semidiameter A E; erit proportio semicircunferētiæ illius ad semidiametrum A E, eadem fere, quā nu-
 meri 31417200 ad 999999. denominata à 3 $\frac{1417200}{999999}$. hoc est, in minimis terminis, à 3 $\frac{15708600}{1111111}$.
 qua proportio minor est, quā tripla sesquiseptima, siue tripla superdecupartiens sepruagesimas, maior au-
 tem quā tripla superdecupartiens septuagesimas primas; inter quas duas proportionēs vera proportio cir-
 cunferētiæ ad diametrum consistit, vt ab Archimede demonstratum est.

Ita AQV ut recta linea circumferentia circuli inveniatur aequalis, satis est punctum E , inuenire, etiam si tota linea Quadratrix non sit descripta: Ut autem arcus, vel angulus in datam proportionem secetur, non indigemus puncto E , ut perspicuum est.

V.

DATO circulo quadratum æquale constituere.

QVONIAM Archimedes demonstravit circulum quemcunque aequalem esse triangulo rectangulo, cuius unum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum vero circumferentia eiusdem aequale est; atq; hinc nos propof. 4. figurarum Isoperimetrarum in Commentarijs in Spharam ostendimus, eundem circulum rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semicircumferentia, aequalem esse: si ex totoll. precedentis propof. inueniatur linea recta aequalis semicircumferentia dati circuli, & rectangulo contento sub illa recta, & semidiametro² construatur quadratum aequale, erit idem hoc quadratum dato circulo aequale.

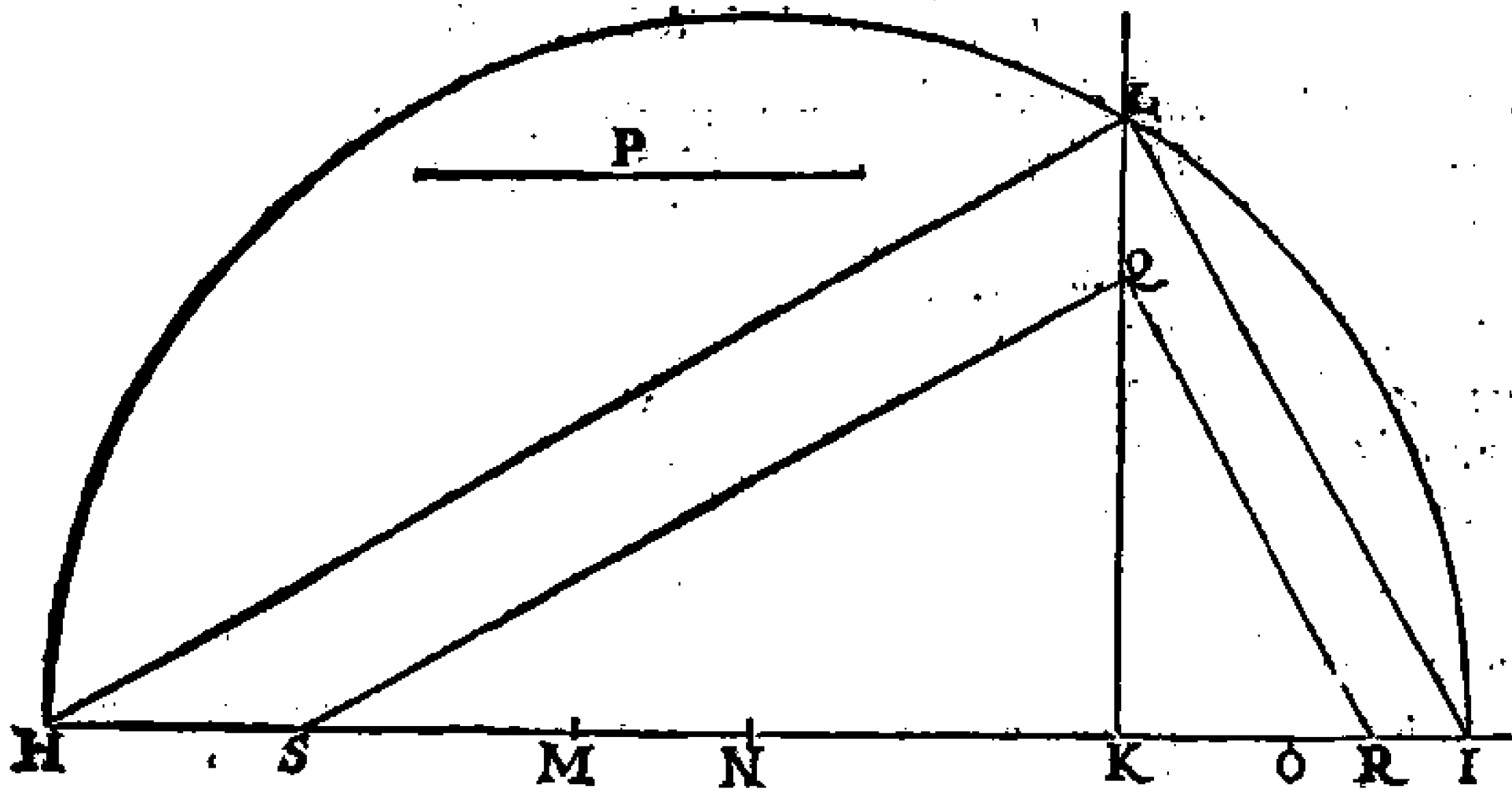
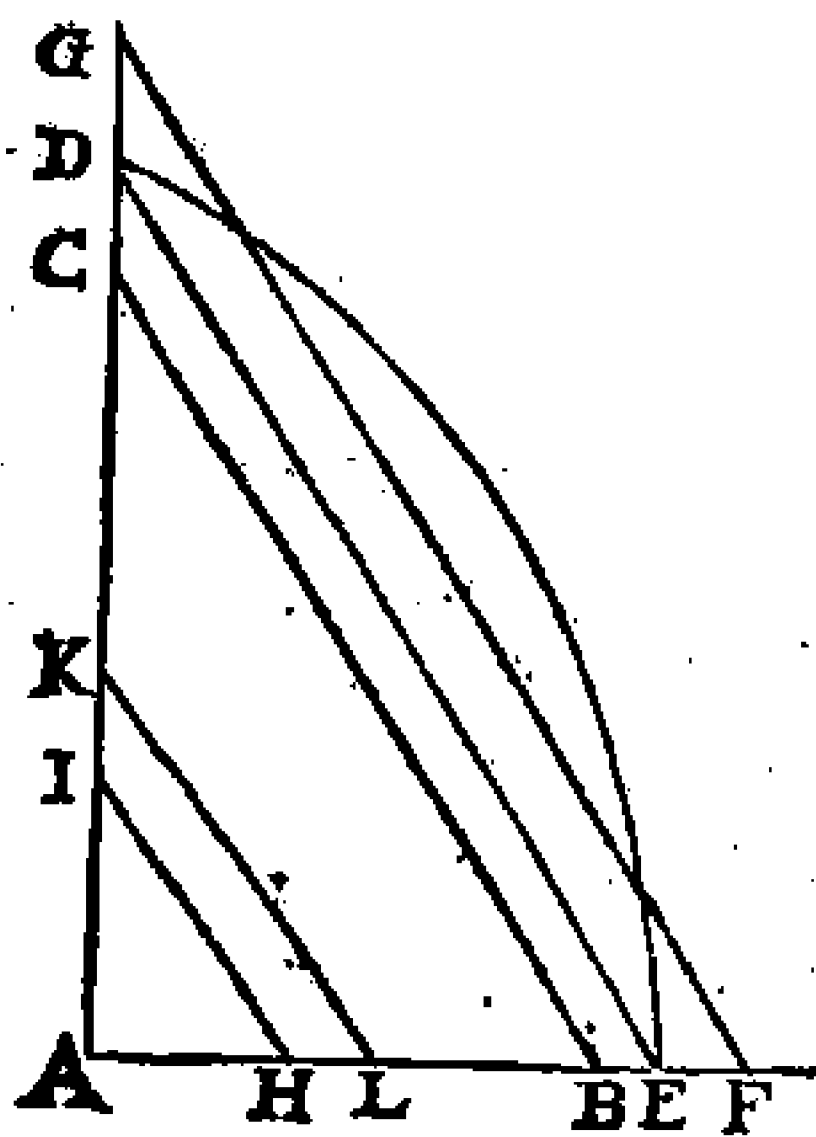
INVENIETUR autem recta aequalis semicircumferentia, vel Quadranti, vel toti circumferentia, si fiat ut basis Quadratricis descripta ad eiusdem latius, ita semidiameter dati circuli ad aliud. Inventa enim quarta linea aequalis erit Quadranti circuli, ut in coroll. 2. praeced. propos. diximus, atque adeo duplicata efficiet lineam semicircumferentia aequalem; quadruplicata autem rectam toti circumferentia aequalem exhibebit.

V E R U M ut expeditius quilibet circulus possit quadrari, construenda erunt duae figurae quadrandi circulis aptissima, hoc modo: Constituantur angulus rectus $D A E$, sit q_2 $A D$, equalis semidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix descripta est, & $A E$, basi eiusdem Quadratrix equalis: Vel ex centro A , nova Quadratrix describatur $D E$, cuius latas $A D$, & basis $A E$. Ducta autem recta $D E$, constructum erit unum instrumentum circulis quadrandi aptissimum. Si enim circuli quadrandi semidiameter equalis sit rectae $A E$, erit recta $A D$, circumferentia Quadrantis eiusdem circuli equalis, ut ex coroll. 2. antecedentis propos. liquet. Si autem semidiameter minor sit, q̃ $A E$, abscindemus ei aequalem $A B$, parallelam q̃ ipsi $D E$, agemus $B C$. Si deniq̃ semidiameter sit maior, q̃ $A E$, abscindemus ei aequalem $A F$, ex $A E$ producta, & per F , ipsi $D E$, parallelam agemus $F G$. Erit enim ex coroll. 2. praecedentis propos. recta $A C$, equalis circumferentia Quadrantis, cuius semidiameter $A B$: Recta vero $A G$, circumferentia Quadrantis equalis erit, cuius semidiameter $A F$: propterea quod est, ut $A E$, ad $A D$, ita tam $A B$, ad $A C$, q̃ $A F$, ad $A G$.

214. સિંહધો,

b 12, text.

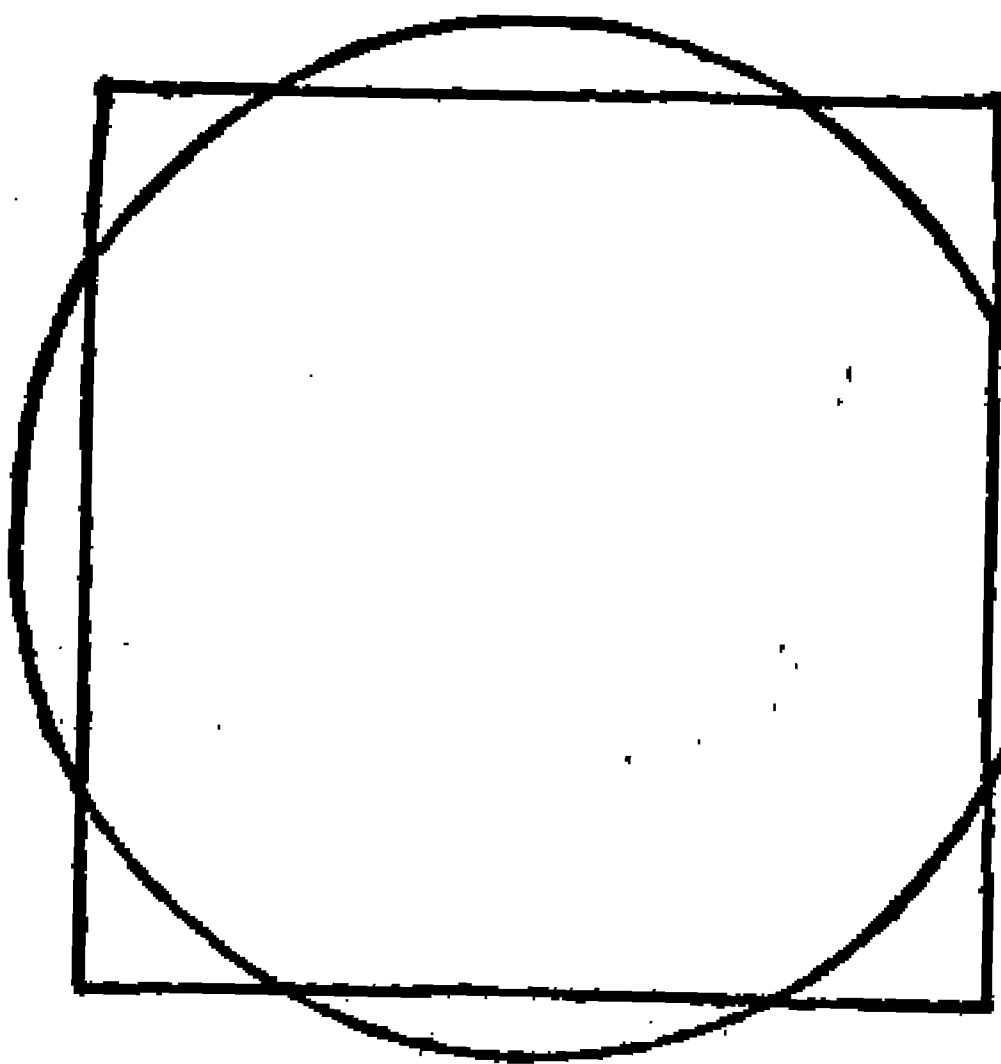
e s. vel 4:
texti.



DEINDE ducta recta HI ; cuiuscuque longitudinis, exciderur ad eam perpendicularis quantacunaq;
 KL ; paratumq; erit alterum instrumentum quadrantis circuli accommodatum.

P E R duo hac instrumenta nullo negotio quemcumq; circulum quadrabimus hac ratione: Sit quadrandus

a 17. sexti.



circulus, cuius semidiametro in priori instrumento equalis sit recta AB , & per B , ipsi DE , parallela agatur BC . In posteriori vero instrumento sumantur duæ KM, MH , ipsi AC , æquales, & recta KI , semidiametro AB , æqualis. Divisa autem tota recta HI , bisariam in N , describatur ex N , ad intervallum NH , vel NI , semicirculus secans perpendicularem KL , in L . Dico quadratum ex KL , circulo dato, cuius semidiameter AB , in priori instrumento, vel KI , in posteriori, æquale esse. Quoniam enim KL , media proportionalis est inter KH, KI , ex scholio propof. 13. huius lib. ^a erit quadratum ex KL , rectangulo sub KH, KI , æquale. Cum ergo hoc rectangulum circulo dato sit æquale, ut ad initium huius propositionis diximus, quod KH , sit æqualis semicircumferentia, & KI , semidiametro; erit quoque idem quadratum ex KL , dato circulo, cuius semidiameter AB , vel KI , æquale. Si igitur quadratum rectæ KL , describatur, & ex eius centro ad intervallum AB , in priori instrumento, vel KI , in posteriori

circulus describatur, habebitur quadratum æquale circulo, ut in apposta figura apparet.

CETERVM divisio rectæ HI , in posteriori instrumento in duas partes æquales facile sic fiet. Divisa semidiametro KI , bisariam in O , (hac enim quia minor est, quam HI , facile bisariam secabitur.) accipiat recta KO , æqualis MO . Nam N , punctum erit medium rectæ HI . Cum enim æquales sint MO, NI , addita communis NO , erit NI , ipsi MO , æqualis: Est autem MO , ipsi HN , æqualis. (quia enim æquales sunt HM, MK , additis æqualibus MO, KO , tota æquales fient HN, MO .) Igitur & NI , ipsi HN , æqualis erit.

V I.

DATO quadrato circulum æqualem describere.

Si r datum quadratum, cuius latus P . Huic in posteriori instrumento antecedentis propof. ex perpendiculari KL , abscindatur æqualis KQ . Propofito autem quovis circulo, cuius semidiameter KI , inveniatur per antecedentem propof. ei quadratum æquale, cuius latus KL . Deinde ducta recta LI , agatur ei parallela QR . Dico circulum, cuius semidiameter KR , æqualem esse quadrato dato, cuius latus KQ , vel P . Inventa namque per propof. antecedentem recta KH , quæ semicircumferentia circuli, cuius semidiameter KI , sit æqualis, ducta quoque recta LH , agatur ei parallela QS . Quoniam igitur, ob triangulorum similitudinem, est ut HK , ad KI , ita SK , ad KQ ; & ut KL , ad KI , ita KQ , ad KR : erit ex æquo, ut HK , ad KI , ita SK , ad KR . Cum ergo HK , æqualis sit semicircumferentia circuli, cuius semidiameter KI , erit quoque, ex coroll. 2. propof. 4. SK , æqualis semicircumferentia circuli, cuius semidiameter KR . Quia vero KQ , ex coroll. propof. 8. huius lib. media proportionalis est inter SK, KR ; quod angulus RQS , rectus sit, ^b quippe cum eius partes RQK, SQK , partibus ILK, HLK , recti anguli HLI , æquales sint: (Nam ^c angulus HLI , rectus est, cum sit in semicirculo, ut patet ex praxi antecedentis propof. quæ KL , media proportionalis inter HK, KI , reperitur.) ^d erit quadratum ex KQ , æquale rectangulo sub SK, KR , hoc est, circulo, cuius semidiameter KR : hoc est, circulus semidiameteri KR , æqualis est quadrato lateris KQ , vel P . Quod est propositum.

b 19. primi.
c 31. tertij.
d 17. sexti.

COROLLARIUM.

Ex his, quæ demonstrata sunt, construemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem, & contra, cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem constituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque similis sit. Nam si datæ figuræ rectilineæ ^e describamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem constituamus, ex propof. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

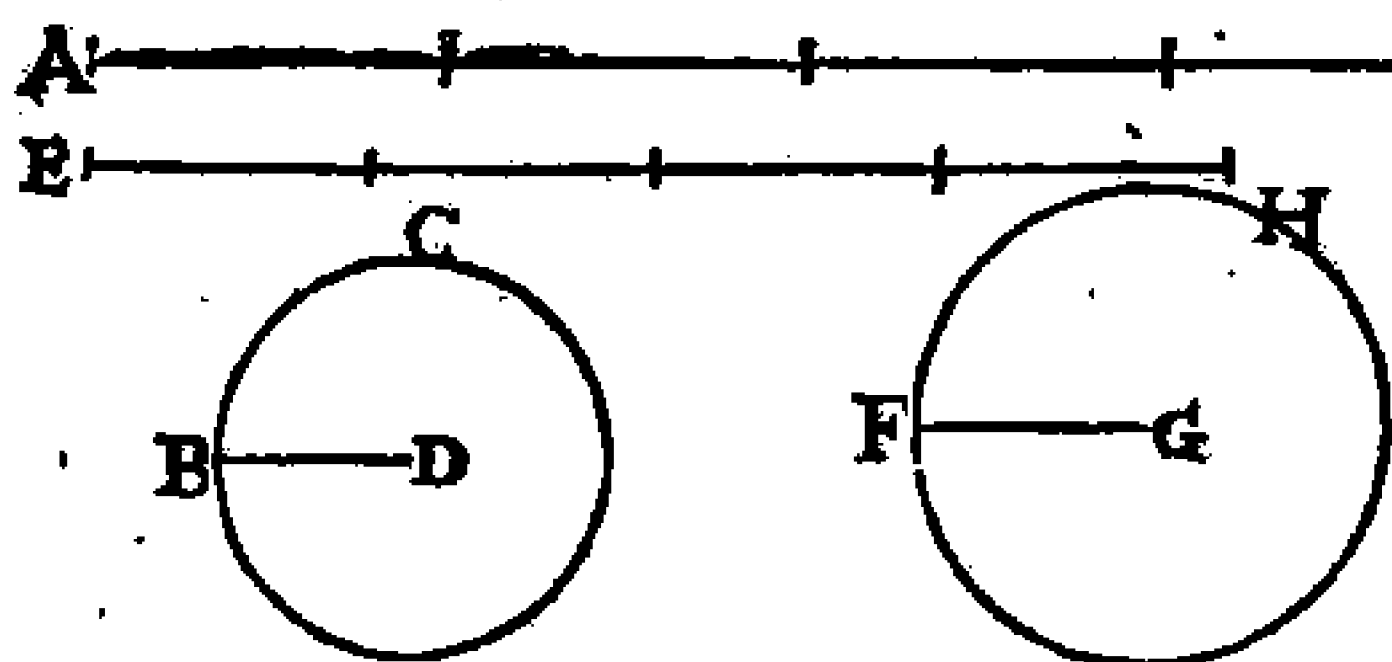
RURSUS si, per propof. 5. dato circulo quadratum æquale construamus, huic autem quadrato ^f constituamus figuram rectilineam æqualem, & similem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hac figuræ rectilineæ constituta, dato circulo æqualis. Quod est propositum.

e 14. secundæ.
f 15. sexti.

V I I.

DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

Quo pacto recta linea reperiat circuli circumferentia æqualis, docuimus propositione 5. nunc autem, ut vicissim recta data lineæ circumferentia circuli æqualis inveniatur, ita agendum erit. Sit datæ recta A , cui circumferentia æqualis invenianda est. Descripto quovis circulo BC , ex centro D , inveniatur ei recta æqualis E , quod facile ita fiet: In priori instrumento propof. 5. sumatur AH , æqualis semidiametro BD , descripti circuli, & per H , agatur ipsi DE , parallela HI . Nam AI , quadruplicata dabit rectam E , circumferentia



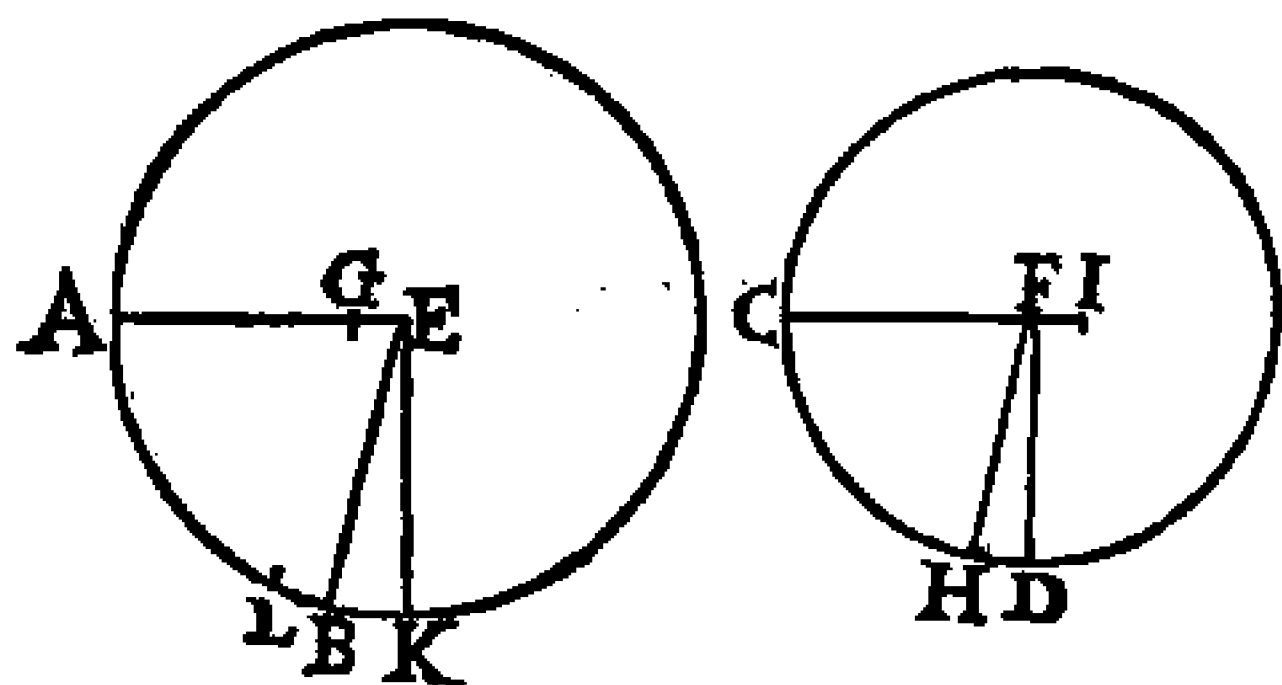
rentia circuli B C, aequalis, ut propo-
sitione 5. diximus. Deinde tribus rectis
E, A, B D, inueniatur quarta propor-
tionalis F G, atque ex G, ad interval-
lum G F, circulus describatur F H. Di-
co eius circumferentiam data recta A,
aequalem esse. Cum enim sit, ut E, ad
A, ita B D, ad F G; hoc est, ^a ita tota
diameter circuli B C, ad totam dia-
metrum circuli F H: Sit autem ut dia-

meter ad diametrum, ita circumferentia B C, ad circumferentiam F H, ut Pappus demonstrauit; ^b erit quoque
ut E, ad A, ita circumferentia B C, ad circumferentiam F H. Cum ergo E, facta sit aequalis circumferentia B C,
^c erit & recta A, circumferentia F H, aequalis: hoc est, circumferentia circuli F H, inuenta est data recta A, a-
qualis. Quod est propositum. a 15. quinti.
b 11. quinti.
c 14. quin-
ti.

ALITER, & facilius. Quarta parti rectae datae A, accipiaturs aequalis A K, in priori instrumento propo-
s. & per K, agatur K L, ipsi D E, parallela. Nam circumferentia circuli, cuius semidiameter A L, aequalis erit da-
tae rectae A; propterea quod eius circumferentia quadrans aequalis est rectae A K, quarta parti datae rectae A, ut
propositione 5. declarauimus.

VIII.

DATI: duobus circulis inaequalibus, datoque arcu in vno eorum, ex altero arcum ae-
qualem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem cir-
cumferentia minoris circuli.



SINT duo circuli inaequales A B, C D, quo-
rum centra E, F, & semidiametri A E, C F; sitque
A B, maior, & C D, minor. Datus autem pri-
mum sit in minori circulo arcus C D, cui aequalis
abscindendus sit ex maiore. Quoniam circulus
A B, circulo C D, maior est, erit & semidiameter
A E, semidiametro C F, maior. Abscindatur ergo
A G, ipsi C F, aequalis, seceturque arcus C D, ita in
H, ex propo-2. ut eadem sit proportio arcus C H,
ad arcum H D, quae recta A G, ad rectam G E: ar-

cuique C H, similis auferatur arcus A B. quod facile fiet, si ducta recta F H, angulo C F H, aequalis fiat angu-
lus A E B. Dico arcum A B, dato arcui C D, aequalem esse. Quoniam enim est, ut A G, ad G E, ita arcus C H,
ad arcum H D. Et conuertendo, ut E G, ad A G, ita arcus D H, ad arcum C H; erit componendo quoque A E,
ad A G, hoc est, ad C F, ipsi A G, aequalis, ut arcus C D, ad arcum C H: Est autem, ut A E, semidiameter ad
semidiametrum C F, ^d hoc est, ut tota diameter ad totam diametrum, ita circumferentia circuli A B, ad cir-
cumferentiam circuli C D, ut Pappus demonstrauit, hoc est, ita arcus A B, ad similem arcum C H. ^e Igitur e-
rit quoque, ut arcus C D, ad arcum C H, ita arcus A B, ad eundem arcum C H; ac proinde arcus C D, A B, ^f ae-
quales inter se erunt. Quod est propositum. d 15. quinti.
e 11. quinti.
f 9. quinti.

DATI: s deinde sit in maiore circulo arcus A B, non maior, quam circumferentia circuli C D, mi-
noris, ex quo arcui A B, aequalis arcus abscindendus est. Quoniam circulus A B, maior est circulo C D, erit &
semidiameter A E, semidiametro C F, maior. Producta ergo C F, ad I, ut C I, ipsi A E, sit aequalis; secetur
per propositionem 2. arcus A B, in L, ut eadem sit proportio A B, ad B L, quae C F, ad F I; arcuique B L, suma-
tur aequalis arcus B K, ac toti arcui A K, similis auferatur C D. quod facile fiet, si ducta recta E K, angulo
A E K, angulus C F D, aequalis fiat. Dico arcum C D, arcui dato A B, aequalem esse. Quoniam enim est, ut
C F, ad F I, ita arcus A B, ad arcum B L, id est, ad arcum B K, ipsi B L, aequalis; erit componendo quo-
que ut C I, ad F I, ita arcus A K, ad arcum B K: Et per conuersionem rationis, ut C I, ad C F, hoc est, ut
A E, ad C F, ita arcus A K, ad arcum A B: Est autem, ut semidiameter A E, ad semidiametrum C F, ^g hoc
est, ut tota diameter ad totam diametrum, ita, ex demonstratis à Pappo, circumferentia circuli A B, ad
circumferentiam circuli C D, id est, ita arcus A K, ad arcum similem C D. ^h Igitur erit etiam, ut arcus
A K, ad arcum A B, ita idem arcus A K, ad arcum C D, propterea quod arcus A B, C D, ⁱ aequales erunt inter
se. Quod est propositum. g 15. quinti.
h 11. quin-
ti.
i 9. quin-
ti.

COROLLARIUM I.

Ex his, quae demonstrata sunt, manifestum est, cuius data recta abscindi posse ex circulo
quouis, cuius circumferentia minor non sit, quam recta data, circumferentiam aequalem,
ex modo supra ostensum est in coroll. 1. propo-4 data cuiuslibet circumferentia inueniri posse

reclā aequalem, hoc modo: Inveniat per ea, quæ paulo antè in coroll. 1. propos. 4. ostendimus, reclā lineæ quadrantis dati circuli equalis; & si quidem hac lineā inuenta equalis fuerit reclā lineā datā, erit circumferentia quadrantis datæ reclā lineæ equalis.

Si verò illa reclā quadrantis circuli inuenta equalis, fuerit maior, quàm data reclā lineā; secetur quadrantis circumferentia in duas partes, ex propos. 2. ita ut quadrās ad unam partem habeat eandem proportionem, quam inuenta reclā lineā ad lineam reclā datā. Pars enim illa quadrantis datæ reclā lineæ erit equalis. Nam cum sit, ut inuenta reclā ad datā reclā, ita quadrās ad illum arcum abscissum; sit autem reclā inuenta quadrantis equalis, ^a erit quoque data lineā reclā arcui abscisso equalis.

^a 14. quinti.

Si denique reclā illa inuenta equalis quadrantis fuerit minor, quàm data lineā, sumatur illius dupla, quæ nimirum circumferentia semicirculi sit equalis. Nam si hac equalis fuerit data reclā lineā, erit circumferentia semicirculi eidem data reclā equalis.

Si autem dupla illa reclā lineā fuerit maior, quàm data lineā reclā, secetur semicirculi circumferentia in duos arcus, ita ut semicircumferentia ad unum eorū eandem habeat proportionem, quam dupla illa reclā lineā ad datā reclā. quod quidem facile fiet, si data reclā ex dupla illa lineā reclā abscindatur equalis, & semicircumferentia secetur per propos. 2. ut secta est reclā illa dupla. Erit enim componendo, ut tota illa reclā dupla ad partem abscissam, hoc est, ad datā reclā, ita tota semicircumferentia ad arcum abscissum. Arcus enim ille data reclā equalis erit. Cum enim sit, dupla illa reclā ad reclā datā, ita semicircumferentia ad eum arcum; sit autem reclā illa dupla equalis semicircumferentia; ^b erit quoque data reclā illi arcui equalis.

^b 14. quinti.

Si denique dupla illa reclā lineā fuerit minor, quàm data lineā reclā, addatur ei prior lineā inuenta, quæ nimirum quadrantis circuli est equalis, ut tota reclā composita equalis sit circumferentia trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuenta. Nam si hac lineā tripla fuerit data reclā equalis; erit arcus trium quadrantum eidem data reclā equalis.

Si verò tripla illa lineā reclā fuerit maior, quàm data lineā, secetur circumferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propos. 2. ita ut ad unum eorū eandem habeat proportionem, quam tripla illa reclā ad reclā datā. quod facile etiam fiet, si data reclā ex tripla illa lineā reclā abscindatur reclā equalis, & circumferentia trium quadrantum secetur, per propos. 2. ut reclā illa tripla secta est. Nam componendo erit, ut tota illa reclā tripla ad partem abscissam, id est, ad datā reclā, ita tota circumferentia trium quadrantum ad arcum abscissum. Arcus enim ille data reclā lineæ erit equalis. Quoniam enim est, ut tripla illa reclā ad reclā datā, ita circumferentia trium quadrantum ad arcum abscissum; est ^c tripla illa reclā circumferentia trium quadrantum equalis; ^c erit quoque data lineā reclā equalis illi arcui abscisso.

^c 14. quinti.

DENIQUE si tripla illa lineā reclā fuerit minor, quàm data reclā lineā, addatur ei rursum prior lineā inuenta quadrantis equalis, ut tota reclā composita fiat equalis toti circumferentia circuli, & prioris lineæ inuenta quadrupla. Si namque lineā hac quadrupla fuerit equalis data reclā lineæ, erit tota circumferentia dati circuli datæ lineæ reclā equalis.

AT verò si illa lineā quadrupla maior fuerit, quàm data reclā lineā, (minor esse non potest: alioquin data reclā esset maior, quàm circumferentia dati circuli. quod est contra hypothesein) secetur tota circumferentia in duos arcus, ex propos. 2. ut ad unum eorū eandem proportionem habeat, quam quadrupla illa lineā ad datā reclā. quod facile etiam fiet, si ex quadrupla illa reclā auferatur reclā equalis data reclā, & tota circumferentia circuli secetur, ut quadrupla illa reclā est secta. Erit namque componendo, ut tota illa quadrupla reclā ad partem abscissam, id est, ad datā reclā, ita tota circumferentia circuli ad arcum abscissum. Arcus enim ille data reclā erit equalis. Cum enim sit, ut quadrupla illa lineā ad reclā datā, ita tota circumferentia ad arcum abscissum; sit autem illa lineā quadrupla toti circumferentia equalis; ^d erit quoque data reclā lineæ arcui abscisso equalis.

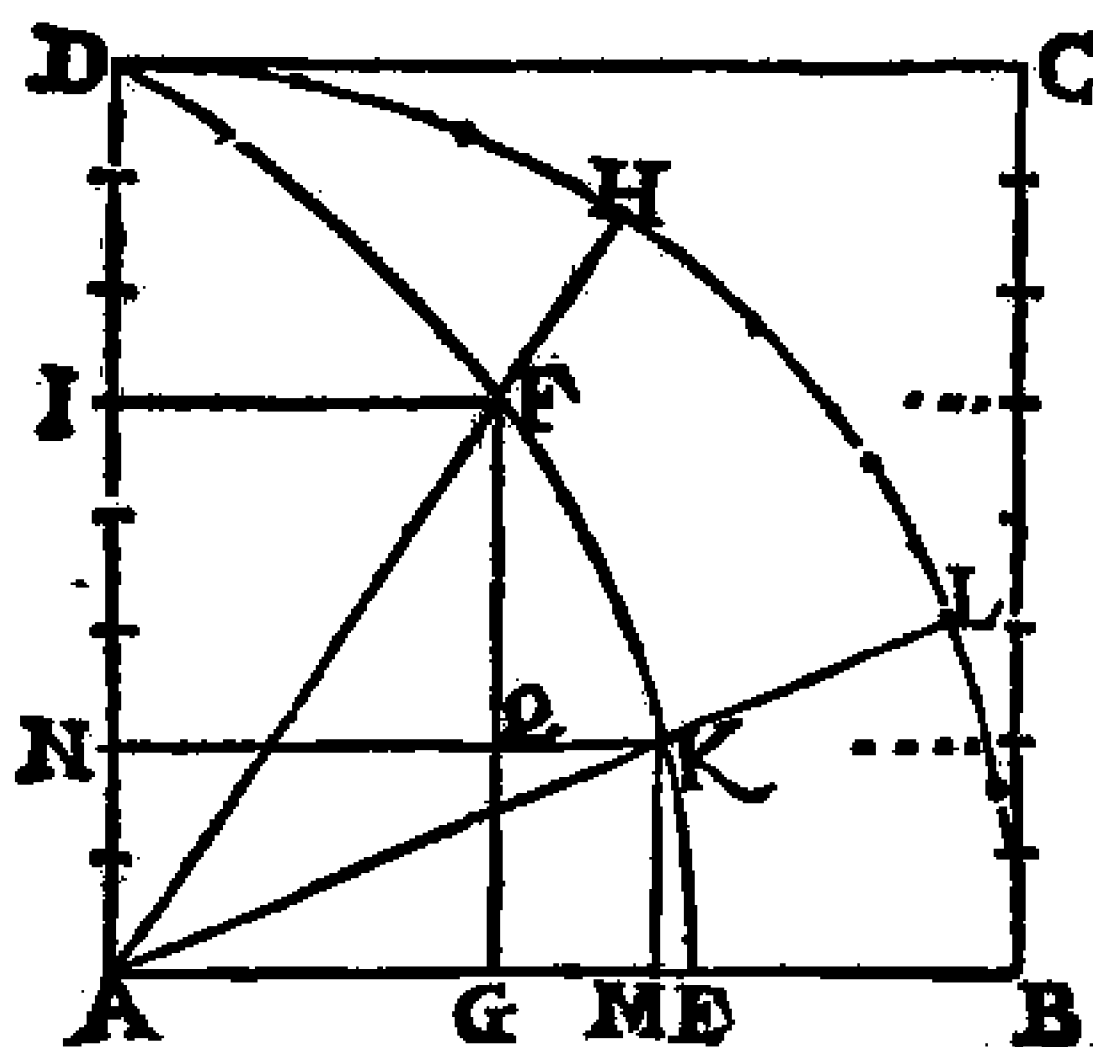
^d 14. quinti.

ALITER, & brevius: Inuenta ex coroll. 1. propos. 4. vel ex propos. 5. reclā equali circumferentia dati circuli, abscindatur ex ea data reclā lineæ equalis, & tota circumferentia per propos. 2. secetur, ut secta est inuenta illa reclā, in duas partes. Nam componendo erit, ut tota illa reclā ad eius partem ablatam, hoc est, ad datā reclā, ita tota circumferentia ad arcum

cum

cum abscissum. Cum ergo tota illa recta sit equalis toti circumferentia, ^a erit quoque data 214. quinti. recta arcui abscisso equalis. Quod est propositum.

COROLLARIUM II.



Ex his quoque, qua dicta sunt, inferri potest, tam arcus, quam angulos rectilineos reperiri incommensurabiles inter se. Sit enim arcus HB, & angulus rectilineus HAB. Dico tam arcum HB, secari posse in duos arcus inter se incommensurabiles, quam angulum HAB, in duos angulos incommensurabiles inter se. Descripta enim Quadratrice DE, qua rectam HA, secet in F, ducatur per F, basi AE, parallela FI. Deinde inuentis duabus rectis inter se incommensurabilibus, ut libro 10. docetur, diuidatur recta IA, in N, ex scholio propof. 10. huius lib. ita ut IN, ad NA, eandem proportionem habeat, quam dua recta inuenta; atque adeo & IN, NA, incommensurabiles quoque sint. Du-

cta autem recta NK, ipsi AE, parallela, qua Quadratricem secet in K, ducatur ex centro A, per K, recta secans arcum HB, in L. Dico tam arcus HL, LB, quam angulos HAL, LAB, inter se esse incommensurabiles. Quoniam enim per propof. 1. est, ut IN, ad NA, ita arcus HL, ad arcum LB: sunt autem IN, NA, incommensurabiles, erunt & arcus HL, LB, incommensurabiles. Cum ergo sit quoq, ^b ut arcus HL, ad arcum LB, ita angulus HAL,

b 33. sexti.

ad angulum LAB; erunt etiam anguli HAL, LAB, incommensurabiles inter se. Quod est propositum.

FINIS ELEMENTI SEXTI.



