Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV

Cæsari Collegij Lectis Jesv Fung

Accessit XVI. de SOLIDORVM REGVLARIVM cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

16 Lit. C. nº. 7

Omnes perspicuis DEMONSTRATIONIBVS, accuratisque SCHOLIIS illustrati, ac multarum rerum accessione locupletati:

Inscripto suo Cubiculo P. Professoris Mathes.

Nunc tertiò editi, summâq; diligentia recogniti, atque emendati.

Auctore

CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI, è Societate IESV.

D. Paulus Pistorius à Lucka olim Inscripsit hunc suum Cubiculum Matheseos suæ Professor. Romæ anno 1581.

COLONIAE,
Expensis IOH. BAPTISTAE CIOTTI
clo Io xci.

Lectori.

VOLVMINE hoc, Candide Lector, more recepto, lib. vj. priores Elementorum, commoditatis ergò diuisim damus: reliquos, volumine altero.

SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO,

D. CAROLO EMMANVELI

SABAVDIAE DVCI

CHRISTOPHORVS CLAVIVS è Societate IESV S. P. D.

SCRIPSERAM superioribus annis in elementa Geometrica Euclidis, id est, in initia disciplinarum Mathematicarum, Commentarios: quorũ omnibus iam distractis exemplaribus, cùm alia essent recudenda, volui etiam dare operam, vt locupletiores multò, atq; vberiores ederentur. quod Dei beneficio successit. Sic enim se res habet, quod te non fugit, Dux Sereniss. quemadmodum nihil est simul inuentum, & perfectum: sic nemo est, qui à principio in qualibet re scribenda, aut exponenda possit omnia peruidere: multa apparent iterũ ac sapius cogitanti, quæ aciem quamlibet acutam antè fugiebant. Rectè hoc quoq; Euripides, vt pleraque omnia, sapientiores solent esse posteriores cogitationes. cum quo congruit, & cohæret vulgatum illud prouerbium, quod Publio tribuitur, Discipulus est prioris posterior dies. Itaq; cùm priorẽ editionem sumerem postea in manus, multa esse animaduerti, quæ si adderẽtur, non pauca ex Archimedis, Apollonij, Ptolemæi, aliorumq; inuentis videbantur melius explicari posse: si videlicet è pronunciatis, ac theorematis Euclideis alia quoq; necterentur. Quod ipsum etsi tunc etiã præstiti, multò tamen nunc feci copiosius: interijciens ea scilicet, quæ vel vtilia, vel necessaria fore censui ad aliorũ, vt dixi, auctorũ cognitionem. Addidi inter cætera, vt specimẽ dem aliquod rerũ, quæ hoc volumine accesserũt, demonstrationem Geometricam, eamq; apertissimam axiomatis vndecimi, quod proponitur ab Euclide: cùm ea, quã allatam scimus à Proclo, mutila esse atq; imperfecta videatur. Descriptionem item omnium figurarum, quæ rectilineæ æqua-

lium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem praterea & breuem, nec obscuram circuli quadrandi: rem, vt scis, tum à veteribus, tum à recentioribus sic expetitam, vt multorum in ea conatus magis apparuerit, quàm effectus. Effeci autem hoc (nisi fallor) ita accuratè, ac subtiliter, vt tam perfectè approbetur quadratum æquale circulo, quàm exquisitè rectilinea figura aqualibet ad quadratum æquale ab Euclide dirigitur: immò (vt loquar aliquid audacius) aliquantò perfectius: cùm ad quadrandum circulum paucioribus linearum ductibus sit opus, quàm ad figuram rectilineam plurimorum angulorum, via, & ratione quadrandam, vt apertè docebitur lib. 6. Ad 9. deniq; lib. adieci numerorum fractorum demonstrationes clarissimas, aliaq; nonnulla, quæ nunc quidē non numero, q; ea mihi volo ad ipsamet loca, quibus explicabūtur, plena atq; integra reseruari. Laborem igitur hunc meū, qualiscunq; est, cū iterum essem daturus in vulgus, nemini arbitratus sum rectius, q̄ tibi, Dux Seren. dedicari posse. Primùm quidem, q; cùm superiorē illam editionem sub EMMANVELIS PHILIBERTI, clariss. Ducis patris tui nomine apparere voluerim: stultè fecissem, si posteriorē hanc alij, q̄ tibi, qui eius es & ditionis & humanitatis & pietatis hæres, eius q; imago corporis, atq; animi cōsecrassem. Deinde verò, q; in hoc sequebar Archimedis exemplum: qui nemini opera sua iudicabat inscribenda, nisi ei, qui intelligens talium rerum, ac peritus fuisset. Quod cùm ita sit, quid ni hoc tibi potissimùm deberetur donū, (si tamen donum dicendū est id, quod qui dat, videtur accepisse) quē Ioan. Baptista Benedictus scientiss. rerū Mathematicarum, ita testatur excellere in his artibus, illa præcipuè in parte, quæ principes viros, atq; excellentes Imperatores decet, vt ea, quæ pertinēt ad instruendos exercitus, oppida q; muniēda, per te ipse implere possis. Neque verò hæc postrema fuit causa, etsi postremo in loco ponitur: vt tibi alijsq;, quorum in manus hæc scripta peruenerint, hac saltem ratione ostenderē ita tibi obligatam esse Societatem nostram vniuersam, vt iure tibi omnia mea opera, & labores vindicare possis. Accipe tu hoc, quod tibi offertur, Princeps inuictissime: quod etsi paruum alicui videatur, atque exile, non dubito tamen futurum, quin vbi tuam istam attigerit

dexteram

dexteram fortitudine fideq́, præſtantem, plurimum ſit accepturum, vel magnitudinis, vel gratiæ. Vale. Cal. Sept. M. D. LXXXIX.

QVAE PRAECIPVE PRIORIBVS COMMENTARIIS POSTERIORE HAC EDITIONE ADDITA SINT.

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis 11. Euclidis, [*Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemq́, partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.*] multò euidētior, quàm ea, quā Proclus affert. ad propoſ. 28. lib. 1.

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per ſolas priores 40. propoſ. lib. 1. abſque ope proportionum 6. lib. ad propoſ. 40. lib. 1.

III.

QVO pacto conſtruenda ſint triangula Amblygonia, & Oxygonia, vt in numeris apparere poſſint, quæ ab Euclide demōſtrata ſunt propoſ. 12. & 13. lib. 2. ad propoſ. 12. & 13. lib. 2.

IIII.

RESPONSIO ad Apologiam Iac. Peletarij, de angulo cōtactus. ad prop. 16. lib. 3.

V.

CONSIDERATIO pulcherrima de figuris æquilateris, atque æquiangulis intra circulum, & extra circulum deſcriptis: Num ſcilicet, omnis æquilatera ſit æquiangula etiam, & omnis æquiangula ſit quoque æquilatera. ad finem lib. 4.

VI.

TRACTATIO copioſiſſima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica. ad defin. 4. lib. 5.

VII.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquemultiplicia definierit. ad defin. 8. lib. 5.

VIII.

DESCRIPTIO inflexæ cuiuſdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterū æqualium deſcribitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes æquales diſtribuitur: Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contrà: Et denique alia ſcitu iucundiſſima perficiuntur. ad finem lib. 6.

IX.

QVO pacto pleraque theoremata libri 7. demonſtrentur quoque de numeris fractis, ſiue ipſis adhæreant numeri integri, ſiue non. ad propoſitiones lib. 7.

X.

MINVTIARVM ſiue numerorum fractorum demonſtrationes clariſſimæ. ad finem lib. 9.

XI.

DE proportionū compoſitione; quo videlicet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio, ac Diuiſio fieri debeat: aduerſus quoſdam Recentiores. ad finem lib. 9.

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regularium in data ſphæra ex Pappo Alexandrino, & quidem facilior, quàm ea, quā nobis tradidit Euclides. ad finem lib. 16.

XIII.

COMPARATIO Soliditatum & ſuperficierum conuexarum, eorundem quinque corporum Regularium inter ſe. ad finem lib. 16.

Cætera quæ paſſim hiſce Commentarijs adiecta ſunt nō pauca, diligens Lector nullo negotio notabit.

IN EVCLIDIS ELEMENTA PROLEGOMENA.

PRAEFATIO.

SI QVIS fortè miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis Elementa Geometrica Commentarios ab egregiis, & in primis Mathematicarum rerum peritis Scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi commentationes conscripserimus; is facilè sibi persuadebit, non temerè id à nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cùm enim longa diuturnaque experientia nobis esset perspectum, atq; exploratum, eam esse vtilitatem, atque adeò necessitatem horũ elementorum, vt frustra quisquam se speret sine ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasque Archimedis, Apollonij, Theodosij, Menelai, Ptolemæi, cæterorumque illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; vehementer dolebamus, tam insignem & illustrem auctorem à plerisque omnino negligi, à perpaucis verò pro dignitate tractari, ita vt vix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulam operam, ac studium in pernecessariis his elemẽtis ponant; ob eam potissimum, vt arbitror, causam, quòd difficultate rerum, quas tractant, atq; obscuritate deterreantur, nullumq; habeant hac in re ducem, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem Commentarij Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros satè eruditi, qui satis esse possint cuiuis ad facilè consequendam horũ elementorum doctrinam: Sed alter secutus in omnibus est traditionẽ Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinẽ, ac methodum peruerterunt, verbaq; propositionum eiusdem locis non paucis immutarunt, vt verus germanusq; auctoris sensus perdifficile possit intelligi; id quod maximè in 10. lib. perspicitur: Alter (Theonẽ intelligo) penè innumeris mendis, vitiisq; incuria librariorũ ita est deprauatus, & propter notas Græcas, quæ in eius demonstrationibus adhibentur, obscuras illas ac malè expressas adeò impeditus, vt magnam difficultatẽ inexercitatis ingeniis, perplexitatemq; gignat. Quò fit, vt Euclidẽ sine maximo labore ac studio nemo percipiat. Iam si alij ad nostrã vsque memoriam maius aliquod studium operamq; in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerũt, hi vel sex priores tantùm libros exposuerunt: vel si qui in vniuersum Euclidem Commentarios ediderunt, hi persæpe, relictis antiquorum demonstrationibus certissimis, proprias alias, ac nouas confinxerunt, quæ plerunq; nõ tam firmæ sunt, neq; rem ipsam simpliciter & absolutè conficiunt; præsertim quòd modò è propositionibus voces quasdam perperã detrahunt, modò alias ineptè apponunt, modò denique, nonnullas temerè immutãt, vt meritò de vero proprioq; Euclidis sensu dubitare quis possit. Qua tamẽ in re Federicum Commandinum Vrbinatem, Geometrem non vulgarẽ excipio, qui nuper Euclidem Latinè redditũ in pristinum nitorẽ restituit, paucis locis exceptis, in quibus nõ parũ à vero aberrauit, vt suo loco monebimus. Quæ cùm ita sint, resq; ac scientia tam præclara digna sit, quæ opẽ, studio, industria ab iis adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt, post diuturni temporis in rebus mathematicis operã collocatã, faciendum putauimus, vt lucubrationes nostras ac vigilias studiosis harum rerũ nonnihil (nisi fallimur) subsidij allaturas in publicum ederemus. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota à nobis pertractetur, quidq; in hac interpretatione præstitũ sit, paucis accipe. Demonstrationes aliorũ maximè Theonis, quas quidem ipsius esse Euclidis, non leuibus argumentis adducti cum pleriq; assueramus, & Proclus etiam testatur, breuiores, quantum per rei difficultatẽ licuit, vel certè planiores, quando illud nõ potuimus, dilucidiores q; reddere conati sumus. Non enim illas nudè, ac totidem verbis, quot erant scriptæ, proposuimus. Et enim ea est interdum illarum breuitas, vt illud accidat, quod ab elegantissimo Poeta dictum est: *Breuis esse laboro, obscurus fio.* Interdum etiam cùm breuius, atque succinctiùs efferri possint, magna, ob longiorem, quàm satis est, sermonem, affertur molestia legenti. Quare vtrumque vitantes, eas, velut παραφράσεις, atque ad eum ferè modum tradidimus, quem, cùm publicè Euclidem interpretaremur, obseruauimus; hac etiam re auditorum desiderio, & voluntati, quan-

cum

tum est in nobis, satisfacere cupientes. Ita enim, nostra sententia, Euclides facilius à studiosis, iis præsertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica studia nunc primùm auspicantur, ac maiore voluptate, vtilitateque cognoscetur. Præter hæc adiunximus multis in locis varia problemata, ac theoremata scitu non iniucunda, neque à scopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, aliisque auctoribus decerpsimus, partim proprio (vt aiunt) Marte, assiduisque meditationibus ipsi confecimus. Data insuper in hoc diligens opera, vt definitiones Euclidis, præsertim obscuriores, & quæ aliquid visæ sunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in scopulos quosdam incidentes, à recto cursu deflexerunt, & in errores varios atque absurdos, prorsusque ab instituto disciplinæ abhorrentes dilapsi sunt.) dilucidè atque perspicuè, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium studiosi facilè iudicabunt. Postremò quindecim libris Euclidis sextumdecimum ad comparationes quinque corporum regularium pertinentē, quem à Francisco Flussate Candalla accepimus, vt Elementa hæc Geometrica euaderent perfectiora, adiecimus.

BENIGNO LECTORI.

QVONIAM superiorem editionem Elementorum Euclidis non ingratam fuisse Mathematicarum disciplinarum studiosis intelleximus, exhibemus tibi benigne Lector, alteram editionem priore illa multò locupletiorem: in qua scilicet varia tum problemata, tum theoremata, quæ rebus Mathematicis magnum adiumentum allatura, longo vsu, atq; experientia comprobauimus, & quæ in priore editione desunt, adiecimus, plurimaq; loca subobscura clarioribus notis illustrauimus. Addidimus præterea nouam demonstrationē vndecimi axiomatis Euclidis, (quod in hisce Commentarijs 13. tertium decimum) quo vult, Si in duas rectas lineas altera recta incidēs, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duas illas rectas lineas in infinitū pductas, coituras tandem ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores: addimus, inquam, nouam demonstrationem à nobis nuper inuentam, quam non iniucundam studioso Lectori futuram speramus, quòd eo principio tota doctrina de lineis parallelis, quæ immensa propemodum est, atque infinita, nitatur. Quanquā enim idem illud principium Arabes quoq; olim demonstrasse iam pridem acceperam: quia tamen eorum demonstrationem diu ac diligenter quæsitam videre mihi non licuit, (nondum enim ex Arabica in Latinam linguam conuersa est) coactus sum hanc meo, vt aiunt, Marte excogitare, vt nullus in eo principio tam necessariò iam dubitationi locus esset. Neq; enim Procli demonstratio, quam ad propos. 28. lib. 1. Euclides de re eadem affert, omni ex parte absoluta, ac Geometrica censeri potest; cuius rei causa eodem loco à nobis explicata est. Deinde ex Pappo Alexandrino inscriptiones omnium figurarū regularium in circulo, beneficio lineæ certa quadam ratione inflexæ, perfecimus: quod antè à Mathematicis desiderabatur. Ex qua eadē linea via quædam & ratio ad circulum quadrandum (res tot seculis à doctissimis viris exagitata) conficitur: quod suo loco docebitur. In definitionibus porrò quinti libri apertè ostendimus, cur Euclides magnitudines proportionales & improportionales per æquemultiplicium habitudinem describere coactus sit. Postremò (vt alia omittam) omnes operationes fractionum vulgarium, quæ in Arithmetica practica declarari solent, Geometricè demonstrauimus. Hæc ferè præcipua sunt, quæ hac posteriore editione ad Commentarios nostros in Euclidem accesserunt. Cætera vel theoremata, vel problemata, quibus editio hæc posterior priorem superat, quæ sanè plurima sunt, & Euclidis propositionibus sparsim inserta, inter legendum facilè comperies, si vtramque editionem cum altera conferens attentius paulò considerabis. Nunc quia hæc Euclidis elementa ostium atque aditum ad omnes alias disciplinas Mathematicas reserant, ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, vndenam Mathematica disciplina hoc nomen acceperint: quæ sit earum diuisio: à quibus primùm orta, & per quos deinde singulæ fuerint excultæ: quanta sit illarum præstantia atq; vtilitas; & si qua sunt alia rei nostræ opportuna.

PROLEGOMENA MATHEMATICAE DISCIPLINAE

CVR SIC DICTAE SINT.

DISCIPLINAE Mathematicæ, quæ quidem circa quantitatem versantur omnes, nomen acceperunt à dictione Græca μάθημα, siue μάθησις, quæ significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, vel doctrinæ inter reliquas omnes solæ sint adeptæ, duas potissimùm causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen Christiana fides falsum esse perspicuè docet) testantur, eas nomen doctrinæ, siue disciplinæ obtinere, quòd maximè ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamque illius scientiæ, quæ anima nostra, (vt eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in Dialogo, qui Menon inscribitur, vbi Socratem introducit puſionem quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio respõderit, vt puer, gradatim tamen ascendens, eò deductus est, vt responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diutissimè perdidicisset Geometriam. Alijs autem placet, ideò has artes præ cæteris nomen scientiæ, & doctrinæ sibi vendicare, quòd solæ modum rationemque scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdam principijs ad conclusiones demonstrandas, quod proprium est munus, atque officium doctrinæ, siue disciplinæ, vt & Aristoteles 1. Posteriorum testatur: neque vnquam aliquid non probatum assumunt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere volunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quæ antè docuerunt, id sumunt pro concesso, & probato: illud verò modo explicant, de quo antè nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinásve non semper obseruare videmus, cùm plerunque in confirmationem eorum, quæ ostendere volunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstráve adducant.

DISCIPLINARVM MATHEMATICARVM DIVISIO.

PYTHAGOREI, quos deinde secuti sunt omnes propemodum Mathematici, atque Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas vniuersas in quatuor partes distribuerunt, Arithmeticam, Musicam, Geometriam, atq; Astronomiam. Cùm enim omnis quantitas, circa quam versantur, sit vel discreta, sub qua omnes numeri, vel continua, sub qua omnes magnitudines comprehenduntur, & vtraque tam secundùm se, quàm comparatione alterius possit considerari; Visum fuit illis consentaneum quatuor prædictas facultates instituere, quæ vtramque quantitatem, pro duplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundùm se, inquirendo & accuratè explicando omnes numerorum proprietates, ac passiones. Musica tractat eandem quantitatem discretam, siue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniam. Geometria de magnitudine, siue quantitate continua, secundùm se quoq;, vt immobilis existit, disputat. Astronomia denique tandem magnitudinem, vt est mobilis, considerat; qualia sunt cœlestia corpora, pronti continuo motu cientur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarum Arithmetica, & Geometria puræ, Musica verò atque Astronomia mixtæ dicuntur, omnes aliæ quouis modo de quantitate agentes, qualis est perspectiua, Geographia, & cæteræ huiusmodi, vel facilè, vt ad capita, à quibus dependent, reduci possunt.

ALIA ratione à Gemino antiquo Geometra, & ab alijs, vt auctor est Proclus in Commentarijs, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematicæ disciplinæ diuiduntur. Quam quidem diuisionem, quoniam eleganter, copioseque docet, ad quænam se extendant Mathematicæ disciplinæ, fermè ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Francisci Barocij Patricij Veneti excerptam hîc subijcere statui. Volunt itaque prædicti auctores, scientiarum Mathematicarum quasdam in intellectibilibus duntaxat ab omni materia separatis, quasdam verò in sensilibus, ita vt attingant materiam sensibus obnoxiam, versari. Prioris generis statuunt duas longè primas, præcipuásque scientias, Arithmeticam & Geometriam: In posteriori verò genere constituunt sex, Astrologiam, Perspectiuam, Geodæsiam, Canonicam, siue Musicam, Supputatricem, atque Mechanicam. Astrologiam dicunt esse eam facultatem, quæ de mundanis edisserit motibus, de corporum cœlestium magnitudinibus, figuris & illuminationibus, à terraque distantijs, ac de alijs huiusmodi rebus. Huius rursum tres constituuntur partes; Gnomonica, quæ in horarum dimensione, positu gnomonum exercetur: Meteoroscopica, quæ eleuationum differentias, siderumque reperit distantias, nec non multa alia & varia Astrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, quæ planetarum, cæterarumque stellarum distantias huiusmodi Dioptricis dignoscit instrumentis. Perspectiuam aiunt à Geometria gigni, atque vti radijs visorijs, tanquam lineis, & angulis, qui ex hisce constituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, quæ proprio nomine dicitur Perspectiua, quæ quidem reddit causam earum apparentiarum, quæ aliter, quàm sint, sese nobis offerre solent, ob eorum, quæ sub visum cadunt, alios situs & distantias, vt parallelarum coincidentiæ, vel quadratorum, tanquam circulorum, aspectionis: Et in vniuersam specularem, quæ circa varias, multiplicesque versatur refractiones: Nec non in eam, quæ Sciographicè, hoc est, vmbrarum designatrix appellatur, quæ ostendit, qua ratione fieri possit, vt ea, quæ in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob designatorum distantias, altitudinesq; videantur. Geodæsiam appellant eam scientiam, quæ res quantas metitur, vt materialium rerum aceruos, tanquam conos & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non assequitur intellectilibus rectis lineis vt Geometriæ, sed sensilibus tantùm, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum verò crassioribus, vt spartis & perpendiculo. Diuiditur hæc, vt Geometria, in eam partẽ, quæ plana, & in eam, quæ solida dimetitur. Canonicam, siue Musicam, vocant eam scientiam, quæ apparentes concentuum considerat rationes, sensusque vbique vtitur adminiculo; & quæ (vt Plato inquit) talis existit, vt menti aures ipsas præposuisse videatur. Supputatrix eadem apud ipsos est, quæ apud nos Arithmetica practica. Hæc enim numeros considerat,

non vt intellectilibus, sed vt sunt in sensilibus ipsis. Mechanica denique, quæ in cognitione rerum sensilium, materiæque coniunctarum consistit, apud ipsos multiplex est. Quædam enim est instrumentorum effectrix, quæ ὀργανοποιικὴ vocatur, eorum, inquam, quæ gerendis sunt bellis idonea, qualia sanè Archimedes etiam fertur construxisse, Syracusas terra marique obsidentibus resistentia. Quædam mirabilium prorsus rerum effectrix, quæ θαυματοποιικὴ, dicitur: quippe quæ alia quidem spiritibus maximo cum artificio construit, quemadmodum etiam Ctesibius, at q; Heron operantur, alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, status verò æquilibrium esse causam censendum est, vt Timæus etiam determinauit: alia verò neruis, sparti sq; animatas conuolutiones, ac motus imitantibus: Quædam est æquilibrantium omnino, & eorum, quæ centroponderantia vocantur, cognitio: Quædam denique sphærarum effectrix, quæ σφαιροποιία appellatur, ad cœlestium circumuolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus est: Atq; vt vno verbo dicam, omnis, quæ materiam mouendi vim habet. Hæ igitur sunt disciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem autem artem, eam inquam, quæ ad instruendas, coordinandas q; pertinet acies, quam Græci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam esse non censent, vt quidam alij voluêre, sed vti eam volunt modo quidem arte supputandi, vt in enumerandis legionibus: modo verò Geodæsia, vt in diuidendis, dimetiendis q; castrametationi spatijs in campo. Quemadmodum neq; Historicam, neq; medendi artem Mathematices partem vllam esse dicunt, licet sæpenumerò tum Historici, tũ etiam Medici Mathematicis vtantur theorematibus: Rerum quidem gestarum scriptores, vel climatum situs referendo, vel vrbium magnitudines, & diametros, vel ambitus, circuitúsve colligendo: Medici verò quamplurimas res in arte sua huiusce modi vijs dilucidando. Nam vtilitatem, quæ in Medicinam ab Astrologia peruenit, ipse etiam Hippocrates ostendit, ac ferè omnes, quicunque aliquid de opportunis temporibus, locis q; dixêre. Eadem sanè ratione ille etiam, qui aciebus instruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, quæ numerosa est, pauciſsimam ostendere multitudinẽ, castra suos q; exercitus ad figurã circuli formet: interdum verò ad figuram quadranguli, vel quinquanguli, vel alterius cuiusdam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur ferè sunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum scientiarum partitione reliquerunt.

INVENTORES MATHEMATICARVM DISCIPLINARVM.

OMNES disciplinas Mathematicas à varijs & diuersis auctoribus ortum originem q; duxisse, perspicuè historiæ testantur: Immò verò singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memoriæ quoq; proditum est. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atq; commercia, vt auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eius q; successores, necnon Aegyptij, Græci denig; atq; Arabes amplificârunt, varijs q; problematis, atq; theorematis illustrârunt. Musicam deinde à Mercurio primũ esse inuentam, multi scriptores tradunt, quam ipse postea Orpheo insigni Musico commendauit, atq; concredidit: Hic autem Thamyri & Lino; Linus verò Herculi, & sic successiuis continuis per alios Musicos præclaros ad nostra vsque tempora manauit. Geometria verò, auctore Proclo, ab Aegyptijs reperta est, ortum q; habuit ab agrorum dimensione. Cum enim anniuersaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, vastaret q;, vt nemo agrum dignoscere posset suum, cœperunt Aegyptij animos ad rationem mensurandorum agrorum applicare, vt hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata. γεωμετρία enim, siue γεωμετρὶα idem significat, quod terram metior. Cæterùm paulatim deinde Geometria cœpta est expoliri, & non contenta suis finibus, sese ad corpora etiam cœlestia dimetienda conuertit, tradidit q; principia vniuersæ Astronomiæ, Perspectiuæ, Cosmographiæ, & alijs disciplinis quàm plurimis, quæ ex ipsa, veluti radices dependent. Hanc Thales Milesius ex Aegypto in Græciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi ac Mathematici plurimis acutiſsimis q; demonstrationibus locupletârunt, atq; exornârunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus; Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Serenus, Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij penè innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiam denique non pauci ab Atlante primùm inuentam esse autumant: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Astronomiæ cognitionem, exortam esse volunt fabulam, illum suis humeris cœlum sustinere; Alij putant, Chaldæos diuturna obseruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) siderum scientiam adinuenisse. Alij Aegyptios primos huius scientiæ faciunt inuentores: Alij Assyrios: Alij denique gloriam hanc & laudem Babylonijs esse deferendam, censent. Hac autem in scientia, vt est præstantiſsima, ita quoq; maximè illustres auctores claruerunt, quod non est huius loci declarare. Cæterùm præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis reliquæ omnes de quantitate quouis modo agentes, facilè ex ipsis, tanquam riuuli ex fonte, deriuatæ sunt, atque deductæ.

NOBILITAS ATQVE PRAESTANTIA SCIENTIARVM MATHEMATICARVM.

QVONIAM disciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ absque vlla materia sensibili considerantur, quamuis re ipsa materiæ sint immersæ; perspicuum est eas medium inter Metaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earum consideremus, vt rectè à Proclo probatur, Metaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum, & re, & ratione: Physices verò subiectum & re, & ratione materiæ sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur, liquidò constat, hoc medium esse inter alia duo,

Si verò nobilitas, atque præſtantia ſcientiæ ex certitudine demonſtrationum, quibus vtitur, ſit indicanda; haud dubiè Mathematicæ diſciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonſtrant enim omnia, de quibus ſuſcipiunt diſputationem, firmiſſimis rationibus, confirmantque, ita vt verè ſcientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorſus dubitationem tollant: Id quod alijs ſcientijs vix tribuere poſſumus, cùm in eu ſæpenumerò intellectus multitudine opinionum, ac ſententiarum varietate in veritate concluſionum indicanda ſuſpenſus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem apertè faciunt tot Peripateticorum ſectæ, (vt alios interim Philoſophos ſilentio inuoluam) quæ ab Ariſtotele, veluti rami è trunco aliquo exortæ, adeò & inter ſe, & nonnunquam à fonte ipſo Ariſtotele diſſident, vt prorſus ignores, quidnam ſibi velit Ariſtoteles, num de nominibus, an de rebus potius diſputationem inſtituat. Hinc fit, vt pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales, quos vocant, (qui omnes tamen Peripateticos ſe eſſe gloriantur) tanquam ductores ſequantur. Quod quàm longè à Mathematicis demonſtrationibus abſit, neminem latere exiſtimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in Scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonſtrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, ſeu Dialogo, qui de ſummo bono inſcribitur; Eam ſcientiam eſſe diuiniorem, præſtantioremque, quæ magis ſynceritatis, veritatiſque eſt amans. Cùm igitur diſciplinæ Mathematicæ veritatem adeò expetant, adament, excolantque, vt non ſolùm nihil, quod ſit falſum, verum etiam nihil, quod tantùm probabile exiſtat, nihil denique admittant, quod certiſſimis demonſtrationibus non confirment, corroborentque; dubium eſſe non poteſt, quin eis primus locus inter alias ſcientias omnes ſit concedendus.

VTILITATES VARIAE MATHEMATICARVM DISCIPLINARVM.

NON ſolùm vtiles, verùm etiam neceſſariæ admodum cenſeri debent diſciplinæ Mathematicæ, cùm ad alias artes perfectè perdiſcendas, tum ad rem etiam publicam rectè inſtituendam, & adminiſtrandam. Neque enim ad Metaphyſicam, vt eleganter oſtendit Proclus, vlli patet aditus, niſi per Mathematicas diſciplinas. Nam ſi à rebus ſenſibilibus, quas Phyſicus conſiderat, ad res ab omni materia ſenſibili ſecretas, ſeiunctasque, quas contemplatur Metaphyſicus, vires, acicmque noſtri intellectus attollere abſque vllo medio tentemus; noſmetipſos exacabimus, non ſecus, ac ei contingit, qui è carcere aliquo tenebricoſo, in quo diu latuit, in lucem Solis clariſſimam emittitur. Quam ob rem, antequam à rebus phyſicis, quæ materiæ ſenſibus obnoxiæ ſunt coniunctæ, ad res metaphyſicas, quæ ſunt ab eadem maximè auulſæ, intellectus aſcendat; neceſſe eſt, ne harum claritate offundatur, prius eum aſſuefieri rebus minùs abſtractis, quales à Mathematicis conſiderantur, vt facilius illas poſſit comprehendere. Quocirca rectè Diuinus Plato Mathematicas diſciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quantum verò emolumenti hæ diſciplinæ ad ſacras literas rectè percipiendas, interpretandasque conferant, multis pulcherrimè nobis exponit B. Auguſtinus lib. 2. cap. 16. de Doctrina Chriſtiana demonſtrans, numerorum inſcitia multa non intelligi à multis, quæ translatè, ac myſticè poſita ſunt in Scripturis. Cuius rei exempla non pauca in medium adducit, eandemque ſententiam longè pòſt pluribus verbis repetit eodem libro, capite 37. Hoc idem Diuus Hieronymus tomo 1. Epiſt. 5. aſſerens magnam ineſſe numeris vim, ad multa myſteria in Scripturis intelligenda: Quo item loco, Geometriam magnam afferre Theologis vtilitatem perhibet. Rurſum Beatus Auguſtinus loco iam citato, capite 16. quem paulò ante retuli, teſtatur, Muſicam perneceſſariam eſſe doctori Chriſtiano, ſubiungens paulò pòſt, cap. 19. Theologos debere etiam Geographia diligenter eſſe inſtructos. Quod non ignorans Diuus Gregorius Nazianzenus, ſummis laudibus Diuum Baſilium Præceptorem ſuum extollit, quòd in Aſtrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæteriſque ſcientijs Mathematicis, fuerit non mediocriter verſatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad Philoſophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesque perfectè acquirendas, vt perſpicuè docet Proclus. His adde, quòd omnia volumina antiquorum Philoſophorum, maximè Ariſtotelis, & Platonis, quos meritò ducces nobis ſequendos, ad bene rectèque philoſophandum proponimus, eorumque ferè omnium interpretum cùm Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis ſunt referta, ea potiſſimùm de cauſa, vt ea, quæ alioquin multis obſtructa difficultatibus videbantur eſſe, per exempla huiuſmodi clariora, magisque perſpicua fierent; quæ proculdubiò nulla ratione percipiet is, qui ſcientiarum Mathematicarum omnino eſt expers. Quid? quòd olim nemo auſus eſſet celeberrimum Diuini Platonis Gymnaſium frequentare, qui prius optimè Mathematicis diſciplinis non fuiſſet exornatus? Vnde pro foribus Academiæ hoc ſymbolum dicitur pinxiſſe: ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω. Immò verò idem Plato in Philebo, omnes diſciplinas ſine Mathematicis viles eſſe non dubitauit aſſerere. Qua de cauſa in 7. de Republ. præcipit: Mathematicas diſciplinas primò omnium eſſe addiſcendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (vt copioſè ſcribit) non ſolùm ad reliquas artes rectius percipiendas, verùm etiam ad Rempublicam bene adminiſtrandam. Cuius ego rei multa exempla cùm præteriti temporis, tum noſtræ ætatis, ſi id neceſſe foret, in medium poſſem adducere. Ibidem clariſſimis verbis affirmat, præcipuè Arithmeticos naturâ ad omnes doctrinas aptos eſſe, idoneoſque, adeò vt etiamſi nullam aliam nobis hæ ſcientiæ afferrent vtilitatem, (cùm tamen infinita propemodum alia commoda ex ipſis percipiamus) perdiſcendas tamen omni ſtudio eas eſſe ſtatuat, quod ingenium mentemque ad reliquas artes omnes capeſſendas aptiorem reddant, & acutiorem. Quod quidem experientia ipſa magiſtra facilè comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facilè, & nullo negotio hiſce diſciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex alijs ſcientijs percipere: Contrà verò, eos qui ad haſce facultates idonei minimè reperiuntur, prorſus ad cæteras eſſe ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in ſuis operibus iterum atque iterum harum diſciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atque commendat: præſertim in 7. de Republ. in Epinomide, ſeu Philoſopho, in Timæo, vbi Mathematicas diſciplinas omnis eruditionis ingenuæ viam appellat, & pleriſque alijs in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de induſtria ſuperſedeo. Ad has omnes vtilitates accedit maxima*

xima iucunditas, atq; voluptas, quâ cuiusque animus his artibus colendis, exercendisque perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex septem artibus liberalibus, in quibus non solùm ingenui adolescentes, verùm etiam nobiles viri, Principes, Reges, ac Imperatores ad honestissimam, maximeque liberalem oblectationem animi, quam summa etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multumque versari solebant. Quorum exemplum multos adhuc nostra hac ætate imitari conspicimus. Testatur magnam animi voluptatem ex his artibus percipi, Diuinus Plato in 7. de Republica, vbi audacter dicit, & non temerè confirmat, oculum animæ, qui ab aliis studijs excæcatur, defoditurque, a Mathematicis tantùm disciplinis recreari, excitarique rursus ad eius, quod est, contemplationem. Omitto plurima alia testimonia Platonis, aliorumque grauissimorum Philosophorum, quibus harum disciplinarum vtilitas cum necessitate & delectatione coniuncta, atque præstantia abundè potest comprobari.

EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIAE COMMENDATIO.

QVISNAM fuerit Euclides, horum elementorum institutor, (vt aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum proposuimus, deque Geometria vniuersa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non satis conuenit inter scriptores. Multi enim, vt testatur vulgata elementorum Euclidis secundùm Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inscriptio, existimant, cum fuisse Philosophum illum Megaris natum, quod oppidum Isthmo adiacet, Socratisque auditorem, qui sectam instituit à se dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eò quod sectatores illius interrogando, respondendoque (quod proprium est munus Dialecticorum) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de Vitis Philosophorum. Scribit & de hoc Cicero Quæstionum Academicarum libro secundo, vbi ait: Post Euclides Socratis Discipulus Megarenus, à quo idem illi Megarici dicti, qui id bonum solum esse dicebant, quod esset vnum, & simile, & idem, & semper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo libro scribit: nimirum à Platone, qui Socratis etiam discipulus fuit, conductores aræ sacræ de modo, & forma eius secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iussos. Verùm si Proclo nobili scriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megarico, floruitque tempore Ptolemæi primi, qui Ægypto, post Alexandri Magni mortem, Olympiade centesima decimaquinta, & ante Christum natum anno trecentesimo decimo nono cœpit imperare, vt Ioannes Lucidus refert. Quod quidem verius esse crediderim, hoc maximè adductus argumento, quòd Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentissimè enumerans, nullam prorsus faciat mentionem huius celeberrimi voluminis de Geometricis elementis conscripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam sibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum est, Diogenem in monumentis Philosophorum exercitatissimum, hoc tam insigne opus vel scientem voluisse præterire, vel ab Euclide suo esse compositum, ignorasse. Itaque Euclides noster, Geometra acutissimus, ab illo Megareo Philosopho longè alius est, qui cùm in doctrina Academicorum esset summa cum laude versatus, animum totum ad Mathematicas disciplinas transtulit: in quibus ita excelluit, vt concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos sibi locum iurè optimo vendicârit. Scripsit autem volumina ad rem Mathematicam spectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admiranda que doctrina facilè elucet: qualia sunt eius Optica, Catoptrica, Elementares institutiones ad Musicam capessendam pertinentes, Phænomena, atque Datorum liber, opus de Diuisionibus, quod nonnulli suspicantur esse libellum illum acutissimum, de Superficierum diuisionibus, Machometo Bagdedino ascriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinensis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem est editus. Conscripsit item Conica elementa, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum peruenêrt, & alia id genus opuscula. Maximè verò hoc volumen Elementorum Geometricorum, nunquam omnium consensione satis laudatum, tam mirabili ordine, tantaque eruditione contexuit, vt nullus vnquam eorum, qui similia conscripserunt elementa, (conscripserunt autem, vt ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipsum superârit. In quo quidem, vt summum ingenij acumen demonstrauit, ita non omnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda: sed ea duntaxat, quæ visa sunt esse necessaria, atque vtilia, ad communem omnium vtilitatem, argumentis & rationibus firmissimis censuit esse comprobanda. Cæterùm, quanta sit horum Euclidis Elementorum Geometricorum, ac proinde vniuersæ Geometriæ, præstantia, ac vtilitas, partim ex ijs, quæ antè scripsimus: partim ex ijs, quæ nunc dicemus, non obscurè perspici potest. Dicuntur enim Geometrica elementa, tam ob causam, quòd sine ipsis nullum opus Mathematicum possimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere. Omnes siquidem Mathematicarum rerum scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Theodosius, &c. in suis demonstrationibus vsurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perspecta, atque demonstrata. Quamobrem sicut is, qui legere vult, elementa literarum discit prius, & illis assiduè repetitis vtitur in vocibus omnibus exprimendis, sic qui alias disciplinas Mathematicas desiderat sibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plenè ac perfectè callere prius necesse est. Ex his etenim elementis, veluti fonte vberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, insularum dimensio, atque diuisio, omnis in cœlo per instrumenta siderum obseruatio, omnis horologiorum sciothericorum compositio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarum, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere variè illuminato, diuersitas manat. Ex his, inquam, elementis machinæ totius huius mundanæ est inuentum medium, atque eorum immoti cardines, circa quos perpetuò conuertitur, orbis denique totius explorata figura, ac quantitas. Ostenditur atque demonstratur vnius huius scientiæ vi cœli vniuersi, siderumque perennis conuersio, ortus, occasus, abitus, reditus, ascensus, descensus, diei ac noctis, temporumque toto anno per omnem terrarum situm, & mundi inclinationem, varietas. Coniunctiones item planetarum, oppositiones, aspectusque varij tam expeditè cognoscuntur, vt & loca illorum in cœlo, & eclipses, seu Solis ac Lunæ defectiones certissimè, antequam fiant, in omne posterum tempus à Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & Naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis nostræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ subiectum conspicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia esse videntur, omniumque

fidem ſæpenumerò, perſpicua facere, credibiliáque eſſe oſtendere: Quale eſt illud, quod de Archimede Syracuſio teſtatur hiſtoriæ. Cùm enim Hieron Syracuſarum Rex nauem, quam Ptolemæo Ægyptiorum Regi mittere ſtatuerat, tantæ eſſet molis fabricatus, vt eam omnes vnà Syracuſij à loco dimouere nunquàm valerent: Archimedes Geometra peritiſſimus, vnius Geometriæ viribus fretus Regi promiſit, ſe effecturum, vt ipſam ſolus Rex abſq; vllo labore ſibi duceret. Quod cùm præſtitiſſet, in conſpectu omnium Rex ſtupefactus exclamaſſe perhibetur: Ab hac die, quidquid dixerit Archimedes, illi credendum eſt. Non diſſimile huic videtur mihi eſſe pulcherrimum illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ geſſit Syracuſis, quando corona ex auro argentoque confecta, quam Rex ſummo ſtudio fabricari iuſſerat, non diſſoluta, ſingula auri & argenti pondera, quæ inter ſe aurificis fraude ac dolo commiſta erant, ſubtiliſſimè offendit. Neque ſilentio præteriri debet, eundem Archimedem robori ac efficaciæ demonſtrationum Geometricarum inmixum ſæpenumerò iactitaſſe, ſi haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc noſtram, quam incolimus, è loco ſe commouere poſſe. Pari ratione, datis viribus quibuſcunque, pondus quodcunque ſe poſſe mouere. Et alia id genus, non ſolùm ab Archimede, verùm etiam ab aliis præclaris, & illuſtribus Geometris patrata eſſe, memoriæ proditum eſt. Tantum denique nomen vna hæc Geometria Archimedi peperit, vt Marcellus Romani exercitus imperator, contra quem diu Syracuſanam vrbem defenderat Archimedes, machinis quibuſdam per Geometricas demonſtrationes adinuentis, & conſtructis, in expugnatæ vrbis direptione, ac cæde ciuium vnius Archimedis ſaluti publico edicto canerit: quem, vbi contra imperium ſuum & voluntatem à gregario quodam militè interfectum cognouit, vehementer doluit, eumque honorem mortuo habuit, quem viuo habere non potuit. Cuius ſepulchrum Cicero à ſe, cùm in Sicilia Quæſtoris officio fungeretur, repertum eſſe, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in ſummo ſemper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoque ad præſtantiam vtilitatemque Geometriæ, quòd cùm demonſtrationes Geometricæ ſint maximè illuſtres, nemo ſine ipſis ſatis perſpiciet, quæ ſit vis demonſtrationum, nemoque eiſdem deſtitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidem ingenuè fatetur Galenus inſignis Philoſophus, ac Medicorum princeps, in libro, quem de libris propriis inſcripſit. Is enim inſtructiſſimus rebus Dialecticis, cùm ſcholas Peripateticorum ac Stoicorum ſui temporis percurriſſet omnium, & præcepta miro cum animi ardore ſtudioque arripuiſſet, nihil ferè ab ipſis audiſſe ſe teſtatur, quod ad demonſtrationis cognitionem pertineret; quinimò pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuerſia poſita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia reperiſſe. Ita vt ad Pyrrhoniorum ferè (erant Pyrrhonij Philoſophi, qui nihil decernebant, ſed de omnibus dubitabant) hæſitantiam deuenturus fuerit, niſi Arithmeticæ, Geometriæ, Dialecticæque (quibus artibus ab auis & patre fuerat inſtitutus) eſſet cognitione ſcientiaque renocatus. Vnde ſuadet, ſequendos eſſe charactères illos Arithmeticos, & linearum demonſtrationes. Plato etiam cùm ob alias, tum ob eam etiam cauſam diſcendam eſſe Geometriam dixit, quòd eius cognitio maximè ſit vtilis, vt aliæ artes facilius & rectius percipiantur. Poſtremò eſt hæc ſumma laus Geometriæ, omnibusque modis prædicanda, quòd non hæſit in exiguis & inferioribus hiſce machinis, à quibus originem traxit: ſed euolauit in cœlum vſque, & humanas mentes humi abiectas in illam rurſus cæleſtem ſedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusque adminiſtrationem & gubernationem noſtro intellectui ſubiecit.

DIVISIO GEOMETRIAE ET ELEMENTORVM EVCLIDIS.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria vniuerſe ſibi hunc ſcopum proponit, vt plana, aut ſolida vel conſtituat, vel conſtituta inter ſe comparet, aut dimetat. Neque verò mirum alicui videri debet, quòd cùm tria ſint genera magnitudinum, linea, ſuperficies & corpus, ſolum de duobus poſterioribus extent propriæ contemplationes, vt diximus, non autem de lineis, vel etiam punctis. Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, vt ait Proclus, Geometria potiſſimùm circa figuras verſatur, quæ in planis duntaxat, vel etiam ſolidis conſiſtunt omnes. Non enim puncta, vel lineæ figuram vllam conſtituunt ſine planis, aut ſolidis, ac proinde neceſſe non erat, propriam de punctis, & lineis ſcientiam inſtituere: Superficiebus verò, ſine planis & corporibus, ſolidisve maximè conueniebat, vt proprias nanciſcerentur tractationes. Volens igitur ſummus harum rerum artifex Euclides in hiſce elementis perfectam, & omnibus numeris abſolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus ſex libris agit de planis, in poſterioribus verò quinque de ſolidis acutiſſimè diſputat, eorumq; proprietates maximè illuſtres perueſtigat. Quoniam verò cùm res omnes Geometricæ, tum præſertim ſolida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici ſolent, perfectè tractari non poterant, abſq; linearum commenſurabilium, atq; incommenſurabilium notitia: Immò verò quàm plurimæ magnitudines ſub menſuram cadere nulla ratione abſq; earundem linearum cognitione poſſunt, cùm earum latera ſæpenumerò ſint talia, vt ea communis & nota menſura data metiri nequeat, vt liquidò conſtat ijs, qui aliquando demonſtrationes Geometricas in opus contulerunt, atq; vſum: idcircò vt hiſce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinũ intelligentiam, dimenſionemq; requiſita, Stereometriæ ſuæ præpoſuit decimum librum, in quo ſubtiliter & copioſè de huiuſmodi lineis diſſerit. Intelligens rurſum Euclides, neq; hanc tractationem linearum commenſurabilium & incommenſurabilium ſine numerorũ cognitione poſſe conſiſtere, ante decimum librum agit de numerorum paſſionibus, easq; copioſè & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, eſt perſecutus. Quamobrem totum hoc volumẽ elementorum Geometricorum quindecim libris comprehenſum (quorum quidem priores tredecim ſine vlla controuerſia Euclidi aſcribuntur ab omnibus; poſteriores verò duo à nonnullis Hypſiclis Alexandrini eſſe creduntur) ſecari rectè poterit in quatuor partes, ita vt prima pars contenta ſex prioribus libris agat de planis. Secunda tres ſequentes complectens, paſſiones numerorum perſcrutetur: Tertia, quam ſolus decimus conſtituit liber, de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibusq; diſputet: Quarta denique reliquis quinque libris abſoluta ſcientiam ſolidorum, ſiue corporum complectatur. Prima pars rurſum triplex eſt: Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis abſolutè, inueſtigando eorũ æqualitatẽ & inæqualitatem: In quinto verò

libro

libro de proportionibus magnitudinum in genere diſputatur: In ſexto denique proportiones figurarum planarum diſcutiuntur. Quid verò Euclides in ſingulis alijs libris pertractet, propriis in locis exponemus.

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA, QVID PROPOSITIO, ET QVID LEMMA APVD Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorum diuiditur ab antiquis ſcriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocant eam demonſtrationem, quæ iubet, ac docet aliquid conſtituere. Vt ſi quis conetur demonſtrare, ſupra lineam rectam finitam poſſe triangulum æquilaterum conſtitui, appellabitur huiuſcemodi demonſtratio problema, quoniã docet, qua ratione triangulũ æquilaterũ conſtitui debeat ſupra rectam lineam finitã. Dictum eſt aũt hoc genus demonſtrationum Problema ad ſimilitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæſtio illa, cuius vtraque pars contradictionis (vt ipſi loquuntur) eſt probabilis, qualis hæc eſt quæſtio: An totum diſtinguatur realiter à ſuis partibus ſimul acceptis: Sic etiam quæſitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent conſtruere, & cuius contrarium effici etiam poteſt, problema appellatur. Vt ſi quis proponat ſe demonſtraturum, ſupra lineam rectam finitam triangulum æquilaterum poſſe conſtitui, efficiet problema, quia & triangulum nõ æquilaterum, nempe Iſoſceles, vel ſcalenum, ſupra eandem lineam conſtitui poteſt. Pari ratione, qui inſtituit angulum rectilineum ſecare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quòd angulus idem diuidi poteſt in partes non æquales. Eſt tamen diſcrimen non paruũ inter Dialecticorum & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico vtrauis pars contradictionis ſuſcepta confirmatur tantùm probabiliter, ita vt intellectus cuiuſque ambigat vtranam illius pars vera ſit: In Mathematico verò, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonſtratione, ita vt nihil omnino dubij ſit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra ſtatuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propoſitæ lineam perpendicularem educere, efficiet vtique hoc ipſum ratione conſtanti, & euidenti: Eodem modo dicendum eſt, ſi ex eodem puncto velit educere lineam non perpendicularem. Theorema autem appellant eam demonſtrationem, quæ ſolùm paſſionem aliquam proprietatemve vnius, vel plurium ſimul quantitatum perſcrutatur. Vt ſi quis optet demonſtrare, in omni triangulo tres angulos eſſe æquales duobus rectis, vocabunt talem demonſtrationem Theorema, quia non iubet, aut docet triangulum, aut quippiam aliud conſtruere, ſed contemplatur tantummodò trianguli cuiuslibet conſtituti paſſionem hanc, quòd anguli illius duobus ſint rectis æquales. Vnde à contemplatione ipſa, hæc demonſtratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione poteſt, contradictionis vtraque pars vera vt ſit. Si enim quis demonſtret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus eſſe rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, vt inæquales quoque ſint duobus rectis. Eadem ratio in alijs theorematibus eſt intelligenda. Itaque vt vno verbo dicam, quæſitum illud Mathematicum conſtruere aliquid docens, cuius etiam oppoſitum poteſt effici, Problema: Illud verò, quod nihil docet conſtruere, & cuius pars oppoſita perpetuò falſa exiſtit, Theorema appellatur. Vnde ſi quis proponeret in modum problematis, ſe in ſemicirculo velle angulum rectum conſtituere, irridendus omnino eſſet, & Geometriæ prorſus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in ſemicirculo conſtituti ſunt recti, vt demonſtrabitur libro 3. propoſitione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendum erit. Cæterùm tam problema, quàm theorema dici conſuenit apud Mathematicos Propoſitio, propterea quòd vtrumque aliquid nobis proponit, vt in exemplis adductis conſtat. Hæc ideò dixerim, vt ſtudioſus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propoſitionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (vt aliorum interim volumina taceam) conſtant partim problematibus, partim theorematibus. Demonſtrationes problematum ſemper concluduntur his ferè verbis: Quod faciendum erat: Theorematum verò hiſce: Quod oſtendendum, vel demonſtrandum erat; habita nimirum ratione finis vtriuſque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonſtrationes continentur, & non vna tantùm, quamuis vltimus ſyllogiſmus demonſtrationis ſolùm concludat id, quod in initio demonſtrandum proponitur, vt declarabimus in prima Euclidis propoſitione, & in cæteris omnibus manifeſtum erit.

QVONIAM verò ad demonſtrationes problematum, atq; theorematum ſæpenumerò requiruntur alia quædam theoremata, vel problemata minus principalia, & quæ facilè ex ijs, quæ prius demonſtrata ſunt, intelligi poſſunt; inferuntur interdum à Geometris huiuſmodi theoremata, & problemata problematibus, atque theorematibus, de quibus præcipuè agitur, vt breuius demonſtrari poſſint. Vocant autem illa Lemmata, propterea quòd ſolùm aſſumuntur ad alias demonſtrationes; non autem de illis præcipua diſputatio inſtituitur, quemadmodum de alijs. Itaque Lemma dici poteſt demonſtratio, ſeu conſtructio illius, quod ad demonſtrationẽ alicuius theorematis, vel problematis principalis aſſumitur, vt demonſtratio expeditior fiat, ac breuior.

QVAENAM SINT PRINCIPIA APVD Mathematicos.

QVM omnis doctrina, omniſque diſciplina ex præexiſtente cognitione, vt auctor eſt Ariſtoteles, atq; ex aſſumptis, & conceſſis quibuſdam principijs ſuas demonſtret concluſiones: Nulla autem ſcientia ex eiuſdem Ariſtotelis, aliorumq; Philoſophorũ ſententia ſua principia demonſtret; habebunt vtiq; & Mathematicæ diſciplinæ ſua principia, ex quibus poſitis, & conceſſis ſua problemata ac theoremata confirment. Horum autem tria tantummodo genera apud Mathematicos reperiuntur. In primo reponuntur omnes definitiones, quas nonnulli cum Ariſtotele ſuppoſitiones, vt vult Proclus, appellant. His autẽ vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipſa, nominum ambiguitate, aut obſcuritate circumuenti in paralogiſmos incidamus. Secundum genus complectitur Petitiones, ſiue Poſtulata, quæ quidem adeò clara ſunt, & perſpicua in illa ſcientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeant confirmatione, ſed auditoris duntaxat aſſenſum expoſcant, ne vlla ſit in demonſtrando hæſitatio, aut difficultas. Ad tertium genus referuntur Axiomata, ſeu communes animi notiones, quæ

non ſolùm in ſcientia propoſita, ſed etiam in omnibus alijs ita manifeſta ſunt, & euidentia, vt ab eis nulla ratione diſſentire queat is, qui ipſa vocabula rectè perceperit. Atque his principijs rectè mihi videtur accommodari poſſe id, quod in Metaphyſicis ſcribit de primis principijs Ariſtoteles: A iauua quis aberrabit? Vt præclarè à Cicerone, Pronunciata, ſiue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum Elementorum præmittit ante demonſtrationes ſuarum concluſionum omnia hæc principia, vt ex ipſis, quæ quidem facilè à quouis intelliguntur, deducat admiranda theoremata; quibus nemo vnquam aſſenſum præberet, niſi certa ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine ſummis laudibus efferenda eſt Geometria, omnibuſque ſeculis prædicanda, quod ex tam exiguis initijs cuilibet quantumuis rudi & ignaro notiſſimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aſpectu ab omni ſenſu humano, & intellectu remota, quæ tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonſtrationibuſque certiſſimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porrò in huiuſcemodi principijs tradendis hic ordo ab Euclide ſeruatur, vt in ipſo quidem introitu ſcientiæ proponat principia toti Geometriæ communia, in alijs autem deinde libris, vbi res poſtulat, ea exponat principia, quæ propriè, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum ſubiectam videntur ſpectare. Neque verò omnia principia Geometrica ab Euclide in his elementis ſunt explicata, ſed multa reliquit lectori diſquirenda; quæ tamen ex ijs, quæ tradidit, ſine magno labore ac ſtudio percipi poſſunt, & intelligi. Verùm ne in hac quoq; parte defuiſſe videamur rerum Mathematicarum ſtudioſis, adiunximus varijs in locis ad principia ab Euclide poſita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maximè curſum demonſtrationum arbitrati ſumus retardari poſſe. Sed iam

ad expoſitionem ipſam Principiorum Euclidis

accedamus.

In GEOMETRIAM EVCLIDIS CARMEN.

VTILIS & ſuauis quàm ſit diuina Matheſis,
Quis poßit digno commemorare modo?
Quanquam tot linguis doctis ego præditus eſſem,
Conuexus quot habet ſydera clara polus:
Quanquam Romani Ciceronis acumine clarus
Præſtarem cunctis vnus in orbe viris:
Non tamen hoc aptis poſſem proponere verbis,
Materiam ingenio non capiente meo.
Et quamuis reliquas ſicco pede conſcius artes
Ipſe Mathematicas præteriſſe velim:
Nónne Geometrice tamen hoc oſtendere poßit?
Muſice, Arithmetice nónne probare ſatis?
Harum equidem eſt vſus per vitam plurimus omnem.
Quod, niſi nil ſapiat, nemo negare poteſt.
Hæc quia cognouit quicunque Mathemata rectè,
Promptior eſt alijs omnibus ille viris.
Ergo velut cuncti laudemq́ decusq́ merentur,
Qui diſcunt ſtudio talia cuncta bono:
Sic quoque debetur laus, gratia, gloria cunctis,
Ordine qui tradunt talia cuncta bono.
Quod cùm ſic habeat, certè non parua, licèt ſit
Ethnicus, Euclidi gloria iure datur.
Is quia per doctis metirier omnia libris
Edocuit ſtudijs corda dicata bonis.

H. G. P.

EVCLIDIS ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM eſt, cuius pars nulla eſt.

OPVS hic primus liber in eo poſitus eſt, vt nobis tradat ortus proprietates q; triangulorum, tum quod ad eorum angulos ſpectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter ſe comparat interdum, interdum verò vnumquodq; per ſe inſpicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos conſiderat, aliquando verò ex angulis latera, ſecundùm æqualitatem atque inæqualitatem, rimatur. Idemq; variis rationibus inquirit in duobus quandoque triangulis inter ſe collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorúmque contemplationem aggreditur, tum inter ſe, tum etiam, vt cum triangulis inter eaſdem parallelas conſtitutis conferuntur. Vt autem hæc omnia rectiùs, & commodiùs exequatur Euclides, docet diuiſionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, conſtitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiuſmodi. Itaque vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli ſententia, rectilinearum figurarum maximè prima, ac præcipua, triangula inquam, atque parallelogramma. Ante omnia verò Euclides more Mathematicorum rem propoſitã exorditur à principijs, initio facto à definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidẽ definitio planiùs ac faciliùs percipietur, ſi priùs intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas ſecundùm longitudinem, alteras ſecundùm latitudinem, & ſecundùm profunditatem altitudinémve alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, ſed quædam vnicas tantùm ſecundùm longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adjiciat partes etiam latitudinis; quædam denique præter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, ſiue profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa ſolùm eſt, aut longa ſimul, & lata, aut longa, lata, atq; profunda. Neque aliam dimenſionem habere poteſt res vlla quanta, vt rectè demonſtrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in priſtinam dignitatem reſtituto, nécnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimenſione, qui quidem, quod ſciam, adhuc nondum eſt excuſus. Itaque quod in quantitate continua, ſiue magnitudine exiſtit, intelligitur q; ſine omni parte, ita vt neq; longum, neq; latum, neque profundum eſſe cogitetur, (vt nimirum excludamus animam rationalem, Nunc vel Inſtans temporis, & vnitatem, quæ etiam partes nõ habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum.

Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum poteſt, niſi velis, extremitatem alicuius acus acutiſſimæ, ſimilitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non eſt, quoniam ea extremitas diuidi poteſt, & ſecari infinitè, punctum verò indiuiduum prorſus debet exiſtimari. Denique in magnitudine id concipi debet eſſe punctum, quod in numero vnitas, quod q; in tempore inſtans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.

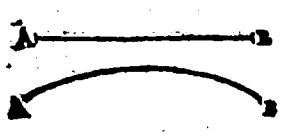
punctum

II.

LINEA verò, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT hic lineam, primam ſpeciem magnitudinis, quam dicit eſſe quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neque profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam neceſſariò profunditas remouetur, non autem contrà. Lineam autem hanc, ſiue longitudinem abſque

latitudine, non absurdè concipere, intelligereq; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & vmbræ extensa, carens omni latitudine, cùm sit limes vtriusque. Mathematici quoque, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, è loco in locum moueri. Cùm enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum, omnis expers latitudinis. Vt si punctum A, fluere intelligatur ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cùm verè interuallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quædam, carens omni latitudine, propterea quòd punctum A, omni priuatum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint, lineam nil esse aliud, quàm puncti fluxum: Alij verò, magnitudinem vno contentam interuallo. Potest enim linea vnico tantùm modo, vtpote secundùm longitudinem, secari atque diuidi.



III.

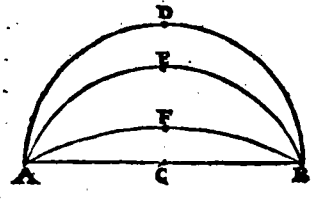
LINEAE autem termini, sunt puncta.

DOCET, quænam sint extrema lineæ cuiusuis, seu termini, dicens lineam terminari, siue claudi vtrinque punctis; Non quòd omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos assignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quòd linea quælibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idémque in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita vt earum extremitates sola esse puncta cogitemus.

IV.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

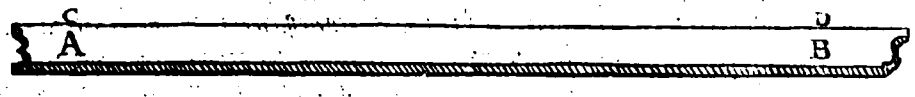
TRIPLEX omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue composita ex vtraque. Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultat; in qua denique nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue summa vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æquabiliter inter extremos fines positæ progrediuntur. Proclus hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spatium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tantum occupat præcisè spatium, quanta est distantia puncti A, à puncto B: Lineæ verò A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cùm maiora obtineant spatia, quàm sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineam perpulchrè sic definit: Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctum C, aut quoduis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique esset C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur: Rursus oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremum B, ob interiectum punctum C; quod quidem non contingit in lineis non rectis, vt perspicuum est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes inquit, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiaceret sua puncta, sed ea potiùs linea, quæ minor diceretur, quàm A C B. Campanus describens rectam lineam, vocat eam breuissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Quemadmodum autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt describi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti qualitatem lineæ descriptæ intelligunt. Si namque punctum rectà fluere concipiatur per breuissimum spatium, ita vt neque in hanc partem, neque in illam deflectat, sed æquabilem quendam motum, atque incessum teneat; dicetur linea illa descripta, Recta: Si verò punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atque hinc inde titubare, appellabitur linea descripta, mixta: Si denique punctum fluens in suo motu non vacillet, sed in orbem feratur vniformi quodam motu, atque distantia à certo aliquo puncto, circa quod fertur, vocabitur descripta illa linea, circularis. Itaq; si duo puncta moueantur similibus prorsus motibus, ita vt semper æqualiter inter se distent; describentur ab ipsis duæ lineæ similes, hoc est, si vna earum fuerit recta, erit & altera recta: si verò vna fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo curua, &c. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici possunt, non definit hoc loco Euclides, sed circulares exponet definitione decimaquinta, missam prorsus omittes, & ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat vsum. Sunt autem plurima genera



linearum

linearum miſtarum: quædam enim ſunt vniformes, quædam difformes. Vniformium rurſus aliæ ſunt in plano, aliæ in ſolido. In plano ſunt Hyperbole, Parabole, Ellipſis, de quibus agit copioſiſsime Apollonius in conicis elementis; linea Conchoideos, de qua Nicomedes; linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis ſpiralibus tractationem inſtituit, & aliæ huiuſmodi. In ſolido, ſeu ſuperficie curua ſunt alterius generis linea helica, quàm ea ab Archimede deſcripta, qualis eſt illa, quæ circa cylindrum aliquem tornatilis; nec non ea, quæ circa conum exiſtit, vel etiam quæ circa ſphæram, cuiuſmodi ſunt ſpiræ illæ, quas Sol deſcribit ab ortu in occaſum, vt in ſphæra docuimus. Difformium autem infinitus eſt numerus, quas non eſt opus hic recenſere. Ex his conſtat, duas tantùm eſſe lineas ſimplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunque ſunt, miſtas appellari, quòd ex illis componantur. Vnde ingeniosè concludit Ariſtoteles in libro de Cœlo iuxta triplicem lineam, tres tantùm eſſe motus, duos quidem ſimplices, rectum & circularem, tertium verò miſtum, ſiue ex illis duobus compoſitum. Lib. 1. text. 5.

Sed quoniam lineas rectas regula ducere ſolemus, doceamus, qua ratione regulam propoſitam examinare poſſimus, num linea per illam deſcripta recta ſit, nec ne. Sit ergo regula A B, ſecundum cuius latus C D, recta

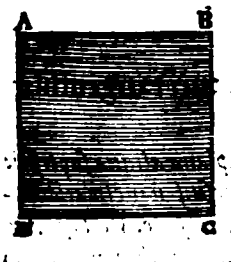


C D, deſcribatur ex puncto C, in punctum D. Deinde conuertatur regula, vt, manente eadem parte ſuperiore, punctum C, ſtatuatur in D, & punctum D, in C: & ſecundum idem latus regulæ C D, recta ducatur ex puncto D, in punctum C. Nam ſi poſterior hæc linea priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regula A B, in lineis rectis ducendis fidere poſſimus: Si verò non congruet omni ex parte, latus illud C D, perfectè rectum non erit, ſed corrigendum erit diligentiùs.

V.

SVPERFICIES eſt, quæ longitudinem, latitudinemque tantùm habet.

POST lineam, quæ eſt primæ quantitatis continuæ ſpecies, vnicamq; habet dimenſionem, definit ſuperficiem, quæ ſecundam magnitudinis ſpeciem conſtituit; addit q; primæ dimenſioni ſecundùm longitudinem, alteram ſecundùm latitudinem. Nam in ſuperficie reperitur non ſolùm longitudo, vt in linea, verùm etiam latitudo, ſine tamen omni profunditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B, B C, C D, D A, comprehenſa, conſiderataq; ſecundùm longitudinem A B, vel D C, & ſecundùm latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur ſuperficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiuſque corporis, ſi ab ea omnis ſoliditas intellectu auferatur. Non incongruè etiam, vt ait Proclus, imaginem quaſi expreſſam ſuperficiei nobis exhibent vmbræ corporum. Hæ enim, cùm interiorem terræ partem penetrare non poſſint, longæ tantùm erunt, & latæ. Mathematici verò, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in tranſuerſum moueri: Veſtigium enim relictum ex iſto motu erit quidem longum propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motũ, qui in tranſuerſum eſt factus; nulla verò ratione profundum eſſe poterit, cùm linea ipſum deſcribens, omni careat profunditate; quare ſuperficies dicetur. Vt ſi linea A B, fluat verſus D C, efficietur ſuperficies A B C D. Alij deſcribentes ſuperficiem dicunt, eam eſſe corporis terminum: Alij verò, magnitudinem duobus conſtantem interuallis. Poteſt enim ſuperficies diuidi, & ſecari duobus modis, vno quidem ſecundùm longitudinem, altero verò ſecundùm latitudinem.



VI.

SVPERFICIEI autem extrema, ſunt lineæ.

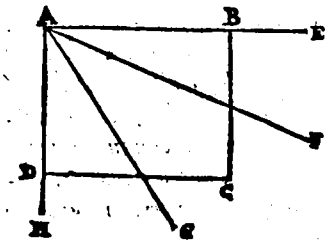
NON diſsimilis eſt hæc definitio ſuperiori, qua termini lineæ fuêre explicati. Vult enim extremitates ſuperficiei eſſe lineas, quemadmodum linea fines extitêre puncta. Vt ſuperioris ſuperficiei A B C D, extrema ſunt lineæ A B, B C, C D, D A; Eodemq; modo in quacunque altera ſuperficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus. Non autem in ſuperficie infinita, vel etiam ſpherica, qua corpus ſphæricum circundat. Poteſt etiã ſuperficies aliqua claudi, & terminari vnica tantùm linea, qualis eſt circularis ſuperficies, vt dicemus in definitione circuli.

VII.

PLANA ſuperficies eſt, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas.

HÆC quoque definitio ſimilitudinem quandam deſcriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas ſuas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis ſurſum, deorſumve ſubſultando nõ recedant, appellabitur plana: qualis eſt ſuperficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum ſunt collocatæ, ita vt nihil habeat inciſum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunoſum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ ſunt ſitum, nec vlla eſt alia ſublimior, humiliórve, ſed omnes æquabiliter protenduntur. Alij ſuperficiem planã definiunt, dicentes eam eſſe, cuius partes mutua obtum-

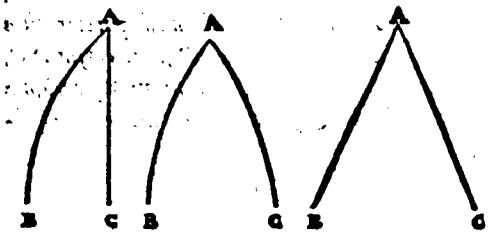
brant extrema: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, qua eadem habẽt extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari potest, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies A B C D, tum demum plana dici debet, quando linea recta A E, circa punctum A, immobile circunducta, ita vt nunc eadem sit, qua A B, nunc eadem, qua A F, nunc eadem, qua A G, & nunc eadẽ, quæ A H, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum, sed omnia puncta superficiei à linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quòd si minima superficiei partitula aliis humilior à linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta liberè nõ posset circumduci, propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, iam non posset nuncupari plana. Itaque vt sit plana, requiritur vt omnibus modis possit recta linea commensurari, hoc est, vt ei applicari possit recta linea secundùm A B, & A F, & denique secundùm omnes partes. Hæc autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transuersum, qui super duas alias lineas rectas conficitur. Vt si linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur superficies perfectè plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cætera omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qualis est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnæue rotundæ, vel etiam coni, &c. appellantur curuæ, & non planæ. Quamuis enim superficiei columnæ rotundæ, seu cylindri, secundum longitudinẽ adaptari possit linea recta, tamen secundùm latitudinem minimè potest. Idemq; dicendum est de aliis. Superficies autẽ curua duplex est, conuexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam verò omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.

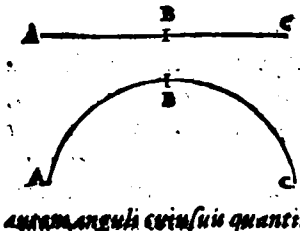


II X.

PLANVS verò angulus, est duarum linearum in plano se mutuò tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quidnam sit angulus planus, dicens: Quandocunq; duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quòd in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ A B, A C, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideò efficiunt angulum A, planum in eadem existentem superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicentur autem duæ lineæ non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eã secat, vel certè statim post punctũ concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulũ contactus, qui fit, quando duo circuli se contingũt, vel etiam, quando linea recta circulũ tangit. Protracta enim recta linea post punctum contactus, quanquã non secet circulum, tamen statim post illud ab eo seiungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundùm propriam dispositionẽ, ac formam extensa recedit à recta tangente, quamuis eam nõ secet: Vnde vere est angulus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in proposit. 16. lib. 3. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quòd si duæ lineæ se mutuò tangant, iacentes in directum, ita vt alterutra producta congruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cùm nulla sit inclinatio, sed ambæ vnam integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta conuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra secundùm suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere. Itaq; vt linea recta efficiant angulum, necesse est, vt post concursum productæ se mutuò secent: Curuæ autem lineæ, vel quarũ altera curua, altera verò recta existit, angulum constituere verè possunt, etiamsi non se mutuò intersecent; sufficit enim, quòd sese contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semota cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum: lineæ etenim longius excurrentes, nõ augent suam inclinationem, igitur neq; anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum



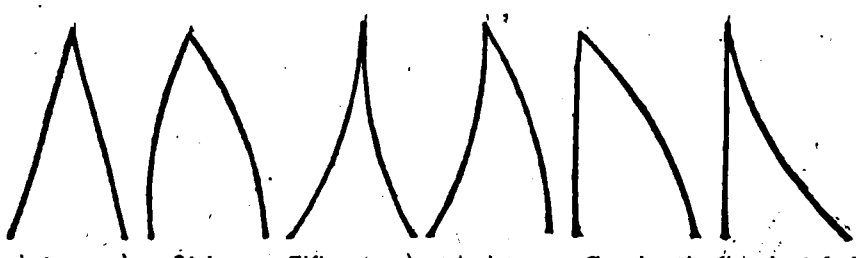


lorum, quorum prius ſolidos comprehendit, de quibus Euclides diſſerit in Stereometria; quiq; in corporibus exiſtunt; Poſterius verò ſphærales, qui in ſuperficie ſphæræ conſtituuntur ex circulorum maximorum circunferentiis, & de quibus copiosè agitur in ſphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum à nobis reijcitur, cùm hìc de ſolis planis angulis ſit futurus ſermo:

IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidē rectilineus dicitur, & de quo ſolùm hìc agit Euclides; aut ex duabus curuis, quē curuilineum vocare licet; aut ex vna curua, & altera recta, qui non ineptè mixtus appellatur. Ex hiſce porrò lineis poſſunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, ſeu habitudine linearum curuarum, vtpotè ſecundùm conuexū, & conçauum, ceu in propoſitis angulis

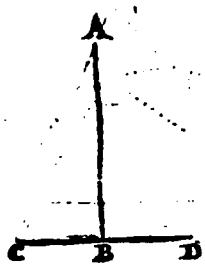


planè & apertè perſpicitur: Rectilineus verò variari non poteſt ratione inclinationis, habitudinisve linearū, niſi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod eſt abſurdum; cùm hoc modo augeatur tantùm angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & aliis commune eſt, non autem ita varietur, vt aliud conſtituat genus;

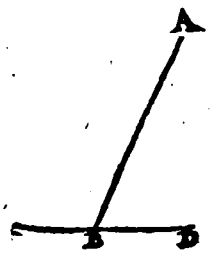
X.

CVM verò recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam eos, qui ſunt deinceps, angulos æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque æqualium angulorum: Et quæ inſiſtit recta linea, perpendicularis vocatur eius, cui inſiſtit.

VSVS frequentiſſimus reperitur in Geometria anguli recti, & linea perpendicularis, nec non anguli obtuſi, & acuti, propterea docet hoc loco Euclides, quiſnam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quænam linea perpendicularis: In ſequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtuſum, & acutum. Non enim alius dari poteſt angulus rectilineus, præter rectum, obtuſum, & acutum. Igitur ſi recta linea A B, recta C D, inſiſtens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideò dicūtur à Mathematicis eſſe deinceps, quòd eos eadem linea C D, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter ſe æquales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quàm in D, inclinabit, ſed æquabiliter recta



C D, inſiſtet, vocabitur vterq; angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis rectæ C D, cui inſiſtit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis rectæ A B: quamuis enim C B, tantùm faciat cum A B, vnum angulum, tamē ſi A B, extenderetur in rectum & continuū verſus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua verò arte linea duci debeat efficiens cū altera duos angulos æquales, docebit Euclides propoſit. 11. & 12. huius 1. lib. Itaq; vt in Geometria concludamus angulum aliquem eſſe rectum, aut lineā, quæ ipſum efficit, ad aliam eſſe perpendicularē, requiritur, & ſufficit, vt probemus angulum, q eſt ei deinceps, æqualem illi eſſe. Pari ratione, ſi dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipſum conſtituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoq; eſſe. Quando enim anguli, qui ſunt deinceps fuerint inter ſe æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipſos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definit. quando autem non fuerint æquales, non dicitur quiſquam illorum rectus, vt conſtabit ex ſequentibus duabus definitionibus, & propterea neq; linea eos conſtituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quemnam vſum habeant apud Geometras deſcriptiones vocabulorum. Non enim magno labore hæc, quæ diximus, ad alias definitiones poſſunt transferri.



XI.

OBTVSVS angulus eſt, qui recto maior eſt.

QVANDO recta A B, recta C D, inſiſtens, non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam cauſam neutrum rectum, ſed vnum quidem recto maiorem, alterum verò minorem, dicitur maior angulus obtuſus, qualis eſt angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B C.

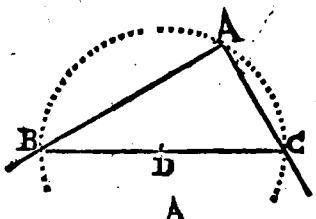
XII.

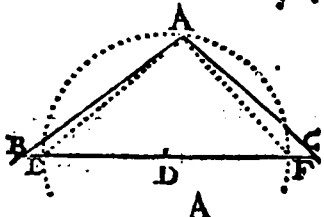
ACVTVS verò, qui minor est recto.

VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B D, vocatur acutus. Itaq; angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus altero maior minórve detur, cùm linea perpendicularis eum efficiens nõ debeat magis in vnam partẽ inclinare, q̃ in alteram: Obtusus verò, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cùm ab illa inflexibilitate lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniam verò ad quemuis angulum planũ constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in vno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extremæ verò significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum A B C, acutum verò, p angulum A B D; quod diligẽter est notandũ, vt facilè dignoscamus angulos, quorũ mentio fit in demõstrationibus.

IAM verò proposito nobis angulo aliquo rectilineo, si experiri velimus, num rectus sit, an obtusus, acutúsve, efficiemus id hoc modo. Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A. Ducta recta B C, vtcunque, quæ angulum subtendat, & diuisa bifariã in D, describatur ex D, vt centro, ad interuallum D A, circumferentia circuli; quæ si p puncta B, C, transeat, [a] *erit angulus A, rectus, vtpote qui in semicirculo B A C, existat: si verò idem semicirculus rectam B C, secet in E, F, erit angulus B A C, obtusus; propterea q̃ ductis rectis E A, F A,* [b] *angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, q̃ quidem pars est anguli B A C: Si denique idem semicirculus rectam B C, producta secet in E, F, erit angulus B A C, acutus; propterea q̃ ductis rectis E A, F A,* [c] *angul⁹ E A F, in semicirculo E A F, rect⁹ est, q̃ quidẽ maior est angulo B A C.*

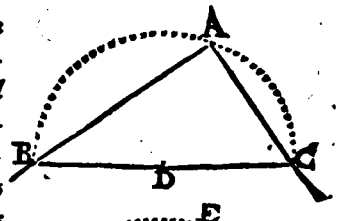
[a] 31. tertij.
[b] 31. tertij.
[c] 31. tertij.

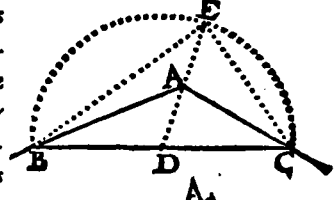


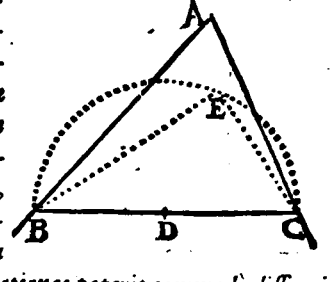


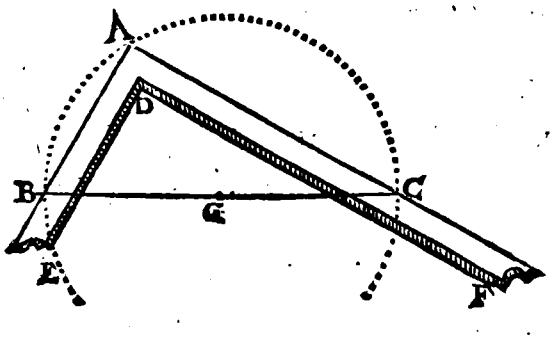
ALITER idem assequemur hoc modo. Describatur ex puncto D, quod rectam B C, dato angulo A, subtensam secat bifariam, semicirculus ad interuallum D B, vel D C: qui si transeat per punctum A, [d] *datus angulus erit rectus, vtpote qui in semicirculo existat. Si verò idem semicirculus transeat supra punctum A, datus angulus erit obtusus. Ducta enim recta D A, secante circunferentiam in E, iungantur rectæ E B, E C* [e] *erit q̃, angulus B E C, in semicirculo rectus. Cum ergo angulus B A C, datus* [f] *maior sit angulo B E C, erit angulus datus A, recto maior, hoc est, obtusus. Si denique semicirculus idem secet rectas A B, A C, erit datus angulus acutus. Sumpto namq; puncto E, inter rectas A B, A C, in circunferetia, iungantur rectæ E B, E C,* [g] *erit q̃ angulus B E C, rectus in semicirculo: q̃ cum* [h] *maior sit angulo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id est, acutus. Nõ videatur autem mirum cuipiam, quod ad demonstrationem assumamus propositiones, quæ posteriùs demonstrantur ab Euclide; quod alienum esse videtur à puritate demonstrationum Geometricarum: Non videatur, inquam, mirũ, quia cùm id, quod hoc loco ostendimus, necessarium nõ sit ad sequentes demonstrationes, poterit commodè differri, donec propositiones requisitæ sint demonstratæ. Satis est, vt praxis huiusce rei hoc loco intelligatur. Idem obseruabimus in nonnullis praxibus problematum. Eas enim propriis in locis, quoad eius fieri poterit, proponemus, vt diuisionem anguli rectilinei in quotuis partes æquales eo in loco docebimus, vbi Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas æquales partes, &c. quanquam ad earum praxium demonstrationes necessariæ sint propositiones posteriùs demonstratæ.*

[d] 31. tertij.
[e] 31. tertij.
[f] 21. primi.
[g] 31. tertij.
[h] 21. primi.









FACILIVS idẽ cognoscemus beneficio normalia cuius accuratè fabricatæ, quale refert instrumentum A B C, constans duabus regulis A E, A F, ad angulum rectum in A, coniunctis. Nam si latus A B, huius normæ, rectæ A B, applicetur, cadente puncto A, in punctum A; siquidem & normæ latus A C, rectæ A C, congruat, erit angulus A, rectus: si verò citra rectã A C, cadat normæ latus A C, erit angulus A, obtusus: si denique latus normæ A C, vltra rectam A C, cadat, acutus erit angulus, vt perspicuum est.

*Vt autem normam examinabimus, num accuratè sit fabricata, nécne. Descripto semicirculo B A C, ex centro G, cuiusuis magnitudinis, ductaq; diametro B C, ponatur angulus A, in aliquo puncto circunferentiæ, vt in A, latusq; vnum normæ, vt A B, per B, punctum extremum diametri transeat. Nam si alterũ tunc latus A C, per alterum punctum extremum C, transeat, ritè fabricata erit norma A B C; * quòd tunc angulus B A C, in semicirculo B A C, rectus sit: si verò latus A C, nõ per C, transeat, emendanda erit norma; quia eius angulus A, tunc rectus non erit. Eadem ratione interiorem partem normæ examinabimus, si angulum D, circunferentiæ applicemus, & latera D E, D F, punctis extremis B, C, &c.*

a 31. tertij.

XIII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES sunt termini iuxta hãc definitionem. Punctum enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Corpus autẽ terminare amplius nihil potest, quòd non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quàm tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum vna dimensione, vt perspicuum est ex adductis exemplis.

XIV.

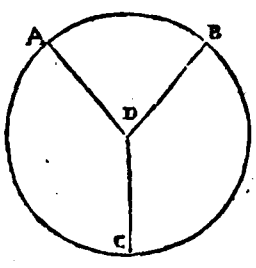
FIGVRA est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

NON omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitã figurã appellare cogamur: Sed ea solùm magnitudines, quæ latitudinẽ habent, nempe superficies terminatæ; & quæ profunditatem adeptæ quoq; sunt, vt solida finita, Figuræ nomine appellabuntur. Hæ enim propriè terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non propriè dicitur punctis extremis comprehendi, cùm puncta lineã non ambiant, sed potiùs punctis terminari dicitur. Itaq; termini debent quantitatẽ, quæ figura dicitur, ambire, & nõ tantùm terminare. Superficies quoq; infinita, vel etiam corpus, cũ nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione potest. Figuræ vnico comprehensæ termino sunt, Circulus, Ellipsis, sphæra, sphæroides, & aliæ huiusmodi: Pluribus verò terminis inclusæ figuræ sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: solida autem circumscripta, figuræ solidæ, siue corporeæ. Porrò quia formas, seu typos variarum figurarum inspicies q̃ plurimas in sequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum verò in posterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda esse videtur.

XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub vna linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ, inter se sunt æquales.

DEFINIT hic circulum, figuram inter planas perfectissimã, docens figuram illam planã, quæ vnica linea circumscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sunt æquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spatium concludatur vnica linea A B C, habueritq; hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus suscepto, vtpote à D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum A B C, quales sunt D A, D B, D C, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, aliàs nõ. Qua verò ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propos. 1. lib. 3. Adiungit quoq; Euclides lineam extremã circuli, qualis est A B C, appellari Peripheriam, seu, vt Latini exponũt, circunferentiam. Potest circulus etiam hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur à linea recta finita circa alterũ punctum extremũ quiescens circunducta, cùm in eundem rursus locũ restituta fuerit, vnde moueri cœperat. Quæ quidẽ descriptio persimilis est ei, qua ab Euclide sphæra describitur lib. 11. Vt si intelligãtur recta A D, circa punctũ D, quiescens moueri, donec ad eundẽ redeat locũ, à quo dimoueri cœpit, describet ipsa recta totũ spatiũ circulare. punctum verò alterũ extremũ A, delineabit peripheriã A B C: Erit quoq; punctũ quiescens D, illud, à quo omnes lineæ cadentes in peripheriã sunt inter se æquales, propterea q̃ recta A D, circunducta, oẽs lineas, q̃ ex D, possũt educi ad peripheriã, æquè metiatur. Igitur Ellipsis, quãuis figura sit plana vna linea circũscripta, tamẽ quia in ea non datur punctũ, à quo ad ipsam lineã terminantẽ omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.



XVI.

HOC verò punctum centrum circuli appellatur.

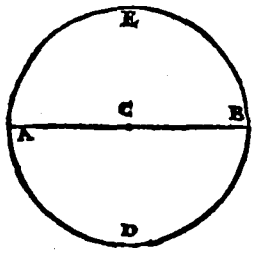
DOCET, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circunferentiam ductæ, sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figuræ punctum D. Vnde perspicuum est, polum alicuius circuli in sphæra, à quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes sunt æquales, vt ait Theodosius in sphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cùm punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphæræ, non autem in superficie circuli; quæ tamen est necessariò requisita conditio, vt punctũm aliquod centrum vocetur. Cæterùm, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, vt ab eo tres duntaxat li-

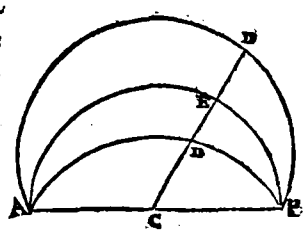
nea cadentes in peripheriam ſint æquales inter ſe, vt demonſtrat Euclides propoſit. 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes aliæ ab eodem puncto emiſſæ inter ſe ſint æquales.

XVII.

DIAMETER autem circuli, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam ſecat.

SI in circulo ducatur recta linea A B, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, ſed ea ſolummodò, quæ per centrum vſque ad peripheriam vtrinque extenditur. Vnde plures aſſignari poterunt in circulo diametri, vnum verò centrum duntaxat. Quòd autem Euclides addit, circulum bifariam ſecari à diametro, perſpicuum ex eo eſſe poteſt, quòd diameter per medium circulum, vtpotè per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum tranſitum, vtrinq; æquales circunferentiæ abſcindantur. Quod tamẽ Thaletem Mileſium hac ratione demonſtraſſe teſtatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, accommodari, & coaptari portioni reliquæ A E B, ita vt diameter A B, communis ſit vtrique portioni: Si igitur circumferentia A D B, congruat penitùs circunferentiæ A E B, manifeſtum eſt, duas illas portiones à diametro factas, eſſe inter ſe æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si verò circunferentia A D B, nõ omni ex parte cadere dicatur ſuper circunferentiam A E B, ſed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ductæ rectæ à centro C, ſecante circunferentiam A D B, in D, & circunferentiam A E B, in E, erunt duæ rectæ C D, C E, ductæ ex centro ad circunferentiam eiuſdem circuli æquales, per circuli definitionem, cùm tamen vna ſit pars alterius, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet vna circunferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, ſed amba inter ſe aptabuntur, ideóque æquales erunt. quod demonſtrandum proponebatur.



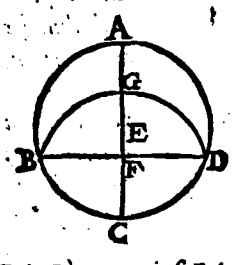


EX hac demonſtratione conſtat, diametrum non ſolùm circunferentiam, verumetiam totam aream circuli ſecare bifariam. Cùm enim ſemicircunferentiæ ſibi mutuò congruant, vt oſtenſum eſt, congruent etiam ſuperficies ipſæ inter diametrum, & vtramque circunferentiam comprehenſæ, cùm neutra alteram excedat. Quare æquales inter ſe erunt.

XIIX.

SEMICIRCVLVS verò eſt figura, quę continetur ſub diametro, & ſub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI gratiâ, in ſuperiori circulo figura A D B, contẽta ſub diametro A B, & peripheria A D B, dicitur ſemirculus, quia, vt in præcedenti definitione oſtendimus, ea eſt dimidiata pars circuli. Eadẽ ratione erit figura A E B, ſemicirculus. Idem autẽ punctum C, diametrũ ſecans bifariã, centrũ eſt in circulo, & in ſemicirculo. Quòd ſi recta linea B D, nõ tranſeat per centrum E, ſecabitur circulus ab ea non bifariã, ſed in duas portiones inæquales B A D, B C D, quarũ ea, in qua centrũ circuli exiſtit, cuiuſmodi eſt portio B A D, maior eſt, quàm alia B C D, extra quam centrum E, reperitur. Eſſe autẽ portiones B A D, B C D, inæquales, ita probari poteſt. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad rectã B D, perpendicularis A C. Si igitur dictæ portiones dicantur eſſe æquales, & portio B C D, intelligatur moueri circa rectam B D, vt ſuper portionem B A D, cadat, congruet illa portio huic, & recta F C, recta F A, congruet, ob angulos rectos ad F, q. omnes inter ſe æquales ſunt ex definit. 10. cùm ſint ſibi mutuò deinceps. Recta ergo F C, quæ nunc eadẽ eſt, quæ F A, maior erit, quàm E A, pars ipſius F A. Cùm ergo ipſi E A, ſit æqualis E C, quòd amba ducantur è centro ad circunferentiam, erit quoque F C, maior quàm E C, pars quàm totũ, quod eſt abſurdum. Non igitur portio B C D, portioni B A D, congruet, ſed intra eam cadet, cuiuſmodi eſt portio B G D, vt recta F G, eadem tũc exiſtens, quæ F C, minor poſſit eſſe quàm E A, vel E C. Si namq; diceretur cadere extra, vt ſi circulus eſſet B C D G, cuius centrum E, & portio B C Γ, caderet extra B G D, qualis eſt portio B A D, eſſet rurſus F A, eadẽ tunc exiſtens, quæ F C, maior q. E G, hoc eſt, q. E C, at q; ita pars F C, maior rurſum foret toto E C. quod abſurdum eſt. Ex quo patet, portionẽ B A D, in qua centrum E, exiſtit, maiorem eſſe reliqua portione B C D, cùm hæc æqualis ſit portioni B G D, quæ pars eſt portionis B A D. Cùm enim oſtenſum ſit, portionem B C D, circa rectam B D, circunductam non poſſe congruere portioni B A D, neque cadere extra; cadet omnino intra, qualis eſt B G D.



XIX.

RECTILINEAE figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur.

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides deſcriptiones variarum figurarum, explicat priùs quænam

quenam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potissimùm sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ vndiq; rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuras planas curuis lineis comprehensas, dici curuilineas: Eas verò, quæ partim curuis, partim rectis circumscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.

XX.

TRILATERAE quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur, apertè nobis innuit, quonam modo Triangulum definiri debeat. Cùm enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ lineæ, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERAE verò, quæ sub quatuor.

EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius varia species mox subsequentur.

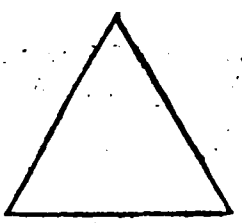
XXII.

MVLTILATERAE autem, quæ sub pluribus, quàm quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QVONIAM species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum: Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciem, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, qua omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt speciem; sex quartam, atque ita deinceps infinitè: Ideò Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quàm quatuor, rectis lineis circunscribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, fortassis eam ob causam, quòd præcipuè in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur, & quòd facilè ad similitudinem harum duarum specierum cætera omnes à quolibet definiri possint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam, sexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterūt huiusmodi figuræ quinquangulæ, sexangulæ, septangulæ, &c.

XXIII.

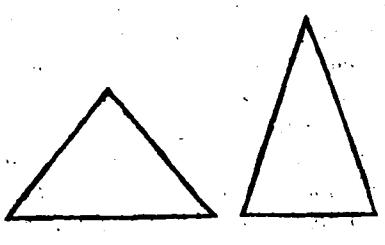
TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.



DESCENDIT iam ad singulas species triangulorum. Quia verò triangula diuidi possunt vel habita ratione laterum, vel angulorum, declarat prius species prioris diuisionis, quæ tres sunt duntaxat, quòd tria latera tribus tantùm modis sese possint habere. Aut enim omnia æqualia sunt; aut duo tantùm, tertio existente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter se æqualia sunt, dicitur triangulum Aequilaterum. Porrò ex æqualitate omnium trium laterū trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; esse, ceu ad 5. proposit. huius libri demonstrabimus.

XXIV.

ISOSCELES autem est, quod duo tantùm æqualia habet latera.

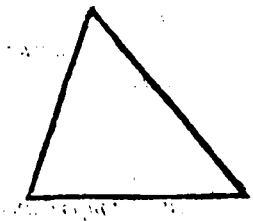


EX hac rursum æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, vt demonstrabit Euclides propositione quinta huius libri. Apposuimus autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, posterius autem idem minus obtinet: ita vt duæ sint species trianguli Isoscelis; alterum, cuius tertium latus sit vtrouis æqualium maius; & alterum, cuius tertium latus vtrouis æqualium minus sit.

XXV.

SCALENVM verò est, quod tria inæqualia habet latera.

HIC denique ex inæqualitate omnium laterū trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt ostenderur propos. 18. huius 1. lib. Porrò ex his constat, eodem modo potuisse diuidi triangulum in tres

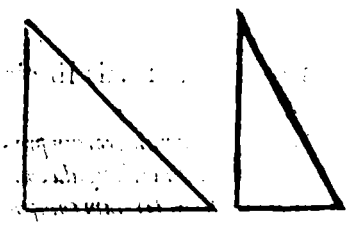


ſpecies, ſi æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cùm enim aut omnes tres anguli ſint inter ſe æquales; aut duo tantùm, tertio maiore, vel minore exiſtente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum, vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales; vel duorum tantùm angulorum æqualium; vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, ſecundum verò Iſoſceli, tertium denique Scaleno reſpondet triangulo. Cæterùm quanam arte conſtruenda ſint triangula huius partitionis ſuper quauis data recta linea finita, trademus propoſitione prima huius libri.

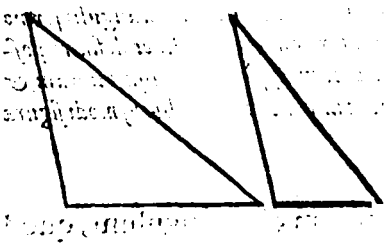
XXVI.

AD hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum ſpecies iuxta poſteriorē diuiſionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia verò tria tantummodò ſunt angulorū rectilineorum genera diuerſa; (Omnis enim angulus rectilineus vel eſt rectus, vel obtuſus, vel acutus, vt ſuprà diximus,) ſit vt tres quoque ſpecies triangulorum ſub hac conſideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli eſt rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propoſit. 1. lib. conſtabit; aut obtuſus, & ob eandem cauſam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nullusq; obtuſus, ſed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & aliis Geometris Rectangulum. Poteſt autem triangulum huiuſmodi eſſe vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt hæ figuræ indicant, æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum eſſent per ea, quæ propoſit. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoq; cùm vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propoſit. 17. & 32. huius libri.



XXVII.



AMBLYGONIVM autem, quod obtuſum angulum habet.

TRIANGVLVM Amblygoniū, ſiue obtuſangulum eſſe quoque poteſt vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt in his figuris cernitur, non autē æquilaterū, aliàs eadem ratione eſſent omnes tres anguli per ea, quæ propoſit. 5. oſtendemus, æquales, ideoq; cū vnus ponatur obtuſus, oēs tres obtuſi, qd multò magis pugnat cū propoſ. 17. & 32. huius lib.

XXIIX.

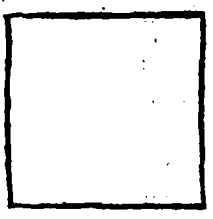
OXYGONIVM verò, quod tres habet acutos angulos.

OMNE triangulum Oxygonium, ſiue acutangulum, poteſt eſſe vel æquilaterum, vel Iſoſceles, vel Scalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in ſpeciebus prioris diuiſionis ſpectanda exhibuimus, ne eadem hic fruſtra repetantur. Ex dictis igitur palàm fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, eſſe neceſſariò Oxygonium: At omne triangulum, tam Iſoſceles, q̄ Scalenū, eſſe vel Rectangulum, vel Amblygonium, vel Oxygonium, atq; Iſoſceles Oxygonium rurſum duplex, Iſoſceles nimirū Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualiū maius, atq; Iſoſceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualiū minus: Vt vnica ſit ſpecies trianguli æquilateri, quatuor verò Iſoſcelis, & tres Scaleni: atq; in vniuerſum octo triangulorum genera: æquilaterū, quod perpetuò Oxygonium eſſe diximus, Iſoſceles rectangulum, Iſoſceles Amblygonium, Iſoſceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualiū maius, Iſoſceles Oxygonium habens latus tertiū vtrouis æqualium minus, Scalenū rectangulum, Scalenum Amblygonium, & Scalenū Oxygonium. Quæ etiam hiſce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Iſoſceles, Rectangulum Scalenū, Amblygoniū Iſoſceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterū, Oxygonium Iſoſceles, habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Oxygonium Iſoſceles habēs tertium latus vtrouis æqualium minus, & Oxygonium Scalenū. Quare perſpicuum eſt, quamnā connexionem, ſiue affinitatē habeant inter ſe triangula vtriuſq; partitionis. Poſſe autē dari triangulum Iſoſceles Oxygonium, cuius duorū laterū æqualiū vtrumuis tertio ſit minus, vt rectè animaduertit Franciſcus Barocius in ſua Coſmographia, oſtendemus ad propoſ. 15. lib. 4. In omni porrò triangulo, cuius duo quæcunque latera expreſſè nominantur, ſolet reliquū latus tertium à Mathematicis appellari Baſis, ſiue illud in ſitu infimum occupet locum, ſiue ſupremum, &c. Hoc te breuiter monere volui, ne putares aliquid latere myſterij in baſe trianguli, intelligeresq; quodlibet latus, omni diſcrimine remoto, baſis nomine poſſe nuncupari.

XXIX.

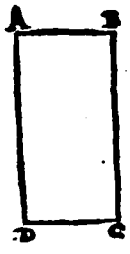
QVADRILATERARVM autem figurarum, Quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum, & rectangulum eſt.

POST figurarum trilaterarum ſpecies, exponit iam ſingulatim quadrilateras figuras, recenſendo quinque tantummodò earum genera, quorum quatuor priora regularia ſunt, poſterius autem & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter ſe æqualia exiſtunt, omnesq; anguli recti. Itaque quadrangulum æquilaterũ, & non rectangulum; vel contrà, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propoſit. 46. huius libri, quonam modo conſtruendum ſit quadratum ſuper recta linea propoſita finita.



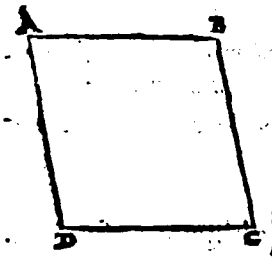
XXX.

ALTERA verò parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, at æquilatera non eſt.



SECVNDA figura quadrilatera appellatur altera parte longior, in qua quidem anguli ſunt recti, at latera non ſunt inter ſe æqualia, quamuis bina oppoſita inter ſe æqualia exiſtant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera A B, D C, inter ſe, & A D, B C, inter ſe quoque æqualia ſunt, cùm A B C D, propter angulorum rectitudinem, parallelogrammum ſit, vt in hoc libro ad propoſitionem trigeſimamquartam oſtendemus.

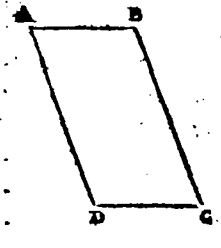
XXXI.



RHOMBVS autem, quę æquilatera, ſed rectangula non eſt.

HAEC figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppoſitas prorſus habet conditiones, & diuerſas à conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos verò non rectos, & inæquales, quamuis bini oppoſiti inter ſe æquales exiſtant. Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, inter ſe, & B, & D, quoque inter ſe æquales ſunt, cùm A B C D, propter æqualitatem laterum, parallelogrammum ſit, ceu ad eandem propoſitionem trigeſimamquartam huius libri demonſtrabitur.

XXXII.

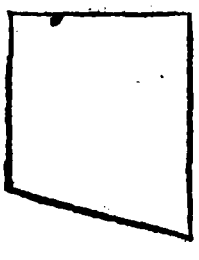


RHOMBOIDES verò, quæ aduerſa & latera, & angulos habens inter ſe æquales, neque æquilatera eſt, neque rectangula.

EST hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte oppoſita. Nã neq; eius latera omnia æqualia ſunt, neque vllus angulus rectus; ſed tamen latera bina oppoſita, qualia ſunt A B, C D, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter ſe, item anguli bini oppoſiti, quales ſunt A, C, & B, D, inter ſe exiſtunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici poſſunt regulares; latera verò omnes, quæcunque ſunt, irregulares.

XXXIII.

PRAETER has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, Trapezia appellentur.



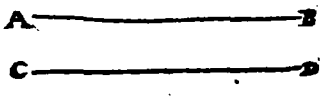
RELIQVAS omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita vt neq; latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, ſeu rectos, neque latera bina oppoſita; neq; angulos binos oppoſitos habeãt inter ſeſe æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem cùm infinitis modis variari queãt, rectè irregulares nuncupabuntur. Poſſunt enim duo anguli eſſe recti, vel vnus tantùm, vel etiam nullus, ſed vel vnus obtuſus, & alij acuti, vel duo obtuſi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri poteſt quaſi diuiſio penes latera; Nam vel aliqua æqualia inter ſe ſunt, vel nullum alteri eſt æquale, &c. Determinatas porrò trapeziorum ſpecies nonnullas afferemus poſt definitionẽ linearum parallelarum, ſeu æquidiſtantium, & parallelogrammi.

XXXIV.

PARALLELAE rectæ lineæ ſunt, quæ cùm in eodem ſint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuò incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, ſiue æquidiſtantes, non ſatis eſt, vt in quamcunque partem, etiam ſpatio infinito, productæ nunquã ad vnum punctum coëant; ſed neceſſe quoque eſt, vt in vna plana ſuperficie exiſtant. Multæ ſiquidem lineæ rectæ non exiſtentes in eadem ſuperficie plana productæ ad ſpatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non ſunt parallelæ dicendæ; quales ſunt, exempli gratiâ, duæ rectæ lineæ in tranſuerſum poſitæ in medio aere, & non ſe tangentes; Hæ etenim nunquam coire

possunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana vni earum accommodata, ita vt omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumuoluta, alteri quoque accommodari potest secundum omnia eius puncta, quamuis re ipsa in duabus superficiebus diuersis reperiãtur; Vt propositis duabus rectis lineis A B, C D, si superficies aliqua plana rectæ A B, applicetur, omnia



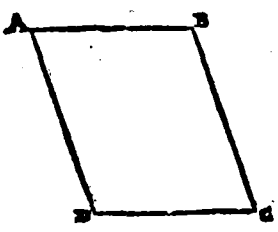
eius tangẽs puncta, ita vt circa illam circumducta tangat quoq; omnia puncta alterius rectæ C D; dicẽtur huiusmodi rectæ duæ lineæ in eadem superficie plana existere, aliàs non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eãdem non coëant, etiamsi infinitè producantur tam ad partes A, C, quàm ad B, D, appellabuntur parallelæ, siue æquidistantes. Caterùm planiùs perfectiusq; intelliges in 11. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eadem dicantur superficie existere: Satis sit hoc loco breuiter admonuisse, rectè ab Euclide vtramque conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & productæ in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad spatium infinitum. Quòd si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensæ non cernantur coire, constet tamen, eas tandem ex vna parte longiùs protractas in vnum punctum conuenturas, quamuis ex altera semper magis ac magis inter se distent, ac disiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotiescunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur à quopiam esse parallelæ, is necesse est concedat, illas in vna, eademq; superficie iacere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstret priùs oportet, eas in eodem existere plano, & in neutram partem productas coniungi posse. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conantur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coëant, etiamsi infinitè producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, quæ eadem lineas in eodem requirit existere plano.

Hic finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam verò hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, nec non earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

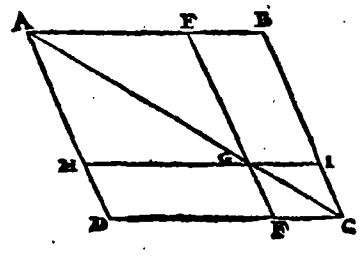
PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.

Vt figura quadrilatera A B C D, siquidem latus A B, æquidistet lateri D C, & latus A D, lateri B C, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solùm parallelogrammæ; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorũ priora duo rectangula, quòd omnes angulos habeant rectos, posteriora verò duo non rectangula vocantur, quòd nullus in eis angulus existat rectus. Caterùm, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius libri. Itaque possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum; in nec rectangulum, nec æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior; & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoq; aliud quidem habet duo latera opposita parallela, alia verò duo minimè: aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia, dicitúrque Trapezium Isosceles; vel inæqualia, Trapeziumq; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.



XXXVI.

CVM verò in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in vno eodemq; puncto, ita vt parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo verò reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrũ consistere dicuntur.



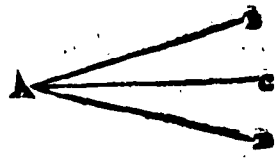
Sit parallelogrammum A B C D, in quo diameter A C; & lineæ E F, secans diametrum in G, & parallela existens lateribus A D, B C; Item linea H I, secans diametrum in eodem puncto G, parallelaq; lateribus A B, D C, existens. Quæ cùm ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum diuisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidem

quidem duo EBIG, GFDH, per quæ diameter AC, non transit, vocantur à Geometris complementa, siue supplementa reliquorum duorum AEGH, GICF, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cùm per ea diameter transeat, vt videre est in præsenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

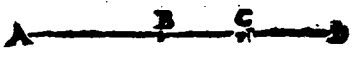
POSTVLETVR, vt à quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.



PRIMVM hoc postulatum planum admodum est, si rectè considerentur ea, quæ paulò antè de linea scripsimus. Nam cũ linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atq; adeò linea recta fluxus directo omnino itinere prograediens, sit vt si punctum quodpiã ad aliud directò moueri intellexerimus, ducta sanè sit à puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione postulat Euclides, quemadmodum hic videt à puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctum B; ab eodemq; aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumeras alias ab eodem puncto educi possunt ad alia atq; alia puncta.

II.

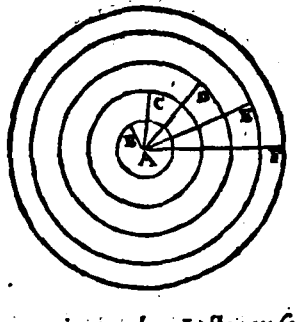
ET rectam lineam terminatam in continuum rectà producere.



QVOD si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cùm punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam distãtiam. Sic linea recta AB, producta est primò in continuum ad punctum C. Deinde ad punctum D, &c.

III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.



IAM verò, si terminatam rectam lineam cuiuscunq; quantitatis mente conceperimus applicatã esse secundùm alterũ extremũ ad quoduis punctũ ipsamq; circa hoc punctum fixum circunduci, donec ad eum reuertatur locum, à quo dimoueri cœpit; descriptus erit circulus, effectumq;, quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in his quinque lineis AB, AC, AD, AE, AF. quæ singulæ circa centrum A, circumuolutæ singulos circulos describserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.

PRAETER hæc tria postulata, quibus Euclides contentus fuit, sunt multa alia æquè facilia, è quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentiùs repetendum erit in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens Lector ex se vel facilè intelliget.

IV.

ITEM quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinẽ vel maiorem, vel minorem.

OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionẽ verò diminui potest infinitè: Vnde nunquam dabitur quantitas continua adeò magna, quin ea maior dari possit: neq; tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verũ est, q; ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionẽ vnitatis augeri potest infinitè: quãuis in eius diminutione ad vnitatẽ indiuiduã deueniatur.

COMMVNES NOTIONES, SIVE Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QVAE eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod vno æqualium maius est, aut minus, maius quoq; est, aut minus altero æqualium. Et si vnum æqualium maius est, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoq; æqualium eadem magnitudine maius est, aut minus.

FIERI nulla ratione potest, vt dua quantitates inæquales, æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum proposita quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessariò maior illarum; Et si maior æqualis

fuerit propoſitæ quantitati, ſuperabitur minor ab eadem. Quare rectè colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter ſe æquales quoque eſſe. Reliquæ quoque partes Axiomatis à nobis adiectæ, quòd frequentem vſum habeant, clariſſimæ ſunt.

II.

ET ſi æqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt æqualia.

SI enim quantitates conflatæ, ſiue compoſitæ, inæquales forent, proculdubiò maiori plus eſſet adiectum, quàm minori, cùm antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoq; æquales.

III.

ET ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur, ſunt æqualia.

NAM ſi reliquæ quantitates forent inæquales, à minore plus fuiſſet detractum, quàm à maiore.

IV.

ET ſi inæqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt inæqualia. Et, ſi inæqualibus inæqualia adiecta ſint maiori maiùs, & minori minus, tota ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

QVIN &, ſi æqualibus inæqualia adiecta ſint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem conſtituit quantitatem, quàm minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & ſi inæqualibus æqualia adiiciantur, compoſita quantitas ex maiore, maior eſt, quàm compoſita ex minore. Alteram partem huius Axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius vſum.

V.

ET ſi ab inæqualibus æqualia ablata ſint, reliqua ſunt inæqualia. Et ſi ab inæqualibus inæqualia ablata ſint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

SIC etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata ſint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorẽ quantitatem, q̃ minor; quemadmodum reſiduũ maioris maius eſt reſiduo minoris, ſi æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterum Euclides non docet, quidnam ſimpliciter, & abſolutè ſignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquatur poſt ſubtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus propterea q̃ nihil certò colligi inde poteſt, niſi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahitur, vt in ſecunda parte Axiomatis dictum eſt, quam nos ob inſignem eius vtilitatem adiecimus. Poſſunt enim compoſitæ quantitates, vel reſiduæ, eſſe & inæquales, & æquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ ſunt inæqualia. Sic etiã ſi ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquẽtur 5. & 4. quæ ſunt inæqualia. At verò ſi ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. et 11. quæ æqualia ſunt. Item ſi detrahantur 3. & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque exiſtunt.

PORRO in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda eſt etiam vna & eadem multitudo communis. Si enim æqualibus idem commune adiiciatur, tota fient æqualia: Et ſi ab æqualibus idem commune detrahatur, reſidua æqualia erunt: Et ſi inæqualibus idem commune adiiciatur, vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & ſi ab inæqualibus idem commune detrahatur, vel ab eodem communi inæqualia auferantur, reſidua exiſtent inæqualia.

VI.

ET quæ eiuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia. Et quod vnius æqualium duplum eſt, duplum eſt & alterius æqualium.

SIMILITER, quæ eiuſdem ſunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia, &c. inter ſe ſunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum eſſet duplex, vel triplex, &c. alicuius quantitatis, deficeret vtique minus à duplici, vel tripliti, &c. Quòd ſi contrà, minus eſſet duplex, vel triplex, &c. quantitatis cuiuſpiam, excederet ſanè maius duplex ipſum, vel triplex, &c. Hoc autem & ex ſecundo axiomate comprobarĩ poteſt, ad hunc modum: Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtrique tertiæ illa addatur, erunt compoſitæ duplices illius tertiæ, [a] *ſed & inter ſe æquales, ob idem additamentum. Quòd ſi rurſum compoſitis eadem tertiæ adiiciatur, erunt conflatæ triplices eiuſdem tertiæ. Cùm igitur* [b] *& æquales inter ſe, propter idem additamentum, exiſtant; eademq; ſit ratio in cæteris multiplicibus, perſpicuum erit Axioma propoſitum. Secundam porrò partem huius axiomatis nos appoſuimus, quòd non rarò eius vſus in rebus Geometricis requiratur.*

a 2. pron.
b 2. pron.

VII.

ET quæ eiuſdẽ ſunt dimidia, inter ſe æqualia ſunt. Et contrà, Quæ æqualia ſunt, eiuſdem ſunt dimidia.

PARS

PARI ratione, quæ eiusdem sunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter se æqualia sunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia sunt, vel triplicia, &c. inter se æqualia quoq; sunt: Item, quæ æqualium sunt dimidia, vel tertia; vel quarta, &c. & inter se æqualia necessariò existunt. Partem quoque secundam huiusce Axiomatis nos adiunximus, propterea quòd non minùs frequenter, quàm prima, à Geometris vsurpatur.

IIX.

ET quæ sibi mutuò congruunt, ea inter se sunt æqualia.

HOC est, duæ quantitates, quarum vna superposita alteri, neutra alteram excedit, sed ambæ inter se congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur esse æquales, quando vna alteri superposita, ea quæ superponitur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, sed lineæ illius cum lineis huius prorsus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis lineæ interdum inter se inæquales existant.

ECONTRARIO, Quæ inter se sunt æqualia, sibi mutuò congruent, si alterum alteri superponatur. Intelligendum est autem, quantitates sibi mutuò congruentes, esse æquales, secundum id duntaxat, in quo sibi congruunt; Congruit autem longitudo longitudini tantùm, superficies superficiei, solidum solido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.

IX.

ET totum sua parte maius est.

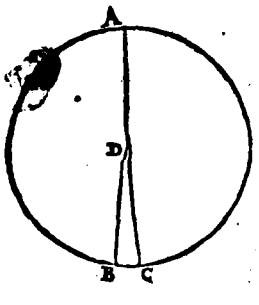
CVM pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte maius.

IN sequentibus porrò pronuntiatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quòd duo alia axiomata hoc loco inserenda esse censuimus valde necessaria, cum ex iis Axioma 12. quod Euclidi est decimum, demonstrari possit, vt ibi dicemus. In margine tamen numeros apposuimus ordini Euclidis respondentes.

X.

DVAE lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.

NON est difficile istud Axioma, si perfectè intelligatur natura rectæ lineæ. Cùm enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo se mutuò intersecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ A B, A C, partem communem A D. Ex centro autem D, & interuallo D A, [a] describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C; [b] Erunt igitur duæ circunferentiæ A B, A B C, inter se æquales, (Sunt enim circunferentiæ semicirculorum æqualium, cùm A D B, A D C, ponantur esse diametri) pars & totũ, quod est absurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.

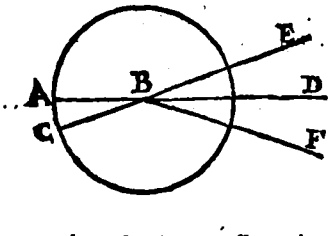


a 3. petit.
b 17. defin.

POSSVNT tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando vnam & eandem rectam lineam constituunt. Vt in hac figura, rectæ A D, B C, communem habent segmentum C D; quia ambæ vnam rectam constituunt lineam A B. At verò quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuêre A B, A C, in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, vt rectè à Proclo fuit demonstratum.

XI.

DVAE rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessariò se mutuò in eo puncto intersecabunt.



HOC etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonstrabimus: Coëant duæ rectæ A B, C B, in B. Dico illas productas se mutuò secare in B, nempe C B, productam cadere in E, supra rectam A B, productam. Nam si C B, producta non cadit supra A B, productam, congruet cum A B, producta, ita vt transeat per D, atque ita duæ rectæ A B D, C B D, habebunt idem segmentum commune B D, quod in antecedenti axiomate ostensum est fieri non posse: vel certè infra A B, productam cadet, ita vt C B, producta cadat in F, sitq; vna recta linea C B F. Centro igitur B, describatur ad quoduis interuallum circulus A C F D, secans rectas A B, C B, productas in D, F. Quia ergo vtraque re-

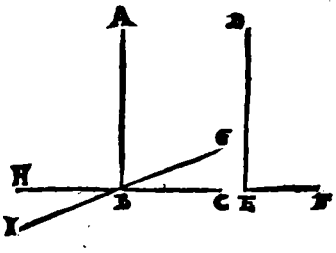
cta ABD, CBF, per centrum B, ducitur, erit tam ACD, quàm CF, ſemicirculus, per definitionem 18. ac proinde æquales erunt circunferentiæ ACD, CF, vt ad definitionem 17. demonſtrauimus, totum & pars. Quod eſt abſurdum.

Dvo proximæ Axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen neceſſaria ſunt ad aliorum Axiomatum probationes, eadem hîc inſeruimus. Tria autem ſequentia Euclidis ſunt.

x. **XII.**

ITEM, omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales.

Hoc axioma apertiſſimũ eſſe cuilibet poteſt ex 10. definitione, qua angulus rectus deſcribitur; propterea quòd inclinatio linearum angulum rectum conſtituẽtium augeri minuíve nequit, ſed prorſus eſt immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à linea perpendiculari, qua quidem alteri lineæ rectæ ita ſuperſtat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quàm in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter ſe eſſe, cùm ſemper ſit eadem inclinatio, quamuis lineæ ſint inæquales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. definitione id demonſtrare hac ratione: Sint duo anguli recti ABC, DEF. quos dico eſſe inter ſe æquales. Si enim fieri poteſt, ſint inæquales, ſitque ABC, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam DE, rectæ AB, cadet recta EF, inter rectas AB, BC, qualis eſt BG, propterea quòd angulus DEF, minor ponitur angulo ABC. [a] *Producatur CB, in rectum & continuum vſque ad H; Cùm igitur angulus ABC, ſit rectus,* [b] *erit angulus ABH, illi deinceps æqualis, & rectus quoque: quare maior etiam angulo ABG.* [c] *Producta autem GB, in rectum & continuum vſque ad I, cadet portio producta BI, infra CB, productam, vt in precedenti Axiomate eſt demonſtratum.*



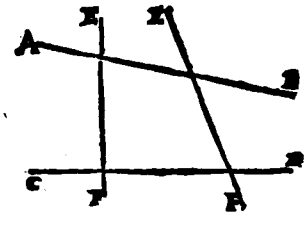
a 2. petit.
b 10. defin.
c 2. petit.
d 10. defin.

Quare cũ angulus ABG, ponatur rectus, [d] *fiet angulus ABI, illi deinceps, æqualis. Quapropter angulus ABH, maior quoq; erit angulo ABI, pars toto, quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt duo anguli recti propoſiti, ſed æquales. Quod eſt propoſitum: eademq; eſt ratio in cæteris.*

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma iſtud non poſſe conuerti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis rectus eſt, cùm & curuilineus recto æqualis eſſe queat, vt in 5. lib. demonſtrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cùm non ſit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter ſe æquales erunt, ſine vlla exceptione.

xi. **XIII.**

ET ſi in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

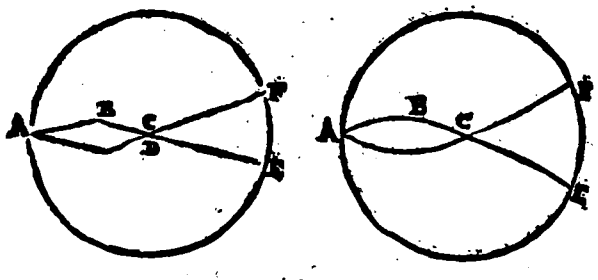


VT ſi in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem conuenturas eſſe ad aliquod punctum vnum, verſus eam partem, in qua duo anguli minores exiſtunt duobus rectis, vt appoſitum exemplum commonſtrat. Ratio huius perſpicua eſt, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales ſunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire poſſunt, ſed æquali ſemper ſpatio protendũtur, vt propoſitione 28. huius libri demonſtrabitur. Quare ſi duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, neceſſe eſt ex ea parte dictarum linearum ſpatium coarctari, ex altera verò magis ac magis dilatari; ideóque eas conuenturas tandem eſſe aliquando in vnum punctum. Verùm, quia axioma hoc ſubobſcurum videri ſolet tyronibus, immò à numero principiorum reijcitur à Gemino Geometra, Proclo, & alijs, quòd non facilè quiuis ei aſſenſum præbeat; præſertim cùm reperiantur aliæ quædam lineæ, quarum ſpatium, licèt ſemper magis ac magis coangueſtetur, (quemadmodum & in duabus rectis AB, CD, accidit, vt ad propoſitionem vigeſimam octauam huius libri demonſtrabimus.) nunquam tamen in vnum punctum coëunt, etiamſi infinitè producantur, vt conſtat ex elementis conicis Apollonij Pergæi, & ex linea conchili Nicomedis. Idcircò pleniorem illius explicationem in ſcholium propoſitionis vigeſimæ octauæ huius libri differimus, vbi illud ex Procli ſententia Geometricè demonſtrabimus, vt firmè, ac ſine vlla dubitatione, tanquam veriſſimum, ad propoſitionis vigeſimæ nonæ huius libri, (vbi primùm eius vſus incipit apparere) & ad aliarum propoſitionum demonſtrationes poſſit aſſumi. Quod tamen nos aliter quàm Proclus, & quidem magis Geometricè demonſtrabimus, ita vt nullus dubitationi locus relinquatur.

xii. **XIV.**

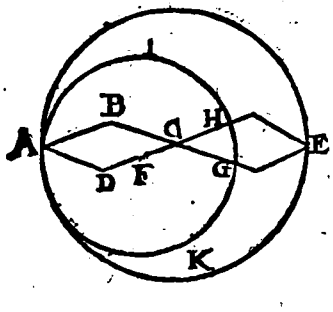
DVAE rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

NVLLAM prorsus habet difficultatem hoc principium: Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coëant ad efficiendum angulum, necessariò ex altera parte semper magis ac magis disiungentur, si producantur, vt in exemplo proposito perspicuum est. Quare vt superficies, spatiúmve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda est. Ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demonstrat hoc principium, hoc modo: Si fieri potest, vt duæ lineæ rectæ claudant superficiem, comprehendant duæ rectæ A B C, A D C, superficiem A B C D, ita vt duæ illæ rectæ coëant in duobus punctis A, & C. Facto deinde centro C,[a] describatur circulus interuallo C A,[b] & producantur rectæ A B C, A D C, in rectum, & continuum vsque ad circunferentiam, nempe ad puncta E, & F. Itaque quia rectæ A C E, A C F, transeunt per centrum C,[c] erunt semicirculi A E, A E F, inter se æquales, & idcirco circunferentia quoque A E, circunferentia A E F, æqualis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo rectæ duæ lineæ spatium comprehendunt. Quod est propositum.



a 3.petit.
b 1.petit.
c 17.defin.

SED quia fortassis aduersarius dicet, rectas A B C, A D C, productas coire iterum in aliquo puncto circunferentiæ, vt in E, vel F, atque adeò non sequi, partem æqualem esse toti, demonstrabimus tunc idem Axioma hoc modo: Coëant ergo duæ illæ lineæ iterum, si fieri potest, in E. Sumpto puncto F, in recta A D C, quocunque, erit A F, minor, quàm F E, cùm minor sit, quàm A F C, hoc est, quàm C H E, quæ ipsi A F C, æqualis est, atque adeò multò minor, quàm F E. Circulus igitur ex F, ad interuallum F A, descriptus secabit rectam F E, in H, atque adeò C G E, in G. Quoniam igitur A F H, diameter circuli est, erit A I H, semicirculus, vt ad definit. 17. ostendimus: Portio autem A I G, quam aufert recta A B G, & in qua centrum non est, semicirculo minor, vt ad definit. 18. demonstrauimus. Est ergo circunferentia A I G, minor quàm A I H, pars q̃ totum, quod est absurdum. Quòd autem minor sit portio A I G, semicirculo, ostendemus, vt suprà. Nam ducta ex centro F, ad rectam A B G, perpendiculari & circumuoluta portione A I G, circa rectam A B G, cadet circunferentia A I G, intra circunferentiam A K G, ne pars maior sit quàm totum, vt suprà demonstrauimus.

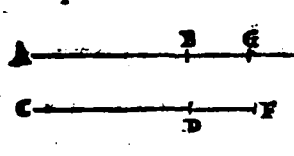


CONSTAT hoc etiam Axioma ex definitione lineæ rectæ. Cùm enim recta linea sit breuissima extensio ab vno puncto ad aliud, duci poterit vnica tantùm linea ab vno puncto ad aliud. Quare si A B C, recta est, non erit A D C, recta. Quod etiam patet ex definitione Platonis. Nam si A B C, est recta, obumbrabunt media illius extremitates eiusdem. Igitur media puncta lineæ A D C, non obumbrant extrema, cùm visus per rectam A B C, feratur. Non ergo recta est A D C.

HIS Axiomatis ab Euclide positis adiungemus nos nonnulla alia ex aliis Geometris decerpta, non minùs necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atq; Theorematum cùm Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quàm ea, quæ nobis tradidit Euclides.

XV.

SI æqualibus inæqualia adiiciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis.



HOC, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaque quantitatibus A B, C D, addantur inæquales B E, D F, sit q̃ B E, maior quàm D F. Et ex B E, auferatur B G, æqualis ipsi D F, vt sit G E, excessus, quo quantitas addita B E, superat quantitatem additam D F. Quoniam igitur æqualibus A B, C D, addita sunt æqualia B G, D F,[d] erunt tota A G, C F, æqualia. Quare constat, totam quantitatem A E, superare totam C F, eodem excessu G E, quò magnitudo D F, adiuncta à magnitudine adiuncta B E, superatur. Quod est propositum.

d 2.pron.

XVI.

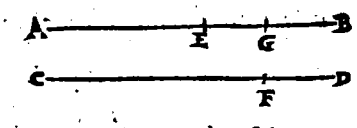
SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ à principio erant, æqualis.

IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus B E, D F, addantur æquales A B, C D. Et ex maiore B E, auferatur B G, æqualis ipsi D F, vt G E, sit excessus, quo quantitas B E, quantitatem D F, superat. Quo-

a 2.pron. *niam igitur æqualibus B G, D F, addita ſunt æqualia A B, C D,* [a] *erunt tota A G, C F, æqualia. Quamobrem tota quantitas A E, ſuperabit totam C F, eodem exceſſu G E, quo maior quantitas propoſita B E, minorem D F, ſuperat. Quod eſt propoſitum.*

XVII.

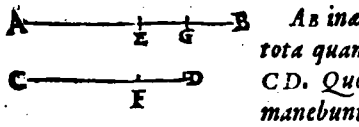
SI ab æqualibus inæqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus, exceſſui ablatorum æqualis.



b 3.pron. *A B æqualibus A B, C D, auferatur inæqualia B E, D F. Sitq; E G, exceſſus, quo quantitas B E, ſuperat quantitatem D F; ita vt B G, æqualis ſit ipſi D F. Quia igitur ab æqualibus A B, C D, ablata ſunt æqualia B G, D F,* [b] *remanebunt A G, C F, æqualia. Perſpicuum ergo eſt, reſiduum A E, ſuperari à reſiduo C F, eodem exceſſu E G, quo magnitudo ablata B E, ablatam magnitudinem D F, ſuperat. Quod eſt propoſitum.*

XIIX.

SI ab inæqualibus æqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis.



c 3.pron. *A B inæqualibus A B, C D, auferatur æqualia A E, C F, Sitq; B G, exceſſus, quo tota quantitas A B, ſuperat totam quantitatem C D, ita vt A G, æqualis ſit ipſi C D. Quoniam igitur ab æqualibus A G, C D, ablata ſunt æqualia A E, C F,* [c] *remanebunt E G, F D, æqualia. Quare reſiduum E B, ſuperabit reſiduum F D, eodem exceſſu B G, quo tota quantitas A B, ſuperat totam quantitatem C D. Quod eſt propoſitum.*

In his quoque quatuor proximè poſitis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda eſt vna etiam ſola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adjiciantur, erit totorum exceſſus adiunctorum exceſſui æqualis. Et ſi inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ à principio erant, æqualis. Et ſi ab eodem communi inæqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis. Et ſi ab inæqualibus idem commune demtur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis. Nam in numeris, ſi ad 6. addas 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum exceſſus eſt 2. idem qui ipſorum 5. & 3. Rurſus, ſi ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorum exceſſus 2. idem eſt, qui ipſorum 5. & 3. Item ſi ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 5. & 2. Denique ſi ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 10. & 7.

XIX.

OMNE totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

QVONIAM omnes partes ſimul ſumptæ conſtituunt totum, cuius ſunt partes, manifeſta eſt veritas huius axiomatis.

XX.

SI totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquũ reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. duplus eſt totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiam eſt reliqui huius 7. In vniverſum autem hoc demonſtrabitur propoſ. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æquè multiplex ſit, atque ablata ablatæ, vt decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliquæ æquè multiplex erit, atque tota totius.

COLLIGI poteſt ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc diſcrimen, inter poſtulata, & Axiomata, quòd cùm vtraque ſint per ſe nota, & indemonſtrabilia, illa naturam ſapiunt Problematum, propterea quòd aliquid fieri expoſcant; hæc verò, Theoremata imitantur; cùm nihil fieri petant, ſed ſolùm ſententiam aliquam notiſſimam proponant. Differt autem Poſtulatum à problemate, quòd conſtructio poſtulati non indigeat vlla demonſtratione, problematis autem conſtructionem concedat nemo ſine demonſtratione, eò quòd difficile aliquid nobis exhibeat conſtruendum. Idem diſcrimen inter Axioma, & Theorema reperitur. Illud enim demonſtrari non debet, hoc verò concedendum nulla eſt ratione, niſi demonſtretur. Nam nemo huius propoſitionis demonſtrationem, vel etiam probationem requiret. Quæ eidem æqualia, inter ſe quoque æqualia ſunt. Huius autem ſtatim demonſtrationem deſiderabit quis. Omnis triangulus tres anguli interni æquales ſunt duobus rectis. Idem iudicium habeto de reliquis axiomatis, atque Theorematis, nec non de poſtulatis, problematisq;

CONSTAT quoque, Poſtulatorum alia propria eſſe Geometriæ, qualia ſunt illa tria, quæ Euclides nobis propoſuit; quædam verò communia, & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiuſmodi eſt hoc, Quantitatem poſſe infinitè augeri. Tam enim numerus, quàm magnitudo, per additionem augeri poteſt, ita vt nunquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de Axiomatis, ſiue pronunciatis. Nam octauum, decimum, vn-

decimum,

decimum, duodecimum, tertiumdecimum, & quartumdecimum ſoli Geometriæ conueniunt: Reliqua verò omnia, adhibentur & ad demonſtrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ à magnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, ſiue hæ magnitudines lineæ ſint, ſiue ſuperficies, ſiue corpora; ita quoque numeri æquales detracti è numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.

HÆC dicta à nobis ſint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonſtrationes accedamus, ex quibus pleniùs, perfectiusq; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiuſmodi, vt planè non intelligantur, niſi priùs eorũ vſus appareat in demonſtrationibus; id quod ſatis te experientia docebit.

ANTEQVAM porrò ad propoſitiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandũ eſt, quemnam ordinem, ac modum in ipſis demonſtrationibus ſimus ſecuti. Primùm cuilibet propoſitioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus ſignificat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum eſt ſecutus in Euclidis propoſitionibus, alter verò in ipſa propoſitionum ſerie deſcriptus refert diſpoſitionem propoſitionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obſeruari cernimus in codicibus Græcis. Id verò eo conſilio à nobis eſt factum: quoniam cùm à quibuſdam Geometris propoſitiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab aliis verò iuxta Theonis ſeriem citentur, maximéque interdum duo hi interpretes inter ſe diſcrepent, in ſerie atque ordine propoſitionum, id quod maximè in 6.7. & 10. libro perſpicitur; neceſſarium eſſe duximus, vt vtriuſque interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt ſi quando numerus propoſitionum à Geometra quopiam citatus non reſpondet alteri interpreti, alteri ſaltem conueniat. Deinde ne curſus demonſtrationum interrumperetur, citauimus principia, & propoſitiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi ſemper literula aliqua alphabeti, vel alio quouis ſigno, cui ſimilis literula, ſeu ſignum reſpondet in demonſtratione, vt facilius cognoſcatur, ad quem locum qualibet citatio ſit referenda. Porrò citationes intelligendæ ſunt hoc modo:

1. defin.	Prima definitio, & ſic de alijs numeris, vt 4. defin. 23. defin. &c.
1. petit.	Prima petitio, vel primum Poſtulatum.
1. pronun.	Primum pronunciatum, ſeu axioma, & ita de reliquis numeris, vt priùs.
1. primi.	Prima propoſitio primi libri.
23. Vndec.	Vigeſimatertia propoſitio vndecimi libri.
6. tertiædec.	Sexta tertiædecimi libri.
9. ſextidec.	Nona ſextidecimi libri.
13. duodec.	Decimatertia libri duodecimi.
7. quindec.	Septima libri quindecimi.
5. quartidec.	Quinta libri quartidecimi, &c.

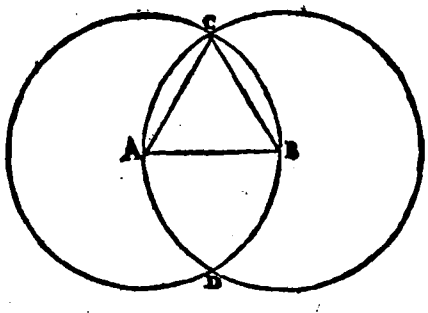
Ex his aliæ citationes à quolibet facilè poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus eſt ratio.

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

SVPER data recta linea terminata triangulum Æquilaterum conſtituere.

IN omni problemate duo potiſsimùm ſunt conſideranda, conſtructio illius, quod proponitur, & demonſtratio, qua oſtenditur, conſtructionem rectè eſſe inſtitutam. Vtquoniam primum hoc problema iubet conſtituere triangulum æquilaterum ſuper data recta linea terminata quacunque, ita vt linea recta propoſita ſit vnum latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur conſtitui ſuper recta linea, quando ipſa linea efficitur vnum figuræ latus) idcircò primùm oportet conſtruere ex principiis conceſsis triangulum aliquod, deinde demonſtrare, ipſum ea ratione conſtructum, eſſe æquilaterũ, hoc eſt, habere omnia tria latera inter ſe æqualia. Quod idem in aliis problematibus perſpici poteſt. Hæc etiam duo reperiuntur ferè in omni Theoremate. Sæpenumerò enim vt demonſtretur id, quod proponitur, conſtruendum eſt, atq; efficiendum priùs aliquid, ceu manifeſtum erit in ſequentibus. Pauca verò admodum ſunt theoremata, quæ nullam requirant conſtructionem.

SIT igitur propoſita recta linea terminata AB, ſuper quam conſtituere iubemur triangulum



æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ A B, [a] describatur circulus C B D: Item centro B, & interuallo eiusdem rectæ B A, alius circulus describatur C A D, secans priorem in punctis C, & D. Ex quorum vtrouis, nempe ex C, [b] ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B, ad puncta A, & B; [c] Eritque super rectam A B, constitutum triangulum A B C, hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessariò esse æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circunferentiam circuli C B D, [d] erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rursus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circunferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A, æqualis. [e] Tam igitur A C, quàm B C, æqualis est rectæ A B. [e] Quare & A C, B C, inter se æquales erũt, atque idcircò triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

a 3. petit.
b 1. petit.
c 20. definit.
d 15. definit.
e 1. pronun.

SCHOLIVM.

Vt autẽ videas, plures demonstrationes in vna propositione contineri, placuit primã hanc propositionem resoluere in prima sua principia, initio facto ab vltimo syllogismo demõstratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulum A B C, constructum methodo praedicta, esse aquilaterum, vtetur hoc syllogismo demonstrante.

Omne triangulum habens tria latera aequalia, [a] est aquilaterum.
Triangulum A B C, tria habet aequalia latera.
Triangulum igitur A B C, est aquilaterum.

a 23. defin.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo:

Quae eidem aequalia sunt, [b] inter se quoque sunt aequalia.
Duo latera A C, B C, aequalia sunt eidem lateri A B.
Igitur & duo latera A C, B C, inter se aequalia sunt. Ac propterea omnia tria latera A B, B C, aequalia existunt.

b 1. pron.

Minorem verò huius syllogismi hac ratione colliget:

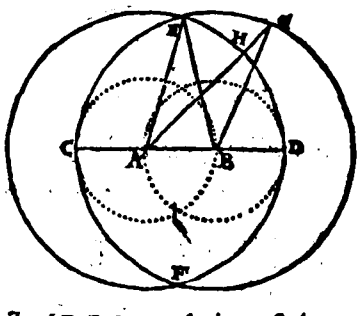
Linea recta à centro ducta ad circunferentiam circuli, [c] inter se sunt aequales.
Linea A B, A C, sunt ductæ à centro A, ad circunferentiam C B D.
Sunt igitur linea A B, A C, aequales inter se.

c 15. defin.

Eadémque ratione erunt linea A B, B C, aequales, cùm ducantur à centro B, ad circunferentiam C A D. Quamobrem minor praecedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolui poterunt omnes alia propositiones, non solùm Euclidis, verùm etiam caeterorum Mathematicorum. Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eò quòd breuius, ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, vt perspicuũ esse possit ex superiori demonstratione.

Si quis autem super data recta desideret constituere triangulum quoque Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, vti priùs. [d] Deinde producatur A B, in vtramque partem ad circunferentias vsq; ad puncta C, & D. Atque centro A, interuallo verò A D, [e] describatur circulus E D F. Item centro B, interuallo verò B C, circulus E C F, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E, [f] ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E b. Factumq; erit super recta A B, [g] triangulum A B E; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera A E, B E, esse & aequalia inter se, et maiora latere A B. Cùm enim rectæ A E, A D, ducantur è centro A, ad circunferentiam E D F, [h] erit A E, aequalis rectæ A D. Item cùm rectæ B E, B C, ducãtur è centro B, ad circunferentiam E C F, [i] erit B E, aequalis rectæ B C: Sunt autem rectæ A D, B C, aequales inter se, (vtraque enim A C, & B D, aequalis est rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circunferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circunferẽtiam quoque egrediantur. [k] Quare A C, B D, aequales inter se erunt. Addito igitur communi rectæ A B, [l] erit tota A D, toti B C, aequali.) [m] Igitur A E, B E, aequales quoq; inter se erunt. Quòd verò vtraque A E, B E, maior sit, quàm A B, perspicuum est, cùm A D, aequalis ostensa ipsi A E, [n] maior sit, quàm A B; Item B C, aequalis demonstrata ipsi B E, [o] maior quoque sit, quàm A B. Constitutum igitur est super recta A B, Isosceles A B E, habens duo latera A E, B E, aequalia inter se, & maiora latere A B, quod faciendum erat. Atq; hac est demonstratio Procli, aliorúmque interpretum Euclidis.



d 2. petit.
e 3. petit.
f 1. petit.
g 20. defin.
h 15. defin.
i 15. defin.
k 1. pron.
l 2. pronun.
m 1. pron.
n 9. pron.
o 9. pron.

Brevivs tamen videtur mihi posse demonstrari, triangulum A B E, esse Isosceles, hac ratione. [p] Quoniam A E, aequalis est rectæ A D, & rectæ A D, est dupla rectæ A B, propterea q; B A, B D, aequales inter se sunt; erit & A E, dupla rectæ A B. Rursus [q] quia B E, aequalis est rectæ B C, & B C, dupla est ipsius A B, propterea q; [r] A B, A C, aequales sunt inter se, erit & B E, dupla ipsius A B. Cùm igitur vtraq; A E, B E, dupla sit eiusdem A B, [s] erunt A E, B E, inter se aequales, maioresq; propterea rectæ A B. Isosceles ergo est triangulum A B E.

p 15. defin.
q 15. defin.
r 15. defin.
s 6. pron.

IAM verò, si ex puncto A, [a] ducatur linea recta A G, ad circunferentiam E G F, quæ non sit eadem quæ A E, vel A D, secans circunferẽtiam E H D, in puncto H, & ex G, ad B, [b] ducatur alia recta G B, [c] constitutum erit triangulum A B G, super rectâ A B, quod dico esse scalenum. [d] Quoniam A G, maior est, quàm A H: [e] Sunt autem A H, A E, ex centro A, ductæ, inter se æquales; erit & A G, maior quàm A E, hoc est, quàm B E, quæ ostensa est æqualis ipsi A E; igitur & maior erit A G, quàm B G, [f] cùm B G, sit æqualis ipsi B E. Est autem & B G, maior, quàm A B, quòd tota B C, æqualis ipsi B G, & maior sit, quàm A B, pars. Omnia ergo tria latera trianguli A B G, inæqualia sunt, ideoq; scalenum est ex definitione; quod erat faciendum.

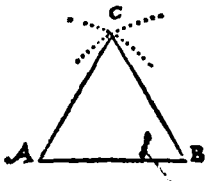
a 1. petit.
b 1. petit.
c 20. defin.
d 9. pron.
e 15. defin.
f 15. defin.
g 9. pron.

BREVIVS quoq; ostendemus, triangulum A G B, esse scalenum, hac ratione. Quoniam tam [h] A H, A D, ex centro A, ductæ, sunt æquales, quàm B G, B C, ex centro B, ductæ: Sunt autem A D, B C, ipsius A B, duplæ, quòd A B, vtrique B D, A C, æqualis sit; erunt quoque A H, B G, ipsius A B, duplæ, ac propterea maiores, quàm A B. Cùm ergo [i] A G, maior sit, quàm A H, siue quàm B G, scalenum erit triangulum A G B, habẽs latus A G, maximum, B G, medium, & A B, minimum.

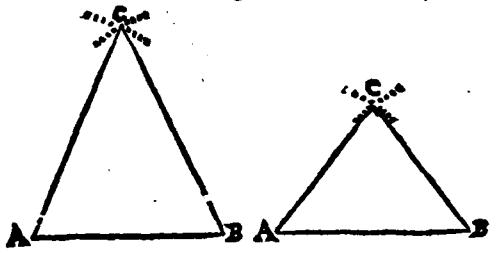
h 15. defin.
i 9. pron.

PRAXIS.

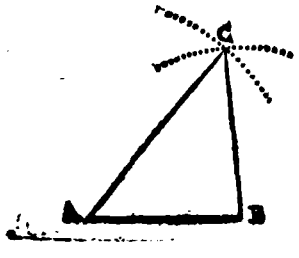
CONABIMVR in singulis ferè problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & breuem, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atq; lineis contendit construere; Idq; in ijs præsertim obseruabimus, quæ frequentiorem vsum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod secum videtur afferre.



ITAQVE triangulum æquilaterum ità facilè construetur super data recta A B. Ex centris A, & B, interuallo verò data rectæ A B, describantur duo arcus circulorum se intersecantes in puncto C, siue hoc infra lineam contingat, siue supra. Post hæc ducantur duæ rectæ A C, B C, ex puncto C, ad puncta A, & B; factumq; erit, quod proponitur. Cuius rei eadem est demonstratio cum superiori, si modò circuli essent integri, ac perfecti. Transirent enim necessariò per puncta A, & B.



ISOSCELES sic conficietur. Ex centris A, & B, interuallo verò maiore quàm A B, si data recta esse velimus minus latus; vel minore, si eandem in latus maius eligamus, describantur duo arcus secantes se in C. Postea ducantur rectæ A C, & B C; constructúmque erit Isosceles: quoniam A C, B C, æquales erunt propter æquale interuallum assumptum, maius scilicet aut minus, quàm recta A B.

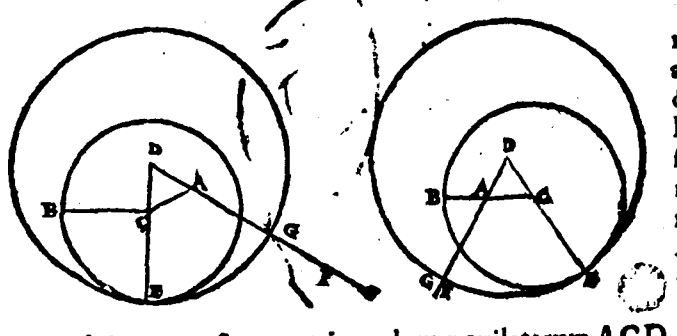


SCALENVM denique hoc modo fabricabitur super data rectâ A B. Ex centro B, interuallo verò maiore, quàm B A, describatur arcus aliquis: Item ex centro A, interuallo verò adhuc maiore, quàm priùs assumptum, describatur alter arcus priorem secans in C. Deinde ducantur rectæ A C, B C; constitutúmque erit Scalenum, vt constat ex inæqualitate interuallorum, quæ assumpta fuerunt ex constructione.

CAETERVM quo pacto triangulum constitui debeat, habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuscunque, singula singulis, latiùs explicabimus propositione 22. huius libri.

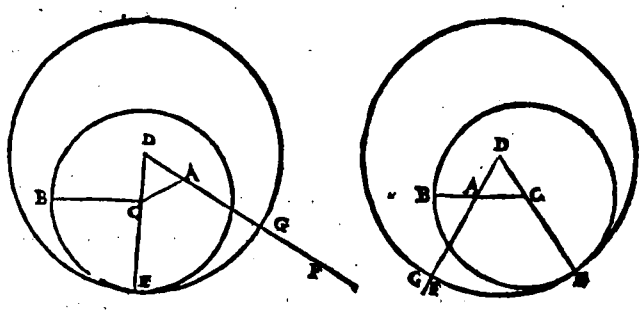
PROBL. 2. PROPOS. 2.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.



SIT punctum datum A, & data recta linea B C, cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ B C, nempe C, centro [a] describatur circulus B E, interuallo rectæ B C. Et ex A, ad centrum C, [b] recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur A C, vt secunda figura indicat.) Super recta verò A C, [c] constituatur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modò constituta D A, D C, versus rectam A C, [d] extendantur; D C, quidem opposita puncto dato A, vsque ad circunferentiam in E; D A, verò opposita centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D, interuallo verò rectæ D E, per C, centrum transeuntis, [e] alter cir-

a 3. petit.
b 1. petit.
c 1. primi.
d 2. petit.
e 3. petit.



culus describatur E G, secans rectam D F, in G. Dico rectam A G, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro D, ad circunferẽtiam E G, [a] ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur D A, D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri A C D, [b] remanebit A G, æqualis rectæ C E. Sed eidem C E, [c] æqualis est recta B C. (cùm ambæ rectæ C B, C E, cadant ex centro C, ad circunferentiam B E.) Igitur rectæ A G, B C, quandoquidem vtraque æqualis est ostensa rectæ C E, inter se [d] æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

a 15. definit.
b 3. pronun.
c 15. definit.
d 1. pronun.

QVOD si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facilè absoluetur problema. Si enim centro C, & interuallo C B, [e] describatur circulus, ad cuius circunferẽtiam recta [f] ducatur vtcunque C E, erit hæc posita ad punctum datum C, [g] æqualis datę rectæ B C, cum vtraque & B C, & C E ex eodem centro egrediatur ad circunferentiam B E.

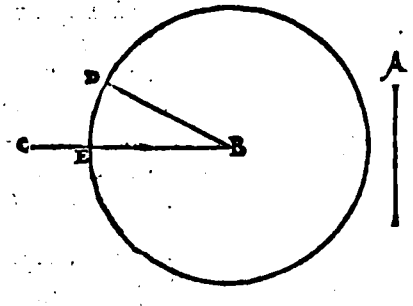
e 3. petit.
f 1. petit.
g 15. definit.

SCHOLIVM.

HVIVS problematis varij esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut enim datũ punctũ in ipsa data recta est positum, aut extra ipsam: Si in ipsa, erit vel alterum extremorũ eius, vel inter vtrumque iacebit extremum. Si verò extra ipsam, erit vel è directo datæ lineæ, ita vt producta in rectum, & continuum per ipsum punctum transeat; vel non è directo, ita vt ab ipso ad datæ lineæ extremorum quoduis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra datam lineam erit constitutum, vel infra, vt manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quòd si in constructione fiat triangulum A C D, super rectam A C, Isosceles, eadem modo ostendemus, rectam A G, rectæ B C, æqualem esse.

3. PROBL. 3. PROPOS. 3.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.



SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oporteatq; ex maiore B C, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris B C, nempe ad punctum B, [h] ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus [i] describatur secans B C, in E. Dico B E, detractam esse æqualem ipsi A. Quoniam B E, [k] æqualis est rectæ B D, & eidem B D, æqualis est recta A, [p] constructionem; [l] erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis, &c. quod erat faciendum.

h 2. primi.
i 3. petit.
k 15. definit.
l 1. pronun.

QVOD si duæ rectæ datæ coniungantur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, coniunctæ in extremo vtriusque B; describẽdus erit circulus ex B, ad interuallũ minoris B D. Hic enim auferet B E, æqualem ipsi B D, vt constat ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cùm duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alteram contingat; vel non, sed vel coniungantur ad vnum extremum, vel se mutuò secent, vel certè altera alteram suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

4. THEOREMA 1. PROPOS. 4.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant verò & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

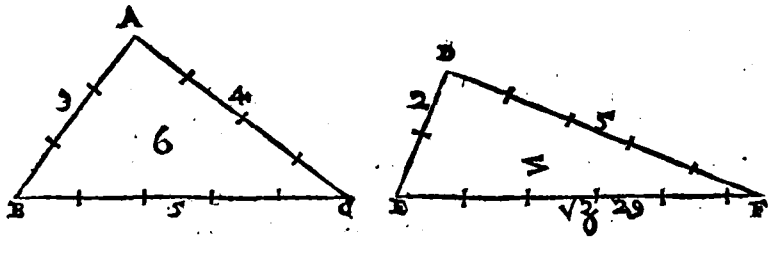
SINT duo triangula A B C, D E F, & vnius vtrumque latus A B, A C, æquale sit alterius vtrique lateri D E, D F, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; angulusque A, contentus lateribus A B, A C, æqualis angulo D, contento lateribus D E, D F. Dico basim B C, æqualem quoque esse basi E F; & triangulum A B C, triangulo D E F; & vtrumque angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, id est,

id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus A C, D F, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus A B, D E, inter se quoque esse æquales. Quoniam enim recta A B, rectæ D E, ponitur æqualis, fit, vt si altera alteri superponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, [a] ipsæ sibi mutuò congruant, punctumque B, in punctum E, cadat. Neque enim dicere quis poterit, partem rectæ A B, rectæ D E, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem segmentum commune, [b] quod est impossibile. Quòd si quis dicat, posito puncto A, in D, cadere quidem punctum B, in E, sed rectam A B, cadere vel ad dextram, vel ad sinistram D E, claudent duæ rectæ lineæ superficiem. [c] quod fieri non potest. Quare recta A B, rectæ D E, congruet, vt dictū est. Cùm ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [d] congruet quoque alter alteri, hoc est, recta A C, rectæ D F, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum A C, D F. Basis igitur B C, basi E F, congruet quoque: aliàs si suprà caderet, aut infrà, vt efficeretur recta E G F, vel E H F, clauderent duæ rectæ E F, E G F; vel E F, E H F, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam E G F, quàm E H F, rectam esse, cùm vtraque ponatur esse eadem, quæ recta B C.) quod est absurdum. Duæ enim rectæ superficiem [e] claudere non possunt. Quocirca [f] basis B C, basi E F, æqualis erit, cùm neutra alteram excedat; & triangulum A B C, triangulo D E F; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis, ob eandem causam, existet. Quare si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 8. pronun.
[b] 10. pron.
[c] 14. pron.
[d] 8. pronun.
[e] 14. pron.
[f] 8. pronun.

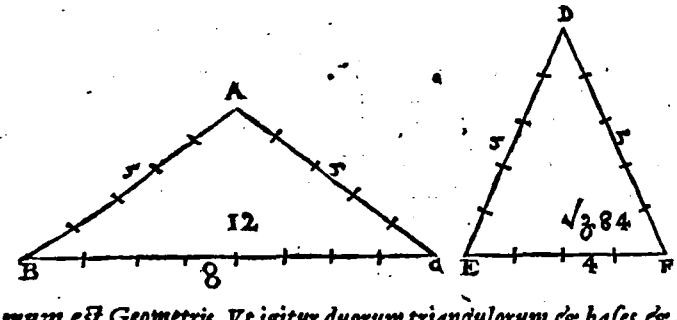
SCHOLIVM.

RECTE Euclides duas conditiones posuit in antecedente huius theorematis, quarum prima est, vt duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique; Secunda, vt angulus etiam vnius contentus illis lateribus æqualis sit angulo alterius contento lateribus, quæ istis sunt æqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt vnquam esse æquales, vt probè hoc loco à Proclo demonstratur: Triangula verò ipsa licèt possint esse æqualia, posteriore duntaxat conditione deficiente, vt ex scholio propositi 37. huius libri constabit, tamen rarò admodum illud continget. Sint enim triangulorum A B C, D E F, anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera A B, A C, æqualia lateribus D E, D F, non quidem vtrumque vtrique, sed



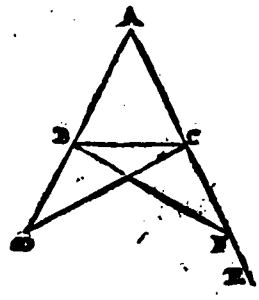
illa simul sumpta hisce simul sumptis, sit q. A B, 3. A C, 4. vt ambo simul efficiant 7. At verò D E, sit 2. & D F, 5. vt ambo quoque simul 7. constituant. Quibus positis, erit basis B C, 5. & basis E F, radix quadrata huius numeri 29. quæ maior quidem est, quàm 5. minor autem, quàm 6. Item area trianguli A B C, erit 6. area verò trianguli D E F, 5. Anguli denique super basim B C, inæquales erunt angulis super basim E F. Quæ quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requirerentur multa, quæ nondum sunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia esse, propterea quòd non vtrunque latus vtrique lateri æquale existit in dictis triangulis A B C, D E F.

RVRSVS triangulorum A B C, D E F, latera A B, A C, æqualia sint lateribus D E, D F, vtrumque vtrique, sit q. vnumquodq. 5; anguli verò A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, sit q. A, maior, quàm D. Quibus concessis, erit basis B C, maior basi E F, vt propositi 24. huius libri ostendetur. Quòd si basim B C, ponamus esse 8. basim autē E F, 4. erit area trianguli A B C, 12. area verò trianguli D E F, radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem est, q. 9. minor verò, quàm 10. id quod notissimum est Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & bases, & anguli, nec non triangula ipsa æqualia inter se sint, necesse est, vt vtrumque latus vnius æquale sit vtrique lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales existant, vt optimè dixit Euclides.



THEOR. 2. PROPOS. 5.

ISOSCELIVM triangulorū, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.



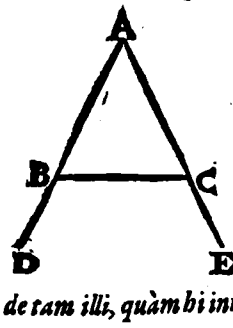
SIT triangulum Isosceles A B C, in quo duo latera A B, A C, inter se sint æqualia. Dico angulos A B C, A C B, supra basim B C, æquales inter se esse: Item si latera æqualia A B, A C, producantur quantum libuerit, vsque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C, E C B, infra basim eandem B C, esse æquales. Ex linea enim A E, producta infinitè [a] abscindatur A F, æqualis ipsi A D, [b] & ducantur rectæ B F, C D. Considerentur deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B, A F, trianguli A B F, æqualia sunt duobus lateribus A C, A D, trianguli A C D, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi A C, ex hypothesi, & A F, ipsi A D, ex constructione; angulusque A, contentus lateribus A B, A F, æqualis est angulo A, contento lateribus A C, A D, immò angulus A, communis est vtrique triangulo: [c] Erit basis B F, æqualis basi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D: cùm & priores duo, & posteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet. Rursus considerentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam verò rectæ A D, A F, æquales sunt, per constructionem, fit vt, si auferantur ex ipsis æquales A B, A C, [d] & reliquæ B D, & C F, sint æquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia sunt duobus lateribus C F, F B, trianguli C F B, vtrumque vtrique, videlicet B D, ipsi C F, & D C, ipsi F B, vt probatum est: Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis lateribus æqualibus æquales, vt ostensum etiam fuit. Igitur erit angulus [e] D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D, angulo C B F. Tam enim priores duo, quàm posteriores, æqualibus opponuntur lateribus, existuntq; supra communem basim B C, vtriusque trianguli B D C, C F B. Quòd si ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales esse iam demonstrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales C B F, B C D, (quos itidem in posterioribus triangulis modò probauimus esse æquales) [f] remanebunt anguli A B C, A C B, supra basim B C, æquales: Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem sunt infra eandem basim B C, esse æquales. Igitur & anguli supra basim inter se, & anguli infra eandem inter se sunt æquales; Ac propterea Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt, anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 3. primi.
[b] 1. petit.
[c] 4. primi.
[d] 3. pronun.
[e] 4. primi.
[f] 3. pronun.

SCHOLIVM.

HAEC propositio vera etiam est in triangulis æquilateris, cùm in quolibet reperiantur duo latera inter se æqualia, licèt eam Euclides solis Isoscelibus triangulis videatur accommodasse. Existentibus enim duobus lateribus A B, A C, trianguli A B C, æqualibus, siue reliquum latus B C, ipsis quoque sit æquale, vt contingit in triangulo æquilatero, siue inæquale, vt in Isoscele accidit, necessariò consequitur, & angulos supra basim inter se, & angulos infra eandem inter se quoque esse æquales, vt constat ex demonstratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus subdifficile, & obscuriusculum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum sunt assueti. Veruntamẽ, si diligenter theorematis præcedentis vis ac demonstratio perpenderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, à quolibet percipietur, si modò memor sit, illos angulos triangulorum probari æquales esse, in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur. Quod quidem quoniam Campanus non apposuit, causa fuit, vt confusa esse videatur, & subobscura eius demonstratio.

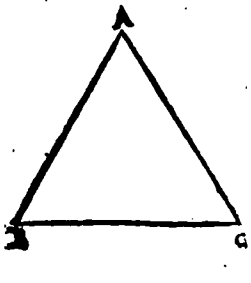
VERITAS porrò huius theorematis, quoad vtramque partem facile quoque demonstrari potest per suæ perpositionẽ, vt demonstrata fuit propositio 4. Sint enim rursum in triangulo A B C. duo latera æqualia A B, A C, quæ producantur quantũlibet vsq; ad D, & E. Dico tam angulos, A B C, A C B, supra basim B C, inter se æquales esse, q̃ angulos D B C, E C B, infra eandem basim. Si enim concipiamus mẽte triangulum A B C, triangulo A C B. (ita vt idem triangulum sit instar duorum) superponi, ita vt recta A B, recta A C, superponatur, cadet punctum B, in C, ob æqualitatem laterum A B, A C. Quo posito cadet recta A C, super rectam A B, ob æqualitatem, siue identitatem anguli A; atq; punctum C, in punctum B, incidet, propter æqualitatem laterum A C, A B. Quapropter angulus A B C, angulo A C B, & angulus D B C, angulo E C B, congruet, [a] ac proinde tam illi, quàm hi inter se æquales erunt.



[a] 8. pron.

COROLLARIVM.

Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoq;: Hoc est, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera A B, A C, sunt æqualia. [b] erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera A B, B C, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat.

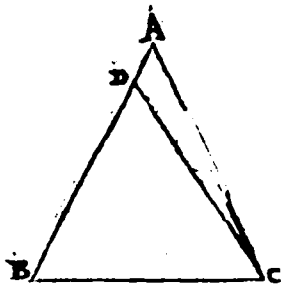


[b] 5. primi.

THEOR.

THEOR. 3. PROPOS. 6. 6.

SI trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint: & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.



IN triangulo A B C, ſint duo anguli A B C, A C B, ſuper latus B C, æquales. Dico duo latera illis oppoſita A B, A C, eſſe quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, exiſtentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; ſit igitur A B, maius quàm A C, ſi fieri poteſt: Et ex A B, [a] abſcindatur in D, recta B D, æqualis rectæ A C, (quæ minor dicitur eſſe, quàm A B,) ducaturq; recta C D. Conſiderentur iam duo triangula A C B, D B C. In quibus cùm duo latera A C, C B, trianguli A C B, æqualia ſint duobus lateribus D B, B C, trianguli D B C, vtrumque vtrique, nempe A C, ipſi D B, (abſcidimus enim ex A B, ipſi A C, conceſſu aduerſarij, æqualem D B,) & C B, ipſi B C, cùm ſit vnũ & idem; Sint autẽ & anguli A C B, D B C, contenti dictis lateribus æquales, per hypotheſin: [b] Erunt triangula A C B, D B C, æqualia, totũ, & pars, quod fieri non poteſt. Non igitur erunt latera A B, A C, inæqualia, ſi anguli B, & C, ſuper latus B C, æquales ſunt, ne totum parti æquale eſſe concedamus: ſed æqualia exiſtent. Quare ſi trianguli duo anguli, &c. Quod demonſtrandum erat.

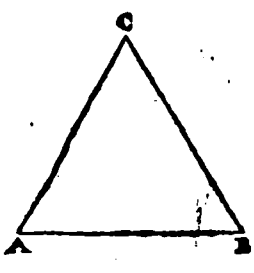
[a] 3. primi.

[b] 4. primi.

SCHOLIVM.

CONVERTIT hoc theorema primam partem precedentis. Nam ibi demonſtratum eſt, ſi duo latera trianguli inter ſe æqualia fuerint, angulos, qui ad baſim ſunt, eſſe quoque æquales: Hic verò, ſi anguli ad baſim ſint æquales, latera quoque angulis illis oppoſita eſſe æqualia. Non autem mirum alicui debet videri, ſi Mathematici interdum conuertunt propoſitiones, ita vt nunc ex antecedente quopiam conceſſo colligant p demonſtrationem conſequens aliquod, nunc verò rurſus ex conſequente hoc conceſſo inferant per aliam demonſtrationem antecedens illud, vt ab Euclide in hiſce duabus proximis propoſitionibus factum eſſe conſpicimus: Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non ſemper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & conſequens. Nam in propoſitionibus neceſſariis, quales ſunt propoſitiones Geometricæ, poteſt interdum prædicatum eſſe vniuerſalius ſubiecto, vt cum Dialecticis loquamur. Quare tunc non poterit conuerti propoſitio. Nam neceſſaria eſt hæc propoſitio; (Omnis homo eſt animal.) non tamen conuerti poteſt vniuerſaliter, cùm non omne animal ſit homo. Ità quoque fieri poteſt in propoſitionibus Geometricis neceſſariis: Cuius ego rei vnum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonſtrat Euclides propoſit. 16. huius libri. Si trianguli cuiuſuis vnum latus producatur, angulum externũ maiorem eſſe duobus internis ſibi oppoſitis; In qua quidem propoſitione nullo modo antecedens, & conſequẽs reciprocantur. Non enim ſequitur, ſi figuræ cuiuſuis rectilineæ, vno latere producto, angulus externus maior ſit ſingulis internis oppoſitis, figuram illam eſſe triangulum, cùm poſſit etiam eſſe quadrilatera figura, vt ad propoſit. 16. huius libri oſtendemus. Eodemq; modo multæ aliæ propoſitiones conuerti nequeũt. Quã ob rem neceſſe eſt, vt priùs demonſtret Geometra propoſitionem aliquam conuerti, hoc eſt, antecedens & conſequens illius reciprocari, antequam ex conſequente conceſſo colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propoſitiones, quæ conuerti poſſunt, ſed eas duntaxat, quarum conuerſione maximè indiget: Nos tamen dabimus operam, vt ferè omnes illas conuertamus, quæ aliquam videbuntur afferre vtilitatem.

COROLLARIVM.



SEQVITVR ex hac propoſitione, omne triangulum æquiangulum, id eſt, cuius omnes anguli ſunt æquales, eſſe æquilaterum. Quod quidem conuerſum eſt corollarij quintæ propoſitionis; vt liquet. Sint enim trianguli A B C, tres anguli æquales. Dico ipſum eſſe æquilaterum. Cùm enim duo anguli B, & C, ſint æquales, [a] erunt latera A B, A C, æqualia. Rurſus cùm duo anguli A, & B, ſint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcircò omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod oſtendendum erat.

[a] 6. primi.

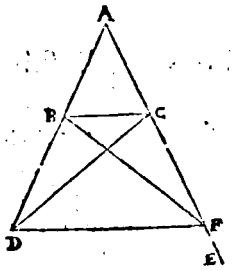
EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere ſecundam partem quintæ propoſitionis, hoc modo.

SI trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra baſim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter ſe erunt.

TRIANGVLI enim A B C, productis lateribus A B, A C, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra baſim B C, æquales. Dico latera A B, A C, eſſe quoque inter ſe æqualia. Ex C E, quantumlibet producta [b] abſcin-

[b] 3. primi.



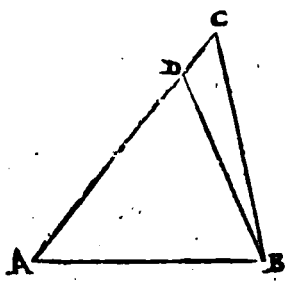
datur C F, æqualis ipſi B D, & ducantur rectæ B F, F D, D C. Conſiderẽtur deindè triangula D B C, F C B. In quibus cùm latera D B, B C, æqualia ſint lateribus F C, C B, vtrumque vtrique, nempe D B, ipſi F C, per conſtructionem, & B C, ipſi C B, quod ſit vnum & idem: ſint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypotheſim: [a] *erunt & baſes C D, B F, & anguli B C D, C B F, ſuper has baſes, cùm opponantur æqualibus lateribus B D, C F, æquales. Ablatis igitur hiſce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypotheſin æqualibus,* [b] *remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Conſiderentur rurſus triangula D B F, F C D. In quibus quoniam latera D B, B F, æqualia ſunt lateribus F C, C D, vtrumque vtrique, nempe D B, ipſi F C, per conſtructionem, & B F, ipſi C D, vt modò oſtenſum eſt; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus D B F, F C D, æquales, vt etiam fuit nuper demonſtratum:* [c] *Erit angulus B D F, ſuper baſim D F, trianguli D B F, æqualis angulo C F D, ſuper eandem baſim F D, trianguli F C D. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cùm igitur in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, ſint æquales, vt nunc oſtendimus,* [d] *erunt latera A D, A F, æqualia. A quibus ſi rectæ B D, C F, per conſtructionem, æquales demantur,* [e] *remanebunt A B, A C, latera trianguli A B C, æqualia. Quod erat oſtendendum.*

a 4. primi.
b 3. pron.
c 4. primi.
d 6. primi.
e 3. pron.

7. THEOR. 4. PROPOS. 7.

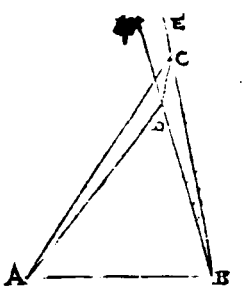
SVPER eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non conſtituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SVPER recta A B, conſtituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico ſuper eandem rectam A B, verſus partem eandem C, non poſſe ad aliud punctum, vt ad D, conſtitui duas alias rectas lineas, quæ ſint æquales lineis A C, B C, vtraq; vtrique, nempe A C, ipſi A D, quæ eundem habent terminum A; & B C, ipſi B D, quæ eundem etiam terminũ poſsident B. Sint enim, ſi fieri poteſt, rectę A C, A D, inter ſe, & rectæ B C, B D, inter ſe etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum A C, B C, ita vt recta A D, in ipſam rectam A C, vel B D, in ipſam B C, cadat: aut intra triangulum A B C; aut extra.

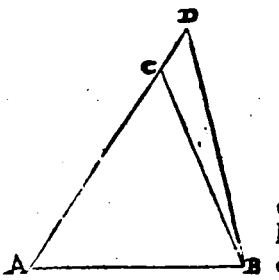


SIT primò punctum D, in altera rectarum A C, B C, nempe in A C, vt A D, ſit pars ipſius A C. Quoniam igitur rectæ A C, A D, eundẽ terminum A, habentes, dicuntur æquales, erit pars A D, toti A C, æqualis, quod fieri non poteſt.

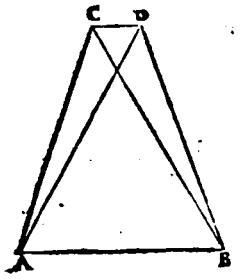
SIT deinde punctum D, intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, B D, vſque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D, ponuntur latera A C, A D, æqualia, [a] erunt anguli A C D, A D C, ſuper baſim C D, æquales; [b] Eſt autem angulus A C D, minor angulo D C E; nempe pars toto: Igitur & angulus A D C, minor erit eodem angulo D C E. Quare angulus C D F, pars ipſius A D C, multò minor erit eodem angulo D C E. Rurſus, quia in triangulo B C D, latera B C, B D, ponuntur æqualia, [c] erũt anguli C D F, D C E, ſub baſi C D, æquales. Oſtenſum autem fuit, quòd idem angulus C D F, multò ſit minor angulo D C E. Idem ergo angulus C D F, & minor eſt angulo D C E, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum.



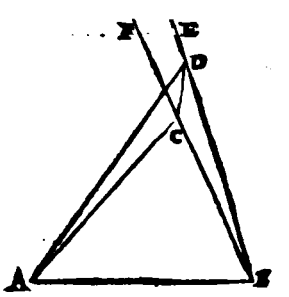
a 5. primi.
b 9. pron.
c 5. primi.



SIT poſtremò punctum D, extra triangulum A B C. Aut igitur in tali erit loco, vt vna linea ſuper alteram cadat, vt in priori figura, dummodò loco D, intelligas C, & loco C, ipſum D; ex quo rurſus colligetur pars æqualis toti, quod eſt abſurdum.



AVT in tali erit loco, vt poſteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in poſteriori figura, ſi modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo poſito, in idem abſurdum incidemus, nempe angulum D C F, & minorem eſſe angulo C D E, & eidem æqualem, vt perſpicuum eſt.



AVT denique punctum D, ita erit extra triangulum A B C, vt altera linearum poſteriorum, nempe A D, ſecet alteram priorũ, vt ipſam B C. Ducta igitur recta C D, cùm in

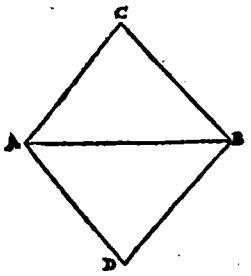
triangulo

triangulo A C D, latera A G, A D, ponãtur æqualia, [a] erunt anguli A C D, A D C, ſupra baſim C D, æquales: Ac proinde [b] cũ angulus A D C, minor ſit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multò minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rurſus, cùm in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, [c] erunt anguli B C D, B D C, ſuper baſim C D, æquales: Eſt autem iam oſtenſum, angulum B C D, multò eſſe minorem angulo B D C. Idem igitur angulus B C D, & minor eſt angulo B D C, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Non ergo æquales ſunt inter ſe A C, A D, & inter ſe quoque B C, B D. Quare ſuper eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.

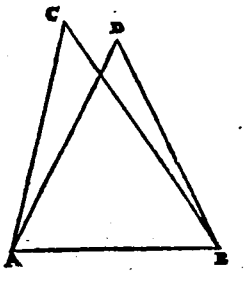
[a] 5. primi. [b] 9. pronun. [c] 5. primi.

SCHOLIVM.

FIERI poteſt, vt duæ lineæ A D, B D, æquales ſint duabus A C, B C, vtraque vtrique, vt A D, ipſi B C, & B D, ipſi A C, vt vltima figura indicat. Verùm hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ ſunt æquales inter ſe, vt conſtat. Solæ enim A C, A D, eundem limitem poſident A; Item B C, B D, eundem B; optimèque demonſtratum fuit ab Euclide, fieri non poſſe, vt A C, A D, inter ſe ſint æquales, ita vt B C, B D, quoque inter ſe æquales exiſtant. Rectè igitur in propoſitione appoſita ſunt hæc verba: eoſdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habẽtes. Rurſus poſſunt eſſe duæ lineæ ſimul ſumptæ A D, B D, æquales duabus lineis A C, B C, ſimul ſumptis, vt in eadem figura perſpici poteſt: Sed hoc non oſtendit Euclides fieri non poſſe: Dixit enim non poſſe vtramque vtrique eſſe æqualem, &c.



EADEM ratione poſſunt ex A, & B, infra A B, baſim trianguli A B C, hoc eſt, ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ A D, B D, conuenientes ad aliquod punctum, ita vt A D, exiens è puncto A, æqualis ſit ipſi A C; & B D, egrediens ex B, æqualis ipſi B C, vt perſpicuum eſt in appoſita figura. Non igitur ſine cauſa adiecit Euclides: ad eaſdem partes. Denique eſſe poterunt duæ lineæ A C, A D, æquales inter ſe, eundem terminum A, poſidentes; Sed hoc poſito, fieri nulla ratione poterit, vt reliquæ duæ B C, B D, terminum habentes eundem B, inter ſe quoque ſint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide eſt demonſtratum. Appoſitè igitur dictum eſt in propoſitione: duabus eiſdem rectis lineis alia duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt planè ſcopus Euclidi in hac propoſitione propoſitus intelligatur, diligenter ſingula verba propoſitionis ſunt ponderanda.

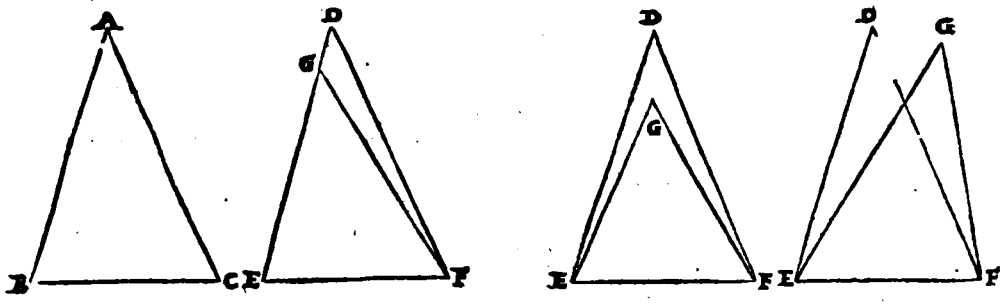


THEOR. 5. PROPOS. 8. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia, habuerint verò & baſim baſi æqualem: Angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SINT duo latera A B, A C, trianguli A B C, duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, æqualia, vtrumque vtrique, nempe A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F; ſit autem & baſis B C, baſi E F, æqualis. Dico angulum A, æqualem eſſe angulo D, quorum videlicet vterque dictis lateribus continetur. Nam ſi mente intelligatur baſis B C, ſuperponi baſi E F, [d] neutra excedet alteram, ſed punctum B, congruet puncto E, & punctũ C, puncto F, cùm hæ baſes ponantur æquales inter ſe.

[d] 8. pronun.



Deinde ſi triangulum A B C, cogitetur cadere ſuper triangulum D E F, cadet punctum A, aut in ipſum punctum D, aut aliò. Si punctum A, in ipſum punctum D, cadat, congruent ſibi mutuò triangulorum latera, cùm ponantur æqualia; Ac propterea, [e] angulus A, æqualis erit angulo D, cùm neuter alterum excedat. Quòd ſi punctum A, aliò dicatur cadere, vt ad G, quomodocunque id contingat, hoc eſt, ſiue in latus E D, ſiue intra triangulum E D F, ſiue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuò E G, (quæ eadem eſt, quæ B A,) æqualis ipſi E D; & F G, (quæ eadem eſt, quæ C A,) æqualis ipſi F D, propterea quòd latera vnius trianguli æqualia ponantur lateribus al-

[e] 8. pronun.

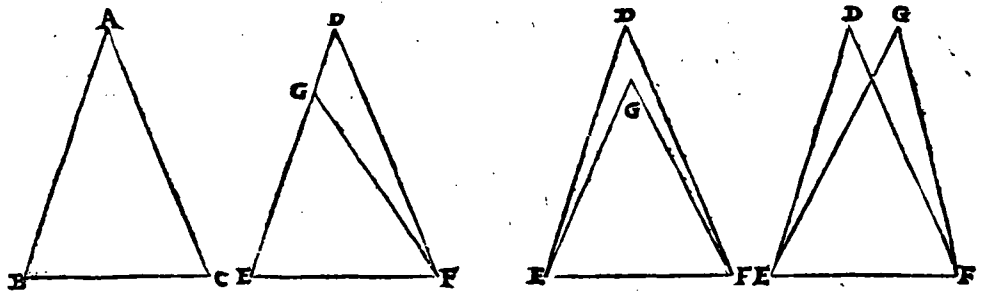
a 7 primi. terius. Hoc autem fieri non posse, iam dudum [a] demonstratum est, cùm tam rectæ E G, E D, termi-num eundem E, quàm rectæ F G, F D, eundem limitem F, posideant. Non igitur punctum A, ca-det aliò, quàm in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare si duo trian-gula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Vt vides, hac propositio conuertit primam partem propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit basium æqualitas; ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem mo do ex prima & tertia parte conclusionis quartæ propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita vt theo-rema proponatur in hanc formam.

Si duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æqua-les, vtrumque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosque reliquos hisce lateribus in-clusos æquales.

Sit enim basis B C, æqualis basi E F, & angulus B, angulo E, angulúsque C, angulo D F E. Dico latus quoque A B, lateri D E, & latus A C, lateri D F, æquale esse, angulúmque A, angulo D. Nam si basis basi su-

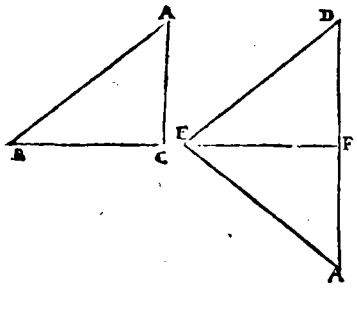


a 8. pron. *perponatur, [a] congruent sibi mutuò extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, propterea que omnia inter sese æqualia erunt. Verùm hoc idem theorema à nobis propositum, quod quidem magis propriè conuertere videtur quartam propositionem, quàm illud Euclidis, aliter demon-strabit Euclides in prima parte propositionis 26. vt eo loco monebimus.*

COROLLARIVM.

Porro ex antecedente huius octauæ propositionis, non solùm colligi potest, angulos la-teribus æqualibus contentos æquales esse, verùm etiam reliquos angulos, qui ad bases con-stituuntur, vtrumque vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immò totum triangulum toti triangulo, vt constat ex eadem superpositione vnius trianguli super alterum. Nam sibi mutuò congruent & dicti anguli, & tota triangula, vt perspicuum est. Quod etiam ex quarta propositione colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, an-gulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, quum latera quo-que sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, vt in propositione quarta demonstratum est.

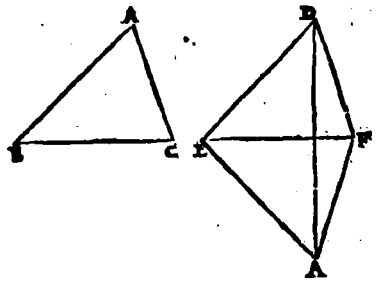
EX PROCLO.



Philonis familiares hoc idem theorema octauum ostendunt demonstratione affirmatiua, hac ratione. Posito enim eodem ante-cedente, superponi intelligatur basis B C, basi E F, ita vt triangulum A B C, cadat in diuersas partes, & non super triangulum D E F, qua-le est triangulum A E F. Aut igitur duo latera, nempe D F, F A, con-stituunt vnam lineam rectam, quod quidem continget, si duo an-guli C, & F, recti extiterint; aut non. Si constituant vnam lineam re-ctam, veluti D A, ita propositum concludetur. Quoniam in trian-gulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia (est enim nunc A E, recta eadem, quæ A B, quæ per hypothesin recta D E, æqualis est) [b] *erunt anguli A, & D, super basin A D, æquales, quod erat ostenden-dum. Si verò neque D F, F A, neque D E, E A, lineam rectam conficiant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A,*

b 5. primi.

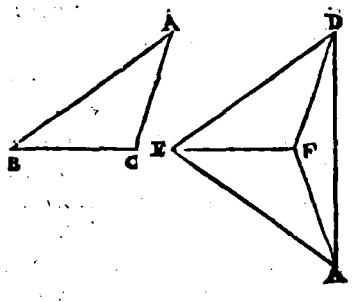
qua



quæ vel cadet intra triangula, vel extra. Cadat primùm intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, ſunt acuti. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, æqualia ponuntur, [a] *erunt duo anguli E A D, E D A, æquales ad baſin D A. Eadem ratione, cùm duo latera A F, D F, æqualia ſint per hypotheſin, erunt duo anguli F A D, F D A, ſuper baſin D A, æquales. Si igitur hi æquales illis æqualibus addantur,* [b] *fient toti anguli E A F, E D F, æquales. Quod erat oſtendendum. Cadat deinde recta D A, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtuſi. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia,* [c] *erunt anguli E A D, E D A, æquales ſuper baſin D A. Eadem ratione, cùm duo latera A F, D F, in triangulo A F D, ſint per hypotheſin æqualia, erunt anguli F A D, F D A, ſuper baſin D A, æquales. His ergo à prioribus ablatis,* [d] *remanebunt anguli E A F, E D F, æquales; Quod demonſtrandum proponebatur.*

a 25. primi.

b 2. pron.

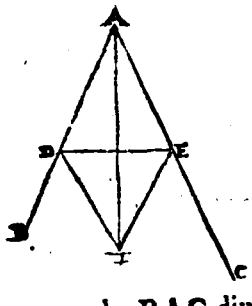


c 5. primi.

d 3. pron.

PROBL. 4. PROPOS. 9. 9.

DATVM angulum rectilineum bifariam ſecare.



SIT diuidendus rectilineus angulus B A C, bifariam, hoc eſt, in duos angulos æquales. In recta A B, ſumatur quodcunque punctum D, & rectæ A D, [a] ſecetur ex A C, recta A E, æqualis, ducaturq; recta D E. Deinde ſuper D E, [b] conſtituatur triangulum æquilaterum D F E, & ducatur recta A F, diuidens angulum B A C, in angulos B A F, C A F. Dico hos angulos inter ſe eſſe æquales. Cùm enim latera D A, A F, trianguli D A F, æqualia ſint lateribus E A, A F, trianguli E A F, vtrumque vtrique, quod D A, ipſi E A, per conſtructionem, ſit æquale, & A F, commune: Sit autem & baſis D F, baſi E F, æqualis, propterea quòd triangulum D F E, conſtructum eſt æquilaterum: [c] Erit angulus D A F, angulo E A F, æqualis, ideóque angulus B A C, diuiſus bifariam, quod erat faciendum.

a 3. primi.

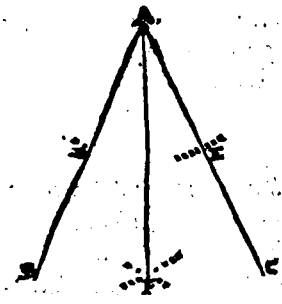
b 1. primi.

c 8. primi.

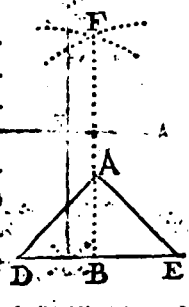
SCHOLIVM.

QVOD ſi loco trianguli æquilateri conſtruamus triangulum iſoſceles, nihilominus idem demonſtrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propoſitionibus, quæ ſequuntur, fieri poteſt.

PRAXIS.



DICTO citius angulus quilibet rectilineus, vt B A C, bifariam ſecabitur, hoc modo: Ex centro A, circino aliquo abſcindantur rectæ æquales A D, A E, cuiuſcunque magnitudinis. Et circino non variato (poſſes tamen ipſum variare, ſi velles) ex centris D, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Recta igitur ducta A F, ſecabit angulum B A C, bifariam. Si enim ducerentur rectæ D F, E F, eſſent hæ æquales, nempe ſemidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius, demonſtrabitur, angulum D A F, æqualem eſſe angulo E A F. Non deſcripſimus autem dictas lineas, vt nuda praxis haberetur: Id quod in alijs quoq; praxibus, quoad eius fieri poterit, obſeruabimus, ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariátque confuſionem.

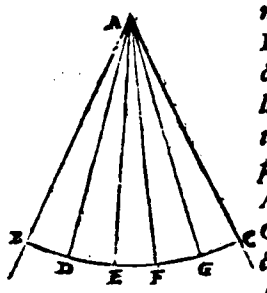


QVOD ſi quando angulus rectilineus breuiſſimis lineis contentus, & in extremo alicuius plani poſitus, diuidendus ſit bifariam, deſcribemus ex D, & E, duos arcus ſeſe mutuò interſecantes in F, ſupra angulum A, quia infra puncta D, & E, ſpatium deeſt, in quo deſcribi poſſint. Recta enim ex F, per A, vſque ad B, ejecta ſecabit angulum A, bifariam, vt prius, vt in appoſita figura apparet.

SCHOLIVM.

HINC apertè colligitur, angulum rectilineum quemuis diuidi poſſe etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, ſemper procedendo per augmentum duplex. Nam poſtquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuiſus, ſi horum vterq; iterum bifariam ſecetur, habebimus 4. angulos æquales; Quòd ſi ſinguli rurſus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & ſic deinceps. Non docuit autem Euclides vſquam, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes æquales poſſit diuidi, quia id à nemine vſq; ad illum diem fuerat demonſtratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebi-

mus, beneficio cuiusdam linea curua, vel inflexa ad finem libri 6. Interim verò si quis angulum rectilineum quemcunque propositũ in quotuis partes æquales diuidere desideret rudi, vt dicitur, Minerua, vti eum necesse erit circino, vt quasi attentando, & sæpius repetendo praxin ipsam ad finem desideratum perueniat; hac nimirum ratione: Sit angulus rectilineus B A C, diuidendus in 5. angulos æquales. Ex A, centro describatur arcus circuli B C, ad quodcunque interuallum secãs rectas A B, A C, in B, & C. Deinde hic arcus beneficio circini (eius crura modò dilatando magis, modò restringendo, donec debitam habeant distantiam) diuidatur in tot partes æquales, in quot angulus propositus est diuidendus, vt in exemplo proposito in quinque partes in punctis D, E, F, G. Si namque ad hæc puncta ex A, recta ducantur linea, diuisus erit angulus B A C, in quinque æquales angulos.



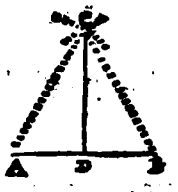
Cùm enim circino sumpta sint æqualia interualla B D, D E, &c. si ducantur rectæ B D, D E, &c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera B A, A D, trianguli B A D, [a] *æqualia duob. lateribus E A, A D, trianguli E A D, vtrumque vtrique, cùm omnia ex centro egrediantur ad circunferentiam vsque. Basis autem B D, basi quoque D E,* [b] *vt dictum fuit, æqualis est:* [b] *Angulus igitur B A D, angulo E A D, æqualis existet; Eademq; ratione demonstrabitur, angulum E A D, angulo E A F, æqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27. propos. tertij libri: propterea quòd circunferentiæ B D, D E, &c. acceptæ sunt omnes æquales inter sese. Nemo verò miretur, quòd praxes exhibeamus interdum, quarũ demonstrationes ex sequentibus propositionibus pendent. Hoc enim, vt suprà ad definit. 10. diximus, eo consilio facimus, vt quoad eius fieri potest, singula proprijs in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei cuiusuis in quotlibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes æquales: Et diuisio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, vbi eandem diuidit Euclides bifariam, & ita de singulis. Neque enim ad praxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstrationes, sed solùm, vt probetur re ctè esse per ipsas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui nõ contentus nuda praxi demonstrationem requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium; quemadmodum & in proxima praxi citauimus propositionem 27. tertij libri.*

a 15. defin.

b 8. primi.

PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.



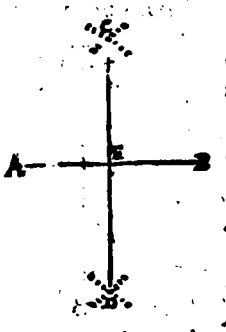
a 1. primi.

b 9. primi.

SIT recta finita A B, diuidenda bifariam, id est, in duas partes æquales. [a] Describatur super A B, triangulum æquilaterum A B C, cuius angulus C, per rectam C D, [b] diuidatur bifariam, rectaque C D, rectam A B, secet in D. Dico rectam A B, bifariam esse diuisam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia sunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi B C, cùm sint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, est commune; Est autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis. per constructionem: [c] Erit basis A D, basi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam secuimus in D, quod facere oportebat.

c 4. primi.

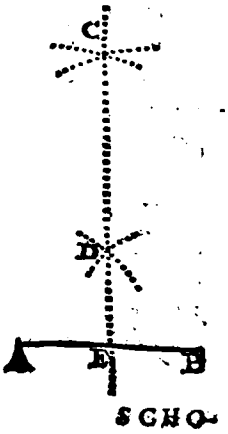
PRAXIS.



Ex centro A, ad quoduis interuallum, quod tamen dimidium lineæ A B, excedat, describantur duo arcus, vnus supernè, alter infernè; Et ex centro B, ad idem interuallum omnino alij duo arcus delineentur, qui priores secent in C, & D. Recta enim ducta C D, secabit rectam A B, in E, bifariam. Si enim ex A, & B, ad C, & D, ducantur quatuor rectæ, erunt hæ omnes inter se æquales, cùm ex centris ad circunferentias æqualium circulorum cadant; Nam arcus circulorum descripti sunt eodem interuallo. Quoniam igitur latera A C, C D, æqualia sunt lateribus B C, C D, vtrumque vtrique, & basis A D, basi B D, [a] *erit angulus A C D, angulo B C D, æqualis. Rursus quia latera A C, C E, æqualia sunt lateribus B C, C E, vtrumque vtrique, & angulus A C E, angulo B C E, vt ostensum fuit;* [b] *erit basis A E, basi B E, æqualis.*

a 8. primi.

b 4. primi.



IAM verò si linea bifariam diuidenda posita sit in extremo plani cuiusuis, ita vt infra ipsam locus non sit, in quo commodè duo arcus sese intersecantes possint describi; descriptis supra eam duobus arcubus sese intersecantibus in C, describemus ad easdem partes alios duos arcus sese intersecantes mutuò in D, siue hoc fiat intra punctum C, vt in apposita figura, siue supra C. Nam recta per C, D, educta secabit rectam A B, bifariam in E.

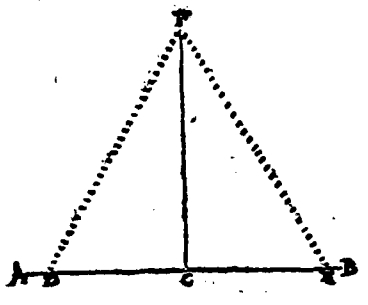
SCHO-

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, eodem modo diuidi posse eandem lineam rectam AB, in 4. partes aequales, & 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione precedenti diximus, de diuisione anguli rectilinei. Qua verò ratione quauis recta linea proposita diuidenda sit in quotcunque partes aequales, vberrimè trademus ad propositionem quadrageſimam huius libri. Idémque longè faciliùs posteà efficiemus ad propositionem decimam libri 6. vbi varias, & non iniucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cùm huiusmodi praxes ferè omnes per linearum proportiones faciliùs demonstrentur. Neq; verò vnquam diuisione linea in plures, quàm in duas partes aequales ad eum locum vsque indigebimus.

PROBLEMA 6. PROPOSITIO vndecima. 11.

DATA recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

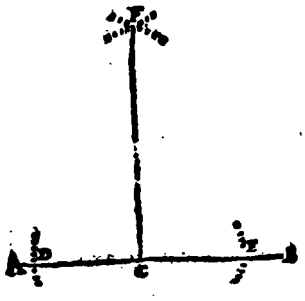


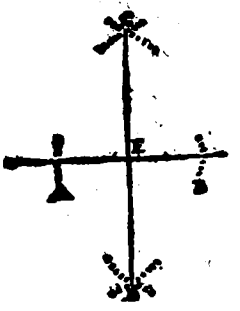
RECTA linea data sit AB, & in ea punctum C, à quo iubemur erigere super AB, lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta CD, [a] cui æqualis auferatur CE. Deinde super DE, [b] constituatur triangulum æquilaterum DEF, atque ex F, ad C, ducatur recta FC, quam dico esse perpendicularem ad AB. Quoniam latera DC, CF, trianguli DCF, æqualia sunt lateribus EC, CF, trianguli ECF, vtrumque vtrique, nempe DC, ipsi EC, per constructionem, & CF, commune: Est verò & basis DF, basi EF, æqualis, ob trianguli æquilaterum: [c] Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. [d] Quare dicetur vterque rectus, atque adeò FC, recta, ad AB, perpendicularis. Data igitur recta linea à puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.

[a] 3. primi. [b] 1. primi. [c] 8. primi. [d] 10. desim.

PRAXIS.

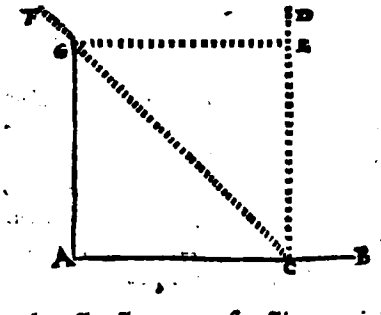
Ex puncto C, abscindantur vtrinque linea aequales CD, CE. Et ex D, & E, describantur duo arcus secantes seſe in F. Recta namque ducta FC, erit perpendicularis. Demonstratio eadem est, qua Euclidis, si modo ducantur rectæ DF, EF, quæ aequales erunt, propter aequales circulos ex D, & E, descriptos, qui se intersecant in puncto F. Quòd si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur secundùm praxim datam linea perpendicularis. Vt si linea data fuerit AC, & punctum datum C, extremum; protrahenda erit AC, in B, & sumenda aequales CD, CE, &c. Si verò ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed vtcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis A, & B, quibuscunque linea propositæ describantur tam superne, quàm inferne duo arcus seſe intersecantes in C, & D. Nam recta ducta CD, erit perpendicularis ad AB, hoc est, faciet duos angulos ad E, rectos, seu aequales. Quod non aliter probabis, quàm suprà praxim, qua lineam in duas aequales diuisimus partes, demonstrauimus. Nam per quartam propositionem, erunt anguli ad E, aequales, quippe qui super aequales bases AE, BE, consistant, opponantúrque aequalibus lateribus AC, BC, qua ex C, ad puncta A, & B, ducerentur.





EX PROCLO.

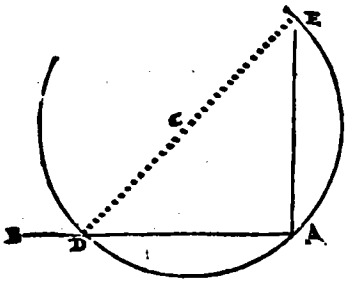
SI punctū in linea datū fuerit extremū, & linea commodè produci nequiuerit, per primum ex puncto dato



a 3. primi.
b 9. primi.
c 4. primi.
d 10. defin.

educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta A B, & punctum A. Ex C, puncto quolibet intra lineã educatur perpẽdicularis C D, vt docuit Euclides; & [a] abscindatur C E, æqualis ipsi A C: Deinde [b] diuidatur angulus C, bifariam, ducta rectã C F: Et ex E, rursus, vt docuit Euclides, educatur E G, perpendicularis ad C D, secans rectam C F, in G. Ducta igitur recta G A, perpendicularis erit ad A B. Quoniã cùm latera A C, C G, trianguli A C G; æqualia sint lateribus E C, C G, trianguli E C G, vtrumque vtrique; & anguli hisce lateribus contenti æquales quoque, per constructionem: [c] Erunt anguli A, & E, oppositi communi lateri C G, æquales; Sed E, est rectus per constructionem; igitur & A, rectus erit, [d] ideoq; A G, ad A B, perpendicularis.

SCHOLIVM.

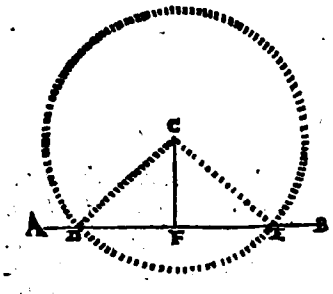


BREVIVS lineam perpendicularẽ erigemus ex puncto dato, siue extremum illud sit, siue non, hoc modo: Sit data linea A B, punctúmque in ea A. Ex centro C, extra lineam assumpto, vbi libuerit, (dummodò recta A B, producta cum ipso non conueniat) interuallo verò accepto vsque ad A, describatur arcus circuli secans A B, in D. Et ex D, per C, recta ducatur secans arcum in E. Recta enim ducta E A, erit perpendicularis ad A B. Nam angulus A, est rectus, cùm sit in semicirculo D A E, vt ostendemus proposit. 31. lib. 3.

ALIAM praxim, quando punctum datum est in extremo linea, inuenies in scholio proposit. 31. huius libri.

12. PROBL. 7. PROPOS. 12.

SVPER datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea nõ est, perpendicularem rectam deducere.



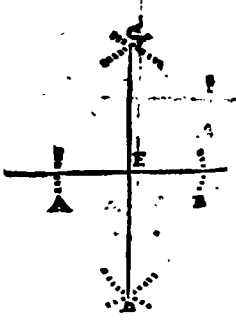
a 10. primi.
b 8. primi.

SIT recta A B, interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C, à quo oporteat lineam perpendicularẽ deducere ad rectam A B. Centro C, interuallo verò quolibet circulus describatur secans A B, in D, & E. (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt transcendat rectam A B; aliàs eam non secaret.) [a] Diuisa autem recta D E, bifariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularem esse ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, æqualia duobus lateribus E F, F C, trianguli E F C, vtrumque vtrique, per constructionem; est autem & basis C D, basi C E, æqualis, cùm hæ sint ex centro C, ad circumferentiam. Quare [b] erit angulus D F C, angulo E F C, æqualis, & propterea vterque rectus. Ducta est igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

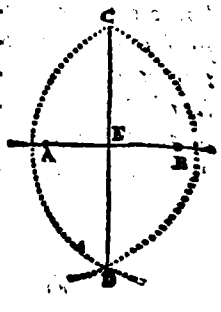
PROBE apposuit Euclides hanc particulam: infinitam. *Si enim linea esset finita, non posset semper à puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita esset B E, & punctum C, non posset ex C, describi circulus secans B E, in duobus punctis, quare neque ex C, perpendicularis duci ad B E. Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, nõ habere magnitudinem determinatam, vt saltem ad ipsam productam perpendicularis posit deduci. Ita enim fiet hic, si B E, producatur, donec circulus ex C, descriptus secet totam B A, productam in D, & E, &c.*

PRAXIS.

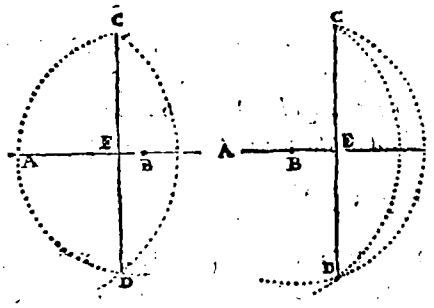


a 4. primi.

CENTRO facto C, & interuallo quouis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in A, & B. Deinde ex A, & B, eodemq; interuallo, vel alio, si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in D. Nam ducta recta C D, secans A B, in E, erit perpẽdicularis ad A B. Demonstratio huius operationis nõ differt à demonstratione tradita in praxi proposit. 10. Nam anguli ad E, erũt recti, [a] nempe inter se æquales.

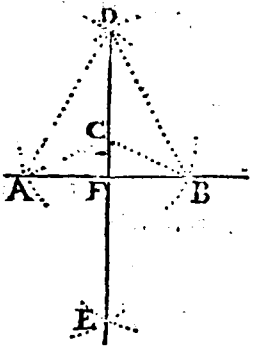


IDEM efficiemus hoc modo: Ex quouis puncto A, in linea data, & interuallo quolibet vsq; ad C, assumpto, arcus circuli describatur: Deinde ex quolibet alio puncto B, interuallóque vsque ad idem C, alius arcus describatur priorem secans in C, & D: Eritq; ducta recta C D, secans A B, in E, perpendicularis ad A B. Demonstratio eadem est, quæ prior. Non



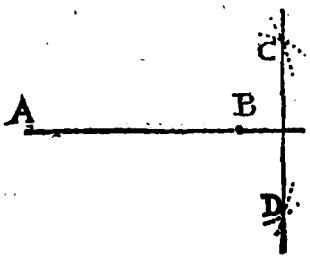
est autem necesse, vt interuallum B C, æquale sit interuallo A C, vt in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & breuior operatio, si idem semper interuallum accipiatur.

QVOD si punctum C, fuerit nimis vicinum rectæ A B, ita agendum erit. Centro C, ad quoduis interuallum secetur recta A B, in duobus punctis A, B, ex quibus ad maius interuallum quodcunque, quàm A C, vel B C, bini arcus tam suprà, quàm infrà describantur, se intersecantes in D, E. Nam ducta recta D C F, quæ producta necessariò per punctum E, transibit, perpendicularis erit ad rectam A B, in F. Quod ita demonstrabimus, ductis rectis A D, B D, A C, B C. Quoniam duo latera D A, D C, trianguli A C D, duobus lateribus D B, D C, trianguli B C D, æqualia sunt, nec non & basis A C, B C, æquales sunt, [a] *erunt anguli ad D, æquales. Quare cùm duo latera D A, D F, trianguli A D F, duobus lateribus D B, D F, trianguli B D F, æqualia sint, coniineant q; angulos ad D, æquales, vt ostendimus;* [b] *erunt anguli ad F, æquales, ac proinde recti, &c.*

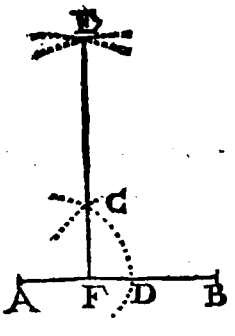


a 8. primi.

b 4. primi.



IAM verò si punctum datum sit iuxta extremum plani cuiuspiam, ita vt linea data non possit produci, ita agemus. Ex puncto quouis B, quod è regione dati puncti C, videatur quasi esse positum, hoc est, ferè in extremitate lineæ datæ A B, describantur duo arcus supra & infra lineam A B, ad interuallum B C. Deinde ex puncto A, aliquantum remoto à puncto accepto B, (Quò autem magis distabunt, inter se puncta A, & B, eò commodiùs puncta intersectionum arcuum cognoscentur) alij duo arcus ad interuallum A C, describantur, secantes priores in C, & D. Nam recta C D, perpendicularis erit ad datam rectam A B.

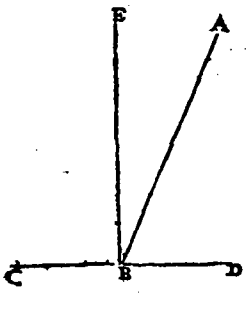


SI autem puncto non prope extremum plani, in quo linea est, dato, linea sit in extremo plani, vt duo arcus infra lineam commodè se intersecare non possint, siue punctum datum C, sit propinquum lineæ A B, siue non, absoluemus problema hoc modo: Ad interuallum A C, vbicunque punctum A, sumatur, describatur ex C, arcus secans rectam A B, in D; atque ex A, D, duo arcus describantur versus punctum C, sese intersecantes in E. Recta namque ex E, per C, ducta secans A B, in F, perpendicularis erit ad A B, vt suprà demonstratum est, quando punctum C, erat prope lineam A B.

QVO verò modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum est iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum; ita vt neque lineam producere liceat, neque duo arcus commodè se intersecare possint in D, infra datam rectam A B, docebimus in scholio propositionis 31. huius libri.

THEOR. 6. PROPOS. 13. 13.

CVM recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA linea A B, consistens super rectam C D, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B, fuerit perpendicularis ad C D, [a] erunt dicti anguli duo recti. Si verò A B, non fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulum obtusum, alterum verò acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. [b] Educatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, vt sint duo anguli E B C, E B D, recti. Quoniam verò angulus rectus E B D, [c] æqualis est duobus angulis D B A, A B E; [d] erunt, appositio communi angulo recto E B C, duo recti E B D, E B C, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Rursus, quia [e] angulus A B C, duobus angulis A B E, E B C, æqualis est; [f] erunt appositio communi angulo A B D, duo anguli A B C, A B D, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiam esse duos rectos E B D, E B C; quæ autem eidem æqualia, [g] inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli A B C, A B D, æquales sunt duobus rectis E B D, E B C. Cùm ergo recta linea super rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

a 10. defin.

b 11. primi.

c 19. pron.

d 2. pron.

e 19 pron.

f 2 pron.

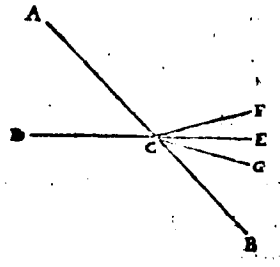
g 1. pronun.

SCHOLIVM.

VIDETVR hac propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus A B C, superat rectum angulum E B C, eo reliquus angulus A B D, superatur ab angulo recto E B D. Nam sicut ibi excessus est angulus A B E, ita hic defectus est idem angulus A B E. Quocirca anguli A B C, A B D, duobus rectis æquales esse conuincuntur: siquidem tantùm vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

14. THEOR. 7. PROPOS. 14.

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.



AD punctum C, lineæ rectæ A B, in diuersas partes eductæ sint duæ rectæ C D, C E, facientes cum A B, duos angulos A C D, A C E, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas C D, C E, inter se esse constitutas in directum, ita vt D C E, sit vna linea recta. Si enim non est recta D C E; producta D C, ad partes C, in directum & continuum cadet aut supra C E, vt sit recta D C F, aut infra C E, vt sit recta D C G. Si cadit suprà, cùm A C, consistat super rectam D C F, [a] fient duo anguli A C D, A C F, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo anguli A C D, A C E, æquales duobus rectis; [b] & omnes recti sunt inter se æquales. Quare duo anguli A C D, A C F, duobus angulis A C D, A C E, erunt æquales. Ablato igitur communi angulo A C D, [c] remanebũt anguli A C F, A C E, inter se æquales, pars & totum, quod est absurdum. Non igitur recta D C, producta cadet supra C E; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli A C E, A C G, æquales. Igitur D C, producta eadem efficietur, quæ C E; propterea quę si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 13. primi.

b 12. pron.

c 3. pronun.

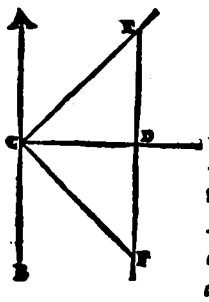
SCHOLIVM.

EST hac propositio precedentis conuersa. In ea enim probatum fuit, si D C E, sit recta, angulos A C D, A C E, duobus esse rectis æquales; In hac verò demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis æquales, rectas D C, E C, esse vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

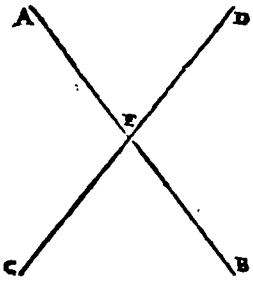
RECTE Euclides addidit in propositione hac [& non ad easdem partes.] Quoniam, vt ait Porphyrius, fieri potest, vt ad punctum aliquod linea data ad easdem partes duæ lineæ ducantur facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non constituant vnam lineam, eò quòd non ad diuersas sint ductæ partes. Sit enim punctum C, in linea A B, datum. Ducatur C D, [a] perpendicularis ad A B, [b] diuidaturq; rectus angulus A C D, bifariam per rectam C E. Deinde ex D, quolibet puncto rectæ C D, [c] ducatur D E, perpendicularis ad C D, secans rectam C E, in E. Producta autem E D, ad partes D, [d] sumatur D F, æqualis rectæ D E, & ducatur recta F C. Quoniam igitur latera E D, D C, trianguli E D C, æqualia sunt lateribus F D, D C, trianguli F D C, vtrumque vtrique, & anguli D, ipsis contenti æquales, nempe recti; [e] erit basis E C, basi C F, æqualis, & angulus E C D, angulo F C D. Sed angulus E C D, dimidium est recti. (Est enim rectus A C D, diuisus bifariam.) Igitur & F C D, dimidium erit recti. Quare C F, cum A C, facit angulum A C F, constantem ex recto & dimidio recti; Facit autem C E, cum eadem A C, angulum A C E, dimidium etiam recti; Duo igitur anguli A C F, A C E, quos ad easdem partes faciunt rectæ C F, C E, cùm A B, æquales sunt duobus rectis: Et tamen C F, C E, non sunt vna linea recta, propterea quòd non sunt ducta ad diuersas partes, sed ad easdem.

a 11. primi.
b 9. primi.
c 11. primi.
d 3. primi.
e 4. primi.



15. THEOR. 8. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.



SECENT se duæ rectæ A B, C D, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse æquales, angulum videlicet A E D, angulo B E C, & angulum A E C, angulo B E D. Quoniam recta D E, consistit super rectam A B, [a] erunt duo anguli A E D, D E B, æquales duobus rectis. Rursus quia recta B E, super rectam C D, consistit, erũt eadem ratione duo anguli C E B, B E D, duobus rectis æquales. Cùm igitur [b] omnes recti anguli inter se sint æquales; erunt duo anguli A E D, D E B, duobus angulis D E B, B E C, æquales. Dempto igitur

a 13. primi.

b 12. pron.

igitur communi angulo D E B, [a] remanebit angulus A E D, angulo B E C, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos A E C, B E D, inter se æquales esse. Nam duo anguli A E C, C E B, [b] qui duobus sunt rectis æquales, æquales erunt duobus quoque angulis D E B, B E C, qui duobus rectis sunt æquales. Ablato igitur angulo communi B E C, [c] remanebunt anguli A E C, B E D, æquales inter se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

a 3. pronun.
b 13. primi.
c 3. pron.

COROLLARIVM I.

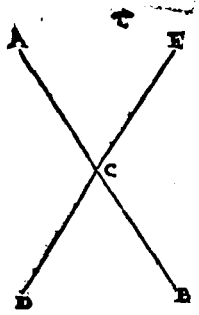
EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas lineas rectas se mutuò secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos A E D, D E B, quàm duos A E C, C E B, duobus esse rectis æquales, per 13. proposit. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti, æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

COROLLARIVM II.

EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur solummodò illi quatuor anguli ad E, constituti in plurimas partes, [a] quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cùm ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex primo corollario, erunt quoque omnes alij simul sumpti quatuor tantùm rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circunstans æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi authores asserunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

a 19. prop.

EX PROCLO.



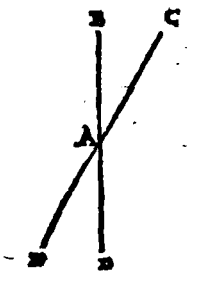
SI ad aliquam rectam lineam, ad eius q; signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.

Ex puncto C, rectæ A B, in diuersas partes egrediantur duæ rectæ C D, C E, facientes angulos A C E, B C D, inter se æquales: Vel etiam duos A C D, B C E. Dico duas C D, C E, efficere vnam lineam rectam. Quoniam enim angulus A C E, æqualis est angulo B C D; addito communi angulo B C E, [b] erunt duo anguli A C E, E C B, duobus angulis D C B, B C E, æquales: Sed [c] anguli A C E, E C B, sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo D C B, B C E, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem C D, C E, [d] erũt linea vna recta. Hoc autem, vt vides, conuersum est propositionis decimæquintæ.

b 2. prop.
c 13. primi
d 14. primi.

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi & continuũ coniunctæ.

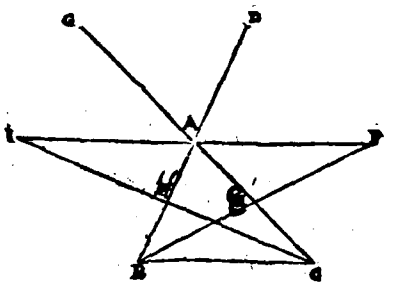


Ex puncto A, quatuor lineæ eductæ A B, A C, A D, A E, faciant duos angulos oppositos B A E, C A D, inter se æquales: Item duos B A C, D A E, inter se æquales. Dico tam B A, A D, facere vnam lineam rectam, quàm C A, A E. Quoniam æquales sunt anguli B A E, C A D, si æquales illis addantur anguli B A C, D A F, [e] erunt duo anguli B A E, B A C, æquales duobus angulis C A D, D A E. Tam ergo illi, quàm hi dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt quatuor rectis, per secundum corollarium præcedentis propositionis. Igitur duo anguli B A E, B A C, æquales sunt duobus rectis; [f] atque adeò C A, A E, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostendetur, duas B A, A D, vnam rectam efficere lineam. Nam eade ratione erunt duo anguli B A E, E A D, æquales duobus angulis D A C, C A B. Quare, vt prius, concludetur propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamè demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.

e 2. prop.
f 14. primi.

16. # THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & oppoſito, maior eſt.



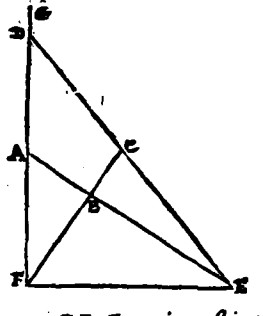
TRIANGVLI ABC, latus BA, producatur ad D. Dico angulum externum DAC, maiorem eſſe interno, & oppoſito ACB, itemque maiorem interno, & oppoſito ABC. Diuidatur [a] enim AC, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta BEF, ita vt EF, [b] abſciſſa ſit æqualis rectæ EB; ducaturq; recta FA. Quoniam igitur latera CE, EB, trianguli CEB, æqualia ſunt lateribus AE, EF, trianguli AEF, vtrumque vtrique, per conſtructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehenſi, [c] inter ſe æquales, cùm ſint circa verticẽ E, & oppoſiti: Erit [d] baſis CB, æqualis baſi AF, & angulus ECB, angulo EAF; Eſt autem angulus DAC, externus maior angulo EAF, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus DAC, maior erit interno & oppoſito angulo ACB. Quòd ſi latus CA, producatur ad G; & AB, diuidatur bifariam in H; extendaturq; recta CHI, vt HI, æqualis ſit rectæ HC, & ducatur recta IA: demonſtrabitur eadem prorſus ratione, angulum externum GAB, maiorem eſſe interno angulo, & oppoſito ABC; Eſt autem [e] angulus DAC, angulo GAB, æqualis, cùm lineæ BD, CG, ſe mutuò ſecent in A. Igitur & angulus DAC, maior erit interno & oppoſito angulo ABC. Eſt autem idem angulus DAC, maior quoque oſtenſus angulo interno, & oppoſito ACB. Cuiuſcunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 10. primi.
[b] 3. primi.
[c] 15. primi.
[d] 4. primi.
[e] 15. primi.

SCHOLIVM.

NON dixit Euclides, angulum externum DAC, maiorem eſſe angulo BAC, interno, qui ſibi eſt deinceps; ſed ſolùm magnitudine ſuperare vtrumlibet ACB, ABC, internorum, ſibiq; oppoſitorũ: quoniam externus angulus æqualis poteſt eſſe angulo interno ſibi deinceps, quando ſcilicet externus rectus eſt; Tunc enim neceſſariò is, qui ſibi eſt deinceps, rectus quoque erit: Poteſt & eſſe minor, quando nimirum eſt acutus; Hoc enim poſito, angulus illi deinceps obtuſus erit. Solùm ergo, quando obtuſus erit externus, ſuperabit internum ſibi deinceps; Hic enim neceſſariò acutus exiſtet. Quæ omnia facilè colliguntur ex propoſ. 13. per quã angulus externus, & internus illi deinceps, æquales ſunt duobus rectis.

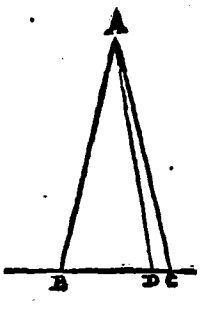
ID verò, quod in ſcholio propoſ. 6. huius libri nos demonſtraturos recepimus, nimirum hãc propoſitionem nõ poſſe conuerti; cùm & vno latere figuræ quadrilateræ producto, externus angulus quolibet interno, & oppoſito poſſit eſſe maior; hac ratione abſoluemus.



SIT figura quadrilatera ABCD, cuius angulus BAD, obtuſus, & ABC, rectus conſtituatur, hac tamen lege, vt rectæ AB, DC, productæ ad partes B, & C, in puncto E, nec non & rectæ DA, CB, ad partes A, & B, in puncto F, coëant. Quod quidem fiet, ſi conſtituatur triangulum ADE, obtuſangulum, & productæ DA, verſus A, ducatur ex quouis puncto F, ad AE, perpendicularis FB, ſecãs latus DE, in C. Dico, ſi AD, producatur ad G, angulum externum CDG, maiorem eſſe quolibet trium internorũ BAD, ABC, BCD, ſibi oppoſitorum. Cùm enim ADE, triangulum ſit, [a] erit angulus externus EDG, maior interno oppoſito DAE. Rurſus cùm DAB, obtuſus maior ſit recto ABC, maior quoque multò erit EDG, ipſo ABC. Poſtremò quia & in triangulo CDF, [b] angulus externus CDG, maior eſt interno, & oppoſito FCD; manifeſtum eſt, in quadrilatero ABCD, externum angulum CDG, maiorem eſſe internis, & oppoſitis BAD, ABC, BCD. Quam ob rem propoſ. hac 16. conuerti nequit, quippe cùm eius antecedens, & conſequens non reciprocentur, vt demonſtratum eſt.

[a] 16. primi.
[b] 16. primi.

EX PROCLO.



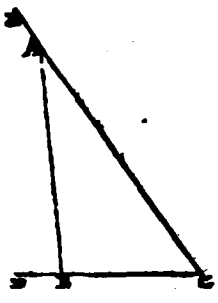
SEQVITVR ex hac propoſitione, ab eodem puncto ad vnam eandemq; lineam rectam non poſſe duci plures lineas rectas, quàm duas inter ſe æquales. Si enim fieri poteſt, ducantur ex A, ad lineam BC, tres lineæ rectæ æquales AB, AC, AD. Quoniam igitur latera AB, AC, ſunt æqualia, [c] erunt anguli ACB, & ABC, æquales ſuper baſim BC. Rurſus quia latera AB, AD, ſunt æqualia, [d] erunt anguli ADB, & ABD, ſuper baſim BD, æquales. Quare cùm vterque angulus ACD, & ADB, æqualis ſit angulo ABC, [e] erit angulus ADB, æqualis angulo ACD, externus interno oppoſito, quod eſt abſurdum, cùm per hanc decimam ſextam propoſitionem externus interno maior ſit. Non ergo plures lineæ rectæ, quàm duæ, inter ſe æquales, ex A, ad BC, poſſunt duci. Quod eſt propoſitum.

[c] 5. primi.
[d] 5. primi.
[e] 1. poſt.

THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 17. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.



SIT triangulum A B C; Dico duos angulos A B C, & A C B, minores esse duobus rectis; Item duos C B A, & C A B; Itemq; duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quæuis latera, nempe C B, C A, ad D, & E. Quoniam igitur [a] angulus A B D, externus maior est interno & opposito angulo A C B; si addatur communis angulus A B C, [b] erunt duo anguli A B D, A B C, maiores duobus angulis A B C, A C B: [c] Sed A B D, A B C, æquales sunt duobus rectis. Igitur A B C, A C B, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli C B A, & C A B, minores duobus rectis. ¡Nam cùm angulus externus A B D, [d] maior sit angulo C A B, interno & opposito; [e] erunt; appositio communi angulo A B C, duo anguli A B D, A B C, maiores duobus angulis C A B, C B A. Cùm ergo [f] duo illi duobus rectis sint æquales, erunt hi alij duo duobus rectis minores. Non secus ostendemus, duos B A C, B C A, duobus esse rectis minores. Cùm enim angulus externus B A E, [g] maior sit interno & opposito angulo B C A; si apponatur cõmunis angulus B A C, [h] erunt duo anguli B A E, B A C, duobus angulis B C A, B A C, maiores: ac proinde cùm illi duo [i] sint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cuiuscunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

a 16. primi. b 4. pron. c 13. primi. d 16. primi. e 4. pron. f 13. primi. g 16. primi. h 4. pron. i 13. primi.

EX PROCLO.

HINC perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quàm vnam. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam B C, duæ perpendiculares A B, A C. Erunt igitur in triangulo A B C, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cùm sint duo recti, quod est absurdũ. [a] *Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quàm vna, ex A, ad B C, deduci possunt. Quod est propositum.*

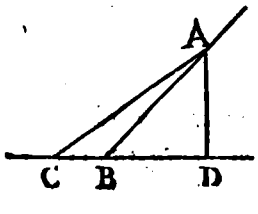
a 17. primi.

COROLLARIVM I.

CONSTAT enim ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus defin. 26. huius libri. Cùm enim per hanc propositionẽ duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunque reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex hac propositione, si linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum acutum, & obtusum alterũ, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demissam cadere ad partes acuti anguli. Faciat enim recta A B, cum recta C D, angulos inæquales, nempe A B D, acutum, & A B C, obtusum, demittaturq; ex puncto A, quocunque ad C D, perpendicularis A D. Dico A D, cadere ad partes anguli acuti A B D. Nam si non cadit ad partes acuti anguli A B D, cadat, si fieri potest, perpendicularis A C, ad partes anguli obtusi A B C. Igitur duo anguli A B C, A C B, obtusus, & rectus, in triangulo A B C, maiores sunt duobus rectis: [b] *sed & duobus rectis sunt minores, quod est absurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad C D, deducta cadit ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli cadet.*



b 17. primi.

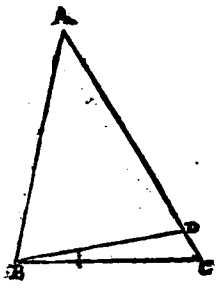
COROLLARIVM III.

PARI ratione fit ex hac propositione manifestum, omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Isoscelis supra basin, esse acutos. Nam [c] *cũ & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Isoscele supra basin sint inter se æquales;* [d] *sintq; simul tam illi duo, quàm hi duobus rectis minores; erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acutus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut maiores.*

c 5. primi. d 17. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 18. 18.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.



IN triangulo A B C, ſit latus A C, maius latere A B. Dico angulum A B C, ſubtenſum à maiori latere A C, maiorem eſſe angulo A C B, qui à minori latere A B, ſubtenditur. Nam ex A C, [a] auferatur A D, æqualis ipſi A B, & ducatur recta B D. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia ſunt per conſtructionem, [b] erunt anguli A B D, A D B, æquales: Eſt autē [c] angulus A D B, maior angulo A C B. Igitur & angulus A B D, maior erit angulo A C B. Quamobrē cùm [d] angulus totus A B C, maior adhuc ſit angulo A B D; erit angulus A B C, multò maior angulo A C B. Eadem ratione, ſi latus A C, maius ponatur latere B C, oſtendes angulum A B C, maiorem eſſe angulo B A C: ſi nimirum ex C A, abſcindatur linea æqualis ipſi C B, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit: Quod demonſtrandum erat.

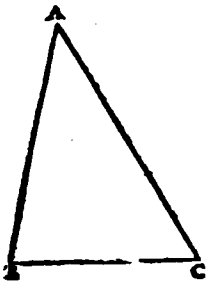
a 3. primi.
b 5. primi.
c 16. primi.
d 9. pron.

COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni eſſe inæquales, vt monuimus definitione decimaquinta huius libri. Sit enim triangulum Scalenum A B C, cuius maximum quidem latus A C, minimum autem B C, & medium locum habens A B. Dico eiuſdem omnes angulos inæquales eſſe. Cùm enim latus A C, ponatur maius latere A B, erit, per hanc propoſitionem angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus A B, latere B C, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus verò A, & C, medium locum inter vtrumque tenens.

18. THEOR. 12. PROPOS. 19.

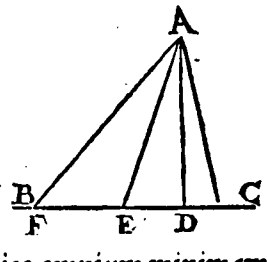
OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.



IN triangulo A B C, angulus B, maior ſit angulo C. Dico latus A C, ſubtendens maiorem angulum B, maius eſſe latere A B, quod angulum minorem C, ſubtendit. Si enim latus A C, maius non eſt latere A B, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur A C, æquale eſſe ipſi A B, [a] erit angulus B, æqualis angulo C; Eſt autem & maior per hypotheſin, quod eſt abſurdum. Si verò A C, minus eſſe dicatur latere A B, erit angulus B, ſubtenſus à minori latere A C, minor angulo C, ſubtenſo à maiori latere A B; Ponitur autem maior, quod magis eſt abſurdum. Latus igitur A C, cùm neque æquale ſit lateri A B, neque minus eo, erit maius. Eadem ratione probabitur, latus A C, maius eſſe latere B C, ſi angulus B, maior eſſe concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur: Quod demonſtrandum proponebatur.

a 5. primi.

COROLLARIVM.



SEQVITVR ex hac propoſitione omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis eſt, eſſe minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam B C, quotcunque linea A D, A E, A F, & alia, quarum A D, ſola ſit perpendicularis ad B C, & nulla alia, cùm ex eodem puncto ad eandem rectam ſola vna perpendicularis duci poſſit, vt ex Proclo ad propoſitionem decimamſextam demonſtrauimus. Dico omnium minimam eſſe A D. Nam in triangulo A E D, cùm duo anguli A D E, A E D, ſint duobus rectis minores, ponaturq; A D E, rectus; erit A E D, acutus. Quare maius erit latus A E, latere A D. Eodem modo oſtendemus, omnes alias rectas maiores eſſe recta A D: ac proinde perpendicularis A D, omnium erit minima.

a 17. primi.
b 19. primi.

EX PROCLO.

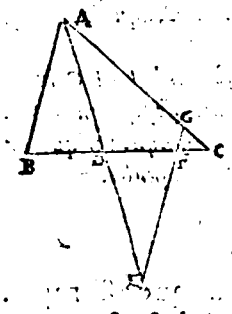
POSSVMVS hoc idem theorema oſtendere affirmatiua demonſtratione, ſine adminiculo præcedentis, ſi tamen prius demonſtretur hoc ſequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam ſectus fuerit, ſecansque angulum recta linea ad baſin ducta in partes inæquales ipſam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt,

erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus verò, quod cum minori.

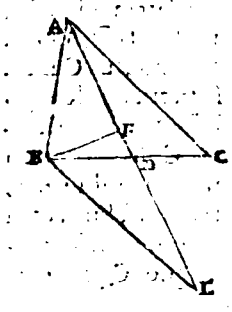
TRIANGVLI *A B C, angulus B A C, diuidatur bifariam per rectam A D, quæ secet basin B C, in partes inæquales, maiusq; segmentum sit D C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Producatur enim A D, ad E,* [a] *vt sit D E, æqualis ipsi A D. Deinde ex maiori segmento D C, auferatur recta D F, æqualis minori segmento D B, & per F, ex E, extendatur recta E F G. Quoniam igitur latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia sunt lateribus E D, D F, trianguli E D F, vtrumque vtrique, per constructionem; sunt autẽ & anguli A D B, E D F, dictis lateribus contenti æquales;* [b] *Erunt bases A B, & E F, æquales, & angulo B A D, angulus F E D, æqualis: Est verò & angulus C A D, angulo B A D, æqualis per hypothesin; Igitur* [c] *anguli G A E, G E A, trianguli A G E, æquales erunt,* [d] *ideoq; latera A G, E G, æqualia erunt. Est autem recta A C, maior quàm A G; quare & A C, maior erit, quàm E G. Et quia E G, maior est, quàm E F, erit & A C, multò maior, quàm E F. Cùm igitur demonstratum sit, rectam E F, æqualem esse rectæ A B, erit A C, latus maius latere A B, quod erat ostendendum.*

a 3. primi.
b 15. primi.
c 4. primi.
d 1. pron.
e 6. primi.



HOC *ostenso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo A B C, angulus A B C, maior sit angulo C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Diuisa enim recta B C, (super quam constituti sunt dicti anguli inæquales,) bifariam in D, ex A, per D, extendatur recta A D E,* [f] *vt sit D E, æqualis ipsi A D; ducatur q; recta B E. Quoniã igitur latera A D, D C, triãguli A D C, æqualia sunt lateribus E D, D B, trianguli E D B, vtrumq; vtriq;, per constructionẽ, & sunt autẽ & anguli A D C, E D B, dictis cõprehẽsi lateribus æquales:* [h] *Erũt bases A C, & B E, æquales, angulusq; A C D, angulo E B D, æqualis. Et qa angulus A C D, ponitur esse minor angulo A B C, erit & angulus E B D, minor eodem angulo A B C; Ideoq; angulus A B E, per rectam B D, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam secetur per rectam B F, cadet B F, supra B D, eò quòd angulus A B D, maior est angulo E B D. Quia verò E F,* [i] *maior est, quàm E D, & E D, posita est æqualis ipsi A D, erit E F, maior, quàm A D;* [k] *Sed ad-huc A D, maior est, quàm A F; Multò igitur maior erit E F, quàm A F. Itaq; quia recta B F, diuidens angulum A B E; bifariam, secat basin A E, inæqualiter in E, estq; maius segmẽtum E F, minus autem A F; erit per theorema à Proclo proximè demonstratum, latus B E, maius latere A B. Ostensum est autem B E, æquale esse lateri A C. Igitur & A C, latus latere A B, maius erit. Quod erat demonstrandum.*

f 3. primi.
g 15. primi.
h 4. primi.
i 9. pron.
k 9. pron.



SCHOLIVM.

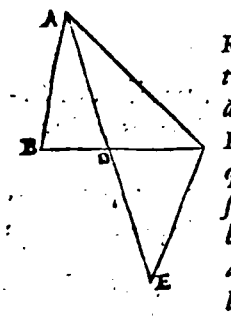
HAEC *propositio 19. conuersa est propositionis 18. vt perspicuum est. Campanus autem duarum istarum propositionum ordinem prorsus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contra. Quarum vtramque ostendit ducendo ad id, quod fieri nequit, cùm tamen Euclides propositionem 18. directè, & ostensiuè confirmauerit, vt ex dictis liquidò constat.*

POTERIMVS *quoq; Theorema à Proclo demonstratum conuertere hoc modo.*

SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusq; segmẽtum erit prope maius latus.

DVO *latera A B, A C, trianguli A B C, sint inæqualia; A C, maius, & A B, minus. Recta autẽ A D, diuidens angulum B A C, bifariam, secet basin B C, in D. Dico segmentum D C, maius esse segmento D B. Si enim non est maius, erit vel æquale, vel minus. Si dicatur esse æquale, producatur A D, ad E,* [l] *vt D E, æqualis sit ipsi D A, ducatur q; recta E C. Quoniam igitur latera A D, D B, æqualia sunt lateribus E D, D C, vtrumque vtrique; A D, videlicet ipsi E D, per constructionem, & D B, ipsi D C, per hypothesin aduersarij: Sunt autem &* [m] *anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales:* [n] *Erit basis A B, basi E C, æqualis, & angulo B A D, angulus C E D: Positus autem est & angulo B A D, angulus C A D, æqualis: Igitur & anguli C E D, C A D, æquales erunt:* [o] *Ideoq; latus A C, lateri E C, æquale. Cùm igitur ostẽsum sit lateri E C, æquale esse quoq; latus A B,* [p] *erũt latera A C, A B, æqualia: quod est absurdũ, quia A C, maius ponebatur, quàm A B. Non erit igitur segmentum D C, segmento D B, æquale. Quòd si D C, dicatur esse minus, & D B, maius: erit, per theorema Procli, latus A B, maius latere A C: Ponebatur autem minus, quod multò magis est absurdum. Non igitur minus erit D C, quàm D B. Quare erit necessariò maius.*

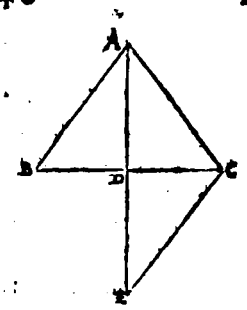
l 3. primi.
m 15 primi.
n 4. primi.
o 6. primi.
p 1. pron.



EODEM *modo demonstrari poterit hoc theorema,*

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet, erunt duo latera angulum continentia inter se æqualia: Quòd si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

PRIMVM *recta A D, secans angulum B A C, bifariam diuidat quoque basin B C, in D, bifariam. Dico*



latera A B, A C, inter ſe æqualia eſſe. Hoc autem demonſtrabimus eadem ratione, qua in præcedenti theoremate oſtenſum fuit, latus A C, æquale eſſe lateri A B, ſi D C, ſegmentum ſegmento D B, æquale ponatur, dummodò figuram eodem modo conſtruas. Cùm enim latera A D, D B, æqualia ſint lateribus E D, D C: [a] *& anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales;* [b] *erunt baſes A B, E C, æquales, & angulus C E D, angulo B A D, hoc eſt, angulo C A D, æqualis. Quare* [c] *A C, æquale erit ipſi E C, hoc eſt, ipſi A B.*

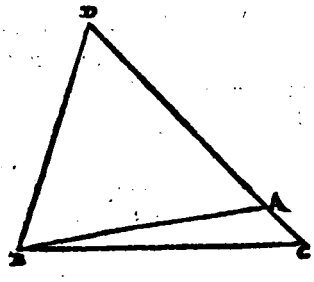
a 15. primi.
b 4. primi.
c 6. primi.

DEINDE ſint latera A B, A C, æqualia, & recta A D, ſecans baſin B C, in D, diuidat angulum B A C, bifariam. Dico ſegmentũ D C, æquale eſſe ſegmento D B. Cùm enim latera A D, A B, æqualia ſint lateribus; A D, A C, vtrumque vtrique, & anguli quoq; ad A, contenti dictis lateribus æquales per hypotheſin, [d] *erunt baſes B D, D C, æquales.*

d 4. primi.

20. THEOR. 13. PROPOS. 20.

OMNIS trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocunque aſſumpta.



SIT triangulum A B C. Dico quælibet eius duo latera, nempe A B, A C, ſimul maiora eſſe reliquo latere B C. Producatur vnum ex illis, vt C A, vſq; ad D, [a] ſitq; recta A D, æqualis alteri lateri non producto A B, & ducatur recta D B. Quoniã igitur duo latera A B, A D, æqualia inter ſe ſunt, per hypotheſin, [b] erunt anguli A B D, A D B, æquales inter ſe: Eſt autem angulo A B D, [c] maior angulus C B D. Igitur & angulus C B D, maior erit angulo A D B. In triangulo ergo C B D, latus C D, oppoſitum maiori angulo C B D, [d] maius erit latere B C, quod minori angulo C D B, opponitur. Cùm igitur duo latera A B, A C, ſimul æqualia ſint ipſi C D, (ſi enim æqualibus A B, A D, commune addatur A C, [e] fient tota æqualia; nimirũ linea compoſita ex A B, A C, & linea compoſita ex A D, A C,) erunt quoq; latera A B, A C, ſimul maiora latere B C. Eodem modo demonſtrabitur, quælibet alia duo latera maiora eſſe reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 3. primi.
b 5. primi.
c 9. pronun.
d 19. primi.
e 2. pron.

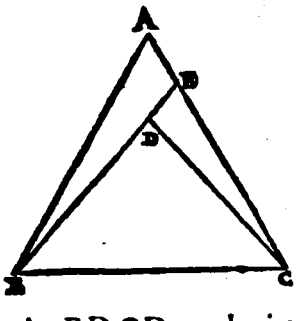
EX PROCLO.

ALITER hoc theorema, à familiaribus Heronis & Porphyrij demonſtratur, nullo latere producto, hac ratione: Sit probandum duo latera A B, A C, trianguli A B C, maiora eſſe latere B C. Diuidatur angulus B A C, illis lateribus contentus [a] *bifariam per rectam A D. Quoniam igitur trianguli C D A, latus C D, protractum eſt ad B,* [b] *erit angulus externus B D A, maior interno & oppoſito C A D: Igitur & maior angulo B A D. Quare in triangulo A B D, latus A B, maiori angulo A D B, oppoſitum* [c] *maius erit latere B D, quod minori angulo B A D, opponitur. Eadem ratione oſtendetur, latus A C, maius eſſe, quàm C D, quia angulus C D A,* [d] *maior eſt angulo B A D, hoc eſt, angulo C A D, &c. Quamobrem duo latera A B, A C, maiora erunt latere B C. Eademq; eſt ratio quorumcunque duorum laterum, ſi angulus ipſis comprehenſus bifariam ſecetur.*

a 9. primi.
b 16. primi.
c 19. primi.
d 16. primi.

21. THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI ſuper trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interiùs conſtitutæ fuerint; hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.



IN triangulo A B C, ſuper extremitates B, & C, lateris B C, intrà triangulũ conſtituantur duæ rectæ lineæ B D, C D, in puncto D, concurrentes. Dico B D, C D, ſimul minores eſſe duobus lateribus B A, C A, ſimul; At verò angulum B D C, maiorem angulo B A C. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur in triangulo B A E, duo latera B A, A E, [a] maiora ſunt latere B E, ſi addatur commune E C, [b] erunt B A, A C, maiora, quàm B E, E C. Rurſus quia in triangulo C E D, duo latera C E, E D, [c] maiora ſunt latere C D; ſi commune apponatur D B, [d] erunt C E, E B, maiora, quàm C D, D B. Oſtenſum verò iam fuit, A B, C A, maiora eſſe, quàm B E, E C. Multò igitur maiora erunt B A, C A, quàm B D, C D, quod primò proponebatur. Præterea, quoniam angulus B D C, [e] maior eſt angulo D E C, externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque eſt, eandem ob cauſam: Erit angulus B D C, multò maior angulo B A C; quod ſecundò proponebatur. Si igitur ſuper trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat oſtendendum.

a 20. primi.
b 4. pron.
c 20. primi.
d 4. pron.
e 16. primi.

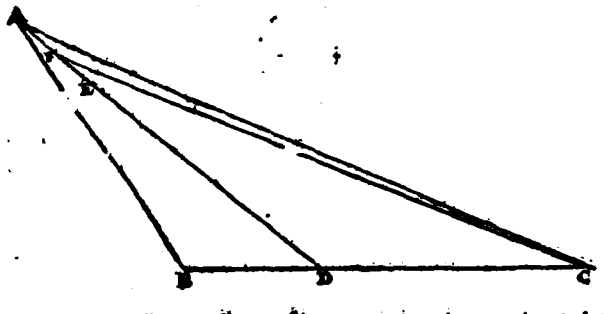
SCHO-

SCHOLIVM.

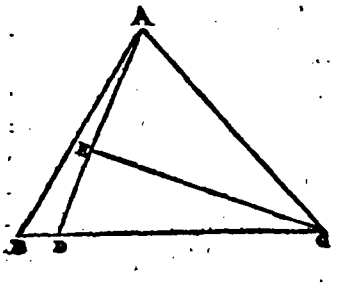
QVAM rectè Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum constituras, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, apertè intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum constitui posse duas lineas super vnum latus circa angulum rectum, vel obtusum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera verò à quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, quæ maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra trangulum constitui posse, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

SIT triangulum habens exempli gratia angulum A B C, obtusum. Dico ab extremo C, & à quouis puncto, nempe à D, prope aliud extremum B, lateris B C, duci posse duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ maiores sint duobus lateribus B A, A C. Ducatur enim recta D A: Et quoniam in triangulo A B D, duo anguli A B D, A D B, [a] *minores sunt duobus rectis; Ponitur autem A B D, maior recto, nempe obtusus; erit A D B, minor recto, ideoq; minor angulo A B D. Quare latus A D,* [b] *maius erit latere A B. Ex D A,* [c] *abscindatur recta D E, æqualis rectæ A B; Et reliquæ lineæ A E,* [d] *bifariam diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, recta ducatur C F, erunt duæ lineæ rectæ constitutæ C F, D F, intra triangulum maiores duobus lateribus B A, A C. Quoniam enim in triangulo A F C, duo latera A F, F C,* [e] *maiora sunt latere A C; Est autem recta A F, ipsi F E, æqualis, per constructionem; erunt C F, F E, maiores quoque latere C A. Si igitur æqualia addantur E D, & A B, fient rectæ C F, F D,* [f] *maiores lateribus C A, A B. Quod est propositum. Quòd si ad F, ex B, extremo rectæ ducerentur, essent duæ rectæ constitutæ C F, B F, minores duobus lateribus C A, A B, vt Euclides demonstrauit.*



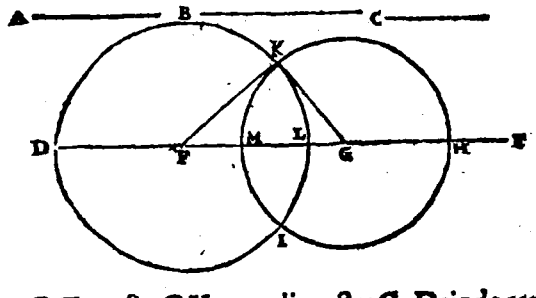
RVRSVS sit triangulum scalenum A B C, cuius latus maximum B C, minimum A B. Ex B C, [g] *auferatur B D, æqualis rectæ A B, & ducatur A D, recta, ad cuius punctũ quodlibet, vt ad E, ab extremo C, recta ducatur C E. Constituta igitur erunt intra triangulum duæ lineæ C E, D E, quæ minorẽ angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera A B, A C. Cùm enim duo latera B A, B D, æqualia sint,* [h] *erunt duo anguli B A D, B D A, æquales: Sed B D A, angulus* [i] *maior est angulo C E D. Maior igitur erit & angulus B A D, angulo C E D. Quare multò maior erit totus angulus B A C, angulo C E D; Quod est propositum. Rectè igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere ab extremis punctis vnius lateris, vt minores quidem sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem verò complectantur angulum. Aliàs enim propositio vera non esset, vt iam est demonstratum.*



VERVM de constitutione duarum linearum intra triangulum, quæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus, plura ostendemus ex Pappo ad propos. 34. huius libri.

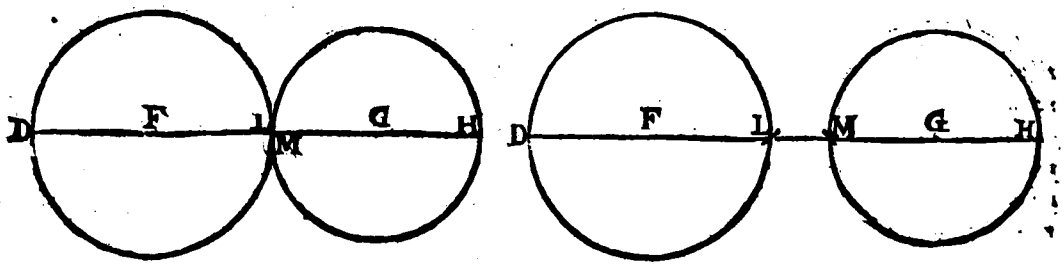
PROBL. 8. PROPOS. 22. 22.

EX tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariã sumpta reliquo sunt maiora.



TRES lineæ rectæ datæ sint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua sint maiores, (Aliàs ex ipsis nõ posset constitui triangulum, vt constat ex propositione 20. in qua ostensum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo esse maiora.) oporteatq; constructe triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Exassumpta recta quauis D E, infinitæ magnitudinis [a] abscindatur recta D F, æqualis rectæ A; Et ex reliqua F E, recta F G, æqualis rectæ B; & ex reliqua G E, recta G H, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo verò F D, circulus describatur D I K: Item centro G, interuallo aũt G H, alius circulus describatur H I K, qui necessariò priorẽ secabit in punctis I, & K, (cũ enim duæ F D, G H, maiores ponantur recta F G; si ex F E, sumatur recta F L, æqualis ipsi F D: & ex G D, recta G M, æqualis ipsi G H, cadet punctum M, inter L, & D.

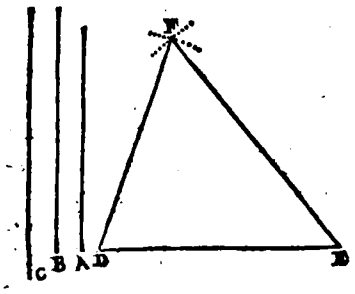
[a] 3. primi.



Si namq; M, caderet in L, punctum, eſſent G L, F L, hoc eſt, G H, & F D, æquales rectæ F G: Si verò M, caderet inter G, & L, eſſent eædem duæ F L, G M, hoc eſt, D F, G H, minores recta F G; quorũ vtrumq; eſt cõtra hypotheſin. (Id quod ex appoſitis figuris apparet.) ex quorũ quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta F, G, rectæ K F, K G, factumque erit triangulum F G K, cuius latera dico æqualia eſſe datis rectis A, B, & C. Cùm enim recta F K, [a] æqualis ſit rectæ F D, & recta A, per conſtructionem eidem F D, æqualis; [b] erit latus F K, rectæ A, æquale. Rurſus quia G K, æqualis eſt ipſi G H, & recta C, eidem G H; erit quoq; latus G K, rectæ C, æquale: Poſitum autẽ fuit per conſtructionem, reliquum latus F G, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera F K, F G, G K, tribus datis rectis A, B, C, æqualia ſunt. Conſtituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.

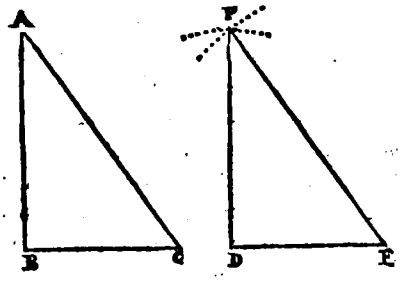
[a] 15. defin.
[b] 1. prop.

PRAXIS.



SVMATVR recta D E, aqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipſi B, quam nunc volumus eſſe baſin; Deinde ex D, ad interuallum rectæ A, arcus deſcribatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C, alter arcus ſecans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ D F, E F, factum erit triangulum habens tria latera aqualia tribus datis lineis. Erit enim latus D F, æquale rectæ A, propter interuallum ipſius A, aſſumptum: & latus E F, ipſi C, propter aſſumptum interuallum C, D E, verò latus acceptum eſt recta B, æquale, ab initio.

SCHOLIVM.

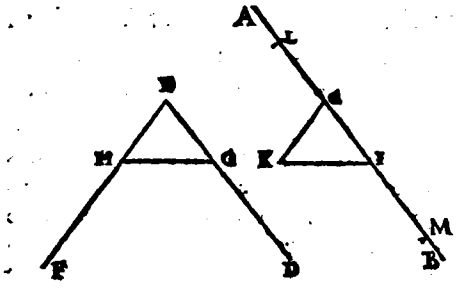


[a] 1. primi.

HAC arte cuicunque triangulo propoſito alterum prorſus æquale & quoadlatera, angulóſque, & quoad aream ipſius, conſtituemus. Sit namque triangulum quodcunque A B C, cui æquale omni ex parte eſt conſtruendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas A B, B C, C A, quarum qualibet duæ [a] maiores ſunt reliqua. Deinde ſumo rectam D E, æqualem vni lateri, nempe B C; & ex D, interuallo lateris A B, arcum deſcribo, item alium ex E, interuallo reliqui lateris C A, qui priorem ſecet in F, &c.

23. PROBL. 9. PROPOS. 23.

AD datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.



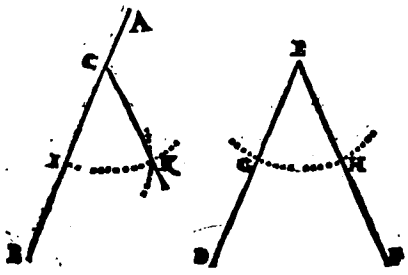
DATA recta ſit A B, datumque in ea punctum C, & datus angulus D E F. Oportet igitur ad rectam A B, in puncto C, angulũ conſtituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis E D, E F, duo puncta vtcunque G, H, quæ recta G H, connectantur: Deinde [a] conſtituatur triangulum C I K, habens tria latera æqualia tribus rectis E G, G H, H E, ita vt C I, æquale ſit ipſi E G; & C K, ipſi E H; & I K, ipſi G H. (Quod facilè fiet, ſi C I, ſumatur æqualis ipſi E G; & C L, ipſi E H, & I M, ipſi G H. Deinde ex centris C, & I, interuallis verò C L, & I M; circuli deſcribantur, ſecantes ſeſe in K, &c.) Dico angulum C, æqualem eſſe angulo E. Quoniam enim duo latera C I, C K, æqualia ſunt duobus lateribus E G, E H, vtrumque vtrique, & baſis I K, baſi G H, per conſtructionem; [b] erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat.

[a] 22. primi.
[b] 8. primi.

PRAXIS.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in precedente problemate tradidimus; propterea quòd triangulum conſtituere oportet æquale alteri triangulo, vt angulus dato angulo æqualis exhibeatur, vt perſpicuum eſt. Faciliùs tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctúmque in ea C, & angulus

gulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus describatur G H; Eodémque interuallo ex centro C, arcus describatur I K, sumatúrque beneficio circini arcus I K, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam si ducerentur rectæ I K, G H, essent ipsæ æquales, propterea quòd circino non variato, vtrámque distantiam I K, G H, accepimus. Cùm ergo & duo latera I C, C K, æqualia sint duobus G E, E H, ob æqualia interualla, quibus arcus sunt descripti; [a] *erũt anguli I C K, G E H, æquales.* a 8. primi.



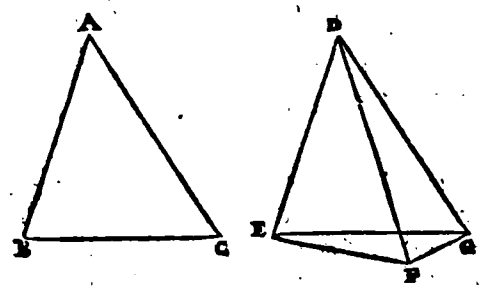
CAETERVM qua ratione ex puncto extra datam rectam proposito recta duci possit, quæ cum data recta angulum constituat dato angulo rectilineo æqualem; docebimus ad propositionem 31. huius libri.

THEOR. 15. PROP. 24.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum verò angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

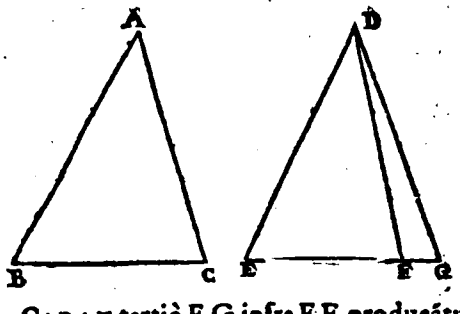
DVO latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; Angulus verò A, maior sit angulo E D F. Dico basin B C, maiorem esse base E F. Ad lineam enim D E, ad eiusque punctum D, [a] constituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetq; recta D G, extra triangulũ D E F, cùm angulus E D F, minor ponatur angulo A,) [b] ponaturque D G, æqualis ipsi D F, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut supra rectam E F, aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primùm supra E F, ducaturq; recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia sunt lateribus D E, D G, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angulo E D G, per constructionẽ; [c] Erit basis B C, basi E G, æqualis. Rursus quia duo latera D F, D G, inter se sunt æqualia; [d] erũt anguli D F G, D G F, æquales. Est autem angulus D G F, [e] maior angulo E G F. Igitur & angulus D F G, eodem angulo E G F, maior erit. Quare multò maior erit totus angulus E F G, eodem angulo E G F. In triangulo igitur E F G, [f] maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, quàm E F. Quod est propositum.

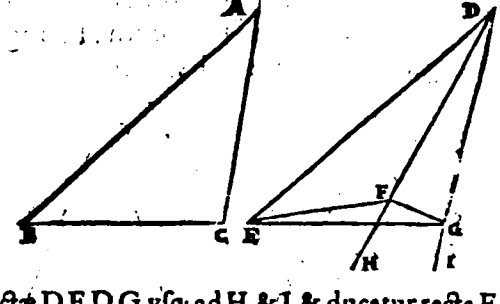
a 23. primi. b 3. primi. c 4. primi. d 5. primi. e 9. pronun. f 19. primi.



CADAT deinde E G, in ipsam E F. Et quia rursus, vt priùs, basis E G, [g] æqualis est basi B C: Et E G, [h] maior quàm E F; erit & B C, maior, quàm E F, quod est propositum.

g 4. primi. h 9. pron.





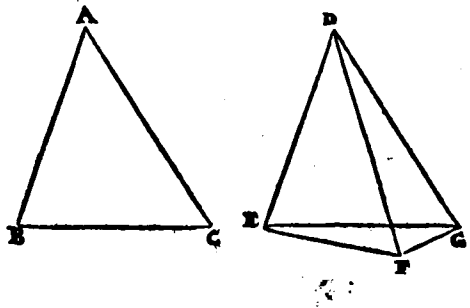
CADAT tertiò E G, infra E F, producãturq; rectæ D F, D G, vsq; ad H, & I, & ducatur recta F G. Erit autem rursus, vt priùs, [i] basis E G, basi B C, æqualis. Deinde quia duo latera D F, D G, æqualia sunt inter se, per constructionem, [k] erunt anguli G F H, F G I, infra basin F G, æquales. Est autem angulus F G I, [l] maior angulo F G E. Igitur & angulus G F H, eodẽ angulo F G E, maior erit. Quare multò maior erit totus angulus E F G, eodem angulo F G E. In triangulo ergo E F G, [m] maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostẽsum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoq; B C, basis basi E F. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

i 4. primi. k 5. primi. l 9. pron. m 19. primi.

SCHOLIVM.

Si quis fortè roget, cur in 4. proposit. Euclides ex eo quòd duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluserit non solùm æqualitatem basium, verùm etiam triangulorum, & reliquorum angulorum: hic autem ex eo, quòd duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, anguli verò lateribus illis comprehensi inæquales, colligat tantùm inæqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic respondendum est, necessariò id ab Euclide peritissimo Geometra esse factum. Nam ex antecedente huius theorematis semper consequitur basium inæqualitas, ita vt basis illius trianguli,

cuius angulus contentus lateribus assumptis est maior, superet basin alterius, cuius angulus minor existit, vt demonstratum est: non autem necesse est, triangulum illud maius hoc esse. Vt enim clarissimè ex Proclo demonstrabimus ad propositionem 37. huius primi libri, Triangulum maiorem habens angulum aliquando æquale est triangulo minorem habenti angulum, aliquando verò minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in vniuersum inferri ex eo, quòd angulus vnius trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiam maius esse, cùm modò æquale sit, modò minus, & modò maius. Idem dici potest de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus A B C, minor est semper angulo D E F; cùm angulus D E G, (q æqualis est per 4. propos. angulo A B C,) [a] *minor sit eodē angulo D E F, pars toto. In secunda autē figura existit quidem angulus A B C, angulo D E F, æqualis, per 4. propositionem. At verò angulus A C B, minor est angulo D F E, cū angulus D F E,* [b] *maior sit angulo D G F, externus interno, & opposito; & angulus D G F, æqualis sit angulo A C B. In tertia denique*



a 9. pron.

b 16. primi.

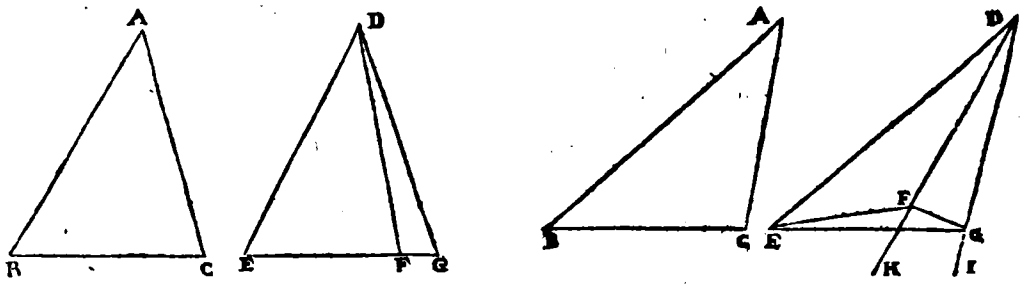


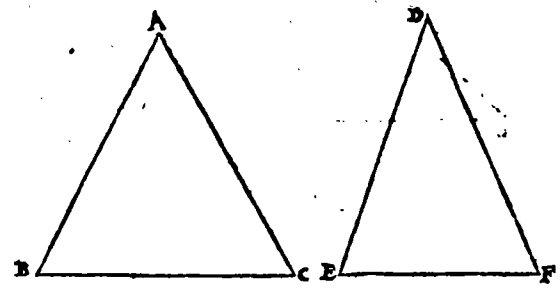
figura angulus A B C, maior quidem est angulo D E F, propterea quòd angulus D E G, (æqualis existēs per 4. propos. angulo A B C,) [c] *maior est eodē angulo D E F, totū parte: Sed angulus A C B, minor est angulo D F E. Nam si recta E F, producatur secans rectam D G, in K, fiet angulus D F E,* [d] *maior angulo D K E, externus interno: Est autem & angulus D K E, maior adhuc angulo D G E, externus quoque interno, & opposito. Multò igitur maior erit angulus D F E, angulo D G E, qui per 4. propos. æqualis est angulo A C B. Quod etiā constat ex 2. parte propos. 21. Nam interiores lineæ D F, E F, continent angulum maiorem angulo D G E, quem exteriores lineæ D G, E G, continent. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cùm modò vnus altero sit maior, modò minor, & modò æqualis.*

c 9. pron.

d 16. primi.

25. THEOR. 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin verò basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.



a 4. primi.

Dvo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, vtrumq; vtriq;, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; Basis autem B C, maior sit basi E F. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Si enim non est angulus A, maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cùm etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus circa D, vtrumq; vtri que, p hypothesin [a] erit & basis B C, æqualis basi E F; quod est absurdum; Ponitur enim basis B C, basi E F, maior: Si verò angulus A, dicatur esse minor angulo D; erit, ꝓpter æqualitatē laterum circa istos angulos, basis E F, [b] maior basi B C; qd magis est absurdū, cùm E F, ponatur esse minor q̄ B C. Quare angulus A, cùm neq; possit æqualis esse angulo D, neq; minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat ostendēdum.

b 24. primi.

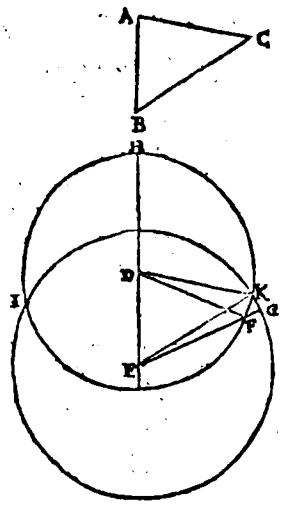
SCHOLIVM.

THEOREMA *hoc conuersum est præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonstratū est, basin illi respondentem esse maiorem: In hoc autē ex maiori basi ostensum fuit, angulum illi respondentē maiorem esse. Differunt autē plurimùm hæc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quæ explicata sunt propos. 18. & 19. Nam in 19. demonstratum est, in vno eodemq; triangulo maiori angulo maius latus respondere: At in 24. idem ostensum fuit in duobus diuersis triangulis, quorum duo latera vnius æqualia sunt duobus lateribus alterius, &c. Idemq; discrimen reperies inter propos. 18. & 25.*

MENE-

MENELAVS Alexandrinus, vt ait Proclus, demõstrat hoc idem theorema ostensiuè, hac ratione: Positis eisdem triangulis, ex base maiore BC, [a] abscindatur recta BG, aequalis basi minori EF. Fiat quoq; angulus GBH, [b] aequalis angulo DEK, [c] & sit BH, aequalis ipsi BA, atque adeò ipsi DE. Ducta autem recta linea AH, ducatur quoque recta per G, ex H, secans AC, in I. Quoniam igitur duo latera BA, BH, aequalia sunt, [d] erunt anguli BAH, BHA, aequales. Rursus quia latera BG, BH, aequalia sunt lateribus EF, ED, vtrumque vtrique, & angulus GBH, aequalis angulo DEF, ex constructionem; [e] erit basis HG, basi DF, atq; adeò ipsi AC, aequalis, angulusq; GHB, angulo EDF. Et quoniã recta HI, [f] maior est, quàm HG, quæ est ostensa aequalis ipsi AC, erit quoq; maior HI, quàm AC: Sed AC, [g] maior est adhuc, quàm AI: Multò ergo maior erit HI, quàm AI. Quare angulus IAH, [h] maior erit angulo IHA. Additis igitur duobus angulis BAH, BHA, qui ostensi sunt aequales, fiet [i] totus angulus BAC, toto angulo BHG, maior: Sed angulus BHG, demonstratus fuit aequalis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus BAC, angulo D, quod est propositum. Quod si quando contingat, rectam AH, cadere extra triangulum, auferendi erunt anguli aequales BAH, BHA, &c. vt reliquus fiat angulus BAC, maior reliquo angulo BHG. Quando autem recta AH, per punctum B, transit, nihil addendum erit, aut demendum, vt perspicuum est.

a 3. primi.
b 23. primi.
c 3. primi.
d 5. primi.
e 4. primi.
f 9. pron.
g 9. pron.
h 18. primi.
i 4. pron.



HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonstrat: Positis eisdem triangulis, producatur basis minor EF, ad G, vt sit EG, [k] aequalis basi maiori BC. Deinde centro D, interuallo autem DF, describatur circulus, producaturq; ED, ad H, in circunferentiam. Quoniam igitur DH, [l] est aequalis ipsi DF, erit quoque DH, aequalis ipsi AC. Additis igitur aequalibus DE, AB, [m] fient AC, AB, simul aquales toti HE: Sed AC, AB, [n] simul maiores sunt, quàm BC, atque adeò quàm EG. Igitur & HE, maior erit, quàm EG. Quare circulus descriptus ex centro E, & interuallo EG, intersecabit rectam EH, atq; adeò circùnferentiam prioris circuli in I, & K, punctis; ad K, autem ducantur rectæ DK, EK. Et quoniam duo latera AB, AC, aequalia sunt duobus lateribus DE, DK, vtrumque vtrique, (est enim DK, aequale ipsi DF, per definitionem circuli, DF, autem positum est aequale lateri AC,) & basis BC, basi EK, aequalis: (cùm EK, aequalis sit ipsi EG, per definitionem circuli; EG, verò recta per constructionem facta sit aequalis basi BC.) [o] Erit angulus BAC, angulo EDK, aequalis: Sed angulus EDK, maior est [p] angulo EDF. Quare & angulus A, angulo EDF, maior existet. Quod est propositum. Atq; hæc demonstratio generalior est priore, cùm omnibus casibus conueniat.

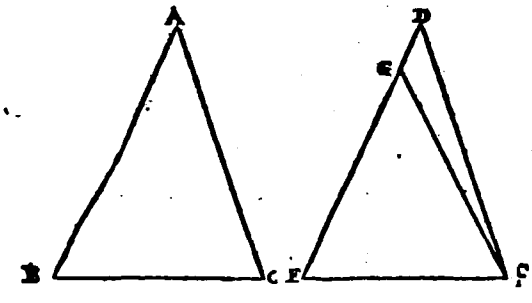
k 3. primi.
l 15. defin.
m 2. pron.
n 20. primi.
o 8. primi.
p 9. pron.

THEOR. 17. PROPOS. 26. 26.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

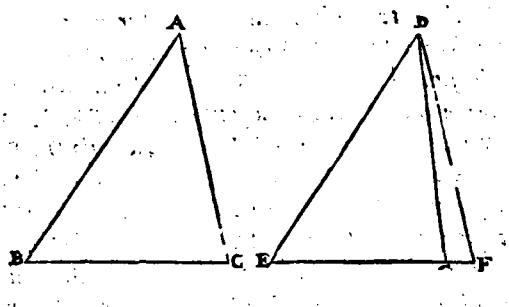
SINT duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales duobus angulis E, & EFD, trianguli DEF, vterque vtrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi EFD. Sitq; primò latus BC, quod angulis B, & C, adiacet, lateri EF, quod angulis E, & EFD, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera AB, AC, reliquis lateribus DE, DF, æqualia esse, vtrumque vtrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur reliquumque angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus AB, non est æquale lateri DE, sit DE, maius, à quo [a] abscindatur recta linea EG, æqualis rectæ lineæ AB, ducaturq; recta GF. Quoniã igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus GE, EF, vtrumq; vtriq;, & anguli B, & E, æquales p hypothesin; [b] Erit angulus C, æqualis angulo EFG. Ponitur aũt angulus C, æqualis angulo EFD. Quare & angulus EFG, eidẽ angulo EFD, æqualis erit, pars toti: Quod est absurdũ. Nõ est igitur latus AB, inæquale lateri DE, sed æquale. Quãobrẽ cũ latera AB, BC, æqualia sint lateribꝰ

a 3. primi.
b 4. primi.



a 4.primi. DE, EF, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; a erunt & baſes AC, DF, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod eſt propoſitum.

SINT deinde latera AB, DE, ſubtendentia æquales angulos C, & EFD, inter ſe æqualia. Dico rurſus reliqua latera BC, CA, reliquis lateribus EF, FD, eſſe æqualia, vtrumque vtrique, hoc eſt, BC, ipſi EF, & CA, ipſi FD; reliquumque angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus BC, nō eſt æquale lateri EF, ſit EF, maius b ex quo ſumatur recta EG, æqualis ipſi BC, ducaturque recta DG. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia ſunt lateribus DE, EG, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales, per hypotheſin; c Erit angulus C, angulo EGD, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo EFD, æqualis: Igitur & angulus EGD, angulo eidem EFD, æqualis erit, externus interno, & oppoſito, quod eſt abſurdum. d Eſt enim maior. Non ergo eſt latus BC, lateri EF, inæquale. Quocirca, vt prius, colligetur inſtitutum ex 4. propoſ. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.



b 3.primi.

c 4.primi.

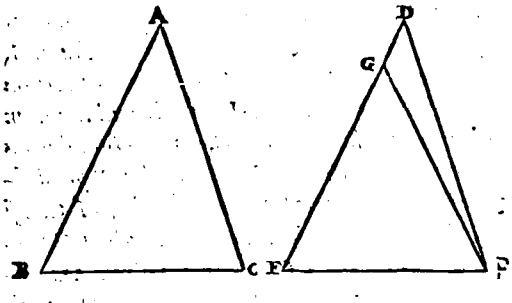
d 16.primi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonſtratione huius theorematis, tota etiam triangula, quoad areas, eſſe æqualia. Nam ſi latera AB, BC, lateribus DE, EF, æqualia ſint, vt oſtenſum fuit, contineantq; ex hypotheſi angulos æquales B, E, a erunt tota quoq; triangula æqualia inter ſe.

a 4.primi.

SCHOLIVM.

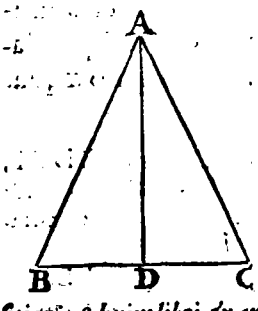


PRIOR *huius theorematis pars conuerſa eſt 4. propoſitionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipſis contentorū, collecta fuit æqualitas baſium, & angulorum ſuper baſes. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate baſium BC, EF, & angulorum ſuper has baſes, demonſtratum eſt, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus æqualia eſſe, reliquumq; angulum reliquo angulo, &c. Quod quidē alia nos ratione iam demonſtrauimus ad propoſ. 8. huius lib. quemadmodū eo loco monuimus.*

HOC loco demonſtrandum eſt theorema quoddam admodum neceſſarium, & perutile rebus Geometricis, videlicet:

IN triangulo æquilatero, ſiue Iſoſcele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenſo ducta, diuidensque vel angulum, vel baſin bifariam, perpendicularis eſt ad baſim, & ſiquidem angulum bifariam diuidat, ſecabit quoque baſin bifariam. Si verò baſim ſecet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contrà; linea perpendicularis ad baſin ducta diuidit & baſin, & angulum bifariam.

b 8



SINT in triangulo ABC, duo latera æqualia AB, AC, diuidatq; primum recta AD, angulum A, bifariam. Dico rectam AD, eſſe ad BC, perpendicularem, ſecareq; baſin BC, bifariam. Cùm enim duo latera AB, AD, duobus lateribus AC, AD, ſint æqualia, angulosq; æquales contineant, ex hypotheſi, b erūt & baſes BD, CD, æquales, & anguli ad D, atq; adeò recti.

b 4.primi.

DIVIDAT deinde recta AD, baſin BC, bifariam. Dico rectam AD, ad BC, perpendicularē eſſe, & angulum A, ſecare bifariam. Cùm enim duo latera BD, DA, duobus lateribus CD, DA, æqualia ſint, & baſis AB, baſi AC, ex hypotheſi, c erunt quoq; anguli ad D, æquales, atq; adeò recti, ac proinde ex corollario propoſitionis 8. huius libri, & anguli ad A, æquales erunt.

c 8.primi.

SED iam recta AD, ſit ad BC, perpendicularis. Dico & baſim BC, & angulum A, ſecari bifariam. d Erunt enim anguli B, C, ſupra baſin BC, æquales. Itaq; quoniam duo anguli D, B, trianguli ABD, duobus angulis D, C, trianguli ACD, æquales ſunt, vterque vtrique, latúſque AD, æqualibus oppoſitum angulis B, C, cōmune; e erūt & reliqua latera BD, CD, æqualia, & reliqui anguli ad A, æquales. Quod erat demonſtrādū.

d 5.primi.

e 26.primi.

SED & hoc theorema verum eſt.

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad baſim perpendicularis diuidit vel baſim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et ſiquidem baſis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam ſecabitur: ſi verò angulus bifariam ſecetur, baſis quoque diuidetur bifariam.

IN

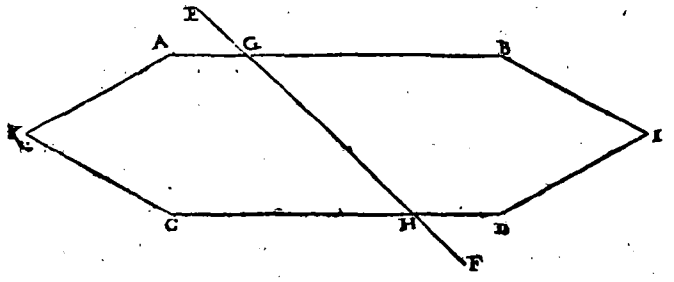
In eodem triangulo A B C, ſit A D, ad B C, perpendicularis, diuidatq; primùm baſin B C, bifariam. Dico & latera A B, A C, eſſe æqualia & angulos ad A, æquales. Quoniam enim duo latera B D, D A, duobus lateribus C D, D A, æqualia ſunt, angulosq; comprehendunt æquales, nempe rectos; [a] erunt quoq; & baſes A B, A C, & anguli ad A, æquales, quod eſt primum. a 4. primi.

Secet deinde perpendicularis A D, angulum A, bifariam. Dico & latera A B, A C, æqualia eſſe, & rectas B D, C D. Quoniam enim duo anguli D, A, trianguli A B D, duobus angulis D, A, trianguli A C D, æquales ſunt, latusq; A D, illis adiacens, commune; [b] erunt quoque & latera A B, A C, & latera B D, C D, æqualia. Quod eſt ſecundum. b 26. primi.

THEOR. 18. PROPOS. 27. 27.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ lineæ.

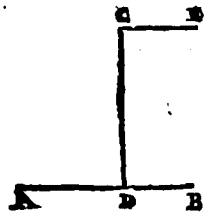
In duas rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat angulos alternatim A G H, D H G, inter ſe æquales. Dico lineas A B, C D, eſſe parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, coibunt tandem, ſi producantur infinitè. Si namq; non coirent vnquã, parallelæ eſſent, ex parallelarũ definitione. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniã igitur triangulum eſt G I H, (cùm A B, recta continuata ſit, itẽ recta C D, vſq; ad punctum I,) & angulus A G H, poſitus eſt æqualis angulo D H G; erit externus angulus A G H, æqualis interno, & oppoſito D H G; quod eſt abſurdum; [a] quoniam externus interno maior eſt. Quòd ſi A B, C D, coirent ad partes A, & C, in puncto K, erit rurſus eadem ratione angulus externus D H G, æqualis interno, & oppoſito A G H, quod eſt abſurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D. Quare parallelæ erunt. Eodẽ modo, ſi ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonſtrabitur lineas A B, C D, eſſe parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat oſtendẽdum.



a 16. primi.

SCHOLIVM.

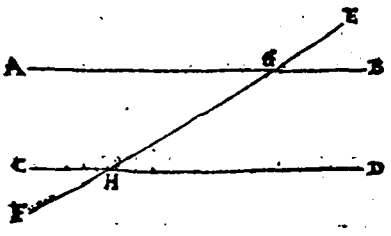
Necesse eſt, vt linea, quæ dicũtur parallelæ, in eodem exiſtant plano, vt ex definitione conſtat: Quarè non ſatis eſt duos angulos alternos æquales inter ſe eſſe, vt quæ lineæ probentur eſſe parallelæ, niſi ponatur, eas in vno eodemq; exiſtere plano. Fieri enim poteſt, vt linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano exiſtentes, faciat alternos angulos æquales. Sit enim C D, perpendicularis ad A B, rectam, quæ in ſubiecto plano exiſtit; & ex C, in alio plano, ad C D, ducatur alia perpẽdicularis C E, ita vt punctũ E, intelligatur in ſublimi. Quo poſito; perſpicuũ eſt, rectam C D, incidentem in rectas C E, A B, facere duos angulos E C D; A D C, alternos æquales, cùm ſint recti; & tamen C E, A B, non ſunt parallelæ, q; non in eodem exiſtant plano. Non appoſuit autem Euclides in propoſitione hanc conditionem; in eodem plano exiſtentes: ſicut neque in ſubſequentibus; quoniam cùm in prioribus ſex libris agatur de planis duntaxat, vt ſuprà diximus, omnia intelligenda ſunt neceſſariò in eodem plano exiſtere. In 11. verò lib. & alijs, qui ipſum ſequuntur, mõnebit ſemper, lineas aliquas in eodem eſſe plano, vel in diuerſis planis; quia in illis libris differitur de ſolidis, in quibus diuerſa plana conſiderari poſſunt. Quod idem dicendum eſt de punctis extra lineas, & ſuperficies, &c.



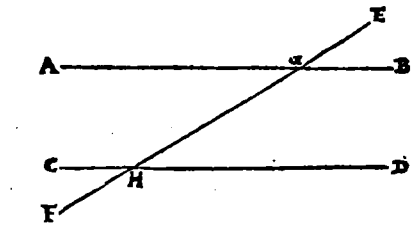
PROBL. 19. PROPOS. 28. 28.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad eaſdẽ partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

In duas rectas A B, C D, recta incidens E F, faciat primò externũ angulum E G A, æqualem angulo interno, & oppoſito ad eaſdẽ partes G H C. Dico rectas A B, C D, eſſe parallelas. Quoniam enim angulo E G A, æqualis ponitur angulus G H C; & eidem angulo E G A, [a] æqualis eſt angulus H G B; [b] erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales. Quare lineæ A B, C D, [c] parallelæ erunt. Idem oſtendetur, ſi angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D.



a 15. primi.
b 1. pron.
c 27. primi.



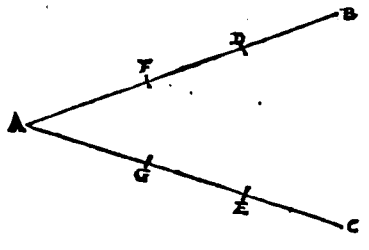
a 13. primi.

DEINDE faciat recta E F, angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rursus rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniã enim anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli A G E, A G H, [a] duobus rectis æquales: Erunt duo anguli A G H, C H G, duobus angulis A G E, A G H, æquales. Ablato igitur communi angulo A G H, remanebit angulus A G E, externus angulo C H G, interno, & opposito ad easdẽ partes æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ A B, C D, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

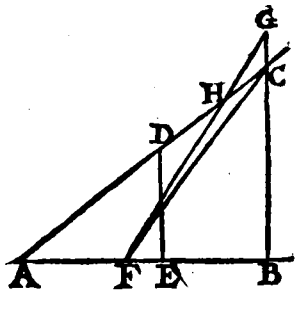
IAMDVDVM pronunciatum tertiumdecimum à Principiorum numero reiecimus. Cùm igitur sequens propositum 29. cum multis alijs illi ita innitatur, vt sine eius auxilio demonstrari nequeat, operæpretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonstratis theorematibus, atque problematibus, qua ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demonstratione confirmare, vt in expositione dicti Axiomatis polliciti sumus. Primo autem loco demonstrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accuratè, atque euidentiùs demonstrabimus. Proclus igitur, antequàm illud demonstret, duo præmittit. Primum est:

SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè producãtur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.



EXEANT à puncto A, duæ rectæ A B, A C, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quàm F, & G: Item puncta B, & C, plus quàm D, & E, & ita deinceps, si producantur vltrà rectæ lineæ A B, A C, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinitè ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia: igitur & lineæ ipsæ vltrà produci, quod est absurdum, cùm ponantur infinitè iam esse productæ. Quare si dictæ lineæ A B, A C, producantur infinitè, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam. Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de Cœlo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum.

QVOD autem rectæ A B, A C, quò longiùs protrahantur, eò magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cùm dixit puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare, quàm F, & G. Item B, & C, plus, quàm D, & E, &c.) hac ratione demonstrabimus. Demittantur ex punctis C, D, vtcunque in rectam A C, acceptis, ad A B, perpendiculares C B, D E, quæ distantias punctorum C, D, à recta A B, metientur, cùm sint minimæ omnium rectarum ex C, D, ad A B, ductarum, vt in corollario propositum 19. ostendimus. Dico C B, maiorem esse, quàm D E, ac proinde plus distare rectam A C, à recta A B, in puncto C, remotiore, quàm in puncto propinquiore D. Si enim C B, non est maior, quàm D E, erit vel æqualis, vel minor. Sit primùm æqualis, & recta A E, abscindatur æqualis B F, ita vt punctum F, cadat vel inter A, & E, vel in E, vel denique inter E, & B; ducatur q3 recta F C. Quoniam igitur duo latera A E, E D, trianguli A E D, duobus lateribus F B, B C, trianguli F B C, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulos q3 continẽt æquales, vtpote rectos: [a] *erũt & bases A D, F C, & anguli D A E, C F B, inter se æquales. Igitur externus angulus C F B, interno D A E, æqualis erit.* [b] *quod est absurdũ. Vel cùm externus angulus C F B, interno D A E, æqualis sit,* [c] *parallelæ erunt A C, F C. quod etiam absurdum est, cùm in C, concurrant.*



a 4. primi.
b 16. primi.
c 27. primi.

SIT deinde C B, minor quàm D E, si fieri potest, & producta B C, fiat B G, ipsi D E, æqualis, iungatur q3 recta F G. Quia igitur duo latera A E, E D, trianguli A E D, duobus lateribus F B, B G, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulos q3 continent æquales, puta rectos, [d] *erunt & bases A D, F G, & anguli E A D, B F G, inter se æquales. Igitur externus angulus B F G, interno E A D, æqualis erit. quod est absurdum. Vel cùm externus angulus B F G, interno E A D, æqualis sit,* [e] *erunt A C, F G, inter se parallelæ, quod absurdum etiam est, cùm se mutuò secent in H. Quocirca B C, ipsa E D, maior erit, cùm neque æqualis, neque minor esse posit, vt demonstratum est.*

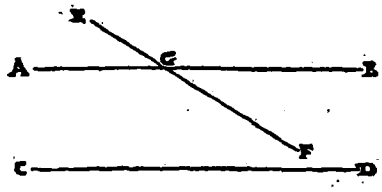
d 4. primi.
e 27. primi.

SECVNDVM, quod Proclus præmittit, huiusmodi est:

SI duarum parallelarum rectarũ alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit.

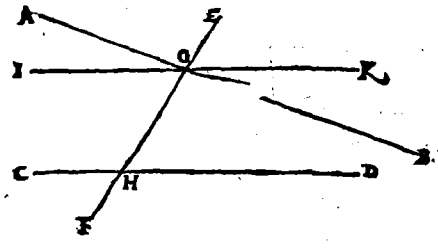
SINT duæ parallelæ A B, C D, & recta E F, secet ipsam A B, in G. Dico rectam E F, si producatur, sectu-

ram



ram esse quoq; ipsam C D. Quoniam duæ rectæ G B, G F, in puncto G, angulum faciunt, si producantur infinitè, excedent omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela A B, à parallela C D, distat, cùm hæc distantia sit finita, aliàs enim nõ essent lineæ parallelæ. Quare quando distantia G B, à G F, maior iam fuerit ea; quæ inter parallelas est; necesse est rectam G F, productam secuisse rectam C D. Nam quàmdiu G F, continebitur inter duas parallelas, minori distantia à G B, remouebitur, quàm C D, ab eadem G B; vt constat. His igitur ita expositis, facilè demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, tertiumdecimum pronunciatum.

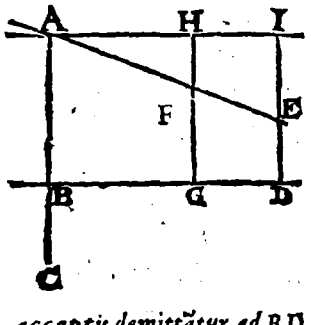
Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinitè productæ sibi mutuò incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



In rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt B G H, D H G, duobus rectis minores. Dico rectas A B, C D, coire ad easdem partes B, & D. Quoniam enim duo anguli B G H, D H G, minores ponuntur esse duobus rectis; Sunt autem duo anguli D H G, D H F, [a] duobus rectis æquales: Erunt duo anguli D H G, D H F, maiores duobus angulis D H G, B G H. Ablato ergo cõmuni angulo D H G, remanebit angulus D H F, [b] maior angulo B G H. Si igitur ad rectam F G, & ad punctum G, [c] constituatur angulus K G H, æqualis angulo D H F, cadet G K, supra G B, [d] secabit q; producta rectam A B. Quoniam igitur in duas rectas I K, C D; recta incidens E F, facit angulum externũ D H F, æqualem interno, & opposito K G H; [e] Erunt rectæ I K, C D; parallelæ. Secat autem recta A B, ipsam I K, in G; Producta igitur secabit quoq; ipsam C D, vt demonstratum est. Quare A B, cum C D, conueniet ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod est propositum.

a 13. primi:
b 5. pron.
c 23. primi:
d 11. pron.
e 28. primi:

Hac ergo ratione conatur Proclus Axioma 13. demonstrare. Sed quoniam principium, quod primo loco præmisit, æque dubium, & obscurum esse videtur, at q; illud Axioma, afferemus nos demonstrationẽ magis accuratã, si prius doceamus, in quo difficultas, siue obscuritas principij illius à Proclo assumpti consistat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum sententia sine demonstratione concedendum non est, duas rectas, quæ semper sibi mutuò fiunt propinquiores, tandẽ aliquando concurrere, licèt sit verisimũ, cuiusmodi sunt duæ rectæ, in quas recta incidens facit internos duos angulos ex eadẽ parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus sit, & alter acutus: Hæ enim sibi mutuò appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores existunt, vt mox demonstrabimus; Quemadmodum, inquã, concedendũ hoc sine probatione non est, propterea q; dari possunt in eodem plano duæ lineæ, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel linea conchoideos, sibi semper mutuò magis ac magis appropinquantes, quæ tamen nunquam coëant, licèt in infinitũ ambæ producantur, quorũ illud ab Apollonio Pergæo, hoc verò à Nicomede demonstratum est: Ita quoq; non videtur sine demonstratione admittendum esse, (quanquam verisimum sit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, si in infinitum producantur ambæ, licet semper magis ac magis inter se distent, vt nos suprà demonstrauimus. Nam exhiberi possunt duæ lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta vna, & altera inflexa, quæ conchoideos appellatur à Nicomede, semper magis ac magis inter se distantes, quarum tamen distantia data quamcunque rectam lineam

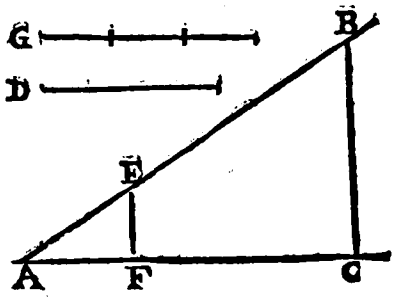


nunquam superet, aut exæquet, licèt ambæ extendantur in infinitum. Data namque sit recta A B. Dico describi posse lineam rectam & inflexam, quarum vna ab altera semper magis recedat, distantiam tamen earũ nunquam æqualem esse rectæ A B, aut maiorem, quantumuis producantur ambæ. Producta enim recta A B, quantumlibet vsque ad C, ducatur per B, ad A C, perpendicularis B D; & polo C, interuallo autem A B, describatur linea conchoideos A E, inflexa nimirum linea, quæ rectæ B D, fiat quidem semper propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, vt à Nicomede traditur. Deinde per A, excitetur recta A I, ad A C, perpendicularis, quæ [f] ipsi B D, parallela erit. Postremò ex duobus punctis H, I, vtcunque in recta A I, acceptis demittãtur ad B D, perpendiculares H G, I D, [g] quæ parallelæ, [h] at q; adeò æquales inter se erunt, angulósque [i] constituent ad H, I, rectos. Admittantur enim nunc, vt propositum ostendamus, omnes demonstrationes Euclidis, ac si ex axiomate decimotertio non penderent, aut etiamsi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac si axioma illud iam sit demonstratum ante propositionem 29. huius libri, vbi primùm vsus illius apparere incipit: vti verè à nobis mox ante propositionem 29. demonstrabitur. Ita q; quoniam F G, maior est, quàm E D, vt Nicomedes demonstrauit, erit F H, reliqua minor, quàm reliqua E I. Magis ergo inter se distant lineæ A I, A E, in punctis I, E, quàm in punctis H, F; at q; ita semper eas probabimus magis ac magis distã-

f 28. primi:
g 28. primi:
h 34. primi.
i 29. primi:

re, si longiùs protendantur. Distantia nihilominus semper minor erit, quàm recta A B, hoc est, quàm perpendicularis ex recta A I, ad rectam B D, demissa, cùm inflexa linea A E, ad rectam B D, nunquam perueniat, vt demonstratum est à Nicomede.

SCIO principium illud Procli in lineis rectis esse verissimum, & quod facili negotio, si omnes demonstrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonstrari possit hoc modo: Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A, & data sit recta D, cuiusuis magnitudinis. Dico distantiam rectarum A B, A C, in infinitum productarum excedere magnitudinem D. Nam ex quouis puncto E, in recta A B, sumpto demittatur ad A C, perpendicularis E F, quæ si maior fuerit, quàm D, constat propositum: si verò non est maior, sumatur eius multiplex proximè maior, quàm D, nempe G. Sumpta autem A B, ipsius A E, ita multiplici, vt multiplex est G, ipsius E F, demittatur ex B, ad A C, perpendicularis B C, quã dico maiorem esse data recta D. Quoniam enim[a] est, vt A B, ad B C, ita A E, ad E F; (quòd ex corollario propos. 4. libri 6. Euclidis triangula A B C, A E F, similia sint, ob rectas B C, E F, quæ[b] parallelæ sunt.) Et permutando, vt A B, ad A E; ita B C, ad E F: erit ita multiplex B C, ipsius E F, vt multiplex est A B, ipsius A E, hoc est, vt multiplex est G, ipsius E F. Cùm ergo B C, & G, æquè multiplices sint ipsius E F, ipsæ erunt inter se æquales. Est autem, ex constructione, maior G, quàm D. Igitur & B C, distantia puncti B, à puncto C, maior erit, quàm recta D, data: quod est propositum.



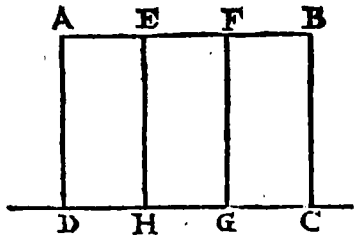
a 4. sexti.

b 28. primi.

VERVM demonstratio hæc sine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13. demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Quæ cùm ita sint, sedulò dedimus operam, vt illud ipsum Euclidis axioma demonstraremus ex ijs solùm, quæ ante propositionem 29. primi libri demonstrata sunt. Ante enim propositionem 29. vsus illius axiomatis apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationem illam legendi; etsi obnixè illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitaui. Quare hanc, quæ sequitur, excogitauimus. Primùm autem præmittenda quoque sunt nonnulla, quæ licèt ad id, quod proponimus, demonstrandum requirãtur necessariò, multò tamen euidentiora sunt, ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione exclusa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi.

I.

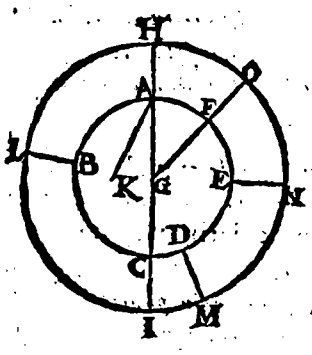
LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.



VT si omnia puncta lineæ A B, à recta D C, æqualiter distent, hoc est, omnes perpẽdiculares, quales sunt A D, E H, F G, B C, ad D C, demissæ æquales sint, (perpendicularis enim qualibet, cùm sit omnium ex eodem puncto ad rectam D C, ductarum minima, ex corollario propositionis 19. huius libri, distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit A B, linea recta. Hoc autem ex definitione lineæ rectæ liquidò constare potest. Nam si omnia puncta lineæ A B, æqualiter distant à recta D C, ex æquo sua interiacebit puncta, hoc est, nullum in ea punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo susultabit, nihilq; in ea flexuosum reperietur, sed æquabiliter semper inter sua puncta extendetur, quemadmodum recta D C. Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta D C, distantiam haberent, quod est contra hypothesin. Neque verò cogitatione apprehendi potest, aliam lineam præter rectam, posse habere omnia sua puncta à recta linea, quæ in eodem cum illa plano existat, æqualiter distantia. Est sanè principium hoc, ex quo solo concesso, vnà cum ijs, quæ vsque ad propositionem 29. huius libri ostensa sunt, Axioma decimumtertium demonstrabimus, adeò clarum, vt lumine naturali cognitum sit, nemoq; sanæ mentis illud negare possit. Aut certè citra omnem controuersiam est eiusmodi, vt longè facilius ei quilibet assentiatur, quàm illi axiomati decimotertio Euclidis.

IDEM prorsus in linea circulari contingit. Nam etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cuius omnia puncta æqualiter à circulari distant, id est, à qua omnes rectæ in circularem lineam ad æquales angulos incidentes æquales sunt, circularis quoque est; ita vt naturam circularis lineæ, à qua æquali semper distantia abest, induat: quemadmodum linea æqualiter semper à recta linea distans, naturam lineæ rectæ, cui semper æquidistat, induit, propterea quæque recta est, vt diximus. Quòd autem inflexa illa linea circa lineam circularem sit quoque perfectè circularis, facilè ostendemus, si prius demonstremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circunferentia angulos binos æquales; & contrà, rectam, quæ æquales cum circunferentia angulos constituat, per centrum transire.

SIT



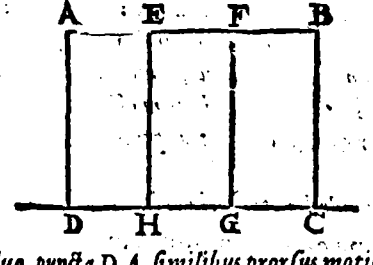
Sit igitur circulus A B C D E F, cuius centrum G. Dico rectam G C, ex centro ductam efficere tam angulos internos G C B, G C D, quàm externos I C B, I C D, inter se æquales. Producta enim I G, vsque ad A, si semicirculus A B C, circa diametrum A C, intelligatur circumuerti, congruet in semicirculo A E C, cum semicirculi eiusdem circuli sint inter se æquales. Quòd si quis dicat, vnum semicirculum alterum intersecare, ducenda erit recta linea ex centro G, secans vtramque circunferentiam, colligendúmque partem toti esse æqualem, nimirum semidiametrum vsque ad interiorem circunferentiam, semidiametro ad exteriorem vsque circunferentiam ducta. quod absurdum est. Anguli igitur ad C, tam interni, quàm externi inter se congruẽt, ac proinde æquales erunt. Efficiat iam recta H A K, æquales angulos ad A. Dico eam per centrum transire. Si enim non transeat, ducatur ex centro G, ad A, recta G A, quæ ex proximè demonstratis angulos G A B, G A F, constituet æquales. Non ergo æquales sunt K A B, K A F. Quod est contra hypothesin.

Hoc ostenso, ambiat inflexa linea H L I M N O, circularem lineam, A B C D E F, omniáque eius puncta ab hac æqualiter absint, id est, omnes rectæ ab ea linea in circularem lineam cadentes, efficientesq; angulos æquales, sint inter se æquales, cuiusmodi sunt H A, L B, I C, M D, N E, O F. Hæ enim cùm, vt demonstratum est, per centrum transeant, [a] *erunt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in conuexam peripheriam cadentium, minimæ; (Hoc enim demonstratum est ab Euclide propositione 8 libri 3. quæ solùm ex propositionibus, quæ 29. huius libri antecedunt, pendet, vt iure optimo huc transferri possit) atque adeò eorum distantias à subiecta linea circulari metientur. Dico lineam H L I M N O, esse circularem. Cùm enim omnes, vt proximè ostendimus, per centrum G, transeant, si æqualibus H A, O F, addantur æquales A G, F G, erunt totæ H G, O G, æquales, eademq; ratione omnes aliæ ex linea inflexa H L I M N O, ad G, ductæ æquales erunt, & rectis H G, O G, & inter se. Ex definitione circuli igitur linea inflexa circularis est. Quod erat demonstrandum. Ex hoc primo, quod præmisimus, sequitur secundum, videlicet.* [a] 28. tertij.

II.

Si recta linea super aliam rectam in transuersum moueatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremum lineam quoq; rectam.

Vt si in priore figura recta A D, ad D C, perpendicularis moueatur in transuersum super rectam D C, constituens cum ea in D, semper rectos angulos, hoc est, non titubans, aut vacillans, sed æquabiliter semper incedens, describet extremum A, rectam quoq; lineam, nempe A B. Constat hoc ex eo, quod primo loco præmisimus, propterea quòd omnia puncta lineæ A B, descriptæ æqualiter à recta D C, distant, nimirum per rectam A D. Ex quo fit, ipsam lineam rectam esse, cùm, vt ibi dictum est, eius media ab extremis non subsultent, sed æqualiter inter ipsa iaceant, quippe cùm nullum eorum magis aut minùs à recta C D, abscedat sursum, aut deorsum vergẽdo, quàm aliud. Patet hoc etiam ex iis, quæ ad definitionem lineæ rectæ scripsimus. Cùm enim duo puncta D, A, similibus prorsus motibus ferantur, (quòd recta A D, in suo motu non titubet, aut vacillet, sed puncta D, A, æquè velociter incedant, æqualiterq; semper inter se distent:) describent vtique lineas similes, vt in eadem definitione docuimus. Cùm ergo punctum D, rectam D C, describat, erit quoque linea A B, quam punctum A, describit, recta. Neque verò imaginari quis poterit, si linea recta in transuersum moueatur vniformiter sine vlla titubatione huc atque illuc, duo puncta eius extrema describere duas differentes inter se lineas; sed qualem vnum extremum describit, talem quoque ab altero extremo describi necesse est, propter vniformem illum, æquabilémque motum vtriusque puncti extremi. Est principium hoc æquè clarum, & euidens, atque antecedens.



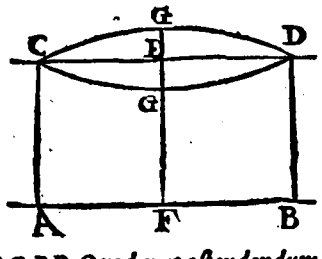
Contingit autẽ idem omnino in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea super lineã circularẽ in transuersum fluens æquabiliter, constituens nimirum in suo extremo cum circulari æquales semper angulos, non vacillando, aut deflectendo huc atque illuc, circularem lineam altero suo extremo describit, ita vt naturam circularis lineæ subiectæ, à qua æqualiter semper distat, linea illa descripta induat: quemadmodum linea recta A D, super rectam D C, in transuersum fluens æquabiliter, constituẽs nimirum cum ea in suo extremo D, angulos semper rectos, ita vt nusquam declinet, huc atque illuc deflectendo, aut titubando, lineam rectam A B, altero extremo A, delineat: adeò vt linea descripta A B, naturam induat rectæ lineæ subiectæ D C, à qua æqualiter semper recedit. Rectam autem, quæ super lineam circularem in transuersum fluit æquabiliter, describere altero suo extremo lineam quoque circularem, facilè demonstrabimus. Mouentur enim in figura posteriore recta H A, in transuersum super peripheriam A B C D E F, æquabiliter, faciens semper in extremo A, cum ea angulos æquales. Dico lineam H L I M N O, ab altero extremo H, descriptam esse quoq; circularem. Cùm enim recta H A, in omni situ motus illius imaginarij faciat æquales angulos cum peripheria

Huc pertinet prima huius pagi nx figura.

ABCDEF, sit vt ea producta in centrum G, cadat, vt suprà ostendimus. Quare additis rectis aequalibus HA, OF, ad rectas aequales AG, FG, fient tota recta HG, OG, & oēs alia, inter se aequales: ac propterea ex definitione circuli HLIMNO, circunferentia circuli erit. Quod ostendendum erat. Hinc sequitur tertium.

III.

Si ad rectam lineā duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.



Sint ad rectam AB, erecta duæ perpendiculares AC, BD, inter se aequales: Et ducta recta CD, demittatur ex quolibet eius puncto E, ad AB, perpendicularis EF. Dico EF, vtrique AC, BD, esse aequalem. Si namque aequalis non est, erit vel maior, vel minor. Abscissa ergo aequali FG, si intelligatur recta AC, moueri intransuersum per rectam AB, faciens cum ea angulos semper rectos, describet punctum C, lineā rectam per G, transeuntem, vt suprà ostensum est, qualis est CGD. Duæ ergo rectæ CED, CGD, superficiem claudent. Quod est absurdum. Aequalis igitur est EF, vtriq; AC, BD. Quod erat ostendendum. Ex hoc quartum, quod sequitur, demonstrabimus.

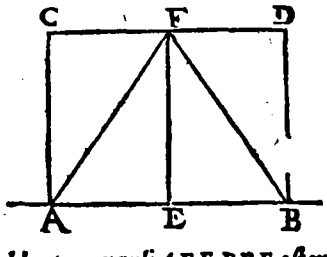
IV.

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarū extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.

Sint ad rectam AB, erecta duæ perpendiculares AC, BD, aequales inter se, ducatur q; recta CD. Dico vtrumq; angulum C, D, rectum esse. Secta namq; recta AB, bifariam in E, excitetur in E, ad AB, perpendicularis EF, iungantur q; rectæ AF, BF. Quoniā igitur duo latera AE, EF, trianguli AEF, duobus lateribus BE, EF, trianguli BEF, aequalia sunt, vtrumq; vtrique, angulos q; continent aequales, puta rectos, [a] *erunt quoq; & bases AF, BF, & tam anguli FAE, FBE, quàm AFE, BFE, inter se aequales. Ablatis igitur aequalibus angulis FAE, FBE, ex rectis aequalibus CAE, DBE, reliqui erunt aequales anguli CAF, DBF. Itaq; cùm duo latera CA, AF, trianguli CAF, duobus lateribus DB, BF, trianguli DBF, aequalia sint, angulos q; cōplectantur aequales, vt ostēdimus,* [b] *erūt quoq; & bases CF, DF, & tam anguli C, D, quā CFA, DFB, inter se aequales. Si ergo aequalibus angulis CFA, DFB, addantur anguli AFE, BFE, ostensi aequales, fient toti anguli CFE, DFE, aequales, ac proinde recti. Quia verò perpendicularis EF, vtriq; AC, BD, aequalis est, vt proximo theoremate ostendimus, erunt duæ rectæ AC, EF, ad AE, perpendiculares, inter se aequales. Quare, vt de angulis C, D, proximè probatum est, anguli C, & EFC, aequales inter se erunt. Est autem EFC, ostensus rectus. Igitur & C, rectus erit, ac proinde & angulus D, qui ostensus est ipsi C, aequalis, rectus erit.*

[a] 4. primi.

[b] 4. primi.



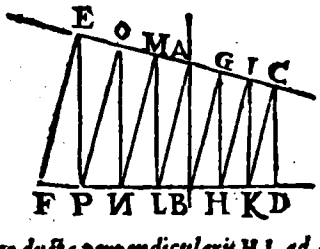
Caeterum angulos C, D, rectos esse, demonstrabimus alio modo, hoc prius theoremate præmisso.

Si in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minùs semper inter se distabūt ad eas partes; vbi est angulus acutus, ex altera verò parte semper inter se magis distabunt.

Recta linea AB, in rectas AC, BD, incidens faciat angulū ABD, rectum, & BAC, acutum. Dico rectas AC, BD, minùs semper inter se distare versus C, D, productas, magis verò, si versus E, F, producantur. [c] *Ducatur enim ex B, ad AC, perpendicularis BG, quæ ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli BAC, cadet. ac propterea angulus GBD, pars recti anguli ABD, acutus erit. Demissa ergo ex G, ad BD, perpendicularis GH, cadet quoq; ad partes anguli acuti GBD, ex eodem coroll. angulusq; propterea HGC, pars recti anguli BGC, acutus erit. Rursus ergo ducta perpendicularis HI, ad AC, per idem corollar. ad partes acuti anguli HGC, cadet, ideoq; angulus IHD, pars recti anguli GHD, acutus erit. Atq; ita deinceps in infinitum, si ex I, ad BD, perpendicularis IK, ducatur, & ex K, perpendicularis KC, ad AC, & ex C, ad BD, perpendicularis CD, &c. cadent omnes ad partes angulorum acutorum, vna post aliam. Quoniam igitur in triangulo ABG, angulus BAG, acutus est, & AGB, rectus,* [d] *erit recta AB, maior quàm BG; & in triangulo BGH, recta BG, angulo recto GHB, oppositā, maior quàm GH; & in triangulo GHI, recta GH, maior quàm HI: Atque ita deinceps erunt semper rectæ, quæ ipsi AB, propiores sunt, maiores iis, quæ remotiores sunt, & nunquam finis erit huius decrementi perpendicularium, cùm nunquam possit esse finis ducendarum perpendicularium. Quapropter recta AC, in G, minùs distabit à recta BD, q; in A, & in I, minùs, quàm in G, & in C, minùs, quàm in I, &c. quandoquidem perpendicu-*

[c] 12. primi.

[d] 19. primi.



perpendiculares A B, G H, I K, C D, &c. quæ ordinatim decreſcũt, vt oſtendimus, minimæ ſunt omnium à punctis A, G, I, C, in rectam B D, cadentium, vt ex corollario propoſ. 19. huius libri liquet, ac proinde eorundem punctorum diſtantias ab eadem recta B D, metiuntur. Conſtat ergo, rectas A C, B D, ad partes C, D, productas continenter fieri minùs inter ſe diſtantes. quod eſt primum.

DVCATVR rurſus [a] ex A, ad A C, perpẽdicularis A L, quæ angulum obtuſum B A E, particetur in rectum E A L, & acutum L A B, hoc eſt, cadet inter A B, & A E; eritq; angulus A L B, acutus, cùm ambo A B L, A L B, [b] ſint duobus rectis minores, atque A B L, rectus ſit; ac proinde angulus A L F, obtuſus erit. Eadē ratione perpendicularis L M, ex L, ad B F, ducta cadet inter L A, L F, facietq; angulum L M A, acutũ, & L M E, obtuſum. Item perpendicularis M N, ex M, ad A E, erecta cadet inter M L, M E, angulumq; M N B, acutum, & M N F, obtuſum conſtituet. Atq; ita deinceps in infinitum, ſi ex N, ad B F, perpendicularis erigatur N O, & ex O, ad A E, perpendicularis O P, & ex P, ad B F, perpendicularis P E, & ex E, ad A E, perpendicularis E F, &c. diuident omnes ſigillatim angulos obtuſos, vna poſt aliam. Quoniam igitur in triangulo A B L, angulus A B L, rectus eſt, & A L B, acutus [c] erit A L, recta maior, quàm A B, & in triangulo A L M, recta L M, angulo recto L A M, oppoſita, maior quàm A L; atq; ita in triangulo L M N, recta M N, recto angulo M L N, oppoſita, maior quàm M L: Atq; ita deinceps erunt ſemper rectæ, quæ ab A B, longiùs abſunt, maiores ijs, quæ propinquiores ſunt, in infinitum. Quamobrem recta A E, in M, magis à recta B F, diſtabit, quàm in A, & in O, magis, quàm in M, & in E, magis, quàm in O, &c. quandoquidem perpendicularis A B, M L, O N, E P, &c. quas ordinatim augeri, oſtenſum fuit, minimæ ſunt omnium ex punctis A, M, O, E, in rectam B F, cadentium, &c. Liquidò ergo conſtat, rectas A C, B D, ad partes E, F, productas continenter fieri magis inter ſe diſtantes, quod eſt ſecundum. Quòd ſi proterum quiſpiam vellet contendere, rectam A L, quæ ad A C, perpendicularis eſt, non concurrere cum D B, productæ; conſtabit multò magis id, quod demonſtrandum proponitur. Nam linea D B, vltra punctũ B, multò magis à recta C A, diſtabit, quàm in puncto B; quandoquidem A L, ad A C, perpendicularis in infinitũ producta non concurrit cum D B, cùm tamẽ G B, ad eandem A C, perpendicularis cum D B, concurrat in B, &c.

a 11. primi.

b 17. primi.

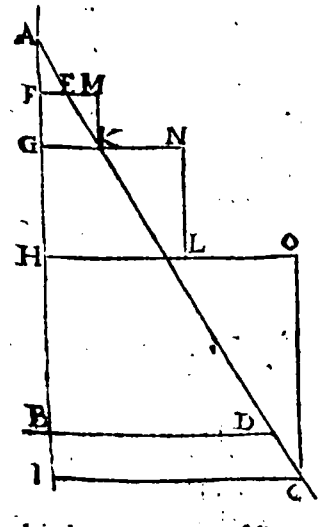
c 19. primi.

HAEC cùm ita ſint, nullo negotio demonſtrabimus, in ſuperiori figura angulos C, D, eſſe rectos. Nam ſi angulus C, verbi gratia, non dicatur eſſe rectus, erit vel acutus, vel obtuſus. Sit primùm acutus. Quoniam ergo recta C A, in rectas A B, C D, incidens efficit angulum C A B, rectum, & C, acutum, minùs ſemper inter ſe diſtabunt rectæ C D, A B, ad partes D, B, productæ, hoc eſt, perpendiculares ex C D, in A B, demiſſæ ordinatim minores fient, quàm C A, vt proximè demonſtratum eſt. Minor ergo eſt perpendicularis D B, quàm C A, quod eſt abſurdum, cùm ponatur æqualis. Non igitur acutus eſt angulus C. Eademq; ratione neq; angulus D, acutus erit. Sit deinde angulus C, obtuſus. Quia igitur recta C A, in rectas C D, A B, incidens facit angulũ C A B, rectum, & C, obtuſum, magis ſemper inter ſe diſtabunt rectæ C D, A B, ad partes D, B, productæ, hoc eſt, perpendiculares ex C D, in A B, demiſſæ continenter augebuntur, vt proximè oſtendimus. Maior ergo eſt perpendicularis D B, q̃ C A, quod eſt abſurdum, cùm æqualis ponatur. Non igitur obtuſus eſt angulus C. Eademq; ratione neq; angulus D, obtuſus erit. Sed neq; acutus eſt oſtenſus. Rectus igitur vterq; eſt, quod erat oſtendendũ.

EX his demonſtratis, facilè iam Axioma 13. demonſtrabimus hoc modo.

V.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

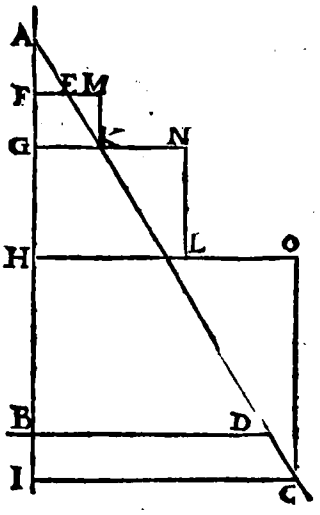


HOC eſt Axioma 13. apud Euclidem in noſtris Commentarijs; apud alios eſt vndecimum, quod demonſtrandum ſuſcepimus. Incidens ergo recta A B, in rectas A C, B D, faciat internos, ad eaſdemq; partes angulos A B D, B A C, duobus rectis minores. Dico rectas A C, B D, ad partes C, D, productas coire. Sit enim primũ alter angulorum, nempe A B D, rectus, & alter B A C, acutus. Sumpto in recta A C, puncto quolibet E, [d] ducatur ex eo ad rectam A B, perpẽdicularis E F, & recta A F, æqualis accipiatur F G, & G H, æqualis ipſi A G, & H I, ipſi A H, ita vt A G, ipſius A F, & A H, ipſius A G, & A I, ipſius A H, dupla ſit. Et quoniam ſi recta A F, abſcindantur continuè æquales rectæ ex A B, aliqua tandem pars vltra B, punctum cadet, quod finita recta A B, per continuam ablationẽ vnius eiuſdemq; quantitatis abſumatur tandem, quandoquidem linea A F, ita multiplicari poteſt, (quod fit, ſumendo ipſi in A B, continenter partes æquales) vt tandem aliquando finitam lineam A B, ſuperet: Id quod Euclides frequenter aſſumit in lib. 5. & alijs ſequentibus, vbi datis duabus magnitudinibus inæqualibus, proportionem inter ſe habentibus, iubet plerunque minorem ita multiplicari, donec maiorem ſuperet. Fit vt multò magis, ſi ipſi A F, æqualis abſcindatur F G, & toti deinde A G, non autem ſoli A F, æqualis auferatur G H: Item toti A H, non autem ſoli A F, vel A G, æqualis dematur H I, & ſic deinceps, cadat tandem pars aliqua vltra punctum B. Statuatur ergo punctum I, terminans

d 12. primi.

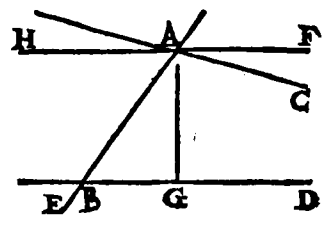
tertiam duplam in dato exemplo, existere vltra punctum B. Accipiatur quoq; in recta A C, recta E K, ipsi A E, & K L, ipsi A K, & L C, ipsi A L, æqualis, ita vt tot sint partes in recta A C, quot in recta A I; ducanturq; recta K G, L H, C I, producanturq; vnà cum E F, vt E M, K N, L O, ipsis E F, K G, L H, fiant æquales, ac tandem rectæ iungantur, M K, N L, O C. Itaq; quoniam duo latera K E, E M, trianguli K E M, duobus lateribus A E, E F, trianguli A E F, per constructionem æqualia sunt, vtrumque vtrique, [a] *angulos q; ad verticem E, continet æquales,* [b] *erit & basis M K, basi A F, & angulus M, angulo F, æqualis. Est autem & F G, eidem A F, æqualis, & angulus F, rectus, ex constructione. Igitur & M K, F G,* [c] *æquales inter se erunt, & angulus M, quoq; rectus. Quare cùm ad F M, excitatæ sint duæ perpendiculares æquales F G, M K, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursus ergo, quia duo latera L K, K N, trianguli L K N, duobus lateribus A K, K G, trianguli A K G, æqualia sunt, ex constructione,* [d] *angulos q; comprehendunt æquales ad K, verticē,* [e] *erit & angulus N L, basi A G, & angulus N, angulo G, æqualis. Est autem & G H, ex constructione, eidem A G, æqualis, & angulus G, rectus, vt proximè demonstratum est. Igitur & N L, G H, inter se* [f] *erūt æquales, & angulus N, quoq; rectus. Quocirca per præcedens theorema, erit etiam angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, rectum esse: atque ita deinceps, si plures essent partes rectæ A B. Est autem & angulus B, per hypothesin rectus. Igitur rectæ I C, B D, E parallelæ sunt; ac propterea B D, producta rectam A C secabit supra punctum C; atq; adeò in puncto illo sectionis rectæ A C, B D, coibunt. Quod erat demonstrandum.*

a 15. primi.
b 4. primi.
c 1. pron.
d 15. primi.
e 4. primi.
f 1. pron.
g 28. primi.



Sit deinde neuter angulorū A B D, B A C, rectus, sed A B D, quidem acutus, & B A C, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli A B D, B A C, duobus rectis ponuntur minores; [h] *sunt autem duo anguli A B D, D B E, duobus rectis æquales: erūt hi duo illis duobus maiores. Ablato ergo communi A B D, maior erit reliquus D B E, reliquo B A C.* [i] *Constituatur in A, ad rectam A B, angulus B A F, angulo D B E, æqualis: Cadetq; recta A F, supra rectam A C; cùm A F, maiorem angulum cum A B, constituat, quàm A C. Quia igitur externus angulus D B E, interno B A F, ex eadem parte oppositio æqualis est,* [k] *erunt rectæ A F, B D, inter se parallelæ. Demittatur quoq; ex A, ad B D,* [l] *perpendicularis A G, quæ ex corollario 2 propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli A B D, cadet: Erit q; angulus quoq; G A F, rectus. Nam si acutus esse dicatur, efficiet recta A G, in rectas A F, B D, incidēs angulū A G D, rectum, & G A F, acutum, ac proinde, vt proximè demonstrauimus, rectæ A F, B D, ad partes F, D, productæ coibunt tandem: Quod est absurdum: Ostensæ enim sunt parallelæ. Si autem angulus G A F, dicatur esse obtusus, erit G A H, acutus. Quare ex proximè demonstratis, coibunt rectæ A F, B D, ad partes H, B, productæ, quod est absurdū, cùm parallelæ sint ostensæ. Non est ergo angulus G A F, acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde eius pars G A C, acutus. Quoniam igitur recta A G, in rectas A C, B D, incidens facit angulum G, rectum, & G A C, acutum, concurrent rectæ A C, B D, ad partes C, D productæ, vt proximè demonstrauimus. Si igitur recta A B, in rectas A C, B D, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum A B D, B A C, rectū, ipsæ rectæ, A C, B D, ad partes C, D productæ conuenient. Quod erat ostendendum.*

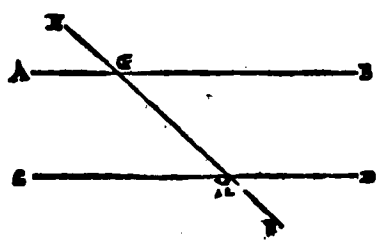
h 13. primi.
i 23. primi.
k 28. primi.
l 12. primi.



Quamvis autem, concesso principio nostro, optimè à nobis demonstratum sit 13. hoc Axioma, & à Proclo etiam, si eius principium difficilius quidem, quàm nostrū, admittatur, vt iure optimo inter theoremata, & non inter principia possit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vt eumur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato. Sed iam ad seriem propositionum Euclidis reuertamur.

29. THEOR. 20. PROPOS. 29.

In parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & oppositio, & ad eadem partes æqualem; & internos, & ad eadem partes, duobus rectis æquales facit.



In parallelas A B, C D, recta incidat E F. Dico primùm angulos alternos A G H, D H G, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe A G H, maior. Quoniam igitur angulus A G H, maior est angulo D H G, si addatur cōmunis angulus B G H, [a] *erunt duo A G H, B G H, maiores duobus D H G, B G H: At duo A G H, B G H,* [b] *æquales sunt duobus rectis. Igitur duo D H G, B G H, minores sunt duobus rectis. Quare cū sint interni, & ad eadē partes B, & D,* [c] *coibunt lineæ A B, C D, ad eas partes, quod est absurdū, cùm*

a 4. pron.
b 13. primi.
c 13. pron.

ponantur

ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus A G H, maior angulo D H G: Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli alterni A G H, D H G. Eademque est ratio de angulis alternis B G H, C H G.

Dico secundò, angulum externum A G E, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito C H G. Quoniam enim angulo B G H, æqualis est alternus C H G, vt ostensum est; & eidem B G H, [a] æqualis est angulus A G E; Erunt anguli A G E, C H G, [b] inter se quoque æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum B G E, æqualem esse angulo D H G.

a 15. primi.
b 1. pronun.

Dico tertiò, angulos internos ad easdē partes A G H, C H G, æquales esse duobus rectis. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum A G E, æqualem esse angulo C H G, interno; si addatur cōmunis A G H, [c] erūt duo A G E, A G H, duobus C H G, A G H, æquales: Sed duo A G E, A G H, [d] æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli C H G, A G H, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli B G H, D H G, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

c 2. pron.
d 13. primi.

SCHOLIVM.

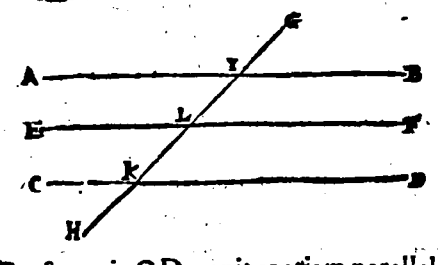
Convertit autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, vt perspicuum est.

THEOR. 21. PROPOS. 30.

30.

QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectæ A B, C D, eidē rectæ E F, parallelæ. Dico & ipsas A B, C D, esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. libri 11. agitur de lineis in diuersis planis) ducta recta G H, secabit omnes, nimirum A B, in I; C D, in K; & E F, in L. Quia igitur A B, ponitur parallela ipsi E F, [a] erit angulus A I L, alterno F L I, æqualis.



a 29. primi.

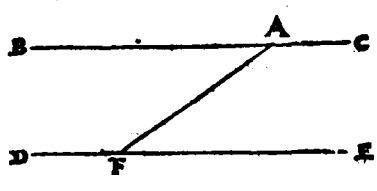
Rursus quia C D, ponitur etiam parallela ipsi E F, [b] erit angulus D K I, eidem angulo F L I, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli A I L, D K I, [c] æquales inter se quoq; erunt. Cùm igitur sint alterni, [d] erunt rectæ A B, C D, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.

b 29. primi.
c 1. pronun.
d 27. primi.

SCHOLIVM.

Qvod si quis dicat, duas rectas A I, B I, parallelas esse rectæ C D, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendum est, duas A I, B I, nō esse duas lineas, sed partes tantùm vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinitè esse productas; Constat autem A I, productam coincidere cum B I. Quamobrem propositio hæc generaliùs ita poterat proponi.

QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certè, quando inter se coëunt, vnam eandemque lineam constituunt.



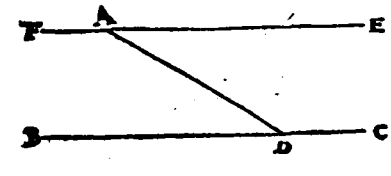
SINT enim duæ rectæ A B, A C, coëuntes in A, parallelæ ipsi D E. Dico illas in rectum esse cōstitutas. Ex puncto enim A, ducatur recta A F, secans D E, in F, vtcunq;. Quoniam igitur A B, D E, sunt parallelæ, [a] erūt anguli alterni B A F, A F E, æquales. Addito ergo communi angulo C A F, [b] erūt duo anguli ad A, æquales duobus angulis C A F, A F E. Sed hi duo æquales [c] sunt duobus rectis, cùm sint interni inter duas parallelas A C, D E. Igitur & duo anguli ad A, duobus erūt rectis æquales; ac propterea [d] in rectum erunt constitutæ ipsæ A B, A C. Quod est propositum.

a 29. primi.
b 2. pron.
c 29. primi.
d 14. primi.

PROBL. 10. PROPOS. 31.

31.

A DATO puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.



Ex puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ B C. Ducatur ex A, ad B C, linea A D, vtcunq;, faciens angulum quemcunque A D B; Cui ad A, [a] æqualis cōstituatur E A D. Dico rectam E A, extensam ad F, quantumlibet, parallelā esse ipsi B C. Cùm enim anguli alterni A D B, D A E, æquales sint per constructionem: [b] Erunt rectæ B C, E F, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

a 23. primi.
b 27. primi.

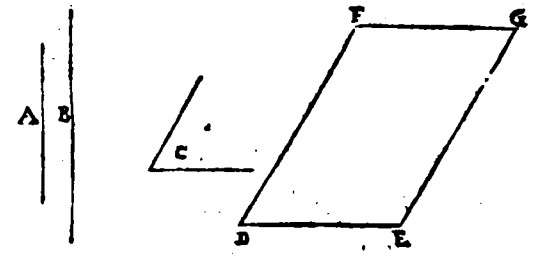
SCHOLIVM.

Debet autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, vt hæc productæ cū illo non conueniat. Quod quidē apertè colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est

linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quàm vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, date rectæ plures parallelæ, quàm vna, duci nequeunt. Si enim duæ ducerentur, conuenirent ipsæ in puncto illo eodem, quod est absurdum, [a] *cùm sint parallelæ inter se, propterea quòd vni & eidem, cui parallelæ dicuntur duci, sunt parallelæ.*

a 30. primi.

Ex hoc porrò problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis sit, dato angulo rectilineo, lateraq; angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.

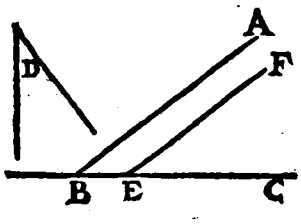


b 23. primi.
c 3. primi.
d 31. primi.
e 35. defin.

Sint enim datæ rectæ A B, oporteatq; constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta D E, quæ rectæ A, fiat æqualis, [b] *fiat angulus E D F, angulo C,* [c] *& rectæ D F, rectæ B, æqualis. Deinde per E,* [d] *agatur recta E G, ipsi D F, parallela, & per F, recta F G, ipsi D E, parallela secans E G, in G. Quoniam ergo & latera D F, E G, & D E, F G, parallela sunt, ex constructione;* [e] *parallelogrammum erit D E G F. Quod cùm ex constructione, habeat angulum D, angulo dato C, æqualem, & latera D E, D F, circa dictum augulum D, datis rectis A, B, æqualia; factum erit, quod proponitur.*

Pari ratione ex hoc problemate, & propositione 23. ducemus à puncto extra datam rectam lineam propositò lineam rectam, quæ cum data recta angulum efficiat, dato angulo rectilineo æqualem, vt ad propositionem 23. polliciti sumus.

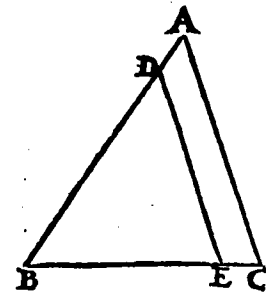
Sit enim datum punctum A, extra rectam B C, & datus angulus rectilineus D, oporteatq; ex A, ad rectam B C, ducere lineam rectam, quæ cum ea angulum, dato angulo D, æqualem comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, in linea B C, [f] *constituatur in eo angulus C E F, angulo D, æqualis. Si igitur recta E F, per datum punctum A, transeat, factum erit, quod iubetur. Si verò non transeat per A, & ducatur per A, recta A B, ipsi E F, parallela secans B C, in B. Dico angulum A B C, angulo D, æqualem esse. Cùm enim parallelæ sint A B, E F,* [h] *erit angulus C E F, externus interno A B C, ex eadem parte oppositus æqualis. Cùm ergo & angulus D, angulo E, per constructionem sit æqualis,* [i] *æquales inter se erunt anguli A B C, & D. quod est propositum.*



f 23. primi.
g 31. primi.
h 29. primi.
i 1. post.

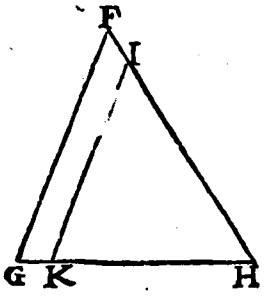
Non videtur autem alienum ostendere hoc loco, rectè Euclidem propos. 26. vt demonstraret æqualitatem laterum in duobus triangulis, ex æqualitate duorum angulorum, & vnius lateris præcepisse, latus illud vel adiacere debere angulis æqualibus, vel certè subtendere angulum æqualem. Nam nisi altera harum conditionum adsit, nihil colligetur.

Sit enim triangulum A B C, sintq; latera A B, A C, latere B C, maiora. Abscindatur B D, æqualis ipsi B C, [k] *ducaturq; D E, ipsi A C, parallela.* [l] *eritq; angulus B E D, angulo C, æqualis. Quare duo anguli B, C, trianguli A B C, duobus angulis B, E, trianguli D B E, æquales sunt, vterque vtrique, latusq; B C, lateri D B, æquale; cùm tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim B E, minus, quàm B C, atque adeò neque lateri A C, neque lateri A B, æquale esse potest; quòd hæc latera maiora ponantur latere B C. Causa huius rei est, quòd latus B C, in triangulo A B C, adiacet angulis dictis, at latus D B, in triangulo D B E, opponitur vni angulorum dictorum, nimirum angulo D E B, qui angulo C, æqualis est.*



k 31. primi.
l 29. primi.

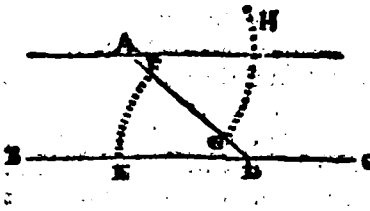
Sit rursus triangulum F G H, sintq; iterum latera F G, F H, latere G H, maiora, & F H, maius, quàm F G. Abscindatur H I, ipsi F G, æqualis, [m] *ducaturq; I K, ipsi F G, parallela:* [n] *eritq; angulus H K I, angulo G, æqualis. Sunt ergo duo anguli H, G, trianguli F G H, duobus angulis H, K, trianguli I K H, æquales, vterque vtrique, latusq; F G, lateri I H, æquale; cùm tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim H K, minus, quàm H G, atq; adeò neq; lateri H G, neq; lateri F H, æquale esse potest; quòd latus F H, maius etiam ponitur, quàm G H. Ratio huius rei est, quòd latus F G, in triangulo F G H, opponitur angulo H, at latus I H, opponitur angulo K, in triangulo I K H, qui non ponitur æqualis angulo H, sed angulo G, est æqualis,* [o] *qui maior est angulo H, propterea quòd latus F H, maius posuimus latere F G. Differimus hanc demonstrationem hunc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.*



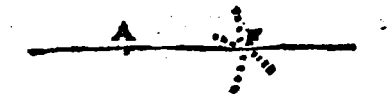
m 31. primi.
n 29. primi.
o 18. primi.

PRAXIS.

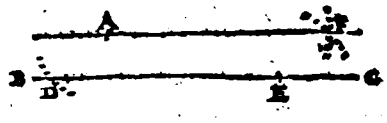
PRAXIS.



SIT ducenda parallela ipſi B C, per punctum A. Ducatur recta A D, vtcunque ad B C, & ex D, & A, ad idem interuallum quodlibet deſcribantur duo arcus ad diuerſas partes, vnus ad partes B, alter ad partes C: Deinde beneficio circini arcui E F, abſcindatur ex arcu altero arcus G H, æqualis. Si igitur ex A, per H, recta ducatur, [a] *erit hac parallela ipſi B C. Nam alterni anguli E D F, H A G, ſunt æquales, vt conſtat ex praxi propoſ. 23. &c.* [a] 27. primi.



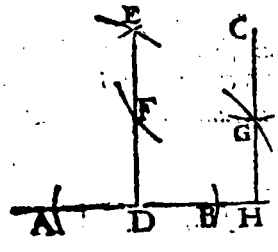
ALIO modo ducetur per idem punctum A, datum linea parallela linea data B C, hac arte: Ex centro A, ad quoduis interuallum deſcribatur arcus ſecans B C, in puncto D; & eodem interuallo ex D, ſumatur punctum E, in eadem recta B C: Deinde eodem interuallo ex A, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Nam ducta recta A F, erit parallela rectæ B C. Quoniam enim propter idem interuallum aſſumptũ recta A F, æqualis eſt rectæ D E; & recta A D, rectæ E F, ſi ducerentur hæ linea; erit A F, oppoſitæ D E, parallela, vt poſteà demonſtrabimus propoſ. 34.



QVOD ſi punctum A, vicinum fuerit rectæ B C, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, ſumatur punctũ D, in B C, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiuſdẽ rectæ B C, nempe E, quod tamẽ aliquantulum diſtet à puncto D, (Quò enim maior fuerit diſtantia inter D, & E, eò facilius, & accuratius parallela ducetur) eodem interuallo arcus deſcribatur ad partes A: Deinde ex A, interuallo D E, alter arcus deſcriptus ſecet priorem arcum in F. Recta namque ducta A F, erit parallela rectæ B C, vt prius; quia recta A F, æqualis eſt rectæ D E, ob idem interuallum; & recta A D, rectæ E F, ſi hæ rectæ ductæ eſſent, &c.

EX his facile ducemus ex puncto extremo alicuius linea perpendicularẽ lineam ad ipſam datam lineam, etiamſi linea produci non poſſit, quod in ſcholio propoſitionis 11. promiſimus. Sit enim recta A B, ex cuius extremo puncto B, educenda ſit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quouis C, abſcindatur recta C B, æqualis C A, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus deſcribãtur ſecantes ſeſe in D, ducaturq́; recta D C, quæ ad A B, perpendicularis erit, vt ad propoſitionem 11. ſcripſimus. Deinde per B ducatur ipſi C D, parallela, hoc modo, ſecundùm praxim huius 31. propoſitionis proximè explicatam. Ex C D, abſciſſa recta quantacunque C E, deſcribatur ex B, ad interuallum C E, arcus, quem in F, ſecet alius arcus ex E, ad interuallum C B, deſcriptus, ducaturq́; recta B F. Hæc namquè ipſi C D, parallela erit, vt ex praxi huius propoſitionis 31. liquet. Igitur cùm angulus A C D, [b] *æqualis ſit interno C B F; ſit autem A C D, rectus,* [b] 29. primi. *erit & C B F, rectus, ac proinde B F, ad A B, perpendicularis erit.*

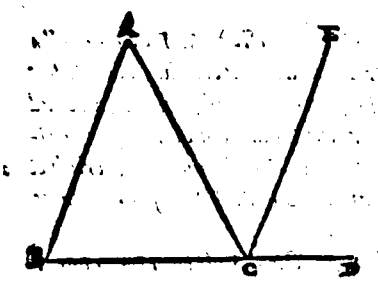
SIMILITER ſi data ſit recta A B, & punctum extra ipſam C, in extremo fere plani, in quo recta illa iacet, ducemus ex C, ad A B, perpendicularem, neque producta linea, neque extenſo plano ultra rectam A B, vt polliciti ſumus ad propoſitionem 12. hoc modo: Sumpto puncto D, vtcunque in linea A B, abſcindantur vtrinque inter ſe æquales D A, D B, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus deſcribantur, ſecantes ſeſe in E, ducaturq́; recta E D, quæ ex praxi propoſitionis 11. ad A B, perpendicularis erit. Deinde per C, ducatur ipſi D E, parallela, hoc modo, ſecundùm praxim huius propoſitionis 31. Ex dato puncto C, ad quoduis interuallum deſcribatur arcus ſecans rectam D E, in F: eodémque interuallo ex D, verſus C, alius arcus deſcribatur, quem in G, interſecet alius arcus ex G, ad interuallum D F, delineatus. Recta namque ducta ex C, per G, ſecans A B, in H, parallela erit rectæ D E, ex praxi huius propoſitionis 31. Quare, vt proximè ſcripſimus, C H, ad A B, perpendicularis erit, ſicuti & E D, ad eandem perpendicularis eſt.



THEOR. 22. PROPOS. 32. 32.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo A B C, latus B C, ad D. Dico primò, angulum externum A C D, æqualẽ eſſe duobus internis, & oppoſitis ſimul A, & B,* [a] *Ducatur enim ex C, linea C E parallela rectæ* [a] 31. primi.



a 29. primi.
b 29. primi.
c 2. prom.
d 2. pron.
e 13. primi.

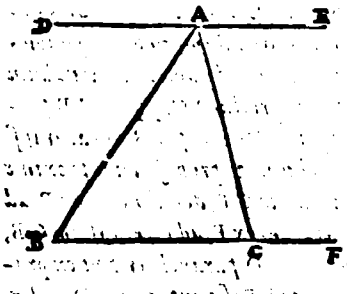
AB. Quoniam igitur recta A C, incidit in parallelas AB, CE, [a] erunt anguli alterni A, & A C E, æquales. Rursus, quia recta B D, in easdē parallelas incidit, [b] erit angulus externus D C E, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus A C E, & A, [c] fiet totus A C D, (qui ex duobus D C E, A C E, componitur) duobus A, & B, simul æqualis. Quod est propositum.

Dico secundò, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & A C B, duobus esse rectis æquales. Cùm enim externus angulus A C D, vt ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis A C B, [d] erunt duo anguli A C D, A C B, æquales tribus A, B, & A C B: Sed duo A C D, A C B, [e] æquales sunt duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, A C B, duobus sunt rectis æquales. Quare cuiuscunquè trianguli vno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Cvm demonstratum sit propositione 16. angulum externum cuiusuis trianguli maiorem esse vtrolibet interno, & opposito, hic autem, eundem externum eisdem internis simul esse æqualem, perspicuum est, alterutrum internorum, & oppositorum superari ab externo, reliquo interno angulo opposito. Vt in triangulo proposito angulus A, internus superatur ab angulo externo A C D, angulo B, interno: Et angulus B, internus superatur ab eodē externo angulo A C D, angulo A, interno, quandoquidem angulus A C D, duobus angulis A, & B, est ostensus hoc loco æqualis. Rursum, quia demonstratum est propositione 17. duos angulos cuiuslibet trianguli quomodocunque sumptos, duobus esse rectis minores, hic verò omnes tres duobus rectis æquales esse, manifestum est, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, a duobus rectis deficiunt angulo A C B, &c.

Omne porrò triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum A B C, & per punctum A, [a] *ducatur recta B C, parallela D E. Quoniam igitur* [b] *anguli alterni D A B, & A B C, æquales sunt, si addantur æquales E A C, & A C B, (sunt enim & hi alterni)* [c] *erunt duo anguli D A B, E A C, duobus A B C, A C B, æquales. Addito ergo communi angulo B A C,* [d] *erunt tres anguli D A B, B A C, C A E, æquales tribus angulis A B C, B A C, A C B. Sed anguli D A B, B A C, C A E, æquales sunt duobus rectis, vt constat ex propositione 13. Igitur & in triangulo A B C, anguli A B C, B A C, A C B, duobus sunt rectis æquales, quod est propositum. Ex hoc autem facilè concludemus, angulum externum A C F, si latus B C, sit protractum, æqualem esse duobus internis, & oppositis A B C, B A C. Quoniam enim anguli A B C, B A C, A C B, æquales sunt duobus rectis, vt ostensum fuit.* [e] *Sunt autem & anguli A C F, A C B, duobus rectis æquales; Erunt anguli A B C, B A C, A C B, angulis A C F, A C B, æquales. Dempto igitur communi angulo A C B,* [f] *remanebit angulus A C F, duobus angulis A B C, B A C, æqualis.*



a 31. primi.
b 29. primi.
c 2. pron.
d 2. primi.
e 13. primi.
f 3. pron.

Hue pertinet prima huius pagi næ figura.

Facile etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutæ. Ex C, enim ducatur C D, recta, sit q, angulus A C D, æqualis duobus angulis A B C, B A C. Dico, rectas B C, C D, in directum iacere. Cùm enim angulus A C D, æqualis sit angulis A B C, B A C, si addatur cōmunis angulus A C B, [g] *erunt anguli A C D, A C B, æquales angulis A B C, B A C, A C B. Sed A B C, B A C, A C B,* [h] *æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli A C D, A C B, duobus erunt rectis æquales. Quare B C, C D, vnam lineam rectam constituunt.*

g 2. pron.
h 32. primi.

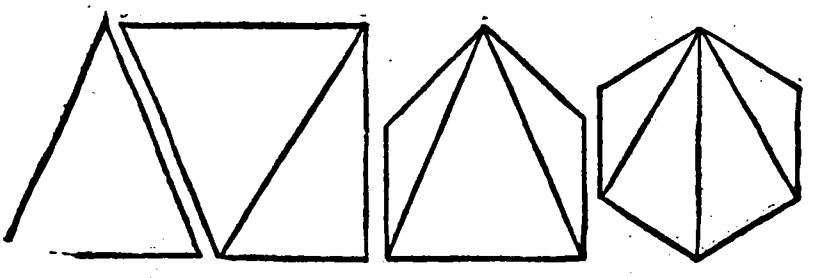
QVOT ANGVLIS RECTIS AEQVIualeant anguli omnes interni cuiuscunque figuræ rectilineæ.

Dvobvs modis ex hac propositione 32. colligemus, quotnam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

Hoc est, Omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis vni recto, id est, duobus rectis. Anguli verò secundæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertiæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis tribus rectis, sex videlicet rectis: Et sic de reliquis. Enim autem

autem locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ superficiem non concludunt, vnde nec figuram constituunt, sed cùm minimum tres rectæ lineæ ad figuræ constitutionem requiruntur. Ex quo fit, triangulum, quia habet tria latera, totidémque angulos, esse primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus, relinquitur vnum. Sic erit figura habens 20. latera, seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua cùm binarius subtractus ex 20. relinquat 18. Idem iudicium de alijs figuris est habendum. Itaque figura contẽta 20. lateribus, cùm sit decimaoctaua, habebit angulos 20. æquiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictum est. Ità quoque omnes 10. anguli figuræ 10. lateribus contentæ, æquiualebunt 16. angulis rectis, cùm talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipsa est inter figuras, seu quot ipsa habet angulos laterâue, binario dempto: Nam à quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt lineæ rectæ, solùm ad duos propinquos angulos non possunt duci. Quare in tot triangula distribuetur, quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulũ non posse diuidi in alia triangula: quadrangulũ verò in duo

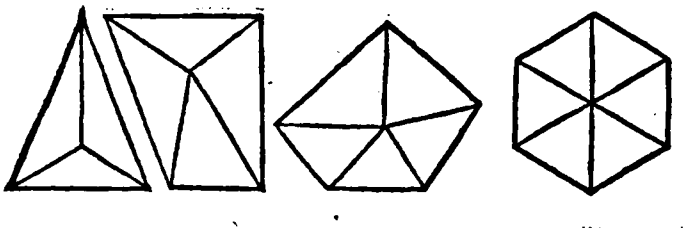


secari: quinquangulum in tria: sexangulum in quatuor, &c. Cùm igitur anguli horum triangulorũ constituant omnes angulos rectilineæ figuræ propositæ, & omnes anguli cuiuslibet trianguli æquales sint duobus rectis; perspicuum est omnes angulos figuræ cuiusuis rectilineæ æquales esse bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc est, quota ipsa est inter rectilineas figuras. Quod quidem manifestè perspicitur in propositis figuris.

SECVNDVS modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic est.

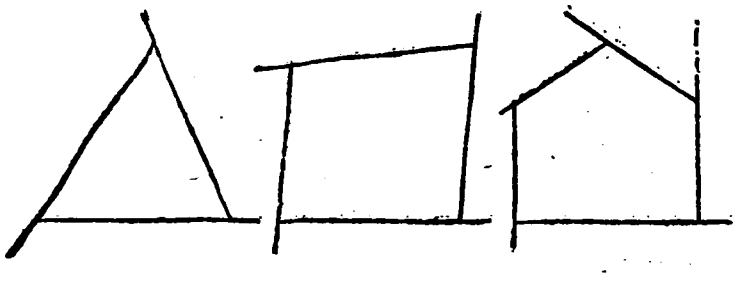
OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis, æquales sunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

Hoc est, anguli cuiuslibet trianguli æquales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figuræ continẽtis 20. latera æquiualebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36.

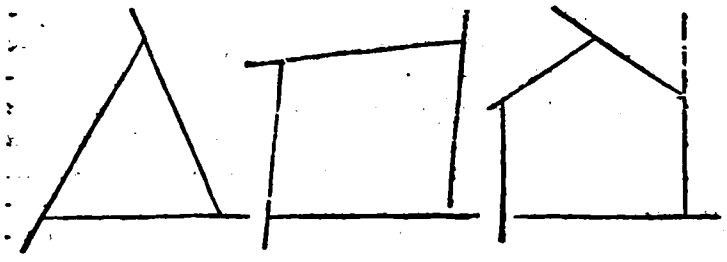


rectis angulis, &c. Demõstratio autẽ huius rei talis est: Si à quouis puncto intra figuram assumpto ad omnes angulos rectæ lineæ ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulósue figura ipsa continet. Cùm igitur anguli cuiuscunq; trianguli [a] æquales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum intra figuram assumptum consistentes non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propositæ, vt constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli constituentes angulos figuræ propositæ, bis quoq; tot rectis æquales, demptis illis circa punctum assumptum constitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot sint, circa dictum punctum existentes æquales 4. rectis tantummodò, vt colligimus ex proposit. 15. Quamobrem anguli cuiusque figuræ bis tot rectis sunt æquales, ablatis quatuor, quot ipsa figura continet angulos, seu latera, quod est propositum. [a] 32. primi.

EX hoc porrò secundo modo liquet, si singula latera figuræ cuiusuis rectilineæ producãtur ordinatim versus eandem partem, omnes angulos externos æquales esse quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, [b] æquantur duobus rectis; atque adeò omnes externi vnà cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulósue figura continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis æquales, minus [b] 13. primi.



quatuor, vt demonstrauimus. Si igitur interni auferãtur, remanebunt externi 4. tantùm rectis æquales, qui nimirũ desunt internis angulis, vt interni & externi simul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propositam ambiunt. Exemplum: In triangulo quouis, anguli interni et exte-

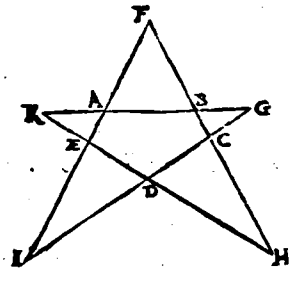


a 32.primi.

terni simul æquales sunt sex rectis. Cùm igitur interni [a] duobus sint rectis æquales, erunt soli externi æquales quatuor duntaxat rectis. In quadrilatero, anguli externi & interni simul æquales sunt octo rectis. Cùm igitur interni soli æquales sint quatuor rectis, vt ostendimus, erunt & soli externi quatuor etiam rectis æquales. In pentagono, seu quinquangulo, anguli interni & externi sunt æquales 10. rectis. Quoniam verò interni adæquantur sex rectis, vt demonstrauimus, remanebunt externi æquales quatuor tantùm rectis. Quæ omnia in appositis figuris conspiciuntur. Eademq; est ratio in alijs omnibus figuris.

EX CAMPANO.

SI pentagoni singula latera producantur in partem vtramque, ita vt quælibet duo extra pentagonum coëant, efficiẽtur quinque anguli ex lateribus coëuntibus æquales duobus solùm rectis.



b 32.primi.

c 2.pron.

d 32.primi.

IN pentagono A B C D E, latera in vtramque partem producta coëant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinque angulos F, G, H, I, K, æquales tantùm esse duobus rectis. In triangulo enim B H K, cùm latus H B, sit protractum ad F, [b] erit externus angulus F B K, duobus internis, & oppositis H, K, æqualis. Eadem ratione in triangulo A I G, erit externus angulus F A G, æqualis duobus internis, & oppositis I, G. Quare duo anguli F B A, F A B, æquales sunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F, [c] erunt tres anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales quinque angulis F, G, H, I, K. Sed anguli A, B, F, trianguli A B F, [d] æquales sunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli F, G, H, I, K, duobus rectis sunt æquales. Quod est propositum.

COROLLARIVM I.

EX hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos æquales esse trĕ

e 32.primi. *bus angulis cuiusque alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quàm hi, [e] æquales sunt duobus angulis rectis. Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, æquiangulaque erunt ipsa triangula.*

COROLLARIVM. II.

CONSTAT etiam, in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam reliqui duo simul confi-

f 32. primi. *ciunt vnum rectum, [f] cùm omnes tres sint æquales duobus rectis: & tertius ille ponatur rec-*

g 5.primi. *tus. Quare [g] cùm duo reliqui inter se sint æquales, erit quilibet eorum semirectus. At verò si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt vno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, vtrumque reliquorum maiorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto, &c.*

COROLLARIVM III.

PERSPICVVM quoque est, quemuis angulum trianguli æquilateri esse duas tertias par-

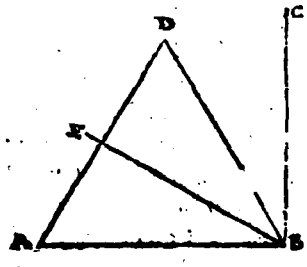
h 32.primi. *tes vnius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, [h] quibus æquales sunt tres anguli trianguli æquilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.*

COROLLARIVM IV.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, & institui duo triangula scalena, quorum vnumquodque habet vnum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli æquilateri; reliquum denique tertiam partem vnius recti.

SCHO-

SCHOLIVM.



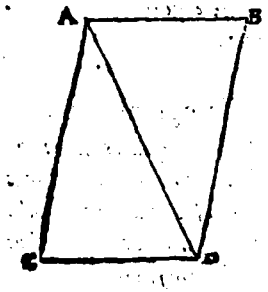
PORRO ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit enim angulus rectus A B C. Super rectam A B, [a] *constituatur triangulum æquilaterum A B D. Et quia per corollarium tertium angulus A B D, facit duas tertias partes anguli recti A B C; erit angulus C B D, pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur angulo A B D,* [b] *bifariam, per rectam B E, erit vterque angulus A B E, E B D, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus A B C, diuisus est in tres angulos æquales. Quod est propositum.*

[a] 1. primi.

[b] 9. primi.

THEOR. 23. PROPOS. 33. 33.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eadem coniungũt; & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.



SINT rectæ lineæ A B, C D, æquales, & parallelæ; Ipsas autem coniungant ad eadem partes rectæ A C, B D. Dico A C, B D, æquales quoque esse, & parallelas. Ducatur enim recta A D. Quoniam igitur A D, incidit in parallelas A B, C D, [c] erunt anguli alterni B A D, C D A, æquales. Quare cùm duo latera B A, A D, trianguli B A D, æqualia sint duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & anguli quoque dictis lateribus inclusi æquales; [b] erunt bases B D, A C, æquales, & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cùm igitur hi anguli sint alterni inter rectas A C, B D, [c] erunt A C, B D, parallelæ. Probatum autem iam fuit, eadem esse æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 29. primi.

[b] 4. primi.

[c] 27. primi.

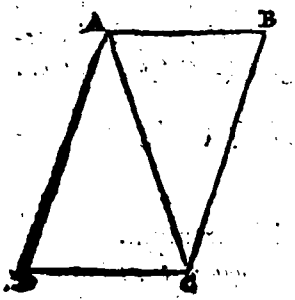
SCHOLIVM.

DIXIT Euclides, lineas æquales, & parallelas ad eadem partes debere coniungi, vt ipsæ coniungentes sint & æquales, & parallelæ. Nam si ad partes diuersas coniungerentur, vt ad A, & B. Item ad B, & C, neque coniungentes lineæ essent parallelæ vnquam, sed perpetuò se mutuò secarent, neque essent æquales, nisi rarò admodum, vt ex sequenti propositione constabit.

THEOR. 24. PROPOS. 34. 34.

PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, & latera, & anguli; atque illa bifariam secat diameter.

SIT parallelogrammum A B C D, quale definiuimus definitione 35. Dico latera opposita A B, D C, inter se esse æqualia, nec non latera opposita A D, B C. Item angulos oppositos B, & D, æquales inter se esse, nec non & angulos oppositos D A B, & D C B: Denique ducta diametro A C, parallelogrammum ipsum bifariam secari. Cùm enim A B, D C, sint parallelæ, [d] erunt anguli alterni B A C, D C A, æquales. Rursus quia A D, B C, sunt parallelæ, [e] erunt & anguli alterni B C A, D A C, æquales. Itaque cùm duo anguli B A C, B C A, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis D C A, D A C, trianguli A D C, vterque vtrique; & latus A C, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo: [f] erit recta A B, æqualis oppositæ rectæ D C, & recta B C, oppositæ rectæ A D. quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia inæqualibus angulis B A C, D C A, addantur æquales anguli D A C, B C A, toti quoque anguli B A D, B C D, [g] fiunt æquales; constat secundum, angulos nimirũ oppositos esse æquales. Quoniam verò duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia sunt duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & angulus B, angulo D, æqualis, vt iam ostendimus; [h] erunt triangula A B C, C D A, æqualia, ideoq; parallelogrammum A B C D, diuisum erit bifariam à diametro A C, quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorũ æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, &c. Quod ostendendum erat.



[d] 29. primi.

[e] 29. primi.

[f] 26. primi.

[g] 2. pron.

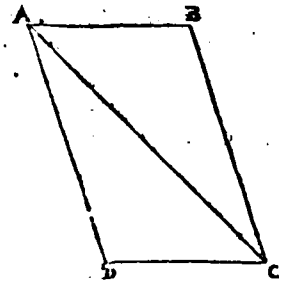
[h] 4. primi.

SCHOLIVM.

APPOSITE dixit Euclides, solummodò parallelogramma à diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombò duntaxat anguli etiam bifariam diuiduntur à diametro: At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erunt, si prius ostende-

rimus, quatuor haſce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, eſſe parallelogramma. Hoc autem demonſtrabimus tribus ſequentibus theorematibus, quorum primum eſt.

OMNE quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, eſt parallelogrammum.



a 8. primi.

b 4. primi.

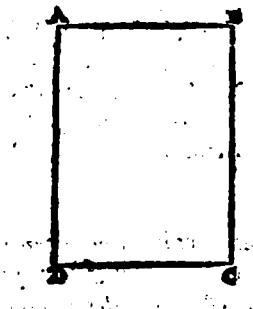
c 27. primi.

SINT in quadrilatero A B C D, latera oppoſita A B, D C, æqualia; Item oppoſita latera A D, B C. Dico A B C D, eſſe parallelogrammum: hoc eſt, lineas A B, D C, eſſe parallelas: Itémque lineas A D, B C. Ducta enim diametro A C, erunt duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & baſis A C, communis. Igitur [a] erit angulus B, angulo D, æqualis. Rurſus quia latera A B, B C, æqualia ſunt lateribus C D, D A, vtrumque vtrique, & anguli B, D, oſtenſi æquales; [b] erit angulus B A C, angulo D C A, alterno æqualis, & angulus B C A, alterno angulo D A C. Quare [c] erunt A B, & D C, parallelæ: Item A D, & B C, quod eſt propoſitum.

HINC conſtat, Rhombum & Rhomboidem eſſe parallelogramma: quoniam oppoſita eorum latera ſunt inter ſe æqualia, vt manifeſtum eſt ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera oppoſita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter ſe æqualia, per eius definitionem. Conuertit autem hoc theorema primam partem propoſitionis 34. vt patet.

SECVNDVM theorema tale eſt.

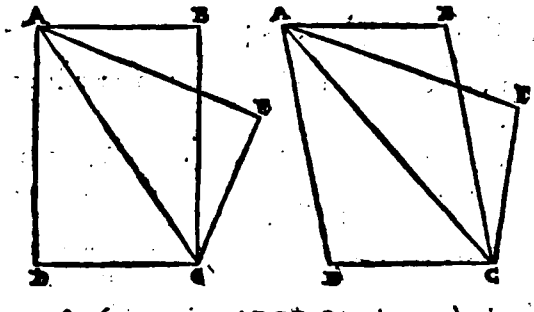
OMNE quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, eſt parallelogrammum.



d 2. prop.

e 28. primi.

SINT in quadrilatero A B C D, anguli oppoſiti A, & C, æquales: Item oppoſiti anguli B, & D. Dico A B C D, eſſe parallelogrammum, hoc eſt, lineas A B, D C, eſſe parallelas: Itémque lineas A D, B C. Nam ſi æqualibus angulis A, & C, addantur æquales anguli B, & D: [d] erunt duo anguli A, & B, duobus angulis D, & C, æquales, & idcirco anguli A, & B, dimidium facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cùm igitur hi quatuor æquales ſint quatuor rectis, vt ad propoſitionem 32. demonſtrauimus, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare A D, B C, [e] parallelæ ſunt. Eadem ratione erunt A B, D C, parallelæ. Erunt enim duo quoque anguli A, & D, duobus angulis B, & C, æquales, &c. Quod eſt propoſitum. Ex hoc etiam manifeſtum eſt, Rhomboidem eſſe parallelogrammum, cùm eius anguli oppoſiti æquales ſint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppoſiti æquales, cùm ſint recti, ex eorum definitionibus.



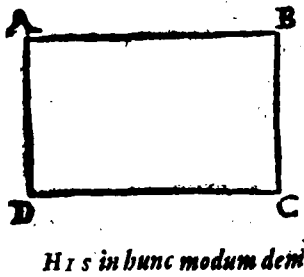
f 34. primi.

HOC theorema conuertit ſecundam partem propoſitionis 34. vt conſtat. Tertia autem pars non poteſt conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam ſecari poteſt à diametro, & tamen non eſt parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, vel Rhomboides A B C D, quod parallelogrammum eſſe oſtenſum eſt; in quo, ducta diametro A C, conſtituatur ſuper A C, triangulo A B C, æquale triangulum A E C, inuerſo ordine, ita vt latus C E, ſit æquale lateri A B, & A E, ipſi C B, vt in ſcholio propoſitionis 22. docuimus; fiat q; trapezium A E C D. Quoniam verò triangulum A B C, triangulo A D C, æquale eſt, [f] quòd diameter A C, bifariam ſecet parallelogrammum D B: Erit & triangulum A E C, triangulo A D C, æquale: ac proin de trapezium A E C D, bifariam diuidetur à diametro A C.

QVOD ſi quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab vtraque diametro, illud parallelogrammum erit, vt oſtendemus ad propoſ. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri poteſt.

TERTIVM theorema huiuſmodi eſt.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum.



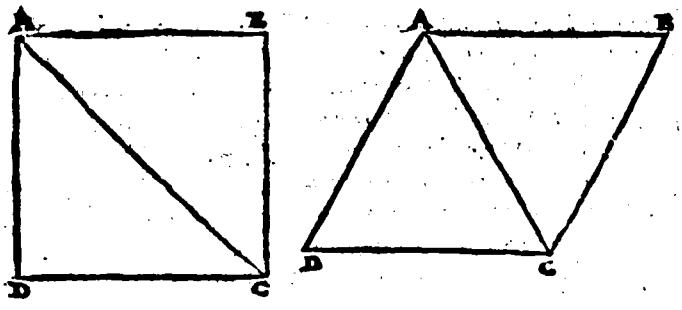
g 28. primi.

SINT in quadrilatero A B C D, omnes quatuor anguli recti. Dico ipſum eſſe parallelogrammũ: hoc eſt, lineas A B, D C, eſſe parallelas: Itemq; A D, B C. Quoniã enim duo anguli A, & B, æquales ſunt duobus rectis, cũ ſint duo recti; [g] erunt A D, B C, parallelæ. Eodem modo erunt A B, D C, parallelæ; atque adeò A B C D, parallelogrammum. quod eſt propoſitum.

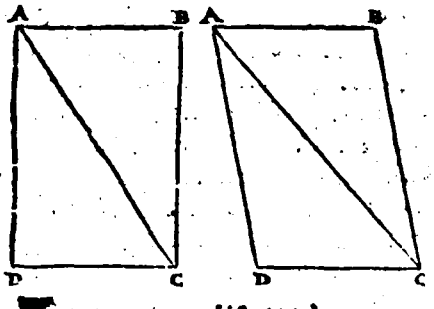
HINC rurſum conſtat, Quadratum, & Altera parte longius, eſſe parallelogramma, cùm eorum anguli omnes exiſtant recti, vt liquet ex eorum definitionibus.

HIS in hunc modum demonſtratis, Quadratum ſcilicet, Alteram parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, eſſe parallelogramma, facilè oſtendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam ſecari à diametris;

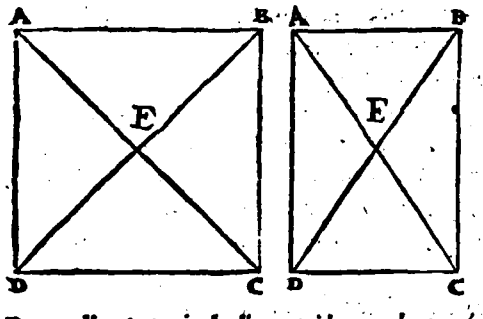
Angulos



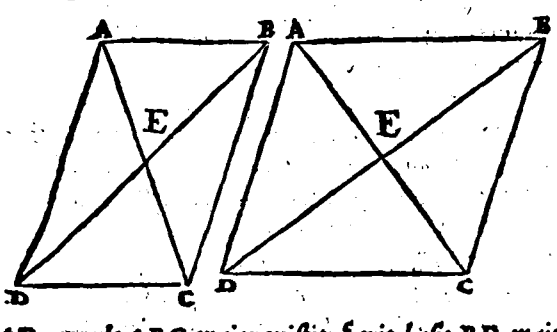
Angulos verò figura Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, vt paulò ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus A B C D, in quo diameter A C. Quoniam igitur duo latera B A, A C, trianguli B A C, æqualia ſunt duobus lateribus D A, A C, trianguli D A C, vtrumque vtrique, & baſis B C, baſi D C; (ſunt enim hæ figuræ æquilatere) [a] erunt anguli B A C, D A C, æquales. Quare angulus B A D, diuiditur bifariam. Eodem modo demonſtrabimus, reliquos angulos bifariam ſecari à diametro. a 8. primi.



Sit rurſus Altera parte longius, vel Rhōboides A B C D, in quo diameter A C, ſitq; maius latus A B. Quoniam igitur in triangulo A B C, latus A B maius eſt latere B C, [b] erit angulus B C A, maior angulo B A C. Eſt autem angulus B C A, [c] æqualis angulo D A C, alterno; q; B C, A D, parallelæ ſint. (Eſt enim A B C D, oſtenſum, eſſe parallelogrammū.) Igitur & angulus D A C, maior erit angulo B A C. Atq; propterea angulus B A D, inæqualiter diuiditur à diametro A C. Eadem eſt ratio aliorum angulorum. Quamobrem appoſitè Euclides in tertia parte huius propoſitionis dixit, ſolum parallelogrammа bifariam à diametro ſecari, non autem & angulos. b 18. primi. c 29. primi.



Eodem ferè pacto oſtendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore æquales eſſe: At verò in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorem quidem eam, quæ angulos acutos, minorem verò eam, quæ obtuſos angulos diſpertit. Sit enim quadratum, vel altera parte longius A B C D, in quò diametri A C, B D, quas dico eſſe æquales. Cùm enim duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia ſint duobus lateribus A B, A D, trianguli B A D, vtrumque vtriquè, & angulus A B C, angulo B A D, quia vterque rectus; [d] erit baſis A C, baſi B D, æqualis: At proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales ſunt. d 4. primi.



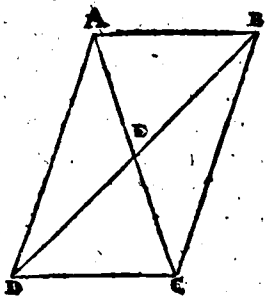
Sit rurſus Rhombus, vel Rhomboides, A B C D, in quo diametri A C, B D; ſitq; angulus B A D, maior A B C, minor. Non enim æquales ſunt, quia aliàs vterque eſſet rectus, cùm ambo [e] æquales ſint duobus rectis: quod eſt abſurdum, & contra definitiones Rhombi & Rhomboidis. Dico diametrum B D, maiorem eſſe diametro A C. Quoniam enim duo latera A B, A D, trianguli B A D, æqualia ſunt duobus lateribus A B, B C, trianguli A B C, vtrumque vtrique, & angulus B A D, angulo A B C, maior exiſtit: [f] erit baſis B D, maior baſe A C, quod eſt propoſitum. Ex quo manifeſtum eſt, cur in propoſitione trigeſima tertia Euclides aſſeruerit, eas tantùm lineas, quæ coniungunt parallelas æquales ad eaſdem partes, æquales eſſe, vt ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ A C, B D, inæquales ſunt, licèt coniungant parallelas æquales A B, D C: quia non ad eaſdem partes ipſas coniungunt, vt perſpicuum eſt. e 29. primi. f 24. primi.

In omni tamen parallelogrammo diametri ſe mutuò bifariam diuidunt. Cùm enim duo anguli E A D, E D A, trianguli A E D, æquales ſint alternis angulis E C B, E B C, trianguli B E C, vterque vtriquè; & [g] latus A D, æquale lateri B C, oppoſito in parallelogrammo A B C D, quorum vtrumque æqualibus adiacet angulis; [h] Erit & A E, recta recta C E, & recta D E, recta B E, æqualis. Quare vtraque diameter bifariam diuiditur in puncto E. g 34. primi. h 4. primi. i 6. primi.

Hvivs autem, quod modò diximus, conuerſum etiam demonſtrabimus, nimirum.

Omne quadrilaterum, in quo diametri ſe mutuò bifariam diuidunt, parallelogrammum eſt.

In quadrilatero enim A B C D, diametri A C, B D, ſe mutuò bifariam diuidant in E. Dico A B C D, pa-

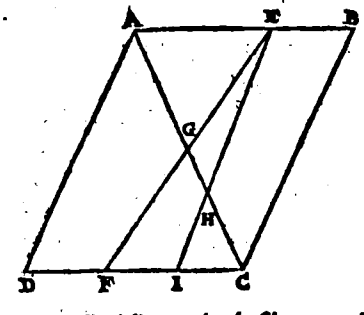


a 15. primi.
b 4. primi.
c 27. primi.

rallelogrammum esse. Cùm enim latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sint lateribus C E, E D, trianguli C E D, & anguli contenti ad verticem E, [a] *æquales quoque;* [b] *erunt & bases A B, C D, æquales, & angulus A B E, angulo alterno C D E, æqualis.* [c] *Quare recta A B, C D, parallela sunt. Eadem ratione parallela ostendentur A D, C B. Parallelogrammum ergo est A B C D.*

Huc quoque referri potest hoc theorema.

RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.



d 29. primi.
e 15. primi.
f 26. primi.
g 4. primi.
h 2. pron.
i 34. primi.

In parallelogrammo A B C D, diametrum A C, bifariam secet recta E F, in puncto G. Dico parallelogrammum diuidi bifariam. Quoniam enim angulus E A G, [d] *æqualis est angulo alterno F C G, &* [e] *angulus E G A, angulo F G C: Est autem & latus A G, lateri C G, æquale, per hypothesin, quæ ambo æqualibus angulis adiacent;* [f] *erunt & latera E G, F G, æqualia. Quare cùm latera A G, G E, æqualia sint lateribus C G, G F, & anguli quoque contenti æquales:* [g] *erunt triangula A G E, C G F, æqualia. Addita igitur communi quantitate B C G E,* [h] *erit triangulum A B C, trapezio B C F E, æquale: Sed triangulum A B C,* [i] *dimidium est parallelogrammi A B C D. Igitur & trapezium dimidium erit eiusdem parallelogrammi, ideoq; recta E F, parallelogrammum bifariam secat.*

k 10. primi.

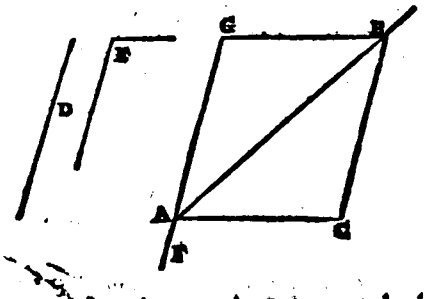
SECET iam E F, parallelogrammum bifariam: Dico & diametrum A C, bifariam secari in G. Si enim diameter A C, non bifariam diuiditur in G, [k] *diuidatur bifariam in alio puncto, vt in H, per quod ducatur recta E H I. Erit ergo, vt iam demonstrauimus, E I C B, trapezium dimidium parallelogrammi A B C D, atq; adeò æquale trapezio E F C B, quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur A C, bifariam in G, & non in alio puncto, quod erat propositum.*

HINC facilè colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cuiusque punctum signetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non sit in diametro, nisi ipsum secet diametrum bifariam: qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, quæ parallelogrammum bifariam secet. Si enim diameter ducatur, & à puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt si punctum sit E, in latere A B, ducenda est recta E F, per G, punctum, in quo diameter A C, bifariam diuiditur: & sic de aliis punctis.

DEMONSTRAT quoque hîc Peletarius problema non iniucundum. videlicet.

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores esse duobus rectis.

DVAE rectæ infinitæ A B, A C, contineãt angulum B A C, sitq; data recta finita quæcunque D, & angulus datus E, hac lege, vt duo anguli E, & B A C, minores sint duobus rectis. Oportet igitur inter rectas A B, A C, collocare rectam æqualem quidem rectæ D, cùm alterutra verò illarum, nimirum cum A C, facientem angulum æqualem angulo dato E. [l] *Fiat angulus C A F, æqualis angulo E, & producta F A, ad G,* [m] *sit A G, æqualis rectæ D; &* [n] *per G, ducatur G B, parallela ipsi A C, secans A B, in B: Deinde per B, ducatur B C, parallela ipsi A G, secans A C, in C. Dico rectam B C, collocatam inter rectas A B, A C, æqualem esse rectæ D, angulumq; B C A, angulo E. Cùm enim parallelogrammũ sit, per constructionem, A C B G,* [o] *erit recta B C, rectæ G A, æqualis: At G A, æqualis est, per constructionem, rectæ D. Igitur & B C, rectæ D, æqualis erit. Rursus quia* [p] *angulus B C A, angulo alterno C A F, æqualis est: & eidem angulo C A F, æqualis est, per constructionem, angulus E: erunt anguli E, & B C A, æquales. Quod est propositum. Cæterùm ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam aliàs non fieret triangulum A B C, si anguli B A C, & B C A, æquales essent duobus rectis, vel maiores, vt constat ex propositione 17. vel 32.*

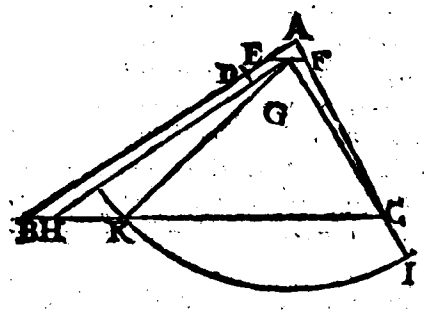


l 23. primi.
m 3. primi.
n 31. primi.
o 34. primi.
p 29. primi.

SCHOLIVM II.

NON alienũ erit à nostro instituto, adijcere quædam hoc loco ad lineas intra triangulum constitutas pertinentia, quæ à Pappo Alexandrino lib. 3. Mathematicarũ collect. demonstrãtur: quemadmodum facturos nos recepimus ad propos. 21. Primùm igitur in omni triangulo, quod non sit æquilaterũ, vel Isosceles habens basim minorem

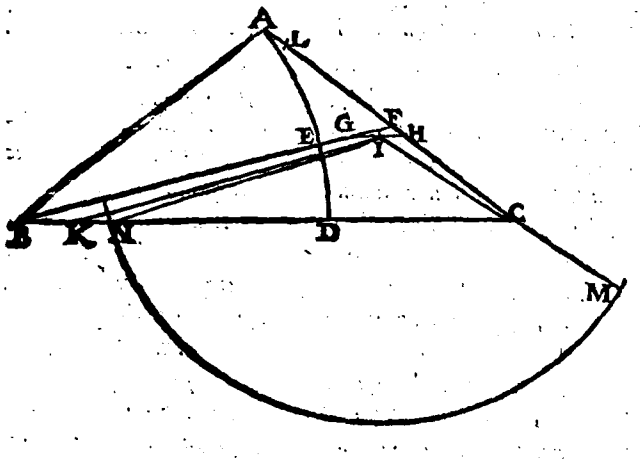
latere minorẽ non ſolùm à duobus punctis baſis conſtitui poſſunt duæ rectæ intra triangulum, quæ ſimul ſumptæ maiores ſint duobus lateribus ſimul ſumptis, vt à Proclo in triangulis rectangulis, vel obtuſangulis oſtenſum eſt ad propoſ. 21. ſed etiam æquales.



SIT enim primum triangulum A B C, habens latus A B, latere A C, maius, ſitq; B D, dimidium vtriuſque lateris A B, A C, ſimul: Sumpto autẽ inter A D, puncto E, vtcunque, agatur E F, ipſi B C, parallela; & ex quouis puncto G, lateri A B, parallela ducatur G H, rectaq; iungatur G C. Et quoniam E A, A F, [a] *maiores ſunt, quàm E F: Item C F, F G, maiores quàm G C; erũt E A, A C, F G, ſimul maiores, quàm E F, G C, ſimul: ablataq; communi F G, erunt E A, A C, ſimul maiores, quàm E G, G C, ſimul: ac proinde multò maiores, quàm G C, ſola. Producatur ergo G C, fiat q; G L, ipſis E A, A C, ſimul æqualis. Quia verò B E, maior eſt, quàm vtraque E A, A C, ſimul, quòd B E, ſuperet B D, dimidium vtriuſque B A, A C, ſimul, at E A, A C ſimul deficiant à dimidio earundem, nimirum ab vtraque D A, A C, ſimul; erit quoq; B E, maior, quàm G I, quæ ipſis E A, A C, ſimul eſt æqualis. Cùm igitur* [b] *ipſi B E, æqualis ſit G H, in parallelogrammo B E G H; erit quoque G H, maior, quàm G I. Si igitur centro G, & interuallo G I, circulus deſcribatur, ſecabit is rectam G H, ac propterea & ipſam C H, prius ſecabit in K. Connectatur G K. Dico vtramque G H, G K, ſimul æqualem eſſe vtriq; A B, A C, ſimul. Id quod ex conſtructione perſpicuum eſt. Nam G H, ipſi B E, æqualis eſt, & G I, hoc eſt, G K, ipſis E A, A C, ſimul. Atque hoc infinitis modis fieri poteſt, prout punctum E, remotiùs à D, ſumptum fuerit, & punctum G, à puncto E; hoc eſt, prout tam A D, quàm E F, infinitis in punctis ſecari poteſt.*

a 20. primi.

b 34. primi.



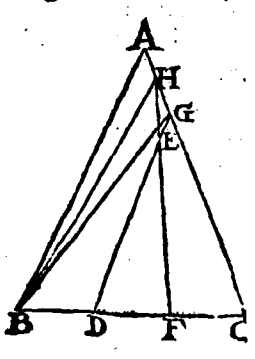
SIT deinde Iſoſceles A B C, habens baſim B C, vtrouis latere maiorem. Deſcripto ex centro B per A, arcu A D, ſecãte rectam B C, in D, ducatur vtcunque recta B F, ſecans arcũ in E, & latus A C, in F; & in E F, per quoduis punctum G, ipſi B C, parallela agatur G H, & per quodcunque eius punctum I, ipſi B F, parallela ducatur I K, rectaq; iungatur I C; atque ipſi E G, æqualis abſcindatur A L. Erit igitur B G, ipſis A B, A L, ſimul æqualis. at L C, minor quã B E, ſiue A B, & ob id multò minor, quàm B G. Et quia ipſi B G, [c] *æqualis eſt I K, in parallelogrammo B G I K; erit quoq; I K, ipſis A B, A L, ſimul æqualis, maior autẽ, quàm L C. Itaq;* [d] *quia G F, F H, maiores ſunt, q; G H; & H C, H I, maiores, quàm I C: erunt G F, F C, H I, ſimul maiores, quàm G H, I C: & ablata communi H I, erunt reliqua G F, F C, ſimul maiores, quàm G I, I C, ſimul: ac proinde appoſita communi B G, fient B F, F C, ſimul maiores, quàm B G, G I, I C, ſimul. Sed ipſis B F, F C,* [e] *maiores ſunt B A, A C, ſimul. Ergo multò maiores erunt B A, A C, ſimul, q; B G, G I, I C, ſimul. Cùm ergo B G, ipſis B A, A L, ſimul æqualis ſit, erit reliqua L C, maior, quàm reliqua G I, I C, ſimul, ac proinde multò maior, q; I C, ſola. Ponatur I M, (producta I C,) ipſi L C, æqualis. Et quia I K, oſtenſa eſt maior, quàm L C, hoc eſt, q; I M; ſi ex centro I, per M, arcus circuli deſcribatur, ſecabit is rectam I K, ac proinde prius ipſam C K, ſecabit in N. Connectatur I N. Dico vtramque I K, I N, ſimul æqualem eſſe vtrique A B, A C, ſimul. Id quod ex conſtructione patet. Eſt namque I K, ipſis A B, A L, ſimul æqualis, & I N, hoc eſt, I M, ipſi L C, æqualis. Atq; hoc infinitis modis fieri poteſt: cùm B F, infinitis modis duci poſſit, & tam E F, quàm G H, infinitis modis ſecari.*

c 34. primi.

d 20. primi.

e 20. primi.

CONSTAT autem, ſi intra idem triangulum A B C, ducantur duæ rectæ, quæ rectas H G, G K, in priori triangulo, vel rectas K I, I N, in poſteriori includant, eas maiores fore ſimul ſumptas lateribus A B, A C, ſimul ſumptis: quippe quæ [f] *maiores forẽt rectis H G, G K, in prioti triangulo, vel rectis K I, I N, in poſteriori.*

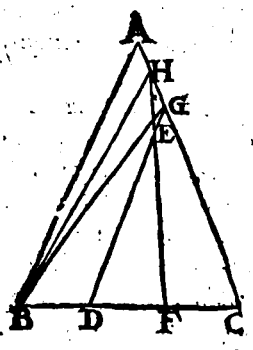


f 21. primi.

AT verò in triangulo æquilatero, vel Iſoſcele habente baſim vtrouis latere minorem, non poſſe intus conſtitui duas lineas maiores, vel æquales ſimul ſumptas duobus lateribus ſimul ſumptis, ſed quaſcunque interiores eſſe minores, ita oſtendi poteſt. In triangulo enim A B C, cuius duo latera A B, A C, æqualia, & baſis B C, non maior, ſed vel æqualis, vel minor: ita vt angulus A, maior non ſit, quàm angulus B, vel C, [g] *ſed vel æqualis, vel minor: conſtituãtur duæ rectæ D E, E F, vtcunque, quas dico minores eſſe ſimul ſumptas duobus lateribus A B, A C, ſimul ſumptis. Producatur enim D E, ſecans latus A C, in G, iungatur q; recta G B. Quoniã igitur* [h] *duo anguli A B C, & C, æquales ſunt, eſt q; A B C, maior*

g 5. vel 18. primi.

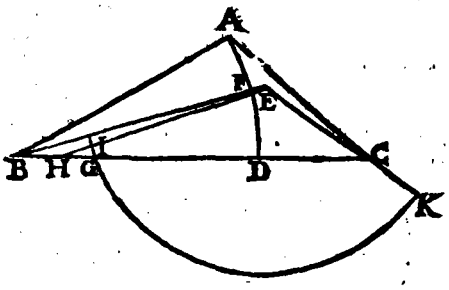
h 5 primi.



a 16. primi.
b 19. primi.
c 16. primi.
d 19. primi.

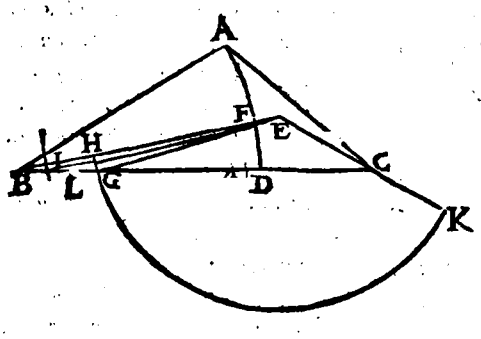
angulo G B C, erit quoque C, maior angulo G B C. Est autem [a] & angulus G D B, angulo C, maior, externus interno. Igitur multò maior erit angulus G D B, angulo G B C; [b] ac proinde latus G B, latere G D, maius erit. Quia verò [c] angulus E G A, maior est angulo C, externus interno; angulus $\bar{q}$ C, vel aqualis est angulo A, vel maior, vt ostendimus: erit quoque angulus B G A, angulo A, maior. Quare [d] latus A B, latere G B, maius erit: Sed recta G B, ostensa est maior, quàm G D; ac proinde multò maior, quàm D E. Igitur latus A B, multò etiam maius erit, quàm D E. Eadem ratione, si F E, producatur secans A C, in H, iungaturque recta H B, ostendemus latus A B, ac proinde & A C, maius esse, quàm F E. Quocirca latera A B, A C, simul maiora sunt duabus rectis D E, E F, simul sumptis. Quòd si F E, producta secaret latus A B, demonstraremus eodem modo, latus A C, maius esse recta E F.

IAM verò, si admirabile videatur iis, qui Geometria ignari sunt, in illis, quæ diximus, triangulis duci posse lineas interiores, quæ simul sumptæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus simul sumptis: admirabilius sanè erit, intra eadem illa triangula constitui posse duas lineas, quarũ singulæ singulis lateribus maiores sint, vel æquales. Sint ergo primùm constituendæ singulæ lineæ singulis lateribus maiores in triangulo A B C, cuius latus A B, minus non sit latere A C, at latus B C, vtrouis lateri A B, A C, maius. Descripto ex centro B, arcu circuli A D, sumatur quoduis punctum E, inter arcum A D, & latus A C, ducaturq; recta B E, secans arcum in F; ita vt B E, maior sit, quàm B F, hoc est, quàm B A, iungaturq; E C. Quia verò [e] B E, E C, simul minores sunt, q̃ A B, A C, simul, estq; B E, maior, quàm A B, erit E C, multò minor, q̃ A C. Producta igitur E C, fiat E K, ipsi A C, æqualis, ac propterea minor, quàm E B: describaturq; ex E, per K, arcus circuli, qui rectam E B, secabit, ac proinde & ipsam C B, prius secabit in G. Sumpto denique inter B, & G, quouis puncto H, iungatur recta E H, secans arcum in I: factúmque erit, quod proponitur. Nam B E, maior est, quàm B A, & E H, maior, quàm E I, hoc est, quàm E K, vel A C.



e 21. primi.

DEINDE sint singulæ lineæ singulis lateribus æquales constituendæ intra idem triangulum: fiat q̃, eadem constructio, dempta linea E H, sed arcus K G, secet rectam E B, in H. Et latus B A, latere A C, ponatur maius, eritq; B E, recta maior, quàm A B, cùm maior sit, quàm B F, quæ æqualis est ipsi A B. Sumpta igitur E I, æquali ipsi A B, cadet punctum I, inter B, & H: quandoquidem E B, maior est, quàm A B, & E H, minor, quàm A B. Ex E, per I, describatur arcus circuli secans B C, in L, iungunturq; rectæ E L, E G: factumq; erit, quod proponitur. Nam E L, ipsi E I, hoc est, ipsi A B, æqualis est, & E G, ipsi E K, hoc est, ipsi A C.

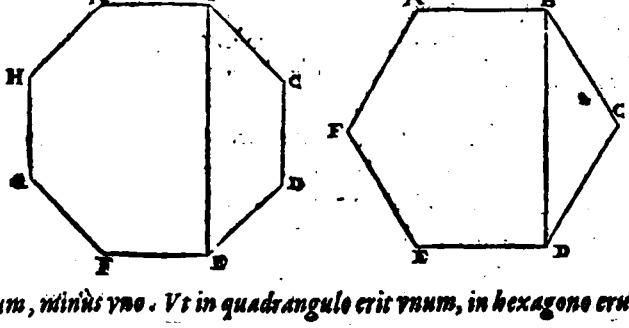


PRAETER hæc demonstrat Pappus, intra eadem, quæ diximus, triangula constitui posse duas rectas duobus lateribus maiores, & quæ habeant ad eadem latera proportionem datam, quæ tamen dupla proportione minor sit: quod incredibile cuipiam videri posit. Quæ res hoc loco demonstrari non potest, cùm ex proportionibus pendeat.

EX PROCLO.

IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, siquidem fuerit æquilatera, & æquiangula: erunt duo quælibet latera opposita, parallela inter sese.

LATERA opposita dicuntur illa duo, quæ ex vtraque parte latera habent æqualia numero: vt in hexagono A B C D E F, latera opposita erunt A B, E D: quoniam tam ad partes A, & E, duo sunt latera, quàm ad partes B, & D. In octogono verò A B C D E F G H, latera opposita erunt A B, F E, quia tam ad partes A, & F, tria sunt latera, quàm ad partes B, & E. Et sic in alijs figuris æquilateris parium laterum, ex vtraque parte oppositorum laterum, erunt tot latera, quot sunt in dimidio numero laterum, minùs vno. Vt in quadrangulo erit vnum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor,

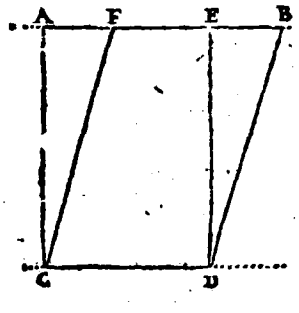


quor, in figura duodecim laterum, quinque, &c. Dico igitur qualibet latera oppoſita eſſe parallela: AB, nimirum ipſi ED, in hexagono: & AB, ipſi FE, in octogono, & ſic de cæteris. Connectantur enim duo extrema oppoſitorum laterum ad eaſdem partes linea recta, qualis eſt in hexagono BD, & in octogono BE. Et quoniam, vt ad 32. propoſ. demonſtrauimus, ſex anguli hexagoni æquales ſunt octo rectis, erũt tres anguli B, C, D, eiuſdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea q; omnes anguli ponuntur æquales: Sunt autem anguli a 32. primi.
BCD, CBD, CDB, trianguli BCD, [a] duobus rectis æquales. Reliqui igitur anguli ABD, EDB, duobus re- b 28. primi.
ctis æquales erunt. Quare [b] parallela erunt AB, & ED. Rurſus quia octo anguli octogoni æquales ſunt duode-
cim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, ſex rectis æquales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri c 28. primi.
BCDE, æquales quatuor rectis. Igitur duo reliqui anguli ABE, FEB, duobus erũt rectis æquales, [c] atq; adeò
AB, FE, parallela erunt. Eodem modo demonſtrabitur, in omnibus aliis figuris huiuſmodi, angulos duos ad li-
neam rectam extrema oppoſitorum laterum coniungentem exiſtentes, duobus eſſe rectis æquales. Nam in de-
cagono aufert ea linea pentagonum, cuius anguli æquales ſunt ſex rectis: At quinque anguli decagoni æquales
ſunt octo rectis. Ablatis igitur ſex, relinquũtur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim late-
rum eadem linea abſcindet hexagonum, cuius anguli ſunt octo rectis æquales: At ſex anguli totius figuræ æ-
quales ſunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.

QVAMVIS autẽ omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera oppoſita parallela, vt oſtendimus: tamen ſola quadrilatera figura latera oppoſita habens parallela, ab Euclide, & aliis Geometris parallelogrammum dici conſueuit, propterea q; in definitionibus Parallelogrammum diximus eſſe figuram quadrilateram, &c.

THEOR. 25. PROPOS. 35. 35

PARALLELOGRAMMA ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia.

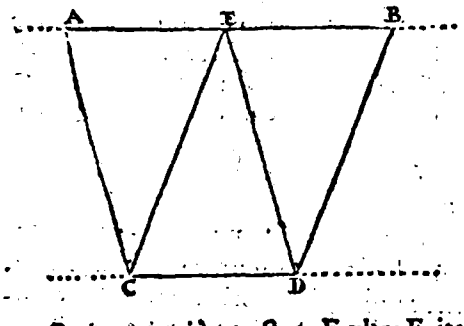


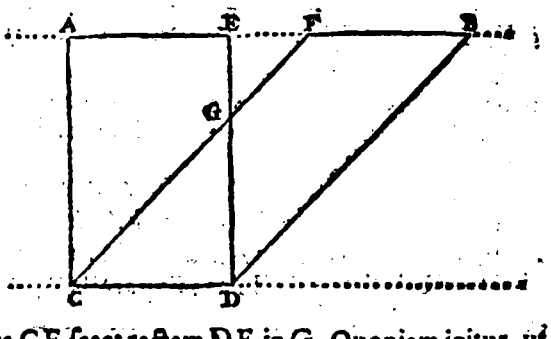
INTER duas parallelas AB, CD, ſuper baſi CD, exiſtant duo parallelogramma CDEA, CDBF. Dicuntur autem parallelogramma in eiſdem eſſe parallelis, quãdo duo latera oppoſita partes ſunt parallelarum, vt in exemplo propoſito cernitur. Dico ipſa parallelogramma inter ſe eſſe æqualia, non quoad angulos & latera, ſed quoad aream, ſeu capacitatem. Cadat enim primò punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelogrammo CDEA, recta AE, [a] æqualis eſt rectæ CD, oppoſitæ; & eidem CD, æqualis eſt FB, in parallelogrammo CDBF, oppoſita; Erunt AE, FB, [b] inter ſe æquales. Demptа igitur cõmuni FE, [c] remanebit AF, ipſi EB, æqualis: [d] Eſt autem & AC, ipſi ED, oppoſitæ æqualis in parallelogrammo CDEA; [e] & angulus BED, angulo FAC, externus interno. [f] Quare triangulum FAC, triangulo BED, æquale erit. Addito igitur communi trapezio CDEF, [g] fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Quod eſt propoſitum.

a 34. primi.
b 1. pron.
c 3 pron.
d 34. primi.
e 29. primi.
f 4. primi.
g 2. pronun.

CADAT ſecundò punctum F, in punctum E. Dico rurſus parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia eſſe. Erunt enim, vt priùs, rectæ AE, EB, æquales, nec non & anguli BED, EAC; atque adeò [h] triangula EAC, BED, æqualia. Addito igitur communi triangulo CDE, [i] fient parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia.

h 4. primi.
i 2. pronun.





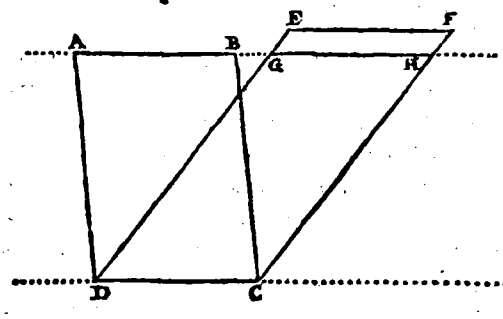
CADAT tertiò punctum F, vltra E, ita vt recta CF, ſecet rectam DE, in G. Quoniam igitur, vt priùs, rectæ AE, FB, ſunt æquales; ſi communis addatur EF; [k] erit tota AF, toti EB, æqualis, nec non & anguli BED, FAC; æquales erunt; atque adeò [l] triangulum FAC, triangulo BED, æquale. Ablato ergo cõmuni triãgulo EGF, [m] remanebit trapezium AEGC, trapezio FGDB, æquale. Quocirca addito communi triangulo CDG, fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Parallelogramma igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. Quod erat demonſtrandum.

k 2 pronun.
l 4 primi.
m 3. pron.

SCHOLIVM.

CONVERTIMVS facilè hanc propoſitionem, hoc modo:

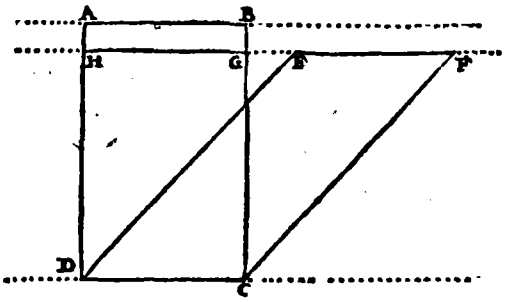
Parallelogramma æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemque partes conſtituta, erunt inter eaſdem parallelas.



Sint duo parallelogramma æqualia A B C D, C D E F, ſuper eandem baſin C D, & ad eaſdem partes. Dico rectam A B, productam in directum iacere ipſi E F, & propterea ipſa parallelogramma inter eaſdem eſſe parallelas. Alias enim A B, producta vel cadet infra E F, vel ſupra. Cadat primò infra, qualis eſt A H. Erit igitur parallelogrammum C D G H, a æquale parallelogrammo A B C D. Ponitur autem eidem parallelogrammo A B C D, æquale parallelogrammum C D E F. Quare parallelogramma C D E F, C D G H, æqualia erunt, totum & pars, quod

a 35. primi.

eſt abſurdum. Non ergo cadet A B, infra E F.

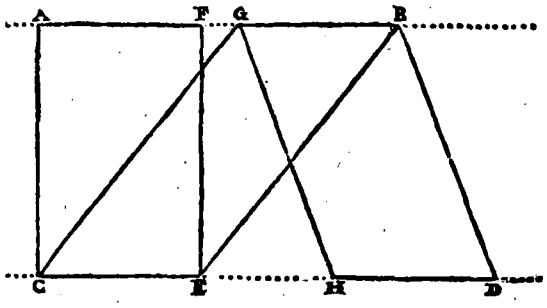


Cadat ſecundò A B, producta ſupra E F. Cadet igitur F E, protracta infra A E. Quare, vt prius, erunt parallelogramma A B C D, C D H G, æqualia. totum & pars, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum conſequeretur, ſi C F, D E, producerentur vſque ad A B, protractam. Eademq; demonſtratio conueniet omnibus caſibus, qui occurrere poſſunt, hoc eſt, ſiue punctum E, ſit vltra B, ſiue non, vt perſpicuum eſt. Non ergo cadet A B, ſupra E F; ſed nec infra, vt demonſtratum eſt; ergo producta in directum iacet ipſi E F; ac proinde parallelogramma A B C D, C D E F, in eiſdem ſunt parallelis.

36. THEOR. 26. PROPOS. 36.

PARALLELOGRAMMA ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdē parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia.

Sint duo parallelogramma A C E F, G H D B, ſuper æquales baſes C E, H D, inter eaſdem parallelas A B, C D. Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarum C E, G B, ad eaſdem partes lineis rectis C G, E B. Quoniam igitur recta C E, æqualis ponitur rectæ H D, & eidem H D, a æqualis eſt G B, in parallelogrammo, G H D B, oppoſitæ erunt C E, G B, b æquales inter ſe: Sunt autem & parallelæ, per hypotheſin. Quare & C G, E B, ipſas coniungentes, c parallelæ erunt, & æquales, ideoque C E B G, parallelogrammum erit. Itaq; cum parallelogramma A C E F, G C E B, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandē baſin C E, d erit parallelogrammum A C E F, parallelogrammo G C E B, æquale. Rurſus quia parallelogramma G C E B, G H D B, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin G B, e erit quoque parallelogrammum G H D B, eidem parallelogrammo G C E B, æquale. Quare & parallelogrāma A C E F, G H D B, f inter ſe æqualia erūt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.

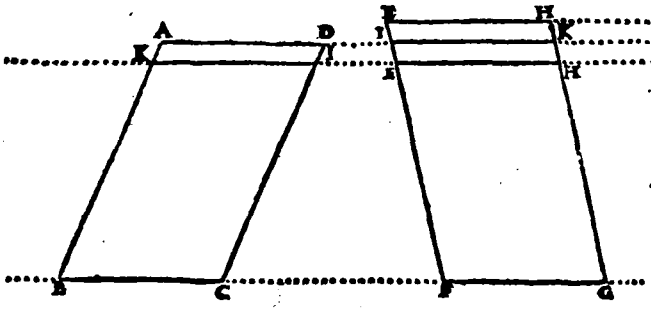


a 34. primi.
b 1. pron.
c 33. primi.
d 35. primi.
e 35. primi.
f 1. pron.

SCHOLIVM.

Conuersvm huius theorematis duplex eſt, ad hunc modum.

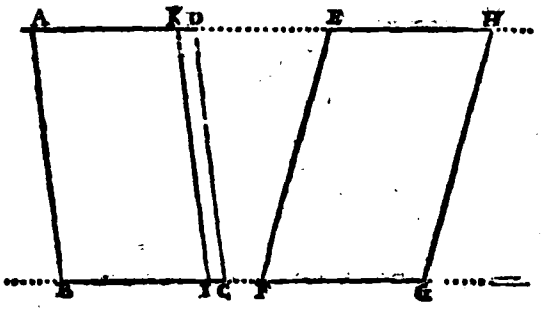
PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſin, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta.



Sint primùm duo parallelogramma æqualia A B C D, E F G H, ſuper baſes æquales B C, F G, & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe inter eaſdem parallelas, hoc eſt, A D, protractam coire in directum cum E H. Nam alias cadet aut infra E H, aut ſupra. Quo poſito, ſequitur, totū & partem eſſe æqualia, quemadmodum in

conuerſa

conuersa præcedentis propositionis est dictum, & figura facilè commonstrat. Intelligendæ sunt autem bases æquales datæ in eadem linea recta B G.



Sint secundò eadem parallelogramma æqualia inter easdem parallelas A H, B G. Dico bases B C, F G, esse æquales. Si enim altera, nempe B C, dicatur maior,[a] abscindatur B I, æqualis rectæ F G, & [b] ducatur I K, parallela ipsi C D. Erit ergo parallelogrammum A B I K, [c] æquale parallelogrammo E F G H; & idèo parallelogrammo A B C D, pars toti, quod est absurdum. Non ergo B C, maior est, quàm F G. Eadem ratione neque minor erit. Quare bases B C, F G, æquales sunt. [a] 3. primi. [b] 31. primi. [c] 36. primi.

Sequens quoque theorema facilè hinc demonstrabitur.

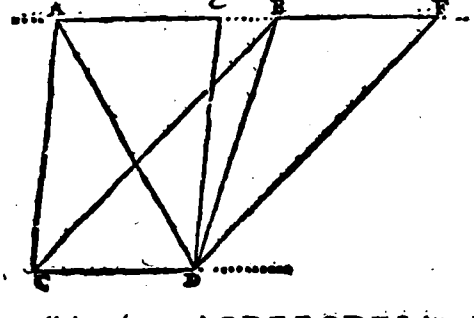
Si duo parallelogramma inter eadem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contrà, si duo parallelogramma sint inæqualia inter eadem parallelas, basis maioris maior erit.

Sint enim in posteriori figura parallelogramma B D, F H, inter parallelas A H, B G, sitq; basis B C, maior basi F G. Dico parallelogrammum B D, parallelogrammo F H, maius esse.[d] Auferatur enim recta B I, ipsi F G, æqualis,[e] ducaturq; I K, ipsi A B, parallela. Erunt ergo [f] parallelogramma B H, F K, supra æquales bases B I, F G, æqualia. Cùm igitur B D, sit maius, quàm B K, erit idem B D, maius, quàm F H. [d] 3. primi. [e] 31. primi. [f] 36. primi.

Sint rursùm parallelogramma B D, F H, inæqualia, & B D, maius. Dico basim B C, maiorem esse basi F G. Nam si foret æqualis,[h] essent parallelogramma æqualia, quod est absurdum, cùm B D, ponatur maius. Si autem esset minor, foret parallelogrammum F H, maius, quàm B D, vt proximè ostendimus. quod multò magis est absurdum, cùm B D, maius ponatur, quàm F H. Basis ergo B C, cùm neq; æqualis sit ipsi F G, neq; minor, erit maior, quàm F G. quod est propositum. [g] 9. pron. [h] 36. primi.

THEOR. 27. PROPOS. 37.

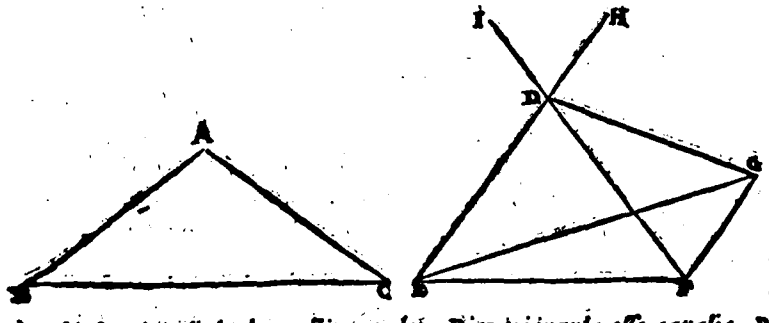
TRIANGVLA sup eadē basi cōstituta, & in eisdēparallelis, inter se sunt æqualia.



INTER parallelas A B, C D, & super basin C D, sint constituta duo triangula A C D, B C D. Dicitur autē triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quādo basis est pars vnius, & angulus oppositus alteram attingit. Dico ea triangula esse æqualia. Per D, enim [a] ducatur D E, parallela rectæ A C, & D F, parallela rectæ B C.[b] Erunt igitur parallelogramma A C D E, B C D F, æqualia. Sunt enim super eandem basin C D, & inter easdem parallelas. Sed horum dimidia sunt triangula A C D, B C D; [c] quòd A D, B D, diametri bifariam secent parallelográmma A C D E, B C D F. Igitur & triangula A C D, B C D, [d] æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum. [a] 31. primi. [b] 35. primi. [c] 34. primi. [d] 7. pronum.

SCHOLIVM.

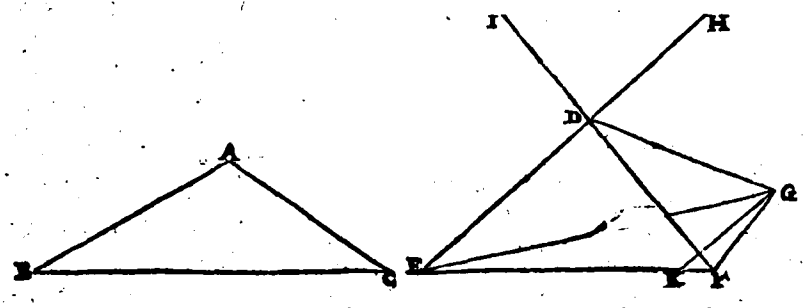
Conuersa huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Potrò ex hac propositione facile cum Proclo demonstrabimus, Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquādo esse æqualia, & aliquando inæqualia: Id quod ad propos. 24. polliciti sumus. Sint enim duo triangula A B C, D E F, & latera A B, A C, æqualia lateribus D E, D F, & angulus A, maior angulo E D F, sintq; primùm hi duo anguli duobus rectis æquales. Dico triangula esse æqualia. Producatur enim E D, ad H, & F D, ad I;[a] fiatque angulus E D G, æqualis angulo A,[b] & recta D G, recta D F, seu A C; ducanturque rectæ E G, G F. Quoniam igitur duo anguli A, & E D F, ponuntur æquales duobus rectis, & angulus E D G, æqualis factus est angulo A; erunt & anguli E D G, E D F, duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli E D G, G D H, [c] duobus rectis æquales. Igitur anguli E D G, E D F, angulis E D G, G D H, æquales erunt.



[a] 23. primi. [b] 3. primi. [c] 13. primi.

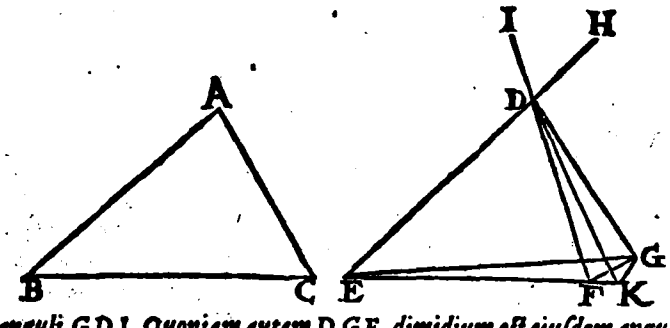
a 3.pron. *Quare ablato communi angulo E D G,* [a] *remanebit angulo E D F, æqualis angulus G D H: Est autem eidem*
b 15. primi. *angulo E D F,* [b] *æqualis angulus H D I. Igitur & anguli G D H, H D I, æquales erũt: atq; adeò angulus G D H,*
c 5.primi. *dimidium erit totius anguli G D I. Rursus quia latera D F, D G, sunt æqualia in triangulo D F G;* [c] *erũt an-*
d 32.primi. *guli D F G, D G F, æquales; qui cùm* [d] *æquales sint externo angulo G D I, erit vterlibet eorum, nempe D G F,*
e 7.pron. *dimidium anguli G D I: Ostensum est autem, angulum G D H, dimidium quoq; esse eiusdem anguli G D I.* [e]
f 27. primi. *Quare anguli G D H, D G F, æquales erunt. Et quia sunt alterni inter E H, F G,* [f] *erunt E H, F G parallelæ.*
g 37.primi. *Quamobrem* [g] *triangula D E G, D E F, æqualia erunt, cùm habeant eandem basin D E, sintq; inter easdem*
h 4.primi. *parallelas D E, F G. Quoniam verò triangulum D E G,* [h] *æquale est triangulo A B C, propterea quòd latera*
D E, D G, æqualia sunt lateribus A B, A C, & angulo A, æqualis angulus E D G: erit & triangulũ A B C, trian-
gulo D E F, æquale. quod est propositum.

Sint deinde anguli A, & E D F, duobus rectis maiores. Dico triangulum A B C, quod maiorem habet
i 23.primi. *angulum, minus esse triangulo D E F. Producatur enim E D, ad H, & F D, ad I;* [i] *fiat q3 angulus E D G, æqua-*
k 3.primi. *lis angulo A,* [k] *& recta D G, rectæ D F, seu A C, æqualis, ducanturq3 rectæ E G, G F. Quoniam igitur anguli*



l 13.primi. *A, & E D F ponuntur maiores duobus rectis, erũt & anguli E D G, E D F, duobus rectis maiores: Sunt autem anguli E D G, G D H,* [l] *æquales duobus rectis. Igitur anguli E D G, E D F, maiores sũt angulis E D G, G D H.*
m 15.primi. *Quare ablato communi E D G, remanebit angulus E D F, maior angulo G D H. Quoniam verò* [m] *angulus*
E D F, angulo H D I, æqualis est, erit quoq; H D I, maior, quàm G D H; atq; adeò G D H, minor, quàm dimi-
n 5.primi. *dium anguli G D I. Rursus quia latera D G, D F, æqualia sunt:* [n] *erunt anguli D F G, D G F, æquales: qui*
o 32.primi. *cùm sint* [o] *æquales externo G D I, erit vterque eorum, nempe D G F, dimidium anguli G D I: Ostensum est*
autem, angulum G D H, minorem esse dimidio eiusdem G D I. Quare D G F, maior erit, quàm G D H. Abscin-
p 23.primi. *datur ex angulo D G F, angulus D G K,* [p] *æqualis angulo alterno G D H. Erit ergo G K,* [q] *parallela ipsi D E,*
q 27.primi. *secabit q3 G K, rectam E F. Ducatur ex D, ad K, vbi G K, secat rectam E F, recta D K. Erit igitur triangulum*
r 37.primi. *D E G,* [r] *æquale triangulo D E K. Quoniam autem triangulum D E G,* [s] *æquale est triangulo A B C, propterea*
s 4.primi. *quòd latera D E, D G, æqualia sunt lateribus A B, A C, & angulo A, angulus E D G, æqualis, erit & triangu-*
t 9.pron. *lum A B C, triangulo D E K, æquale. Cùm igitur D E K,* [t] *minus sit triangulo D E F; erit quoq; A B C, trian-*
gulum triangulo D E F, minus. Quod est propositum.

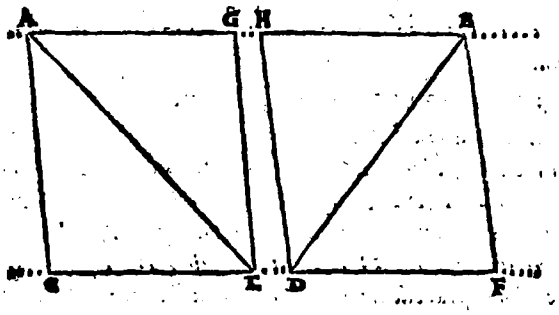
Sint tertiò anguli A, & E D F, duobus rectis minores. Dico triangulum A B C, quod maiorem habet
u 23.primi. *angulum, maius esse triangulo D E F. Producatur E D, ad H, & F D, ad I;* [u] *fiat q3 angulus E D G, æqualis an-*
x 3.primi. *gulo A,* [x] *& recta D G, rectæ D F, seu A C; ducanturq3 rectæ E G, G F. Quoniam igitur anguli A, & E D F,*



y 13.primi. *ponuntur minores duobus rectis, erunt quoq; anguli E D G, E D F, duobus rectis minores: Sunt* [y] *aũt anguli E D G, G D H, duobus rectis æquales. Igitur E D G, E D F, minores sunt, q3 E D G, G D H; demptoq3 communi E D G, re-*
z 15. primi. *manebit E D F, minor, quàm G D H. Est autem E D F,* [z] *æqualis ipsi H D I. Quare & H D I, minor erit, q3 G D H;*
atque adeò G D H, maior est dimidio anguli G D I. Quoniam autem D G F, dimidium est eiusdem anguli G D I, vt iam suprà ostensum fuit; e-
a 23.primi. *rit G D H, maior, quàm D G F. Fiat igitur angulus D G K,* [a] *æqualis angulo G D H, ducta recta G K, quæ se-*
cabit rectam E F, protractam in K; & ducatur recta D K. Erit ergo, vt priùs, G K, [b] *parallela ipsi D E;* [c] *trian-*
gulúmque D E G, triangulo D E K, æquale: Est autem iterum D E G, [d] *æquale ipsi A B C. Igitur & A B C,*
b 27.primi. *æquale est ipsi D E K. Quocirca cùm D E K,* [e] *maius sit, quàm D E F; erit & A B C, maius, quàm D E F. Quod*
c 37.primi. *demonstrandum erat.*
d 4. primi. *Ex his perspicuum est, cur Euclides in propositione 24. solùm collegerit inæqualitatem basium, non autem*
e 9.pron. *triangulorum, vt ibidem admonuimus.*

THEOR. 28. PROPOS. 38.

Triangvla super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.



INTER parallelas AB, CD, & super æquales bases CE, FD, sint constituta triangula ACE, BFD. Dico ipsa esse æqualia. [a] Ducatur enim EG, parallela ipsi AC; & DH, ipsi BF: Erunt q; [b] parallelogràma ACEG, BFDH, æqualia. Cùm igitur horum [c] dimidia sint triangula ACE, BFD; [d] erunt hæc inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 31. primi.
b 36. primi.
c 34. primi.
d 7. prom.

SCHOLIVM.

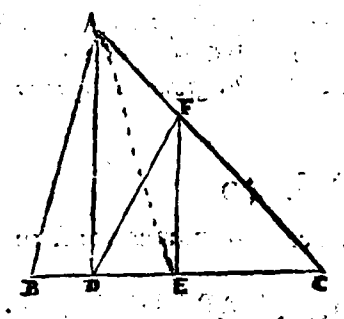
CONVERSA huius ostenditur ab Euclide propos. 40.

COLLIGITVR autem ex hac propositione, si à quouis angulo trianguli data linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo ABC, ex angulo A, recta AD, diuidens bifariam latus BC, in D. Dico triangulum ABC, bifariam quoque secari. Si enim per A. ducatur parallela ipsi BC, erunt duo triangula ABD, ADC, inter easdem parallelas, & super æquales bases. [a] Quare æqualia erunt.

a 38. primi.

EX PELETARIO.

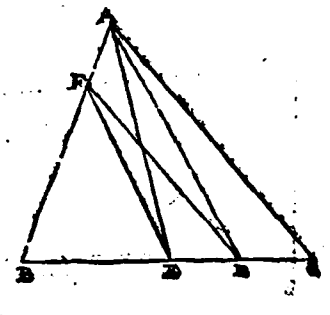
A puncto quouis dato in vno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quæ bifariam secet triangulum datum.



SIT triangulum ABC, & punctum datum D, in latere BC. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum. Quòd si punctum D, diuidat latus BC, bifariam, recta DA, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, vt in hoc scholio est ostensum: Si verò D, non diuidit BC, bifariam, [b] secetur BC, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppositum A, ducatur recta DA, & per E, [c] parallela EF, ipsi DA, secans AC, in F. Si igitur ducatur recta DF, erit triangulum diuisum bifariam à linea DF. Nam ductæ rectæ EA, [d] erunt triangula EFA, EFD, æqualia, cùm sint super eandem basin EF, & inter easdem parallelas EF, AD. Addito igitur communi CFE, [e] erunt tota triangula AEC, CDF, æqualia: Est autem AEC, dimidium totius ABC, vt iam fuit ostensum. Igitur & CDF, dimidium est eiusdem trianguli ABC. quod erat probandum.

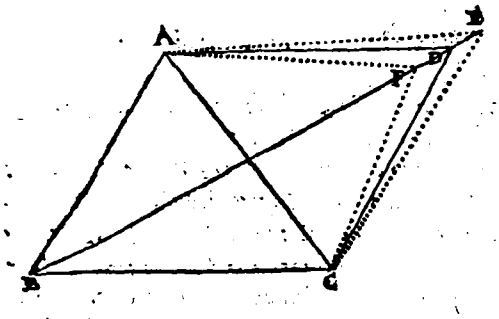
b 10. primi.
c 31. primi.
d 38. primi.
e 2. prom.

QVOD si punctum D, fuerit in altera medietate EC, eodem modo problema conficiemus: sed tunc triangulum abscindetur ad partes B, trapezium verò ad partes C, vt figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur litera B, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multò nos vniuersalius proponemus ad finem sexti libri.



THEOR. 29. PROPOS. 39. 39.

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



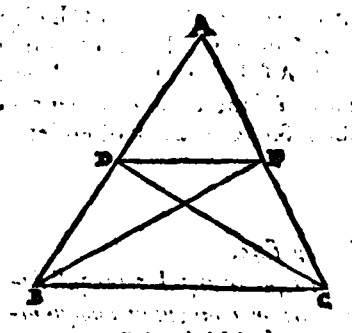
SINT duo triangula æqualia ABC, DBC, super eandem basin BC, & ad easdem partes. Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam AD, parallelam esse ipsi BC. Si enim non est, [a] ducatur ex A, parallela ipsi BC, quæ vel cadet supra AD, vel infrà. Cadat primùm supra, qualis est AE, coeatque cum BD, protracta in E, & ducatur recta EC. Quoniam igitur parallelæ sunt AE, BC, [b] erit triangulo ABC, triangulum EBC, æquale: Est autem per hypothesin, triangulum quoque DBC, æquale eidem triangulo ABC. Igitur [c] erunt triangula DBC, EBC, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quòd si parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis est AF; ducta recta FC, erunt eadem ratiocinatione triangula BFC, BDC, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur AD, parallela ipsi BC. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

a 31. primi.
b 37. primi.
c 1. pronun.

SCHOLIVM.

Ex his infert Campanus sequens hæc theorema.

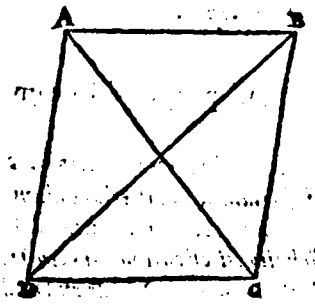
LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.



a 38.primi.
b 1.pron.
c 39.primi.

SECET linea D E, latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam in D, & E. Dico D E, parallelam esse lateri B C. Cùm enim triangula A D E, B D E, sint super æquales bases A D, D B, & inter easdē parallelas; (si per E, duceretur parallela ipsi A B,) [a] erit triangulum B D E, triangulo A D E, æquale: Eadem ratione erit triangulum C E D, eidē triangulo A D E, æquale. Quod etiam constat ex scholio præcedentis propositionis. Recta enim E D, secabit triangulum A E B, bifariam, & recta eadem D E, triangulum A D C, bifariam etiam, quòd bases A B, A C, secta sint bifariam à recta D E, ex hypothesi. Igitur triangula D B E, C E D. [b] æqualia erunt: Habent autem eandem basin D E, & sunt ad easdem partes constituta. Quare [c] inter easdem erunt parallelas, & idcirco D E, B C, parallelæ erunt. Quod est propositum.

ID autem, quod ad finem secundæ theorematis in scholio propositionis 34. polliciti sumus, facilè ex hac propositione demonstrabimus. Videlicet.



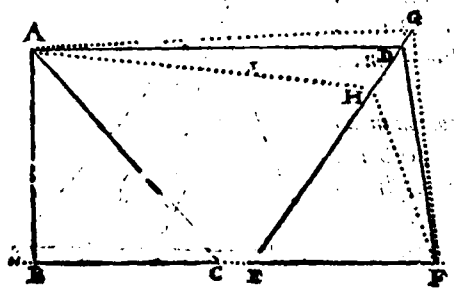
d 7.pron.
e 39.primi.

OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum est.

NAM quadrilaterum A B C D, diuidatur bifariam ab vtraque diametro A C, B D. Dico ipsum esse parallelogrammū. Cùm enim triangula A D C, B D C, dimidia sint eiusdem quadrilateri A B C D, [d] ipsa inter se æqualia erunt. Quare cùm eandem habeant basin D C, ad easdemq; partes sint, [e] ipsa in eisdem parallelis erunt; Atque idcirco recta A B, D C, parallelæ sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse A D, B C. Parallelogrammum igitur est A B C D. Quod est propositum.

40. THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



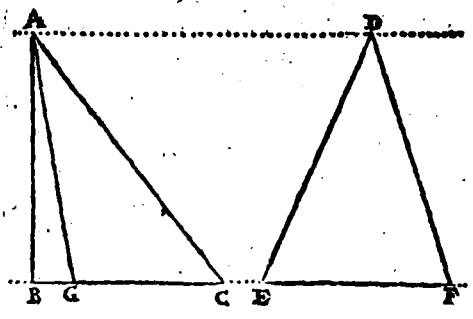
a 38. primi.
b 1. pron.

SINT duo triangula æqualia A B C, D E F, super bases æquales B C, E F, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad D, ductam parallelam esse rectæ B F. Si enim non est, cadet parallela ipsi B F, per A, ducta vel supra A D, vel infra. Cadat primùm supra, coeatque cum E D, producta in G, & ducatur recta G F. Quoniam igitur parallelæ sunt A G, B F, [a] erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale: Ponitur autem & triangulum D E F, eidē triangulo A B C, æquale. Igitur [b] triangula D E F, G E F, æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Quòd si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A H, ducta recta H F, erunt eadem argumentatione triangula H E F, D E F, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Est igitur A D, parallela ipsi B F. Quare triangula æqualia super æqualibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HÆC propositio conuertitur vno modo propos. 38. Alio autem modo conuerti potest, quemadmodum propositionem 36. conuertimus in eius scholio, nimirum.

TRIANGVLA æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basim, super æquales bases erunt constituta.



a 3. primi.
b 38. primi.
c 1. pron.

SINT triangula æqualia A B C, D E F, inter parallelas A D, B F, & super bases B C, E F, quas dico esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit B C, maior. [a] Abscissa ergo rectæ C G, æquali ipsi E F, & ducta recta G A; [b] erit triangulum A G C, triangulo D E F, æquale. Ponitur autem & triangulum A B C, eidem triangulo D E F, æquale. Igitur triangula A G C, A B C, [c] æqualia erūt, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases B C, E F, sed æquales. Quod est propositum.

SEQVENS

SEQVENS etiam theorema facili negotio demonſtrabitur.

Si duo triangula inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contrà, ſi duo triangula ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.

SINT enim in proxima figura inter parallelas A D, B F, triangula A B C, D E F, ſitq́; baſis B C, baſe E F, maior. Dico triangulum A B C, maius eſſe triangulo D E F. Ablata enim recta C G, [a] æquali ipſi E F, ductaq́; recta A G; [b] erunt triangula A G C, D E F, ſupra æquales baſes G C, E F, æqualia. Cùm ergo [c] triangulum A B C, triangulo A G C, maius ſit; erit idem triangulum A B C, maius, quàm D E F. a 3. primi. b 38. primi. c 9. pron.

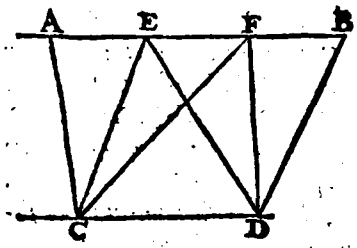
SINT rurſus triangula A B C, D E F, inæqualia, & A B C, maius. Dico baſin B C, baſe E F, maiorem eſſe. Si enim dicatur æqualis, [d] erit triangulum A B C, triangulo D E F, æquale. quod eſt abſurdum, cùm maius ponatur. Si verò credatur eſſe minor, erit triangulum D E F, maius triangulo A B C, vt proximè oſtendimus, quod multò magis eſt abſurdum, cùm A B C, ponatur maius, quàm D E F. Recta igitur B C, maior erit, quàm E F, cùm neque æqualis ſit oſtenſa, neque minor. Quod eſt propoſitum. d 38. primi.

QVÆ parrò hactenus de parallelogrammis, triangulisq́; inter eaſdem parallelas conſtitutis demonſtrata ſunt, facilè quoque demonſtrari poſſunt de trapezijs inter eaſdem parallelas deſcriptis, eodem fermè ordine hoc modo.

I.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes inter ſe æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.

DICVNTVR trapezia in eiſdem eſſe parallelis, quando latera duo oppoſita parallela ſunt, partéſque ſunt earundem parallelarum.



INTER parallelas igitur A B, C D, ſuper eadem baſi C D, conſtituta ſint duo trapezia A C D E, F C D B, quorum baſes oppoſitæ A E, F B, æquales ſint. Dico ipſa inter ſe eſſe æqualia. Ductis enim rectis E C, F D, [e] erunt tam triangula E C D, F C D, ſuper eadem baſi C D, & in eiſdem parallelis, inter ſe æqualia, [f] quàm triangula A C E, F D B, ſuper æqualibus baſibus A E, F B, & in eiſdem parallelis. Si igitur æqualibus E C D, F C D, addantur æqualia A C E, F D B, [g] erunt tota trapezia A C D E, F C D B, inter ſe æqualia. e 37. primi. f 38. primi. g 2. pron.

SINT iam trapezia A C D E, F C D B, æqualia. Dico baſes oppoſitas A E, F B, æquales quoque eſſe. Erunt enim rurſus [h] triangula E C D, F C D, æqualia. Si igitur ex trapezijs æqualibus auferantur, [i] æqualia erunt reliqua triangula A C E, F D B. Quare, vt in hoc ſcholio oſtendimus, baſes A E, F B, æquales erunt. h 37. primi. i 3. pron.

II.

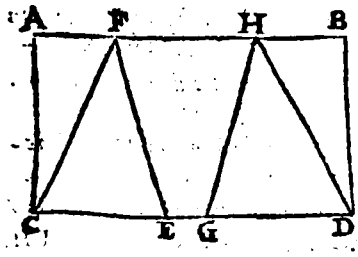
TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiusque eſt illud, cuius baſis maior eſt; Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas inæquales, maiorque eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

VT in eadem figura, ſi baſis A E, dicatur eſſe maior baſe F B; Dico trapezium A C D E, maius eſſe trapezio F C D B. [k] Erunt enim rurſus triangula E C D, F C D, æqualia: At triangulum A C E, triangulo F D B, maius, vt in hoc ſcholio demonſtrauimus. [l] Totum ergo trapezium A C D E, toto trapezio F C D B, maius erit. k 37. primi. l 4. pron.

RVRSVS ſi trapezium A C D E, dicatur eſſe maius trapezio F C D B; Dico baſin A E, baſe F B, maiorem eſſe. [m] Erunt enim rurſus triangula E C D, F C D, æqualia. Quare reliquum triangulum A C E, reliquo triangulo F D B, [n] maius erit: ac proinde, vt in hoc ſcholio oſtenſum eſt, baſis A E, maior erit baſe F B. Quod oſtendendum erat. m 37. primi n 5. pron.

III.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint æquales, æqualia ſunt: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales.



INTER parallelas A B, C D, ſuper æquales baſes C E, G D, conſtituta ſint duo trapezia A C E F, H G D B, quorũ baſes oppoſitæ A F, H B, æquales quoque ſint. Dico ipſa trapezia æqualia eſſe. Ductis enim rectis F C, H D, [o] erunt tam triangula F C E, H G D, ſuper æquales baſes C E, G D, quàm A C F, B D H, ſuper baſes æquales A F, B H, inter ſe æqualia. [p] Tota ergo trapezia æqualia erunt. o 38. primi. p 2. pron.

SINT iam trapezia A C E F, H G D B, æqualia ſuper baſes æquales C E, G D. Dico baſes oppoſitas A F, B H, æquales quoque eſſe. [q] q 38. primi.

Erunt namque rursus triangula F C E, H G D, super æquales bases C E, G D, æqualia: quibus ablatis ex trapezijs æqualibus, a 3. pron. *reliqua triangula A C F, B D H,* a *æqualia erunt; ac proinde, vt paulò antè in hoc scholio ostendimus, bases A F, B H, æquales erunt.*

IV.

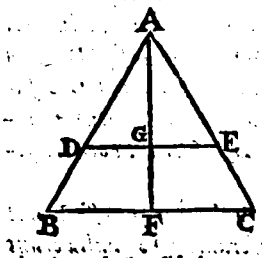
TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusque est illud, cuius basis maior est: Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent oppositas bases inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.

VT in eadem figura, si basis A F, dicatur esse maior base H B, erit trapezium A C E F, trapezio H G D B, maius. b 38. primi. *Erunt enim rursum triangula F C E, H G D, super æquales bases C E, G D, æqualia: At triangulum* c 4. pron. *A C F, maius triangulo B D H, vt suprà ostensum est, quòd basis A F, maior ponatur base B H.* c *Totum ergo trapezium A C E F, toto trapezio H G D B, maius erit.*

d 38. primi. *RVRSVS si trapezium A C E F, maius ponatur trapezio H G D B, erit basis A F, basi B H, maior.* d *Erit enim rursus triangula F C E, H G D, super æquales bases C E, G D, æqualia: quibus ablatis ex trapezijs inæ-*
e 5. pron. *qualibus, reliquum triangulum A C F, reliquo triangulo B D H,* e *maius erit; ac proinde, vt in hoc scholio ostensum fuit, basis A F, basi B H, maior erit. Quod erat ostendendum.*

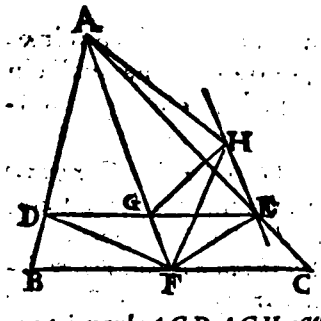
PORRO non videtur hic omittendum theorema sequens, per quod facili negotio lineam rectam quamcunque in quotuis partes æquales diuidemus: quod nos in scholio propositionis 10. huius libri facturos hoc loco recepimus. Quamuis enim idem demonstrari possit, & quidem faciliùs, per proportiones linearum, vt libro 6. ostendemus, iucundum tamè est intelligere, nullo labore idem absolui posse per propositiones hactenus demonstratas, sine proportionum adiumento. Theorema ergo est huiusmodi.

SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, diuidensque alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoque alteram bifariam.



In triangulo A B C, æquidistet D E, ipsi B C, & recta A F, secet alterutram B C, D E, bifariam in F, vel G. Dico alteram quoque bifariam secari. Sint enim primùm anguli ad F, recti. Quo posito, f *& anguli ad G, recti erunt. Si igitur B C,* f 29. primi. *diuiditur bifariam, diuidetur bifariam quoque angulus A, per ea, quæ in scholio propositionis 26. huius libri demonstrauimus; ac proinde recta A G, ab basim D E, trianguli A D E, perpendicularis, diuidens q3 angulum A, bifariam, diuidet bifariam quoq3 basim D E, vt ibidem ostendimus, quod est propositum.*

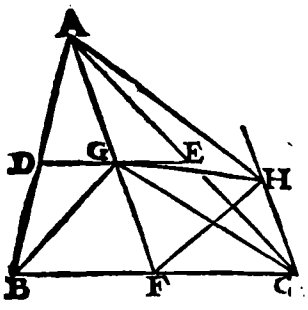
SI verò D E, ponatur diuidi bifariam, diuidetur, per idem scholium propositionis 26. huius libri, angulus quoque A, bifariam: ac proinde recta A F, ad basim B C, perpendicularis; diuidens q3 angulum A, bifariam, basim quoq3 B C, bifariam secabit, quod est propositum.



SINT deinde anguli ad F, non recti, sed A F C, obtusus, & A F B, acutus. Quo posito, erit & A G E, obtusus, & A G D, acutus, & cùm hi illis sint
g 29. primi. *æquales, externi interno. Si igitur B C, diuiditur bifariam,* h *constituatur*
h 23. primi. *acuto angulo A G D, æqualis angulus A G H,* i *& recta G H, rectæ G D,*
i 3. primi. *æqualis, ducanturq3 rectæ A H, H F, F D, F E. Quia igitur tam triangula tota*
k 38. primi. *A B F, A C F, ex scholio propositionis 38. huius libri æqualia sunt,* k *quam*
l 3. pron. *triangula ablata D B F, E C F, ob æquales bases B F, C F,* l *erunt quoque reliqua triangula A D F, A E F, æqualia. Rursus quoniam duo latera A G, G D, trianguli A G D, duobus lateribus A G, G H, æqualia sunt, angulósque comprehendunt æquales A G D, A G H, ex constructione,*
m 4. primi. *erunt quoque triangula A G D, A G H, æqualia. Pari ratione, quia duo latera D G, G F, duobus lateribus H G, G F, æqualia sunt, ex constructione, angulósque continent æquales D G F, H G F, (cùm enim per constructionem*
n 13. primi, *anguli A G D, A G H, æquales sint, erunt quoque reliqui duorum rectorum D G F, H G F, æquales.* n *sunt e-*
o 4. primi. *nim tam A G D, D G F, quàm A G H, H G F, duobus rectis æquales.)* o *erunt quoque triangula D G F, H G F,*
p 2. pron. *æqualia:* p *ac proinde & tota triangula A D F, A H F, æqualia erunt. Est autem eidem triangulo A D F, æ-*
q 1. pron. *quale ostensum triangulum A E F. Igitur & inter se* q *æqualia erunt triangula A H F, A E F:* r *ac propterea*
r 39. primi. *inter duas easdem erunt parallelas, hoc est, ducta recta E H, erit basi A F, communi parallela. Igitur* s *&*
s 37. primi. *triangula H G F, E G F, inter easdem parallelas, & super eadem basi F G, æqualia inter se erunt. Est autem triangulum H G F, triangulo D G F, ostensum æquale. Igitur triangula quoque D G F, E G F, æqualia inter se erunt; propterèaque basis quoque D G, basi G E, æqualis erit, vt in hoc scholio demonstratum est, quod est propositum.*

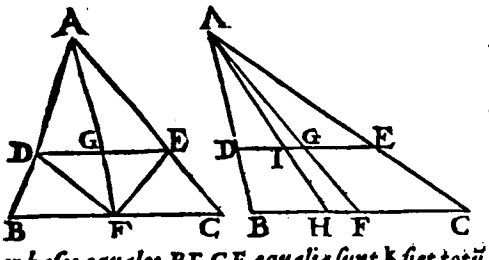
t 23. primi. *SI verò D E, ponatur bifariam diuidi,* t *constituatur angulo acuto A F B, æqualis angulus A F H,* u *& re-*
u 3. primi. *cta F H, rectæ F B, ducanturq3 rectæ A H, H G, G B, G C. Quoniam igitur tam triangula A G D, A G E, ex scho-*
x 38 primi. *lio propositionis 38. huius libri æqualia sunt,* x *quàm triangula D G B, E G C, ob æquales bases D G, E G,* y
y 2. pron. *erunt tota etiam triangula A G B, A G C, æqualia. Rursus quia duo latera A F, F B, duobus lateribus A F, F H,*

æqualia



æqualia ſunt, continentq́ angulos æquales A F B, A FH, ex conſtructione,[a] *erunt triangula quoq́ A F B, A F H, æqualia. Pari ratione, quia duo latera G F, F B, duobus lateribus G F, F H, æqualia ſunt, æqualesq́ continẽt anguloſ G F B, G F H, ex conſtructione,*[b] *erunt quoq́ æqualia triangula G F B, G F H: quibus dẽptis ex æqualibus A F B, A FH,*[c] *æqualia erũt reliqua triangula AGE, A G H: Eſt autẽ eidem triangulo A G B, oſtenſum æquale triangulum A G C.*[d] *Igitur & triangula A G C, A G H, inter ſe erunt æqualia.*[e] *Quare & inter eaſdẽ parallelas erunt, hoc eſt, ducta recta C H, ipſi A F, parallela erit; ac proinde*[f] *æqualia inter ſe erũt triangula G H F, G F C. Fuit autem oſtenſum triangulum G H F, triangulo G B F, æquale.*[g] *Igitur & æqualia inter ſe erunt triangula G F C, G F B; ideoq́, vt in hoc ſcholio demonſtrauimus, & baſes F C, F B, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.*

a 4. primi. b 4. primi. c 3. pron. d 1. pron. e 39. primi. f 37. primi. g 1. pron.



Aliter. Diuiſa ſit primum B C, bifariam in F. Dico & D E, bifariam eſſe diuiſam in G. Si enim D G, G E, non ſunt æquales, ſit maior D G, ducantúrque rectæ F D, F E. Erit igitur per ea, quæ in hoc ſcholio demonſtrauimus, tam triangulum A D G, triangulo A E G, quàm triangulum F D G, triangulo F E G, maius.[h] *Totum ergo triangulum A D F, toto triangulo A E F, maius erit: quibus ſi addantur triangula D B F, E C F,*[i] *quæ propter baſes æquales B F, C F, æqualia ſunt,*[k] *fiet totũ triangulum A B F, toto triangulo A C F, maius; ac proinde, vt in hoc ſcholio monſtrauimus, baſis B F, baſe F C, maior erit: Sed & æqualis ponitur. Quod eſt abſurdum. Bifariam ergo ſecta eſt D E, in G. Quod eſt propoſitum.*

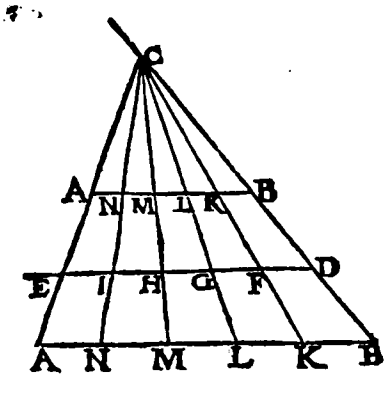
h 4. pron. i 38. primi. k 4 pron.

Sit iam D E, ſecta bifariam in G. Dico & B C, diuidi bifariam in F. Sin minus,[l] *diuidatur B C, in H, bifariam, ducaturq́ recta A H, ſecans D E, in I. Quoniam igitur A H, ſecat B C, bifariam in H, ſecabit eadem ipſam D E, quoque bifariam in I, vt proximè oſtendimus. Quod eſt abſurdum, cùm bifariam ſecta eſſe ponatur in G. Sequeretur enim partem toto eſſe maiorem. Nam ſi D I, æqualis eſt ipſi I E, cùm I E, maior ſit, quàm G E, erit quoque D I, maior, quàm G E, hoc eſt, quàm D G, quæ ipſi G E, æqualis ponitur. Diuiditur ergo B C bifariam in F. Quod erat demonſtrandum.*

l 10. primi.

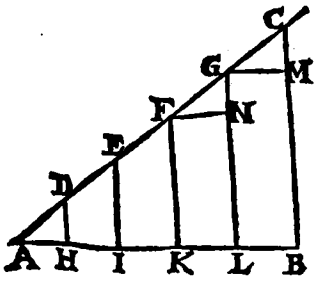
Hoc oſtenſo theoremate, ad diuiſionem lineæ rectæ in quotuis æquales partes iam veniamus.

Datam rectam lineam finitam in quotlibet partes æquales ſecare.



Sit data recta A B, ſecanda in quinque partes æquales. Per extremum punctum B, ducta recta B C, vtcunque, & aſſumpto in B C, puncto quocunque D, ſiue infra B, ſiue ſupra,[m] *ducatur per D, ipſi A B, parallela D E, ex qua*[n] *abſcindantur quinque partes inter ſe æquales, D F, F G, G H, H I, I E, hac tamen lege, vt exiſtente puncto D, infra B, recta D E, ex quinque partibus æqualibus compoſita maior ſit, quàm data A B, minor verò, exiſtente puncto D, ſupra B; vt nimirum recta A C, per alterũ extremum A, & per E, ducta cum B D, concurrere poſſit in puncto aliquo, vt in C: A quo ſi per puncta F, G, H, I, recta ducantur, ſecta erit data recta A B, in quinque partes æquales B K, K L, L M, M N, N A. Quoniam enim in triangulo C B L, recta D G, ipſi B L, eſt parallela, vel in triangulo C D G, recta B L, ipſi D G; ſectaq́ eſt D G, bifariam in F, ſecta quoque erit bifariam B L, in K, vt in proximo theoremate demonſtrauimus. Eademq́ ratione recta K M, in L, ſecta erit bifariam, quemadmodum & F H, in G, bifariam ſecta eſt. Sunt ergo tres partes B K, K L, L M, inter ſe æquales, ſicuti tres D F, F G, G H, atq́ ita de cæteris.*

m 31. primi. n 3. primi.

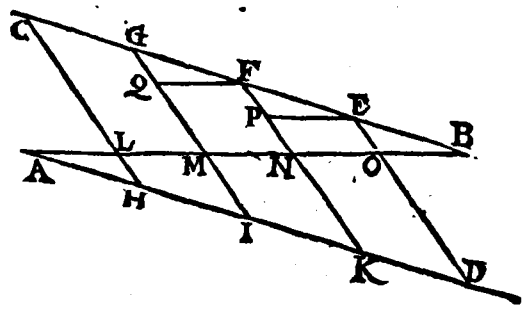


Aliter. Ad extremum A, lineæ A B, ſecandæ in quinque partes æquales, conſtituatur angulus rectilineus quicunque A, & ex recta A C,[o] *abſcindantur quinque partes quantæcunque inter ſe æquales A D, D E, E F, F G, G C: ductáque recta C B,*[p] *agantur ei parallelæ G L, F K, E I, D H. Dico rectam A B, ſectam eſſe in quinque partes æquales.*[q] *Ductis enim per G, F, ipſi A B, parallelis G M, F N;*[r] *quæ inter ſe etiam parallelæ erunt,*[s] *& ipſis B L, L K, æquales in parallelogrammis G B, F L;*[t] *erunt tam anguli F G N, G C M, externus & internus in parallelis G L, C B, quàm anguli C G M, G F N, externus & internus in parallelis G M, F N, æquales inter ſe. Quoniam igitur duo anguli C, G trianguli C G M, duobus angulis G, F, trianguli G F N, æquales ſunt, vterque vtrique, lateráque illis adiacentia C G, G F,*

o 3. primi. p 31. primi. q 31. primi. r 30. primi. s 34. primi. t 29. primi.

a 26. primi. *æqualia per conſtructionem*; [a] *erunt quoque latera* G M, F N, *æqualia: quæ cùm oſtenſa ſint æqualia rectis* B L, L K, *erunt quoque* B L, L K, *inter ſe æquales. Eademq; ratione oſtendemus* K L, K I, *æquales eſſe, necnon* I K, H I, *&* H I, A H; *ac propterea recta* A B, *in quinq; æquales partes diuiſa erit. Quod eſt propoſitum.*

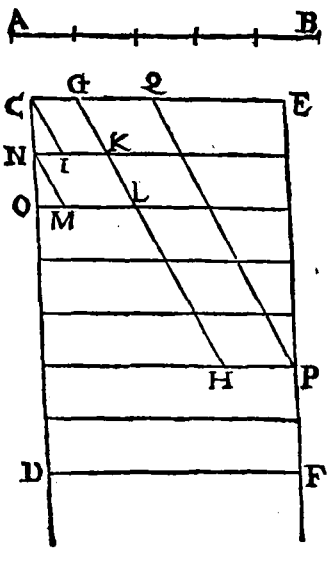
ALITER. Ad extrema puncta A, B, *lineæ* A B, *in quinque partes æquales diuidenda conſtituantur duo*
b 27. primi. *æquales anguli in diuerſas partes* A B C, B A D. *Et in vtraque linea* B C, A D, [b] *quæ ob alternos angulos æqua-*
c 3. primi. *les* A, B, *parallelæ inter ſe ſunt,* [c] *ſumantur quatuor partes inter ſe omnino æquales, tot nimirum, vna minus,*



d 33. primi. *in quot partes linea ſecanda eſt, cuiuſmodi ſunt* B E, E F, F G, G C, A H, H I, I K, K D, *iungantúrque rectæ* C H, G I, F K, E D, [d] *quæ inter ſe erunt parallelæ, cùm coniungant extrema parallelarum æqualium. Dico rectam* A B, *in quinque partes æquales ſectam eſſe.* [e] *Ductis enim* p E, F, *ipſi* A B, *parallelis* E P, F Q, [f] *quæ*
e 31. primi. f 30. primi. *inter ſe quoque parallelæ erunt,* g *& ipſis* N O, M N, *æquales in parallelogrammis* E N, F M, [h] *erunt tam*
g 34. primi. h 29. primi. *anguli* E F P, F G Q, *externus, & internus in parallelis* F K, G I, *quàm anguli* G F Q, F E P, *externus & internus in parallelis* Q F, P E, *inter ſe æquales. Itaque quoniam duo anguli* G, F, *trianguli* F G Q, *duobus angulis* F, E, *trianguli* E F P, *æquales ſunt, vterque vtri-*
i 26. primi. *que, lateráque illis adiacentia* F G, E F, *æqualia, per conſtructionem,* [i] *erunt quoque latera* F Q, E P, *inter ſe æqualia: quæ cùm oſtenſa ſint æqualia rectis* M N, N O, *erunt etiam* M N, N O, *inter ſe æquales. Eadémque ratione æquales inter ſe erunt* O E, N O, M N, L M, A L, *propterea q; recta* A B, *in quinque æquales partes diuiſa erit. Quod eſt propoſitum.*

k 33. primi. *PRAXIS hac breuiùs ita demonſtrabitur.* [k] *Quoniam recta* E D, F K, G I, C H, *parallelæ ſunt, quòd coniungant extrema æqualium & parallelarum; ſecabitur recta* B L, *in quatuor partes æquales, nec non & recta* A O, *vt in præcedenti praxi oſtendimus. Omnes ergo quinque partes* A L, L M, M N, N O, O B, *æquales erunt.*

ALITER. Paretur inſtrumentum diuiſionibus linearum in partes æquales accommodatum, hoc modo.
l 3. primi. *Ductis duabus parallelis ſatis magno ſpatio inter ſe diſtantibus* C D, E F, [l] *ſumantur in vtraque partes omnino inter ſe æquales quotcunque, tot videlicet in vna, quot in altera, & modicæ quantitatis, punctáque re-*
m 33. primi. *ſpondentia lineis rectis iungantur,* [m] *quæ parallelæ inter ſe erunt, cùm coniungant extrema parallelarum æqualium. Si igitur beneficio circini recta* A B, *in quinque diuidenda partes æquales transferatur ex quouis*



puncto G, *vſque ad punctum* H, *ita vt quinque ſpatia parallelarum inter* G, *&* H, *includantur, diuiſa erit ducta* G H, *ab illis parallelis in quinque partes æquales, quibus partibus ſi in data* A B, [n] *ſumantur partes æ-*
n 3. primi. *quales, diuiſa quoque erit* A B, *in quinque æquales partes. Sectam autem eſſe* G H, *in quinque partes æquales, ita demonſtrabitur. Ductis ex* C, N, *ipſi* G H, *parallelis* C I, N M, [o] *quæ inter ſe quoque parallelæ erunt;* p *& ipſis* G K, K L, *æquales in parallelogrammis* G I, K M; [q] *erunt tam anguli* C N I, N O M, *externus & internus in parallelis* N K, O L, *quàm anguli* O N M, N C I, *externus & internus in parallelis* N M, C I, *æquales inter ſe. Igitur cùm duo anguli* N, C, *trianguli* C N I, *duobus angulis* O, N, *trianguli* N O M, *æquales ſint, vterq; vtrique, lateraq; illis adiacentia* C N, N O, *æqualia, ex conſtructione,* [r] *erunt quoque latera* C I, N M, *inter ſe æqualia: quæ cùm oſtenſa ſint æqualia rectis* G K, K L, *erunt quo-*
o 30. primi. p 34. primi. q 29. primi. r 26. primi. *que* G K, K L, *inter ſe æquales. Eadémque ratione omnes partes rectæ* G H, *oſtendentur æquales; ac proinde recta* G H, *in quinque partes æquales erit diuiſa.*

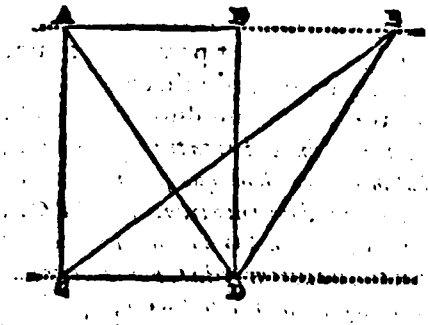
PRAXIS etiam hac breuiùs demonſtrabitur, ſi hoc modo fiat. Sumptis quinque interuallis rectæ E F, *ab* E, *vſque ad* P, *transferatur recta* A B, *beneficio circini ex* P, *ad aliquod punctum rectæ* C E, *vt ad* Q. *Erit enim hac ratione ducta recta* P Q, *diuiſa à parallelis in quinque partes æquales, vt in ſecunda praxi demonſtratum eſt. Quare ſi partes rectæ* P Q, *quæ datæ rectæ* A B, *æqualis eſt, ex conſtructione, transferantur in datam rectam* A B, *diuiſa quoque erit* A B, *in quinque partes æquales. Quod eſt propoſitum.*

PLENIVS deſcribitur hac praxis lib. 6. in ſcholio propoſ. 10.

41. THEOR. 31. PROPOS. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemq; fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

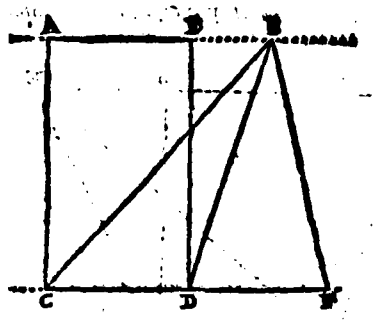
INTER



INTER parallelas AB, CD, & ſuper baſin CD, conſtituantur parallelogrammũ ACDE, & triangulum BCD. Dico parallelogrammum eſſe duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, [a] erunt triangula ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum ACDE, duplum eſt trianguli ACD; [b] quòd triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter ſe ſint. Igitur & trianguli BCD, [c] duplum erit idem parallelogrammũ ACDE. Quamobrem ſi parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 37. primi.
b 34. primi.
c 6. pronũt.

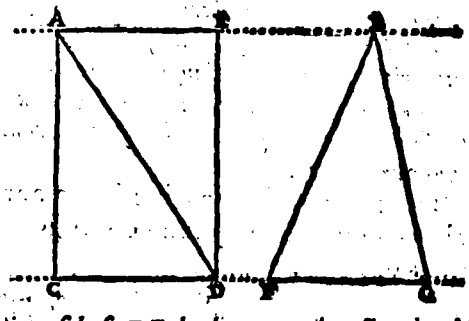
SCHOLIVM.



HINC ſequitur, ſi triangulum duplam habuerit baſin, fuerit q; in eiſdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam ſi baſis CD, producatur ad F, vt ſit DF, æqualis ipſi CD, ducatúrque recta FB, erit triangulum BCF, duplum trianguli BCD, [a] quòd triangula BCD, BDF, æqualia ſint: Eſt autem & parallelogrammum ACDE, [b] duplum eiuſdẽ trianguli BCD. [c] Igitur æqualia erũt triangulum BCF, & parallelogrammum ACDE.

a 38. primi.
b 41. primi.
c 6. pron.

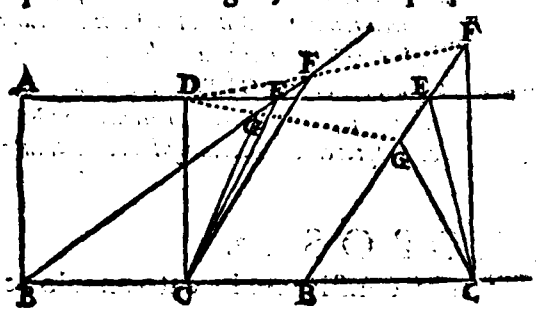
IDEM hoc theorema Euclidis demonſtrari poteſt eodem modo, ſi parallelogrammum & triangulum æquales habuerint baſes, & non eandem, fuerint q; in eiſdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo ACDE, & triangulo BFG, quorum baſes CD, FG, æquales ſunt. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, [d] erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cùm igitur parallelogrammũ ACDE, duplũ ſit trianguli ACD; [e] quòd diameter AD, ſecet parallelogrammũ ACDE, bifariam; [f] erit quoq; idem trianguli BFG, duplum. Eadem ratione ſi baſis FG, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc [g] eſſet duplum etiam trianguli BFG, &c.



d 38. primi.
e 34. primi.
f 6. pron.
g 38. primi.

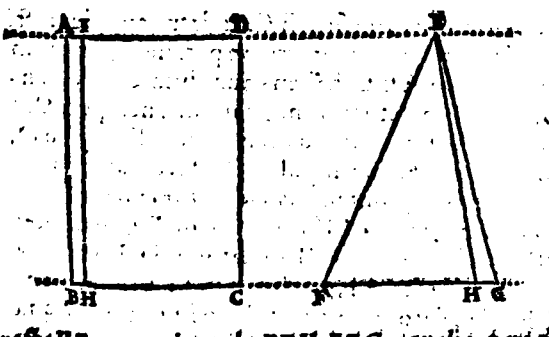
CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, hoc modo.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; habuerint baſin, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; Erũt ipſa in eiſdem parallelis. Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemque parallelis, erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem.



SIT parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EBC, ſiue eandem habeant baſin, ſiue æquales. Dico parallelam AD, productam cadere in E, punctum. Nam aliàs cadet aut ſupra E, aut infrà. Vnde, vt in 39. vel 40. propoſitione, oſtendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat. [h] Nam erit quoq; parallelogrammum ABCD, trianguli BFC, vel BGC, duplum, [i] Quare triangula EBC, FBC, vel triangula EBC, GBC, æqualia erunt, pars & totũ. Quod eſt abſurdum.

h 41. primi.
i 6. pron.

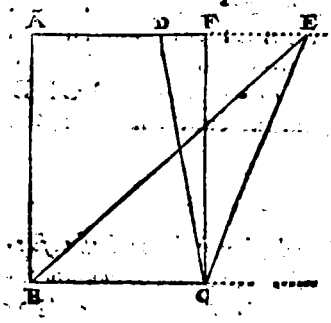


SIT deinde parallelogrammũ ABCD, duplum trianguli EFG, in eiſdemque parallelis. Dico baſes BC, FG, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe BC, ſit maior, abſciſſa æquali CH, & [k] ducta HI, parallelâ ipſi AB, demonſtrabimus parallelogramma ABCD, IHCD, eſſe æqualia, totũ & partem, (quia vtrumque duplum eſt trianguli EFG; illud quidem p hypotheſin, hoc verò per 41. propoſit.) Quod eſt abſurdum. Idem oſtendemus, ſi baſis FG, maior dicatur. Si enim abſcindatur ipſi BC, æqualis FH, ducaturq; recta HE, erunt triangula EFH, EFG, æqualia, pars & totum; (Nam vtrumque dimidium eſt parallelogrammi ABCD; illud quidem per propoſit. 41. hoc verò per hypotheſin.) Quod eſt abſurdum.

k 31. primi.

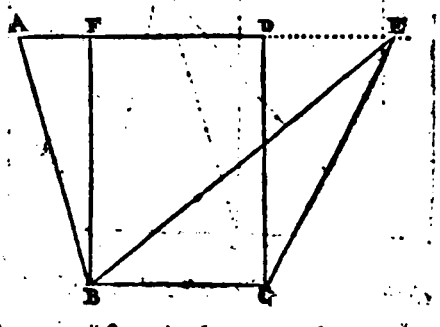
EX PROCLO.

Si triangulum, & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si verò minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.



a 33. primi.
b 41. primi.

Inter lineas parallelas A E, B C, sint cõstituta trapezium A B C D, & triangulum E B C, super basim B C, eandem, quæ sit tamen maior, q̃ altera linea A D, parallela in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, minus esse duplo trianguli E B C. Cùm enim A D, minor ponatur quàm B C, sumatur A F, æqualis ipsi B C, & ducatur recta C F, [a] *quæ erit parallela ipsi A B; atque adeò parallelogrammum erit A B C F,* [b] *quod duplum est trianguli E B C. Quare trapezium A B C D, cùm sit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiusdem trianguli E B C. quod est propositum.*

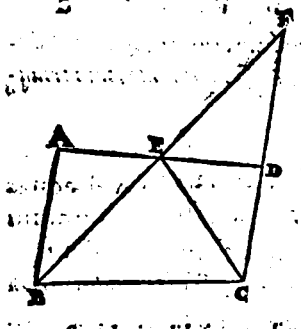


c 33. primi.
d 41. primi.

Sint rursus trapezium, & triangulum, vt prius, sed basis B C, sit minor, quàm reliqua linea parallela A D, in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, maius esse duplo trianguli E B C. Cùm enim A D, maior sit, q̃ B C, abscindatur D F, æqualis ipsi B C, & ducatur recta B F, [c] *quæ erit parallela ipsi C D; atque adeò parallelogrammum erit E C D F:* [d] *quod duplum est trianguli E B C. Quare totum trapezium A B C D, quod superat parallelogrammum B C D F, maius erit duplo eiusdem trianguli E B C. quod est propositum.*

Idem concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super æquales bases, ita tamen, vt nunc quidem basis trapezij sit maior latere oppositæ parallelo, nunc verò minor.

Trapezium habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basim habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem verò in medio puncto lateris oppositi.



e 29. primi.
f 15. primi.
g 26. primi.

Sit trapezium A B C D, cuius duo latera opposita A B, D C, sint parallela, & super basim B C, constituatur triangulum E B C, verticem E, habens in medio puncto E, lateris A D. Dico trapezium A B C D, duplum esse trianguli E B C. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe B E, donec coëat cum C D, protracto in F. Et quia parallelæ sunt A B, C F, [e] *erunt anguli alterni B A E, F D E, æquales:* [f] *Sunt autem & anguli A E B, D E F, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus A E, trianguli A B E, lateri D E, trianguli D E F, æquale, per hypothesin.* [g] *Igitur & reliqua latera A B, B E, reliquis lateribus D F, F E, æqualia erunt; vtrumque vtrique, & reliqui anguli A B E, D F E, æquales: atque idcircò triangula A B E, D F E, ex corollario*

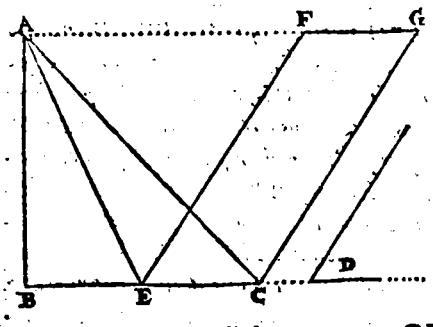
h 2. pron.
i 38. primi.
k 1. pron.

propos. 26. huius libri, æqualia erũt. Quare addito cõmuni triangulo C D E, [h] *erunt triangulo C E F, æqualia triangula simul A B E, C D E.* [i] *Est autem & triangulum B C E, eidem triangulo C E F, æquale, q̃ bases B E, E F, ostensæ sint æquales, & ipsa triangula inter easdem sint parallelas, si per C, duceretur parallela ipsi B F.* [k] *Igitur triangulum C B E, æquale erit triangulis A B E, C D E; & propterea C B E, triangulum dimidium erit trapezij A B C D, quod est propositum.*

PROBL. II. PROPOS. 42.

42.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.



a 10. primi.
b 23. primi.
c 31. primi.

Datum triangulum sit A B C, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo A B C, habens angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe B C, [a] bifariam in E, & [b] fiat angulus C E F, æqualis angulo D, prout libet, hoc est, siue angulus C E F, vergat ad partes C, siue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Ducatur item per A, [c] recta A F, parallela ipsi B C, quæ secet E F, in F. Rursus per C, vel B, ducatur ipsi E F, parallela C G, occurrens rectæ A F, productæ in G. Eritque in angulo C E F, qui dato angulo rectilineo D, factus est æqualis, constitutum parallelogrammum C E F G, quod dico esse æquale triangulo A B C. Ducta enim

41. primi.

recta E A; quoniam parallelogrammũ C E F G, [d] duplũ est trianguli A E C, & triangulum A B C, duplum

duplũ eiusdẽ trianguli AEC, [a] qđ triangula AEC, ABE, super æquales bases EC, BE, & in eisdem parallelis, sunt æqualia: Erũt parallelogrammũ CEFG, & triangulum ABC, [b] æqualia inter se. Cùm igitur angulus CEF, factus sit æqualis angulo D, constat propositũ. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

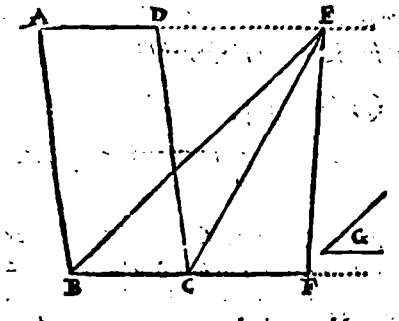
a 38. primi.
b 6. pron.

SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis facillima est ex ipsa constructione.

SVBIVNGIT autem hoc loco Peletarius subsequens problema, quod huius propos. conuersum est.

DATO parallelogrammo æquale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo.



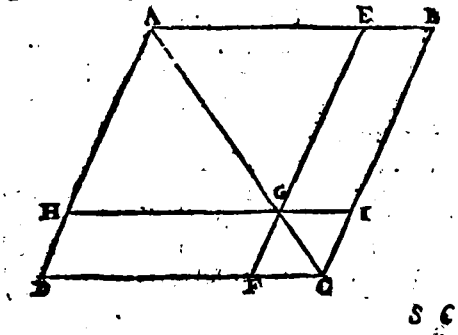
SIT datum parallelogrammum ABCD, & datus angulus G. Fiat angulus CBE, angulo G, æqualis, secetq; recta BE, rectã AD, productam in E: Extendatur quoq; BC, ad F, sitq; CF, æqualis rectæ BC, & iungatur EF. Dico triangulũ BEF, habens angulum EBF, angulo dato G, æqualem, æquale esse parallelogrammo ABCD. Ducta enim recta CE, [a] erit parallelogrammũ ABCD, duplum trianguli BCE: Item triangulum BEF, eiusdem trianguli BCE, duplum: [b] quod æqualia sint triangula EBC, ECF. Quare [c] æqualia inter se erunt parallelogrammum ABCD, & triangulum BEF. Quod est propositum.

a 41. primi.
b 38. primi.
c 6. pron.

PRAXIS quoque huius problematis Peletarij ex ipsa constructione perfacilis est.

THEOR. 32. PROPOS. 43. 43.

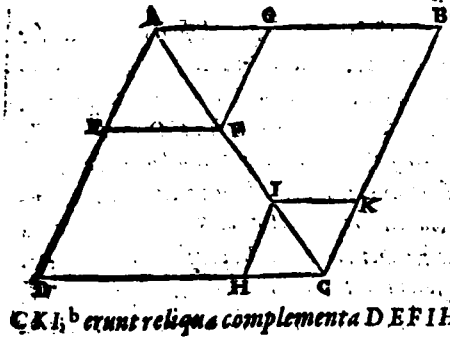
IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.



IN parallelogrãmo ABCD, sint circa diametrũ AC, parallelogrãma AEGH, GFGI, & cõplementa DFGH, EBIG, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hęc inter se esse æqualia. Cũ enim [a] triangula ABC, CDA, æqualia sint; Itemq; triangula AEG, GHA; si hęc ab illis demãtur, [b] remanebũt trapezia CBEG, CDHG, æqualia: [c] Sunt aũt & triangula CGI, CGF, æqualia. Quare si detrahãtur ex trapeziis, [d] remanebunt æqualia complementa DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod ostendendum erat.

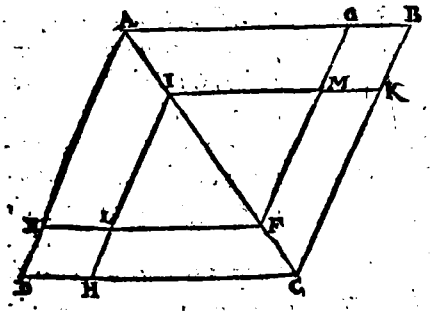
a 34. primi.
b 3. pron.
c 34. primi.
d 3. pron.

SCHOLIVM.



EODEM modo hoc theorema demonstratur à Procla, etiamsi duo parallelogramma circa diametrum nõ coniungantur in puncto G, sed vel vnũ ab altero sit semotum, vel ambo se mutuò intersecent. Sit enim prius vnum ab altero distans, ita vt complementa sint figura quinquangula. Vt in parallelogrammo ABCD, circa diametrũ AC, consistant parallelogrãma AEFG, CHIK. Dico cõplementa DEFIH, BKIFG, esse æqualia. Cũ enim [a] triangula ABC, CDA, æqualia inter se sint: Item triangula AEF, CHI, æqualia triangulis AGF, CKI, [b] erunt reliqua complementa DEFIH, BKIFG, æqualia. Quod est propositum.

a 34. primi.
b 3. pron.



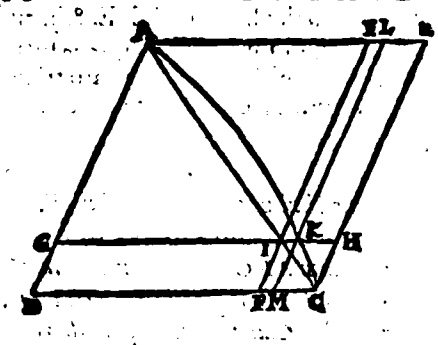
SECENT se iam mutuò parallelogramma AEFG, CHIK, circa diametrum consistentia, ita vt communẽ partem habeãt ILFM. Dico adhuc complementa DELH, BGMK, esse æqualia. Cum enim [c] æqualia sint triangula ABC, CDA, trẽ triangula AFG, AFE; [d] erunt reliqua quadrilatera BCFG, DCFE, æqualia: Sunt [e] autẽ rursus æqualia triangula IFM, IFL. Igitur si hæc addantur dictis quadrilateris, [f] erunt figuræ BCIMG, DCILE, æquales. Cùm igitur [g] æqualia sint triangula CIK, CIH; [h] erunt reliqua complementa BGMK, DELH, etiam æqualia. Quod est propositum.

c 34. primi.
d 3. pron.
e 34. primi.
f 2. pron.
g 34. primi.
h 3. pron.

CONVERSVM quoque huius theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

SI parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduersa sint æqualia; consistent reliqua duo circa diametrum.

DVCTIS duabus rectis EF, GH, quæ sint parallelæ rectis BC, CD, seq; secent in I, diuisum sit parallelogrammum ABCD, in quatuor parallelogramma, quorum aduersa duo BEIH, DFIG, sint æqualia. Dico



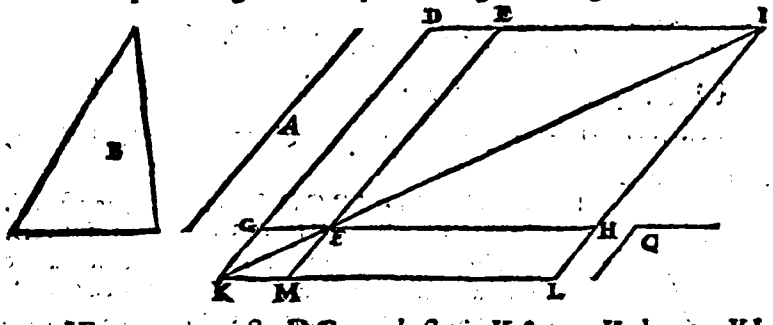
a 31. primi.
b 43. primi.
c 9. pron.
d 1. pron.

reliqua duo AEIG, CFIH, circa diametrũ consistere, hoc est, diametrũ à puncto C, ad punctũ A, ductã transire p punctum I. Si enim non transit, secet diameter CKA, rectam GH, in K, si fieri potest, & per K, [a] ducatur LM, parallela ipsi BC. [b] Erunt igitur complementa BHKL, DGKM, æqualia. Est [c] autem DGKM, maius quàm DGIF. Quare & maius erit BHKL, q̃ DGIF. Cùm ergo DGIF, æquale ponatur ipsi BEIH; [d] erit etiam BHKL, maius quàm BEIH, pars quàm totũ. Quod est absurdum. Non ergo diameter AC, rectam GH, in K, secas, sed per punctum I, transit. Quod est propositum.

44. PROBL. 12. PROPOS. 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur constituere parallelogrammũ æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Con



a 42. primi.
b 31. primi.

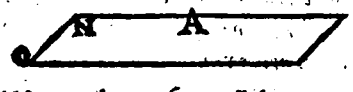
stituatur triangulo B, [a] æquale parallelogrammum DEFG, habens angulum EFG, angulo C, æqualem, producaturq́ue GF, ad H, vt FH, sit æqualis rectæ A; & per H, [b] ducatur HI, parallela ipsi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, p F, diameter IF, occurrens rectæ DG, productæ in K; & [c] per K, ducatur KL, parallela ipsi GH, secans IH, protractam in L, producaturq́ue EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, esse id, quod quæritur. Habet enim latus FH, æquale datæ rectæ A, & angulum HFM, angulo dato C, æqua-

c 31. primi.
d 15. primi.
e 43. primi.

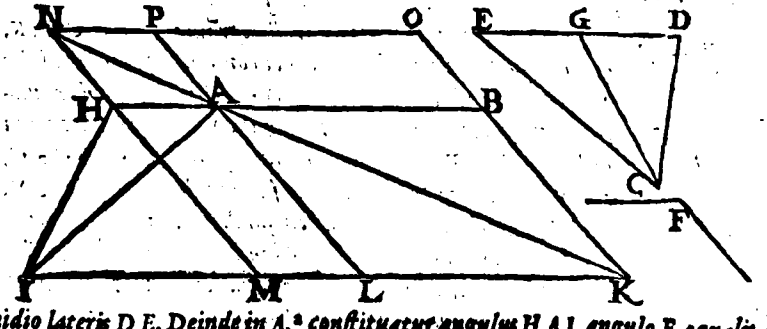
lem, [d] cùm angulus HFM, æqualis sit angulo EFG, qui factus est æqualis angulo C: Denique parallelogrammum LMFH, æquale est triangulo B, [e] cùm æquale sit complemẽto DEFG, quod factum est æquale triangulo B. Ad datã igitur rectã lineã dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD si quis optet, lineam ipsam A, datam, esse vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum FMLH, ad rectam A, ex iis, quæ in scholio propositionis 31. huius libri docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo MFH, & sumatur recta NO, æqualis rectæ FM, compleaturq́; parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.



SED fortassis magis ex sententia Euclidis problema hoc conficiemus, si super ipsam rectam datam construamus parallelogrammum, non autem super æqualem, cuiusmodi fuit recta FH, &c. Sit ergo rursus data recta AB, datum triangulum CDE, & datus angulus F, oporteat q́; super rectam AB, constituere parallelogrammum æquale triangulo CDE, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto vno latere trianguli, vt DE,



bifariam in G, ductaq́; recta CG, secante ex scholio propositionis 38. huius lib. triangulum CDE, bifariam, producatur recta AB, versus eã partem, vbi parallelogrammum construẽdum debet habere angulum dato angulo F, æqualem, vt hic versus A, fiatq́; AH, æqualis ipsi EG, di-

a 23. primi.
b 4. primi.
c 31. primi.
d 23. primi.
e 31. primi.
f 41. primi.

midio lateris DE. Deinde in A, [a] constituatur angulus HAI, angulo E, æqualis, deorsum quidem, si parallelogrammum versus superiorem partem sit construendum, sursum verò, si versus inferiorem. Posita autem recta AI, æquali ipsi EC, iungatur recta HI. Et quia duo latera HA, AI, duobus lateribus GE, EC, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulos q́; continent æquales; [b] erunt triangula AHI, EGC, æqualia. Post hæc, [c] ducta per I, ipsi HB, parallela IK, [d] constituatur in A, versus hanc parallelam angulus HAL, angulo dato F, æqualis; [e] secetq́; AL, rectam IK, in L. [f] Ducta quoq́; per H, ipsi AL, parallela HM, secante IK, in M, [g] erit parallelogram-

mum

mum AHML, trianguli AHI, duplum: Est autem & triangulum CDE, trianguli EGC, duplum, quod æqualia ostensa sint triangula EGC, DGC. Igitur cùm æqualia sint demonstrata triangula AHI, EGC, [a] *erunt æqualia parallelogrammum AHML, & triangulum CDE. Iam verò, sumpta recta LK, datæ rectæ AB, æquali, ducatur recta KA, producaturq; donec cum MH, producta coëat in N, & per N, agatur ipsi HB, parallela NO, donec in O, coëat cum KB, protracta, ac tandem LA, producatur vsque ad P, in rectam NO. Dico parallelogrammum ABOP, esse id, quod quæritur. Est enim constitutum super datam rectam AB, habétque angulum BAP, dato angulo F, æqualem,* [b] *cùm æqualis sit angulo HAL, qui angulo F, factus est æqualis. Denique æquale est dato triangulo CDE,* [c] *cùm æquale sit parallelogrammo AHML, quod triangulo CDE, ostensum fuit æquale.*

a 37. pron.

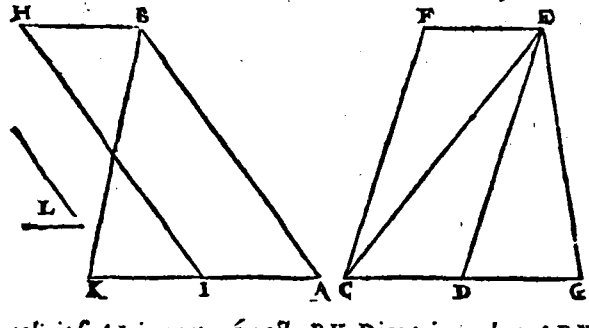
b 15. primi.

c 43. primi.

PRAXIS verò huius problematis à constructione ipsa non differt, nisi quòd recta HI, duci non debet, neq; recta CG. Hæ enim propter demonstrationem tantùm ductæ sunt.

ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.



SIT data recta AB, datum parallelogrammum CDEF, & datus angulus L. Producatur CD, ad G, vt DG, æqualis sit ipsi CD, & iungatur GE, recta: Eritq; triangulum CEG, parallelogrammo CDEF, æquale, vt demonstrauimus scholio propos. 41. [d] *Fiat iam super data recta AB, parallelogrammum ABHI, æquale triãgulo CEG, hoc est, parallelogrammo CDEF, habens angulum A, angulo L, æqualem: & producatur AI, ad K, vt sit IK, æqualis ipsi AI. iungaturq; recta BK. Dico triangulum ABK, constitutum super datam rectam AB, habens angulum A, æqualem dato angulo L, æquale esse dato parallelogrãmo CDEF. Cùm enim triangulum ABK, æquale sit parallelogrammo ABHI, ex scholio propos. 41. quod æquale est constructum parallelogrammo CDEF, constat propositum.*

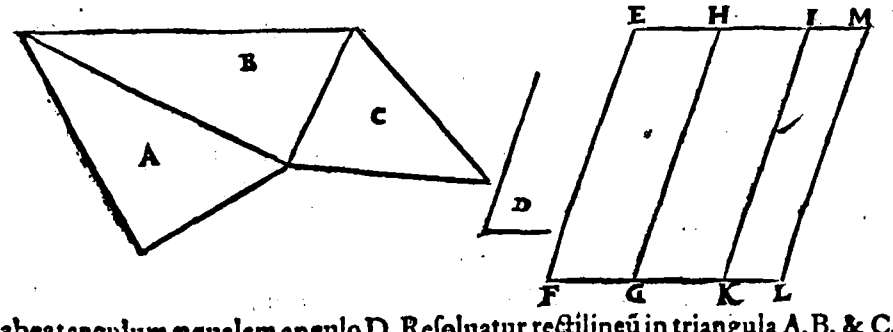
d 44. primi

PRAXIS huiusce problematis à constructione non differt: difficilius q; non est, si adhibeatur præcedens praxis, qua triangulo ECG, parallelogrammũ AB, HI, super data recta AB, in dato angulo A, construatur.

PROBL. 13. PROPOS. 45.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

QVAMVIS Euclides proponat hoc problema absolutè, non astringendo nos ad certã aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propositione 44. fecerat, tamen quia in sequentibus frequenter vsurpatur in data recta linea, placuit ipsum proponere vnà cum data recta linea. Sit ergo recta data EF, rectilineum ABC, & datus angulus D. Oportet igitur constructe ad datam rectam EF, parallelogrammum æquale rectilineo ABC, qd habeat angulum æqualem angulo D. Resoluatur rectilineũ in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A, [a] æquale parallelogrammum constituatur EFGH, super rectam EF, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item super rectam GH, parallelogrammum GHIK, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam IK, parallelogrammum IKLM, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo; factumq; erit quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato ABC, conficiunt totum vnum parallelogrammum, qd sic demonstratur. Duo anguli EFG, HGK, [b] inter se sunt æquales, cùm vterque æqualis sit angulo D. Addito igitur communi angulo FGH, erunt duo anguli EFG, FGH, [c] qui duobus rectis æquiualent, [d] æquales duobus angulis HGK, FGH, ideoq; hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. [e] Quare FG, GK, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, EH, HI, vnam rectam lineam efficere, propterea quòd duo anguli EHG, HIK, æquales inter se sunt, (f cùm sint æquales oppositis angulis æqualibus EFG, HGK.) & & duo anguli HIK, IHG, duobus sunt æ-



a 44. primi.

b 1. pron.

c 29. primi.

d 2. pron.

e 14. primi.

f 34. primi.

g 29. primi.

a 30. primi. ctis æquales, &c. Cùm igitur E I, F K, sint parallelæ: a Itemque E F, I K, quòd vtraque parallela sit rectæ H G; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum parallelogrammo E F K I, cõstituere totũ vnum parallelogrammum E F L M. Ad datam ergo rectam lineã E F, dato rectilineo A B C, constituimus æquale parallelogrammum E F L M, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

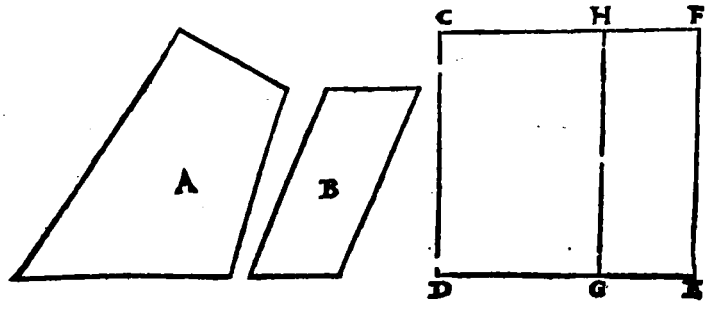
SCHOLIVM.

PARI ratione, propositis quotcunque rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale, si omnia resoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per propositionem 44. veluti factum est in hoc problemate. Nam cùm omnia hæc parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, vti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita A B, & C; Atq; A B, resoluatur in triangula A & B, singulisq; triangulis A, B, C, singula parallelogramma E G, G I, I L, super rectas E F, H G, I K, iuxta artem huius problematis, æqualia constituantur, ex propositione 44. erit constructum parallelogrammum totum E F L M, æquale duobus rectilineis A B, & C. Et sic de pluribus.

PRAXIS autem huius problematis ex praxi præcedentis propositionis sæpius repetita petenda est.

HVC referri poterit problema vtilissimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & breuiori demonstrabimus in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.

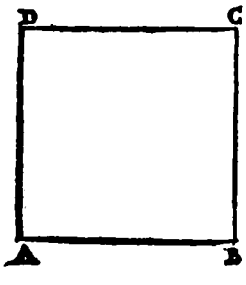


a 45. primi.

SINT data rectilinea A, & B, sitq; A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B. a Fiat parallelogrammum C D E F, in quocunque angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et super rectam C D, parallelogrammũ C D G H, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum C D E F, superat parallelogrammũ C D G H, parallelogrammo E F H G; superabit quoq; figura A, figuram B, eodem parallelogrammo E F H G. Quod est propositum.

45. PROBL. 14. PROPOS. 46.

A DATA recta linea quadratum describere.

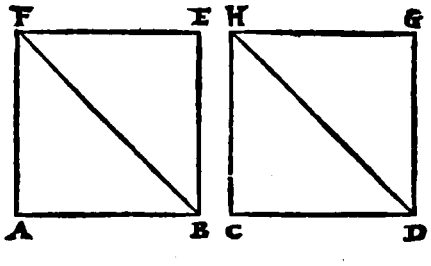


a 11. primi.
b 28. primi.
c 33. primi.
d 34. primi.

SIT data recta A B, super quam oporteat quadratum describere. Ex A, & B, a educantur A D, B C, perpendiculares ad A B, sintq; ipsi A B, æquales, & connectatur recta C D. Dico A B C D, esse quadratum. Cùm enim anguli A, & B, sint recti, b erunt A D, B C, parallelæ: Sunt autem & æquales, quòd vtraque æqualis sit ipsi A B. Igitur c & A B, D C, parallelæ sunt & æquales: & ideò parallelogrammum est A B C D, in quo cùm A D, D C, C B, æquales sint ipsi A B, omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cùm C, & D, d æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratum igitur est A B C D, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.

EX PROCLO.

LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorum æqualium æquales sunt lineæ.

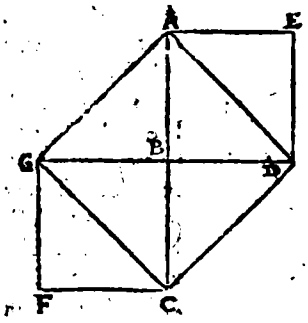


a 4. primi.
b 34. primi.

SINT primùm rectæ A B, C D, æquales. Dico earum quadrata A B E F, C D G H, æqualia quoque esse. Ductis enim diametris B F, D H, erunt duo latera B A, A F, trianguli B A F, duobus lateribus D C, C H, trianguli D C H, æqualia, vtrumque vtrique, cùm ex definitione quadrati rectæ A F, C H, æquales sint rectis A B, C D. Sunt autem, & anguli A, & C, æquales, nempe recti. a Igitur triangula B A F, D C H, æqualia erunt. Quæ b cùm sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum.

SINT deinde quadrata A B D E, B C F G, æqualia. Dico lineas quoq; ipsorũ A B, B C, æquales esse. Con-

iungantur



iungantur enim quadrata ad angulum B, vt recta A B, B C, in directũ constituantur. Et quoniã anguli A B G, A B D, sunt recti, [a] erunt & recta G B, B D, in directũ constituta. Ducantur diametri A D, C G, iungantúrq; recta A G, C D. Quoniam igitur quadrata A B D E, B C F G, æqualia sunt, erũt & triangula A B D, B C G, eorũm dimidia, æqualia. Addito ergo communi triangulo B C D, fiet totum triangulum A C D, toti triangulo G D C, æquale. Quare triangula A C D, G D C, cùm eandem habeant basin C D, ad easdemq; sint partes, [b] in eisdẽ sunt parallelis: ideoq; parallela sunt A G, C D. Et quoniam, vt in scholio propos. 34. ostendimus, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariam, erunt anguli D A C, G C A, alterni semirecti, ideoq; æquales. Quamobrem, [c] & parallela sunt A D, C G. Igitur parallelogrammum est A D C G; ac propterea [d] recta A D, C G, æquales. Quoniam ergo in triangulis A B D, B C G, latera A D, C G, æqualia sunt, & anguli, quibus ea latera adiacent, inter se etiam æquales, cùm sint semirecti, vt in scholio propos. 34. ostensum fuit; [e] erunt reliqua latera æqualia, nempe A B, ipsi B C, &c. Quod est propositum.

a 14. primi.
b 39. primi.
c 27. primi.
d 34. primi.
e 26. primi.

SCHOLIVM.

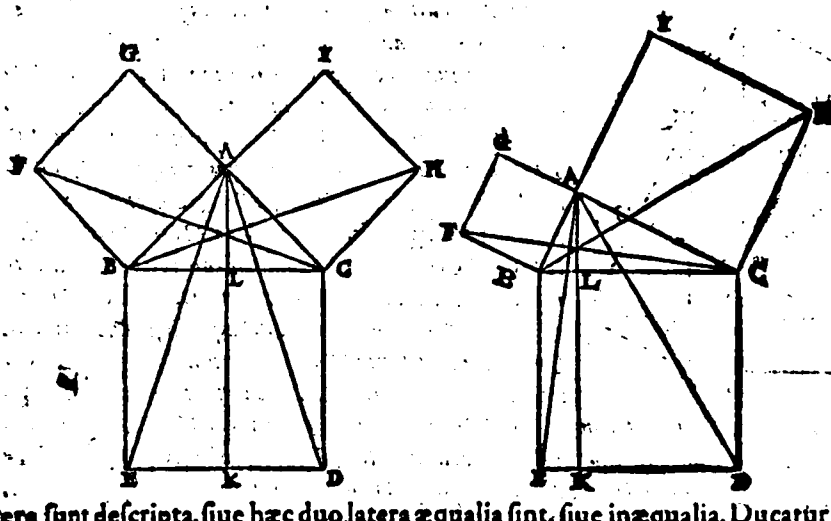
Possent hæc omnia multò breuiùs probari per superpositionem quadrati vnius super aliud. Nam si lineæ sint æquales, si vna alteri superponatur, congruent ipsa inter se. Cùm ergo & anguli sint æquales, nempe recti, conuenient quoq; ipsi inter se, ideoq; totum quadratum toti quadrato congruet. Quod si quadrata sint æqualia, congruent ipsa inter se, propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: aliàs vnum quadratum alia maius esset.

Praxis autem huius problematis perfacilis est. Si namque ad datam rectam A B, in altero extremorum, vt in A, erigatur perpendicularis A D, ipsi datæ rectæ A B, æqualis, & ex B, & D, ad interuallum eiusdem A B, duo arcus describantur sese in C, intersecãtes, iungantúrq; recta B C, D C, constructum erit quadratum. Nam A B C D, cùm ex constructione sit figura æqualium laterum, atq; adeò latera opposita habeat æqualia, parallelogrammum erit, vt ad initium scholij propos. 34. demonstrauimus. Existente ergo angulo A, recto, [f] erunt & B, D, recti, necnon & [g] oppositus angulus C, &c.

f 29. primi.
g 34. primi.

THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

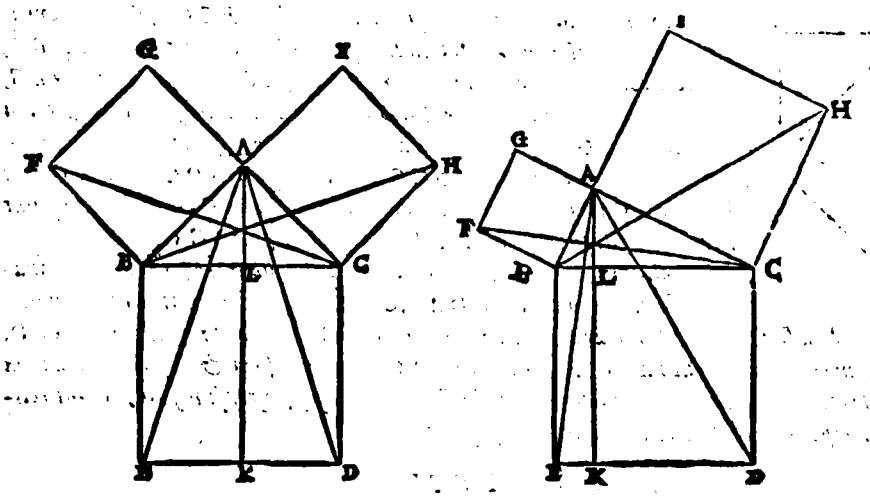
In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.



In triangulo A B C, angulus B A C, sit rectus, [a] describanturque super A B, A C, B C, quadrata A B F G, A C H I, B C D E. Dico quadratum B C D E, descriptum super latus B C, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis A B F G, A C H I, quæ super alia duo latera sunt descripta, siue hæc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta A K, [b] parallela ipsi B E, vel ipsi C D, secans B C, in L, & iungantur rectæ A D, A E, C F B H. Et quia duo anguli B A C, B A G, sunt recti, [c] erunt rectæ G A, A C, vna linea recta; eodemque modo I A, A B, vna recta linea erunt. Rursus quia anguli A B F, C B E, sunt æquales, cùm sint recti, si addatur communis angulus A B C, [d] fiet totus angulus C B F, toti angulo A B E, æqualis; similiterque totus angulus B C H, toti angulo A C D. Quoniam igitur duo latera A B, B E, trianguli A B E, æqualia sunt duobus lateribus F B, B C, trianguli F B C, vtrumque vtrique, vt constat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli A B E, F B C, contenti hisce lateribus æquales, vt ostendimus; [e] Erunt triangula A B E, F B C, æqualia. Est autẽ quadratum, seu parallelogrammum A B F G, [f] duplum trianguli F B C, cùm sint inter parallelas B F, C G, & super eandem basin B F: Et parallelogrammum B E K L, duplum trianguli A B E, quòd sint inter parallelas B E, A K, & super eandem basin B E.

a 46. primi.
b 31. primi.
c 14. primi.
d 2. pronunc.
e 4. primi.
f 41. primi.

a 6. pronn.



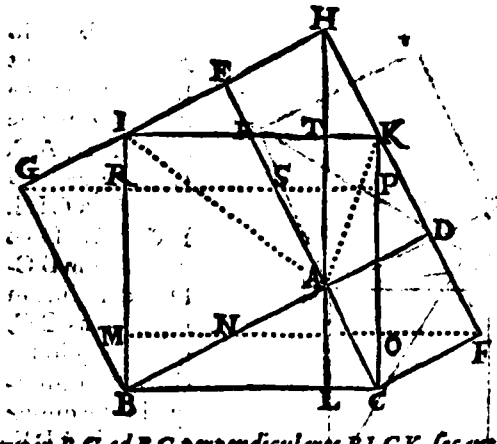
b 4. primi.

Quæ[a] æqualia erũt quadratum ABFG, & parallelogrammũ BEKL. Eadem ratione oſtendemus, æqualia eſſe quadratum ACHI, & parallelogrammum CDKL. [b] Erũt enim rurſus trianguli ACD, HCB, æqualia, ideoq; eorum dupla, parallelogrammum videlicet CDKL, & quadratum ACHI, æqualia erunt. Quamobrem totum quadratum BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrãmis BEKL, CDKL, æquale eſt duobus quadratis ABFG, ACHI, In rectangulis ergo triangulis, quadratum, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

FACILE ex theoremate iſto quiuis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti maius eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: In quouis autem triangulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppoſiti minus eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum. Nam ſi angulus coarctaretur, donec fieret rectus, manentibus iiſdem lateribus eum ambientibus, euaderet latus oppoſitum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus iiſdem lateribus eum ambientibus, fieret latus oppoſitum maius, vt patet. Cùm ergo quadratum lateris angulo recto oppoſiti æquale ſit hic oſtenſum duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum; perſpicuum eſt, quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti eſſe maius duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: quadratum verò lateris angulo acuto oppoſiti eſſe minus duobus quadratis ſimul duorum laterum reliquorum. Quantò autem illud maius ſit, & quantò hoc minus, demonſtrabit Euclides lib. 2. propoſ. 12. & 13.

QVONIAM verò theorema hoc pulcherrimum eſt, vtilitatesq; habet inſignes, operæ pretium iudicaui tentare, num illud aliis viis demonſtrari poſſit, variata aliquantulum conſtructione; quod Peletarius ſine



a 34. primi.

b 34. primi.

c 29. primi.

proportionibus fieri poſſe negauit. Sit ergo rurſus triangulum ABC, cuius angulus BAC, rectus ſit, productis q; lateribus BA, CA, ad partes anguli recti, fiant AD, AE, ipſis AC, AB, æquales; & per C, D, B, E, ipſis AB, AC, parallelæ agantur, coeuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis CD, BE, [a] tam latera DF, FC, oppoſitis lateribus AC, AD, quàm latera EG, GB, lateribus oppoſitis AB, AE, æqualia ſunt, erit vtrumque parallelogrammum æquilaterum. Sed & anguli omnes recti ſunt. [b] Nam F, G, oppoſitis rectis DAC, EAB, æquales ſunt, ideoq; recti: Anguli autẽ C, D, B, E, recti ſunt, quòd vterque C, D, cum recto DAC, & vterque B, E, cum recto EAB, [c] æqualis ſit duobus rectis. Quadrata ergo ſunt CD, BE, laterum AC, AB. Productis etiam lateribus FD, GE, donec conueniant in H, eriganturq; in B, C, ad BC, perpendiculares BI, CK, ſecantes GH, FH, in I, K, iungaturq; recta IK. Et quia, ſi à rectis angulis IBC, ABG, auferatur communis angulus ABI, reliqui ABC, GBI, æquales ſunt; ſunt autẽ & recti anguli BAC, BGI, æquales; [d] erunt duo anguli A, B, trianguli ABC, duobus angulis G, B, trianguli GBI, æquales, vterque vtrique: Sunt autem & latera AB, GB, illis adiacentia æqualia, ob quadratum BE. [d] Igitur & tam latera BC, BI, quàm AC, GI, æqualia erũt, & reliqui anguli C, I, æquales. Non aliter in triangulis ABC, FKC, æqualia erunt tam latera BC, CK, quàm AB, FK, & anguli B, K: propterea quòd duo anguli A, C, trianguli ABC, duobus angulis E, C, trianguli FKC, æquales ſint, (cũ A, F, recti ſint, & duo anguli C, reliqui duorum rectorum, dempto communi ACK,) & latera AC, CF, illis adiacentia æqualia, ob quadratum CD. Quare recta BI, CK, [e] inter ſe etiam æquales erunt. [f] Cùm ergo ſint quoq; parallelæ, & erunt etiam BC, IK, æquales & parallelæ. Quadratum igitur eſt BCKI, lateris BC, cùm quatuor eius latera ſint æqualia, & omnes anguli recti, [g] quod anguli I, K, oppoſitis rectis C, B, æquales ſint. Dico ergo, quadratum CI, duobus quadratis BE, CD, æquale eſſe. Ducta enim ex H, per A, recta HTAL, ipſis BI, CK, parallela erit. Nam quia [h] GE, ipſi BA, æqualis eſt, & EH, ipſi AD, hoc eſt, ipſi GI, quæ ipſi AC, ſiue AD, oſtenſa fuit æqualis, erit &

d 16. primi.

e 1. pron.

f 28. primi.

g 33. primi.

h 34. primi.

& addita communi E I, tota H I, toti G E, hoc eſt, ipſi A B, æqualis. Cùm ergo H I, A B, ſint etiam parallelæ, [a] erunt quoq; B I, A H, parallela & æquales. Eodemq; modo A H, ipſi C K, parallela oſtenderetur, & æqualis. Quoniam igitur [b] tam quadratum B E, parallelogrammo B H, ſuper eandem baſin A B, quàm parallelogrammum B T, eidem parallelogrammo B H, ſuper eandem baſin B I, æquale eſt, [c] erit quoq; quadratum B E, parallelogrammo B T, æquale. Sic etiam quia tam [d] quadratum C D, parallelogrammo C H, ſuper eandem baſin A C, quàm parallelogrammum C T, eidem parallelogrammo C H, ſuper eandem baſin C K, æquale eſt, [e] erit quoq; quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Totum ergo quadratum B C K I, ex duobus parallelogrammis B T, C T, compoſitum, duobus quadratis B E, C D, æquale eſt. Quod erat demonſtrandum.

a 33. primi.
b 35. primi.
c 1. pron.
d 35. primi.
e 1. pron.

ALITER. Loco rectæ H T A L, iungantur duæ rectæ A I, A K, & per A, ipſis B I, C K, parallelæ ducatur T A L. Quoniam ergo [f] tam quadratum B E, (oſtendemus enim vt priùs, B K, B E, C D, quadrata eſſe laterum B C, A B, A C.) trianguli A B I, ſuper eandem baſin A B, quàm parallelogrammi B T, eiuſdem trianguli A B I, ſuper eandem baſin B I, duplum eſt, [g] erit quadratum B E, parallelogrammo B T, æquale. Pari ratione, quia [h] tam quadratum C D, trianguli A C K, ſuper eandem baſin A C, quàm parallelogrammum C T, eiuſdem trianguli A C K, ſuper eandem baſin C K, duplum eſt, [i] erit quoq; quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Quam ob rem, vt priùs, totum quadratum B C K I, ex parallelogrammis duobus B T, C T, conflatum, duobus quadratis B E, C D, æquale eſt. Quod erat oſtendendum.

f 41. primi.
g 6. pron.
h 41. primi.
i 6. pron.

ALITER. Loco rectarum H T A L, A I, A K, ducantur per F, G, ipſis B C, I K, parallelæ F M, G P, ſecantes A B, C K, in N, O, & B I, C E, in R, S. Erit [q] B R, ipſi K O, æqualis. Quoniam enim [k] anguli O, R, recti ſunt, & O K F, R B G, æquales, quòd vterque angulo A B C, ſuprà oſtenſus ſit æqualis; erunt duo anguli O, K, trianguli F K O, duobus angulis R, B, trianguli G B R, æquales, vterque vtrique. Sunt autem & latera F K, B G, illis adiacentia æqualia, quòd vtrumque ſuprà ſit oſtenſum ipſi B C, æquale. [l] Igitur & latera K O, B R, æqualia erunt. Itaque quoniam [m] tam parallelogramma B C F N, B C O M, ſuper eandem baſin B C, quàm parallelogramma B C S G, B C P R, ſuper eandem baſin B C, æqualia ſunt, eſt [q] parallelogrammum B C P R, parallelogrammo I K O M, æquale, ob rectas B R, K O, oſtenſas æquales; (Nam hinc fit, vt ſi vnum alteri ſuperponatur, ſibi mutuò congruant, propter laterum, angulorumq; æqualitatem) erunt ambo parallelogramma B C F N, B C S G, toti quadrato B C K I, ex duobus parallelogrammis B C O M, I K O M, compoſito æqualia. [n] Cùm ergo tam quadratum C D, parallelogrammo B C F N, ſuper eandem baſin C F, quàm quadratum B E, parallelogrammo B C S G, ſuper eandem baſin B G, æquale ſit; erunt quoq; ambo quadrata C D, B E, eidem quadrato B C K I, æqualia. Quod demonſtrandum erat.

k 29. primi.
l 26. primi.
m 35. primi.
n 35. primi.

AT QVE in hunc modum aliæ demonſtrationes excogitari poterunt. Video demonſtrationem Euclidis ſimpliciorem eſſe, & magis expeditam, ſed non iniucundum tamen eſt intelligere, variis demonſtrationibus eandem veritatem poſſe confirmari.

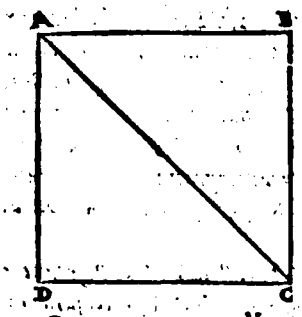
INVENTIO porrò admirabilis, atq; pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt ſcribit Vitruuius lib. 9. hoſtias Muſis immolauit, quòd ſe in tam præclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent eum immolaſſe centum boues: ſi tamen Proclo credendum eſt, vnum tantummodò obtulit. Fortaſſe autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occaſionem ſumpſit, vt theorema hoc inueſtigaret. Cùm enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter eſſet contemplatus, vidiſſet q; quadratum numerum maioris æqualem eſſe quadratis numeris reliquorum, compoſuit triangulum ſcalenum, cuius maximum latus diuiſum erat in 5. partes æquales, minimũ in 3. eiuſdem magnitudinis, & reliquũ in 4. Quo facto, conſideranit angulũ ſub his duobus lateribus contentum, inuenit q; eum eſſe rectum; Id q; in quamplurimis alijs numeris, vt in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c. obſeruauit. Quare inquirendum eſſe iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale eſſet, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem ſecundùm dictos numeros, continebãt vnum angulum rectum. At q; ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinuenit, firmaq; ratione demõſtrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propoſ. 31. vbi demonſtrauit, non ſolùm quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale eſſe quadratis reliquorum duorum laterum; Verùm etiam figuram quamlibet rectilineam ſuper latus recto angulo oppoſitum conſtructam, ſiue ea ſit triangulum, ſiue quadrangulum, &c. æqualem eſſe duabus figuris, quæ ſuper reliqua latera deſcribuntur, dummodò priori ſint ſimiles, ſimiliterq; deſcriptæ, vt ibidem oſtendemus.

CAETERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximi quadratum æquale eſt quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiuſmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. ſi duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. ſi idem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & ſi quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. At q; ita reperientur quotcunq; alij, ſi primi illi tres per quemcunque multiplicentur numerum. Traduntur tamen à Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima aſcribitur Pythagoræ, & eſt huiuſmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, vt 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, vt hic ex 25. reijce vnitatem. Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui ſi addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale eſt quadratis aliorum. Quòd ſi numerus impar acceptus fuiſſet 3. eſſent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribui-

tur Platoni, qua talis est. Accipiatur numerus quicunque par, nempe 6. Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros 8. & 10. primus autem est 6. nimirum numerus par acceptus. Huc regula si accipiatur par 10. reperientur alij duo 24. & 26.

COLLIGVNTVR *ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quàm problemata, è quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc sumentes.*

I.

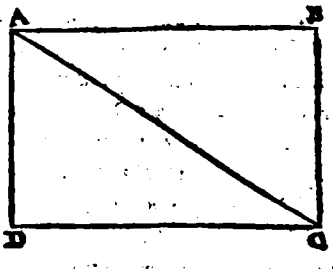


SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

IN quadrato A B C D, ducatur diameter A C. Dico quadratum A C, duplum esse quadrati A B C D. Cùm enim in triangulo A B C, angulus B, rectus sit, [a] *erit quadratum lateris A C, æquale duobus quadratis laterum A B, B C. Cùm igitur quadrata linearum A B, B C, æqualia sint, quòd linea A B, B C, sint æquales; erit quadratum lineæ A C, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ A B, hoc est, quadrati A B C D. Quod est propositum.*

a 47. primi.

II.



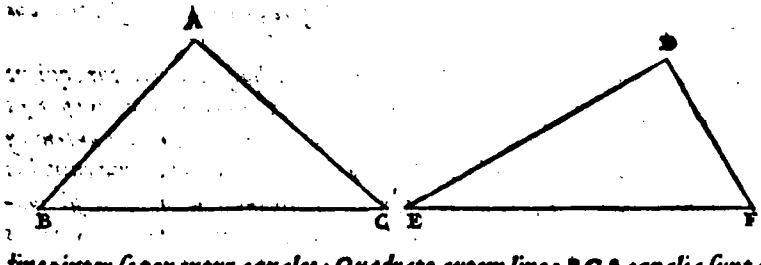
QVADRATVM diametri figuræ alterà parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.

IN altera parte longiori A B C D, ducatur diameter A C; & quia in triangulo A B C, angulus B, est rectus, [b] *erit quadratum lateris A C, æquale duobus quadratis laterum inæqualium A B, B C. Quod est propositum.*

b 47. primi.

III.

SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorũ laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.

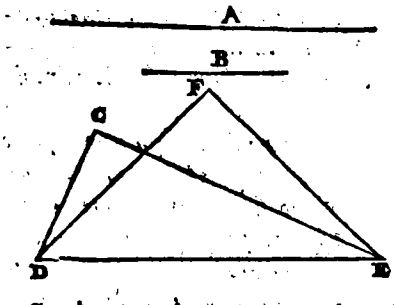


TRIANGVLORVM *A B C, D E F, anguli A, & D, sint recti, lateraque opposita B C, E F, æqualia. Dico duo quadrata laterum A B, A C, simul sumpta æqualia esse duobus quadratis laterum D E, D F, simul sumptis. Nam quadrata linearũ B C, E F, æqualia inter se sunt, cùm & ipsæ lineæ inter se ponantur æquales: Quadrato autem lineæ B C,* [a] *æqualia sunt quadrata linearum A B, A C: Et quadrato lineæ E F, æqualia sunt quadrata linearum D E, D F.* [d] *Quadrata ergo rectarum A B, A C, quadratis rectarum D E, D F, æqualia sunt. Quod est propositum.*

a 47. primi.
d 1. pron.

IV.

DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis.



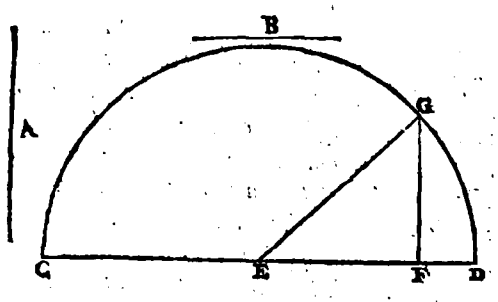
SINT A, & B, latera duorum quadratorum inæqualium. Fiat angulus rectus D C E, sitq; D C, recta æqualis rectæ B, & recta C E, rectæ A. Ducta deinde recta D E, coniungente duo puncta D, E, constituantur super ipsam duo anguli semirecti D E F, E D F, [e] *coeantq; rectæ D F, E F, in F. Quoniã igitur in triãgulo F D E, anguli F D E, F E D, æquales sunt;* [f] *erunt & latera D F, E F, æqualia, ideóque & quadrata eorundem laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearum D F, E F, æqualia esse quadratis linearum A, & B, hoc est, quadratis linearum C E, & C D. Nam cùm in triangulo D E F, anguli F D E, F E D, faciant vnum rectum;* [g] *erit reliquus angulus F, rectus.* [h] *Quamobrem erunt quadrata linearum D F, E F, æqualia quadrato lineæ D E:* [i] *Sed eidem quadrato lineæ D E, æqualia sunt quoque quadrata linearum C D, C E. Igitur quadrata linearum D F, E F,* [k] *æqualia sunt quadratis linearum D C, E C. Quod est propositum.*

e 13. prom.
f 6. primi.
g 32. primi.
h 47. primi.
i 47. primi.
k 1. pron.

V.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, q̃ minor.

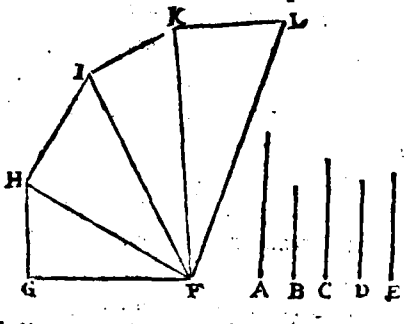
POTEST



POTENTIA linea recta dicitur eius quadratū. Tantum enim quæuis recta linea posse dicitur, quantum est eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales A, & B, oporteatque cognoscere, quantò maius sit quadratum maioris lineæ A, quàm minoris B. Ex quauis linea recta C D, sumatur C E, æqualis rectæ A, & E F, æqualis rectæ B. Deinde centro E, & interuallo E C, semicirculus describatur C G D: & ex F, ducatur F G, perpendicularis ad C D. Dico quadratum rectæ A, hoc est, rectæ C E, sibi æqualis, maius esse, quàm quadratum rectæ B, hoc est, rectæ E F, sibi æqualis, quadrato rectæ F G. Ducta enim recta E G, [a] *erit eius quadratum æquale quadratis rectarum E F, F G, hoc est, quadratum rectæ E C, illi æquale, superabit quadratum rectæ E F, quadrato rectæ F G. Quod est propositum.* a 47. primi.

VI.

PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

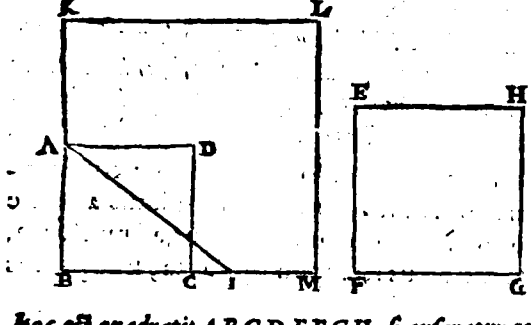


SINT latera quinque quadratorū A, B, C, D, E. Oporteat q. inuenire quadratum æquale omnibus illis quinque. Fiat angulus rectus F G H, sit q. rectæ F G, æqualis rectæ A, & rectæ G H, rectæ B. Ducta deinde recta H F, fiat angulus rectus F H I, sit q. I H, æqualis rectæ C. Ducta rursus recta I F, fiat angulus rectus F I K, sit q. I K, æqualis rectæ D. Ducta denique recta K F, fiat angulus rectus F K L, sit q. K L, æqualis rectæ E, ducatur q. rectæ E L. Dico quadratum rectæ F L, æquale esse quinque quadratis propositis. Quadratum enim rectæ F H, [b] *æquale est quadratis rectarū F G, G H, hoc est, quadratis rectarum A, & B. Rursus quadratum rectæ F I,* [c] *æquale est quadratis rectarum F H, H I, & idcirco quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ F K,* [d] *æquale est quadratis rectarum F I, I K, ideo q. quadratis rectarum A, B, C, & D. Denique quadratum rectæ F L,* [e] *æquale est quadratis rectarum F K, K L, ac propterea quadratis rectarū A, B, C, D, & E. Quod est propositum.*

b 47 primi. c 47 primi. d 47. primi. e 47 primi.

VII.

PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figurā, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita vt tota figura composita sit etiam quadrata.

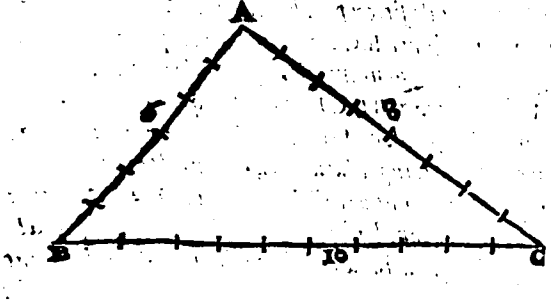


SINT duo quadrata A B C D, E F G H, propositum q. sit quadrato A B C D, apponere figuram, quæ sit æqualis quadrato E F G H, &c. Sumatur recta B I, æqualis rectæ F G, hoc est, lateri quadrati E F G H. Ducta autem recta A I, & producta recta B A, ad partes A, accipiatur B K, æqualis rectæ A I, perficiatur q. quadratum B K L M. Dico figuram A D C M L K, quadrato A B C D, adiunctum, æqualem esse quadrato E F G H. Quoniam enim quadratum rectæ A I, hoc est, quadratum B K L M, [f] *æquale est quadratis rectarum A B, B I, hoc est, quadratis A B C D, E F G H: si auferatur commune quadratum A B C D,* [g] *remanebit figura A D C M L K, æqualis quadrato E F G H. Quod est propositum.*

f 47. primi. g 3. pron.

VIII.

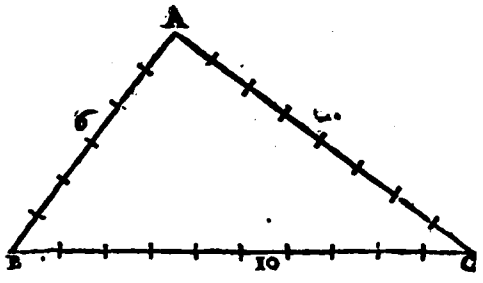
COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.



SIT angulus A, rectus in triangulo A B C. sint q. primùm cognita latera A B, A C, circa angulum rectum, quorum A B, ponatur 6. palmorum, & A C, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum A B, A C, nempe quadrati palmi 36. & 64. [h] *æqualia sunt quadrato rectæ B C: si illa cō iungantur simul, efficietur hoc quadratorū palmorum 100. Latus ergo B C, continebit 10. palmos. Tantum enim est latus, seu radix quadrata 100. palmorum, vt perspicuum est apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera A B, B C, sit q. A B, 6. palmorum, & B C, 10. Quoniam*

h 47. primi.

a47.primi.

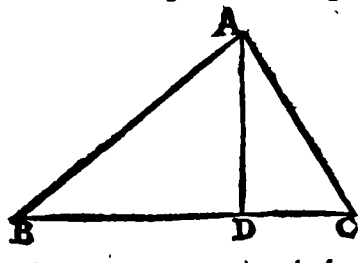


igitur quadrata rectarum A B, A C,[a] æqualia ſunt quadrato rectæ B C; ſi quadratum rectæ A B, quod continet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectæ B C, quod eſt palmorum 100. remanebit quadratũ rectæ A C, 64. palmorum. Latus ergo A C, continebit 8. palmos. Tanta enim eſt radix quadrata, ſeu latus 64. palmorum. Quod eſt propoſitum. Caterùm non ſemper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicémue quadratam, vt notum eſt apud Arithmeticos. Vnde latus inuentum ſæpe numero exprimi nequit, niſi per radicem ſurdam, quam vocant. Sed de his aliàs.

IX.

Si ex angulo à duobus lateribus inæqualibus trianguli comprehenſo ad baſin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, ſecabitur baſis in partes inæquales, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contrà, ſi baſis à perpendiculari ſecetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, maiusque illud erit, quod maiori baſis ſegmento adiacet.

b47.primi.



CADAT primùm in triangulo A B C, cuius latus A B, maius ſit latere A C, perpendicularis A D, ad B C, demiſſa intra triangulum, quod tum demum continget, quando vterque angulus B, C, acutus eſt, vt ex corollario 2. propoſ. 17. conſtat. Dico ſegmẽtum B D, eſſe maius ſegmento C D. Quoniam enim[b] tam quadratum ex A B, quadratis ex A D, B D, quàm quadratum ex A C, quadratis ex A D, C D, æquale eſt: Eſt autem quadratum ex A B, maius quadrato ex A C, quòd latus A B, latere A C, ponatur maius; erunt quoque duo quadrata ex A D, B D, maiora duobus quadratis ex A D, C D: Et ablato communi quadrato rectæ A D, reliquum quadratum ex B D, reliquo quadrato ex C D, maius erit. Quare & recta B D, maior erit, quàm recta C D. quod eſt primum.

c47.primi.

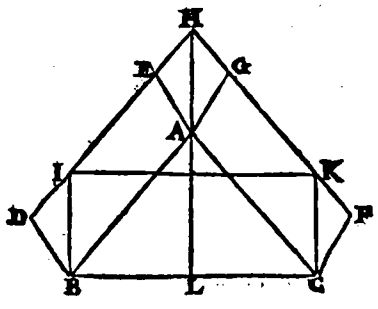
FACIAT deinde perpendicularis A D, ſegmentum B D, maius ſegmento C D. Dico latus A B, maius eſſe latere A C. Erit enim quadratum ex B D, quadrato ex C D, maius. Additoq; quadrato communi ex A D, duo quadrata ex B D, A D, duobus quadratis ex C D, A D, maiora erunt. Cùm ergo[c] tam quadratum ex A B, quadratis ex B D, A D, quàm quadratum ex A C, quadratis ex C D, A D, æquale ſit; erit quoque quadratum ex A B, quadrato ex A C, maius: propterea q; & latus A B, latere A C, maius erit. Quod eſt propoſitum.

AT QVE in hũc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagoræ colligi poſſunt: qua conſulò, ne Lectori moleſti ſimus, hic omittenda cenſuimus, & in alium locum differenda.

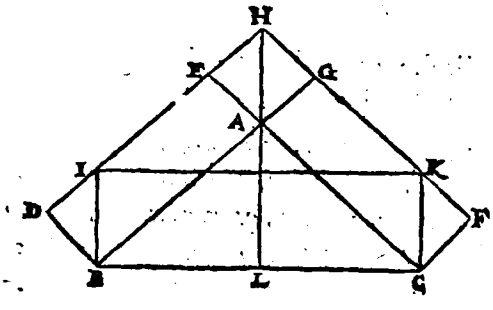
THEOREMATE porrò hoc Pythagoreo multò vniuerſalius eſt illud, quod à Pappo demonſtratur in omni triangulo ſiue illud rectangulum ſit, ſiue non, & de quibuſcunque parallelogrammis ſuper latera trianguli conſtructis tam rectangulis, quàm non rectangulis, etiamſi non ſint inter ſe æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clariùs hoc modo propoſuimus, & meo iudicio generaliùs adhuc, quàm Pappus.

In omni triangulo, parallelogramma quæcunque ſuper duobus lateribus deſcripta, æqualia ſunt parallelogrammo ſuper reliquo latere conſtituto, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehẽdunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius producantur.

d34.primi.
e30.primi.
f33.primi.
g35.primi.
h35.primi.



SIT triangulum quodcunque A B C, conſtituantur q; ſuper latera A B, A C, parallelogramma quæcunq; A B D E, A C F G, quorũ latera D E, F G, qua lateribus A B, A C, aſſumptis in triangulo oppo nuntur, producta ad partes anguli A, dictis lateribus A B, A C, comprehenſi, conueniãt in H, ducatur q; recta A H. Dico parallelogrammum A D, A F, æqualia eſſe parallelogrammo ſuper latus B C, deſcripto, cuius alterũ latus æquale ſit, & parallelum rectæ A H. Producta enim H A, ſecet B C in L, & per B, C, agantur B I, C K, parallelæ ipſi A H, iungatur q; recta I K. Quoniam igitur parallelogramma ſunt B I H A, C K H A;[d] erit vtrag; B I, C K, ipſi A H, æquali; atq; adeò[e] & inter ſe æquales erunt B I, C K;[e] quæ cùm ſint etiam parallelæ, & eidem A H, parallelæ ſint;[f] erunt quoq; B C, I K, parallelæ, & æquales. Quare parallelogrammum eſt B C K I, ſuper latus B C, habens alterum latus[g] B I, rectæ A H, æquale, & parallelum: Cui quidem æqualia oſtendenda ſunt parallelogramma A D, A F. Quia ergo æqualia ſunt parallelogramma A D, A B I H, quòd eandem habeant baſin A B, in eiſdémque ſint parallelis A B, H D;[h] Eſt autem A B I H, parallelogrammo I L, æquale, quòd illud cum hoc etiam eandem habeat baſim

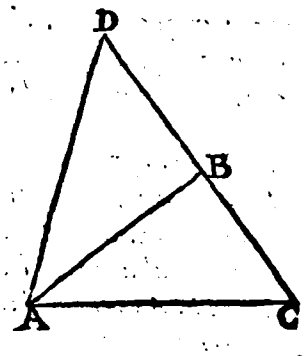


basin B I, in eisdemq; sit parallelis B I, L H: Erit quoq; A D, eidem I L, æquale. Non aliter ostendemus, A F, ipsi K L, esse æquale. Quare parallelogramma A D, A F, parallelogrammo B K, æqualia sunt. Quod est propositum.

PAPPVS construit figuram aliter. Nam sumit rectas A C, A E; & A D, A G, in directum positas, ita vt parallelogramma A D, A F, sint æquiangula, habentia angulos A E D, A G F, angulo B A C, internos externo æquales, ceu [a] *hæc eius figura indicat. Sed nos vniuersalius rem proposuimus, vt manifestum esset.* [a] 29. primi.

THEOR. 34. PROPOS. 48. 47.

SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.



DETVR triangulum A B C, sitque quadratum lateris A C, æquale quadratis reliquorum laterum B A, B C. Dico angulum A B C, esse rectum. Ducatur namque B D, perpendicularis ad B A, & æqualis rectæ B C, connectaturque recta A D. Quoniam igitur in triangulo A B D, angulus A B D, rectus est: [a] erit quadratum rectæ A D, æquale quadratis rectarum B A, B D: Est autē quadratum rectæ B D, quadrato rectæ B C, æquale, ob linearum æqualitatē. Quare quadratum rectæ A D, quadratis rectarum B A, B C, æquale erit. Cùm ergo quadratum rectæ A C, eisdem quadratis rectarum B A, B C, æquale ponatur; [b] erunt quadrata rectarū A D, A C, inter se æqualia, ac propterea & rectę ipsæ A D, A C, æquales. Quoniam igitur latera B A, B D, trianguli A B D, æqualia sunt lateribus B A, B C, trianguli A B C; & basis A D, ostensa est æqualis basi A C; [c] erunt anguli A B D, A B C, æquales: Est autem angulus A B D, ex constructione rectus. Igitur & angulus A B C, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 47. primi.
[b] 1. penuin.
[c] 8. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, vt perspicuum est.

Triangulorum comparationes.

NOVEM modis duo triangula inter se comparauit Euclides hoc libro. Primùm quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, continentque angulum angulo æqualem, [d] collegit æqualitatem basium, reliquorum angulorum, atque adeò totorum triangulorum. [d] 4. primi.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, basique basi æqualis, [e] intulit æqualitatem angulorum illis lateribus comprehensorum. Vbi nos concluſimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, totaque triangula probauimus esse æqualia. [e] 8. primi.

TERTIO, cùm duo latera duobus lateribus sunt æqualia, vtrumque vtrique, comprehendunt autem angulos inæquales, [f] ostendit basim maiori angulo oppositum esse maiorem basę minori angulo oppositæ. [f] 24. primi.

QVARTO, cùm duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, at bases inæquales, [g] demonstrauit angulum maiori basi oppositum esse maiorem angulo minori basi oppositō. [g] 25. primi.

QVINTO, quando duo anguli duobus angulis æquales sunt, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus angulis adiacet, siue quod vni æqualium angulorum opponitur, [h] probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius esse æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus, sequi etiam, tota triangula esse æqualia. [h] 26. primi.

SEXTO [i] demonstrauit, duo triangula super eandem basin, & inter easdem parallelas constituta, esse æqualia. [i] 37. primi.

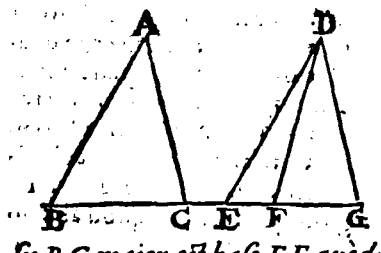
SEPTIMO [k] ostendit, duo triangula super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, æqualia esse. [k] 38. primi.

39. primi. OCTAVO [a] docuit, duo triangula æqualia ſuper eandem baſim, & verſus eandem partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas.

b 40. primi. NONO denique [b] probauit, duo triangula æqualia ſuper æquales baſes in eadem linea, in eandemque partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas.

ATQVE his modis argumentandi in duobus triangulis propoſitis vniuerſa ferè Geometria niti videtur, vt propterea diligenter memoriæ mandandi ſint. Quemadmodum autem à propoſ. 26. in ſcholio propoſ. 31. excluſimus duas comparationes, quando nimirum duo anguli duobus angulis æquales ſunt, & vnum latus vni lateri æquale, non quidem, quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum opponitur in vtroque triangulo; ſed quod in vno quidem angulis æqualibus adiacet, in altero verò vni æqualium angulorum opponitur: vel quod in vno opponitur vni æqualium angulorũ, in altero verò alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas haſce comparationes excluſimus, quòd ex ijs non ſequatur reliquorum laterum æqualitas, vt in ſcholio propoſ. 31. demonſtrauimus: Ita quoque à propoſ. 4. excludenda ſunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri poteſt baſium æqualitas.

PRIMVM enim quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterum opponitur, baſes æquales eſſe nequeunt; niſi quando angulus in vtroque triangulo alteri lateri æquali oppoſitus, vel eſt minor recto, vel non minor recto.



SIT enim Iſoſceles D F G, habens latera D F, D G, æqualia, & producta baſe G F, vſque ad E, iungatur recta E D, & triangulo D E G, æquale triangulum conſtruatur A B C, cuius latera A B, A C, lateribus D E, D G, æqualia ſint, & baſis B C, baſi E G. Sunt igitur duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D F, æqualia, vtrumque vtrique, anguli q; B, E, æqualibus lateribus A C, D F, oppoſiti æquales: & tamen baſis B C, maior eſt baſe E F; quòd B C, ipſi E G, æqualis ſit. Ratio eſt, quòd angulus C, acutus eſt,

a 5. primi. *at D F E, obtuſus. Nam cùm [a] anguli D F G, & G, æquales ſint, [b] & ſimul ſumpti minores duo-*

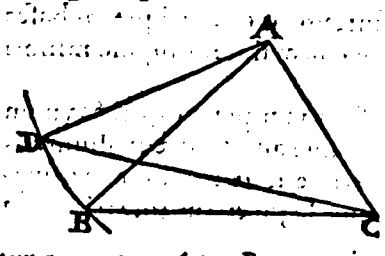
b 17. primi. *bus rectis; erit vterque minor recto, ac proinde D F E, recto maior: quandoquidem [c] duo an-*

c 13. primi. *guli ad F, æquales ſunt duobus rectis. Quòd ſi duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D G, ſint æqualia, angulusq; B, angulo E, & vterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor; tum demũ ſequitur, baſes B C, E G, æquales eſſe, &c. Nam ſi baſis B C, minor eſſet, quàm E G; ſi A B, ipſi D E, ſuperponeretur, congrueret quidem B C, ipſi E G, propter æqualitatẽ angulorum B, E, ſed punctum C, citra G, caderet, vt in F. Quia igitur latera D F, D G, æqualia ſunt,*

d 5. primi. *quòd D F, idem ſit, quod A C, ipſi D G, æquale, [d] erunt anguli D F G, & G, æquales, ac pro-*

e 17. primi. *pterea vterque minor recto; [e] quòd ambo minores ſint duobus rectis. Cùm igitur [f] duo an-*

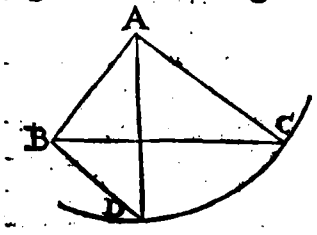
f 13. primi. *guli ad F, ſint duobus rectis æquales, erit D F E, hoc eſt, C, qui à D F E, nõ differt, recto maior. Non ergo vterque angulus C, & G, minor eſt, aut non minor recto, ſed G, quidem acutus, & C, obtuſus, quod eſt contra hypotheſin. Eodem modo, ſi baſis B C, dicatur eſſe maior baſe E F, (poſitis lateribus A B, A C, æqualibus ipſis D E, D F, & angulo B, æquali ipſi E, & vtroque angulo C, & F, vel minore recto, vel non minore.) cadet punctum C, vltra F, vt in G; eritq; rurſus angulus quidem C, hoc eſt, G, acutus, & D F E, obtuſus, quod eſt contra hypotheſin.*



g 18. primi. *DEINDE quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni æqualium laterum, & alter alteri opponatur, nihil etiam colligi poteſt. Nam ſit triangulum A B C, cuius latus A B, maius ſit latere A C. Erit [g] ergo angulus A C B, maior angulo A B C. Fiat angulus A C D, angulo A B C, æqualis; cadetq; C D, ſupra C B. Deſcribatur quoque ex A, per B, arcus circuli ſecans C D, in D, iungaturq; recta A D. Sunt igitur duo latera A B, A C, duobus lateribus A D, A C, æqualia, vtrumque vtrique, & angulus A B C, lateri A C, oppoſitus, æqualis angulo A C D, lateri A D, oppoſito: Et tamen baſes B C, D C, æquales non ſunt. Si enim æquales eſſent, eſſent tam duæ rectæ A B, A D, quàm duæ C B, C D, æquales,*

quales,[a] quod est absurdum. Vel etiam anguli B A C, D A C,[b] æquales essent, pars & totum. quod est absurdum. a 7. primi. b 8. primi.

POSTREMO, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehensus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni illorum laterum, nihil etiam potest inferri. Sit namq; triangulum A B C, cuius vtrumque latus A C, C B, maius sit latere A B; & B C, maius, quã A C. Erit[c] ergo angulus B A C, maior angulo A B C. Si igitur fiat angulus A B D, angulo B A C, æqualis, cadet B D, infra B C. Describatur quoq; arcus circuli ex A, per C, qui infra B C, cadet, secabitq; B D, in D. Iuncta igitur recta A D; erunt duo latera A B, A C, duobus lateribus A B, A D, æqualia, vtrumque vtrique, angulusq; B A C, illis lateribus A B, A C, comprehensus, æqualis angulo A B D, qui lateri A D, opponitur: Et tamen bases, B C, B D, æquales non sunt. Aliàs tam recta A C, A D, quàm B C, B D, æquales essent.[d] quod est absurdum. Vel etiam anguli B A C, B A D,[e] æquales essent, totum & pars. quod est absurdum. c 18. primi. d 7. primi. e 8. primi.



RECTE igitur Euclides propos. 4. præcepit angulum illis lateribus comprehensum in vno triangulo debere esse æqualem angulo alterius trianguli, qui illis quoq; lateribus comprehenditur: quandoquidem sine hac conditione nihil colligere licet, vt demonstrauimus.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

DEFINITIONES.

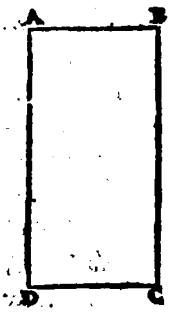
I.

OMNE parallelogrammũ rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

AGIT Euclides secundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo quanta sint, & quadrata partium cuiusuis lineæ rectæ diuisæ, & parallelogramma rectangula sub partibus eiusdem linea diuisæ comprehensa, tam inter se, quàm comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod vt commodè exequatur, explicat priùs duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt, rectè intelligenda maximè necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod vt intelligatur, explicandum primùm est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti. Cuius quidem duo tantùm sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, vt perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porrò parallelogrammo, si vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessariò recti. Sit enim in parallelogrammo A B C D, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoq; esse. Nam cùm parallelæ sint A D, B C,[f] erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur & B, rectus erit. Quoniam verò[g] quilibet suo opposito est æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti. f 29. primi. g 34. primi.

DICIT itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub



duabus rectis lineis, quæ vnum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur ſub duabus lineis rectis A B, A D, vel ſub A D, D C, vel ſub D C, C B, vel denique ſub A B, B C: quoniam qualibet huiuſmodi dua linea exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem, vt A B, vel D C, eius longitudinem, altera verò, vt A D, vel B C, eius latitudinem. Vnde expreſſis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, ſtatim tota eius quantitas concipitur, intelligiturq; longitudo nimirũ, atq; latitudo. Accedit etiam, quòd ex motu imaginario vnius linea in alteram huiuſmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta A B, deorſum ſecundùm rectam A D, moueri in tranſuerſum, ita vt ſemper angulum rectum cum A D, conſtituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, deſcriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, ſi A D, putatur moueri in tranſuerſum ſecundùm rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo ſub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.

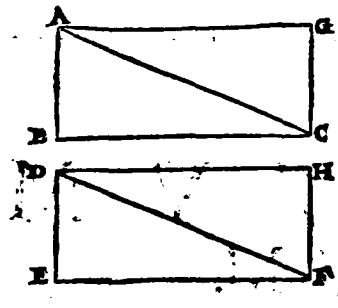
Itaque parallelogrammum rectangulum, quod ſub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud,

E ——————— *cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia ſunt duabus illis rectis lineis,*

F ——— *vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum ſub rectis E, & F, contentum, erit idem, quod parallelogrammũ A B C D: quoniam latus A B, æquale eſt rectæ E, & latus A D, rectæ F.*

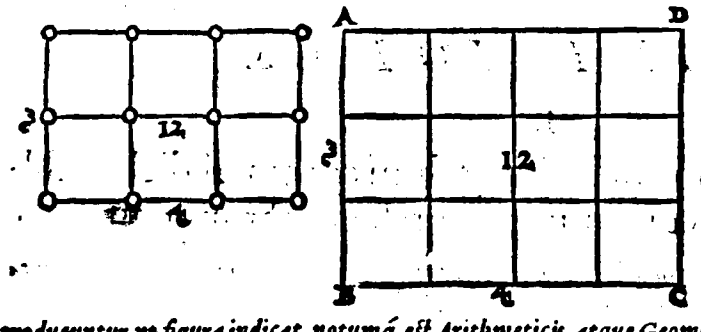
Perſpicuum autem eſt ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum ſub duabus lineis
a 34. primi. *æqualibus eſſe quadratum. Cùm enim qualibet illarum linearum æqualium* [a] *æqualis ſit linea oppoſita, erũt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.*

Item manifeſtum eſt, ſi duæ rectæ lineæ aliis duabus rectis lineis æquales fuerint, vtraq; vtrique, rectangulum parallelogrammum ſub prioribus duabus comprehenſum, æquale eſſe ei, quod ſub duabus poſterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia ſunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamẽ facilè hac etiam ratione demonſtrari poteſt. Sint rectæ A B, B C, æquales rectis D E, E F, vtraque vtriq;. Dico parallelogrammũ rectangulum A B C G, contentum ſub A B, B G, æquale eſſe parallelogrammo rectangulo D E F H, contento ſub D E, E F.

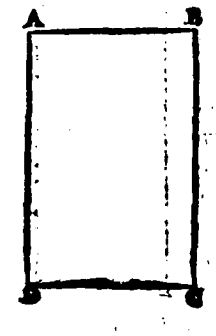


Ductis etenim diametris A C, D F, cùm latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia ſint lateribus D E, E F, trianguli D E F, & anguli B, & E, æqua-
b 4. primi. *les, nempe recti;* [b] *erunt triangula A B C, D E F, æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula A G C, D H F. Quare tota parallelogramma A B C G, D E F H, æqualia erunt.*

Habet autem comprehenſio hæc parallelogrammi rectanguli ſub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnam affinitatem cum multiplicatione vnius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formam parallelogrammi conſtituitur, vnde & contineri dicitur ſub 3. & 4. Ita quoque parallelogrammum A B C D, comprehenſum ſub duab. rectis A B, B C, quarum illa ſit 3. palmorum, hæc autem 4. conſtat 12. palmis quadratis, qui quidem ex ductu linea A B, 3. palmorum in lineã B C, 4. palmorum



producuntur, vt figura indicat, notumq; eſt Arithmeticis, atque Geometris, demonſtraturq; à Ioanne Regiomontano libro 1. de Triangulis, propoſ. 16. Hinc fit, vt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proximè antecedens parallelogrammum ex ductu linea A B, in lineam B C, vel (quod idem eſt) ex ductu linea B C, in lineam A B. Idem enim parallelogrammum procreatur, ſiue minor linea in maiorem, ſiue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem producitur numerus, ſiue minor numerus in maiorem ſiue maior in minorem ducatur, vt ab Euclide demonſtratur lib. 7. propoſ. 16. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quàm ex 4. in 3. producitur hic numerus 12.

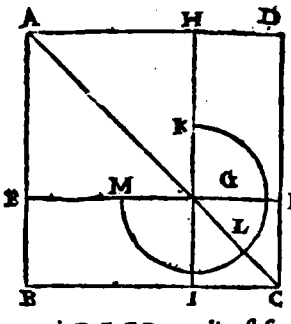


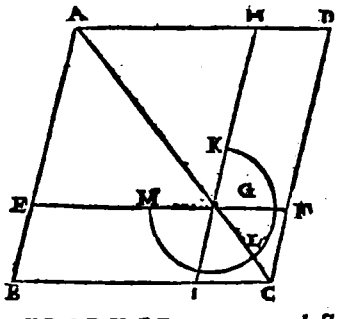
Obiter quoq; monendus mihi Lector videtur, Euclidem in hoc ſecundo libro, & in aliis, qui ſequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare ſimpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obſeruant, ita vt nomine rectanguli perpetuò intelligendum ſit parallelogrammum rectangulum. Rurſus, ne toties eadem litera repetantur, ſolent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quàm non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Vt appoſitum parallelogrammum appellant A C, vel B D.

II.

IN omni parallelogrammo ſpatio, vnum quodlibet eorũ, quæ circa diametrum illius ſunt, parallelogrammorum cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN Parallelogrammo A B C D, ſiue rectangulum illud ſit, ſiue non, ducatur diameter A C, ex cuius puncto quolibet G, ducantur recta E F, H I, parallela lateribus parallelogrãmi, ita vt parallelogrammũ diuiſum ſit in quatuor parallelogramma, quorum duo E H, I F, dicuntur eſſe circa diametrũ, alia verò duo B G, G D, complementa, vt manifeſtum eſt ex vltima definitione primi libri. Itaque figura compoſita ex parallelogrãmo vtrolibet circa diametrum, vt ex I F, vnà cũ duobus complementis B G, G D, qualis eſt figura E B C D H G E, quam complectitur circunferentia K L M, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura F D A B I G F, compoſita ex parallelogrammo E H, circa diametrum, & duobus complementis B G, G D, Gnomon appellabitur.



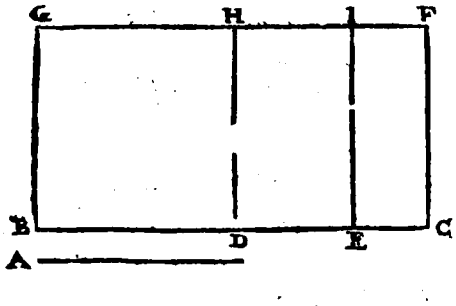


SED iam ad propoſitiones ſecundi huius libri veniamus, in quibus ſanè operæ pretium fuerit, multum laboris in eis exquiſitè intelligendis ponere, propter multiplicem earum vſum, cùm in rebus Geometricis, tum in humanis commerciis. Nam ex nonnullis harum propoſitionum demonſtrantur regulæ illæ admirabiles Algebræ, quibus vix credo in diſciplinis humanis præſtatius aliquid reperiri, quippe cùm miracula quædam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abſtruſa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum ſuperare videatur, tanta nihilominus facilitate, atque voluptate, vt facilius videatur eſſe nihil. Ex aliis deinde propoſitionibus huius libri eliciuntur demonſtrationes, quibus inter ſe adduntur, ſubtrahũtur, multiplicantur, atque diuiduntur numeri ſurdi, (quos dicunt) hoc eſt, qui nullo modo exprimi poſſunt; cuiuſmodi ſunt radices numerorum non quadratorũ, aut non cubicorum, quæ neq; per Diuinã potentiam in numeris poſſunt exhiberi, quòd hac res contradictionem implicet, vt Philoſophi, atq; Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis enim credat, per demonſtrationem ſciri poſſe, quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratam numeri 18. adiecta, cùm vtraque radix incognita ſit, & nulla ratione exprimi queat, ipſa illa paulò minor ſit, quàm 3. hac verò paulò maior, quàm 4? Et tamen ſumma, quæ ex vtraque fit, colligitur ex vi propoſitionis 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulò maior eſt, quàm 7. Præterea ex propoſitione 12. & 13. eiuſdem huius lib. area, & quantitas cuiuſuis trianguli exquiſitiſſimè cognoſcitur, ex qua cognitione rurſus dimenſio omnium magnitudinum fluit, atq; dimanat. Poſtremò vltima propoſitio huius libri omnem figuram rectilineam irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt verè aureus dici mereatur hic liber, cùm mole quidem ſit perexiguus, vtilitates verò cõtineat propè infinitas.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint duæ rectę lineæ, ſeceturque ipſarum altera in quotcunque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & B C, quarum B C, ſecetur quomodocunque in quotlibet ſegmenta B D, D E, E C. Dico rectangulum ſub A, & B C, comprehenſum æquale eſſe omnibus rectangulis ſimul ſumptis, quæ ſub linea indiuiſa A, & quolibet ſegmento comprehenduntur, nempe rectangulo ſub A, & B D; Item ſub A, & D E; Item ſub A, & E C, comprehenſo.



RECTANGVLVM enim B F, comprehendatur ſub A, & B C, hoc eſt, recta G B, æqualis ſit rectæ A. Quod quidem fiet, ſi erigantur ad B C, duæ perpendiculares B G, C F, æquales rectæ A, ducaturque recta F G. Nam rectæ B G, C F, [a] parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & [b] æquales inter ſe ſunt, quòd vtraque rectæ A, æqualis ponatur. Igitur [c] erunt quoque G F, B C, parallelæ & æquales inter ſe: ac proinde rectangulum erit B F, contẽtum ſub A, ſiue G B, & B C, ex defin. 1. huius libri. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ D H, E I, parallelæ ipſi B G, vel C F. Itaque D H, E I, cùm parallelæ ſint ipſi B G, [d] inter ſe quoque parallelæ erunt. Rurſus eædem, cùm ex conſtructione parallelogramma ſint B H, B I, [e] æquales erunt rectæ B G, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta B G, æqualis eſt rectæ A, erit rectangulum B H, comprehenſum ſub inſecta linea A, &

a 28. primi.
b 1. pron.
c 33. primi.
d 30. primi.
e 34. primi.

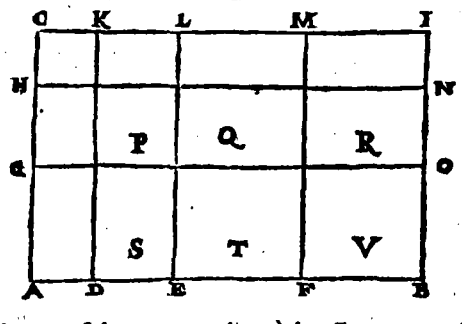
ſegmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DI, comprehenſum ſub A, & ſegmento DE. Item rectangulum EF, ſub A, & ſegmento EC. Quare cùm rectangula BH, DI, EF, æqualia ſint toti rectangulo BF; perſpicuũ eſt, rectangulum comprehenſum ſub A, & BC, æquale eſſe rectangulis omnibus, quæ ſub A, & ſegmentis BD, DE, EC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturq; ipſarum altera, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

QVONIAM lib. 9. propoſ. 14. decem priora theoremata ſecundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonſtrabimus, ſi diuidantur, vt linea; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis hic demonſtrantur, præſertim cùm multiplicatio numeri vnius in alterum reſpondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt ſuprà diximus. Itaque propoſitis duobus numeris quibuſcunque vt 6. & 10. diuidatur poſterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem eſſe tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur: id quod perſpicuũ eſt.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremata, quæ iam ſequuntur.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturque ambæ in quotcunque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis vnius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur rectangulis.

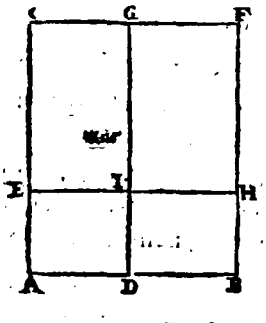


SINT duæ rectæ AB, AC. rectum angulum A, continentes, quæ ſecentur in partes AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. Dico rectangulum ſub rectis AB, AC, comprehenſum æquale eſſe rectangulis, quæ ſub AD, AG; AD, GH; AD, HC: DE, AG; DE, GH; DE, HC: EF, AG; EF, GH; EF, HC: FB, AG; FB, GH; FB, HC, continentur. Compleatur rectangulum AI, ducantúrque DK, EL, FM, parallelæ ipſi AC, vel BI: Item HN, GO, parallelæ ipſi AB, vel CI; quæ ſecent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum AS, continetur ſub AD, AG; & GP, ſub AD, GH;

[a] 34. primi. *& HK, ſub AD, HC; ([a] quòd recta GS, HP, ipſi AD, ſint æquales:) Item rectangula DT, SQ, PL, con-*

[b] 34. primi. *tinentur ſub DE, AG; DE, GH; DE, HC; ([b] quòd DS, SP, PK, ipſis AG, GH, HC, æquales ſint, & ST, PQ, ipſi DE.) Et eadem ratione rectangula EV, TR, QM, continentur ſub EF, AG; EF, GH; EF, HC: Nec non rectangula FO, VN, RI, ſub FB, AG; FB, GH; FB, HC; perſpicuum eſt, rectangulum ſub AB, AC, æquale eſſe rectangulis ſub ſingulis partibus AD, DE, EF, FB, & quolibet ſegmentorum AG, GH, HC, comprehenſis. Quod eſt propoſitum.*

Si ſint duæ rectæ lineæ, ſecenturque ambæ vtcunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, vnà cum rectangulo ſub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuò continentur, rectangulis, vnà cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo.



SINT duæ rectæ AB, AC, angulum continentes rectum A, quæ ſecentur vtcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehenſum ſub AB, AC; vnà cum rectangulo comprehenſo ſub partibus AD, EC, æquale eſſe rectangulis contentis ſub AB, EC; AC, AD; vnà cũ rectangulo ſub DB, AE, comprehenſo. Compleatur enim rectangulum AF, agaturq; per D, recta DG, ipſi AC, vel BF, parallela; nec nõ per E, recta EH, ſecans DG, in I. parallela ipſi AB, vel CF. Quoniam igitur rectangulũ AF, æquale eſt rectangulis EF, DH, AI: ſi addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG, nempe ſub totis AB, AC, & partibus AD, EC, cõprehenſa, æqualia rectangulis EF, AG, DH, ſub AB, EC; AC, AD; DB, AE, comprehenſis æqualia. Quod eſt propoſitum.

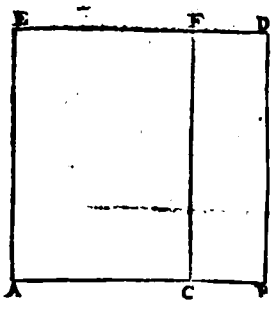
IN numeris etiam hæc eadem perſpicua ſunt. Propoſitis enim duobus hiſce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2. 3. 5. poſterior verò in duas, 3. 5. diuidatur; perſpicuum eſt, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem eſſe ſex numeris 6. 10. 9. 15. 15. 25. qui producũtur ex ſingulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq; ſimul additi 80. vt volebat theorema 1. Federici.

RVRSVS, ſi iidem numeri ſecentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. poſterior autem in 2. 6. manifeſtum quoq; eſt 80. numerum productum ex 10. in 8. vnà cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem eſſe tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cùm vtrobique efficiantur 98. vt theorema 2. Federici optabat.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

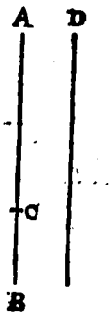
Si recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato.

RECTA



RECTA linea AB, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehensa sub tota AB, & segmentis AC, CB, simul sumpta, æqualia esse quadrato totius lineæ AB. Describatur enim AD, quadratum lineæ AB, & ex C, ducatur CF, parallela rectę AE, vel BD, quæ [a] æqualis erit rectæ AE, hoc est, rectæ AB, cui æqualis est recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis est rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Similiter erit rectangulum CD, comprehẽsum sub tota AB, & segmẽto CB. Quare cùm rectangula AF, CD, æqualia sint quadrato AD, perspicuum est, rectangula comprehensa sub AB, & segmentis AC, CB, æqualia esse quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

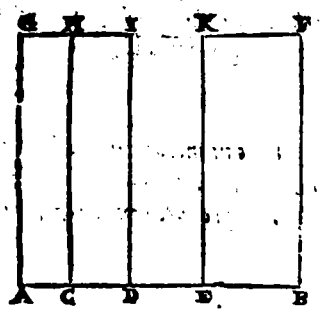
[a] 34. primi.



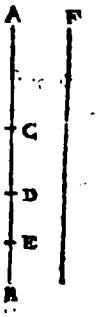
ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ AB. Quoniam igitur AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub insecta D, & recta AB, hoc est, quadratum rectæ AB, [b] æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, insecta, hoc est, sub AB, & singulis segmentis AC, CB. quod est propositum.

[b] 1. secundi.

SCHOLIVM.

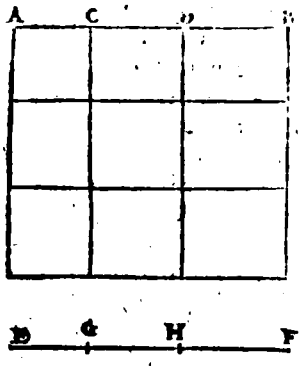


QVANQVAM Euclides secũdum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodò partes vtcunq;, idem tamen eisdem medijs demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunque partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris verò idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales esse 100. quadrato ipsius numeri 10. vt manifestũ est. Simili modo, si numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erũt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.



SIMILI modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

Si linea recta secetur in quotcunque segmenta: Quadratum, quod à tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur rectangulis.



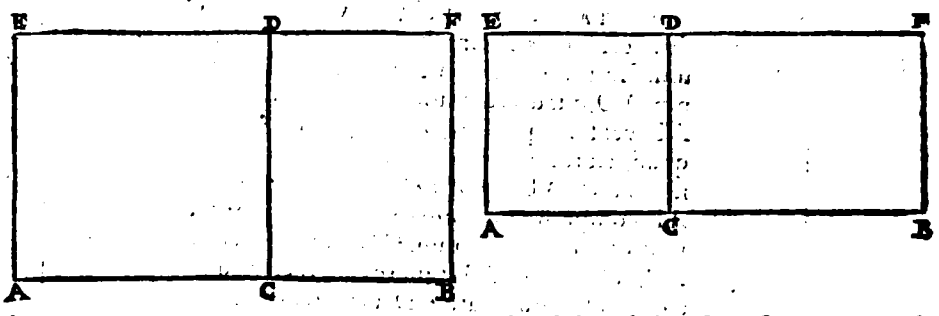
SIT recta AB, diuisa in partes quotcunque AC, CD, DB. Dico quadratum ex AB, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus AC, CD, DB, & quolibet segmentorum AC, CD, DB, comprehenduntur: hoc est, rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB, comprehensis. Sumpta enim recta EF, quæ æqualis sit ipsi AB, diuisaque in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, æquales; Erit ex ijs, quæ ad propositionem primam huius libri, demonstrauimus. rectangulum sub AB, EF, hoc est, quadratum ipsius AB, æquale rectangulis sub AC, EG; AC, GH; AC, HF: CD, EG; CD, GH; CD, HF: DB, EG; DB, GH; DB, HF. Cùm igitur partes AC, CD, DB, partibus EG, GH, HF, sint æquales: erit quoque quadratum ex AB, æquale rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB. Quod est propositum.

IN numeris idem est manifestum. Sit enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis his nouẽ numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perspicuum est.

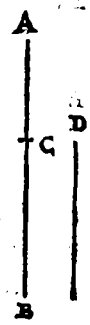
THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.

LINEA recta AB, diuisa sit vtcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & vtrouis segmento, vt AC, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti AC. Constituatur enim quadratum dicti segmenti AC, quod sit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipsi



AE, donec coeat cum ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta rectæ AC, æqualis est, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Rursus, quia recta CD, eadem ratione æqualis est rectæ AC; erit rectangulum CF, comprehensum sub segmentis AC, & CB. Cùm igitur rectangulum AF, æquale sit quadrato AD, & rectangulo CF; liquidò constat, rectangulum sub AB, tota, & segmẽto AC, comprehensum, esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis AC, CB, & quadrato prædicti segmenti AC. Itaque si recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod erat ostendendum.



ALITER. Accipiatur recta D, æqualis segmento AC. Quoniam igitur recta AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub D, & AB, hoc est, sub AB, & AC, [a] æquale rectangulo sub D, & CB, hoc est, sub AC, CB, & rectangulo sub D, & AC, hoc est, quadrato segmenti AC. Quod est propositum.

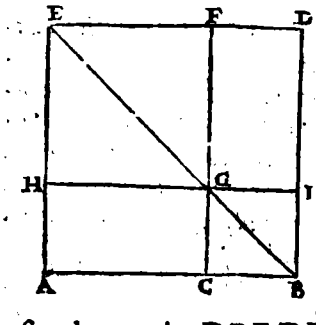
a 1. secundi.

SCHOLIVM.

VT hoc theorema numeris accommodetur, sit numerus 10. diuisus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem esse numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, vnà cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipsa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secta sit vtcunque: Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

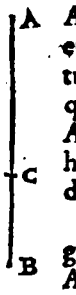


RECTA linea AB, diuisa sit vtcunque in C. Dico quadratum totius rectæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis AC, CB. Describatur enim supra AB, quadratum AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectæ BD, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectæ AB; eritque quadratum AD, diuisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia sunt; [b] erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui [c] tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis sunt æquales, & BAE, rectus est. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadem ratione ostendes angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quod etiã constat ex iis, q̃ ad 34. prop. lib. 1. demonstrauimus. Ná, vt ibi ostensum est, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, bifariã. Quia ergo anguli quoq; tres trianguli EFG, [d] æquales sunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus est, [e] cũ sit æqualis recto D, externus interno, neenõ FEG, ostensus semirectus; erit & reliquus EGF, semirectus; ideoq; æqualis angulo FEG. Quare [f] æqualia erunt latera EF, FG: quæ cùm sint [g] æqualia oppositis lateribus GH, HE, erit parallelogrammum FH, quadratũ, cùm omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quòd existente vno angulo recto, nempe FEH, vel F, in parallelogrammo FH, omnes quatuor recti sunt, vt ad definit. 1. huius libri monstrauimus.

b 5. primi.
c 32. primi.
d 32. primi.
e 29. primi.
f 6. primi.
g 34. primi.

Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata sunt segmentorum AC, CB, & latus HG, [h] æquale sit rectæ AC. Rectangula quoque AG, DG, comprehensa erunt sub segmentis AC, CB, propterea quòd CG, GI, æquales sunt rectę CB, ob quadratum CI; & FG, æqualis rectæ GH, ob quadratum FH, hoc est, [i] rectæ AC. Quocirca cùm quadratum AD, æquale sit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; constat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale esse quadratis segmentorũ AC, CB, & rectangulo comprehenso sub eisdẽ segmentis AC, CB, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcunque, quadratum, quod à tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

h 34. primi.
i 34. primi.



ALITER. Quoniam recta AB, diuisa est in C, [k] erit quadratũ totius AB, æquale rectangulis, quæ sub tota AB, & segmentis AC, CB, comprehenduntur: Rectangulum autẽ sub AB, AC, comprehensum, [l] æquale est rectangulo comprehenso sub AC, CB, & quadrato

k 2. secundi.
l 3. secundi.

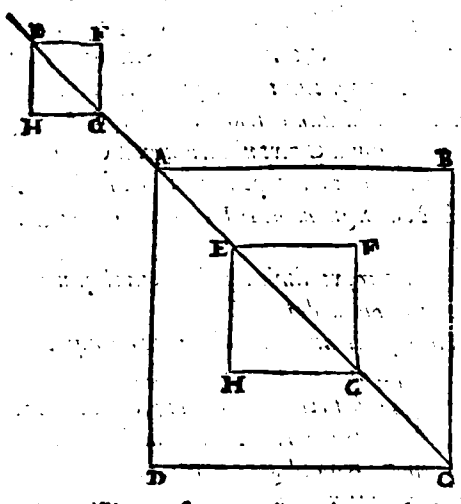
segmenti

ſegmenti A C: Item rectangulum ſub A B, C B, comprehẽſum, æquale eſt rectangulo ſub C B, A C, comprehenſo, & quadrato ſegmenti C B. Igitur quadratum rectæ A B, æquale etiam eſt quadratis ſegmentorum A C, C B, & rectangulis ſub A C, C B, & ſub C B, A C. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM I.

HINC manifeſtum eſt, parallelogramma circa diametrum quadrati eſſe quadrata.

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demonſtratione, in qua oſtenſum eſt, rectangula C I, F H, quæ ſunt circa diametrum B E, eſſe quadrata. In omnibus enim aliis quadratis eadem erit demonſtratio. Eſt tamen corollarium iſtud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrũ quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiuſmodi ſunt dicta parallelogramma C I, F H. Illud enim angulum habet A B D, communem cum quadrato, hoc verò angulum A E D. Idem nihilominus verum eſt de quibuſcunque parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodò eorum latera parallela ſint quadrati lateribus. Circa enim diametrũ A C, quadrati B D, conſiſtat parallelogrammum F H, ſiue intra quadratum, ſiue extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati B D, parallela. Dico F H, eſſe quadratum.



Cùm enim parallelæ ſint A B, E F, [a] erunt anguli B A C, F E G, æquales, internus, & externus: atque eadem ratione anguli B C A, F G E, æquales erunt: Sunt autem anguli B A C, B C A, ſemirecti, vt oſtenſum iam fuit. Igitur & anguli F E G, F G E, ſemirecti erunt: [b] propterea q3 latera E F, F G, illis oppoſita, æqualia, [c] & angulus F, rectus. Quare cùm E F, F G, latera [d] æqualia ſint oppoſitis lateribus G H, H E, æquilaterum erit parallelogrammum F H: Sed & rectangulum eſt, ex ijs, quæ ad definitionem 1. huius libri oſtendimus, propterea quòd angulus vnus F, rectus eſt demonſtratus. Igitur F H, quadratum erit. Quod eſt propoſitum.

a 29. primi.
b 6. primi.
c 32. primi.
d 34. primi.

COROLLARIVM. II.

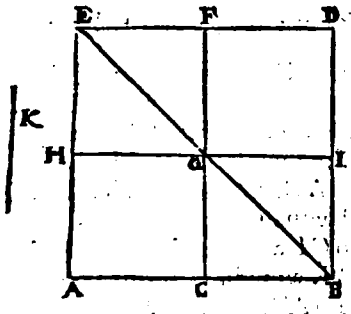
SEQVITVR etiam ex demonſtratione huius propoſ. 4. diametrum cuiuſuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos A E B, D E B, eſſe ſemirectos, &c. Id quod etiam ad propoſ. 34. lib. 1. demonſtrauimus.

SCHOLIVM.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. diuiſus vtcunque in 7. & 3. Videtur igitur 100. quadratum totius numeri æquale eſſe 49. & 9. quadratis partium 7. & 3. vnà cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis ſumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PERFACILE autem erit ex hoc theoremate 4. demonſtrare hoc aliud theorema.

SI linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa deſcriptum, quadruplum eſt quadrati ex hac deſcripti. Et ſi quadratũ quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum eſt lateris huius.



SIT enim primùm linea A B, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ A B, quadruplum eſſe quadrati rectæ K. Nam diuiſa A B, bifariam in C, ſi fiat conſtructio, vt in 4. hoc theoremate, erũt 4 parallelogramma A G, C I, I F, F H, quadrata, atq3 inter ſe æqualia, cùm omnia eorum latera ſint æqualia, omnesq3 anguli recti, vt facilè demonſtrari poteſt ex propoſitione 34. libri 1. Quare cùm quadratum A D, æquale ſit quatuor quadratis A G, C I, I F, F H, erit quadratũ lineæ A B, quadruplum quadrati lineæ A C, hoc eſt, lineæ K, quæ æqualis eſt ipſi A C, Eſt enim vtraque dimidium lineæ A B.

BREVIVS. [e] Quadratum rectæ A B, æquale eſt quadratis rectarum A C, C B, & rectangulo ſub rectis lineis A C, C B, bis comprehenſo. Cùm igitur quadrata rectarum æqualium A C, C B, æqualia ſint; & rectangulum ſub æqualibus A C, C B, quadratum quoq3 ſit, atq3 æquale quadrato rectæ A C; Conſtat quadratum rectæ A B, quadruplum eſſe quadrati rectæ A C; cùm æquale ſit quatuor quadratis, quorum vnumquodque quadrato rectæ A C, æquale eſt.

e 4. ſecũdi.

SIT deinde quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus A B, duplum eſſe lateris K. Nam diuiſa rectæ A B, bifariam in C, vt A B, dupla ſit ipſius A C; erit, vt iam demonſtratum eſt, quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ A C: Ponitur autem & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur æqualia

ſunt quadrata rectarum K, & A C, & ipſa propterea recta K, & A C, æquales: Eſt autem A B, ex conſtructione, ipſius A C, dupla. Dupla igitur etiam erit ipſius K. Hæc tamen omnia aliter demonſtrabimus ad propoſitionem 20. libri 6.

CAETERVM ex hac propoſ. 4. colligi poteſt modus inueniendi numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoq; numerum conſtituat. Si namq; ex dato numero auferatur 1. erit quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in ſe multiplicato productus, is qui quæritur. Vt ſi datus ſit numerus 15. inueniendus q; numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum: detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidium 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in ſe multiplicato productus erit is cum quo datus numerus 15. conſtituit 64. quadratum numerum, cuius latus eſt 8. nempe numerus vna vnitate maior, quàm 7. latus quadrati inuenti. Ratio huius rei hæc eſt. Quoniam quadratum A D, recta A B, [a] *æquale eſt duobus quadratis F H, C I, partium A C, C B, vnà cum rectangulo bis comprehenſo ſub A C, C B: ſi gnomonem H B F, qui cum quadrato F H, conſtituit totum quadratum A D, ponamus 15. quantus nimirum eſt datus numerus: quadratum autem C I. ſtatuamus 1. atq; adeò latus quoque eius C B, 1. erit vtrumuis rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde ſegmentum A C, 7. vt nimirum ex A C, in C B, quæ eſt 1. fiant 7. Quadratum ergo F H, erit 49. Totum autem latus A B, erit 8. nempe vna vnitate maius, q; A C, latus quadrati F H. Hæc ergo eſt cauſa, cur ex dato numero, hoc eſt, ex gnomone H B F, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidium ſtatuamus latus quadrati F H, quæſiti.*

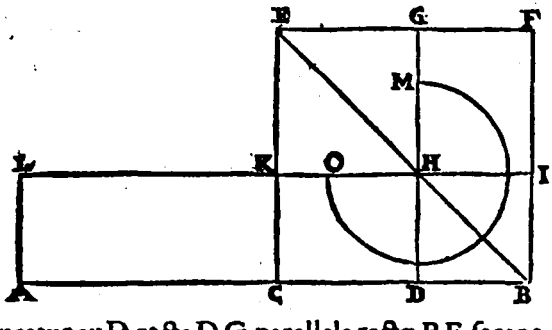
a 4. ſecundi.

VT autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet eſſe impar, vt nimirum ablata 1. reliquus numerus diuidi poſſit bifariam. Regula nihilominus vera eſt, quicunq; numerus datus ſit.

VICISSIM reperiemus numerum quadratum, à quo datus quiuis numerus ſubtractus relinquat numerum quoq; quadratum. Nam ſi ex numero dato dematur 1. & reliqui numeri dimidio adiiciatur 1. conficietur latus quadrati quæſiti. Vt ſi rurſum datus ſit numerus 15. Detracta 1. erit reliqui numeri 14. dimidium 7. cui addita 1. fiet latus quadrati quæſiti 8. Si enim ex eius quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cuius latus eſt 7. quod perpetuò eſt vna vnitate minus, quàm latus quadrati inuenti. Ratio etiam huius regulæ facilis eſt, ex eadem figura huius propoſ. 4. Nam ſi gnomonem H B F, qui ex quadrato A D, ſubtractus reliquum facit quadratum F H, ponamus 15. quantus nimirum eſt numerus datus: Quadratum verò C I, ſtatuamus 1. atque adeò & latus eius C B, 1. erit vtrumlibet rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde & ſegmtum A C, 7. vt ſuprà dictum eſt, & tota linea A B, 8. &c.

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vnà cum quadrato, quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei, quod à dimidia deſcribitur, quadrato.



DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt ſectionum intermedia ſit recta C D, qua nimirum dimidia C B, minus ſegmentum D B, ſuperat, vel qua maius ſegmentũ A D, dimidium A C, excedit. Dico rectangulum ſub ſegmentis inæqualibus A D, D B, comprehẽſum, vnà cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas eſt ſectiones, æquale eſſe quadrato dimidiæ C B. Deſcribatur enim C F, quadratũ ſuper dimidia C B, & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, ſecans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K: Item ex A, rectæ C E, parallela A L, ſecans I K, productam in L. Erunt igitur per coroll. 1. præcedentis propoſ. D I, K G, quadrata, ideoq; D H, recta rectæ D B, æqualis: [a] Eſt autem & K H, ipſi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur ſub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaq; eſt, rectangulum A H, vnà cum quadrato K G, æquale eſſe quadrato C F. Quoniam ergo [b] complementa C H, F H, æqualia ſunt; ſi addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammũ D F, parallelogrammo C I, æquale: [c] Eſt autẽ & A K, eidem C I, æquale, quòd & baſes A C, C B, æquales ſint. Igitur D F, A K, æqualia etiam inter ſe erũt: quibus ſi commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cùm gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia ſint quadrato C F; erit & rectangulum A H, vnà cum quadrato K G, æquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea ſecetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod oſtendendum erat.

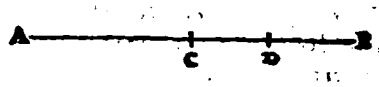
a 34. primi.

b 43. primi.

c 36. primi.

SCHOLIVM.

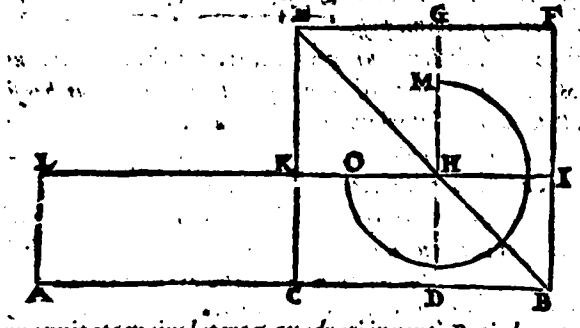
ALITER hoc theorema cum Franciſco Maurolyco demonſtrabimus, eo modo, quo idem in numeris demonſtratur à Barlaam Monacho. quod etiam cum eodem Maurolyco in ſequentibus propoſitionibus vſque ad 11. excluſiuè faciemus. Demonſtrationes autem has numeris accommodatas reperies ad propoſit. 14. lib. 9.



Ita ergo propositum exequemur. quia quadratum ex C B, [a] aequale est quadratis ex C D, D B, vnà cum rectangulo bis sub D B, C D; Rectangulo autem sub D B, C D, vnà cum quadrato ex D B, aequale est rectangulum sub D B, C B. Erit quadratum ex C B, [b] aequale reliquo quadrato ex C D, vnà cum reliquo rectangulo sub D E, C D, & rectangulo sub D B, C B, vel sub D B, A C. Atqui rectangulis sub D B, A C, & sub D B, C D, [c] aequale est rectangulum sub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C B, aequale erit quadrato ex C D, vnà cum rectangulo sub D B, A D; hoc est, rectangulum sub A D, D E, vnà cum quadrato ex C D, aequale erit quadrato ex C B. Quod erat demonstrandum.

a 4. secúdi.
b 3. secúdi.
c 1. secúdi.

IDEM in numeris est manifestum. Diuidatur enim numerus 10. aequaliter in 5. & 5. Item inaequaliter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5, superat minorem partem 3. & c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vnà cum 4. quadrato intermedij numeri 2. aequalem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.



EX hac etiam propos. 5. inueniemus alio modo numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoq; conficiat numerum. Nam si dato numero adiciatur 1. & à compositi numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quaesiti. Vt si datus numerus sit 15. Addita 1. fit 16. à cuius dimidio 8. si dematur 1. manet 7. latus quadrati 49. cũ quo datus numerus 15. componit numerũ quadratum 64. cuius latus est 8. quod perpetuò est vna vnitate maius latere 7. quadrati inuenti. Ratio huius regulae ex demonstratione propos. 5. difficilis non est. Cùm enim rectangulum A H, cum quadrato K G, [d] aequale sit quadrato C F: si rectangulum A H, ponatur 15. sicut numerus datus; at verò quadratum D I, statuatur 1. ac proinde latus D B, quoque 1. erit recta A D, 15. vt nimirum ex A D, in D E, gignatur 15. rectangulum videlicet A H. Addita ergo 1. erit tota linea A B. 16. à cuius dimidio 8. dempta 1. relinquetur C D, 7. latus nimirum quadrati K G.

d 5. secúdi.

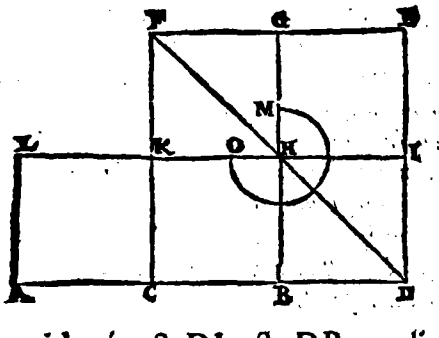
HIC quoque si fracti numeri vitandi sint, debet numerus datus esse impar, vt videlicet, addita 1. diuidi possit bifariam.

E contrario reperiemus numerum quadratum, à quo si datus quiuis numerus subtrahatur, reliquus fiat numerus quoque quadratus. Nam si ad datum numerum adiiciatur 1. erit dimidium compositi numeri latus quadrati quaesiti. Vt si rursum numerus 15. datus sit. Addita 1. erit compositi numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quaesiti. Si enim demas datum numerum 15. reliquus fiet quadratus numerus 49. cuius latus 7. perpetuo minus est vna vnitate, quàm latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perspicua quoque est ex eadem figura huius propos. 5. Nam si rectangulum A H, quod ex quadrato C F, ablatũ relinquit quadratum K G, statuatur 15. sicut datus numerus; & quadratum D I, ponatur 1. atque adeò & D B, eius latus 1. erit tota A B, 16. & eius dimidium C B, 8. & c.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

6.

SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quaedam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta vnà cum quadrato à dimidia, aequale est quadrato à linea, quae tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna descripto.



SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico rectangulum comprehensum sub tota composita A D, & D B, adiecta, vnà cum quadrato dimidiae C B, aequale esse quadrato lineae C D, quae ex dimidia C B, & adiecta B D, componitur. Describatur namque C E, quadratum super C D, & ducta diametro D F, ducatur ex B, recta B G, parallela rectae D E, secans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectae C D: Item ex A, ducatur rectae C F, parallela A L, secans I K, productam in L. Erũt igitur per corollar. 1. propos. 4. huius lib. B I, K G, quadrata, ideoq; recta D I, rectae D B, aequalis: [a] Est autem & K H, rectae C B, aequalis. Quare rectangulum A I, comprehendetur sub rectis A D, D B; & K G, erit quadratum rectae C B. Probandum itaque est, rectangulum A I, vnà cum quadrato K G, aequale esse quadrato C E. Quoniam ergo parallelogrammum A K, [b] aequale est parallelográmo C H, quòd bases A C, C B, aequales sint: [c] Est autem & parallelogrammum H E, eidem C H, aequale, complementũ complemento: erunt A K, H E, aequalia inter se. Addito ergo communi C I, erit rectangulum A I, gnomoni M N O, aequale. Quo-

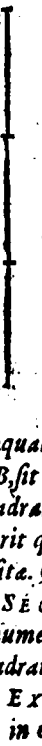
a 34. primi.
b 36. primi.
c 43. primi.

circa cùm gnomon M N O, & quadratum K G, quadrato C E, ſint æqualia; erit & rectangulum A I, vnà cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E, æquale. Itaque ſi recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectùm adiiciatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

a 4. ſecũdi. ALITER. Quia quadratũ ex C D,[a] æquale eſt quadratis ex C B, B D, vnà cũ rectangulo bis ſub D B, C B, hoc eſt, quadratis ex C B, B D, vnà cũ rectangulis ſub B D, C B, & ſub D B, A C: (ſumpta A C, ſemel pro C B, quæ illi æqualis ponitur.) Eſt autem rectangulis ſub D B, A C; D B, C B; & ſub

b 1. ſecũdi. D B, D B, (quod eſt quadratum ex D B,)[b] æquale rectangulum ſub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C D, æquale eſt reliquo quadrato ex C B, vnà cum rectangulo ſub D B, A D: Hoc eſt, rectangulum ſub A D, D B, vnà cum quadrato ex C B, æquale eſt quadrato ex C D. Quod demonſtrandum erat.



CAETERVM ſi rem attentiùs conſiderare velimus, comperiemus propoſitionem hanc 6. per præcedentem 5. facillimè poſſe demonſtrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitatiſſimus, Mauricius Breſcius Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum diſciplinarum in Academia Pariſienſi Profeſſor, animaduertit. Sit enim recta A B, ſecta in C, bifariam, & ei addita recta quantacunque B D. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota A D, compoſita, & adiecta B D, vnà cũ quadrato dimidiæ C B, æquale eſſe quadrato rectæ C D, ex dimidia, & adiecta compoſita. Addita namque recta A D, ex altera parte rectæ A E, quæ adiecta B D, æqualis ſit, erit tota E D, ſecta in C, æqualiter, & in B,

e 5. ſecũdi. inæqualiter, quòd E A, A C, ipſis D B, B C, æquales ſint. Recta quoque E B, rectæ A D, æqualis erit, quòd E A, ipſi D B, ſit æqualis, & A B, vtrique communis.[c] Rectangulum igitur ſub partibus inæqualibus E B, B D, vnà cum quadrato interiectæ ſectionis C B, hoc eſt, rectangulum ſub A D, B D, vnà cum quadrato dimidiæ C B, æquale erit quadrato dimidiæ C D, hoc eſt, quadrato rectæ ex dimidia C B, datæ rectæ A B, & ex adiecta B D, compoſita. Quod eſt propoſitum.

SECETVR iam numerus 10. bifariã, (vt & hoc theorema numeris accõmodemus.) in 5. & 5. addatur q; ei numerus 2. Videſ igitur numerũ 24. qui producitur ex toto numero cõpoſito 12. in adiectum 2. vnà cum 25. quadrato dimidij numeri, æquale eſſe 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. cõponitur.

EX hoc porrò theoremate colligitur proprietas inſignis Arithmeticæ proportionalitatis, qua conſiſtit in eodem ſemper exceſſu quantitatum proportionalium. Cùm enim A D, ſuperet C D, magnitudine A C, hoc eſt, C B. & C D, ſuperet B D, eadem magnitudine C B: habebunt tres lineæ A D, C D, B D, proportionalitatem Arithmeticam quandoquidem prima A D, ſuperat ſecundam C D, eodẽ exceſſu A C, ſiue C B, quo ſecunda C D, tertiam B D ſuperat. Quare cùm oſtenſum ſit, rectangulum ſub extremis A D, B D, vnà cũ quadrato exceſſus C B, æquale eſſe quadrato lineæ mediæ C D; perſpicuè colligitur, in omni proportionalitate Arithmeticâ trium linearũ, rectangulum ſub extremis contentum, vnà cum quadrato exceſſus, æquale eſſe quadrato lineæ mediæ. Semper enim tres lineæ Arithmeticè proportionales ita inter ſe coniungi poterunt, vt efficiant vnam lineam bifariam diuiſam, (quæ nimirum æqualis ſit exceſſui inter primã & tertiam) cui tertia, ſiue minor addita ſit in rectum, mediaq; compoſita ſit ex dimidio exceſſu inter primam & tertiam, & ex tertia. Vt patet, ſi tres rectæ ſint datæ A D, C D, B D. Si namq; ex prima A D, abſcindatur D C, æqualis mediæ, & ex media hac D C, auferatur tertia D B, erit A B, (exceſſus inter primam & tertiam) ſecta bifariam in C, eiq; addita tertia B D. Cùm enim C B, exceſſus ſit inter mediam C D, & tertiam B D, qui æqualis eſſe debet, ob proportionalitatem Arithmeticam, ipſi A C, nempe exceſſui inter primam A D, & mediam C D, erit neceſſariò A B, ſecta in C, bifariam. Eademq; ratio eſt in aliis. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent exceſſum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem exceſſum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vnà cum 9. quadrato exceſſus 3. æqualis eſt quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

EX hac etiam propoſ. 6. reperiemus, vt ex 4. propoſ. numerum quadratũ, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoq; numerũ componat. Nam ſi ex dato numero dematur 1. & reliquus numerus bifariam ſecetur, erit quadratus huius dimidij is, qui quæritur. Vt ſi datus numerus ſit 15. Dempta 1. relinquitur 14. cuius dimidium 7. dabit numerum quadratũ 49. quæſitum. Nam 15. cũ 49. facit quadratũ numerum 64. cuius latus 8. vnà vnitate maius eſt latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifeſta eſt ex hac 6. propoſ. Cùm enim

d 6. ſecũdi. rectangulum A I, cum quadrato G K,[d] æquale ſit quadrato C E; ſi rectangulum A I, ſtatuatur 15. at quadratum B I, 1. ideoq; & latus B D, 1. erit tota linea A D, 15. vt nimirum multiplicata in B D, 1. producat rectangulum A I, 15. Ablata igitur 1. B D, remanet A B, 14. cuius dimidium 7. dabit C B, latus quadrati K G, quæſiti.

NECESSE autem etiam hic eſt, datum numerum eſſe imparem, vt fracti numeri vitentur, vt videlicet dempta 1. bifariam poſſit diuidi.

VERSA vice inueniemus numerũ quadratũ, à quo datus numerus detractus quadratũ etiam numerum relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1. & reliqui numeri dimidio adiiciatur rurſus 1. conficietur latus quadrati quæſiti. Vt ſi datus ſit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quæſiti 8. Nam ſi ex eius quadrato 64. ſubducas datum numerum 15. reliquus erit quadratus numerus 49. cuius latus 7. ſemper vna vnitate minus eſt latere inuento 8. Ratio eſt, quia ſi rectangulum A I, quod

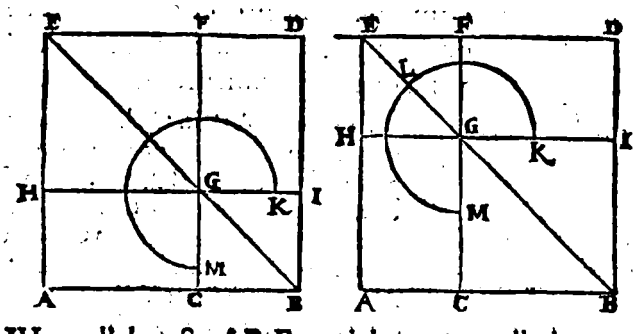
ex quã-

ex quadrato C E, ſubtractum relinquit quadratum K G, ſtatuatur 15. at quadratum B I, id eoq́ & B D, eius latus 1. erit tota linea A D, 15. vt dictum eſt. Dempta ergo 1. B D, erit A B, 14. cuius dimidio C B, quod eſt 7. ſi rurſus apponatur 1. fiet latus C D, 8. quod quæritur, &c.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

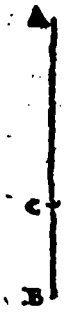
SI recta linea ſecetur vtcunque; Quod à tota, quodque ab vno ſegmentorum, vtraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.



SECETVR recta A B, vtcunque in C. Dico quadratũ totius A B, & quadratum ſegmẽti ſiue maioris, ſiue minoris A C, æqualia eſſe rectangulo bis comprehẽſo ſub tota A B, & dicto ſegmento A C, vnà cum quadrato reliqui ſegmenti C B. Deſcribatur enim ſuper A B, quadratum A D; & ducta diametro B E, ducatur ex C, recta C F, parallela rectæ A E, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur H I, parallela rectæ A B. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. huius lib. C I, H F, quadrata: & quia recta G H, [a] æqualis eſt rectæ A C, erit H F, quadratum ſegmenti A C. Rurſus quia A E, æqualis eſt ipſi A B, erit rectangulum A F, comprehenſum ſub tota A B, & ſegmento A C. Eadem ratione rectangulum H D, comprehenſum erit ſub eiſdem rectis A B, A C, quòd rectæ D E, E H, æquales ſint rectis A B, A C, ob quadrata A D, F H. Quoniam igitur rectangulis A F, F I, vnà cum quadrato C I, hoc eſt, gnomoni K L M, vnà cum quadrato C I, æquale eſt quadratum A D: ſi apponatur commune quadratum H F, erunt quadrata A D, H E, æqualia rectangulis A F, D H, (quorum quodlibet comprehenditur ſub tota A B, & ſegmento A C,) vnà cũ C I, quadrato reliqui ſegmenti C B. Si igitur recta linea ſecetur vtcunque, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 34. primi.

SCHOLIVM.



ALITER. Quia quadratum ex A B, [a] æquale eſt quadratis ex A C, C B, vnà cum rectangulo bis ſub A C, C B; ſi addatur commune quadratum ex A C, erunt quadrata ex A B, A C, æqualia quadrato ex A C, bis, & quadrato ex C B, vnà cum rectangulo bis ſub A C, C B. Sed rectangulo ſub A C, C B, vnà cum quadrato ex A C, [b] æquale eſt rectangulum ſub A B, A C: Et proinde rectangulo bis ſub A C, C B, vnà cum quadrato ex A C, bis, æquale eſt rectangulum ſub A B, A C, bis. Igitur quadrata ex A B, A C, æqualia ſunt reliquo quadrato ex C B, vnà cum rectangulo bis ſub A B, A C. Quod demonſtrandum erat.

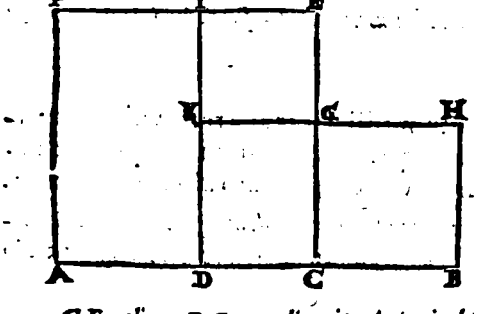
[a] 4. ſecũdi.

[b] 3. ſecũdi.

IN numeris autem diuidatur numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales ſunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vnà cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt conſtat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales ſunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vnà cum 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales ſecetur: Earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vnà cum quadrato eius lineæ, qua maior pars ſuperat minorem.



SECETVR recta A B, in partes inæquales A C, C B, ſit q́ maior pars A C; ponatur autẽ minori parti C B, æqualis linea A D, vt D C, ſit exceſſus, quo pars A C, ſuperat partem C B. Dico quadrata partium A C, C B, æqualia eſſe rectangulo, quod bis continetur ſub A C, C B, vnà cum quadrato lineæ D C. Conſtituantur enim quadrata A E, C H, & agatur D I, ipſi C E, parallela, producatur q́ H G, ad K. Itaq́ quoniam A D, ipſi C B, eſt æqualis, addita communi D C, erit tota A C, hoc eſt, C E, toti D B, æqualis; Eſt autẽ & C G, ipſi C B, æqualis; quòd quadratum ſit C H. Igitur & reliqua G E, reliquæ D C, æqualis erit: Ac proinde, cùm & I E, ipſi D C, ſit æqualis, erunt G E, I E, æquales: ideóque I G, quadratum erit ab exceſſu D C, deſcriptum. Quoniam verò rectangula A I, D H, continentur ſub partibus A C, C B, (Eſt enim A C, vtrique lineæ A F, D B, & C B, vtrique A D, B H, æqualis) manifeſtum eſt, qua-

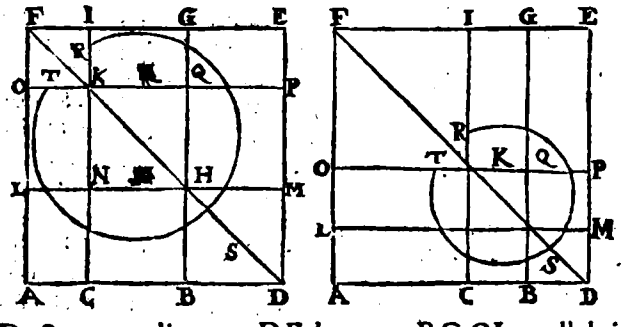
drata A E, C H, partium A C, C B, æqualia esse rectangulis A I, D H, quæ continentur sub partibus A C, C B, vnà cum quadrato I G, excessus D C. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

In numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita vt maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales esse numero 24. qui ex 4. in 6. fit, bis sumpto, vnà cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.



SIT recta A B, in C, diuisa vtcunque. Dico rectangulum quater comprehensum sub A B, & segmento siue maiore, siue minore C B, vnà cum quadrato reliqui segmenti A C, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta A B, & dicto segmento C B, componitur. Producatur enim A B, versus dictum segmẽtum C B, ad D, fitq; B D, recta æqualis segmento C B; & super tota A D, quadratum describatur A E. Ducta autem diametro D F, ducantur B G, C I, parallelę ipsi D E, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur L M, O P, parallelæ ipsi A D, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. O I, N Q, B M, L G, C P, circa diametrũ D F, quadrata. Et quia O K, æqualis est rectæ A C, erit O I, quadratum segmẽti A C. Rursus quia N H, æqualis est rectæ C B, erit N Q, quadratum segmenti C B, ideòq; quadrato B M, æquale, cùm rectæ C B, B D, æquales sint. Quare rectæ B H, H Q, æquales sunt segmento C B; atque adeò duo rectangula A H, L Q, comprehensa erunt sub A B, & segmento C B, cùm L H, sit æqualis rectæ A B. Eadem ratione erunt duo rectangula N G, H E, comprehẽsa sub A B, & C B, cum N H, H M, rectæ æquales sint rectis C B, B D; & rectæ G H, E M, rectæ F L, hoc est, rectæ L H, hoc est, rectæ A B. Et quia quadrata N Q, B M, æqualia sunt; si addatur commune K G, erũt B M, K G, simul æqualia rectangulo N G. Quapropter quinque rectangula A H, L Q, H E, B M, & K G, gnomonem R S T, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta A B, & segmento C B. Cùm igitur gnomon R S T, & quadratum O I, æqualia sint quadrato A E; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta A B, & segmento C B, vnà cum quadrato reliqui segmẽti A C, æquale quadrato lineæ A D, compositæ ex A B, & dicto segmento C B. Quamobrem, si recta linea secetur vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

a 34. primi.
b 34. primi.
c 34. primi.
d 34. primi.

SCHOLIVM.

ALITER: Quia quadratum ex A D,[a] æquale est quadratis ex A B, B D, vna cum rectangulo sub A B, B D, bis, hoc est, quadratis ex A B, B C, vnà cum rectangulo bis sub A B, B C: At quadrata ex A B, B C,[b] æqualia sunt rectangulo bis sub A B, B C, vnà cum quadrato ex A C; Erit quadratum ex A D, æquale rectangulo quater sub A B, B C, vnà cum quadrato ex A C. Quod demonstrandum erat.

a 4. secũdi.
b 7. secũdi.

SECETVR iam numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vnà cum 16. quadrato numero alterius partis 4, hoc est, numerus 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vnà cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

POTEST propositio hæc 8. ita etiam proponi.

SI linea recta secetur vtcunque, eique in rectum adiiciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta siue dicto segmento, vnà cũ quadrato alterius segmẽti.

NAM recta A B, secta est in C, vtcunq;, eiq; addita B D, segmento C B, æqualis, demonstratumq; est, quadratum totius A D, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub data linea A B, & adiecta B D, siue dicto segmento C B, vnà cum quadrato alterius segmenti A C.

Item sic.

SI linea recta secetur bifariam, eiq; in rectum adiiciatur recta alia quantacunque. Quadratum

dratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & sub dimidia, vna cum quadrato adiectæ.

NAM recta D C, secta est bifariam in B, eiq; addita C A, probatumq; fuit, quadratum totius A D, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub A B, cõposita ex B C, dimidia, & adiecta A C, & sub dimidia C B, vna cum quadrato adiecta A C.

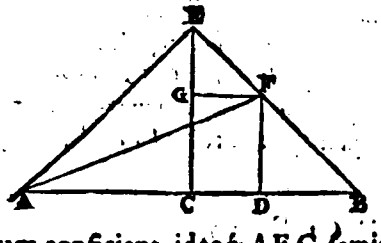
IAM verò ex hac quoque propositione 8. inueniemus aliaratione numerum quadratum, cum quo datus quilibet numerus conficiat numerum similiter quadratum. Nam si ex quarta parte numeri dati dematur 1. reliquum erit latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 32. Tollatur 1. ex eius quarta parte 8. Reliquus enim numerus 7. dabit quadratum 49. cum quo datus numerus 32. efficit quadratum 81. Cuius latus 9. est semper vna vnitate maius quarta parte dati numeri. Facilis est huiusce rei ratio. Quoniam enim rectangulum A H, quater sumptum, cum quadrato O I, [a] æquale est quadrato A E: si rectangulum A H, ponatur 8. nempe quarta pars dati numeri, at verò quadratum C H, adeoq; & C B, eius latus, 1. erit linea A B, 8. vt ducta in C B, 1. faciat 8. Ablata ergo 1. reliquum erit A C, latus quadrati O I, 7. quod quæritur. a 8. secundi.

VT autem fractiones vitentur, necesse est, datum numerum diuidi posse in quatuor partes æquales, ita vt à 4. numeretur.

CONTRA, inueniemus quoque numerum quadratum, à quo datus numerus subtractus relinquat numerum etiam quadratum. Si namque ad quartam partem numeri dati addatur 1. conflabitur latus quadrati quæsiti. Vt si datus rursum sit numerus 32. si ad quartam eius partem 8. adiiciatur 1. fiet latus 9. à cuius quadrato 81. si detrahatur datus numerus 32. remanebit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper est vna vnitate minus quarta parte dati numeri. Ratio est, quia si quarta pars gnomonis R S T, qui ex quadrato A E, sublatus relinquit quadratum O I, hoc est, si rectangulum A H, quod gnomonis R S T, quartam partem esse demonstrauimus, statuatur 8. quarta pars dati numeri 32. at quadratũ B M, ideoq; & latus eius E D, 1. erit linea A B. 8. vt dictum est, ac proinde totum latus A D, 9. ex cuius quadrato A E, quod est, 81. si auferatur gnomon R S T, quem posuimus esse 32. reliquum fiet quadratum O I, 49. cuius latus A C, est 7. quandoquidem A B, erat 8. & C B, hoc est, B D, illi æqualis, 1. quod quidem latus A C, perpetuò vna vnitate minus est quarta parte numeri dati 32. vt dictum est.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt, & eius, quod à dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.



SECETVR recta A B, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium A D, D B, simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia sectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpẽdicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B, ducanturq; rectæ E A, E B. Deinde ex D, ducatur quoque ad A B, perpendicularis D F, secans E B, in puncto F, per quod ducatur F G, parallela ipsi A B, secans C E, in G, ducaturq; tandem A F. Quoniã igitur in triangulo A C E, latera G A, C E, æqualia sunt; [a] erunt anguli C A E, C E A, æquales: Est autem angulus A C E, rectus: Reliqui igitur [b] anguli alium rectum conficient, ideoq; A E C, semirectus erit. Eadem ratione angulus B E C, semirectus erit; ac propterea totus A E B, rectus. Rursus, quia trianguli F G E, angulus E G F, [c] æqualis est recto E C B, externus interno; [d] erunt reliqui duo anguli vni recto æquales. Ostensum autem est, angulum F E G, esse semirectum. Igitur & E F G, semirectus erit, propterea quæ anguli E F G, F E G, æquales erunt, [e] ideoque & latera E G, G F, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo B D F, latera B D, D F, esse æqualia. Nam angulus F D B, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cũm in triangulo A G E, angulus G, rectus sit, [f] erit quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis laterum A C, C E: Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia, quòd & lineæ A C, C E, æquales sint. Igitur quadratum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. Rursus quia in triangulo E G F, angulus G, rectus est, [g] erit quadratum lateris E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F: At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatẽ linearum E G, G F. Igitur quadratum lateris E F, duplum erit quadrati lateris F G, hoc est, quadrati lineæ C D. Est enim C D, [h] recta rectæ F G, æqualis: cùm C F, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarũ A E, E F, dupla sunt duorum quadratorum linearũ rectarum A C, C D: Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F, [i] æqualia quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale duobus quadratis rectarum A D, D F. Igitur & duo quadrata rectarum A D, D F, dupla sunt duorum quadratorum rectarum A C, C D: Atqui quadratum rectæ D F, æquale est quadrato rectæ D B. Ostensum

a 5. primi.
b 32. primi.
c 29. primi.
d 32. primi.
e 6. primi.
f 47. primi.
g 47. primi.
h 34. primi.
i 47. primi.

enim est, rectas D E, D B, esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum A D, D B, segmentorum inæqualium dupla sunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidiæ lineæ, & intermedię sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia & non æqualia, &c. Quod erat demonstrandum.

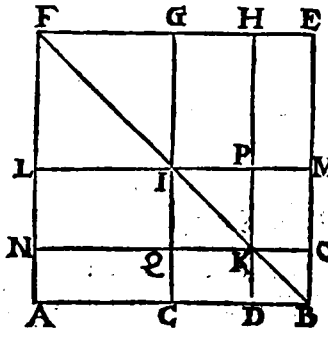
SCHOLIVM.

a 4. secũdi. *ALITER. Quia quadratum ex linea recta A D, descriptum,* [a] *æquale est quadratis descriptis ex A C, C D, vnà cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis A C, C D, comprehenso; si commune apponatur quadratum ex D B, erunt duo quadrata ex A D, D B, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, D B, vnà cum rectangulo bis sub A C, C D, vel sub B C, C D; At qui quadrato ex D B, vnà cum rectangulo bis sub B C, C D,* [b] *æqualia sunt quadrata ex B C, seu A C, & ex C D. Quadrata igitur ex A D, D B, æqualia sunt bis quadratis ex A C, C D: Ac propterea quadrata ex A D, D B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D. Quod ostendendum erat.*

b 7. secũdi.

ALITER, ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, æqualis est, & superat C B, ipsam C D, recta D B; superabit quoq; A C, ipsam C D, eadem recta D B. Quare, vt ad 7. propos. huius libri demonstrauimus, quadrata rectarũ A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, vnà cum quadrato rectæ D B; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis, vnà cum quadrato rectæ D B, dupla sunt quadratorũ ex A C, C D: Sed quadratis rectarum A C, C D, c 4. secũdi. *vnà cum rectangulo sub A C, C D, bis* [c] *est æquale quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, D B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.*

IAM verò rursus numerus 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Itẽ inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. ceu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inæqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

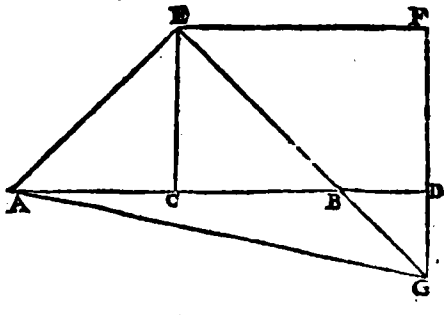


QVOD si lubeat, demonstrabimus & hanc 9. propositionem. ex ipsa constructione, vt præcedentes, hoc modo. Descripto quadrato A E, totius lineæ A B, ductaq; diametro B F, ducantur per C, D, lateribus A F, B E, parallela C G, D H, secantes diametrum B F, in punctis I, K, per quæ lateribus A B, F E, parallela agantur L M, N O, secantes C G, D H, in Q, P. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius libri quadrata sunt L G, Q P, D O, C M, N H, [d] *est q; L I, ipsi A C, & Q K, ipsi C D, & N K, ipsi A D, æqualis; erũt N H, D O, quadrata partium inæqualium A D, D B, & L G, Q P, quadrata dimidiatæ lineæ A C, & intermediæ sectionis C D. Dico illa horum esse dupla. Quoniam enim quadrata N H, D O, superant quadrata L G, Q P, quadrato D O, & rectangulis N I, I H: Sunt autem quadratum D O, & rectangula N I, I H, æqualia quadratis L G, Q P, vt mox demonstrabitur; liquidò constat, quadrata N H, D O, quadratorum L G, Q P, esse dupla, cùm hæc bis in illis contineantur. Quòd autem tria hæc rectangula* d 34. primi. *D O, N I, I H, æqualia sint quadratis L G, Q P, ita ostendetur. Rectangulum N I,* [e] *æquale est rectangulo Q M,* e 36. primi. *quòd recta N Q, Q O,* [f] *æquales sint æqualibus A C, C B. Igitur N I, complectitur quadratum Q P, & insuper K M. Si ergo K M, D O, I H, æquália sint quadrato L G, erunt necessariò D O, N I, I H, æqualia duobus quadratis L G, Q P. Esse autem K M, D O, I H, æqualia quadrato L G, sic demonstrabimus. & Rectangula K M, D O, simul æqualia sunt ipsi P E, quòd rectæ B M, M E, æquales sint, cùm B M, æqualis sit ipsi C B, ob quadratum* f 34. primi. g 36. primi. h 34. primi. *C M,* [h] *& M E, ipsi F L, hoc est, ipsi L I, ob quadratum L G, hoc est,* [i] *ipsi A C. Addito ergo communi I H, erunt* i 34. primi. k 36. primi. *K M, D O, I H, æqualia ipsi I E, hoc est, quadrato L G;* [k] *quod I E, L G, æqualia sint, ob rectas L I, I M,* [l] *quæ æqualibus A C, C B, æquales sunt. Quod est propositum.*

l 34. primi.

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur bifariam, adiiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod à composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.



SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, simul dupla esse quadratorum simul, quę ex rectis A C, C D, describuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quę sit æqualis dimidiæ A C, vel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur D F, ipsi C E, parallela, occurrens rectæ E B, protractæ in G; & per E, ducatur rectæ C D, parallela E F, secans D F, in F, iungaturque recta A G. Ostendetur iam, angulum A E B, esse rectum, vt in præcedenti propositione, & C E B, semirectum; [a] ideoque eius alternum

a 29. primi.

E G F,

E G F, ſemirectum quoq; [a] Eſt autẽ angulus F, rectus, cùm in parallelogrammo C F, recto angulo C, opponatur. [b] Igitur & reliquus F E G, ſemirectus erit, & propterea ipſi E G F, æqualis. Quare [c] rectæ E F, F G, angulis F E G, E G F, oppoſitæ, æquales quoq; erunt. Eadem arte oſtendes, rectas B D, D G, eſſe æquales, propterea q; angulus B D G, ſit rectus, & B G D, ſemirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, [d] æquale eſt quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E: erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C. Rurſus quia quadratum rectæ E G, [e] quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F G, æquale eſt: erit quoq; quadratum rectæ E G, duplum quadrati rectæ E F, hoc eſt, rectæ C D, [f] cùm C D, recta æqualis ſit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla ſunt quadratorum ex rectis A C, C D, deſcriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G, æquale eſt [g] quadratũ rectæ lineæ A G: & quadrato rectæ A G, æqualia ſunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis A D, D G, deſcribũtur. Quadrata ergo rectarũ A D, D G, dupla ſunt quadratorum ex rectis A C, C D, deſcriptorũ. Cùm igitur quadratum rectæ D G, æquale ſit quadrato rectæ B D: erunt quoq; quadrata rectarum A D, D B, dupla quadratorũ, quæ ex rectis A C, C D, deſcribuntur. Itaque ſi recta linea ſecetur bifariam, &c. Quod oſtendendũ erat.

a 34. primi.
b 32. primi.
c 6. primi.
d 47. primi.
e 47 primi.
f 34. primi.
g 47. primi.

SCHOLIVM.

ALITER. *Quia quadratum ex A D,* [a] *æquale eſt quadratis ex A C, C D, vnà cum rectangulo bis ſub A C, C D, vel ſub B C, C D: ſi commune addatur quadratum ex B D, erunt duo quadrata ex A D, B D, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, B D, vnà cum rectangulo bis ſub B C, C D.* [b] *Sed quadrato ex B D, vnà cum rectangulo bis ſub B C, C D, æqualia ſunt quadrata ex C D, B C, hoc eſt, quadrata ex A C, C D. Igitur quadrata ex A D, B D, æqualia ſunt quadratis ex A C, C D, bis; Ac proinde quadrata ex A D, B D, dupla ſunt quadratorum ex A C, C D; Quod erat demonſtrandum.*

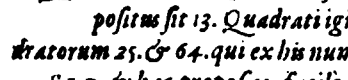
a 4. ſecũdi.
b 7. ſecũdi.

ALITER *ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipſi C B, eſt æqualis, & ſuperat C D, ipſam C B, recta B D: ſuperabit quoq; C D, ipſam A C, eadem recta B D. Quare, vt ad 7 propoſ. huius libri oſtendimus, quadrata ex A C, C D, æqualia ſunt rectangulo ſub A C, C D, bis, vnà cum quadrato rectæ B D; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum ſub A C, C D, bis, vnà cum quadrato rectæ B D, dupla ſunt quadratorum ex A C, C D: Atqui quadratis rectarum A C, C D, vnà cum rectangulo ſub A C, C D, bis,* [c] *æquale eſt quadratũ rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, B D, dupla ſunt quadratorum ex A C, C D.*

c 4. ſecũdi.

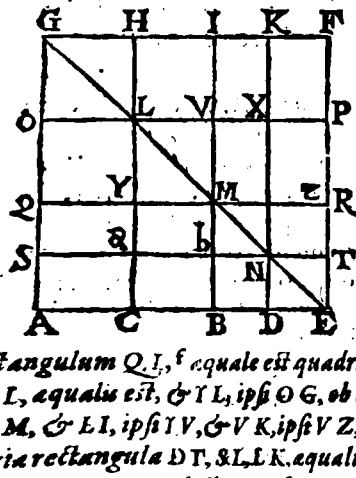
NVMERVS 10. *bifariam ſecetur in 5. & 5. cui addatur numerus quinuis 3. vt totus numerus compoſitus ſit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorũ 13. & 3. dupli ſunt numerorũ quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur; vt perſpicuum eſt.*

SED & *hæc propoſ. 10. facile ex præcedente 9. demonſtrabitur, quemadmodum ſuprà demonſtrata ſuit 6. ex 5. Sit enim recta A B, ſecta bifariam in C, eiq; addita recta quantacunque B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, ſimul dupla eſſe duorũ quadratorum rectarum A C, C D, ſimul. Addita namque rectæ A D, ad partes A, recta A E, quæ adiecta E D, æqualis ſit; erit tota E D, ſecta in C, bifariam, & in B, non bifariam, quòd E A, A C, ipſis D B, B C, æquales ſint. Recta quoq; E B, recta A D, æqualis erit, quòd E A, ipſi D B, ſit æqualis, & A B, vtrique communis.* [d] *Quadrata igitur rectarum E B, B D, hoc eſt, rectarum A D, B D, dupla erũt quadratorum rectarum E C, C B, hoc eſt, rectarum C D, A C, quod eſt propoſitum.*



d 9. ſecũdi.

QVOD *ſi lubeat eandem hãc propoſitionem 10. demonſtrare ex ipſa conſtructione, quemadmodum præcedentem 9. oſtendimus, fiet id hoc modo. Producta A D, ad E, vt D E, ſit adiecta linea B D, æqualis, deſcriptóque quadrato A F, totius lineæ A E, ducantur per C, B, D, lateribus A G, E F, parallelæ C H, B I, D K, ſecantes ductam diametrum E G, in L, M, N, punctis, per quæ lateribus A E, G F, parallelæ agantur O P; Q R, S T. ſecantes priores in V, X, T, Z, a, b. Quoniam igitur ex corollario 1. propoſ. 4. huius libri omnia rectangula circa diametrum E G, quadrata ſunt,* [e] *eſt & S N, ipſi A D, æqualis, & O L, ipſi A C, & a N, ipſi C D; erit S K, quadratum rectæ A D, & D T, quadratum rectæ D E, ſiue B D, & O H, a X, quadrata rectarum A C, C D. Dico quadrata S K, D T, ſimul dupla eſſe quadratorum O H, a X, ſimul. Quoniam enim quadrata S K, D T, ſuperãt quadrata O H, a X, quadrato D T, & rectangulis S L, L K: Sunt autem quadratum D T, & rectangula S L, L K, æqualia quadratis O H, a X, vt mox demonſtrabitur; liquidò conſtat, quadrata S K, D T, quadratorum O H, a X, dupla eſſe, cùm hæc in illis contineantur bis. Quòd autem tria hæc rectangula D T, S L, L K, quadratis O H, a X, æqualia ſint, ita patebit. Rectangulum Q I,* [f] *æquale eſt quadrato O H, ob lineas Q O, O G, quæ æquales ſunt; & propterea quòd Q O, ipſi Y L, æqualis eſt, & Y L, ipſi O G, ob æqualia quadrata T V, O H, æqualium laterum O L, L V. Item* [h] *S T, ipſi a M, & L I, ipſi I V, & V K, ipſi V Z, & D T, ipſi b Z. Igitur quinque rectangula Q L, S T, L I, V K, D T, hoc eſt, tria rectangula D T, S L, L K, æqualia ſunt quinque rectangulis O H, a M, I V, V Z, b Z, hoc eſt, duobus quadratis O H, a X. Quod eſt propoſitum.*

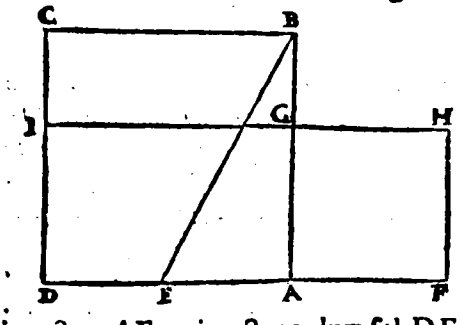


e 34. primi.
f 36. primi.
g 34. primi.
h 34. primi.

11. PROBL. I. PROPOS. II.

DATAM rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

DATA sit recta AB, quam secare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehẽsum sub tota AB, & altero eius segmẽto, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirũ maioris. Describatur ex AB, quadratũ AC, & diuiso latere AD, quod cum linea data AB, angulum rectum efficit, bifariam in E, iungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis sumatur EF, & ipsi AF, abscindatur ex recta AB, data æqualis AG. Est enim AB, maior, quàm AF. Nam cùm EB, sit æqualis ipsi EF, ex constructione; a sint autem latera AE, AB, maiora latere EB; erũt quoq; rectæ EA, AB, maiores recta EF: ac proinde ablata communi AE, reliqua AB, maior erit, q̃ reliqua AF. Dico rectam AB, sectam esse in G, ita vt rectangulum comprehensum sub AB, BG, æquale sit quadrato rectæ AG; adeò vt AG, sit maius segmentum, & BG, minus. Ducatur enim per G, recta HI, parallela rectæ DF, secans CD, in I; Ac per F, ducatur ipsi AG, parallela FH, secans HI, in H. Erit igitur parallelogrammum AH, quadratum segmenti AG, cũ omnia quatuor latera eius sint æqualia, quippe cũ b FH, GH, æqualia sint oppositis AG, AF, æqualibus; omnesq; anguli eiusdem recti, ob rectum A, vt ad defin. 1. huius lib. ostendimus. Rectangulum quoque CG, comprehensum erit sub AB, & segmento BG; q̃ AB, æqualis sit ipsi BC. Itaq; probandum est, rectangulum CG, & quadratum AH, æqualia esse. Quoniam igitur recta DA, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum AF; c erit rectangulum sub DF, FA, hoc est, rectangulum DH, (cùm FH, sit æqualis ipsi FA;) vnà cum quadrato dimidiæ AE, æquale quadrato rectæ EF, hoc est, quadrato rectæ EB, quę d rectæ EF, æqualis est: Est autem quadratum rectæ EB, d æquale quadratis rectarum AE, AB. Quare rectangulum DH, vnà cum quadrato rectæ AE, æquale quoq; est quadratis rectarum AE, AB. Dempto ergo communi quadrato rectæ AE, remanebit rectangulum DH, æquale quadrato rectæ AB, hoc est, quadrato AC. Ablato igitur rursus communi rectangulo AI, remanebunt rectangulum CG, & quadratum AH, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam AB, secuimus, &c. Quod erat faciendum.



a 20. primi.

b 34. primi.

c 6 secũdi.

d 47. primi.

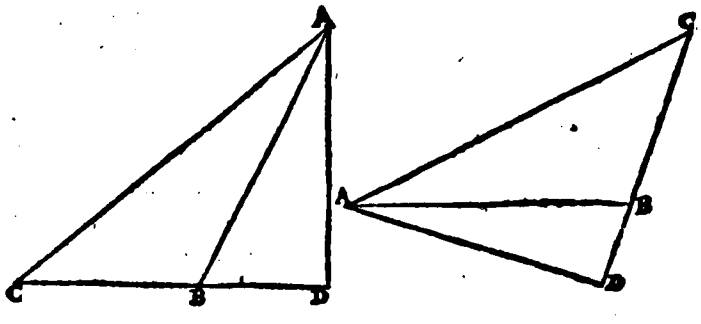
SCHOLIVM.

Hoc theorema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos potest numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partẽ æqualis sit quadrato alterius partis, vt demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius libri in numeris demonstrabimus. Clariùs autem idem ostendemus ad propos. 29. eiusdem lib. 9.

PRAXIS autem huiusce problematis non est difficilis. Nam ad extremum A, vbi terminari debet maius segmentum lineæ datæ AB, excitata perpendiculari AD, ipsi datæ lineæ AB, æquali, eaq; secta in E, bifariam; si ad interuallum EB, resecetur EA, producta in F, erit AF, maiori segmento AG, æqualis, vt demonstratũ est.

12. THEOR. II. PROPOS. 12.

IN amblygoniis triangulis; quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quę fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.



TRIANGVLVM ABC, habeat angulum ABC, obtusum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtusi, ꝓtractũ cadat perpẽdicularis AD. Dico quadratum lateris AC, qđ obtuso angulo opponit̃, maius esse quadratis laterũ AB, BC, rectangulo bis cõprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratum lateris AC, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC, vnà cũ rectangulo sub CB, BD, bis cõprehenso. Cùm a recta CD, diuisa sit in B, vtcunq; e erit quadratũ rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehẽso bis

e 4. secundi.

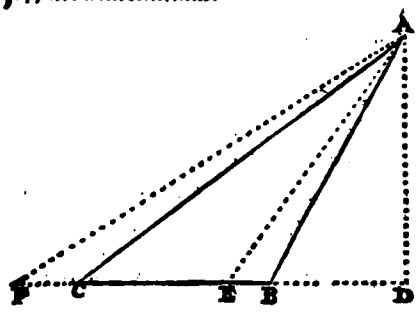
bis ſub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erũt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD: Eſt autem quadratis rectarum CD, DA, [a] æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Cùm igitur quadratis rectarum BD, DA, [b] æquale ſit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Quod eſt propoſitum. In amblygoniis ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 47. primi.

[b] 47. primi.

SCHOLIVM.

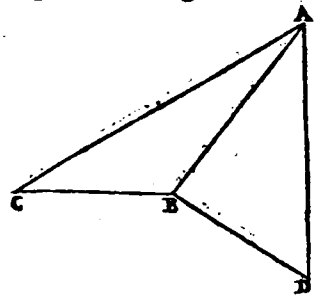
IAM hoc loco demonſtrauit Euclides, quantò maius ſit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti, quadratis aliorum duorum laterum: In ſequenti autem propoſ. 13. oſtendet, quantò quadratum lateris acuto angulo oppoſiti minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad initium ſcholij propoſ. 47. lib. 1. monuimus.



QVONIAM verò aſſumpſit Euclides, perpendicularem ductã ex A, cadere in latus CB, ad partes anguli obtuſi protractum, ideò paucis id demonſtrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus ABC, obtuſus, & latus CB, ad partes B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus CB, protractum; cuiuſmodi eſt recta AD. Si enim caderet intra triangulum, qualis eſt recta AE, eſſent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cùm ille ſit obtuſus, hic verò rectus. Quod eſt contra propoſit. 17. lib. 1. Si verò caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis eſt recta AF, eſſent rurſus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cùm ille ſit obtuſus, hic verò rectus. Quod eſt abſurdum.

SED & hoc theorema verum eſt:

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit.



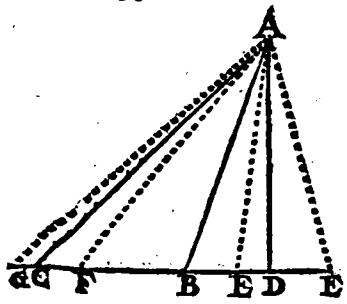
IN triangulo ABC, quadratum lateris AC, maius ſit quadratis laterum AB, BC. Dico angulum B, quem latus AC, ſubtendit, eſſe obtuſum. Ducatur enim ex B, ad AB, perpendicularis BD, linea BC, æqualis, iungaturq; recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD, [a] æquale eſt quadratis ex AB, BD, hoc eſt, ex AB, BC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC; Erit quadratum ex AD, minus quadrato ex AC; & idcirco recta AD, minor, quàm recta AC. Itaque quia latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus AB, BD, trianguli ABD, vtrumque vtrique, & baſis AC, maior eſt baſe AD; [b] Erit angulus ABC, maior angulo ABD: Sed ABD, rectus eſt. Igitur ABC, recto maior, & obtuſus erit. Quod eſt propoſitum.

[a] 47. primi.

[b] 25. primi.

QVIN etiam conuerſum huius propoſ. 12. demonſtrabimus: nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: Demiſſa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus.



IN triangulo ABC, ad latus CB, protractum demittatur ex oppoſito angulo A, recta AD, ſitq; quadratum lateris AC, maius, quàm quadrata laterum AB, BC, rectangulo ſub CB, BD, bis comprehenſo. Dico AD, ad CD, eſſe perpendicularem, & angulum ABC, obtuſum. Si enim AD, perpendicularis non eſt, ducatur ex A, ad CB, perpendicularis, quã dico cadere neceſſariò in CB, productam ad partes B. Cadat enim, ſi fieri poteſt, in B, ita vt AB, ſit ad CB, perpendicularis. Erit igitur [c] quadratum ex AC, æquale quadratis ex AB, BC, quod eſt abſurdum, cùm maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in CB, demiſſa in punctum B.

[c] 47. primi.

CADAT deinde, ſi fieri poteſt, perpendicularis ex A, demiſſa in latus BC, qualis eſt AF. Erit igitur [d] quadratum ex AC, æquale quadratis ex AF, FC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC. Igitur & quadrata ex AF, FC, maiora erunt quadratis ex AB, BC, quod eſt abſurdum. Sunt enim quadrata ex AB, BC, maiora quadratis ex AF, FC, quod recta AB, recto angulo AFB, oppoſita [e] maior ſit, quàm

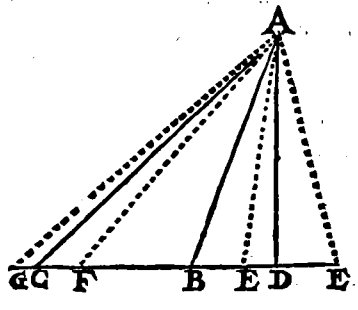
[d] 47. primi.

[e] 19. primi.

AF, & BC, tota maior parte FC. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadit in CB.

CADAT tertiò, si fieri potest, perpendicularis ex A, ad latus BC, demissa, in C, ita vt AC, sit perpendi-
a 47. primi. *cularis. Erit igitur quadratum ex AB, [a] æquale quadratis ex AC, CB, ac proinde quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB, & propterea multò minus quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cùm ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad BC, demissa non cadit in C.*

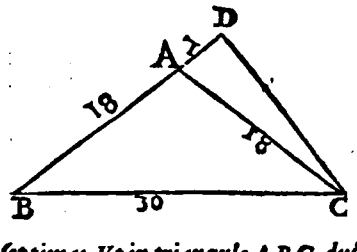
CADAT quartò, si fieri potest, perpendicularis ex A, in BC, protractam ad partes C, qualis est AG.
b 17. primi. *Quoniam igitur duo anguli AGC, ACG, [b] minores sunt duobus rectis, est q3 AGC, rectus; erit ACG, minor*
c 19. primi. *recto, ac proinde ACB, obtusus. Recta ergo AB, [c] maior erit, quàm AC, & propterea quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB; ac proinde multò minus quadratis ex AB, BC: sed & maius ponitur, quod est absurdum. Cùm ergo perpendicularis ex A, demissa ad CB, non cadat in B, neq3 inter C, B, neq3 in C, neq3 extra*
d 17. primi. *C, cadet extra B, qualis est AD, vt demõstrabitur. Quare angulus ABE, [d] acutus erit, & ABC, obtusus, quod secundo loco proponitur demonstrandum. Cæterùm angulum ABC, esse obtusum, si quadratum rectæ AC, maius sit quadratis rectarum AB, BC, facilius demonstrauimus in proximo theoremate huius scholij: ex quo fit, vt ad initium huius scholij ostensum est, perpendicularem ex A, ad CB, demissam cadere extra triangulum ad partes anguli obtusi.*



QVOD autem AD, sit ad CB, perpendicularis, ita demonstrabimus. Si non est, ducatur AE, ad CB, perpendicularis cadens vltra B, vt ostendimus. Quoniam igitur angulus ABC, ostensus est obtusus, erit quadratum rectæ AC, maius quàm quadrata rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BE: sed & quadratũ eiusdem rectæ AC, maius ponitur quàm quadrata earundem rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD. Igitur quadrata ex AB, BC, vnà cum rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso æqualia erunt quadratis ex AB, BC, vnà cum rectangulo sub CB, BE, bis comprehenso: & ablatis quadratis communibus rectarũ AB, BC, rectangulum bis sub CB, BE, comprehensum æquale erit rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, ac proinde & rectangulum sub CB, BE, semel comprehensum æquale erit rectangulo semel sub CB, BD, comprehenso, & rectæ BE, rectæ BD, æqualis, pars toti, vel totum parti. quod est absurdum. Est ergo AD, ad CD, perpendicularis, & nulla alia. quod est propositum.

IAM verò, quoniam neq3 hoc duodecimum theorema, neq3 sequens 13. per numeros, quando libet, explicari potest, quòd posito vno latere trianguli quotlibet partium æqualium, alia latera, eorumq3 partes à perpendicularibus lineis factæ plerunque numeris exprimi nequeant, sed sint lineæ illi lateri incommensurabiles: quod in præcedentibus propositionibus non accidebat, quippe cùm, posita diuisa recta linea quotlibet partium æqualium, eius partes statui possint pro libito ei commensurabiles, vt in exemplis numerorum adhibitis factum est; præscribemus regulas quasdam, quibus Geometricè triangula amblygonia, atq3 oxygonia (quotquot quis optauerit) constituantur eiusmodi, vt omnia latera, partesq3 eorum à lineis perpendicularibus factæ sint lineæ commensurabiles: atq3 adeò veritas vtriusque theorematis in numeris quoq3 appareat. Hic autem de amblygoniis triangulis agemus, & in scholio sequentis propositionis de Oxygoniis. Quoniam autem
c 19. primi. *amblygonium triangulum est, vel Isosceles, in quo tertium latus semper [c] maius est, quòd obtuso angulo opponatur, vel scalenum, (æquilaterum enim esse non potest, vt ad defin. 27. lib. 1. diximus,) & in scaleno lineæ perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo etiam segmentum vtrius-libet laterum æqualium producti inter perpendicularem, & angulum obtusum eisdem lateribus commensurabile sit. Secunda constituemus triangulum amblygonium scalenum laterum etiam commensurabilium, & in quo segmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtusum lateribus eisdem sit commensurabile. Tertia deniq3 triangulum amblygonium scalenum proponemus commensurabilium laterum, & in quo segmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtusum angulum eisdem lateribus commensurabile existat.*

REGVLA I.



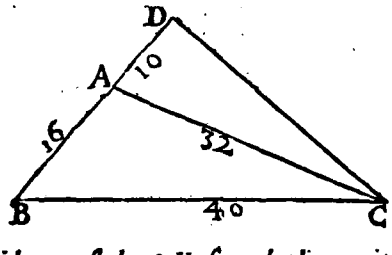
AD construendum triangulum amblygonium Isosceles laterũ commensurabilium, in quo segmentum exterius alterius laterum æqualium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtusum, eisdem lateribus quoque sit commensurabile; statuatur segmentum exterius tot partium æqualium, vt earum numerus à 7. numeretur, vt 7. vel 14. vel 21. vel 28. &c. Deinde vtrumuis laterum æqualium ponatur dicti segmenti duplum superquadrupartiens septimas, maximum autem obtuso angulo oppositum eiusdem segmenti quadruplum superbipartiens septimas. Vt in triangulo ABC, ducta sit CD, ad BA, latus productum. Si igitur AD, constituatur partium

7. &

7. & vtrumuis laterum A B, A C, partium 18. qui numerus habetur, si duplicaueris 7. addideriú $q_3\frac{4}{7}$. ipsius: Latus verò B C, partium 30. quem numerum habebis, si quadruplicaueris 7. adiunxeris $q_3\frac{2}{7}$. ipsius erit triangulum A B C, quod quæritur. In hoc enim triangulo quadratum lateris B C, est 900. cui æqualia sunt quadrata laterum A B, A C, nempe 324. 324. vnà cum rectangulo bis comprehenso sub A B, A D, hoc est, cum 126. 126. Hæc enim conficiunt quoque summam 900. Quam ob rem, vt in hoc scholio ostendimus, erit ducta C D, ad B D, perpendicularis, & angulus B A C, obtusus. Quòd si singulos numeros huius trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas trianguli commensurabiles, prioribus tamen proportionales. Vt si inuentos numeros duplices, efficies A D, 14. & tam A B, quàm A C, 36. at B C, 60. Propositum quoque triangulum reperies, statuendo segmentum exterius A D, quotcunque partium, etiamsi à 7. non numerentur: sed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem denique triangulum offendes, statuendo latus quodcunq; à quo incipere vis, quotlibet partium, dummodò maximũ fiat segmẽti A D, quadruplum superbipartiens septimas, vtrumuis autem æqualium sit eiusdem segmenti duplum superquadrupartiens septimas.

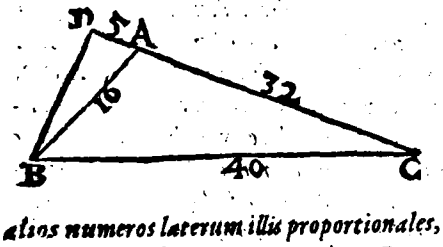
REGVLA II.

VT efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commensurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat segmetum exterius commensurabile etiam lateribus: statuatur exterius segmentũ quotuis partium æqualium à quinque numeratarũ, vt 5. vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus si addas $\frac{3}{5}$. habebis minimum latus. Si verò easdem partes dicti segmenti triplices, addas $q_3\frac{1}{5}$. vel si partes minimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si denique partes easdem dicti segmenti quadruplices, reperies latus maximum. Vt si in appositio triangulo segmentum A D, constituatur 10. erit A B. 16. A C. 32. & B C, 40. Vbi etiam vides, quadrato lateris B C, quod est 1600. æqualia esse quadrata laterum A B, A C, nimirũ 256. 1024. vnà cum rectangulo bis sub A B, A D, comprehenso, id est, cum 160. 160. Ex quo fit C D, esse ad B D, perpendicularem, & angulum B A C, obtusum, vt suprà in hoc scholio ostendimus. Iam si singulos numeros inuentos multiplices per quemuis numerum, gignentur alij numeri illis proportionales, qui idem præstabunt. Vt si eos duplices, erit latus A B, 32. A C, 64. & B C, 80. qui quidem numeri reperientur eadem arte, si exterius segmentum A D, statuas partium 20. quæ duplam quoque proportionem habent ad priores partes 10. Sic si eosdem numeros triplices, efficies segmentum exterius A D, partium 30. latus A B, 48. A C, 96. B C, 120. & sic deinceps.



REGVLA III.

PRO triangulo amblygonio Scaleno commensurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus productum cadens efficiat quoque segmentum lateribus trianguli commensurabile; accipiatur iursum exterius segmentum quotlibet partium à 5. numeratarum, vt in præcedenti regula. Quas si triplices, addas $q_3\frac{1}{5}$. produces minimum latus. Si verò easdem multiplices per 6. adiungas $q_3\frac{2}{5}$. habebis latus medium: Si denique easdem per 8. multiplices, produces maximum latus. Vt si in triangulo proposito segmentum A D, fiat partium 5. erit A B. 16. A C, 32. & B C, 40. At q_3 ita quadrato lateris B C, nimirum 1600. æqualia existent quadrata laterũ A B, A C, nempe 256. 1024. vnà cum rectangulo bis comprehenso sub A C, A D, hoc est, cum 160. 160. Ac proinde B D, ad C D, erit perpendicularis, angulus q_3 B A C, obtusus, vt in hoc scholio suprà demonstrauimus. Quòd si numeros inuentos per quemuis numerum multiplices, inuenies alios numeros laterum illis proportionales, in quibus eadem hæc proposit. 12. examinabitur. Vt si eos quadruplices, efficies segmentum exterius A D, partium 20. latus A B, 64. A C, 128. & B C, 160. Si verò eosdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit segmentum exterius A D, 50. latus A B, 160. A C, 320. & B C, 400. Atque ita in infinitum.

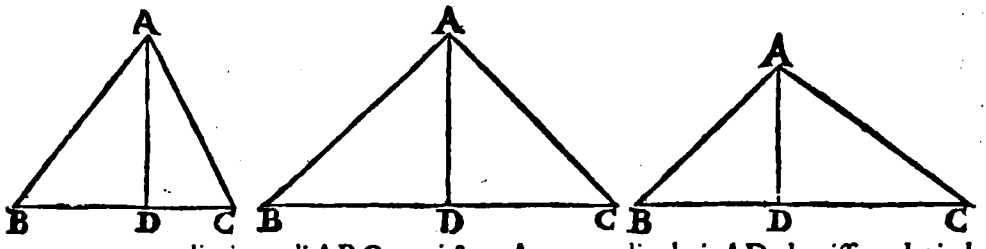


CAVE autem, existimes posito latere aliquo trianguli amblygonij, vel segmento exteriori, quotlibet partium æqualium, alia latera cum illo seruare necessariò proportiones illas, quas in regulis prædictis explicauimus, adeò vt cognito vno, reliqua etiam cognoscantur. Hoc enim falsum est, cùm illa variari possint mille modis. & alias atq; alias proportiones habere. Itaq; ex tribus præscriptis regulis solùm colligendum erit, ex lineis rectis, quæ dictas proportiones seruent, constitui posse triangulum amblygonium, vnà cum segmento exteriore, in quo veritas propositionis 12. possit examinari.

THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, re-

ctangulo bis comprehẽſo,& ab vno laterũ,quæ ſunt circa acutũ angulũ, in qđ perpẽdicularis cadit,&ab aſſumpta interius linea ſub perpẽdiculari,ppe acutũ angulũ.



SINT omnes anguli trianguli A B C,acuti,& ex A, perpendicularis A D, demiſſa cadat in latus B C. Dico quadratum lateris AB,quod acuto angulo A C B,opponitur,minus eſſe quadratis laterum A C,C B,circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, hoc eſt, quadratum lateris A B, vnà cum rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, æquale eſſe duobus quadratis laterum A C,C B. Cùm enim recta B C, diuiſa ſit in D,vtcunque,erunt quadrata rectarum B C,C D,[a] æqualia rectangulo comprehenſo bis ſub B C,C D; & quadrato rectæ B D. Addito ergo communi quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarũ B C,C D,D A,æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub B C,C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A: Duobus autẽ quadratis rectarum C D,D A,[b] æquale eſt quadratum rectæ C A. Duo igitur quadrata rectarum B C, C A,æqualia ſunt rectangulo bis comprehenſo ſub B C,C D,& duobus quadratis rectarum B D, D A. Cùm ergo duobus quadratis rectarum B D,D A,[c] æquale ſit quadratum rectæ A B; erũt duo quadrata rectarum B C,C A,æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D,& quadrato rectę A B. quod eſt propoſitum. Eodem modo oſtendetur,quadrata rectarum A B,B C,æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub C B,B D,& quadrato rectæ AC,hoc eſt quadratum lateris AC,minus eſſe quadratis laterum AB,B C,rectangulo comprehenſo bis ſub C B,B D. In oxygoniis ergo triangulis,quadratum à latere,&c. Quod demonſtrandum erat.

a 7 ſecundi.

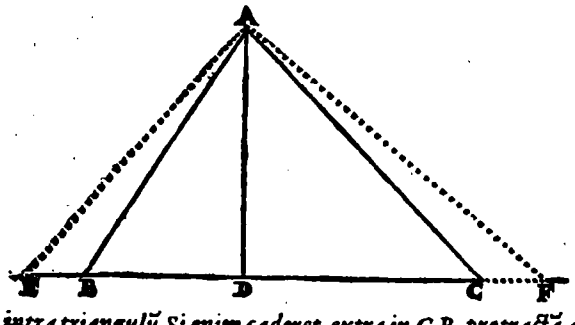
b 47.primi.

c 47. primi.

SCHOLIVM.

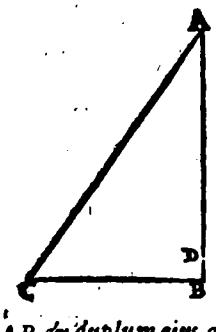
ITAQVE ex tribus propoſitionibus,nempe 47.lib.1. & 12. atquè 13.huius lib.cognoſcimus,quantum ſit quadratum cuiuſuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum,nempe an ſit illis æquale,an maius,minúsve, & quantò maius ſit,aut minus, prout videlicet angulus aſſumpto lateri oppoſitus fuerit rectus,vel obtuſus, aut acutus.

QVAMVIS autẽ Euclides theorema hoc proponat de triangulis duntaxat oxygonijs, quæ ſcilicet omnes angulos habent acutos. Idem tamen verùm etiã eſt in triangulis rectangulis,& amblygoniis,vt conſtat ex poſterioribus duobus triangulis in ſchemate propoſitis. Sunt enim in hiſce triãgulis neceſſariò duo reliqui anguli acuti, vt perſpicuè colligi poteſt ex propoſ.17. vel 32.lib.1. Hoc ſolùm obſeruandũ eſt in triangulis rectangulis,& amblygoniis, perpendicularem duci debere ab angulo recto,vel obtuſo,in oxygoniis verò à quolibet. Ita.n. ſemper cadet perpendicularis intra triangulũ, vt Euclides in demõſtratione aſſumpſit. Quod quidẽ facilè demõſtrabitur hac ratione. Sint in triangulo A B C, duo anguli A B C, A C B, acuti, angulus verò B A C, rectus, vel obtuſus, acutúsve. Dico perpendicularẽ ex A, demiſſam cadere intra triangulũ. Si enim caderet extra in C B, protractã ad partes B,cuiuſmodi eſt recta A E,eſſet in triangulo A B E,angulus exterior A B C,acutus,[a] maior interno & oppoſito recto A E B,quod eſt abſurdũ. Si verò caderet extra B C,productã ad partes C,qualis eſt recta A F,in idem incideremus abſurdum,vt manifeſtum eſt.



a 16.primi.

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis,& obtuſangulis demonſtrat Federicus Commandinus, etiamſi perpendicularis A D,nõ cadat in latus B C, ſed vel eadem ſit,quæ latus A B, vt in rectangulis, vel extra triangulum cadat,vt in obtuſangulis accidit,ceu in ſcholio propoſitionis præcedentis demonſtrauimus: quod tum demũ accidet, cùm perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuſo,ſed ab altero acutorum demittitur.

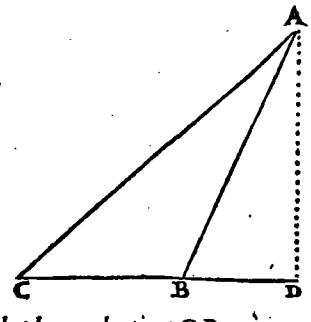


b 47.primi.

SIT triangulum rectangulũ A B C,cuius angulus B,ſit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C,perpendicularu ducatur A D,quæ eadẽ erit,quæ latus A B,propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris A B,acutum angulum C,ſubtendentis,minus eſſe, quàm quadrata laterum A C,C B,rectangulo bis comprehenſo ſub latere C B,in quod perpendicularis cadit, & ſub linea C D, quæ interiicitur inter perpendicularem A D,& acutũ angulum C. Cùm enim quadrata ex A B,C B,[b] æqualia ſint quadrato ex A C, addito communi quadrato ex C B,erunt tria quadrata,nempe quod ex A B,& duplum eius,quod ex C B,æqualia duobus quadratis ex A C,C B: At quadratum ex C B,idem eſt,quod rectangu-

rectangulum ſub C B, C D. Igitur & quadratũ ex A B, vnà cum rectangulo bis ſub C B, C D, æquale eſt quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus eſt, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis, ſub C B, C D. Quod eſt propoſitum.

Rvrsvs ſit triangulum obtuſangulum A B C, cuius angulus B, obtuſus; & ex angulo acuto A, ad B C, perpendicularis ducatur A D, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, ſubtendentis minus eſſe, quàm quadrata laterũ A C, C B, rectangulo comprehenſo bis ſub C B, & C D. Quoniam enim quadrata ex A D, C D, [a] *æqualia ſunt quadrato ex A C; addito quadrato ex C B, communi, erunt tria quadrata ex A D, C D, C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C D,* [b] *æquale eſt quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis ſub C B, B D. Igitur & duo quadrata ex A D, C B, vnà cum quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis ſub C B, B D, æqualia ſunt quadratis ex A C, C B: Sunt autem quadrata ex A D, B D,* [c] *æqualia quadrato ex A B. Quare quadratum quoque ex A B, & duplum quadrati ex C B, vnà cum rectangulo bis ſub C B, B D, æqualia ſunt quadratis ex A C, C B. Atqui quadrato ex C B, vnà cum rectangulo ſub C B, B D,* [d] *æquale eſt rectangulum ſub C D, C B; Ac propterea duplo quadrati ex C B, vnà cum rectangulo bis ſub C B, B D, æquale eſt rectangulum bis ſub C D, C B. Igitur & quadratũ ex A B, vnà cum rectangulo bis ſub C B, C D, æquale eſt quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus eſt, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis ſub C B, C D. Quod eſt propoſitum.*



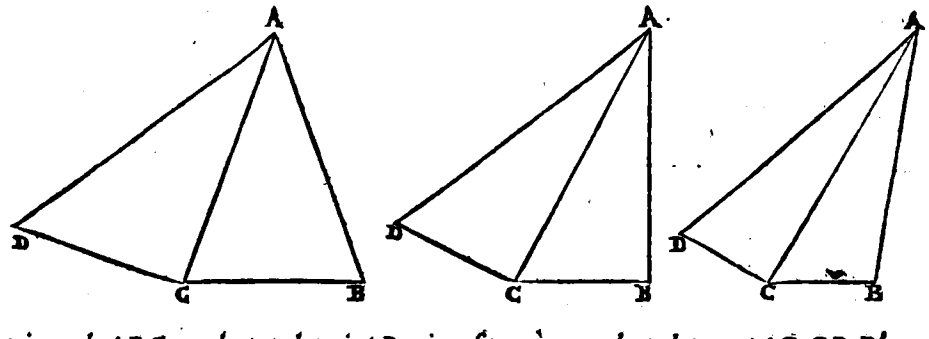
a 47. primi.
b 4. ſecũdi.
c 47. primi.
d 3. ſecũdi.

Aliter, & breuiùs. Quoniam quadratum ex A C, [e] *maius eſt, quàm quadrata ex A B, B C, rectangulo bis ſub C B, B D, comprehenſo, hoc eſt, quadratum ex A C, æquale eſt quadratis ex A B, B C, vnà cum rectangulo ſub C B, B D, bis comprehenſo; erit quadratum ex A B, minus, quàm quadratum ex A C, quadrato ex B C, & rectangulo ſub C B, B D, bis: Ac proinde ſi quadrato ex A C, addatur quadratum ex B C, erit quadratum ex A B, minus quàm quadrata ex A C, B C, quadrato ex B C, bis ſumpto, & rectangulo bis ſub C B, B D, comprehenſo. Cùm ergo quadrato ex B C, vnà cum rectangulo ſub C B, B D, contento,* [f] *æquale ſit rectangulum ſub C B, C D, contentum; erit quoq; quadratum ex A B, minus quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo comprehenſo bis ſub C B, C D. Quod eſt propoſitum.*

e 12. ſecũdi.
f 3. ſecũdi.

In ſcholio quodam antiquo demonſtratur ſequens theorema, inſtar illius, quod nos in ſcholio præcedentis propoſitionis ſecundo loco demonſtrauimus. Videlicet.

Si in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, acutus erit.



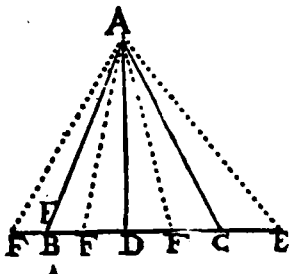
In triangulo A B C, quadratum lateris A B, minus ſit, quàm quadrata laterum A C, C B. Dico angulum C, quem dictum latus ſubtendit, eſſe acutum. Ducatur enim ex C, ad A C, perpendicularis C D, lineæ C B, æqualis, iungaturq; recta A D. Quoniam igitur quadratum ex A D, [g] *æquale eſt quadratis ex A C, C D, hoc eſt, ex A C, C B: Ponitur autem quadratum ex A B, minus quadratis ex A C, C B; Erit quadratum ex A D, maius quadrato ex A B; & ideò recta A D, maior quàm recta A B. Itaque quia duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia ſunt duobus lateribus A C, C B, trianguli A C B, vtrumque vtrique; & baſis A D, maior baſe A B;* [h] *Erit angulus A C D, maior angulo A C B: Sed A C D, rectus eſt, ex conſtructione. Ergo A C B, recto minor, & acutus erit.*

g 47. primi.
h 25. primi.

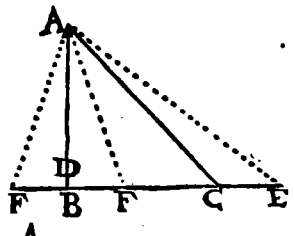
Sed & conuerſum huius propoſ. 13. oſtendemus, nimirum.

Si in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterũ, & ſub recta linea inter angulum priori lateri oppoſitum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppoſito demiſſam: Linea hæc demiſſa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, acutus.

In triangulo A B C, ad latus B C, demittatur ex angulo oppoſito A, recta A D; ſitq; quadratum lateris A E, minus quàm quadrata laterum A C, C B, rectangulo ſub B C, C D, bis comprehenſo. Dico A D, eſſe per-

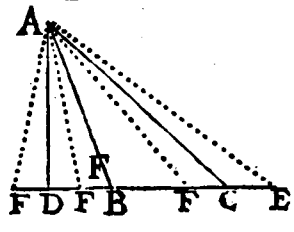


a 47. primi.



b 47. primi.

c 47. primi.



d 4 ſecũdi.

e 17. primi.

pendicularem ad B C, & angulum A C B, acutum. Si namque A D, perpendicularis non eſt, ducatur ex A, ad B C, perpendicularis, quam dico neceſſariò cadere citra punctum C, verſus B, hoc eſt, vel in latus B C, vel in punctum B, vel in latus B C, verſus B, productum. Cadat enim, ſi fieri poteſt, in C, ita vt A C, ſit ad B C, perpendicularis. Erit igitur [a] *quadratum ex A B, æquale quadratis ex A C, C B. quod eſt abſurdum, cùm minus ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, deducta ad B C, in punctum C.*

CADAT deinde, ſi fieri poteſt, perpendicularis ex A, demiſſa vltra C, in E, qualis eſt A E. Erit igitur [b] *quadratum ex A B, æquale quadratis ex A E, E B: Ponitur autem quadratum ex A B, minus quadratis ex A C, C B. Igitur & quadrata ex A E, E B, minora erunt quadratis ex A C, C B. Cùm ergo quadratũ ex A C,* [c] *æquale ſit quadratis ex A E, E C; erunt quoque quadrata ex A E, E B, minora quadratis ex A F, E C, C B: Et ablato communi quadrato rectæ A E, erit reliquum quadratũ ex E B, minus quoque quadratis ex E C, C B. quod eſt abſurdum. Cùm enim quadratum ex E B,* [d] *æquale ſit quadratis ex E C, C B, vnà cum rectangulo bis comprehenſo ſub E C, C B, maius erit quadratum ex E B, quadratis ex E C, C B. Non ergo perpendicularis cadit vltra C: Sed neque in C, cadit, vt oſtendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis eſt A D, vt demonſtrabitur, ac propterea* [e] *angulus A C B, acutus erit. Quod ſecundo loco proponitur demonſtrandum. Caterùm angulum A C B, eſſe acutum, ſi quadratum rectæ A B, minus ſit quadratis rectarum A C, C B, facilius demonſtrauimus in proximè antecedente theoremate huius ſcholij: ex quo fit, quemadmodum in corollario ſecundo propoſitionis 17. libri primi oſtenſum eſt, perpendicularem ex A, ad B C, demiſſam cadere citra angulum A C B, acutum verſus B.*

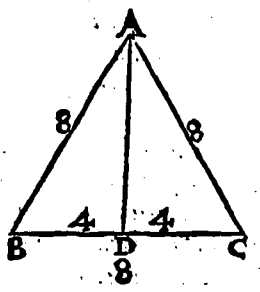
QVOD autem A D, ſit ad B C, perpendicularis, ita oſtendemus. Si non eſt, ſit A F, ad B C, perpendicularis, cadens citra punctum C, vt probatum eſt, vbicunque hoc contingat, ſiue intra triangulum, ſiue in punctum B, ſiue extra triangulum. (In ſecundo tantùm triangulo non dicet aduerſarius, perpendicularem cadere in B; quia eadem eſſet, quæ A D, quod ille negat.) Quia ergo angulus A C B, oſtenſus fuit acutus, [f] *erit quadratum ex A B, minus, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C F, hoc eſt, quadratum ex A B, vnà cum rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C F, æquale eſt quadratis ex A C, C B: Ponitur autem quadratum idem ex A B, minus quoque, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, hoc eſt, quadratũ idem ex A B, vnà cum rectangulo bis contento ſub B C, C D, æquale ponitur quadratis ex A C, C B. Igitur quadratum ex A B, vnà cum rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, æquale erit quadrato eidem ex A B, vnà cum rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C F: Et ablato communi quadrato rectæ A B, rectangulum ſub B C, C D, bis comprehenſum æquale erit rectangulo bis ſub B C, C F, comprehenſo; ac proinde & rectangulum ſemel comprehenſum ſub B C, C D, æquale erit rectangulo ſemel comprehẽſo ſub B C, C F, ideoq; & rectæ C D, C F, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Eſt igitur A D, ad B C, perpendicularis, & non alia. Quod eſt propoſitum.*

f 12. ſecũdi.

QVEMADMODVM autẽ in ſcholio ſuperioris propoſitionis triangula amblygonia conſtruximus laterum, & linearum commenſurabilium, in quibus per numeros veritas propoſitionis 12. examinari poſſit, ita hoc loco oxygonia triangula conſtituemus laterum, atque linearum commenſurabilium, in quibus huius 13. propoſitionis veritas explicetur. Quia verò triangulum oxygonium eſt vel æquilaterum, vel Iſoſceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam ſeptem regulis. Prima de triangulo æquilatero oxygonio aget. Secunda de Iſoſcele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inæquale, ſiue maius illud ſit, ſiue minus vtrouis æqualium. Tertia de Iſoſcele, cuius tertium latus maius eſt, perpendicularíſque in alterutrum æqualium laterum cadit. Quarta de Iſoſcele, cuius latus tertium minus eſt, & perpendicularis rurſus in alterutrum laterum æqualium cadit. Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus. Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur. Septima denique de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hìc de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli ſupra baſin ſunt acuti, ſiue oppoſitus angulus acutus etiam ſit, ſiue non. De his enim propoſitio etiam intelligenda eſt, vt diximus. Quo pacto autem triangula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipſa, vel cum vno laterum coincidit, numeris quoq; poſſint accommodari, docebimus ad finem regularum.

REGVLA I.

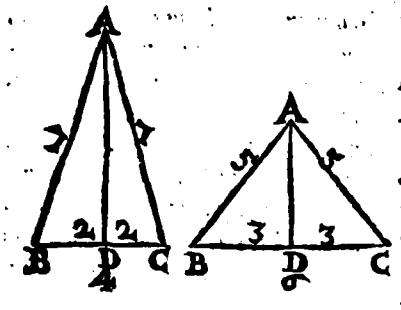
SI quodlibet latus trianguli æquilateri ſtatuatur quotuis partium æqualium, numero tamen parium, vt fractiones



fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter ſe, & ſegmentis à linea perpendiculari factis commẽſurabilia. Vt in triangulo æquilatero A B C, diuidet perpendicularis A D, oppoſitum latus B C, bifariam, vt in ſcholio propoſitionis 26. lib. 1. demonſtrauimus. Quam ob rem poſito quolibet latere 8. erunt ſegmenta B D, C D, 4. 4. Vbi vides quadratum lateris A B, angulo acuto C, oppoſiti, (omnes enim anguli in triangulo æquilatero acuti ſunt, ex corollario 3. propoſitionis 17. lib. 1.) hoc eſt, 64. vnà cum rectangulo bis contento ſub B C, C D, id eſt, cum 32. 32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum A C, C B, nempe 64. 64.

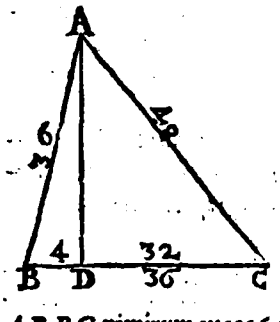
REGVLA II.

SI vtrumque laterum æqualium trianguli Iſoſcelis ſtatuatur quotcunque partium æqualium, tertium autem quotlibet partium numero parium, vt fractiones vitentur, ſiue pauciores partes in hoc latere ponantur, quàm in vtrolibet æqualium, ſiue plures, dummodò tot nõ ſint, quot in vtroque ſimul, aut plures; quia ſic nõ poſſet fieri triangulum, propterea quòd duo latera æqualia non eſſent maiora tertio latere, ſed vel æqualia, vel minora, quòd propoſitioni 20. lib. 1. repugnat. Si inquã, latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes linea trianguli inter ſe commenſurabiles. Vt ſi in priori horum Iſoſcelium vtrumuis latus A B, A C, ſtatuatur 7. & B C, 4. In poſteriori autem vtrumlibet A B, A C, 5. & B C, 6. Cùm ergo perpendicularis A D, diuidat baſim B C, bifariam, ex ſcholio propoſit. 26. lib. 1. erunt ſegmenta B D, C D, in priori quidem triangulo 2. 2. in poſteriori verò 3. 3. Vbi etiam perſpicuum eſt, quadratum lateris A B, angulo acuto C, oppoſiti, (vterque enim angulus B, C, acutus eſt, ex corollario 3. propoſ. 17. lib. 1.) vnà cum rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, æquale eſſe quadratis ſimul laterum A C, C B, &c.



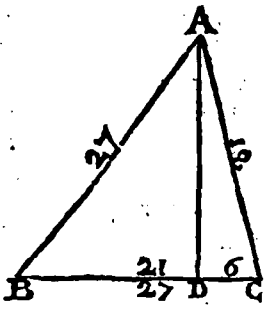
REGVLA III.

IN triangulo Iſoſcele, in quo tertium latus maius eſt, & perpendicularis in alterum æqualium laterum cadit, erit ſegmentum prope maius latus tertium, maius, vt ad propoſ. 47 lib. 1. demonſtrauimus. Si igitur minus ſegmentum ſtatuas quotuis partium, easq; per 8. multiplices, habebis ſegmentum maius: Si verò eaſdem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo deniq; ſegmenta ſimul addita conflabunt vtrumque laterum æqualium; quod etiam produces ex multiplicatione minoris ſegmenti per 9. Vt ſi in Iſoſcele A B C, ſegmentum minus B D, ponatur 4. erit maius C D, 32. latus verò A C, 48. & vtrumque latus A B, B C, 36. 36. Quadratum igitur lateris A B, angulo acuto C, oppoſiti, nempe 1296. vnà cum eo, quod fit bis ex B C, in C D, id eſt, cum 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex A C, C B, nempe 2304. 1296. Ita quoque quadratũ ex A C, nimirum 2304. vnà cum eo, quod bis ſit ex C B, in B D, hoc eſt, cum 144. 144. facit 2592. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum A B, B C, nimirum ex 1296. 1296. In huiuſmodi ergo triangulo ſegmenta inæqualia proportionẽ habent octuplam: vtrumuis verò æqualium laterum ad minus ſegmentum proportionem habet nouemplam: Tertium denique latus maius ad idem ſegmentum minus habet proportionem duodecuplam.



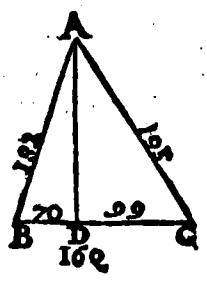
REGVLA IV.

IN triangulo Iſoſcele, cuius tertium latus minus eſt, & perpendicularis rurſum in alterum æqualium laterum cadit, erit ſegmentum prope minus latus tertium, minus, vt ad propoſ. 47. lib. 1. oſtenſum eſt. Quod ſegmentum ſi ſtatuas quotuis partium numero parium, vt fractiones fugiantur, easq; per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adiicias, vel earum medietatem per 7. multiplices, produces maius ſegmentum: Si verò eaſdem partes minoris ſegmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Vtrumque denique æqualium laterum componetur ex duobus ſegmentis: quod etiam ex multiplicatione medietatis minoris ſegmenti per 9. producetur. Vt ſi in Iſoſcele A B C, minus ſegmentũ C D, ponatur 6. erit maius B D, 21. & latus A C, 18. atq; tam A B, quàm B C, 27. Quadratum ergo lateris A B, angulo acuto C, oppoſiti, nimirum 729. vnà cũ eo, quod fit bis ex B C, in C D, id eſt, cũ 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterũ A C, C B, nempe ex 324. 729. &c.



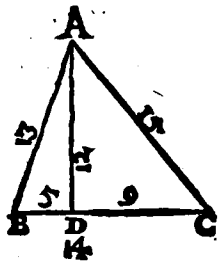
REGVLA V.

IN Scaleno triangulo, in quo perpendicularis in minimum latus demittitur, erit ſegmentum baſis iuxta



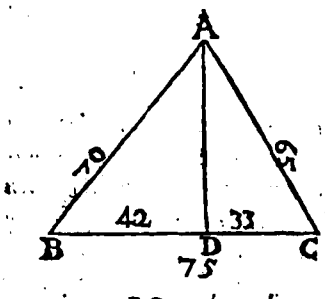
medium latus, minus, vt ad propoſit. 47. lib 1. demonſtratum eſt. Quod ſegmentum ſi conſtituatur tot partium aqualium, vt à 70. numerentur, nimirum partium 70. vel 140, vel 210. &c. eiq; addantur earum $\frac{2}{7}\frac{9}{0}$ confectum erit ſegmentum maius, & ex additione partium horum ſegmentorum gignetur minimum latus. Si verò partes minoris ſegmenti duplicẽtur; & producto adiiciantur $\frac{4}{7}\frac{2}{0}$. hoc eſt, $\frac{3}{5}$. earundem partium, procreabitur medium latus. Si denique partium eiuſdem minoris ſegmenti duplicentur, producto q; $\frac{5}{7}\frac{5}{0}$ id eſt, $\frac{1}{1}\frac{1}{4}$. earundem addantur, componetur latus maximum. Vt in ſcaleno A B C, ſi minus ſegmentum B D, ponatur 70. erit maius C D, 99. & totum minimum latus B C, 169. Medium autem latus A B, 182. & maximum A C, 195. Quadratum ergo lateris A B, acuto angulo C, oppoſiti, hoc eſt, 33124. vnà cum numero, qui bis fit ex B C, in C D, id eſt, cum 18731. 18731. conficit numerum 66586. aqualem duobus ſimul quadratis 38025. 28561. laterum A C, C B, &c.

REGVLA VI.



IN triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex iis, quæ ad propoſitionem 47. lib. 1. oſtendimus, minus ſegmentum minimo lateri adiacens. Quod ſegmentum ſi ſtatuatur tot aqualium partium, vt à 5. numerentur, vt 5. vel 10. vel 15. &c. eiq; addantur $\frac{4}{5}$. confectum erit ſegmentum maius, & partes horum ſegmentorum in vnam ſummam collecta component medium latus. Si autem partibus minoris ſegmenti duplicatis adiiciantur earundem $\frac{3}{5}$. producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris ſegmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno A B C, ſi minus ſegmentum B D, ſiat 5. erit ſegmentum maius C D, 9. & totũ latus B C, medium, 14. Minimum verò A B, 13. & maximũ A C, 15. &c.

REGVLA VII.



IN Scaleno denique triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, erit minus ſegmentum iuxta latus minimum, ex iis, quæ ad propoſitionem 47. lib. 1. ſcripſimus. Si ergo pro minori ſegmento ſumantur 33. vel quiuis alius numerus à 33. numeratus, vt 66. vel 99, &c. eiq; addantur $\frac{9}{3}\frac{9}{3}$. hoc eſt, $\frac{3}{1}\frac{1}{1}$. fiet maius ſegmentum: quæ duo ſegmenta ſimul compoſita maximum latus offerent. Si verò numero minoris ſegmenti duplicato adiiciantur, $\frac{4}{3}\frac{2}{3}$. producetur medium latus. Si denique eidem numero lateris maximi apponantur $\frac{3}{3}\frac{2}{3}$. exhibebitur minimum latus. Vt ſi in Scaleno A B C, minus ſegmentum C D, ſit 33. erit maius ſegmentum B D, 42. totumq; latus maximum B C, 75. & medium A B. 70. & minimum A C, 65. &c.

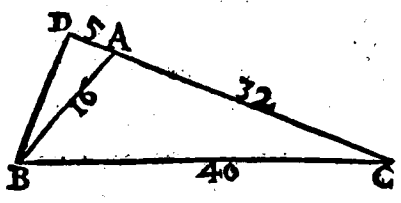
QVOD. ſi ſingulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicunque is ſit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Iidem etiam numeri reperientur, ſi minus ſegmẽtum, vel maius, vel quodcunque latus ſtatuatur quotlibet partium, ſi modò proportiones ſeruentur, quas ſupradictis regulis expreſimus.

HIC quoq; ſciendum eſt, non in omni triangulo oxygonio proportiones præſcriptas reperiri inter latera, cùm mille modis poſſint variari eorum proportiones. Neq; verò hoc regula illa docent, ſed vſus earum in eo ſolùm conſiſtit, vt ſeruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari poſſint, in quibus propoſitio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodetur.

Refer huc 2. huius paginæ figuram.

IAM verò ſi perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probãdum eſt minus eſſe duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita vt triangulum propoſitum ſit rectangulum, quærendi ſunt tres numeri pro lateribus, ex iis, quæ in ſcholio propoſit. 47. lib. 1. ſcripſimus. Vt in figura regulæ 6. ſi in triangulo A B D, minimum latus B D, ponatur 5. erit A D, 12. & A B, 13. Vbi cernis quadratum lateris A D, acuto angulo B, oppoſiti, nempe 144. vnà cum eo, quod fit bis ex B D, in B D, hoc eſt, cum 25. 25. efficere 194. quantum videlicet conficiunt duo quadrata ſimul ex A B, B D, nimirum 169. 25. Eadem ratione, ſi minimum latus B D, ſtatuatur partium 6. erit A D, 8. & A B, 10. Vbi etiam vides, quadratum lateris A D, acuto angulo B, ſubtenſi, nimirum 64. vnà cum eo, quod fit ex B D, in B D, bis, hoc eſt, cum 36. 36. conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum A B, B D, nimirum 100. 36. Ita quoque cernis quadratum numerum lateris B D, acuto angulo A, oppoſiti, hoc eſt, 36. vnà cum eo, quod fit ex A D, in A D, bis, id eſt, cum 64. 64. efficere 164. quantum ſcilicet conficiunt duo numeri quadrati ſimul laterum A B, A D, nimirum 100. & 64. Denique ſi in alio triangulo A C D, minimum latus C D, ponas 9. reperies ex iis, quæ ad propoſit. 47. lib. 1. ſcripſimus, A D, 40. & A C, 41. Vbi manifeſtum eſt, quadratum numerum lateris A D, angulo acuto oppoſiti, nimirum 1600. vnà cum numero, qui fit ex C D, in C D, bis; id eſt, cum 81. 81. facere 1762. qui numerus æqualis eſt quadratis numeris duorũ laterũ A C, C D, hoc eſt, duobus numeris 1681. 81. Hi enim conficiunt quoq; ſummam 1762. Quòd ſi minimũ latus C D, facias 7. comperies A D, 24. & A C, 25. in quibus numeris idem experieris. Nam quadratus numerus lateris C D, angulo acuto A, ſubtenſi, id eſt, 49. vnà cum numero, qui bis producitur

ducitur ex A D, in A D, hoc eſt, cum 576. 576. facit 1201. quantum ſcilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum A C, A D, hoc eſt, 625. 576.



AT ſi perpendicularis cadat extra triangulum, ita vt triangulum ſit obtuſangulum, quærendum erit ſegmentum exterius, vnà cum lateribus, vt in tribus regulis ſcholij præcedentis propoſitionis docuimus. Segmentum namque exterius cum latere producto dabit totum ſegmentum inter acutum angulum aſſumptum, & perpendicularem. Vt in figura regulæ 3. ſcholij antecedentis propoſitionis, erit ſegmentum totum C D, inter angulum acutum C, & perpendicularem B D, cadentem extra triangulum, 37. Vbi perſpicuum eſt, quadratum lateris A B, angulo C, acuto oppoſiti, hoc eſt, 256. vnà cum rectangulo ſub A C, C D, comprehenſo bis, id eſt, cum 1184. 1184. componere numerum 26. 24. qui æqualis eſt duobus quadratis ſimul laterum B C, A C, nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600. 1024. &c.

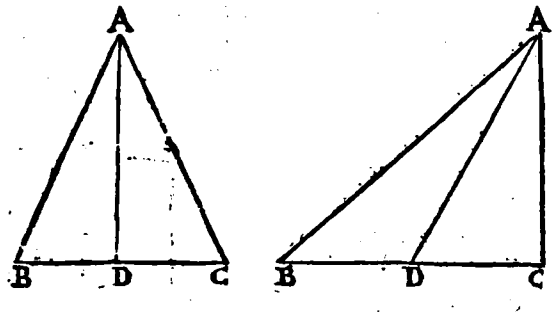
NEQVE verò alienum putaui hoc loco ex Pappo Alexandrino ſequens etiam theorema demonſtrare.

SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppoſitum bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium ſimul dupla duorum quadratorum ſimul ſumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum verò ex dimidiato latere deſcribitur.

IN triangulo A B C, recta A D, ſecet latus B C, bifariam in D: Dico quadrata ex A B, A C; dupla eſſe quadratorum ex A D, B D. Demittatur enim ex A, ad B C, perpendicularis, quæ primùm recta A D, congruat, ac proinde triangulum A B C, æquilaterum ſit, vel Iſoſceles, vt ad propoſit. 26. lib. 1. demonſtrauimus. [a] Quoniam igitur tam quadratum ex A B, æquale eſt quadratis ex A D, D B, quàm quadratum ex A C, quadratis ex A D, D C; erunt duo quadrata ex A B, A C, æqualia quadrato ex A D, bis ſumpto, vnà cũ quadratis ex D B, D C. Cùm ergo quadrata ex D B, D C, æqualia ſint, ſi auferantur duo quadrata ex A D, D C, ablatũ erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadrati ex A D, bis ſumpti, & quadratorum ex D B, D C. Quare duo quadrata ex A B, A C, dupla ſunt duorum quadratorum ex A D, D B: quod eſt propoſitum. Quod clariùs ita oſtendetur. [b] Quoniam quadratum ex A B, duobus quadratis ex A D, D B, æquale eſt: Sunt autem duo quadrata ex A B, A C, quadrati ex A B, dupla, ob æqualitatem linearum A B, A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod demonſtrandum erat.

[a] 47. primi.

[b] 47. primi.



CONGRVAT deinde perpendicularis A C, lateri A C. Et quia quadratum ex B C, quadruplum eſt tam quadrati ex B D, quàm quadrati ex D C, vt in ſcholio propoſitionis 4. huius libri oſtendimus; erit idem quadratum ex B C, duplum duorum quadratorum ex D B, D C. Sunt autem duo quadrata ex A C, C D, bis ſumpta, dupla quoque quadrati ex A D; quòd [c] quadrata ex A C, C D, ſemel ſumpta æqualia ſint quadrati ex A D. Igitur quadratum ex B C, vnà cum quadratis ex A C, C D, bis ſumptis, duplum erit quadratorum ex D B, D C, A D. Cùm ergo & quadratum ex C D, bis ſumptum, duplum ſit quadrati ex C D; [d] erit reliquum quadratum ex B C, vnà cum quadrato ex A C, bis ſumpto, duplum quoque reliquorum quadratorum ex D B, A D. Sunt autem [e] quadrata ex B C, A C, æqualia quadrato ex A B. Igitur quadrata ex A B, A C, (quæ æqualia ſunt quadrato ex B C, vnà cum quadrato ex A C, bis ſumpto) dupla quoq; ſunt quadratorum ex A D, D B. Quod eſt propoſitum.

[c] 47. primi.

[d] 20. pron.

[e] 47. primi.

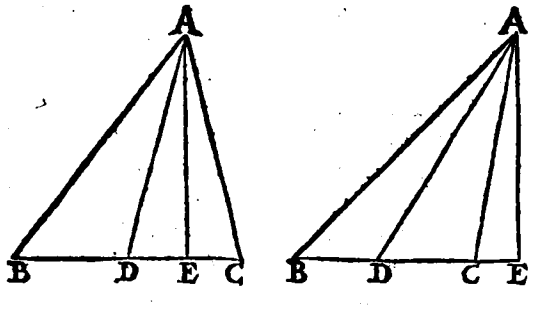
TERTIO cadat perpendicularis A E, intra triangulum inter puncta D, C. Quia igitur [f] quadrata ex B E, E C, dupla ſunt quadratorum ex B D, D E: Item quadrata ex A E, D E, bis ſumpta dupla ſunt quadrati ex A D; quòd [g] quadrata ex A E, E D, ſemel ſumpta quadrato ex A D, æqualia ſint; erunt quadrata ex B E, E C, vnà cum quadratis ex A E, D E, bis ſumptis, dupla quoque quadratorum ex B D, D E, A D. Cùm ergo & quadratum ex D E, bis ſumptum, duplum ſit quadrati ex D E; [h] erunt reliqua quadrata ex B E, E C, vnà cum quadrato ex A E, bis ſumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex D B, A D. Quare cùm quadratis ex B E, A E, [i] æquale ſit quadratum ex A B; & quadratis ex E C, A E, quadratum ex A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod eſt propoſitum.

[f] 9. ſecũdi.

[g] 47. primi.

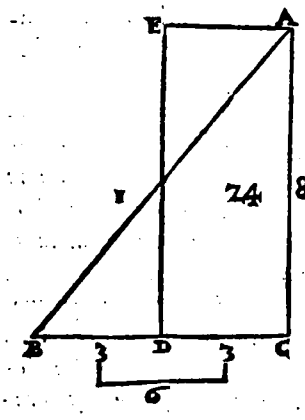
[h] 20. pron.

[i] 47. primi.

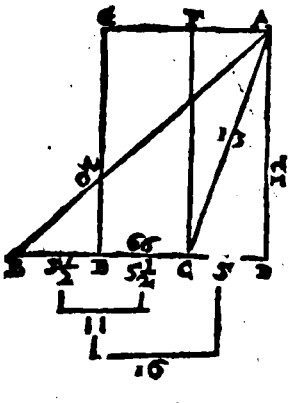


a 10. secundi. POSTREMO cadat perpendicularis A E, in latus B C, productum. Quoniam igitur[a] quadrata ex B E, C E, dupla sunt quadratorum ex B D, D E: Item quadrata ex A E, D E, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex
b 47. primi. A D, quòd[b] quadrata ex A E, D E, semel sumpta, æqualia sint quadrato ex A D; erunt quadrata ex B E, C E, vnà cum quadratis ex A E, D E, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex B D, D E, A D. Cùm ergo & quae. 20. pron. dratum ex D E, bis sumptum, duplum sit quadrati ex D E; [c] erũt reliqua quadrata ex B E, C E, vnà cum qua-
d 47. primi. drato ex A E, bis sumpto, dupla quoq; reliquorum quadratorum ex B D, A D. Quare cũ quadratis ex B E, A E,[d] æquale sit quadratum ex A B; & quadratis ex C E, A E, quadratum ex A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod erat ostendendum.

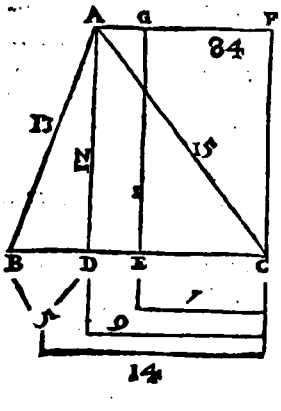
NON te moueat autem, quòd ad huius theorematis demonstrationem adhibuerimus pronunciatum 20. quod vniuersaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 5. quoniam in dupla proportione facilè concedi potest sine demonstratione, vt in expositione eius principij diximus: Vel propositio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonstrari potest: Vel certè theorema ipsum post librum 5. demonstrari; ita vt circulus in demonstrando nulla ratione committatur, etiamsi principium illud demonstretur lib. 5. quia propositio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.



EX his autem, quæ proximis duobus theorematibus, & propositione 47. lib. 1. demonstrata sunt, aream cuiusque trianguli latera habentis nota inueniemus, vt rectè hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonstrat, hac ferè ratione. Sit primò triangulum rectangulum A B C, cuius latera nota sint, nempe A B, 10. palmorum; A C, 8. B C. 6. Diuiso latere B C, bifariam in D, vt sint C D, B D, 3. palmorum, perficiatur rectangulum A C D E, quod æquale est triangulo A B C, vt in scholio propos. 41. lib. 1. ostendimus. Quia verò ex ductu C D, trium palmorum in C A, 8. palmorũ producitur area rectanguli C E, 24. palmorum quadratorum, vt ad initium huius libri docuimus; Totidem palmos quadratos cõtinebit triangulum A B C, rectangulo C E, æquale. Quod est propositum.



SIT deinde triangulum obtusangulum A B C, cuius latera sint cognita A B, 20 palmorum; A C, 13. B C. 11. Primùm igitur inuenienda est quantitas perpendicularis linea A D ex A, in latus B C. protractum demissa. hoc modo. Quoniam quadratum lateris A B,[e] maius est, quàm quadrata late-
e 12. secundi. rum A C, B C, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D; si quadrata laterum A C, B C, nempe 169. 121. quæ efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris A B, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, cuius numeri dimidium 5. dabit rectangulum sub B C, C D. Si igitur 55. rectangulum sub B C, C D, diuidatur per 11. latus notum B C, exibit reliquum latus C D, 5. palmorum, vt Ioan. Regiomontanus demonstrat propos. 7. lib. 1. de triangulis, & à nobis demonstratũ est in lib. de mensurationibus omnium quantitatum.
f 47. primi. Quia verò quadrata laterum A D, C D,[f] æqualia sunt quadrato lateris A C si quadratum 25. palmorum, nempe lateris C D, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris A C, remanebũt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare latus A D, erit 12. palmorum, cùm radix quadrati huius numeri 144. sit 12. Iam verò diuiso latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B D, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A G, quæ per A, ipsi B D parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, si
g 34 primi. E C, palmorum quinque cum dimidio, ducatur in C F, 12. palmorum, (Est enim C F, ipsi A D, æqualis,) exurget area rectanguli C G, 66. palmorum: quod cùm æquale sit triangulo A B C, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum C G, & triangulum A B C, in eisdem parallelis, &c.) Erit quoq; area trianguli A B C, palmorum quadratorum 66. quod est propositum.



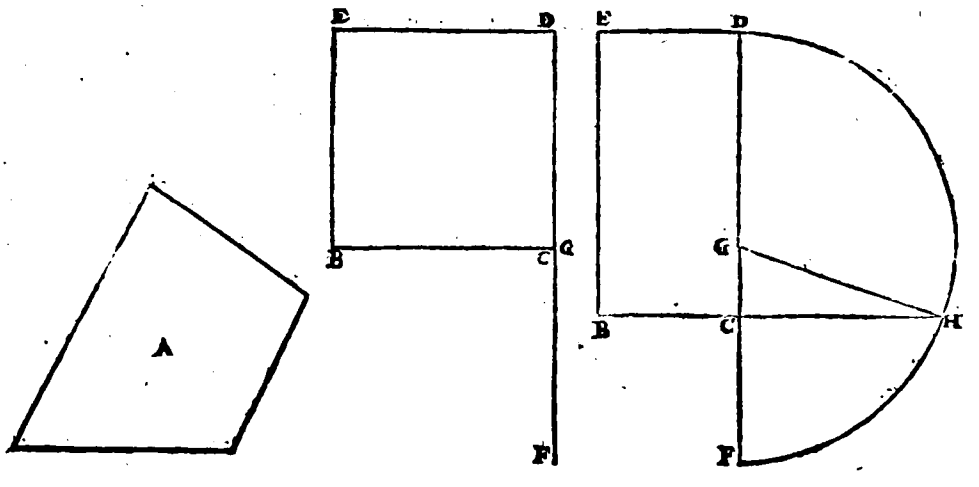
SIT postremò triangulum acutangulum A B C, latera habens nota; A B, 13. palmorum; A C, 15. B C, 14. Primùm igitur hic quoq; reperienda est quantitas perpendicularis A D, ex A, ad B C, demissa, hac ratione. Quoniam quadratum lateris A B,[h] minus est, quàm quadrata laterum A C, B C, rectangulo com
h 13. secundi. prehenso bis sub B C, C D; si quadratum lateris A B, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum A C, B C, hoc est, ex 225. 196. quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo comprehẽso bis sub B C, C D, cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum sub B C, C D. Si igitur 126. rectangulum sub B C, C D, diuidatur per B C, latus notum, vt per 14; exibit reliquum eius latus C D, palmorum 9. vt constat ex Ioan. Regiomontano lib. 1. de triangulis propos. 17. & à nobis demonstratum est in libro de mensurationibus omnium quantitatum.
i 47. primi. Quoniam antè quadrata ex A D, C D,[i] æqualia sunt quadrato ex A C. si quadratum 81. palmorum, nempe lateris C D, 9. palmorum nuper inuenti, auferatur

tur ex 225. quadrato lateris A C, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare cùm radix quadrata huius numeri 144 sit 12. erit latus A D, 12. palmorum. Iam verò diuiso latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B C, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A F, quæ per A, ipsi B C, parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, si C E, 7. palmorum ducatur in E G, 12. palmorum, (est enim E G, recta ipsi A D, æqualis) exurget area rectanguli E F, palmorum 84. Quod cùm triangulo A B C, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum E F, & triangulum A B C, in eisdem parallelis, &c.) erit quoq; area trianguli A B C, 84. palmorum. Quod est propositum.* a 34. primi.

IT A QVE in vniuersum area cuiuscunque trianguli producitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ à vertice ad basim demittitur, vt in exemplis datis est manifestum. Sed plura hac de re in libro de mensurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo iuuante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum vno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum vno latere, reliqui anguli, & latera cognoscantur, demonstrauimus in nostris triangulis rectilineis.

PROBL. 2. PROPOS. 14. 14.

DATO rectilineo æquale quadratum constituere.



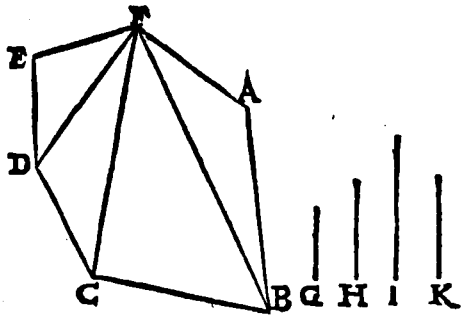
SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. [a] Constituatur parallelogrammum B C D E, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, vt D C, producatur ad F, sitque C F, recta æqualis rectæ B C. Diuidatur quoque D F, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta B C, (cùm æqualis ponatur rectæ C F,) rectæ C D, æqualis. Quare rectangulum B D, erit quadratum, cùm latera D E, E B, [b] æqualia sint oppositis lateribus B C, C D; atque adeò constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si verò punctum G, non cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo G D, vel G F, semicirculus F H D, producaturque B C, donec circunferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, esse æquale rectilineo A. Ducta enim recta G H; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehensum sub D C, C F; hoc est, rectangulum B D, vnà cum quadrato rectæ G C, [c] æquale quadrato rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ G H; cùm rectæ G F, G H, sint æquales: At quadratum rectæ G H, [d] æquale est quadratis rectarum G C, C H. Igitur rectangulum B D, vnà cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ C H, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.

[a] 45. primi. [b] 34. primi. [c] 5. secundi. [d] 47. primi.

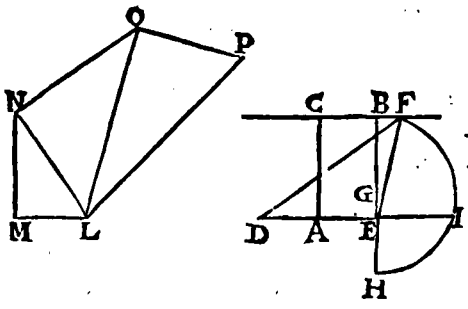
SCHOLIVM.

VERVM quia laboriosum est, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum construere æquale, quod sæpius super datam rectam constituendum sit, ex propositione 44. libri 1. rectangulum æquale triangulo, facilius fortasse describemus quadratum dato rectilineo æquale, si datam figuram rectilineam in triangula resoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc est, latus quadrati, quod cuiusque triangulo æquale sit, inuestigemus: quod factu facillimum est, vt mox ostendemus. Nam si per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod sit omnium inuentorum laterum quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.

VT si datum sit rectilineum A B C D E F, resoluemus illud in triangula A B F, F B C, C F D, D E F, inueniemusq; latera G, H, I, K, quorum quadrata sint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum constituemus M, & lineas L M, M N; lateribus G, H, æquales. Ducta autem recta N L, erigemus ad eam perpendicularem



NO, lateri I, æqualem. Similiter ducta recta OL, excitabimus illi perpendicularem OP, lateri K, æqualem, iungemusq; rectam PL. Atque hoc modo progrediemur, donec vltimo lateri ſumpta ſit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis OP, vltimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ PL, poſtremo loco ductæ æquale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus, atq; adeò omnibus triangulis ABF, FBC, CFD, DEF, hoc eſt, datæ figuræ rectilineæ ABCDEF.

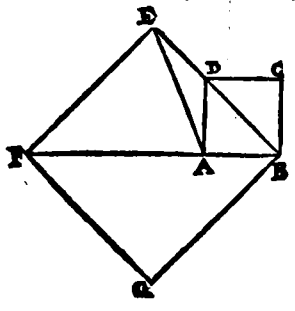


PRAXIS autem, qua cuiuis triangulo quadratum æquale inueniatur, facilis eſt. Sit enim inueniendum quadratum æquale quarto triangulo DEF, datæ rectilineæ figuræ. Diuidatur quodcunque latus, nempe DE, bifariam in A, producaturq; quantum libet. Ducta deinde per angulum oppoſitum F, lateri DE, parallela FB, ducatur per E, ad DE, perpendicularis HEB, ſecans FB, in B, ſitq; EH, ipſi AE, dimidio lateris DE, æqualis. Poſtremò diuiſa tota linea, BH, bifariam in G, deſcribatur ex G, ad interuallum GH, vel GB, arcus ſecans latus DE, productum in I. Dico quadratum lateris EI, æquale eſſe triangulo DEF. Si namque compleatur rectangulum AEC, & ſemicirculus BH, ducaturq; recta GI, oſtendemus, vt in hac propoſ. 14. quadratum ex EI, rectangulo AB, æquale eſſe. Cùm ergo rectangulum AB, triangulo DEF, ſit æquale, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. quòd baſis DE, ſit dupla baſis AE, conſtat propoſitum.

QVONIAM verò ſecundo hoc libro Euclides multa de rectangulis parallelogrammis, atque quadratis diſputauit; rectè inſeri hic poterit ſequens problema de quadrato non iniucundum, ad hunc modum.

DATO exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem; Inuenire latus ipſius quadrati.

EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiuſdem recta AB; inueniendum q; ſit latus illius quadrati. Ex recta AB, deſcribatur quadratum AC, cuius diameter ducta BD, producatur ad E, vt ſit DE, recta rectæ AD, æqualis. Dico rectam EB, eſſe latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipſum latus BE, exceſſu dato AB. Ducatur enim EF, perpendicularis ad BE, quæ rectam BA, productam ſecet in F. Quoniam igitur in triangulo BEF, angulus FEB, rectus eſt, & EBF, ſemirectus, ex corollario 2. propoſitionis 4. huius lib. [a] *erit & BFE, ſemirectus.* [b] *Quare rectæ BE, FE, æquales ſunt. Si igitur ex F, ducatur FG, parallela ipſi BE; & ex B, recta BG, parallela ipſi EF, occurrens priori in G; conſtitutum erit quadratum rectæ BE. Quòd ſi ducatur recta AE,* [c] *erunt anguli AED, EAD, æqualibus lineis DE, DA, oppoſiti æquales. Quare ſi demantur ex rectis angulis DEF, DAF, remanebũt anguli AEF, EAF, æquales;* [d] *ideoq; rectæ EF, AF, æquales erunt. Quoniam verò diameter BF, rectam AF, ſuperat data recta AB; ſuperabit eadem diameter BF, latus quadrati EF, eadem recta AB, quod eſt propoſitum.*



a 32. primi.
b 6. primi.
c 5. primi.
d 6. primi.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

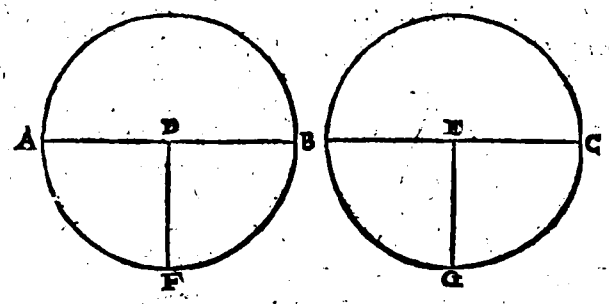
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

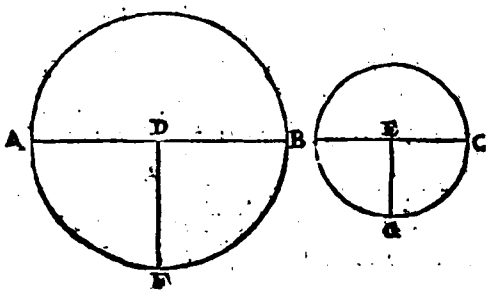
DEFINITIONES.

I.

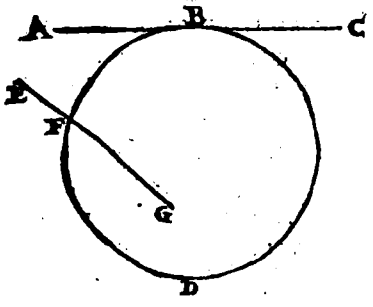
AEQVALES circuli sunt, quorum diametri sunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

QVONIAM Euclides hoc 3. libro varias circuli proprietates demonstrat, idcirco explicat priùs terminos quosdam, quorum frequens in eo futurus est vsus. Primùm itaque docet, eos circulos esse æquales, quorum diametri, vel semidiametri æquales sunt. Cùm enim circulus describatur ex circumuolutione semidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, vt libro 1. diximus, perspicuum est, eos circulos esse æquales, quorum semidiametri, seu rectæ ex centris ductæ, sunt æquales: vel etiam quorum tota diametri æquales sunt. Vt si diametri A B, B C, vel rectæ D F, E G, è centris D, & E, ductæ sint æquales, æquales erunt circuli A F B, & B G C. Sic etiam è contrario, si circuli sint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ, æquales. Ex his liquet circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales, inæquales esse: atq; adeò illum, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem. Et contrà, circulorum inæqualium diametros, semidiametrósve inæquales esse, maioris quidem maiorem, & minoris minorem.





II.

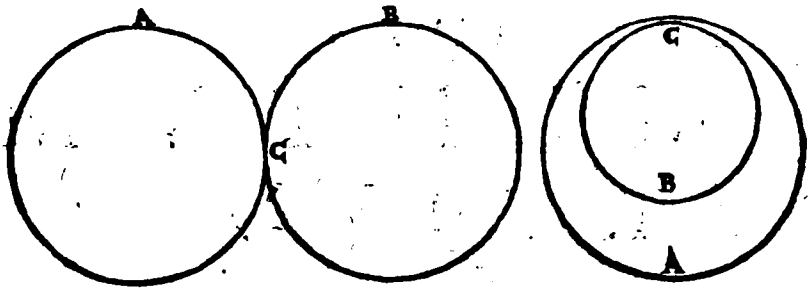


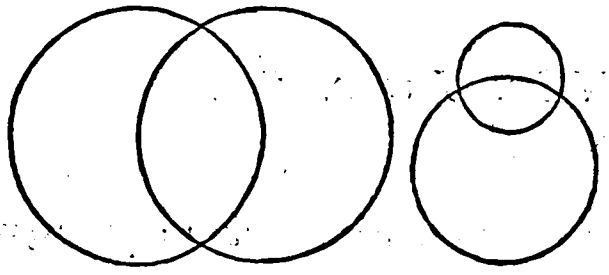
RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cùm circulum tangat, si producatur, circulum non secat.

VT recta A B, si ita circulum B F D, tangat in B, vt producta ad C, nullatione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum, dicetur tangere circulum. At verò recta E F, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, secet circulum, cadat q; intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.

III.

CIRCVLI sese mutuò tangere dicuntur, qui sese mutuò tangentes, sese mutuò non secant.





EODEM modo duo circuli AC, BC, ſe mutuò dicũtur tangere in C, ſi ita ſeſe cõtingant in C, vt neuter alterum ſecet. Eſt autem hic contactus circulorũ duplex. Aut enim exterius ſeſe circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum eſt poſitus: aut interius, quando vnus intra alterum conſtituitur. Quòd ſi duo circuli ita ſe mutuò tangant, vt vnus alterum quoque ſecet, dicentur circuli illi ſe mutuò ſecare, & non tangere.

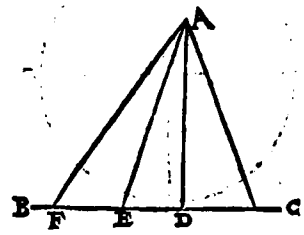
IV.

IN circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, cũ perpendiculares, quæ à centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. Longius autẽ abeſſe illa dicitur, in quã maior perpendicularis cadit.

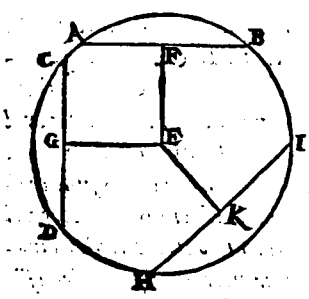
QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, breuiſſima eſt perpendicularis, & ſemper eadem: aliæ verò infinitis modis variari poſſunt; rectè diſtantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt diſtantia puncti A, à recta B C, dicitur eſſe perpendicularis A D, non autem A E, vel A F, vel alia quauis, quæ nõ perpendicularis eſt; quia A D, omnibus eſt breuior, ex corollario propoſitionis 19. libri 1. Immò non ſolùm A E, A F, maiores ſunt, quàm A D, ſed etiam ipſæ inter ſe inæquales ſunt. Eſt enim A F, [a] *maior quàm A E, cùm angulus A E F, ſit obtuſus, & A F E, acutus, & ſic de aliis lineis non perpendicularibus. Quòd enim A F E, acutus ſit, conſtat ex eo, quòd in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D,* [b] *minores ſunt duobus rectis. Hinc enim fit, cùm A D F, rectus ſit, angulum A F D, recto eſſe minorẽ. Eadem ratione angulus A E D, oſtendetur acutus, propterea quòd in triangulo A D E,* [c] *duo anguli A D E, A E D, minores ſunt duobus rectis, & A D E, rectus eſt. ac proinde, cùm ambo A E D, A E F,* [d] *æquales ſint duobus rectis, erit A E F, obtuſus. Hinc factum eſt, vt Euclides æqualem diſtantiam rectarum in circulo ab ipſius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem diſtantiam per inæquales. Vt duæ rectæ A B, C D, in circulo A B C D, æqualiter dicẽtur diſtare à centro E, ſi perpẽdiculares E F, E G, æquales fuerint. At linea C D, longiùs abeſſe dicetur à centro E, quàm linea H I, ſi perpendicularis E G, maior fuerit perpendiculari E K.*

a 19. primi.

b 17. primi.

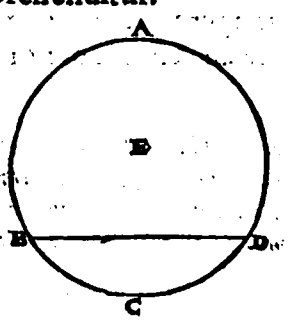


c 17. primi.
d 13. primi.



V.

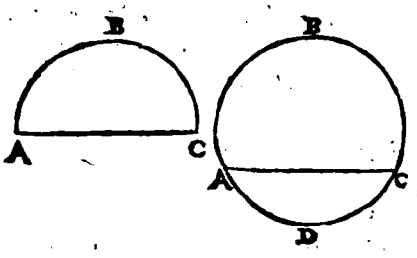
SEGMENTVM circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



VT ſi ducatur in circulo A B C D, recta B D, vtcunque, dicetur tam figura B A D, contenta circunferentia B A D, & recta B D; quàm figura B C D, comprehenſa recta B D, & circumferentia B C D, circuli ſegmentum. Ex his colligitur triplex circuli ſegmentum, Semicirculus, quando recta B D, per centrum E, incedit; Segmentum ſemicirculo maius, quando recta B D, non tranſit per centrum, in ipſo tamen centrum exiſtit, quale eſt ſegmentum B A D; Et Segmentum ſemicirculo minus, extra quod centrum circuli conſtituitur, cuiuſmodi eſt ſegmentum B C D. Id quod ad definitionem 18. lib. 1. demonſtrauimus. Vocatur à pleriſque Geometris recta B D, chorda, & circunferentia B A D, vel B C D, arcus.

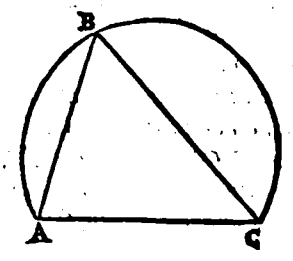
VI.

SEGMENTI autem angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



DEFINIT iam Euclides tria genera angulorũ, q̃ in circulis conſiderẽtur. Primo loco angulum ſegmenti, dicens, angulum mixtum B A C, vel B C A, contentũ ſub recta linea A C, & circunferentia A B C, appellari angulum ſegmenti. Quòd ſi ſegmẽtum circuli fuerit ſemicirculus, dicetur angulus ſemicirculi. Si verò ſegmentum maius ſemicirculo extiterit, vocabitur angulus ſegmenti maioris: Si denique ſegmentum minus fuerit ſemicirculo, angulus ſegmenti minoris nuncupabitur.

VII.

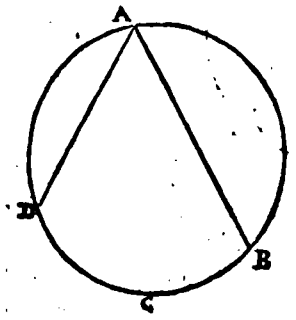


IN ſegmento aũt angulus eſt, cũ in ſegmenti peripheria ſumptũ fuerit quodpiam punctũ, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ ſegmẽti baſis eſt, adiunctę fuerint rectæ lineæ: Is, inquã, angulus ab adiunctis illis lineis cõprehenſus.

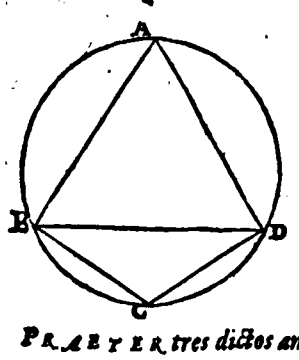
SIT ſegmentum circuli quodcunque A B C, cuius baſis recta A C. Ex ſuſcepto quolibet puncto B, in circunferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema baſis, rectæ lineæ B A, B C. Angulus igitur rectilineus A B C, dicitur exiſtere in ſegmento A B C.

IIX.

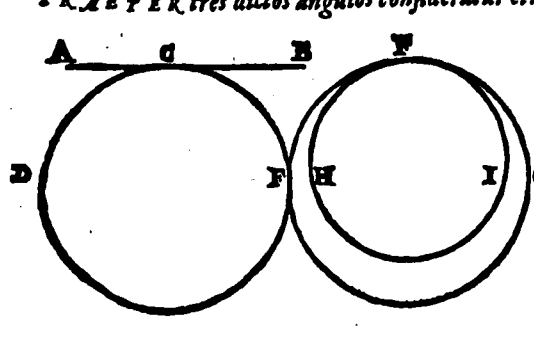
CVM verò comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam aſſumunt peripheriam, illi angulus inſiſtere dicitur.



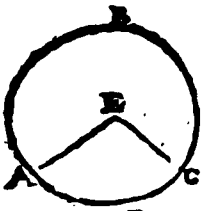
EX puncto A, quolibet ſuſcepto in circunferẽtia circuli A B C D, ducãtur rectæ duæ lineæ A B, A D, ad duo extrema B, & D, circũferẽtiæ B C D, cuiuſq; quã quidẽ duæ rectæ A B, A D, aſſumunt. Angulus itaq; rectilineus B A D, inſiſtere dicitur circunferentiæ B C D. Perſpicuũ autẽ eſt, hunc angulum à præcedenti non differre, niſi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxta præcedentẽ quidẽ defin. dicitur eſſe in ſegmento B A D, ſi recta B D, baſis ducatur; ex hac verò inſiſtere circunferẽtiæ B C D. Non tamẽ confundendus eſt angulus in ſegmẽto aliquo, cũ angulo, q̃ circunferentia inſiſtit, quãuis vnus et idem ſit; ad diuerſa ſiquidẽ referuntur. Angulus enim in ſegmento, ſegmentũ, in quo exiſtit, angulus autẽ inſiſtens circunferentiæ, circunferentiã, quæ baſis eſt ipſius anguli, reſpicit. Vnde ſi ſumatur ſegmentũ aliquod circuli B C D, in circulo A B C D, nõ erit idẽ angulus in hoc ſegmẽto exiſtens, & eius circunferentia inſiſtens. Angulus enim in eo exiſtens, erit B C D; at eius circunferẽtia B C D, inſiſtẽs, erit angulus B A D, q̃ multũ ab eo differt. Quã in re mirũ in modũ hallucinati ſunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nõnulli. Quòd aũt angulus in ſegmẽto, & angulus circunferẽtiæ cuipiã inſiſtẽs, ad diuerſos arcus referãtur, luce clarius patebit ex vlt. propoſ. lib. 6. quæ ſolùm conuenire poteſt circunferẽtiis circulorũ, quibus anguli inſiſtũt, non aũt in quibus exiſtunt, vt eo in loco oſtendemus. Idem quoq; facilè cõſtat ex verbo Græco ὑφίστανται, quod aſcendiſſe ſignificat. Aſcendit. n. angulus D A B, ſupra circunferentiã B C D.



PRÆTER tres dictos angulos conſideratur etiã à Geometris angulus contingentiæ, q̃ continetur linea recta tangente circulũ, & circunferentia circuli; vel certè duabus circunferẽtiis ſe mutuò tangentibus, ſiue hoc exterius fiat, ſiue interius. Exemplum. Si recta A B, tangat circulum C D E, in C; angulus mixtus A C D, vel B C E, dicetur angulus contingentiæ, ſiue contactus: Rurſus, ſi circulus C E D, tangat circulum E F G, exterius in E; itẽ circulus H F I, circulũ E F G, interius in F; appellabitur tam angulus curuilineus C E F, q̃ E F H, vel G F I, angulus contactus, ſeu contingentiæ. Sunt itaq; vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidẽ mixtus, reliqui verò duo, curuilinei.



IX.

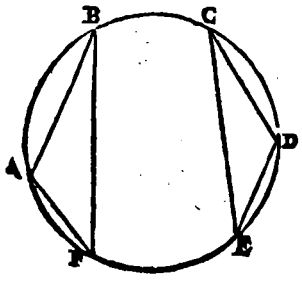


SECTOR autem circuli eſt, cũ ad ipſius circuli centrum conſtitutus fuerit angulus, comprehenſa nimirũ figura, & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis aſſumpta.

SI in circulo A B C D, cuius centrũ E, rectæ A E, C E, conſtituant angulum A E C, ad centrum E; nominabitur figura A E C D, contenta rectis A E, E C, & circunferentia A D C, quam prædictæ lineæ aſſumunt, Sector circuli. Ex hoc autẽ perſpicuè etiam

colligitur, angulum, qui defin. 8. explicatur, referri ad circunferẽtiam, qua ipſius baſis eſt, non autẽ ad eam, in qua exiſtit, vt multi interpretes exiſtimárunt. Nam ſicut in hac defin. Euclides intelligit circunferentiam A D C, quæ baſis eſt anguli ad centrũ conſtituti, quãdo mentione facit peripheriæ à rectis A E, C E, aſſumptæ: Ita quoq; in illa intellexiſſe eum neceſſe eſt nomine peripheriæ, quam recta linea aſſumunt, eam, quæ baſis eſt anguli ad circunferentiam conſtituti, quandoquidem in vtraq; defin. vſus eſt eodem verbo Graco ἀνολαμβανω.

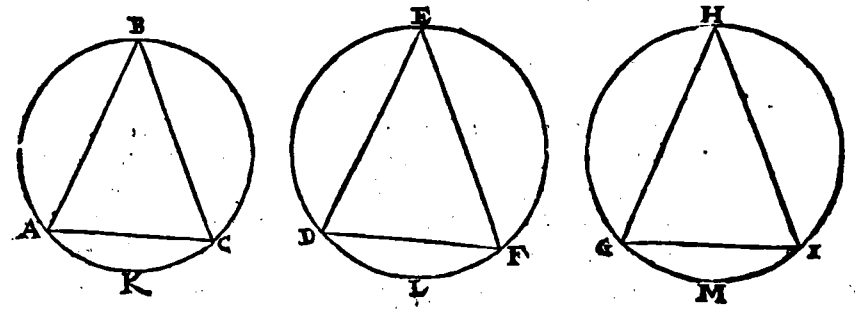
X.



SIMILIA circuli ſegmẽta ſunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter ſe ſunt æquales.

SEGMENTA videlicet A B D F, D C A E, eiuſdem circuli A B C D E F, quæ capiũt hos duos angulos A B F, D C E, æquales: vel, quod idem eſt, in quibus ijdem anguli æquales exiſtunt, iuxta 7. defin. ſimilia dicuntur, & ipſæ circunferentiæ A B D F, D C A E, ſimiles quoq;.

EODEM modo ſegmenta diuerſorũ circulorũ, tam æqualiũ, q̃ inæqualium, à Geometris dicuntur ſimilia, q̃ vel ſuſcipiunt æquales angulos, vel in quib. æquales anguli exiſtunt. Vt ſi in circulis A B G K, D E F L, G H I M, anguli A B C, D E F, G H I, fuerint æquales, dicentur ſegmenta, ſeu circunferentiæ A B C, D E F, G H I, quæ dictos angulos ſuſcipiunt, vel in quibus prædicti anguli exiſtunt, ſimiles.

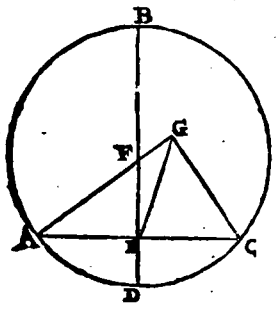


Conſiſtit autẽ hæc ſegmẽtorũ circunferentiarúmve ſimilitudo in eo, q̃ qualis pars eſt vna circunferentia totius ſuæ circunferẽtiæ, taliquoq; ſit altera circunferẽtia, quæ dicitur huic ſimilis, totius ſuæ circunferẽtiæ; ita vt qualis, & quãta pars eſt circunferẽtia A B C, totius circunferẽtiæ A B C A, talis & tanta quoq; pars ſit circunferentia D E F, totius circunferẽtiæ D E F D; Item talis, & tanta circunferentia G H I, totius circunferẽtiæ G H I G. Vel potius ſegmentorũ ſimilitudo in hoc cõſiſtit, q̃ ſegmenta, ſeu circunferẽtiæ ſimiles, ad totas circunferentias ſuas eande habeant proportionẽ. Quòd autẽ ſegmenta, quæ vel æquales ſuſcipiunt angulos, vel in quibus exiſtunt æquales anguli, ſint huiuſmodi, demonſtrabimus propoſ. vlt. lib. 6. Nunc ſatis ſit, talia ſegmenta circulorũ, vel etiam arcus, circunferentiáſve appellari ſimiles.

EADEM ratione dicũtur arcus, vel circunferẽtiæ ſimiles, quibus æquales anguli, iuxta defin. 8 inſiſtunt. Vt ſi in iiſdem circulis anguli A B C, D E F, G H I. ſint æquales, dicentur arcus circunferentiaúe A K C, D L F, G M I, quibus inſiſtunt, ſimiles. Immò ſi anguli ad centra inſiſtentes arcubus A K C, D L F, G M I, ſint æquales, erunt adhuc ipſi arcus ſimiles. Id quod à nobis in ſcholio propoſ. 22. huius lib. demonſtrabitur.

1. # PROBL. I. PROPOS. I.

DATI circuli centrum reperire.



SIT circulus datus A B C D, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunq; A C, [a] quę bifariã diuidatur in E, & per E, ad A C, perpendicularis agatur B D, vtrinq; in peripheria terminata in punctis B, D. Hac igitur bifariam ſecta in F: dico F, eſſe centrũ circuli propoſiti. In ipſa enim recta B D, aliud punctũ, præter F, non erit centrum, cũ omne aliud punctũ ipſam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuiſa fuit æqualiter. Si igitur F, nõ eſt centrũ, ſit punctum G, extra rectam B D, centrum, à quo ducantur lineæ G A, G E, G C. Quoniã ergo latera A E, E G, trianguli A E G, æqualia ſunt lateribus C E, E G, trianguli C E G; & baſis A G, baſi C G; (à centro enim ducuntur) [b] erũt anguli A E G, C E G, æquales, ideoq; recti: Erat autem & angulus A E F, rectus ex cõſtructione. Igitur recti A E F, A E G, æquales ſunt, pars & totũ. quod eſt abſurdum. Non eſt ergo punctum G, centrum; eademq; eſt ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

[a] 10. primi.

[b] 8. primi.

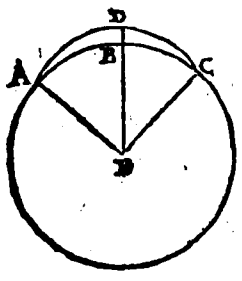
COROLLARIVM.

HINC manifeſtũ eſt, ſi in circulo recta aliqua linea aliquã rectam lineã bifariã, & ad angulos rectos ſecet, in ſecãte eſſe centrũ circuli. Nam ex eo quòd B D, recta rectã A C, bifariam ſecat in E, & ad angulos rectos, oſtenſũ fuit, punctũ eius mediũ F, neceſſariò eſſe circuli centrũ.

2. # THEOR. I. PROPOS. 2.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipſa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

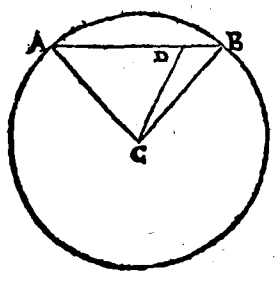
IN



IN circulo A B C, ſumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipſum ſecet. Si enim nõ cadit intra, cadat extra, qualis eſt linea A D C, recta, vt vult aduerſarius. Inuento[a] igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta aſſumpta A, & C, necnon ad quoduis punctũ D, in recta A D C, lineæ rectæ E A, E C, E D, ſecetque E D, circunferentiam in B. Quoniam ergo duo latera E A, E C, trianguli, cuius baſis ponitur recta A D C, æqualia ſunt, (è centro enim ducuntur) [b] erunt anguli E A D, E C D, æquales: Eſt autem angulus E D A, [c] angulo E C D, maior, externus interno oppoſito, cùm latus C D, in triangulo E C D, ſit productum ad A. Igitur & angulo E A D, maior erit idem angulus E D A. Quare recta E A, maiori angulo A D E, oppoſita, hoc eſt, recta E B, ſibi æqualis.[d] maior erit, quàm recta E D, minori angulo D A E, oppoſita, pars, quàm totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, ſed intra. Eodem enim modo demonſtrabitur, rectam ductam ex A, in C, nõ poſſe cadere ſuper arcum A B C, ita vt eadẽ ſit, quæ circunferentia A B C. Eſſet enim recta E A, maior q̃ recta E B. Quod etiã ex definitione rectæ lineæ patet, cũ A B C, arcus ſit linea curua, non autẽ recta. Itaque ſi in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 1. tertij.
[b] 5. primi.
[c] 16. primi.
[d] 19. primi.

SCHOLIVM.



IDEM hoc theorema demonſtrari poterit affirmatiuè hoc modo. Recta A B, coniungat duo puncta A, & B, in circunferentia circuli A B, cuius centrũ C. Dico rectã A B, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum exiſtant. Aſſumatur enim quodcunq; eius punctũ intermedium D, & ex centro educãtur rectæ C A, C B, C D. Quoniam igitur duo latera C A, C B, trianguli C A B, æqualia ſunt, [a] *erunt anguli C A B, C B A, æquales: Eſt autem angulus C D A,* [b] *angulo C B A, maior, externus interno. Igitur idem angulus C D A, angulo C A D, maior erit, & ob id latus C A,* [c] *latere C D, maius erit. Quare cùm C A, ſit ducta à centro ad circunferentiam vſq;, non perueniet recta C D, ad circunferentiam, ideoq; punctum D, intra circulum cadet. Idem oſtendetur de quolibet alio puncto aſſumpto. Tota igitur recta A B, intra circulum cadit. Quod eſt propoſitum.*

[a] 5. primi.
[b] 16. primi.
[c] 19. primi.

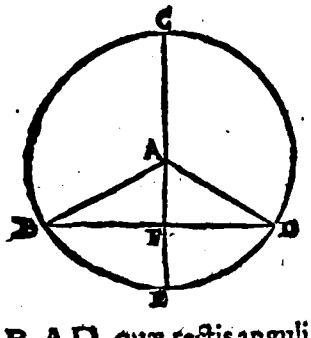
COROLLARIVM.

HINC eſt manifeſtum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non ſecet, in vno tantũ puncto ipſum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, [d] *caderet pars rectæ inter ea duo puncta poſita, intra circulum. Quare circulum ſecaret, quod eſt contra hypotheſin.*

[d] 2. tertij.

THEOR. 2. PROPOS. 3. 8.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extenſa quandam non per centrum extenſam bifariam ſecet; & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque eam ſecabit.



PER centrum A, circuli B C D, recta C E, extenſa diuidat rectam B D, non per centrum extenſam, bifariam in F. Dico rectam A F, eſſe ad angulos rectos ipſi B D. Ductis enim rectis A B, A D, erunt duo latera A F, F B, trianguli A F B, duobus A F, F D, trianguli A F D, æqualia; & baſes A B, A D, æquales. [a] Igitur anguli A F B, A F D, æquales erunt, hoc eſt, recti. Quod erat primò propoſitum.

[a] 8. primi.

SIT iam A F, ad angulos rectos ipſi B D. Dico rectã B D, bifariam ſecari in F, à recta C E. Ductis enim iterum rectis A B, A D; cũ latera A B, A D, trianguli A B D, ſint æqualia, [b] erunt anguli A B D, A D B, æquales. Quoniam igitur duo anguli A F B, A B F, trianguli A B F, æquales ſunt duobus angulis A F D, A D F, trianguli A D F; & latera A B, A D, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: [c] erunt latera F B, F D, æqualia. Quod ſecundò proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extenſa, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 5. primi.
[c] 26. primi.

FACILE quoque demonſtrari poterat ſecunda hæc pars, quæ quidem conuerſa eſt primæ partis, hac ratione. Si enim A F, perpendicularis eſt ad B D, erit tam quadratum rectæ A B, [d] æquale quadratis rectarum A F, F B, quàm quadratum rectę A D, quadratis rectarum A F, F D. Cùm igitur quadratum rectæ A B, æquale ſit quadrato rectæ A D, erunt & quadrata rectarum A F, F B, æqualia quadratis rectarum, A F, F D. Quare dempto communi quadrato rectæ A F, remanebunt quadrata rectarum F B, F D, æqualia; atque idcirco & rectæ F B, F D, æquales erunt.

[d] 47. primi.

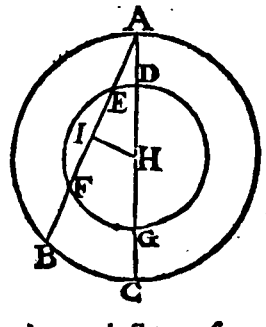
COROLLARIVM.

Ex hac demonſtratione facilè inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, ſiue æquilaterum illud ſit, ſiue Iſoſceles, lineam, quæ baſim bifariam ſecet, perpendicularem eſſe ad baſim: Et contrà, lineam, quæ ad baſim ſit perpendicularis, baſim ſecare bifariam. Nam in triangulo A B D, cuius duo latera A B, A D, æqualia ſunt, atq; adeò ex centro A, per B, D, circulus deſcribi poteſt; ex eo, quòd recta A F, ſecat baſim B D, bifariam, oſtenſum eſt, angulos ad F, eſſe rectos: Et ex eo, quòd anguli ad F, recti ſunt, demonſtratum eſt, baſim B D, à recta A F, bifariam ſecari. Sed hoc etiam demonſtrauimus ad propoſitionem 26. libri 1. & quidem vniuerſaliùs.

SCHOLIVM.

CENSEMVS quoque demonſtrandum eſſe hoc loco ſequens theorema, ad ea, quæ ſequuntur, non inutile; videlicet.

DVORVM circulis ex eodem centro deſcriptis, ſi ab aliquo puncto circunferentiæ exterioris recta ducatur interioris circunferentiam ſecans: erunt eius ſegmenta inter vtramq; circunferentiam poſita, inter ſe æqualia.



DVO circuli A B C, D E F G, habeant idem centrum H, & ex puncto A, ducatur primùm per centrum H, recta A C, ſecans circunferentiam interiorem in D, G. Dico rectas A D, C G, æquales eſſe. Nam ſi ex H A, H C, quæ [a] *æquales ſunt, demantur H D, H G, quæ eadem ratione æquales ſunt,* [b] *erunt rectæ A D, C G, æquales.*

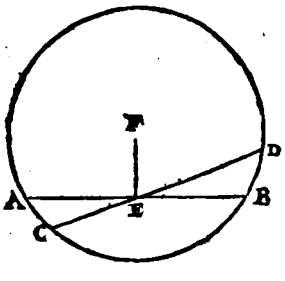
a 15. defin. b 3. pron.

DEINDE ex eodem puncto A, ducatur recta A B, nõ per centrum, ſecans interiorem circunferentiam in E, F. Dico rurſus, rectas A E, B F, eſſe æquales. [c] *Ducta enim ex centro H, ad A B, perpendiculari H I,* [d] *ſecabit hæc tam rectam A B, in circulo A B C, quàm rectam E F, in circulo D E F G, bifariam. Ablatis igitur æqualibus I E, I F, ex æqualibus I A, I B,* [e] *remanebunt A E, B F, æquales. quod eſt propoſitum.*

c 12. primi. d 3. tertij. e 3. pron.

4. THEOR. 3. PROPOS. 4.

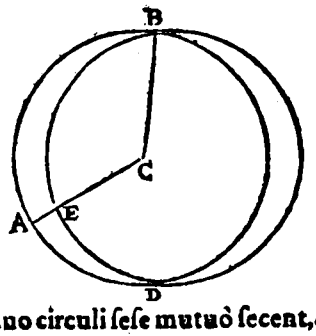
SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecent non per centrum extenſæ; ſeſe mutuò bifariam non ſecabunt.



DVAE rectæ A B, C D, ſe mutuò in E, ſecent in circulo A C B D, non per centrũ extenſæ. Dico fieri non poſſe, vt mutuò ſeſe bifariam ſecent. Si enim vna earum per centrum tranſit, certum eſt, eam bifariam non ſecari: ſolùm enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bifariam diuiditur: Si verò neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquã bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minimè ſecabitur bifariam. Diuiſa enim ſit & A B, & C D, ſi fieri poteſt, bifariam in E. [a] Inuẽto igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta F E. Quoniam ergo F E, ponitur ſecare rectã A B, bifariam in E, [b] ſecabit ipſam ad angulos rectos. Eadẽ ratione ſecabitur C D, ad angulos rectos, cùm ponatur bifariã diuidi in E. Quare rectus angulus F E D, recto angulo F E B, æqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum. Itaque ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 1. tertij. b 3. tertij.

5. THEOR. 4. PROPOS. 5.



SI duo circuli ſeſe mutuò ſecent; non erit illorum idem centrum.

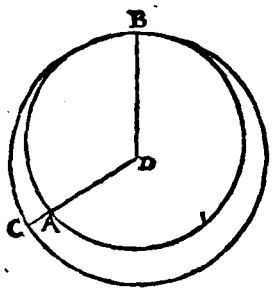
DVO circuli A B D, E B D, ſe mutuò ſecẽt in B, & D. Dico ipſos non habere idem centrum. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum vtriuſq; C, à quo duæ rectæ ducantur: C B, quidem ad ſectionẽ B: C A, verò ſecans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli E B D, erit recta E C, rectæ B C, æqualis. Rurſus quia C, centrum quoque ponitur circuli A B D, erit & recta A C, eidem rectæ B C, æqualis. Quare rectæ E C, A C, [a] æquales inter ſe erũt, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuò ſecent, &c. Quod oſtendendum erat.

a 1. pron.

6. THEOR. 5. PROPOS. 6.

SI duo circuli ſeſe mutuò interius tangant; eorum non erit idem centrum.

Duo



Duo circuli AB,BC,ſe interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim,ſi fieri poteſt,idem centrum D,à quo duæ rectæ ducãtur; DB,quidem ad tactum B; At DC,ſecans vtramque circunferentiam in A,& C. Quoniam igitur D,ponitur centrum circuli AB,erit recta AD,rectæ BD, æqualis. Rurſus quia D,ponitur centrum circuli BC, erit recta CD,eidem rectæ BD,æqualis. Quare rectæ AD,& CD,[a] inter ſe erunt æquales,pars & totum,quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuò interius tangant, &c. Quod demonſtrandum erat. [a] 1. prom.

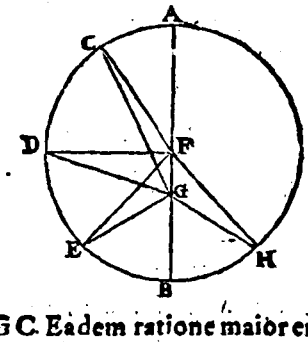
SCHOLIVM.

Evclides propoſuit theorema hoc de circulis ſeſe interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius ſeſe tangentium, cùm vnus ſit extra alium, non poſſe eſſe idem centrum, manifeſtum eſt.

THEOR. 6. PROPOS. 7. 7.

Si in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliqua; aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolùm rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ.

In diametro AB, circuli ACDEB, cuius centrum F, punctum aſſumatur quodcunque G, præter centrũ, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, GE. Dico omnium, quæ ex G, ad circunferentiam ducuntur, maximam eſſe GA, in qua eſt centrum, minimam verò reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ rectæ GA, per centrum ductæ propinquior eſt, maiorem recta GD, quæ ab eadem GA, plus diſtat; & eadem ratione GD, maiorem recta GE; atque ita de aliis lineis, ſi ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtraſque partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci poſſe tantummodò duas lineas inter ſe æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, [b] maiora ſunt latere GC; Sunt autẽ rectæ GF, FC, æquales rectis GF, FA, hoc eſt, toti rectæ GA; erit & GA, maior, quàm GC. Eadem ratione maior erit recta GA, quàm GD, & quàm GE. Quare GA, maxima eſt omnium, quæ ex G, in circulum cadunt. [b] 20. primi.



Deinde, quoniam in triangulo EFG, latus EF, [c] minus eſt duobus lateribus FG, GE; Eſt autem EF, ipſi FB, æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quàm GE. Eadem ratione minor erit GB, quàm GD, & quàm GC. Quare GB, minima eſt omnium, quę ex G, in circuli circunferentiam cadunt. [c] 20. primi.

Rvrsvs, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia ſunt duobus lateribus GF, FD, trianguli GFD; & angulus totus GFC, maior eſt angulo GFD; [d] erit baſis GC, maior baſe GD. Eadem ratione maior erit GC, quàm GE. Item maior erit GD, quàm GE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior eſt ea, quæ remotior. [d] 24 primi.

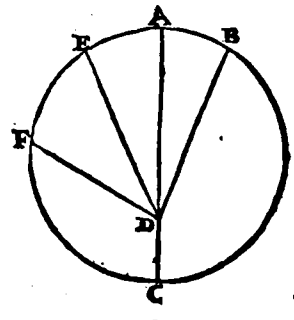
Fiat iam angulo BFE, ex altera parte æqualis angulus BFH, & ducatur recta GH. Quoniam igitur latera EF, FG, trianguli EFG, æqualia ſunt lateribus HF, FG, trianguli HFG, & anguli his lateribus contenti EFG, HFG, æquales; [e] erunt rectæ GE, GH, ex vtraque parte ipſius lineæ minimæ GB, vel maximæ GA, æquales inter ſe. Quòd autem nulla alia his duabus poſsit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex G, ducatur alia, quæ cadat ſupra punctum H, erit ea, cùm ſit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quàm GH: ſi verò cadat infra H, erit ea, cùm ſit remotior ab eadem GA, per centrum ducta, minor quàm GH, vt oſtenſum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineę æquales ad vtraſque partes minimæ GB, vel maximæ GA, cadunt. Itaque ſi in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, &c. Quod erat demonſtrandum. [e] 4 primi.

SCHOLIVM.

Quoniam autem Euclides ſolùm demonſtrauerit lineam, quæ propinquior eſt rectæ per centrum ductæ, remotiore eſſe maiorem, ſi ambæ lineæ ex eadem parte diametri AB, exiſtant: idem tamẽ verum etiam eſt, ſi ad diuerſas partes ductæ ſint. Vt ſi quis dicat, rectam GD, propinquiorem eſſe rectæ GA, quàm rectam GH; dico GD, maiorem eſſe, quàm GH. Si namque ipſi GH, ex altera parte æqualis ducatur GE, vt dictum eſt, nempe ſi fiat angulo GFH, æqualis angulus GFE, &c. cadet punctum E, inter D, & B: & GH, GE, æqualiter à GA, diſtent, ob æqualitatem angulorum GFH, GFE; & GD, ponatur minùs diſtare, quàm GH, ac proinde minus, quàm GE. Cùm [a] ergo GD, maior ſit, quàm GE, maior quoq; erit eadem GD, quàm GH. [a] 7. tertij.

HANC porrò propositionem nonnulli conuertunt hoc modo.

SI intra circulum punctum sumatur, ab eoque puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima sit, vna verò minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima verò erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter distabunt.



IN circulo A B C, punctum sumatur D, à quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circunferẽtiam, quarum omnium maxima sit D A, minima verò D C; ipsarum verò D E, D F, maior sit D E; denique D E, D B, sint æquales. Dico D A, per centrum transire, & D C, reliquam partem esse diametri, hoc est, D C, ipsi D A, esse in directum. Item D E, quæ maior ponitur, quàm D F, propinquiorem esse maximæ D A, quàm D F. Denique D E, D B, æqualiter ab eadem D A, vel D C, abesse. Primùm enim si D A, nõ transit per centrum; ducta ex D, per centrũ recta quapiam linea, [a] *erit ea omnium ex D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cùm D A, maxima ponatur. Transit ergo D A, per centrum.*

a 7. tertij.

DEINDE si D C, non est in directum ipsi D A; protracta A D, in directum, [b] *erit alia recta, quam D C, ex D, cadens, nempe pars ipsius A D, protractæ, omnium minima; Quod est absurdum; cùm D C, minima ponatur. Est ergo D C, reliqua pars diametri.*

b 7. tertij.

RVRSVS si D E, non est vicinior maximæ D A, quàm D F; aut æqualiter distabunt ab ea, aut D E, longiùs ab ea aberit: Si æqualiter vtrinque à D A, dicantur distare, [c] *ipsa erunt æquales; quod est absurdum. Ponitur enim D E, maior. Si verò æqualiter ex eadem parte à D A, distare dicantur, erunt D E, D F, vna eademq; linea; atq; adeò D E, maior non erit, quàm D F, quod est contra hypothesim. Quòd si D F, dicatur esse propinquior maximæ D A,* [d] *ipsa erit maior, quàm D E. Quod magis est absurdum.*

c 7. tertij.

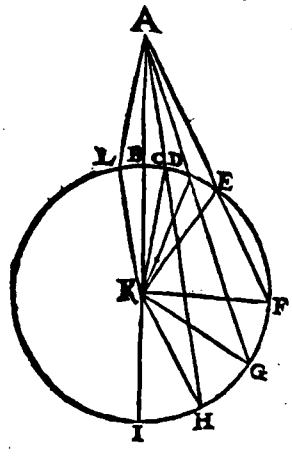
d 7. tertij.

POSTREMO si D E, D B, non æqualiter distant à D A, vel D C, [e] *erit ea, quæ magis distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim æquales D E, D B.*

e 7. tertij.

8. THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autẽ propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est; In conuexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autẽ tantùm rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.



EX puncto A, extra circulum B C D E, cuius centrum K, lineæ secantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum transeat, aliæ verò A H, A G, A F, vtcunque. Dico omnium esse maximam A I, quæ per centrũ incedit: Deinde rectam A H, quæ rectæ A I, quæ per centrũ ducitur, propinquior existit, maiorẽ rectæ A G, quæ remotior est ab eadem A I: Et eadem ratione A G, maiorem, quàm A F. E contrariò autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse: Deinde rectam A C, quæ vicinior est minimæ A B, minorẽ esse rectæ A D, remotiore; Et eadẽ ratione, ipsam A D, minorẽ, q̃ A E. Deniq; ex A, ad vtrasque partes minimæ lineæ A B, vel maximæ A I, duci posse tantummodò duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ K C, K D, K E, K F, K G, K H. Quoniam igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, [a] *maiora sunt recta A H; Sunt autem rectæ A K, K H, æquales rectis A K, K I, hoc est, toti rectæ A I; erit & A I, maior, quàm A H. Eadem ratione erit A I, maior, quàm A G, & quàm A F. Quare A I, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.*

a 20. primi.

DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli A K H; æqualia sunt lateribus A K, K G, trianguli A K G; Et angulus totus A K H, maior est angulo A K G; [b] *erit basis A H, basi A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quàm A F: Item A G, maior, quàm A F. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est linea remotiore.*

b 24. primi.

RVRSVS, quia in triangulo A C K, recta A K, [c] *minor est duabus A C, C K; si auferantur æquales B K,*

c 20. primi.

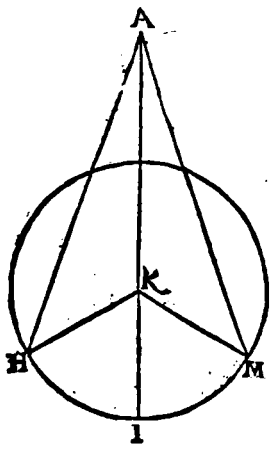
les BK, CK: remanebit adhuc AB, minor, quàm AC. Simili ratione erit AB, minor, quàm AD, & quàm AE. Quare AB, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est.

RVRSVS, cùm intra triangulum ADK, cadant duæ rectæ AC, CK, ab extremitatibus lateris AK; [a] erunt AC, CK, minores, quàm AD, DK. Sublatis igitur æqualibus CK, DK, remanebit adhuc AC, minor, quàm AD. Pari ratione erit AC, minor, quàm AE: Item AD, minor, quàm AE. Quare linea propinquior minimæ lineæ AB, minor est, quàm remotior ab eadem. [a] 21. primi.

POSTREMO fiat angulo AKC, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta AL. Quoniam igitur latera AK, KC, trianguli AKC, æqualia sunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem & anguli AKC, AKL, dictis lateribus contenti æquales; [b] erunt rectæ AC, AL, ex vtraque parte minimæ AB, vel maximæ AI, inter se æquales. Quòd autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducâtur recta cadens vltra L, erit ipsa, cùm sit remotior à minima, maior quàm AL. Quòd si cadat inter B, & L, erit ea, cùm sit minimę propinquior, minor quàm AL, vt ostensum est. Duæ igitur solùm rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectę quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum. [b] 4. primi.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantùm lineæ æquales cadent, ad vtrasque partes maximæ AI.



FIAT enim angulo AKH, æqualis angulus AKM, iungatur q; recta AM. Quia igitur latera AK, KH, æqualia sunt lateribus AK, KM; sunt autem & anguli AKH, AKM, æquales: [a] erunt bases AH, AM, æquales. Neque verò vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quacunque ex A, ducatur ad partes H; ea vel maior erit, vel minor, quàm AH, prout citra vel vltra rectam AH, ducta fuerit, vt manifestum est ex demonstratione theorematis. [a] 4. primi.

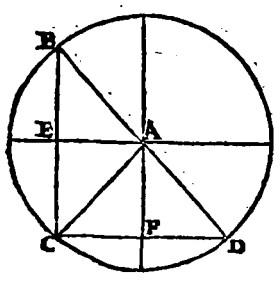
HAEC propositio vera etiam est, quando vna linearum ex A, cadentium circulum tangit. Hæc enim quia longiùs à linea per centrum ducta abest, minor erit omnibus alijs in cauam peripheriam cadentibus, qualis est recta AM, in priori figura. Nam ducta recta KM, ex centro ad contactum, erunt duo latera AK, KF, trianguli AKF, æqualia duobus lateribus AK, KM, trianguli AKM, angulus verò AKF, angulo AKM, maior. Igitur [b] basis AF, basi AM, maior erit. Eadem ratione maior erit quacunque alia in cauam peripheriam cadens, quàm recta AM. [b] 24. primi.

PARI ratione eadem linea tangens AM, maior erit omnibus aliis in conuexam peripheriam cadentibus. Nam cùm duo latera AE, EK, [c] minora sint duobus lateribus AM, MK; si auferantur æquales rectæ KE, KM, erit reliqua AE, minor quàm reliqua AM. Eademq; ratio est de cæteris. [c] 21. primi.

QVAMQVAM verò Euclides solùm demonstrauerit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, maiorem esse remotiore: Item lineam propinquiorem minimæ minorem esse remotiore, si ambæ lineæ ex eadem parte maximæ, vel minimæ existant: idem tamen verum etiam est, si ad diuersas partes ductæ sint. Quod non aliter demonstrabitur, quàm idem in scholio præcedentis propositionis de duabus lineis ad diuersas partes ductis demonstratum fuit.

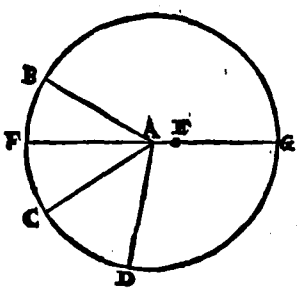
THEOR. 8. PROPOS. 9. 9.

SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quàm duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.



A puncto assumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ quàm duæ AB, AC, AD, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis BC, CD, quibus diuisis bifariam in E, & F, ducâtur ex A, rectæ AE, AF. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus AE, EC, trianguli AEC; & bases AB, AC, ponuntur etiam æquales; [a] erunt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus angulos ad F, esse rectos. Quare cùm rectæ AE, AF, diuidant rectas BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propositionis 1. huius libri. Punctum igitur A, in quo se mutuò secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret vtraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat. [a] 8. primi.

a 1. tertij.



b 7. tertij.

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, a sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G, præter centrum acceptum est punctum A, à quo in circunferentiam cadunt rectæ A D, A C; b erit recta A D, quæ propinquior est rectæ A G, per centrum E, ductæ maior, quàm recta A C, remotior ab A G. quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.

c 7. tertij.

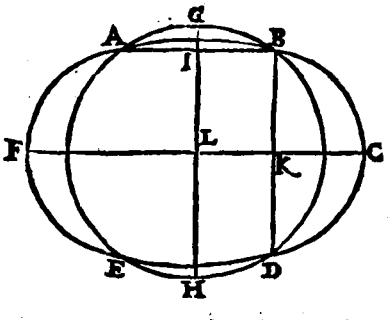
QVOD si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum vna trium æqualium datarum, vt si dicantur æquales tres A B, A F, A C, vbi E A, coincidit cum A F; c erit A F, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeò minor, quàm A B, & A C. quod est absurdum. Ponitur enim vtrique æqualis.

10. THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quàm duobus, punctis non secat.

d 10. primi.

e 11. primi.

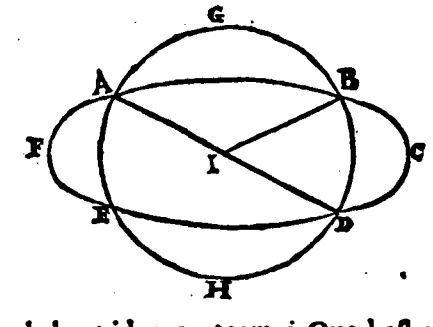


SECAT enim, si fieri potest, circulus A B C D E F, circulũ A G B D H E, in pluribus, q̃ duob⁹, punctis A, B, & D, quæ iungãtur rectis A B, B D: quibus d bifariã diuisis in I, & K, e educãtur ex I, & K, ad A B, & B D, perpẽdiculares I L, K L. Quoniã igitur rectæ I L, K L, secant rectas A B, B D, in circulo A G B D H E, bifariã, & ad angulos rectos; transibit vtraque, ex corollario propos. 1. huius lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidũt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli A B C D E F. Duo igitur circuli se mutuò secantes idem possident centrũ, f quod est absurdum.

f 5. tertij.

Circulus ergo circulum in pluribus, quã duobus, punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

g 1. tertij.



ALITER. Secent se iidem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & D. g Inuentum autem sit I, centrum circuli A G B D H E, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ I A, I B, I D, quæ per definitionem circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum A B C D E F, assumptum est punctum I, à quo cadunt in circunferentiam plures, quàm duæ, rectæ æquales, h erit I, centrum circuli A B C D E F. Erat autem idem punctum I, centrum circuli A G B D H E. Duo ergo circuli se mutuò secan-

h 9. tertij.

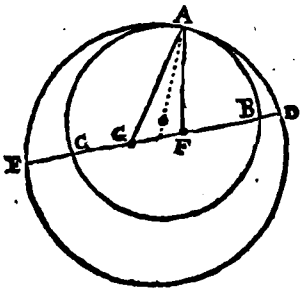
i 5. tertij.

tes habent idem centrum. i Quod est absurdum.

11. THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

k 6. tertij.



l 20. primi.

TANGAT circulus A B C, circulũ A D E, intus in A, & sit F, centrum circuli A B C, & G, centrum circuli A D E, quod necessariò ab illo diuersum erit, cùm duo circuli interius se tangentes, k non possint idem centrum habere. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet vtrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectę ducantur A F, A G. Quoniã igitur in triangulo A F G, duo latera G F, F A, l maiora sunt latere G A; Est autem G A, recta rectæ G D, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli A D E,) erunt & G F, F A, rectæ maiores recta G D. Dempta igitur communi G F, remanebit F A, maior, quàm F D. Quare cùm F A, æqualis sit ipsi F B; (quòd F, positum fuerit centrum circuli A B C,) erit & F B, maior, quàm F D, pars quàm totum, quod est absurdum.

m 20. primi.

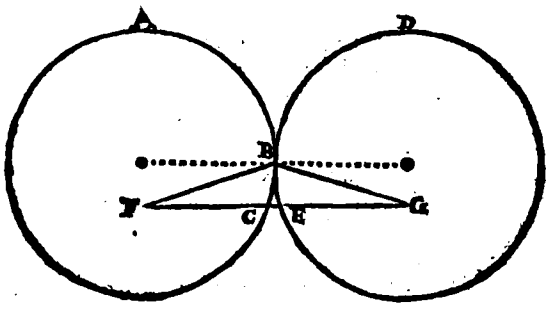
QVOD si quis velit contendere F, esse centrum circuli A D E, & G, centrum circuli A B C, instituetur argumẽtatio hac ratione. In triangulo A F G, duo latera F G, G A, m maiora sunt latere F A: Est autem recta F A, rectæ F E, æqualis. (cùm F, ponatur centrum circuli A D E.) Igitur rectæ F G, G A, maiores sunt recta F E. Dempta ergo communi F G, remanebit G A, maior, quàm G E. Quia igitur G A, æqualis est ipsi G C; (propterea quòd G, ponitur esse centrum circuli A B C,) erit quo-

que

que G C, maior, q̃ G E, pars q̃ totum, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum ſequetur, ſi centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta F G, extenſa vtrumque circulum ſecabit, ſed in contactũ A, cadet. Quare ſi duo circuli ſeſe intus contingant, &c. Quod erat demonſtrandũ.

THEOR. 11. PROPOS. 12. 11.

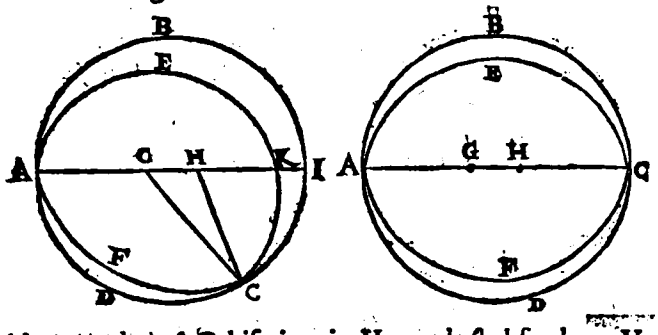
SI duo circuli ſeſe exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum tranſibit.



CIRCVLI duo A B C, D B E, tangant ſe exterius in B, & centrum circuli A B C, ſit F, circuli verò D B E, centrũ ſit G. Dico rectam extenſam per F, & G, tranſire per contactũ B. Si enim non tranſit, ſecet circunferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactũ rectæ F B, G B. Quoniam igitur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, [a] maiora ſunt latere F G: Eſt autem recta B F, rectæ F C, æqualis; (quòd F, ponatur centrum circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quòd G, ponatur centrũ circuli D B E,) erunt & rectæ F C, G E, maiores quàm recta F G, pars quàm totum, (cùm F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E,) quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe exterius contingant, &c. Quod erat demonſtrandum. [a] 20. primi

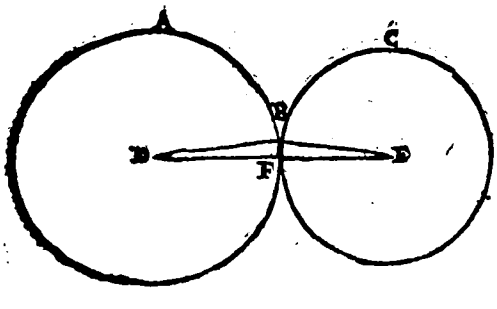
THEOR. 12. PROPOS. 13. 12.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno, ſiue intus, ſiue extra tangat.

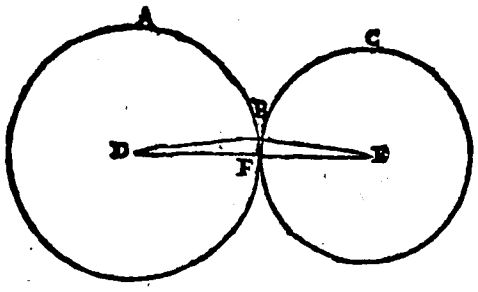


TANGANT ſeſe circuli A B C D, A E C F, intus, ſi fieri poteſt, in pluribus punctis, quá vno A, & C: Aſſumantur autem centra horum circulorum G, H, [b] quæ diuerſa erunt; per quæ recta G H, in vtramq; partem extendatur, quam neceſſe eſt [c] cadere in contactus A, & C. Itaque cùm G, ſit centrũ, & recta A G H C, diameter, diuidetur A G H C, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H. quod eſt abſurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuidi tur bifariam. Si namque G C, eſt dimidium totius A C, erit neceſſariò H C, dimidio minor, cùm ſit pars dimidij G C. [b] 6. huius [c] 11. tertij

QVOD ſi quis dicat rectam G H, extenſam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At verò ad partes H, minimè pertinere ad contactum C, ſed ſecare vtrumque circulum in I, & K, vt in ſecunda figura perſpicuũ eſt: (Dicere enim quis poſſet, in præcedenti propoſitione oſtenſum eſſe, rectam per duo centra circulorum ſeſe intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo rectè affirmare poterit, cùm demonſtratio præcedentis propoſitionis vtrique contactui conueniat. Sed quidquid dicat aliquis, oſtendemus abſurdum illud eſſe.) ducendę erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectę G C, H C. Ponatur igitur primò G, centrum circuli A B C D; & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera G H, H C, [d] maiora ſunt latere G C; Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipſi G K: (quòd H C, H K, ex centro H, ſint æquales, & G H, communis) & recta G C, rectæ G I; (quòd ſint ex G, centro) erit quoque recta G K, maior quàm G I, pars quàm totum. quod eſt abſurdum. Ponatur ſecundò G, centrum circuli A E C F; & H, centrum circuli A B C D. Quoniam igitur rectæ H G, G C, [e] maiores ſunt recta H C; Eſt autem H C, æqualis rectæ H A; (cùm vtraque ducta ſit ex centro H,) erunt quoque H G, G C, maiores recta H A. Quare dempta communi H G, erit G C, maior quàm G A. quod eſt abſurdum, cũ vtraq; ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus ſe tangent in pluribus punctis, quàm vno. [d] 20. primi [e] 20. primi



TANGANT ſe iam circuli A B, C B, exterius in pluribus punctis, quàm vno prope F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad E, centrũ circuli C B, recta D E, [f] quæ per contactum F, neceſſa- [f] 12. huius



a 20. primi.

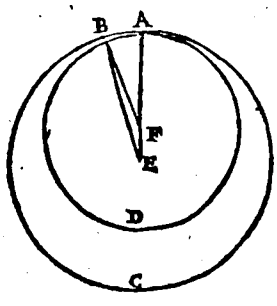
rió transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant seſe in B. Ductis igitur rectis D B, E B, erũt rectæ D B, E B, æquales rectis D F, E F, hoc eſt, ipſi D E: [a] Sunt autem & maiores. quod eſt abſurdum. Non ergo ſe tangent circuli exterius in pluribus punctis, q̃ vno.

ALITER. Si circuli A B, C B, exterius ſe tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipſa intra vnum circulorum, per ſecundam propoſitionẽ huius tertij libri, & ideò extra alium, quod eſt contra eandem propoſitionem. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

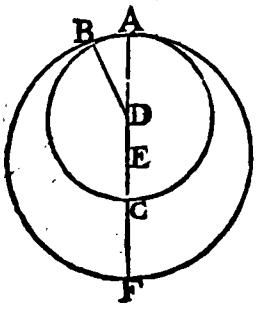
Si rectè conſideretur Euclidis demonſtratio, qua probauit, circulum à circulo intus non poſſe tangi in pluribus punctis, quàm vno, videtur ea potiſſimùm concludere, circulum non poſſe tangi à circulo in duobus, vel pluribus punctis, quæ longo interuallo à ſe diſideant, nõ autem eundem contactum plura puncta habere non poſſe; quamuis facilè hoc ipſum eodem argumento ferè demonſtrari poſſit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum nõ poſſe tangere circulum in pluribus punctis, quàm vno, oſtendemus breuiter, in vno eodemq̃ contactu nõ poſſe eſſe plura puncta, quàm vnum. Tangat enim circulus A B C, circulum A B D, prope A; & per eorum centra E, & F, [a] *quæ diuerſa ſunt, recta ducatur E F,* [b] *quæ ad contactum perueniet neceſſariò, vt ad punctum A. Dico igitur, hos circulos ſeſe duntaxat tangere in puncto A. Si enim ſe tangant in alio etiam puncto, vt in B, ductis ex B, ad centra E, & F, rectis B E, B F,* [c] *erunt rectæ E F, F B, maiores recta E B. Eſt autem recta E B, æqualis recta E A, cùm vtraque ſit ex centro E. Igitur & rectæ E F, F B, maiores erunt rectæ E A. Quare dempta communi E F, remanebit F B, maior, quàm F A. quod eſt abſurdum, cùm F B, F A, cadant è centro F, ad circunferentiam, ideoq̃ ex circuli definitione æquales exiſtant. In ſolo ergo puncto A, ſe mutuò tangent circuli A B C, A B D, & non in alio.*

a 6. tertij.
b 11. tertij.
c 10. primi.



NON videtur etiam omittendum hoc loco ſequens theorema, videlicet.

SI in ſemidiametro circuli producta punctum vltra centrum ſumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo ſemidiametri, totusque extra eundem cadet.



SIT circulus A B C, cuius centrum D, & in ſemidiametro A D, producta ſumatur punctum quodcunque E, ex quo ad interuallum E A, circulus deſcribatur A F, quem dico circulum A B C, in ſolo puncto A, tangere. Aut enim punctum E, eſt intra circulum A B C, aut extra. Si intra, quoniam A E, maior eſt, quàm A D, hoc eſt, quàm D C, hoc eſt, à fortiori, quàm E C; erit quoque E F, quæ ipſi A E, æqualis eſt, maior, quàm E C: ac proinde punctum F, extra circulum A B C, exiſtet, circulusq̃ A F, extra eunde circulum A B C, prope punctum F, exiſtet. Multò magis punctum F, extra circulum A B C, cadet, ſi E, extra eundem circulum A B C, exiſtet. Si igitur circulus A F, non totus extra circulum A B C, cadat, ita vt eum in ſolo puncto A, tangat: ſecet, vel tangat circulus A F, circulum A B C, in alio puncto B, ſi fieri poteſt, ducaturq̃ recta D B. Quoniam igitur

d 7 tertij.

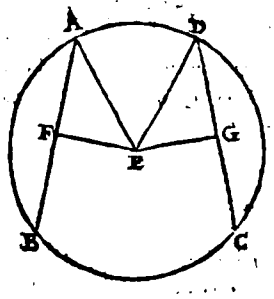
in diametro circuli A F, ſumptum eſt punctum D, præter centrum E, [d] *erit D A, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor eſt ergo D A, quàm D B. quod eſt abſurdum. Sunt enim æquales rectæ D A, D B, cadentes ex centro D, in circunferentiam eiuſdem circuli A B C. Non ergo circulus A F; circulum A B C, ſecat aut tangit in alio puncto, quàm in A, ſed totus extra illum cadit. Quod eſt propoſitum.*

QVOD ſi in ſemidiametro non producta punctum ſumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus tanget quoq̃ priorem circulum in dicto puncto extremo ſemidiametri; totusq̃ intra eundem cadet. Vt ſi in ſemidiametro A E, circuli A F, ſumatur punctum D, ex quo ad interuallum D A, circulus deſcribatur A B C, cadet hic totus intra illum, tangetq̃ eum in ſolo puncto A. Cùm enim oſtenſum proximè ſit, circulum A F, cadere totũ extra circulum A B C, cadet viciſſim totus hic intra illum, ita vt ſe mutuò in ſolo puncto A, contingant.

13. THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro. Et quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe.

SINT

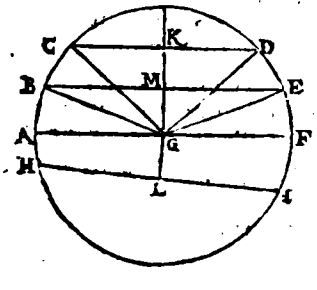


SINT in circulo A B C D, cuius centrũ E, duæ rectæ æquales AB, CD. Dico ipſas æqualiter diſtare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniungantur rectæ E A, E D. [a] Secabunt rectę E F, E G, rectas A B, C D, bifariam. Quare cùm totæ A B, C D, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet A F, D G, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum E A, E D, æqualium, inter ſe ſunt æqualia: Quadratum autem rectæ E A, [b] æquale eſt quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoq; quadrata rectarum A F, F E, æqualia quadratis rectarum D G, G E. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum A F, D G, remanebunt quadrata rectarum F E, G E, æqualia, ideoq; & rectæ E F, E G, æquales erunt. Diſtant igitur per 4. defin. huius libri rectæ A B, C D, æqualiter à centro E. a 3. tertij. b 47. primi.

RVRSVS diſtent rectæ A B, C D, æqualiter à centro E. Dico eas inter ſe eſſe æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad A B, C D, perpendiculares E F, E G, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; [c] diuidentque rectas A B, C D, bifariam. Ductis igitur rectis E A, E D, erunt earum quadrata æqualia: Eſt autem quadratum rectæ E A, [d] æquale quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, æquale quadratis rectarum D G, G E. Igitur & quadrata rectarum A F, F E, æqualia ſunt quadratis rectarum D G, G E; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum E F, E G, remanebunt quadrata rectarum A F, D G, æqualia; atq; adeò rectæ A F, D G, ac propterea earum duplæ A B, C D, æquales quoq; erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro, &c. Quod erat demonſtrandum. c 3. tertij. d 47. primi.

THEOR. 14. PROPOS. 15. 14.

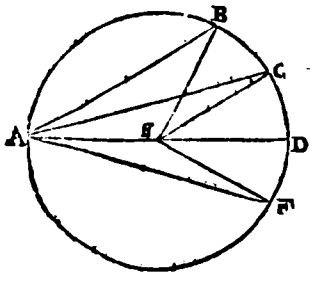
IN circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autẽ propinquior centro, remotiore ſemper maior.



IN circulo A B C D E F, cuius centrum G, diameter ſit A F; & recta ei propinquior H I, remotior autẽ C D. Dico omnium eſſe maximam A F; & H I, maiorem, quàm C D. Ducantur enim ex G, centro rectæ G K, G L, perpendiculares ad C D, H I. Et quia remotior eſt C D, à centro, quàm H I, erit G K, maior quàm G L, per 4. defin. huius libri. Abſcindatur ex G K, recta G M, ipſi G L, æqualis, atque per M, educatur B M E, perpendicularis ad G K, & connectantur rectæ G B, G C, G D, G E. Quoniam igitur rectæ perpendiculares G M, G L, æquales ſunt, æqualiter diſtabũt rectæ B E, H I, à cẽtro, p 4. defin. huius lib. [e] & ideò inter ſe æquales erunt. Rurſus quia rectę G B, G E, [f] maiores quidẽ ſunt recta B E, æquales autem diametro A F; erit & diameter A F, maior, quàm B E. Eadem ratione oſtendetur A F, maior omnibus aliis lineis. Deinde quia latera G B, G E, trianguli B G E, æqualia ſunt lateribus G C, G D, trianguli C G D; & angulus B G E, maior eſt angulo C G D; [g] erit recta B E, maior, quàm C D, atque adeò H I, quæ æqualis oſtenſa fuit ipſi B E, maior quoque erit, quàm C D. In circulo igitur maxima quidem linea eſt diameter, &c. Quod erat demonſtrandum. e 14. tertij. f 20. primi. g 24. primi.

SCHOLIVM.

EODEM ferè modo demonſtrabitur theorema; ſi ab vno, eodémque circunferentiæ puncto plurimæ lineæ cadant.



CADANT enim à puncto A, plures lineæ A B, A C, A D, quarum A D, per centrum E, tranſeat. Dico A D, eſſe omnium maximã, & A C, maiorem remotiore A B. Ductis enim rectis B E, C E; cùm in triangulo A E C, latera A E, E C, [a] maiora ſint latere A C; ſint q; rectæ A E, E C, æquales rectis A E, E D, hoc eſt, rectæ A D; maior erit A D, quàm A C. Eademq; ratione maior erit, quàm A B; & ſic de cæteris. Maxima ergo omnium eſt A D. a 20. primi.

DEINDE, quia duo latera A E, E C, trianguli A E C, æqualia ſunt duobus lateribus A E, E B, trianguli A E B, & angulus A E C, totus maior eſt angulo A E B, erit [b] baſis A C, maior baſe A B. Eodemq; argumento erit A C, maior quacunq; alia linea, quæ à centro remotior eſt. b 24. primi.

CÆTERVM & hic duæ tantùm æquales lineæ duci poſſunt à puncto A, ad vtraſque partes maximæ A D. Si namque angulo A E C, æqualis fiat angulus A E F, iungaturq; recta A F; cùm latera A E, E C, æqualia ſint lateribus A E, E F, & anguli contenti quoq; A E C, A E F, æquales; [c] erunt baſes A C, A F, æquales. Neque verò vlla alia his duabus æqualis poteſt exhiberi. Quacunque enim ducatur ex A, ſuper A C, ea minor erit, quàm A C; ſi verò infra A C, ea maior erit, vt iam demonſtratum eſt. c 4. primi.

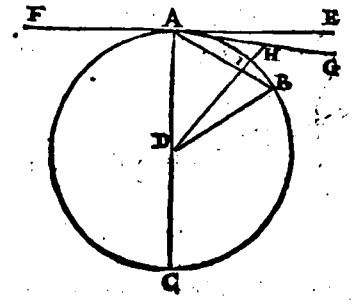
QVOD ſi A B, A F, ad diuerſas partes diametri A D, ductæ ſint, & dicatur A F, propinquior centro, quàm A B, demonſtrabitur, vt in ſcholio propoſit. 7. huius libri A F, maiorem eſſe, quàm A B. Si namque, vt proximè

oſtẽſum fuit, ducatur ipſi A F, æqualis A C, ex altera parte, nempe ſi fiat angulo A E F, æqualis angulus A E C,
a 14. tertij. *&c. cadet punctum C, inter B, & D; quòd A F, A C,* [a] *æqualiter diſtent ab A D, ob earũ æqualitatem, aut certè ob æquales angulos A E F, A E C. Hinc enim fit, cùm A F, ponatur propinquior centro, quàm A B, vt & A C, ipſi A F, æqualis, propinquior ſit centro, q̃ A B, ac proinde punctum C, ſit inter B, & D. Cùm ergo A C, maior ſit, quàm A B, vt in hoc ſcholio demonſtratum eſt, maior erit quoq; A F, quàm A B.*

15. THEOR. 15. PROPOS. 16.

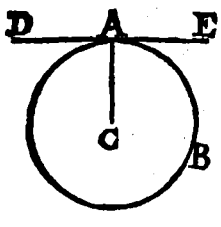
QVAE ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet, & ſemicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior eſt; reliquus autem minor.

IN circulo A B C, cuius centrum D, diameter ſit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem neceſſariò extra circulum cadere. Si enim ea
a 5. primi. dit intra ipſum, qualis eſt A B; ducta D B, [a] erunt duo anguli D A B, D B A, æquales: ſed D A B, rectus eſt, per conſtructionem: Igitur & D B A, rectus erit, quod eſt abſurdum. Duo enim anguli
b 17. primi. in triangulo [b] minores ſunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum: neque eandem ob cauſam in ipſam circunferentiam, ſed extra, qualis eſt E F. Dico iam ex A, inter A E, rectam, & circunferẽtiam A B, non poſſe cadere alteram rectam. Cadat enim, ſi fieri poteſt, recta A G, ad quam ex D, ducatur perpendicularis D H, ſecans circunferentiam in I, quæ neceſſariò ad partes anguli acuti D A G, cadet, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo D A H,



c 17. primi. [c] duo anguli D H A, D A H, minores ſunt duobus rectis: & D H A, rectus eſt, per conſtructionem, erit angulus D A H, recto minor,
d 19. primi. ideoq; recta D A, hoc eſt, recta illi æqualis D I, [d] maior erit, quàm D H, pars quàm totũ, quod eſt abſurdum. Non igitur intercipietur recta inter A E, & circunferentiam A B: ſed quæcunque ex A, ducatur infra A E, ea ſecabit circulum. Dico denique angulum ſemicirculi, contentum diametro A C, & circunferentia A B, maiorem eſſe omni acuto angulo rectilineo; reliquum verò angulum contingentiæ, qui continetur recta A E, & circunferentia A B, minorem eſſe omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim oſtenſum eſt, omnem rectam ex A, ductam infra perpendicularem A E, cadere intra circulum, faciet neceſſariò ea linea cum A C, angulum rectilineum acutum minorem angulo ſemicirculi, at verò cum A E, angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentiæ, cùm ille ſit pars anguli ſemicirculi, hic verò totum quidpiam reſpectu anguli contingentiæ. Id quod liquidò conſtat, ducta recta A B, quomodocunque infra A E. Nam cùm hæc linea A B, intra circulum cadat, vt demonſtratum eſt, erit angulus rectilineus acutus C A B, minor angulo ſemicirculi contento ſub diametro A C, & circunferentia A B C, cùm ille huius ſit pars: Angulus verò contingentiæ contentus ſub tangente linea A E, & circunferentia A B C, minor angulo rectilineo acuto B A E, quòd ille huius pars ſit. Eademque ratio eſt de omnibus aliis angulis acutis rectilineis, cùm omnes contineantur à diametro A C, vel tangente A E, & rectis ex A, ſub A E, ductis, quę omnes intra circulum cadent, vt demonſtrauimus. Angulus igitur ſemicirculi, maior eſt omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.



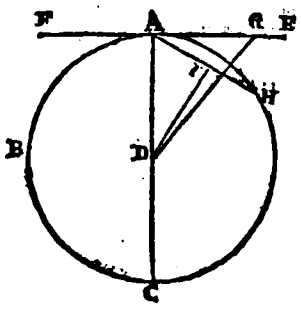
HINC manifeſtum eſt, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipſum circulum tangere. Oſtenſum enim eſt, ipſam cadere extra circulum. Quare ſolùm in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

QVARE ſi iubeamur per datum punctum A, in circunferentia circuli A B, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam A C, & ad eam excitabimus perpendicularem D A E. Hæc enim circulum tanget in A, vt demonſtratum eſt.

EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonſtrari oſtenſiuè hac ratione. Sit diameter A C, in circulo A B C, cuius centrum D. Ducatur ex A, ad A C, perpendicularis A E, quam dico extra circulum cadere. Sumatur e-
a 17. primi. *nim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta G D. Quoniam igitur in triangulo A D G, duo anguli*
b 19. primi. *D A G, D G A,* [a] *minores ſunt duobus rectis, & D A G, factus eſt rectus; erit D G A, recto minor. Quare* [b] *maior*

erit



erit recta D G, quàm D A: ideoq; punctum G, extra circulum erit. Eademq; est ratio de omnibus alijs punctis rectæ A E. Cadet ergo tota A E, extra circulum: Ducatur iam ex A, infrà A E, recta A H, quam dico necessariò secare circulum. Fiat enim angulus A D I, æqualis angulo E A H. Addito igitur communi angulo D A H, erunt duo anguli A D I, D A H, æquales toti angulo recto D A E, ideòq; minores duobus rectis: Quare [a] coibunt rectæ A H, D I, in aliquo puncto, vt in I. Dico igitur punctum I, esse intra circulum. Quoniam enim tres anguli in triangulo D A I, [b] æquales sunt duobus rectis, & duo anguli D A I, A D I, ostensi sunt æquales recto D A E; erit reliquus A I D, rectus, atq; adeò maior, quàm D A I, acutus. Quare recta D A, [c] maior est, quàm D I. Non igitur D I, ad circumferentiam perueniet; propterea q; punctum I, intra circulum existet; atq; adeò recta A H, circulum secabit. Reliqua pars theorematis ostenditur, vt prius.

[a] 13. prop.
[b] 32. primi.
[c] 19. primi.

SCHOLIVM.

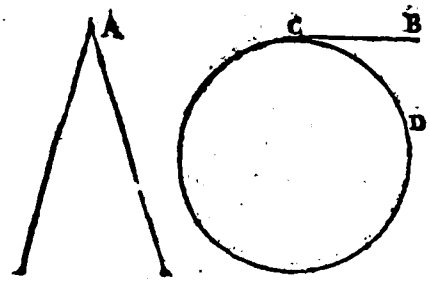
EXISTIMAT Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atq; adeò ex illo contactu lineæ rectæ, & circumferentiæ, non effici angulum vllum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illam, quam ipse hoc loco instituit. Sic igitur inquit:

CVM huius theorematis caput postremum attentiùs considerarem, mihi sanè in mentem subijt prima facie, Geometriam non satis sibi constare: immò adeò repugnantiam in se admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiam est, vt inter quantitates minima dari possit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, seu rectius, contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundùm eam æquale & inæquale dicatur. Quantitatis etiam continuæ in infinitum sectio est. Atq; adeò cùm in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxiè expendere cœpi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi,

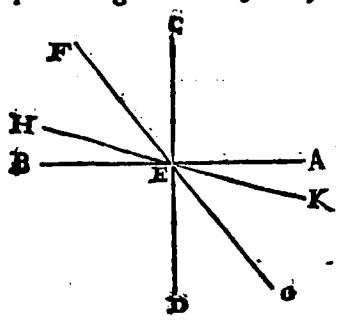
Si à maiori duarum quantitatum auferatur maius, quàm dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuò fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

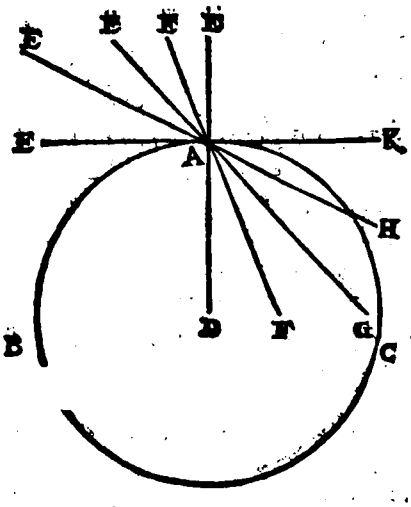
VERBI causa, sint duo anguli: A, quidem rectilineus, B C D, angulus (si modò sit angulus) contactus: Vult prima decimi, si auferatur ab angulo A, maius; q. dimidiũ, ac rursus à reliqua parte maius q. dimidium; sicq; continuò ex residuis partibus maius, q. dimidium; tandem relinqui minorem angulum, q. B C D. Cuius



demonstrationem hic non appono; cùm ex sequẽtibus pendeat. Nulla tamẽ in tota Geometria propositio est, quæ (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim nõ videt, propositis duobus numeris 8. & 2. cùm ab octonario maius quàm dimidium abstuleris, vt quinarium; tùm à ternario residuo, maius q. dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neq; verò ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est; quin etiã mente Euclidis contraria, vt nos, cũ illuc ventũ erit, manifestum faciemus: Immò & ipse Campanus secũ pugnat, cùm in secunda duodecimi demonstranda, alijs q. propositionibus nonnullis solidorũ, à curuo rectum auferat.

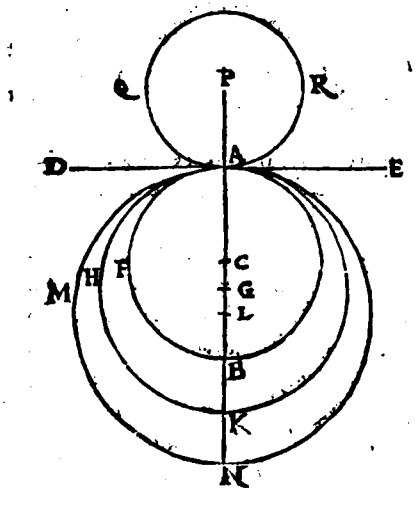
NOS igitur hanc dubitationem sic expediemus; vt dicamus; lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet B C D, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu: Et vbi cessat sectio, cessat quoq; anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decussatione, (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorũ species perficiuntur. Duabus enim lineis A B, & C D, se scindentibus in puncto E, ad angulos rectos, intelligatur C D, sic moueri in orbem, scilicet super puncto E, fixo, vt ex C D, fiat F G; hinc sanè ex recto angulo A E C, fiet obtusus A E F: Inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Cumq; facta fuerit H K, hinc quidè angulus obtusior fiet H E A, inde verò acutior B E H; sicq; continuò, donec peruenerit ad A B, & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immersa, vt sic dicam, linea C D, in lineam A B, euanescet angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo A B C A, cuius centrum D, linea D E, præteriens peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circumducatur ipsa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuò varij cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatiõ-





ne linea E D, facta sit E K, & tangat circulum. At tum linea D E, non iam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam B A C, quantum ad angulum attinet: non aliter quàm si B A H, esset linea recta. Neque contrà facit, quòd deducantur lineæ, faciantq; spatium C A K. Nam id sola A C, linea efficit, quæ rectam refugit; sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cùm igitur omnis angulus in pluribus punctis non consistat; quàm vno sit, vt punctum A, tam sit ineptum angulo constituendo, quàm modò erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortassè dices, punctum A, lineam rectè manere in suo recto, punctumq; A, peripheriæ in suo rotundo; neq; vtrumq; esse idem punctum; sed lineas se tantùm inter se veluti lambere, quia altera alteram penitùs, omniq; puncto refugit; vt contraria contraposita fiant manifestiora; Id verò sensus non recipit. Duo enim circuli sese exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent. Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum A B C, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse; vt nihil in cogitationē cadat, quod semel vsp iam Geometriæ non repræsentet. Illud tamen minimè vrgebit; Immò tantò minus contactus linearum erit angulus; Habit enim vtrinque ipsarum concursus. Sed nos hac Geometricis rationibus confirmemus per theoremata.

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est.



SIT enim circulus A F B A, cuius centrum C, diameter verò A B, per cuius extremitatem A, dūcatur linea D E, ad angulos rectos. Et constat, ex consectario huius decimæsextæ, lineam D E, contingere ipsum A F B A, circulum: ac propterea D A F, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partem huiusce decimæsextæ. Iam verò inter puncta C, & B, suscipiatur in diametro A B, centrum G, & spatio G A, describatur alter maior circulus A H K A. Dico F A H, non esse quantitatem. Constat quippe circulū A H K A, transire inter rectam D A, & curuam A F, cùm sit semidiameter G A, maior semidiametro C A. Manifestum quoque est, lineam D E, tangere ipsum A H K A, circulum, ex eodem huiusce decimæsextæ cōsectario: ac propterea D A H, esse omni acuto minorem. Describatur tertiò, secundùm maius spatium L A, circulus A M N A; Et erit ex eodem consectario D A M, omni acuto minor. Sicq; in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea D E, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in A B, linea, minores omni acuto rectilineo: ac sic omnes æquales, si modò æqualitas inter non quanta dici possit. Quapropter contactus D A M, erit æqualis contactui D A F: Fietq; vt M A F, contactus interior circulorum neque augeat, neq; minuat contactum D A M: Igitur M A F, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.

SED & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non esse, in hunc modum. Nempe cùm omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes. Quapropter anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt æquales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus B A F, æqualis vtrique angulorum K A H, & N A M: Ac propterea contactus F A M, nihil addit ad angulum B A F. Quare F A M, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

MANENTE enim eadem constructione, si D A F, sit quantitas; ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæsextæ: neq; per obliquam, vt per lineam A M. Esset enim F A M, pars ipsius D A F: Atqui F A M, quantitas non est, vt modò probauimus. Non est igitur F A M, pars ipsius D A F. Igitur D A F, neq; per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare D A F, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

In eadem constructione protrahatur B A, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem P A, describatur circulus A Q R A, tangens circulum A B F A, exterius in puncto A. Dico contactum F A Q, non esse quantitatem. Id verò manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuidit ur, cùm F A M, non sit quantitas per primam harum; neq; per rectam, cùm neq; D A F, sit quantitas per

secundam

ſecundam earundem; neque D A Q, quantitas per eandem. Quare cùm F A Q, partes nullas habeat, quantitatem non erit: quod erat probandum.

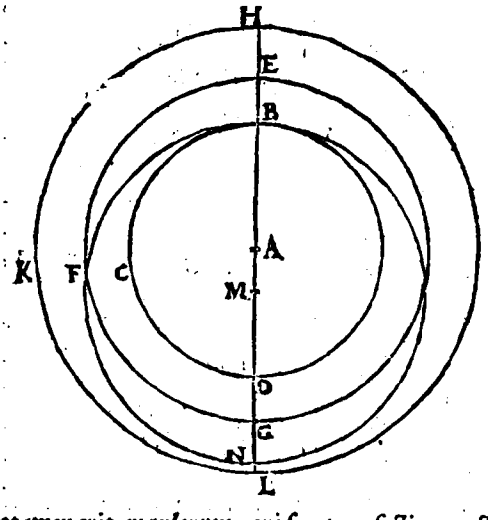
Ex his emerget hoc pronunciatum, quòd in Geometria nemo hactenus admittendum eſſe cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt à diametro, & peripheria, ſiue intra, ſiue extra circulum, recti ſunt, & rectis rectilineis æquales.

Vt in poſteriori figura, angulus B A F, æqualis eſt angulo B A D; cùm ipſi nihil accreſcat ob contactum D A F, qui quantitas non eſt: & ob id Q A P, rectus eſt, & æqualis ipſi D A P, cùm D A Q, nihil addat: quod erat probandum.

HAEC Peletarius hoc in loco. In epiſtola autem, quam ad Cardanum ſcribit, affert aliam demonſtrationem, quam ipſe ait pleniorem eſſe. Hanc igitur hìc ſubiicere ſtatui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, ſunt æquales.

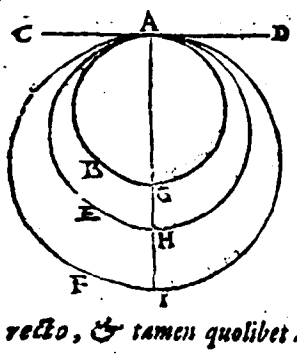


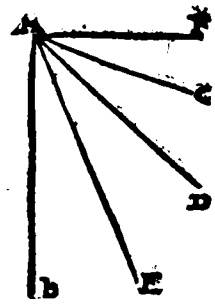
SINT enim ſuper centro A, duo circuli B C D B, & E F G E, quorũ diametri B D, & E G, & ſecet E G, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos C B D, & F E D, eſſe æquales. Nam ſi ſit F E D, maior ipſo C B D: (neque enim contrà, C B D, maior vllo pacto erit ipſo F E D,) ac deſcribantur plures circuli ſuper eodem centro A, quorum vnus hoc loco ſatis fuerit H K L H: fiet tandem ex continuo augmento angulus à diametro & peripheria: verbi gratiâ, angulus K H L, maior recto: quod eſt contra ipſius Euclidis ſententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter ſe æquales: quod fuit oſtendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonſtrandi ratione vllus eſt paralogiſmus. Licèt enim nulla ſit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex ſectione rectæ lineæ, & peripheriæ, aliqua collatio ad ipſos rectilineos: Eiuſmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeſtè maiores, & minores ſunt.

HIS adhunc modum demonſtratis, aio contactum circulorum interiorem, non eſſe quantitatem. Super centro M, in eadẽ linea H L, poſito, deſcribatur circulus B F N B, tanto interuallo, quanto eſt circulus E F G E, poſita ſcilicet M B, ſemidiametro æquali ipſi A E; qui circulus tangat B C D B, circulum in puncto B. Et manifeſtum eſt, angulum F B D, æqualem eſſe angulo F E D, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipſe F B D, erit angulo C B D, æqualis. Igitur C B F, contactus nihil addit ad ipſum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non eſt: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonſtratio eorum, quæ in 3. lib. adduximus, theorematum.

HAEC igitur eſt Peletarij ſententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi eſt contraria. Si enim Euclides ſenſiſſet, angulum contactus nihil prorſus eſſe, & angulum ſemicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obſecro, tantopere deſudaſſet, vt demonſtraret angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum verò ſemicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiuſmodi eſt angulus contactus, ex Peletarij ſententia, minus eſſe quocunque angulo? Quid quoque magis perſpicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, maiorem eſſe quolibet acuto? Quapropter angulum contactus verè eſſe angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeò angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem. Vnde diſſoluenda ſunt à nobis omnia Peletarij ſophiſmata, quæ in hac digreſſione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil eſſe.

PRIMVM igitur extra intelligentiam eſſe fatemur, vt inter quantitates minima dari poſſit: ſed inficiamur, nos aſſerere angulum contactus eſſe minimam quantitatem: Immò verò aſſeueramus, quemuis angulum contactus, etſi ab Euclide minor oſtenſus eſt omni acuto rectilineo, diuidi poſſe in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonſtrauit, & optimè; ſed per lineam circularem. Vt propoſito angulo contactus C A B, ſi per A, deſcribatur circulus A E H, maior circulo A B G, tangens rectam C D, in A: fiet angulus contactus C A E, minor angulo contactus C A B. Quòd ſi adhuc maior circulus A F I, deſcribatur, erit multò minor angulus contactus C A F, eodem angulo contactus C A B. Atque ita ſine fine ſemper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor ſit acuto rectilineo quocunque. Quemadmodum quiuis angulus acutus minor eſt recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit, cùm diuidi poſſit infinitè. Vt angulus acutus





BAC, minor est recto BAF, & tamen si ducatur recta AD, inter AC, AB, fiet acutus minor BAD. Quòd si alia recta AE, inter AB, AD, ducatur, erit multò minor acutus BAE, nec vnquam finis erit huius decrementi.

PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri posse infinitè, ita vt quouis angulo contactus proposito dentur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circulari, angulo contactus CAF, maior est angulus contactus CAE, & multo maior angulus contactus CAB; Atque ita deinceps, si minores semper circuli, quàm ABG, describantur, tangentes rectam CD, in A, augebitur perpetuò angulus contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto BAE, maior est acutus BAD, & multò adhuc maior acutus BAC. Quòd si alia recta ducatur inter perpendicularem AF, & rectam AC, fiet adhuc maior angulis acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit æqualis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoq; in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis sit acuto angulo rectilineo proposito; vel maior acuto, nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtũ, (qui quidem efficitur à duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatẽ. Immò asserimus, quolibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi BAG, maior est angulus semicirculi EAH, & multò adhuc maior angulus semicirculi FAI: Atq; ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quàm AFI, tangentes rectam CD, in A, augebitur perpetuò angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto CAI. E contrario verò, angulo semicirculi FAI, minor est angulus semicirculi EAH; & multò adhuc minor angulus semicirculi BAG, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamẽ quilibet maior est quouis angulo acuto rectilineo, licèt infinitè diminuatur, vt Euclides demõstrauit. Quemadmodũ quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidè maiores, alij verò minores innumerabiles.

QVOD autem anguli contactus sint inæquales inter se, & non omnes æquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quòd angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt linea vnius conueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur; Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuò congruunt, iuxta octauum pronunciatum. Cùm igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) linea eorum non sibi respondeant sed prorsus inter se dissideant; vt ex figuris superioribus perspicuum est; Non erunt omnes anguli huiusmodi inter se æquales. Immò quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinitè per lineam curuam, licèt per rectam secari nequeat, vt rectè ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuò circulum secabit, donec iterum ipsimi contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum. Quare si vel minimè inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cùm in vno tantùm puncto linea recta circulum possit tangere; vt ex 2. propos. huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli semicirculorũ æquales inter se erunt, qui efficiuntur à peripheriis æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuò. Anguli verò contactus, qui efficiuntur à peripheriis minoribus, maiores erũt; Et qui à peripheriis maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscurè intelligi potest ex superioribus figuris. Neq; enim lineæ talium angulorum sibi mutuò conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes, & vnum alteri posse æqualem exhiberi: ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur rectè intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum verò semicirculi, maximam.

DEINDE non est, quòd anxium reddat Peletarium prima propositio 10. libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, q̃ diuersi, dummodò vtrauis multiplicata alterã excedere possit; cuiusmodi nõ sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis secetur, siue ter, quatérve, siue denique quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunq; anguli contactus, vt centum, inter se æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis æquarent, esset quoq; vnus illorũ maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdũ, cũ quilibet angulus contactus minor sit quocunq; angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratũ. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, q̃ dimidiũ auferatur, ac rursus ex reliquo maius, q̃ dimidium, idq; continuò fiat, relinqui tandem

tandem angulum acutum minorem angulo contactus propoſito: quoniam angulus contactus, vt dictum eſt, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, ſiue quantumuis auctus, ſemper minor exiſtit angulo acuto; nec vnquam ipſum ſuperare poteſt: quod tamen neceſſariò requiritur ad demonſtrationem illius propoſitionis. Vt enim demonſtretur, multiplicanda eſt minor quantitas propoſita toties, donec excedat maiorem, vt videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipſe Euclides per Campanũ, quando in Stereometria à curuo rectum aufert, vel contrà, vt vult 1. propoſit. lib. 10. aſſumit ſemper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere poteſt.

IAM verò nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodò effici à duabus lineis ſe ſecantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano ad inuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt conſtat ex anguli plani deſcriptione tradita ab Euclide, quanquam ſe mutuò non ſecent, ſi producantur: cuiuſmodi ſunt peripheria, & linea recta illam tangens, vel etiam duæ peripheriæ ſe tangentes. Quare verè angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonſtratio Peletarij, qua conatur oſtendere, contactum interiorem non eſſe quantitatem, nullius eſt momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur à linea tangente, & peripheria, minores ſint quolibet angulo acuto: non tamen propterea inter ſe omnes æquales eſſe neceſſe eſt, ſed poteſt alio alius maior eſſe, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores ſunt angulo recto, & tamen ipſi inter ſe nõ ſunt omnes æquales. Sic etiam omnes formicæ (vt ex rebus quoq; naturalibus exemplum afferamus,) minores ſunt homine, vel montes, cùm tamen ipſæ inter ſe valde ſint inæquales. Quare non rectè concludit Peletarius, contactum interiorem nihil eſſe.

NEGAMVS deinde, angulos ſegmentorum ſimilium æquales eſſe, ſicut ipſe aſſumit in ſequenti demonſtratione: Nõq; enim hoc Euclides ſignificauit in vltima definitione huius 3. lib. Sed docuit ea ſegmenta eſſe ſimilia, in quibus anguli rectilinei ſunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales: non autè quorum anguli æquales exiſtunt. Immò magnum diſcrimen eſt inter angulos in ſegmentis, & angulos ſegmentorum, vt apertè conſtabit ex propoſ. 31. huius libri.

EX his facilè reijcientur reliquæ Peletarij demonſtrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur à linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior ſit verè pars eius, cùm contrarium nullo modo oſtenderit. Eodem pacto angulus contactus, quẽ conſtituunt duo circuli ſe exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrunque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo aſſeruit, angulum ſemicirculi æqualem eſſe angulo recto rectilineo. Extedit namque rectus angulus angulum ſemicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Poſtremò hallucinatus eſt quoq; Peletarius in illa demonſtratione, quam ad Cardanum miſit. Etſi enim angulus ſemicirculi in maiori circulo maior eſt angulo ſemicirculi in circulo minori: non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus ſemicirculi maior ſit angulo recto. Semper enim rectus angulus ſuperabit quemuis angulum ſemicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur à peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto propoſito, dari poſſunt alij maiores: nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in præcedenti figura cernere licet. Conſtat igitur ex his, angulum contactus verè eſſe angulum, demonſtrationes autem Peletarij ſophiſticas eſſe, ac nullius momenti, hominẽq; Geometra prorſus indignas.

HAEC porrò mea de angulo contactus diſputatio adeò Peletarium commouit, atque perturbauit, vt læſam eſſe omnino atq; offenſam exiſtimationem putauerit ſuam. Quare annis ferè quinque poſt inei in Euclidem commentarij editionem, hoc eſt, anno 1579. pro ſui defenſione Apologiam in me conſcripſit: in qua tamen neque auſus eſt ſolutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neque opinionem ſuam, nouam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (ſcilicet nullas habebat) confirmare, ſed verbis duntaxat, & conuiciis ſe defendere conatur, vt facilè ij, qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologiæ iam pridem non tam mei purgandi, quàm veritatis tuendæ gratia reſpondiſſem, niſi me ab hoc conſilio grauiſſima eruditiſſimorum hominum auctoritas, qui eam reſponſo omnino indignam iudicabant, reuocaſſet. Nunc verò quoniam locus hic à me poſtulare videtur, vt in ſecunda hac editione patrocinium veritatis iterũ ſuſcipiam, non alienum eſſe duxi, breuiter calumnias atq; iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quanta potero modeſtia, depellere. Quamuis enim hoc à me factum iam ſit anno 1586. in meis triangulis ſphæricis, vbi neceſſariò de re ipſa, eiusq; Apologia mentio facienda fuit: quia tamen fortaſſis non omnes librũ illum meum viderunt, operæ pretium arbitratus ſum me facturum, ſi totam illam reſponſionem hic, vbi proprius eius locus eſt, interſeram, vt benignus Lector intelligat, ſine cauſa eum tanto animi dolore, & iracundia, quantam præ ſe fert, contra me exarſiſſe, falſoq; mihi impoſuiſſe multa: me autem è contrario nullum verbum iniurioſum in illum effudiſſe, aut conuicium, quod fruſtra in Epiſtola nuncupatoria criminatur, vbi me à conuiciis non abſtinere, apertè teſtatur. Atque in illa Apologia nihil adeò me offendit, quàm quòd me Peletarius non ſyncerè, ſed animoſè, atq; adeò inuidioſè feciſſe inſimulat, vt eum in meis commentarijs vel reprehenderẽ, vel laudarem: quæ ſanè vitia puſilli ſemper animi eſſe duxi, & ab homine liberaliter, Chriſtianeq; educato alieniſſima. Verùm ea quàm longè abſint tũ à noſtra Societatis diſciplina, tum à mea conſuetudine, nemo omnino, qui nos ac noſtra nõrit, ignorat. His verò, qui noſtra minimè nõrunt, hic ipſe liber fidem faciet, ſyncerè omnia dici, nihil inuidioſè, nihil animoſè: planè vt veritatem quæſitam, non cuiuſque auctoritatẽ contemptam eſſe

appareat. Neq; enim mihi tantum derogo, (etsi nihil arrogo) vt mihi vni interdictum putem, ne, si quid in alienis scriptis falsum videatur, occasione oblata, cur id mihi minùs probetur, ostendã; modò (quod pudentium, ac bene moratorum hominũ consuetudo postulat) id sine conuicio atq; irrisione faciam: Hoc autẽ liber ipse, qui in medio est, ita à me factum esse clamat. Etenim vt totũ hunc librũ peruolutes, ne verbum quidem vnum reperies, quod vel speciem maledicti habeat, atq; conuicij. Nam in scholio hoc de angulo contactus iurare liquidò possem, nihil me minùs cogitasse, q̃ vt Peletarium obtrectandi animo oppugnarem; sed illud habuisse propositum, (si modò consequi possem) vt suus esset veritati locus. Quod quidem eò liberiùs feci, q̃ Peletario ipso non modò inuito, sed etiam libenti existimaui me esse facturum, quod vel ipso auctore facerem: qui non à Cardano solùm, at q̃ Campano, sed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Eratosthene, Pappo, Ptolemæo, Hippocrate Chio, Geometriæ luminibus, ab ipso deniq; omnium magistro Euclide dissentire nõ dubitauit. Nimirum quia, vt ab eodem in Apologia verè dictum est, in omni doctrina, præsertim verò in Geometria, non auctoritas est spectanda, sed veritas: quanquam non video, qui amicus veritatis sit is, apud quem veritas odium parit; nisi fortè aut decipi se nõ posse arbitratur, qui columina illa Geometriæ errasse interdum prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quærit potiùs, q̃ in suis. Equidem si quis me in re quapiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri posse video) errasse ostenderit, ne ego maximam illi gratiam habuero, qui errãtem in viam veritatis reduxerit. At enim probat studium veritatis Peletarius, conuicia ferre non potest: quæ tandem conuicia? rogas? Demonstrationes meas appellas sophismata. Nunc demum, quæ conuicia dicat, intelligo: Nam alia nulla in meo hoc libro esse certò scio: ab his (si conuicia sunt) fateor me non abstinere. At ego homo simplex, & ignarus verborum, conuicia esse nunquã duxi, cùm verè dicerentur. Neq; enim, quo alio vocabulo demonstrationes planè fallaces, & adulterinas appellarem, habebam: neq; verò Philosophorum, ac Mathematicorum consuetudo loquendi magis appositum mihi verbum suppeditabat. Accedit, q̃ cùm à Peletario, homine in loquendo consideratissimo, germanas Campani, Cardaniq; demonstrationes paralogismos appellari viderem, existimaui in falsis eius demonstrationibus refellendis impunius persimili me vocabulo vsurum. Quòd si sophisma contumeliosius verbum est, q̃ paralogismus, in Gallia, ignoscat consuetudinis eius ignaro, at q̃ existimet, me paralogismos dicere voluisse. At q̃ vt planè intelligat Peletarius, me non contradicendi studio illa scripsisse, mecum vnà consideret, quantam mihi materiam sui refellendi dederit, si hominem refellere potiùs; quàm rem, quæ tum agebatur, explanare in animo fuisset: quanquam occasionẽ eius reprehendendi in sinum delatam sæpiùs omisi, ne illum mihi delegisse viderer, in quem potissimùm incurrerem. Quàm præclara enim occasio fuit, in propos. 4. & 8. lib. 1. at q̃ in propos. 24. lib. 3. quam ipse 23. facit? In his enim omnibus reiecit demonstrationes antiquissimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram vnam alteri superponi concipere animo oporteat: quod ipse à Geometria dignitate putat esse alienum, hac solùm inductus ratione, quòd superpositionem illam mechanicum quid esse arbitretur, & quòd omnes ferè propositiones hoc modo, vt ait, possint demonstrari, etiam problemata, in quibus aliquid proponitur construẽdum: at q̃ in huius rei exemplũ adducit propos. 2. & 3. lib. 1. quæ problemata sunt. Hic certè Peletarium iure carpere potuissem, si id mihi fuisset propositum, vt falsò criminatur; maximè in eo, quòd eadem ratione vsui fore existimauit superpositionem in demonstrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non satis intellexisse videtur, quo pacto Geometræ superpositionem illam vsurpent. Neq; enim volunt, re ipsa faciendam esse figurarum superpositionem, (hoc enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantùm, ac mente, quod opus est rationis atque intellectus. Ita q̃ in theorematibus quidem locũ habebit genus hoc argumentandi, in problematibus verò non. Nam q̃ in theorematibus, propter magnitudinum æqualitatem, inæqualitatémve, quæ, vt nota, ponitur, facilè intellectus cuiusuis sine vlla hæsitatione comprehendi, vnam vel non excedere alteram, vel excedere, si animo concipiatur vna alteri esse superposita, quamuis re ipsa non fiat illa superpositio, vt in propos. 4. lib. 1. factum est: At in problematibus, in quibus magnitudinem quis alteri æqualem construere iubetur, licèt mente cogitet magnitudinẽ propositam transferri in alium locum, non tamen propterea quicquam efficiet, cùm re ipsa translatio nulla facta sit: Vt mirum sit, Peletarium sibi persuadere potuisse, propos. 2. & 3. lib. 1. & aliad penè omnes per superpositionẽ, siue translationem linearum, figurarúmve posse demonstrari. Si hoc modo argumentandi in Geometria vti liceret. Et certè hac in re non solum Euclidem in crimen vocat Peletarius, verùm etiã Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonstrando, & subtilior fuit nemo, eiusq; commentatorem grauissimum, eumq; doctissimũ Eutocium Ascalonitam, qui eodem argumẽtandi genere vtuntur in æqueponderantibus, immò verò & omnes Geometræ redarguat necesse est, qui non rarò hoc argumẽti genus adhibẽt. Sed videamus, quò tandem egregius hic noster Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, sit deuolutus. Viderat Peletarius, (neq; enim rem adeò manifestam videre nõ poterat) si hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuersam se Geometriam funditùs euertere, cùm plurima, eaq; præcipua propositiones in Geometria demonstrentur ex propos. 4. & 8. lib. 1. & ex 24. lib. 3. quæ quidem alio modo demonstrari nequeunt, q̃ per illam figurarum superpositionẽ, non quidem re ipsa existentem, sed cogitatione duntaxat, vt dixi, comprehensam. Quò igitur se verteret? quid ageret? Excogitauit sanè rem magis à Geometria alienam, q̃ est superpositio illa figurarum. Coactus enim est asserere, propos. 4. lib. 1. esse definitionem angulorũ æqualium, (& quis vnquam talem audiuit definitionem?) at q̃ adeò concedendam eam esse sine demonstrationes propositionem verò 8. eiusdem lib. principium esse per se quoq; notũ. Quod vt credibile magis efficiat, ita scribit in

bit in propoſ.4.lib.1. (Etenim nulla euidẽtiori ſpecie æqualitas figurarum dignoſcitur, quàm ex laterum æqualitate.) *Idemq; quaſi confirmat, & repetit in propoſ.8.eiuſdem libri, dum ita loquitur,* (Quis enim negauerit, duas ſuperficies eſſe æquales, quarum latera & quantitate, & numero ſunt æqualia?) *Hæc Peletarius, vt dicta propoſitiones Euclidis ſine demonſtratione admittantur, commentatus eſt, ſed quæ omnino falſa ſunt: vt magnoperè mirãdum ſit, potuiſſe eum propoſitiones à Geometria prorſus alienas tam inconſideratè proferre. Scilicet verum eſt, quod Philoſophi aſſerunt; Dato vno abſurdo, cætera conſequuntur. Aſſumpſerat enim Peletarius propoſ.4. & 8.lib.1.pro principiis: quod quidẽ falſum eſt, atq; abſurdũ. Vnde ad eas abſurditates neceſſariò deuenit, quas etiã illi, qui vix adhuc principia Geometriæ attigerunt, vel facilè vitare potuiſſent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratũ, etiamſi latera habeant & quantitate, & numero æqualia, poſſe tamen inter ſe valde eſſe inæqualia? Id quod in Pentagonis quoq; æquilateris, & in aliis figuris plurium laterũ æqualium cerni poteſt: quod non eſt huius loci pluribus verbis explicare. Cùm ergo in omnibus figuris multilateris inæqualitas reperiatur, licèt latera habeant & quantitate, & numero æqualia, demonſtrandum fuit neceſſariò Euclidi, æqualitatẽ triangulorum colligi ex laterum æqualitate, quandoquidem in aliis figuris ea non colligitur. Quare neq; propoſitio 4. Definitio, neq; propoſ.8. principium erit; ac proinde omnes propoſitiones, quæ illis nituntur, quæ innumerabiles propemodũ ſunt, corruant neceſſe eſt, niſi demonſtrationes Euclidis recipiãtur in illis propoſitionibus, cùm alio modo demonſtrari non poſſint. Demonſtratio enim noua propoſ.4. quam Peletarius confinxit, nihil aliud eſt, q̃ (vt cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perſpicuum erit cuilibet, qui eam diligentiùs conſiderare voluerit. Nam in ea ſolùm conſtruitur vnum triangulum poſteriori ex duobus datis æquale, immò idem, atq; hoc ipſum quidem ineptiſſimè, cùm ad id præſtandum circulos deſcribat Peletarius, quibus tamen in demonſtratione non vtitur, quod vitioſum omnino eſt in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc conſtructum, quod à poſteriori ex duobus propoſitis nõ differt, priori eſſe æquale, ſine vlla demonſtratione; certum autem eſt, hoc ab initio propoſitum fuiſſe, vt demonſtraretur. Quocirca manifeſtè principium petit; cùm eadem facilitate ſtatim in principio concludere potuiſſet, etiamſi nullam adhibuiſſet conſtructionem, triangula propoſita eſſe æqualia; quippe cùm conſtructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonſtratione propoſ.24.lib.3. quam etiam nouam confinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus eius commentarij peruenerunt, relinquo. Præterea alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propoſitionibus Euclidis in demonſtrando, vt q; plerunq; 2.propoſ. libri 1. inſcitè pro 3. aſſumat, &c. Neq; enim mihi in animo nunc eſt, eius commentarios examinare: ſed ſolùm calumnias, quas frequẽtes in ſua Apologia adhibuit, à me depellere. Quæ cũ ita ſint, quod ille falsò de me, verè ego de illo dicere poſſem, rubere me, (vt eius verbis vtar) Euclidi interpretẽ contigiſſe, qui non iam Theonem, aut Campanum emendet, ſed ipſum Euclidem ſine cauſa reprehendat; quippe cũ ego Euclidem (vti par eſt) à calumniis ipſius defendam, omnes q; inſidias, ac fallacias, quas contra eum inſtruxerat, detegam, ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuiſſe, vt Peletarium redarguerem, cùm tot ac tantos errores diſſimulauerim: quos ego ne nunc quidem in lucẽ protuliſſem, niſi vellem omnes & intelligere, quantũ Peletarius à me, de quo tam acerbè queritur, tum beneficium acceperit, & ex breui hac diſputatione fructus aliquid, vtilitatis q; percipere. Nunc vt, q̃ diſpari ille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter exponã, atq; ita refellam; ac diluam, vt omnes oculis videant, eas eſſe calumnias: In quo tamen eiuſmodi à me moderatio adhibebitur, vt modeſtiæ, quæ hominem religioſum decet, minimè obliuiſcar. Neq; enim illi, vti prouocauit, reſpondebo.*

PRIMVM itaq; mihi obiecit Peletarius, q; in eius demonſtrationibus citandis ita me geſſerim, vt ſi quo modo nomen ipſius ſupprimere potuiſſem, id me oſtendam libenter fuiſſe facturum. Quod q̃ ſit falſum, facilè iudicabunt ij, qui meos commẽtarios legerint; cùm vbiq; eum honorificè appellem, eiq; plurimas demonſtrationes aſcribam, tanquam proprias, quas tamẽ aliter, q̃ ipſe, & multò breuiùs demonſtro, & interdum etiam (quod maius eſt) vniuerſaliùs, vt liquidò conſtat ex iis, quæ tum ad propoſ.38. tum ad propoſ.45.lib.1. ex Peletario demonſtraui, vt alia interim taceam: quæ non iniuria mihi vendicare potuiſſem: vt mirer, quid illi in mentem venerit, id à me parũ ſyncerè, atq; adeò inuidiosè factum exiſtimare, quod ego verebar, ne nimis ambitiosè factum quiſpiam iudicaret. Quòd verò propoſ.16.lib.3. & in prioribus duabus deſin.lib.5. vt ipſe obiecit, animosè, vt ego fateor, liberè, quid de eius demonſtrationibus ſentirem, expoſui, id feci, vt iam antè dixi; non cuiuſquam lædendi cauſa, ſed quærenda veritatis. Ea enim eſt natura, & conditio eorum, qui liberalibus artibus dant operam, vt etiamſi alter alterius interdum ſententiam impugnet, non tamẽ idcirco odiis potiùs, quàm ingeniis inter ſe certare videantur. Qui ſit aliorum ſenſus ignoro, equidem, vt ſuprà dixi, ita ſum animo, vt ſi quis me alicuius erroris in demonſtrando commiſſi admoneret, ei q̃ maximas gratias haberem: atq; vt liberiùs id facerent, enixè rogaui non paucos, & nunc iterum eoſdem, atq; etiam alios amicè oratos volo. Scio enim, quàm facilè poſſit in ſuis quiſq; inuentis hallucinari; video (quod ipſe quoq; Peletarius in Apologia ſapienter aſſeruit) omnibus hominibus commune eſſe, vt peccent. Deinde quòd in additionibus ad propoſ. 47.lib.1. eius mentionem non fecerim, non eſt, quòd ægre ferat, cùm illa propoſitiones non ſint ab ipſo inuentæ. Quædam enim multo tempore ante ipſum demonſtrata ſunt vel à Campano, vel à Proclo, aut Theone, quædam verò demonſtraui egomet, antequam ipſius demonſtrationes vidiſſem; quòd adeò manifeſta ſint, & faciles, vt nulla probatione egeant, ſed ſint inſtar corollariorum propoſit.47. Vt nulla prorſus laus, aut gloria illi acceſſura videretur, ſi maximè eas ab ipſo inuentas eſſe, (quod tamen verum non eſt) prædicaſſem; cùm

eas quilibet, modò primoribus labris ſtudia Mathematica deguſtârit, nullo negotio ex illa propoſ. 47. colligere poſſit: Vt non videam, cur tandem eas propoſitiones tanti ponderis eſſe dicat, cùm ſint omnium iuditio leuiſſimæ; adeò vt in pleriſq; earum nec ipſe Petetarius demonſtrationem vllam, propter earum euidentiam adducat; ſed eas nulla probatione egere fateatur. Deniq; non eſt, quòd tantoperè mihi ſuccenſeat idcirco, q. conſtructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli ſupra datam rectam lineam finitam ei nõ tribuerim: quoniam in ea conſtructione nihil prorſus ab eo ſum mutuatus: quod iis diiudicandum relinquo, qui meam cum illius conſtructione contulerint. Nam & mea omnino diuerſa eſt, & ille in ſua mirificè (vt alia peccata taceam) abutitur propoſitione 9. lib. 3. cùm ex ea probet, punctum quoddam eſſe centrum circuli, qui nondum eſt deſcriptus. Geometra ſanè dixiſſet, punctum illud eſſe eiuſmodi, vt circulus ex eo deſcriptus ad interuallum cuiuslibet lineæ rectæ ex illis tribus, quæ ibi oſtenſa ſunt æquales, tranſeat per extremitates reliquarum duarum linearum æqualium. Nam propoſitio 9. lib. 3. nihil eo loco ad rem facit, cùm propoſitum ex ipſa conſtructione poſſit concludi, & ex demonſtratis; vt proximè dixi, etiamſi propoſitio illa vera non eſſet, aut nuſquam demonſtrata. Idem peccatum committit Peletarius in omnibus propoſitionibus lib. 4. in quibus vel intra figuram rectilineam, vel circa eandem circulus deſcribendus eſt. Quòd ſi ideò ſum reprehendendus, quòd propoſitionem vnam, multò aliter à me, & breuius demonſtratam, ei non aſcripſerim, non video quo pacto in idem ipſe vitium non incurrat, cùm problema hoc (Propoſitis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris ſupra minorem cognoſcere.) multis ſeculis ante ipſum à Theone demonſtratum ſibi arroget, hac ſolùm de cauſa, vt arbitror, quòd illud alia ratione, longiore tamen, demonſtrauit. Mitto hoc aliud problema, (Dato angulo rectilineo æqualem angulum curuilineum conſtituere.) quod in Apologia ſuum proprium appellat, idemq; hactenus deſideratum eſſe gloriatur; cùm tamen illud ipſum ego ex Proclo, qui multis ante eum ſeculis floruit, in definitione 5. libri 5. multò breuiùs & clariùs demonſtrauerim. Nam, vt eo in loco oſtendi, ſi rectæ lineæ datum angulum rectilineum continentes ponantur æquales, & circa ipſas duo ſemicirculi (qui æquales erunt) verſus eaſdem partes deſcribantur, illicò conſtitutus erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo æqualis: Neq; opus eſt tot ambagibus vti, quot Peletarius ad eam rem demonſtrandam adhibet; quamuis robur demonſtrationis ipſius idem ſit, quod mea. Et quod magis mirandum eſt, fatetur Peletarius ſe meam demonſtrationem vidiſſe, & eam nihilominus ſibi audet, tanquam propriam arrogare. En cur Peletarius clamet, me non paucas demonſtrationes parũ honeſtè, vt mihi vendicem, ſibi ſubducere conatum. Quis autem non videt, id eum in altero vituperare, quod ipſe ſibi glorioſum putat? Itaque multò veriùs, ac iuſtiùs eodem illum crimine ego, q. ille me, condemnare poſſum; cùm nunquã propoſitionum illarum inuentorem me appellauerim, vt ipſe, ſed ſolùm eius nomen, ob rationes à me expoſitas, reticuerim.

DEINDE angulum contactus, & acutum rectilineum eiuſdem generis eſſe, contra me pluribus verbis conatur oſtendere. Sed neſcio quo modo aberrat, quod dicitur, à ſcopo. Solùm enim probat, vtrumq; angulum eodem genere quantitatis contineri, hoc eſt, vtrumq; angulum planum eſſe; quòd acutus angulus rectilineus, vel etiam rectus conſtare poſſit ex angulo contactus, & alio angulo mixto: quod neq; ego, neq; vllus vnquam Geometra negauit. Ego angulos illos eiuſdem eſſe generis nẽgaui, hac ſolùm de cauſa, quòd angulus cõtactus, quantumuis multiplicatus angulum acutũ rectilineum ſuperare nequeat, vt in ſcholio huius propoſ. 16. euidenter oſtendi. Hinc enim fit, vt alter ad alterum proportionem non habeat, atq; adeò quodammodò diuerſi generis ſint: quemadmodum eadem de cauſa linea recta finita, & infinita non cenſentur eſſe eiuſdem generis, cùm altera ad alteram proportionem non habeat, quamuis ſub eodem genere magnitudinis, nimirum ſub linea recta, comprehendantur. Hoc itaq; feriat, vt collimaſſe videatur: quanquam vt omnia faciat, collimabit nunquam; ita longè abeſt, quod eſt propoſitum. Magnitudines autem, quarum altera multiplicata alteram ſuperare nequit, non cenſeri eiuſdem generis, (quod ad proportionem attinet) licèt ſub eodem genere quantitatis, hoc eſt, ſub longitudine aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur, liquidò conſtat ex defin. 5. lib. 5. vbi Euclides ſatis perſpicuè explicat, cuiuſmodi debeant eſſe magnitudines eiuſdem generis, inter quas proportio reperitur. Quare viderint alij, Peletarius homo conſideratus, quàm cogitatè me incogitantem hominem appellârit; quaſi non rectè intellexerim, quæ magnitudines ſint eiuſdem generis, quæ non ſint. Nunquam enim dixi (id quod mihi affinxit, vt carperet) duarum magnitudinum, quæ ſub diuerſis quantitatis generibus collocantur, quales ſunt linea, ſuperficies, corpus, ac numerus, alterutram ita poſſe multiplicari, vt alteram ſuperet: In quo, nemine reluctante, fruſtrà ſeſe fatigat, vt doceat, id fieri non poſſe; ſed de illis duntaxat magnitudinibus ſum locutus, quæ cùm in eodem genere quantitatis verſentur, diuerſi tamen generis cenſeri poſſunt: quales ſunt ſuperficies rectilinea, & curuilinea, ſiue mixta: Itemq; linea recta, & curua. Hæ etenim ita differre inter ſe videntur, vt Ariſtoteles liquidò affirmârit, vnam alteri æqualem eſſe non poſſe: quod tamen (pace Ariſtotelis dictum ſit) verum vſquequaque non eſt: cùm Architmedes in libro de Lineis ſpiralibus demonſtrauerit, quænam linea recta æqualis poſſit eſſe circunferentiæ cuiuſuis circuli dati, idemq; nos in quadratura circuli oſtenderimus. Non igitur negare poterit Peletarius, ab Euclide defin. 5. lib. 5. aliquas quantitates à proportionis definitione excludi, diuerſiq; propterea eſſe quodammodo generis, quod ad proportionem attinet, licèt in eodem magnitudinis genere ponantur: quales ſunt angulus contactus, & angulus rectilineus; Linea item recta finita, & infinita: Multas item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas plerique excludebant: cuiuſmodi ſunt curuilinea ſuperficies, & rectilinea; nec-

non

non linea circularis, & recta, vt paulò antè diximus, latiusq; in defin. 5. lib. 5. exponemus. Verùm Peletarius, ne opinionem illam ſuam, quam de angulo contactus ſemel imbiberat, deſerere cogeretur, noluit hanc expoſitionem 5. defin. lib. 5. recipere; immò eam vt oppugnet, omnes videtur in Apologia intendiſſe neruos, oblitus ſui, qui ferè eodem modo illam defin. in 5. lib. olim expoſuerat; niſi quòd non rectè inde colligit, angulum contactus non eſſe quantitatem, propterea quòd multiplicatus nullam magnitudinem, vt dicit, poſſit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falſum eſt. Nam licèt angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non poſſit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. ſolùm rectè colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem vllam; ad angulum verò alium contactus quemcunq; proportionem habere. Sed ſiue ita intellexerit eam defin. vt ex commentarijs eius in lib. 5. colligi poteſt, ſiue ſecus, vt in Apologia indicare videtur, nõ multum laboro: Certè ita illam eſſe intelligendam, vt expoſui, nemo, qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verùm enimuerò, ſi mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certè, (niſi arrogans haberi volet) aut Proclo grauiſſimo ſcriptori, qui libro 2. in lib. 1. Euclid. ad definitionem anguli plani eodem modo definitionẽ illam intellexit, aut Petro Nonio Luſitano, quem tanti facit, (& meritò id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac noſtra ætate in Mathematicis inferior) vt eum vnum prò multis millibus teſtem citet, & ſuarum demonſtrationum approbatorem, qui diſertiſſimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tum in Algebra ſua, illam definitionem explicat, vt à me eſt expoſita: quinetiã ibidem aſſerit, ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem; vt Petrus Nonius, quẽ teſtem produxerat prò ſe Peletarius, iam pro me teſtimonium dicat. Atq; ex hiſce duobus locis Petri Nonij facilè quiuis intelliget, q̃ ſine ratione, quanto contradicẽdi ſtudio mihi inſultet Peletarius, cùm ſemel atq; iterum odiosè percontatur, vndenam potuerim illi lineam infinitã deportare. In idem enim crimen (ſi crimen eſt, lineam infinitam exempli cauſa nominare) vocat etiam Petrum Nonium teſtem ſuum, atq; adeò omnes Philoſophos, quorum eſt illa vox nemini inaudita, præterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam eſſe proportionem. Deſinat igitur à me ſciſcitari, vnde lineam infinitam deportauerim: Inde enim reſpondebo, vnde eam Petrus Nonius, vnde Philoſophi omnes deportârunt. Quid? nónne ſophiſma illud Peletarij, ſemper in hoc erro, demonſtratio illa, volui dicere, & quidem palmaria, qua conatur oſtendere, propoſitionem 1. lib. 10. cum propoſit. 16. lib. 3. ſtare non poſſe, ſi angulus contactus concedatur eſſe quantitas, a Petro Nonio Peletarij cognitore eadem prorſus ratione, qua à me ipſo, confutatur? Quæ ſi germana demonſtratio eſt, miror quid ſit, cur eam Nonius Geometriæ ſcientiſſimus, idémque Peletarij approbator, minùs probârit: Cur nihilo magis demonſtrationes eiuſdem, quibus planum facit, (vt putat) angulum contactus quantitatem non eſſe, eundem illum Nonium nihil admodum mouerint? Id enim (niſi fallor) illa Nonij verba, (Si quis ſententiam Peletarij de angulo contactus amplecti velit.) declarant. Nam ſi demonſtrationes exiſtimaſſet, profectò Peletarij doctrinam in eo retinendam eſſe dixiſſet, Geometricæ enim demonſtrationes eiuſmodi ſunt, vt aſſenſum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloq; modo quempiam ſinant ancipiti opinione diſtrahi ſic, vt tum aſſentiatur, ſi velit, tum, ſi nolit, diſſentiat. En cur Peletarius Nonij teſtimonio aliorũ iudicia contemnat, en præclarum teſtimonium quod Petrus Nonius eius demonſtrationibus dedit: quò æquiore animo ferat, eas à me nihilo magis, quàm ab illo ſuo approbatore, demonſtrationes putari.

TERTIO, quòd exiſtimare dixi Peletarium, angulum contingentiæ nihil eſſe, falſum eſſe, clamat: Nuſquam enim dixiſſe ſe, nihil eſſe, ſed quantitatem non eſſe. Itáne verò? at in prædicamento Quantitatis, quod neq; eſt punctum, (quis enim inclinationem illam punctum eſſe dixerit?) neq; quantitas, quo alio nomine vocetur, q̃? Nihil? Sed, vt vt dixit, profectò non modò mirabile eſt, ſed monſtri in Geometria ſimile, putare angulum contactus non eſſe quantitatem, qui poſtea additus aliis angulis efficiat curuilineum angulum rectilineo æqualem. Quis enim vnquam Geometrarum id, quod quantitas non eſt, magnitudini adiunxit, vt æqualem eam alteri efficeret? Prætereo, q̃ figura trilatera curuilinea intra tres circulos ſe mutuò tangentes concluſa nullum haberet angulum ex Peletarij ſententia; quia tres illi contactus, anguli non ſunt: cùm tamen tribus diuerſis lineis contineatur; quod omnino nouũ eſt, & inauditũ apud Geometras. Itemq; ſi quatuor, aut plures circuli ſe mutuò tangerent, vt fieret figura curuilinea quadrilatera, vel plurium laterum, illa nullum angulum haberet. Atq; etiam ſi duæ lineæ rectæ angulum continentes, vnum eundemq; circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curuum, vnicũ tantùm haberet angulum. Quæ omnia ſi ſunt abſurda, conſentanea non eſt opinio Peletarij. Sed nimis fortaſſe multa ad Nihil illud Peletarij euertendum, ad quod euertendum ille nihil afferat. Quoniam verò, ne pro Nihilo ſuo nihil agere videatur, quando res non poteſt, mea verba carpit, verba defendam: quæ quidem ille, neſcio quibus præſtigijs ita deprauat, vt dicere videar, Nihil eſſe minus quocunq; angulo: atq; (vt ſimplicem, credo, hominem irretiat) quærit ex me, quod tandem genus ſermonis ſit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Neq; enim ego eiuſmodi ſermonem agnoſco, q̃, Nihil eſſe minus quocunq; angulo, nuſquam dixerim, niſi ex ſententia Peletarij. Sed videlicet homo vehemẽs, vt ſuum illud Nihil vlciſceretur, aliud mihi Nil affinxit, quo cũ impunè pugnaret: At quàm palæſtricè pugnat! quàm ſibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo petitus fuerat, in me ipſum mira venuſtate conuertit? Sic enim argumentatur. (Angulus contactus nihil eſt: Angulus contactus angulo contactus maior eſt. Angulus igitur maior nihilo eſt: Atqui Clauius eundẽ ponit minorẽ nihilo

Eſt igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor.) *Mox quaſi Nihil illud ab ſe efficium iugulaſſet, exclamat.* (En Clauij argumenta, quæ vtrum tandem Peletarij ſophiſmata ſunt, an Clauij potiùs figmenta, cùm ipſe ſuum angulum contactus nihil eſſe dicat, non ego?) *Verùm vt hominem ſæneum, atq; adumbratum nequicquã petere deſinat, virum oſtendam, qui cum, ſi velit, certare cum laude poſſit. Ego vt oſtenderem, angulum contactus, ex Euclidis ſententia, verè eſſe angulum, & angulum ſemicirculi angulo recto rectilineo minorem, ita ſum argumentatus. Si Euclides ſenſiſſet, angulum contactus nihil prorſus eſſe (hoc eſt, vt Peletarius intelligit, non eſſe angulum, vel non eſſe quantitatem) & angulum ſemicirculi æqualem recto rectilineo; quid, obſecro, tantoperè deſudaſſet, vt demonſtraret, angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum verò ſemicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiuſmodi eſt angulus contactus, ex Peletarij ſententia, hoc eſt, quàm id, quod quantitas non eſt, minus eſſe quocunque angulo? Quid rurſus magis perſpicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, maiorem eſſe quolibet acuto? Agnoſcat itaque Peletarius, Nihil illud ſuum male à nobis acceptum, idq; ita vlciſcatur, vt meum hoc argumentum refellat: in quo ego ſi angulum contactus dixi eſſe nihil, & non potius eum nihil eſſe aſſerui ex ſententia Peletarij, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intellexiſſe meum argumentum, aut intelligere noluiſſe: niſi cum quis dicat, dedita opera verba mea voluiſſe cauillari; quod & pleriſque aliis in locis facere videtur. Nunquam enim dixi, angulum contactus minorem eſſe, aut maiorẽ nihilo: Solùm affirmaui, angulum contactus quemcunque minorem eſſe, aut maiorem aliquo alio angulo contactus, quem non ego dixi nihil eſſe, ſed Peletarius, eundemq; Euclides minorem quolibet acuto rectilineo rectè demonſtrauit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipſe negat, didiciſſe Dialecticam, illum ipſum tam lepidum, atq; acutum ſyllogiſmum, quo Nihil illud ab ſe confictum mira venuſtate confixit, pauliſper conſiderabimus, vt quàm ſuo iure Dialectica ignaros alios vocet, appareat. Nam mihi quidem male tornatus ille ipſe ſyllogiſmus videtur; incudiq; reddendus. Etenim cùm verſetur in tertia figura, in eo maior extremitas, (vt Dialectici loquũtur) quæ eſt, Nihil, de minori extremitate, quæ eſt, angulo cõtactus maior, in recto prædicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil eſt: Angulus cõtactus angulo contactus maior eſt. Igitur aliquid, quod angulo contactus maius eſt, nihil eſt. Quæ quidem concluſio rectè ſequitur ex præmiſſis, quarũ prior Peletarij eſt, nõ mea, poſterior autẽ mea, & Procli, immò & Euclidis. Concluſio autẽ illa Peletarij, Angulus igitur maior nihilo eſt, nulla ratione ex præmiſſis inferri poteſt. Nam ſi, angulum cũ dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, aſſumitur medius terminus, qui in vtraq; præmiſſa ſubijcitur: quod nefas eſſe, Ariſtoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamãt. Si autẽ alium angulum intelligit, aſſumitur in concluſione terminus, cuius nulla facta eſt mentio in præmiſſis: quod nihilo magis licere, nemo eſt tam plumbeus in Dialecticis, qui neſciat. Neq; contendat Peletarius, mentionẽ factam eſſe anguli in minore extremitate, vbi dictum eſt, angulum contactus angulo contactus maiorem eſſe. Nam angulus in minore extremitate poſitus eſt in obliquo, qui in concluſione ſubijcitur in recto: quod, vt auctore Ariſtotele, docent omnes Logici, ſine peccato fieri non poteſt. Quod, vt planum fiat, vtemur ea palinodia quam ab illo didicimus. Si quiſpiam ita argumentetur; Angulus in ſemicirculo rectus eſt: Angulus in ſemicirculo angulo acuto maior eſt. Angulus igitur acutus maior recto eſt; quis, modò ſit imbutus Dialecticis, cuiuſmodi argumentationem probet, cùm præmiſſa verа ſint, concluſio autem falſa? Talis ille ſyllogiſmus eſt Peletarij, qui apud imperitam multitudinem alter Chryſippus videri voluit. Concluſio, quæ rectè ex præmiſſis inferretur, hæc eſſet. Igitur aliquis angulus, qui acuto maior eſt, rectus eſt. Sed tamen ei veniam dandam puto, quòd ſe Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere profitetur, cuius ego me Dialectica, ſi ab Ariſtotelica abhorret, planè fateor ignarum. Fatetur deinde Peletarius, ſe non intelligere, quo pacto dicere poſſim angulum rectilineum minimum dari non poſſe, & tamen angulum contactus eſſe omni acuto rectilineo minorem, (ipſe, vt aliquid addat de ſuo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem; cùm tamen verbum illud, minimo, ego nõ addiderim) cupitq; ſcire, quid aliud ſit, angulum contactus minorem eſſe omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus eſſe acutorum rectilineorum minimum. Qua in re morem geram hòmini non grauatè, etſi è ſcholio huius propoſ. 6. potuit id, quod cupit, cognoſcere. Nempe ea ratione me illud potuiſſe dicere, qua dicimus, angulum obtuſum rectilineum minimum dari non poſſe, & tamen angulum rectilineum acutũ eſſe omni obtuſo rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud eſt, angulum rectilineum acutum minorem eſſe omni rectilineo obtuſo, quàm angulum rectilineum acutum eſſe obtuſorum rectilineorum minimum: propterea quòd angulus acutus non eſt obtuſus, ſicut nec angulus contactus rectilineus eſt, aut acutus. Id quod etiam clariſſimè docet Proclus lib. 2. in primum Euclidis ad definitionem anguli recti, obtuſi, & acuti. Sed hæc puerilia ſunt, & quæ magis ad Grammaticos ſpectent, quàm ad Geometras. Quòd etiam, ne librum meum parum ſpiſſum viderer feciſſe, ſuas demonſtrationes ad verbum me recitaſſe queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipſo deſidero. Id enim eo à me conſilio factum eſt, vt omnes planè viderent, ſyncerè me, ac fideliter eius opinionem retuliſſe, nullumq; omnino verbum immutaſſe. Quod vtinam in meis verbis recitandis ipſe facere in animum induxiſſet. Multò enim minus ſpiſſam Apologiam ſuam facere potuiſſet. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarij verbis magis ſpiſſum efficere? Qui enim parum ſpiſſum iudicarem librum eum, qui nec raras, nec inanes in libros omnes Euclidis commẽtationes contineret, cùm Peletarius ſuum librum, qui ſex priorum duntaxat librorum demõſtrationes complectitur, ſatis ſpiſſum*

fit

ſit arbitratus? Sed eo ſum æquior Peletario, quòd ex ſe alios iudicat. Nam in Apologia ſua, ne inanis rerum videretur, tres demonſtrationes nihil penitùs ad eam pertinentes inſerſit: quarum priorem immeritò ſuam propriam facit, vt ſuprà dixi: poſteriorem verò, quam mirum in modum gloriatur ſe clariorem feciſſe, ego & longè breuiùs & dilucidiùs (niſi meorum me amor fallat) iam pridem demonſtraui, vt mox, Deo adiuuante, ex libello meo de dimenſionibus magnitudinum apparebit. Sed licuerit Peletario ſua Apologia, ne incomitata prodiret, nouo more comites ac pediſſequas adiungere: mihi cur non liceat, quod omnibus ſemper licuit, aliorum ſententias totas meis ſcriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atq; in primis Petrũ Nonium laudatorem ſuum, q̃ idem fecit in refellendis paralogiſmis Orontij, aut ſine cauſa id ſe mihi vitio dediſſe fateatur. Quòd ſi poſtquam tam fideliter eius verba propoſui, Peletarius criminatur, me eius ſententiam perperam eſſe interpretatum, quid facturus fuiſſet, ſi alienis verbis eius opinionem in medium adduxiſſem? Equidem facile ſibi perſuadebit quis, nullum eum verbum relicturum fuiſſe, quod non reprehendiſſet.

Qvarto vt leuiora hæc omittat, illud putat palmare, quòd me laborare oſtendit, vt probem angulos contactus alios alijs eſſe inæquales: propterea q̃ ſcripſi, æqualitatem angulorum eiuſdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita vt linea vnius conueniant omnino lineis alterius, ſi alter alteri ſuperponatur, iuxta ectauum pronunciatum. Quain re dupliciter me peccare ait. Primùm quòd dicã, ad æqualitatem angulorum eiuſdem generis requiri eandem linearum inclinationem; cùm tamen angulus rectilineus, oſtenſus ſit à me æqualis curuilineo, atq; adeò eiuſdem generis cum illo, licèt non ſit in vtroq; eadem linearũ inclinatio. Deinde quòd putẽ angulos contactus ideò inter ſe inæquales eſſe, quòd ſibi mutuò nõ congruant. Equidem ſi quid in eo à me peccatum eſſe intelligerem, & peccatum (quod eſt ingenuo, & liberaliter educato homine dignum) agnoſcerem, & Peletario correctori, & emendatori meo (quocunq; id animo fecerit) gratias agerem. Nunc verò, cùm, tota re etiam atq; etiam conſiderata, nihil omninò vitij ineſſe videam, ita, quæ obijciuntur, diluam, vt tamen gratiam habeam Peletario, qui occaſionẽ dedit eius loci diligentiùs explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiuſdem generis illos, qui vnam lineam habent rectam, & alteram circularem, quales ſunt anguli contactus, & ſemicirculorum, de quibus tunc agebamus. Quare cùm linea recta vnius congruat lineæ rectæ alterius, circularis verò circulari nõ item, niſi circuli ponantur æquales, efficitur, angulos illos eſſe inæquales inter ſe, quippe cũ alter alterũ excedat. Eadem ratione, ſi dentur duo anguli curuilinei æqualium circulorum æquales, neceſſe eſt, lineas vnius lineis alterius congruere, ſi alter alteri ſuperponatur. Quòd ſi Peletarius hanc doctrinam oppugnat, ſciat, ſe iam bellum mouere non mihi ſed Proclo, qui libro 3. in primum Euclidis ad propoſ. 4. idem prorſus docet, quod ego. Ait enim, (Angulorum autẽ æqualitatem ſumemus iuxta conuenientiam laterum in rectilineis: in cæterisq; omnibus, qui eiuſdẽ ſunt ſpeciei, vt in Lunaribus, in Syſtroidibus, atq; in vtrinq; conuexis, &c.) *Et infrà,* (Quæ æqualia data ſunt, ſibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum eſt, ſed in iis, quæ ſpecie ſimilia ſunt. Specie autem ſimilia hæc dico, vt recta linea rectæ lineæ, & circunferentia circunferentiæ circuli eiuſdem, & anguli, qui à ſimilibus ſimiliter iacentibus lineis comprehenſi ſunt. Horum autem dico, quòd quę æqualia data fuerint, ſibi inuicem congruunt.) *Nónne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos ſolùm angulos contactus concedere æquales, quorum recta linea, & curua ſibi mutuò congruunt? Temerè igitur Peletarius mihi obijcit angulum rectilineum, & curuilineum, triangulum & quadratum, atque alia huiuſmodi, de quibus eo loco ſermò non erat; quippe qua non ſint eiuſdem ſpeciei, atq; adeò æqualitatem tueantur, etiamſi alterum alteri non congruat. Vt iam vereri incipiam, ne Peletarius noſter contentionis ſit cupidior, quàm veritatis.*

Postremo, vt nihil intactum relinquat, me non modò Geometriæ ignarũ vocat, ſed etiam Logices: propterea quòd lib. 5. dixi, non rectè à quibuſdam diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, atq; inæqualitatis; quòd multæ proportiones inæqualitatis ſint etiam irrationales. Ego verò (etſi non is ſum, qui mihi quicquam vllo in genere arrogem) tamen in hiſce ſtudiis, in quibus mediocriter verſatus ſum, planè rudem non eſſe, pra me ſemper tuli. Quantulum autem ſit id, quod in vtroque poſſim, cæteri melius, qui vacant amore, & odio, iudicabunt, Peletario quidem ipſi ita me adhuc reſpondiſſe arbitror, vt iam minus fortaſſe ignarus Geometriæ, ac Dialectiæ videar, quàm putarat. Nunc, vt perſpiciat, neq; me pertinacem eſſe, neque illa, quæ exagitat, à Dialecticorum præceptis abhorrere, libenter ei concedo, diuiſionem illam, quam à me reprehenſam criminatur, probam eſſe, ita tamen, ſi in quolibet diuiſionis membro Diuiſum intelligatur: neque verò hoc vnquam negaui, cùm alibi ſimiles diuiſiones vſurpem. Solum id eo loci contendi, rectiùs meo iudicio, diuidi Proportionem in vniuerſum duplici diuiſione priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; poſteriori verò in proportionẽ æqualitatis, atq; inæqualitatis, (quod veriſimum eſſe neminem negaturum cenſeo, qui rem diligentiùs expenderit) cùm tam priora duo membra diuidentia, quàm poſterior totum Diuiſum (vt Logici loquuntur) exhauriant: quàm ſi prius membrum prioris diuiſionis, hoc eſt, proportio rationalis, ſecetur in proportione æqualitatis & inæqualitatis, cùm hæc membra diuidentia latius patãt, q̃ Diuiſum, niſi in illis Diuiſum intelligatur. Atq; eò magis duplex illa diuiſio mihi probatur, q̃ non deſint, qui primùm partiantur Proportionẽ in proportionẽ æqualitatis, & inæqualitatis, poſteriorem deinde hanc in proportionẽ rationalem & irrationalem: contrario ſcilicet modo, quàm priores. Vt igitur hanc controuerſiam dirimerem, ac dubitationem, vtri rectiùs faciant, priorésne, an poſteriores, tollerem,

ſtatui duabus diuiſionibus ſecandam eſſe Proportionem, quarũ vtraq; abſolutiſsima eſt, ac perfectiſsima. Non aliter arbitror, omnes magis eſſe probaturos, ſi corpus duplici diuiſione ſecetur, primũ quidem in viuens, & nõ viuens; deinde verò in album, nigrum, ac mixto colore affectum: q̃ ſi corpus viuens diuidatur in album, nigrum, ac mixto colore affectum; ob cauſam iam dictam: licet hæc ſubdiuiſio bona ſit, ſi Diuiſum ſemper intelligatur. Huiuſmodi diuiſiones ſexcentas adducere poſſem: ſed ſatis eſt, me prudenti lectori inſtitutũ meum in diuiſione Proportionis expoſuiſſe, & cur duplicem illam diuiſionẽ ſubdiuiſioni aliorum prætulerim. Quòd ſi tam acres, & ſeueri iudices ſingulorum verborum aut improprietatum, quæ per incogitantiam interdum excidunt, eſſe velimus, ne ſcriptorum nullus aliquo vitio carebit, neque ipſe quidem Peletarius, vt partim ex ijs, quæ dicta ſunt, conſtat, partim etiam ex alijs eius demonſtrationibus apparere poteſt: quas ſi liberet ad cer tam illam Dialecticorum normam exquirere, profectò reprehendendi materia nõ deeſſet. Verùm non eſt hoc noſtri conſilij, refellendi ſtudio vitia aliena ſcrutari, ſed vbi ſeſe occaſio obtulerit, meam (qualiſcunque eſt) de aliorum ſententijs ſententiam exponere: Solùm ab eo petò, (quoniam ſe tam acutum Dialecticum iactat, vt alios contemnere videatur; quanquam ex ſuperiore ſyllogiſmo, quem in me conuertit, liquidò conſtat, q̃ ſit Dialectica peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauſerit; Omnes anguli contactus ſunt minores quolibet angulo acuto rectilineo: ergo omnes inter ſe ſunt æquales. Itemq; hanc; Anguli ſemicirculorum, quò à maioribus circulis fiunt, eò ſunt maiores: igitur tandem ad aliquem perueniemus, qui recto rectilineo maior ſit; in qua quidem ad Cardanum ſcribit, nullum eſſe paralogiſmum. Ego ſanè vehementer miror, qua ratione in tam apertas hallucinationes, & viro Geometra omnino indignas, incidere potuerit. Sed argumentationes eiuſmodi ſatis ſuperq; in ſcholio huius propoſ. 16. à me ſunt confutatæ, adductis contra ipſas euidentiſsimis inſtantijs. Deinde quòd me perſtringit, quaſi parum intellexerim, quæ ſit proportio rationalis, & quæ irrationalis, non multum laboro. Conſtat enim, eum ſtudio mihi detrahendi id dixiſſe; cùm has proportiones vbique ex ſententia grauiſsimorum ſcriptorum definierim: neq; verò ipſe, vllum peccatum à me ea in re eſſe commiſſum, poterit oſtendere. Certè commentarius meus in librum 10. Euclidis abundè declarat, num illas intellexerim, nécne. Deniq; quòd criminatur, me in definitionibus lib. 5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum eſt. Perſpicuis enim verbis docui in defin. 4. lib. 5. me in commẽtario comparationem duarum quantitatum Proportionem cum pluribus Geometris appellaturum, habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem; licèt in textu cum interprete illam dicam Rationem, hanc verò, Proportionem. Neque enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meis verbis poteſt eſſe ambiguitas.

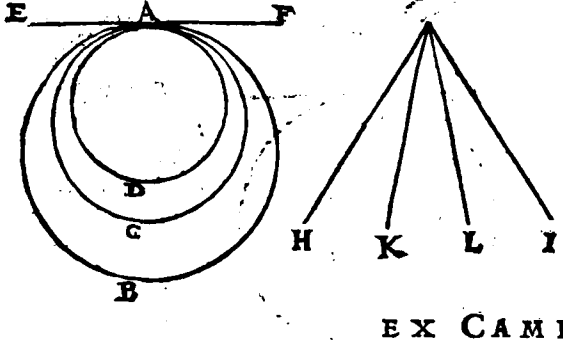
Ex his, quæ diximus, ſatis (vt opinor) apparet, doctiſsimos illos viros, de quibus initio memini, non ſine cauſa Apologiam Peletarij inanem, ac reſponſionis indignam iudicaſſe. Ego tamen, ne contemnere hominem viderer, quem ſemper laudandum eſſe duxi, occaſione inuitatus reſpondendum amicè putaui. Exiſtimet ille, angulum contactus quantitatem non eſſe, atq; adeò angulum ſemicirculi recto rectilineo eſſe æqualem, ego certè contrariam ſententiam tuebor, donec aliud mihi demonſtratum ab aliquo fuerit: rationes enim Peletarij fallaces ſunt, nihilque continent in ſe probabilitatis, vt in ſcholio huius propoſ. 16. oſtendi, vbi omnes diſſolui: neque meis ipſe ſolutionibus vel vnum verbum (exceptis ijs, quæ ſuprà ex lib. 10. adduxi) reſpondit; quod tamen maximè ad Apologiam pertinebat: Vt non ſine cauſa permulti exiſtimauerint, eum nõ veritatis ſtudio eam Apologiam ſcripſiſſe, ſed ne veritati ceſſiſſe videretur. Nec verò quiſquã putet, me vnũ exiſtimare, angulum contactus verè eſſe angulum, & angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim eius rei auctores, eosq; grauiſsimos laudare poſſum, Theonem, Campanũ, Petrum Nonium, & (vt Nonius refert) Archimedem, atq; Iordanum: quin etiam (quod plurimi facio) Euclidem ipſum, eiusq; commentatorem celeberrimum Proclum; vt taceam ex Gallis præſtantiſsimos, atque eruditiſsimos viros non paucos, è quorum numero in primis eſt Franciſcus Candallæ ex illuſtriſsima Fluſſatum familia oriundus, qui inſigne volumen in elementa Geometrica Euclidis edidit, vbi ad propoſ. hanc 16. apert. ſimè docet, angulos contingentiæ verè eſſe angulos, ex definitione anguli plani, aliosq; alijs eſſe maiores, æquales, ac minores: Eos autem, qui aliter ſentiunt, (Peletarium proculdubiò intelligit. Præter eum enim ad hunc diem nemo hac de re ſcriptſit) abſurdè multa ex falſis ſuppoſitis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium Profeſſor regius, qui, cùm Apologiam Peletarij in me conſcriptam vidiſſet, opuſculum eruditum aduerſus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem ſtudioſus Lector videat, quid in hoc negotio ſentiat Proclus, afferam in medium pauca quædam ex eius commentarijs in lib. 1. Euclidis, quæ obiter notaui, & ex quibus liquidò conſtabit, eius ſententiam eſſe Peletarij commento prorſus contrariam. Primùm itaque ita ſcribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (Duæ namque circunferentiæ ſe inuicem ſecando, vel ſeſe contingendo, angulos efficiunt. Quinetiam à recta linea, & conuexa circunferentia angulus continetur, vt Cornicularis.) Intelligit autẽ nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtũ. Paulò enim antè dixerat, angulum Cornicularem eſſe omni rectilineo minorem: quod ſolius anguli contactus proprium eſt. Deinde in eodem libro ad definitionem anguli recti, obtuſi, & acuti ita habet. (Cornicularis namque angulus omni recto eſt minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus eſt: Semicircularis itidem quocunque recto eſt minor, acutus tamen non eſt.) Quid clarius, quàm Proclum hic aſſerere angulum ſemicirculi minorem eſſe recto? Rurſus lib. 3. ad

ad propoſ. 4. lib. 1. Euclidis ita ſcribit. (Addiſcemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto ſem per inæqualis eſt, & nunquam æqualis; Et ſemicircularis ſimiliter, tranſitusque à maiori ad minus non omnino per æquale fit.) *En quàm apertè docet angulum ſemicirculi æqualem eſſe non poſſe angulo rectilineo, tranſitumq́ propterea fieri à maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumque Peletarius negat, audetq́ poſterius appellare paralogiſmum. Denique eodem lib. 3. ad propoſ. 23. hæc verba habentur.* (Cùm autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis eſſe poſsit, &c.) *Et Peletarius tamen non dubitat angulum ſemicirculi, qui mixtus eſt, angulo recto rectilineo facere æqualem, contra Procli ſententiam. Ex his liquere arbitror, vt de cæteris taceam, idem ſentire Proclum de angulo contactus, & ſemicirculi, quod ego contra Peletarium ſcripſi; quis autem neget, maiorem eſſe auctoritatem, meliora argumenta Procli, quàm Peletarij?*

Obiter quoque hoc loco monendum lectorem cenſeo, id, quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex ſententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam eſſe de angulo contactus, qui in conicis ſectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipſi. Vt enim Apollonius Pergæus demonſtrat lib. 1. propoſ. 32. in locum, qui inter coni ſectionem, & rectam lineam tangentem interijcitur, altera recta linea non cadit; atque adeò angulus ille contactus minor etiam eſt omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (ſi nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis) omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non eſt, (eadem enim hic eſt ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter ſe æquales, hoc eſt, vt ipſe vult, non inæquales, & reliquorum angulorum ſingulirecto rectilineo æquales. Vbi ſanè maior abſurditas apparet, quò ad ſenſum, in ea Ellipſi, quæ perexiguam habeat latitudinem, & in ea Hyperbola, quæ ferè linea recta eſſe videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticē illius Ellipſis, & Hyperbolæ conſtituti; vt incredibile omnino ſit, niſi firma ratione demonſtretur, angulos illos contactus ad vertices ſectionum conſtitutos inter ſe, & reliquos ex rectis inter ſe quoque eſſe æquales; propterea quòd in ea Ellipſi linea tangens magis recedere perſpiciatur à circunferentia Ellipſis, quàm in circulo; in illa verò Hyperbola minus. Sed hæc alio tempore examinanda relinquamus: nunc ad interruptam expoſitionem Euclidis reuertamur.

EX CARDANO.

Aliqva quantitas poteſt continuè, & infinitè augeri, altera verò infinitè minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque ſit, minus ſemper erit decremento huius.

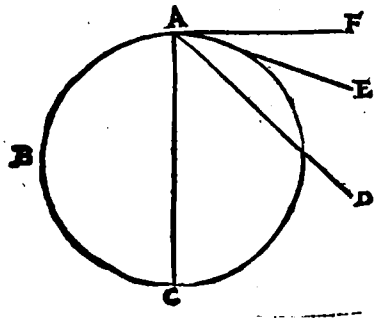


Proponantvr enim angulus contactus B A E, & acutus H G I. Si igitur deſcribantur alij circuli minores A C, A D, tangentes rectã E F, in A, augebitur continuè angulus contactus, vt dictum eſt. Si rurſus inter rectas G H, G I, aliæ rectæ cadant G K, G L, diminuetur continuè angulus acutus: Et tamen ſemper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor eſt angulo acuto, quantumuis diminuatur.

EX CAMPANO.

Cætervm ex hac propoſitione 16. perſpicuum eſt, vitioſam eſſe argumentationem hanc, qua vſus eſt Briſon in quadrando circulo, vt auctor eſt Ariſtoteles. Videlicet.

Transitvr à minori ad maius, vel contrà, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

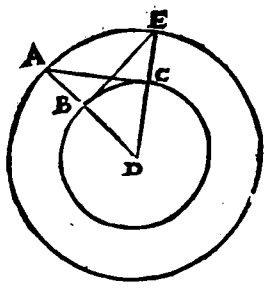


Describatvr enim circulus A B C, cuius diameter A C, mouerí intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in A. Hoc conceſſo, manifeſtum eſt, quandiu recta A C, ſecat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo ſemicirculi; quamprimum verò ſecare ceſſat, effici angulum rectum maiorem eodem angulo ſemicirculi. Cùm igitur factus ſit tranſitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo ſemicirculi; (Rectus enim, vel obtuſus, maior eſt; & acutus, minor;) conſtat quoq; vitioſam eſſe poſteriorem conſequentiam.

PROBL. 2. PROPOS. 17. 16.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Ex puncto A, ducenda ſit linea, quæ tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta



AD, ſecans circulum B C, in B. Deinde centro D, interuallo autem D A, deſcribatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, ſecans circulum A E, in E. Ducta denique recta E D, ſecante circulum B C, in C, connectatur recta A C: quam dico tangere circulum B C, in C. Cùm enim duo latera D E, D B, trianguli B D E, æqualia ſint duobus lateribus D A, D C, trianguli C D A, vtrumque vtrique, vt conſtat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus, ſit communis: Erunt[a] & baſes B E, C A, & anguli D B E, D C A, ſuper ipſas, æquales. Eſt autem D B E, rectus ex conſtructione. Igitur & D C A, rectus erit. Itaque C A, cùm ſit perpendicularis ducta ad C, extremum ſemidiametri C D, tanget circulum, per corollarium præcedentis propoſitionis. A dato ergo puncto A, ducta eſt A C, recta tangens circulum B C, in C, quod faciendum erat.

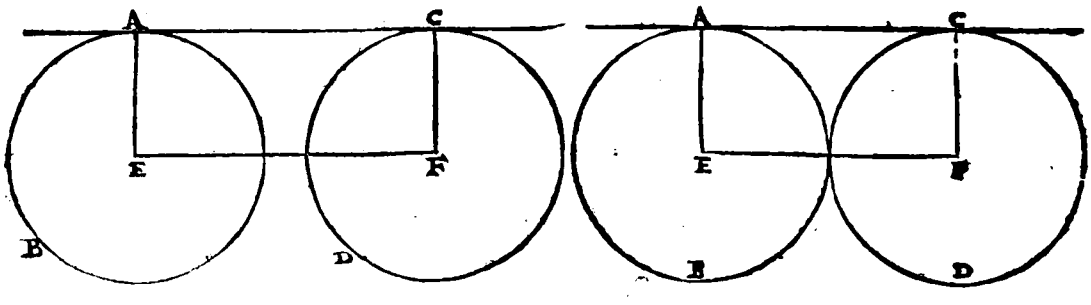
a 4. primi.

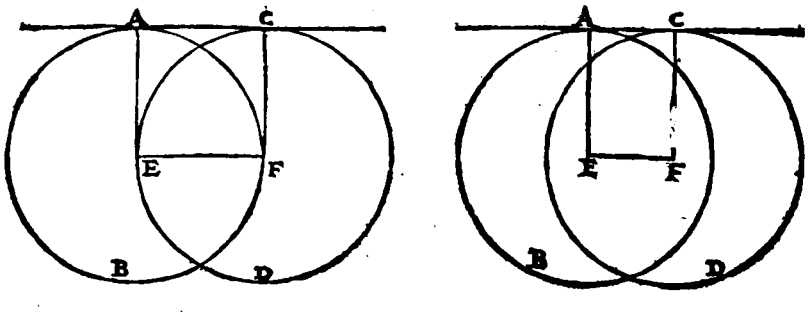
SCHOLIVM.

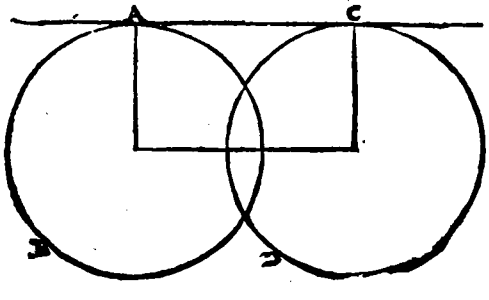
PRAXIS huius problematis ex ipſa demonſtratione facilè elicitur. Faciliorem tamen praxim, ad præpoſitionem 31. huius libri inuenies.

SED & ſequens problema cum Cardano abſoluemus.

PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.





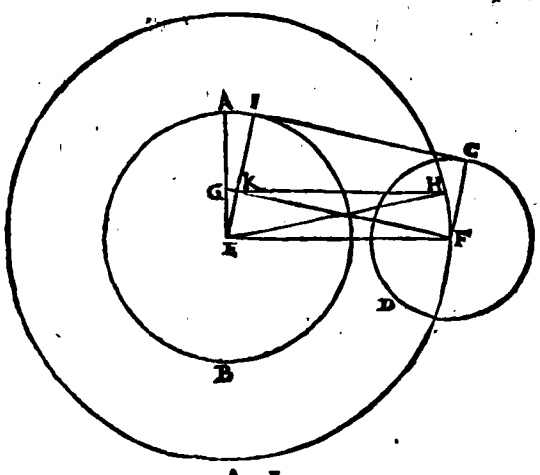


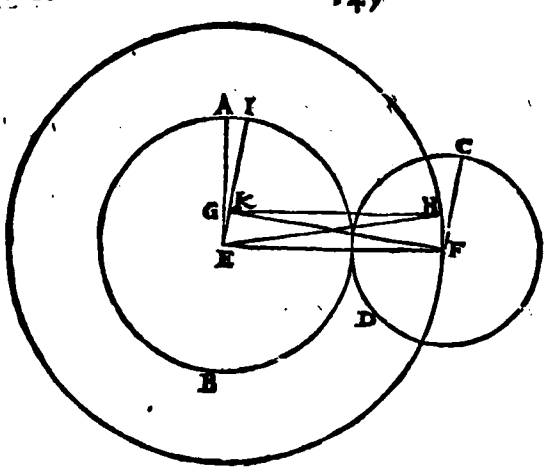
SINT primùm duo propoſiti circuli æquales, A B, C D, quorũ centra E, & F, recta iungantur E F, ad quam ducantur perpendiculares E A, F C, ſecantes circunferentias in punctis A, & C. Dico rectã p A, & C, eductam vtrumq; circulũ tangere. Cùm enim E A, F C, ſemidiametri circulorum æqualium ſint æquales,[a] & parallelæ, quòd anguli E, & F, recti ſint;[b] Erunt quoq; E F, recti. Quare, per A C, æquales & parallelæ; Ideoq;[c] & anguli A, & C, coroll. propoſ. 16. huius libri recta A C, vtrumque circulum tanget, cùm rectos angulos conſtituat in extremitatibus ſemidiametrorum.

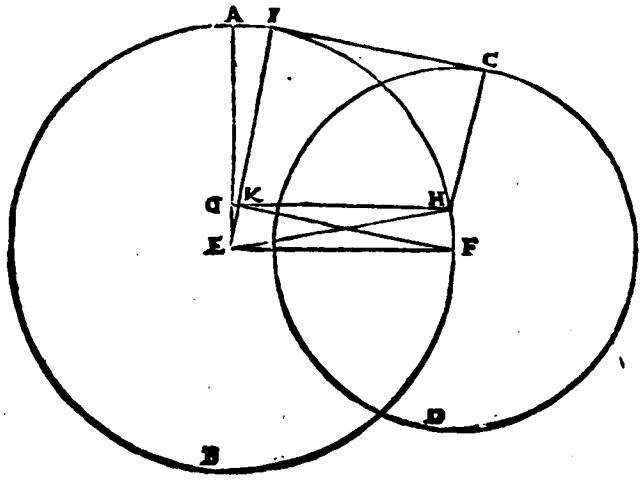
a 28. primi.
b 33. primi.
c 29. primi.

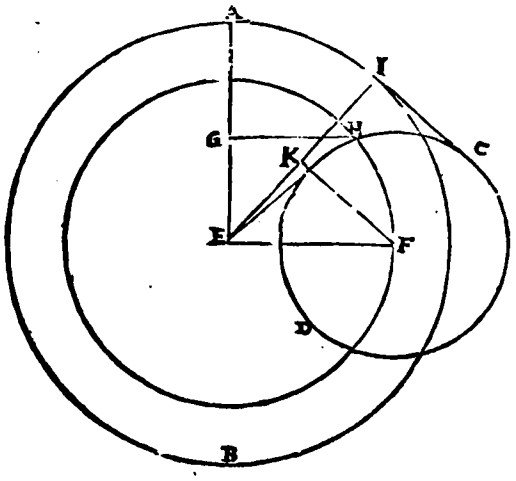
SINT deinde duo circuli propoſiti inæquales A B, C D, quorum rurſus centra E, & F, iungantur recta E F, ad cuius interuallum ex E, centro maioris circuli circulus deſcribatur F H, ſi maior non tranſeat per centrum minoris. Deinde ducta ad E F, perpendiculari E A, abſcindatur ex ea portio A G, ſemidiametro minoris circuli C D, æqualis; & ex G, ipſi E A, perpendicularis ducatur G H, vſque ad circunferentiam circuli F H, proximè deſcripti. Ducta autem recta H E, fiat angulo H E A, angulus F E I, æqualis; atque per F, agatur ipſi E I, parallela recta F C. Dico rectam per puncta I, & C, ductam vtrumque circulum A B, C D, contingere. Abſcindatur enim ex I E, recta I K, ipſi A G, vel ſemidiametro F C, minoris circuli, æqualis, vt ſint reliqua E G, E K, æquales quoque, ducaturq; recta K F. Quoniam igitur latera H E, E G, trianguli H E G, æqualia ſunt lateribus F E, E K, trianguli F E K, & anguli ipſis contenti æquales, ex conſtructione: d 4. primi. *Erunt anguli H G E, F K E, æquales; Ac proinde, cùm H G E, rectus ſit, ex conſtructione, erit & F K E, rectus*

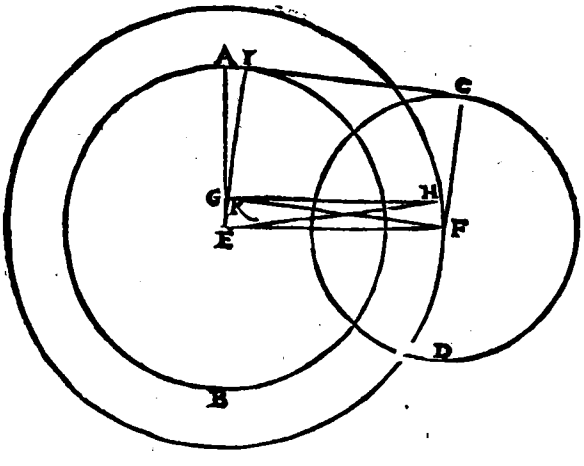
Rurſus

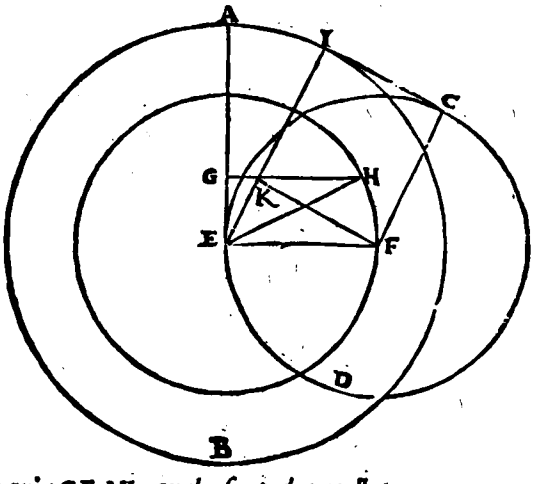


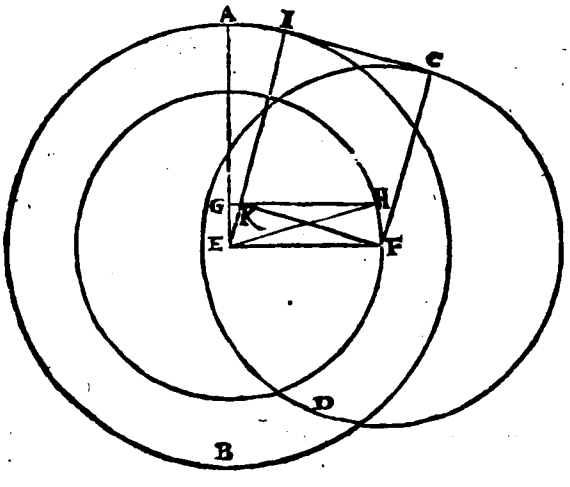












Rursus quia C F, I K, *æquales sunt, & parallelæ, ex constructione,* [a] *erunt quoque* I C, K F; *æquales & parallelæ; Atque propterea angulus* E I C, [b] *cũ æqualis sit externo* F K E, *rectus erit;* [c] *Ideoq́ & angulus* I C F, *rectus existet. Quocirca, per corollarium propositionis 16. huius libri, recta* I C, *vtrumque circulum continget, cùm rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorum. Quod erat propositum.*

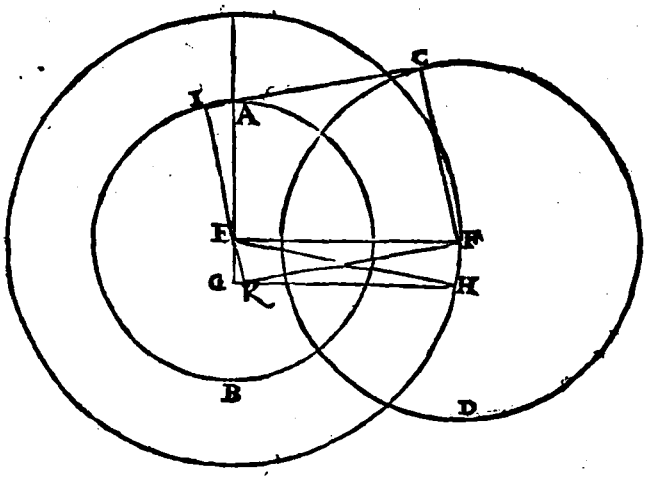
a 33. primi.

b 29. primi.

c 29. primi.

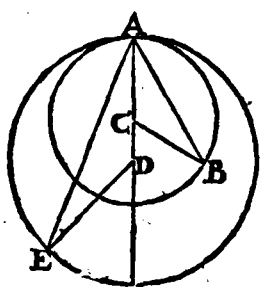
SAT IS autem constat, si circuli propositi æquales fuerint, id quinque modis posse fieri. Aut enim alius extra alium cadit, aut se mutuò contingunt, aut se inuicẽ p centra secant, aut nõ, ita tamẽ, vt vel cẽtra consistãt in communi eorũ segmento, vel certè extra illud.

ITEM *si circuli propositi fuerint inæquales, id contingere posse septem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipsum tangit, aut ipsum secat, ita vt vel centrum eius sit in circunferentia maioris, vel intra ipsum circulum, hac tamen lege, vt circunferentia minoris citra centrum maioris transeat, vel centrum minoris sit extra circulum maiorem, vel iterum ita intra, vt circunferentia minoris per maioris centrum incedat, vel denique ita intra, vt circunferentia minoris includat centrum maioris.*



QVONIAM *verò, circulis inæqualibus existentibus, initium constructionis sumpsimus semper à maiori, si quis maluerit à minori incipere, id efficiet eadem constructione, demonstratione q3, nisi q rectæ AE, IE, protrahendæ sunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, contentos lateribus HE, EG; FE, EK, idcirco æquales esse, q HEA, FEI, reliqui duorum rectorum æquales sint ex constructione. Denique angulum EIC, esse rectum ex 29. propositione libri 1. quòd & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.*

QVIA *verò & per punctum in circunferentia circuli datum, & per punctum extra circulum existens lineam rectam, quæ circulum tangat, ex iis, quæ demonstrata sunt, ducere possumus; per punctum quidem in circuli circunferentia positum, ex corollario propositionis 16. per punctum verò extra circulum, ex hac propositione 17. Item ostensum est hoc scholio, rectam duci posse, quæ duos circulos tangat, dummodò alter eorum in altero non totus includatur; non alienum erit hoc loco demonstrare, quo pacto per datum punctum circulus alium datum circulum tangens, siue interius, siue exterius, describendus sit: Item qua ratione describendus sit circulus tangens duos alios circulos, quorum vnus non sit totus intra alium.*



SIT *ergo primùm in circulo AB, cuius centrum C, datum punctum A, in circunferentia, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta AC, sumatur in ea quoduis punctum D, ex quo ad interuallum DA, circulus describatur AE, qui circulum AB, in A, tanget; Et siquidem punctum D, fuerit vltra centrum C, cadet circulus AE, totus extra circulum AB; intra verò si punctum D, in semidiametro AC, extiterit, vt scholio propos. 13. huius libri demonstrauimus.*

DEINDE *extra eundem circulum AB, datum sit punctum G, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta GCA, ea q3 secta bifariam in D, describatur ex D, per A, circulus AE, qui per datum punctum G, transibit, tanget q3 circulum AB, in A, per ea, quæ in scholio propositionis 13. huius libri demonstrauimus.*

ALITER. *Sit datum rursus punctum E, extra circulum AB. Ducta recta EA, vtcunque ex puncto dato E, quæ circulum secet, & non per centrum transeat, ducatur ex A, per centrum C, recta AC; erit q3 angulus EAC, acutus, cùm pars sit anguli semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo EAC, in E, æqualis constituatur AED: coibit q3 recta ED, cum AC, in D, ob duos angulos DAE, DEA, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli DAE, DEA, æquales sunt,* [a] *erunt & latera DA, DE, æqualia. Circulus ergo ex D, per A, descriptus per datum punctum E, transibit, tanget q3 circulum AB, in A, ex iis, quæ in supradicto scholio propos. 13. huius libri demonstrauimus.*

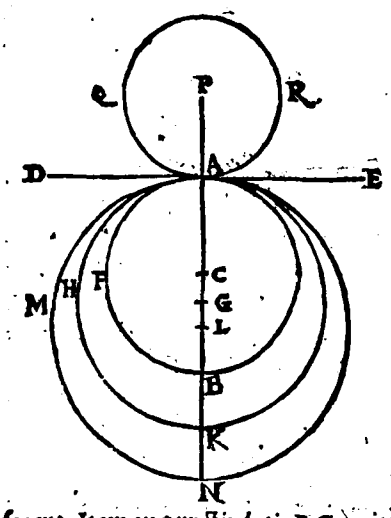
a 6. primi.

TERTIO *datum sit punctum F, intra circulum AE. Ducta ex F, per centrum D, recta FA, ea q3 secta bifariam in C, describatur ex C, per A, circulus AB, qui per datum punctum F, transibit, tangétque ex dicto scholio circulum AE, in A.*

ALITER. *Sit datum rursus punctum B, intra circulum AE, cuius centrum D. Ducta recta quacunque AD, per centrum D, & nõ per datum punctum B, transeunte, quæ cum recta coniuncta AB, faciet angulum acutum BAD, vtpote minorem angulo semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo BAD, in B, æqualis fiat ABC: coibit q3 recta BC, cum AD, in C, ob duos angulos BAC, ABC, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli BAC, ABC, æquales sunt,* [b] *erunt & latera CA, CB, æqualia. Circulus ergo ex C, per A, descriptus per datum punctum B, transibit, tanget q3 circulum AE, in A, per ea, quæ à nobis scholio propos. 13. huius libri demonstrata sunt.*

b 6. primi.

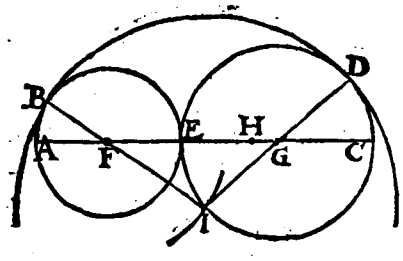
QVOD

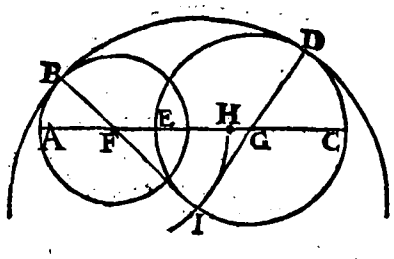


QVOD ſi per punctum N, extra circulum Q A R, datum deſcribendus ſit circulus tangens circulum Q A R, exterius, ita vt neuter intra alium cadat, ducatur ex N, puncto dato ad centrum P, circuli Q A R, recta N P, ſecans circunferentiam circuli in A. Diuiſa deinde recta N A, bifariam in L, deſcribatur ex L, per A, circulus, qui per datum punctum N, tranſibit, tangétque circulum Q A R, in A, propterea quòd vterque circulus rectam D E, quæ per A, ducitur ad N P, perpendicularis, tangit in A, ex coroll. propoſ. 16. huius libri.

EODEM modo, ſi in circunferentia circuli Q A R, datum ſit punctum A, deſcribemus circulum, qui circulum Q A R, exteriùs tangat in A. Ducta enim ex centro P, recta P A C, per datum punctum A, ſi ex quolibet puncto huius rectæ, per A, circulus deſcribatur, nimirum A M N, ex centro L, tanget hic circulum Q A R, vt dictum eſt in A.

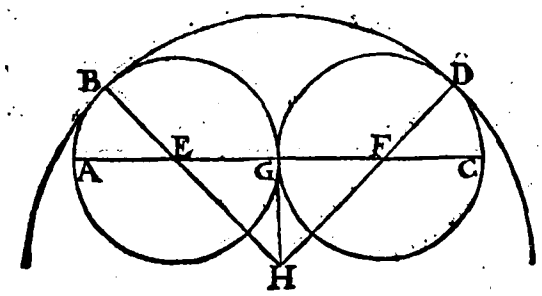
EX his liquet, per idem punctum datum plures poſſe circulos deſcribi alium datum circulum tangentes, (ſi nimirum ex datis punctis E, B, in priori figura ducãtur aliæ rectæ, quæ à rectis E A, B A, differant. Item ex punctis datis F, G, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, tranſeuntes, ſed circulos ſecantes; ac tandem in rectæ A G, eiuſdem figuræ, vel in P A C, poſterioris figuræ, quando punctum A, in circunferentia datur, alia centra à centris C, D, L, diuerſa aſſumantur) cùm tamen per punctum datum extra circulum vna ſola linea ad eaſdem partes duci poſſit circulum tangens. Quo pacto autem circulus duos circulos tangens, quorum vnus non ſit totus intra alium, deſcribendus ſit, hac ratione cum Ioanne Baptiſta Benedicto demonſtrabimus.

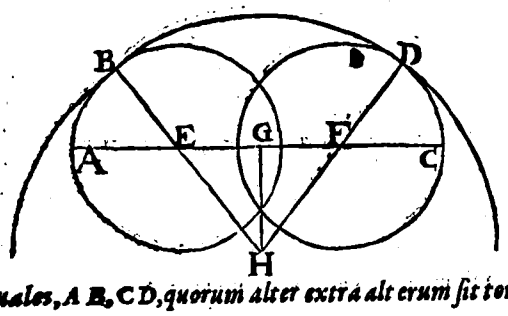




SINT primùm duo circuli ſe mutuò tangentes, aut ſecantes inæquales, A B, minor, & C D E, maior, quorũ centra F, G, p quæ recta ducatur F G, occurrens circunferentijs in A, C, quæ, ſi circuli ſe tangant in E, [a] *per contactum E, tranſibit. Abſciſſa recta E H, ex ſemidiametro maioris circuli, quæ ſemidiametro minoris ſit æqualis, deſcribatur ex F, centro minoris ad interuallum rectæ H C, quæ maior eſt, quàm ſemidiameter minoris, arcus ſecans circunferentiam maioris in I; & ex I, per centra F, G, rectæ ducantur I F, I G, occurrentes circunferentijs in B, D. Et quia C H, ipſi I F, & H E, ipſi F B, æqualis eſt, per conſtructionem; erunt totæ C E, I B, æquales. Cùm ergo & diameter I D, diametro C E, æqualis ſit, erit quoq; I B, ipſi I D, æqualis. Circulus ergo ex I, per B, deſcriptus tranſibit per D. Cùm ergo idem ex ſcholio propoſ. 13. huius libri extra vtrumq; circulum cadat totus, tanget vtrumque circulum in B, D. Quod eſt propoſitum.*

[a] 12. tertij.

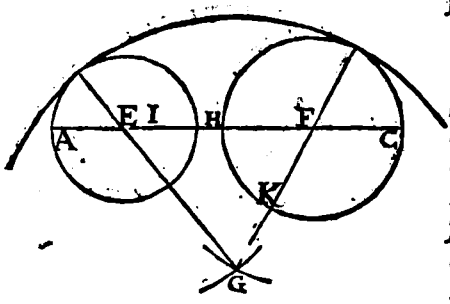




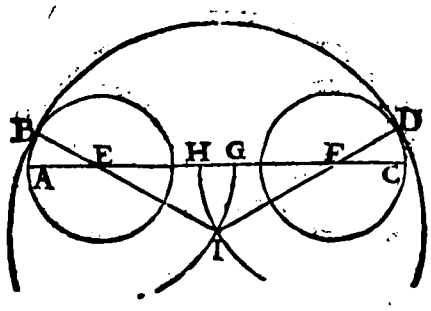
SINT deinde duo circuli ſe mutuò tangentes, vel ſecantes æquales, A B, C D, per quorum centra E, F, recta educatur A C. Diuiſa deinde recta E F, inter duo centra bifariam in G, (Quando circuli ſe mutuò tangunt, diuiditur recta E F, bifariam in puncto cõtactus, propter ſemidiametros æquales æqualium circulorum) excitetur in G, ad E F, perpendicularis G H: in qua ſumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eò per centra E, F, rectæ occurrentes circunferentijs in B, D. Quoniam igitur duo latera G E, G H, duobus lateribus G F, G H, æqualia ſunt, angulosq; comprehendunt æquales, nimirum rectos; [b] *erunt & baſes H E, H F, æquales: Et additis ſemidiametris æqualibus E B, F D, tota linea H B, H D, æquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, deſcriptus tranſibit per D, cadetq; tra vtrumque circulum, ex corollario propoſ. 13. huius libri. Quare vtrumque tanget in B, D. Quod eſt propoſitum.*

[b] 4. primi.

TERTIO ſint duo circuli ſiue æquales, ſiue inæquales, A B, C D, quorum alter extra alterum ſit totus: Per eorum centra E, F, ducatur recta A C. Et ſi circuli



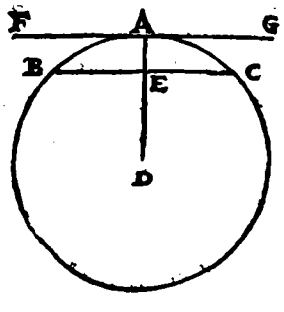
sunt inæquales, describatur ex E, centro minoris ad interuallum diametri maioris C H, arcus, quem in G, secet alter arcus ex F, centro maioris descriptus ad interuallum rectæ F I, compositæ ex semidiametro maioris F H, & H I, semidiametro minoris æquali. Ponamus enim nunc hos arcus se intersecare; quando autem se nō secant, dicemus mox, quid agendum sit. Ex G, autem per centra E, F, rectæ ducantur secantes circunferentias in B, D. Et quia F G, ipsi F I, æqualis est: ablatis æqualibus F K, F H; reliquæ æquales erunt K G, H I. Est autem H I, sumptæ æqualis semidiametro minoris E B. Igitur & K G, ipsi E B, æqualis erit. Cùm ergo & E G, diametro maioris K D, sit æqualis, erunt totæ rectæ G B, G D, æquales. Quare circulus ex G, per B, descriptus transibit per D, cadetq; extra vtrumque circulum, ex coroll. propos. 13. huius lib. ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.



VERVM quia non semper duo illi arcus ex E, & F, descripti se intersecant, quod accidit propter nimiam circulorum distantiam vnius ab altero, absoluemus problema hoc alio modo, qui generalis est, siue circuli se tangant, siue non, etiamsi non se secent, & siue æquales sint, siue inæquales. Ducta recta A C, per circulorum centra, sumantur rectæ æquales A G, C H, ita vt qualibet semisse ipsius A C, superet: & ex centro E, per G, arcus G I, describatur, quem secet in I, alius arcus H I, ex centro F, per H, descriptus: ac denig; ex I, per centra E, F, rectæ emittantur circunferentijs occurrentes in B, D. Et quoniam E G, E I, æquales sunt si addantur æquales A E, B E, fient totæ A G, B I, æquales. Eadem ratione erunt C H, D I, æquales. Cùm ergo A G, C H, positæ sint æquales, erunt quoque B I, D I, æquales. Circulus igitur ex I, per B, descriptus transibit per D, totusq; extra vtrumque circulum cadet, ex coroll. propos. 13. huius lib. ac propterea vtrumq; tanget in B, D. Quod est propositum.

ITEM verò eadem arte describemus circulum datæ magnitudinis, q. duos circulos propositos tangat, dummodò semidiameter circuli describendi maior sit, semisse rectæ A C, per centra circulorum vsq; ad circunferentias ductæ. Nam si semidiametro dati circuli rectas æquales abscindamus A G, C H, reliqua perficietur, vt proxime dictum est.

PORRO manifestum etiam est, si ex puncto medio rectæ A C, per centra circulorum vsque ad circunferentias ductæ, describatur circulus per A, & C, eum circulum tangere vtrumque circulum A B, & C D, in A, & C, ex coroll. propos. 13. huius libri.



EX PELETARIO.

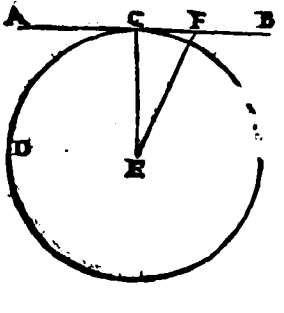
LINEAE rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.

CIRCVLVM enim A B C, cuius centrum D, secet recta B C, cui ducenda est parallela tangens circulum A B C. Ducatur ex centro D, recta D E, perpendicularis ad B C, extendaturq; ad punctum A, in circunferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. [a] *Erit igitur F G, parallela ipsi B C, tangétque circulum in A, per corollarium propos. 16. huius lib. quod erat faciendum.*

a 28. primi.

17. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea, quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.



a 17. primi.

b 19. primi.

RECTA linea A B, tangat in C, circulum C D, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur E C. Dico E C, perpendicularem esse ad A B. Si enim non est, ducatur E F, perpendicularis ad A B, secans circunferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo C E F, [a] duo anguli E C F, E F C, minores sunt duobus rectis; Et est E F C, rectus, ex constructione: erit E C F, minor. Quare [b] maior erit recta E C, hoc est, E D, quàm E F, pars quàm totum. quod est absurdum. Est igitur E C, perpendicularis ad A B. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

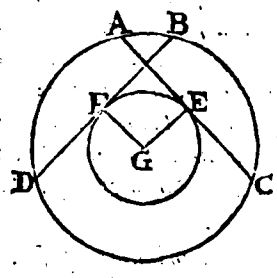
ALITER. Si E C, non est perpendicularis ad A B, erit alter angelorum

lorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo E C B, acutus, qui cùm maior sit angulo semicirculi E C D, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi [a] maior est omni acuto. a 16. tertij.

SCHOLIVM.

Hinc licebit demonstrare sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

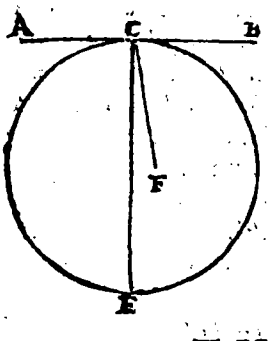
Dvobvs circulis ex eodem centro descriptis; erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulũ tangentes, & vsq; ad circunferẽtiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamq; in punctis contactuũ secabuntur.



Sint duo circuli A B C D, E F, ex eodem centro G, descripti, quos tangãt rectæ A C, B D, in punctis E, F. Dico rectas A C, B D, esse æquales, bifariamq; secari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, rectæ G E, G F, [a] *quæ ad A C, B D, perpendiculares erunt; ac proinde, per defin. 4. huius libri rectæ A C, B D, æqualiter à centro G, in circulo A B C D, distabũt, cùm perpendiculares G E, G F, æquales sint. Igitur* [b] *rectæ A C, B D, æquales sunt. Diuiduntur* [c] *autem & bifariam in E, F, à perpendicularibus G E, G F. Constat ergo id, quod propositum est.*

a 18. tertij. b 14. tertij. c 3. tertij.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

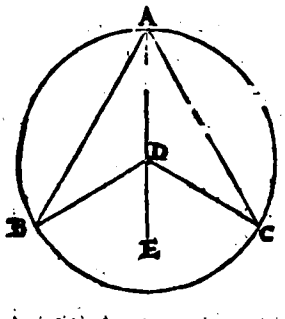


Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

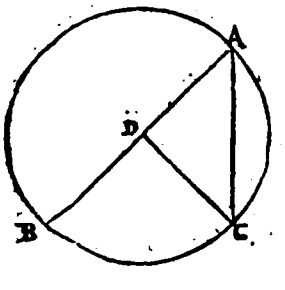
Tangat recta A B, circulum C D E, in C; & ex C, ducatur C E, perpendicularis ad A B. Dico in C E, esse centrum circuli. Si enim est extra C E, sit F, centrũ, à quo ad C, ducatur recta F C, [a] quę perpendicularis erit ad A B. Quare rectus angulus F C B, recto angulo E C B, æqualis erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra C E, centrũ circuli existet. Itaq; si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum. a 18. tertij.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 19.

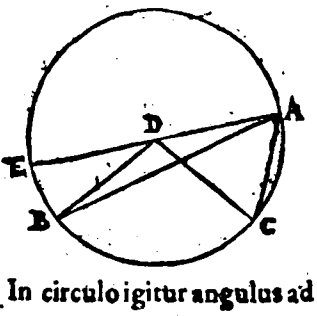
In circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cùm fuerit eadem peripheriæ basis angulorum.



In circulo A B C, cuius centrum D, super basin B C, constituatur angulus B D C, ad centrum; & super eandem basin angulus B A C, ad peripheriam. Dico angulum B D C, duplũ esse anguli B A C. Includant enim primùm duæ A B, A C, duas D B, D C; & per centrum D, recta extẽdatur A E. Quoniã igitur rectæ D A, D B, æquales sunt, [b] erunt anguli D A B, D B A, æquales: Est autem externus angulus B D E, [c] æqualis duob. angulis internis D A B, D B A. Quare B D E, duplus erit alterius eorũ; vt anguli D A B. Eodem modo duplus ostẽdetur angulus C D E, anguli D A C. Quapropter totus B D C, duplus erit totius B A C. Quando enim duę magnitudines duarũ sunt duplæ, singulæ singularum; est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum. b 5. primi. c 32. primi.



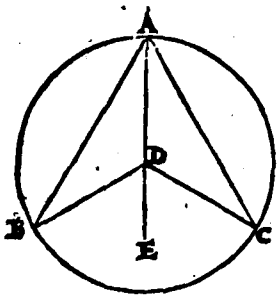
Deinde non includant rectæ A B, A C, rectas D B, D C, sed A B, per centrum extẽdatur. Quoniam igitur externus angulus B D C, [d] æqualis est duobus internis D A C, D C A: Hi autẽ duo [e] inter se sunt æquales, quòd latera D A, D C, sint æqualia; erit angulus B D C, duplus alterius eorum, nempe anguli B A C. Quod est propositum. d 32. primi. e 5. primi.



Tertio recta A B, secet rectam D C, & per centrũ D, extendatur A E. Quoniam igitur angulus E D C, ad centrum, & angulus E A C, ad peripheriam habent eandem basin E C, & recta A E, extenditur per centrum; erit angulus E D C, duplus anguli E A C, vt ostensum est in secunda parte. Simili modo erit angulus E D B, duplus anguli E A B; habent enim hi anguli eandem basin E B. Reliquus igitur angulus B D C, duplus erit reliqui anguli B A C. [f] Quando enim totum totius est duplum, & ablatum ablati; est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est, &c. Quod erat demonstrandum. f 20. prim.

SCHOLIVM.

Ad primam partem huius propoſitionis demonſtrandam aſſumptum eſt hoc principium. (Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint duplæ, ſingulæ ſingularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum.) *In tertia verò partis demonſtratione hoc aliud principium adhibitum eſt.* (Si totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.) *Quorũ vtrumque ab Euclide vniuerſaliter demonſtratur in omni genere multiplicium, & de quotcunque magnitudinibus, libro 5. propoſ. 1. & 5. Non tamẽ propterea demonſtratio huius propoſitionis cenſenda eſt vitioſa, quaſi aſſumat ea, quæ nondum ſunt demõſtrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita ſunt in duplis magnitudinibus, vt facilè à quouis ſine vlla demonſtratione concedantur, & vtraque illa propoſitio lib 5. demonſtrari poteſt ante tertium hunc librum, cùm ex eo non pendeant: adeò vt duo illa principia iure optimo adhiberi poſſint hoc loco, tanquam demonſtrata. Neq; verò hac in re circulus ab Euclide committitur, cùm duo illa principia per quæ propoſ. 20. huius libri demonſtratur, hac eadem propoſitione non nitantur, aut alijs propoſitionibus, quæ ex hac 20. pendent.*



a 5. primi.

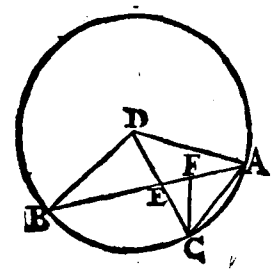
b 32. primi.

VERVM, ſi placet, demonſtrabimus primam partem huius propoſitionis ſine priore illo principio, & tertiam ſine poſteriore, (ſecunda enim pars neutro eorum indiget) hac ratione. Repetatur prima figura. Et quoniam a *tam anguli D A B, D B A, inter ſe æquales ſunt, quàm anguli D A C, D C A; erit totus angulus B A C, duobus angulis B, C, ſimul ſumptis æqualis, ac proinde tres anguli B A C, B, & C, ſimul ſumpti dupli erũt anguli B A C. Quia verò angulus B D C, æqualis eſt ijſdem tribus angulis B A C, B, & C; Nam* b *cũ B D E, duobus internis, B, & D A B, & C D E, duobus internis C, & D A C, æqualis ſit, erit totus B D C, omnibus quatuor, hoc eſt, tribus B A C, B, & C, æqualis.) erit angulus quoq; B D C, duplus anguli B A C. quod eſt propoſitũ.*

c 32. primi.

ALITER. Quoniam c *ſex anguli triangulorum A B D, A C D, ſunt æquales quatuor rectis, ſunt autem & tres anguli B D C, C D A, A D B, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. erunt hi tres illi ſex æquales: ablatiſq; communibus A D B, A D C,* d *reliquus B D C, reliquis B A C, B, & C, æqualis erit. Quare vt prius, erit B D C, ipſius B A C, duplus.*

d 3. poſt.



e 5. primi.

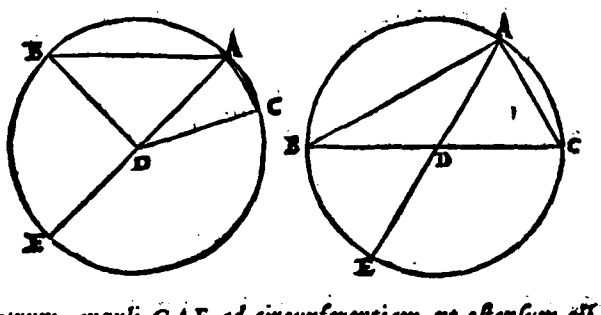
f 32. primi.

g 5. primi.

h 5 primi.

i 15. primi.

REPETATVR quoque tertia figura, vbi recta D C, rectam A E, ſecat, vt in E. Quoniam ergo, ducta recta A D, e *duo anguli D A C, D C A, æquales ſunt, eſtq; angulus D A C, angulo E A C, maior, erit quoque angulus D C A, eodẽ angulo E A C, maior. Si igitur fiat angulus A C F, angulo E A C, æqualis, ſecabit C F, rectam A E, vt in puncto F,* f *angulusq; E F C, æqualis erit internis angulis F A C, F C A, ac proinde anguli B A C, duplus. Quia verò* g *anguli D A C, D C A, æquales ſunt, & ablati quoq; F A C, F C A, erunt & reliqui D A B, E C F, æquales. Cùm* h *ergo D A B, ipſi D B A, æquali ſit; erit quoq; E C F, eidem D B E, æqualis: Sunt autem,* i *& anguli D E B, F E C, ad verticem E, æquales. Igitur & reliqui anguli B D F, E F C, æquales erunt, ex corollario 1. propoſ. 32. lib. 1. Cùm ergo angulus E F C, oſtenſus ſit anguli B A C, duplus; erit quoq; angulus B D C, anguli B A C, duplus. quod eſt propoſitum.*



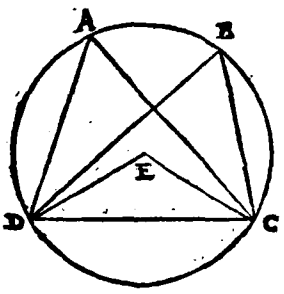
QVOD ſi recta B D, C D, in centro angulum nõ conſtituant, ad partes baſis B C, quod tum demum fit, quando ſegmentum B A C, eſt vel ſemicirculus, vel ſegmentũ minus; nihilominus ſpatium illud ad centrũ duplum erit anguli ad circunferentiam, qui eandem habeat baſin, quam ſpatium illud. Ducta enim recta A E, per centrum, erit tam angulus B D E, ad centrum duplus anguli B A E, ad circunferentiam, quàm angulus C D E, ad centrum, anguli C A E, ad circunferentiam, vt oſtenſum eſt. Spatium igitur ad centrum D, baſin habens B E C, conſtansq; ex duobus angulis B D E, C D E, duplum eſt totius anguli B A C. Quod eſt propoſitum.

20.

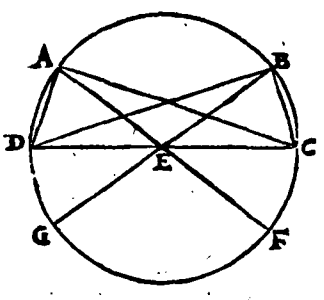
THEOR. 19. PROPOS. 21.

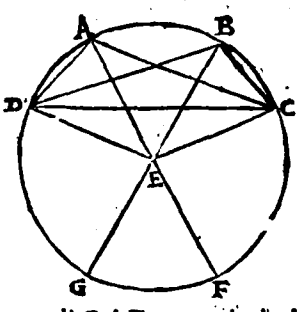
IN circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli, ſunt inter ſe æquales.

IN circulo A B C D, cuius centrum E, exiſtant anguli A, & B, in ſegmento D A B C. Dico eos eſſe æquales. Sit enim ſegmentum D A B C, primùm ſemicirculo minus: & ducantur rectæ D E, C E, ad



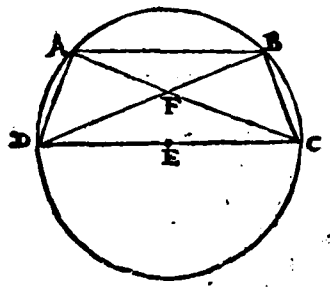
CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, [a] duplus eſt tam anguli DAC, quàm DBC, ad peripheriam, cùm omnes habeant eandem baſin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. [b] Quare inter ſe æquales erunt. Eademq; ratione omnes alij anguli exiſtentes in ſegmento DABC, oſtendentur eſſe æquales. [a] 20. tertij. [b] 7. pron.

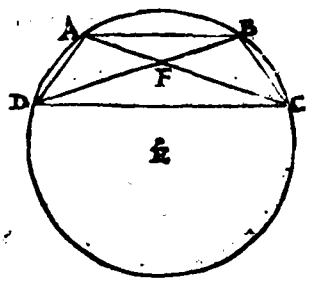


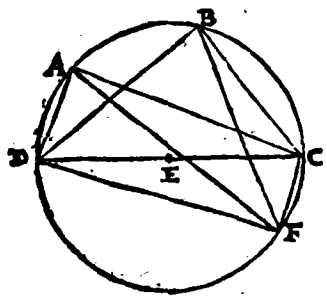


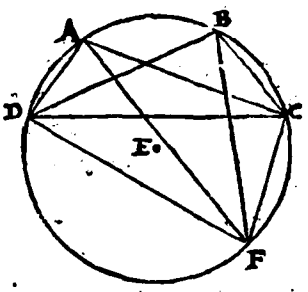
SIT deinde ſegmentum DABC, vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ AF, BG, & in ſegmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, [c] duplus eſt anguli DAF, ad peripheriam. Similiter angulus CEF, anguli CAF; ac proinde duo anguli ſimul DEF, CEF, duorum angulorum ſimul DAF, CAF, dupli erunt, hoc eſt, totius anguli DAC: Sunt autem anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: Igitur erunt quoque tres anguli DEG, GEF, FEC, ſimul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt iidem tres anguli dupli anguli DBC. [d] Quare æquales erunt anguli DAC, DBC. [c] 20. tertij. [d] 7. pron.

ALITER. Quoniam vt in ſcholio propoſ. præcedentis demonſtrauimus, ſpatium ad centrũ E, cuius baſis DGFC, duplum eſt vtriuſque anguli DAC, DBC, ad circunferentiam: [e] Erunt ipſi anguli DAC, DBC, inter ſe æquales. [e] 7. pron.









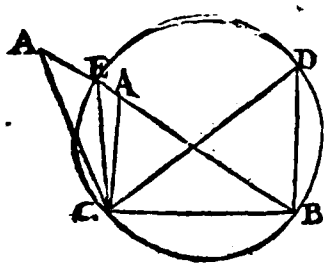
ALITER. Secent ſeſe rectæ AC, BD, in F, & connectatur recta AB. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales ſunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, q̃ hi [f] æquales ſunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, [g] qui æquales ſunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales ſunt oſtenſi in ſegmento maiori ADCB. Ergo & anguli reliq̃ DAC, DBC, æquales ſunt. [f] 32. primi. [g] 15. primi.

ALITER. Ductis rectis DF, CF, ad punctum in circunferentia quoduis F, includentibus centrum E, ita vt tam DABCF, quàm FDABC, ſit ſegmentũ maius; iungantur quoque rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem ſegmento maiori DABCF, æquales ſunt; nec non & anguli FAC, FBC, in ſegmento etiam maiori FDABC, exiſtentes: ſi hi illis addantur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem ſegmentõ ſunt, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

FACILE quoque theorema iſtud conuertemus hoc modo.

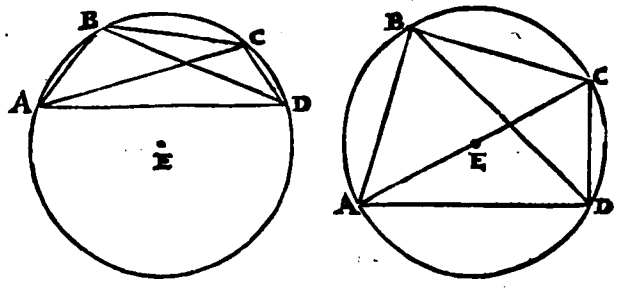
SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex ſingulis binæ, quæ ad eaſdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum deſcriptus, per alterum quoque angulum tranſibit.



Ex duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ BA, CA, BD, CD, binæ ex ſingulis, conſtituentes ad eaſdem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, deſcriptum, tranſire quoque per angulum A. Si enim non tranſit, tranſibit vel vltra A, vel citra ſecans rectam AB, in E. Ducta ergo recta CE, [a] erunt anguli E, D, æquales. Cùm ergo & angulus A, angulo D, ponatur æqualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus, quod eſt abſurdum. [b] Externus enim interno maior eſt. Tranſit ergo circulus per A. quod eſt propoſitum. [a] 21. tertij. [b] 16. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

21. QVADRILATERORVM in circulis descriptorũ anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.



IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum A B C D. Dico duos angulos oppositos A B C, C D A: Item B C D, D A B, æquales esse duob⁹ rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri A C, B D, [a] erunt duo anguli A B D, A C D, in eodem segmento A B C D, æquales. Similiter erunt duo anguli C B D, C A D, in eodem segmento C B A D, æquales. Quare duo anguli A B D, C B D, hoc est, totus angulus A B C, æqualis est duobus angulis A C D, C A D. Addito igitur communi angulo C D A, erunt [b] duo anguli A B C, C D A, æquales tribus angulis A C D, C A D, C D A. [b] Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo A B C, C D A, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos B C D, D A B, duobus esse rectis æquales. [c] Nam rursus [c] duo anguli A B D, A C D, sunt æquales: Item duo B C A, B D A; ac propterea totus angulus B C D, duobus angulis A B D, B D A, æqualis erit. Addito igitur communi angulo B A D; erunt duo [d] anguli B C D, B A D, æquales tribus angulis A B D, B D A, D A B. [d] Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo B C D, D A B, duobus rectis æquales erũt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 21. tertij.

b 32. primi.

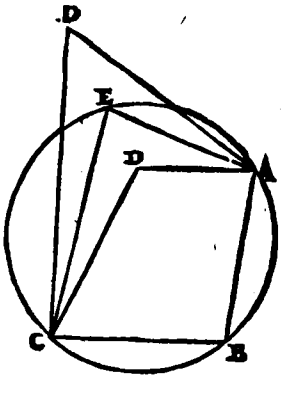
c 21. tertij.

d 32. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM quoque huius theorematis demonstrari potest, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales; circulus, qui per tres quoscunque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum angulum; Atque adeò circa ipsum quadrilaterum circulus describi potest.



IN quadrilatero enim A B C D, sint anguli oppositi B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus describatur; (Quo modo autem hoc fieri possit, ad 25. propos. huius libri, & ad 5. quarti libri ostendetur.) quem dico transire etiam per D. Si enim non, transibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo recta C E, A E, ad circunferentiam, ita vt non secent rectas C D, A D. Quo facto, [a] erunt anguli B, & E, æquales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli B, E, æquales sunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod est absurdum. Ducta enim recta A C, [b] erit angulus D, maior angulo E, vel contrà, angulus E, maior angulo D. Transit igitur circulus per punctum D. Quod est propositum.

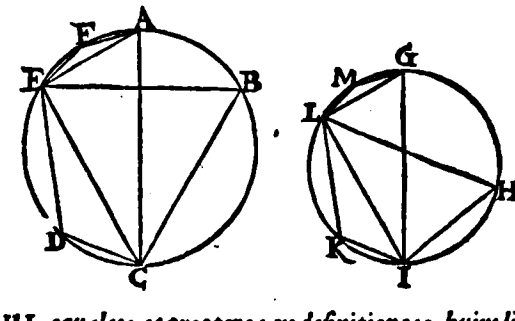
a 22. tertij.

b 21. primi.

SATIS autem est, sumere duos tantùm angulos oppositos æquales duobus rectis, vt theorema hoc verum sit: quia si duo oppositi sunt æquales duobus rectis, erunt necessariò & reliqui duo oppositi duobus rectis æquales; cũ omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, vt ad propos. 32. lib. 1. demonstrauimus.

EX hac etiam propositione facilè demonstrabimus theorema hoc insequens, quod frequenter vsurpari solet, tanquam principium, à Mathematicis: scilicet.

SI ex semicirculis, aut circulis segmenta similia detrahantur; reliqua quoque segmenta similia erunt.



SINT primùm in circulis A B C D E F, G H I K L M, arcus similes C D E, I K L. Dico & reliquos arcus E F A B C, L M G H I, similes esse. Sumptis enim in dictis arcubus, punctis vtcunque D, B, K, H, iungantur rectæ D C, D E, B C, B E, K I, K L, H I, H L. Quia igitur arcus C D E, I K L, similes sunt, erunt, ex definitione segmentorum similium, anguli C D E, I K L, æquales. Cùm ergo duo anguli C D E, C B E, duobus angulis I K L, I H L, sint æquales; [c] quòd tam illi, quàm hi sint æquales duobus rectis: [d] erũt & reliqui anguli C B E, I H L, æquales; ac propterea ex definitione 10. huius libri arcus E B C, L H I, similes erunt.

c 22. tertij.

d 3. post.

DEINDE in semicirculis A E C, G L I, similes sint arcus E C, L I. Dico & reliquos arcus A E, G L, esse similes.

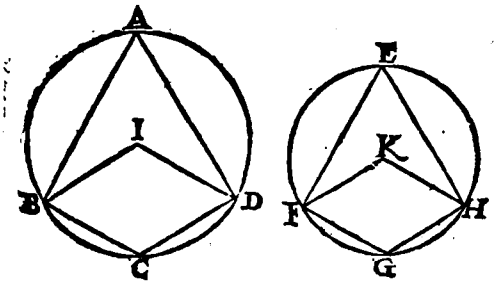
miles. Sumptis enim punctis D,F,K,M, vtcunque in ijs arcubus, iungantur rectæ C D, D E, C E, E F, F A, A E; I K, K L, I L, L M, M G, G L. Itaque quia arcus E C, L I, similes sunt, erunt, ex definitione anguli C D E, I K L, æquales. Cùm ergo & duo anguli C D E, E A C, duobus angulis I K L, L G I, æquales sint; [a] *quòd tam illi, quàm hi sint duobus rectis æquales: erũt & reliqui anguli E A C, L G I, æquales. Sunt autem & anguli A E C, G L I, in semicirculis, hoc est, in segmentis similibus A E C, G L I, æquales, ex definitione segmentorum similium. Igitur in triangulis A E C, G L I, & reliqui anguli A C E, G I L, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. æquales erunt. Cùm ergo duo anguli A C E, E F A, duobus angulis G I L, L M G, æquales sint;* [b] *quòd tam illi, quàm hi duobus sint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui E F A, L M G, æquales: ac proinde ex definitione similium segmentorum, arcus A E, G L, reliqui in semicirculis, similes erunt. Quod erat ostendendum.*

[a] 22. tertij.

[b] 22. tertij.

QVANDO autem de segmentis similibus sermo hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præsertim Astronomicis perneceſſaria, quorum primum sit hoc, quod nos ad defin. 10. huius libri demonstrandum recepimus: videlicet.

ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus siue ad centra, siue ad circunferentias, sunt inter se æquales. Et contrà, arcus, quibus anguli æquales siue ad centra, siue ad circunferentias insistunt, similes sunt.



SINT in circulis A B C D, E F G H, quorum centra I, K, primum arcus similes B C D, F G H, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circunferentias verò anguli A, E. Dico tam illos, quàm hos inter se æquales esse. Constituantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex definitione segmentorum similium, æquales erunt. [c] *Sunt autem tam duo anguli C, A, quàm duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoq; reliqui A, E, æquales. Quorum* [d] *cùm dupli sint anguli I, K,* [e] *erunt hi quoq; æquales. Quod est propositum.*

[c] 22. tertij.

[d] 20. tertij.

[e] 6. pron.

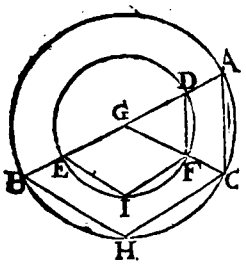
DEINDE sint tam anguli I, K, quàm A, E, insistentes arcubus B C D, F G H, inter se æquales. Dico arcus B C D, F G H, esse similes. Nam si A, & E, sint æquales: sint [f] *autem tam duo anguli A, C, quàm duo E, G, duobus rectis æquales: erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex definitione similium segmentorum, arcus B C D, F G H, quibus anguli æquales A, E, ad circunferentias insistunt, similes. Si verò anguli I, K, ad centra sint æquales, & erunt quoq; eorum dimidia æqualia, hoc est, anguli A, E. Quare, vt priùs, arcus B C D, F G H,* [g] *similes sunt. Quod erat ostendendum.*

[f] 22. tertij.

[g] 7. pron.

SECVNDVM autem, quod nos etiam in sphæra ad finem 1. cap. demonstrauimus, huiusmodi sit.

Si duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duę aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quaſcunque duas lineas intercepti, similes.



DVO circuli A B C, D E F, ex eodem centro G, descripti sint, & ex centro G, duæ rectæ educantur G B, G C. Dico arcus E F, B C, esse similes. Productæ enim B G, ad A, iungantur rectæ A C, D F; Item sumptis punctis H, I, vtcunque, ducantur rectæ B H, C H, E I, F I. Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcubus E F, B C, insistens [h] *duplus est tam anguli E D F, quàm anguli B A C;* [i] *erunt anguli E D F, B A C, æquales. Sunt autem duo anguli E D F, E I F, duobus angulis B A C, B H C, æquales; quòd* [k] *tam illi, quàm hi duobus rectis sint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis E D F, B A C,* [l] *reliqui E I F, B H C, æquales erunt: ac proinde segmenta E F, B C, in quibus sunt, similia erunt, ex definitione similium segmentorum. Quod erat ostendendum.*

[h] 20. tertij.

[i] 7. pron.

[k] 21. tertij.

[l] 3. pron.

BREVIVS sic. Quoniam [m] *anguli A, D, æquales sunt, quòd vtriusque* [n] *duplus sit anguli G, ad centrum; erunt per antecedens theorema, arcus B C, E F, quibus ad circunferentias insistunt, similes. Quod est propositum. Vel adhuc breuiùs. Quoniam arcubus E F, B C, æquales anguli in centro insistunt, immò vnus & idem angulus B G C; erunt per antecedens theorema, arcus E F, B C, similes. Atque in hac demonstratione non est opus vlla constructione, vt manifestum est.*

[m] 7. pron.

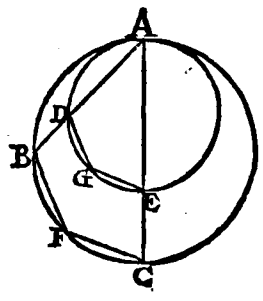
[n] 20. tertij.

TERTIVM denique, quod aliter quoque in nostro Astrolabio ostendimus, hoc sit.

Si duo, aut plures circuli se mutuò tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quaſcunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti similes.

TANGANT se mutuò interius duo circuli A B C, A D E, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur A E, A C. Dico tam arcus D E, B C, quàm A D, A B, & A E D, A C B, similes esse. Sumptis enim duobus punctis vtcunque F, G, iungantur rectæ B F, C F, D G, E G. Quoniam igitur duo anguli D A E, D G E, duobus an-

a 22. tertij. b 3. pron. c 11. tertij.



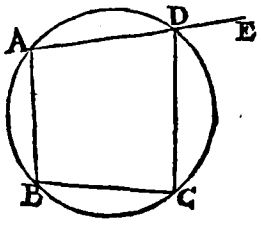
gulis B A C, B F C, æquales sunt; quòd [a] *tam illi, quàm hi sint duobus rectis æquales: ablato communi angulo E A C,* [b] *erunt reliqui anguli D G E, B F C, æquales; ac proinde arcus D E, B C, similes erunt, ex definitione segmentorum similium.*

BREVIVS sic. *Quoniam angulus A, communis vtrique arcui D E, B C, ad circunferentias insistit, erunt, ex demonstratis antè proximè antecedens he orema, arcus D E, B C, quibus insistit, similes. Quod est propositum.*

QVIA verò, si per circulorum centra ducta cogitetur recta A C, [c] *hæc in contactum A, cadit, suntq; eodem pacto arcus D E, B C, similes, sit, vt hisce similibus ablatis ex semicirculis similibus, reliqui arcus A D, A B, similes quoq; sint: atque his ablatis ex totis circunferentiis similibus, similes quoque sint reliqui arcus A E D, A C B, vt paulò antè demonstrauimus. Quod est propositum.*

HVC etiam referri potest hoc theorema.

SI vnum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.

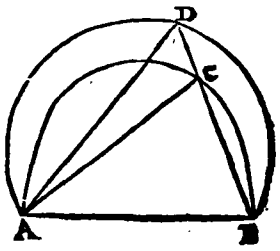


d 13. primi. e 22. tertij.

IN *circulo A B C D, descriptum sit quadrilaterum quodcunq; A B C D, cuius latus A D, producatur ad E. Dico angulum E D C, angulo B, æqualem esse. Cùm enim duo anguli ad D,* [d] *æquales sint duobus rectis: Item* [e] *duo B, & D, in quadrilatero; erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo A D C, reliquus E D C, externus reliquo B, æqualis erit. Quod est propositum.*

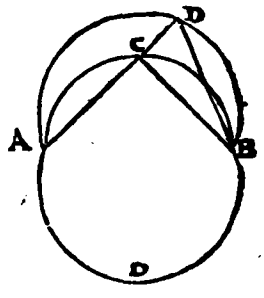
22. ## THEOR. 21. PROPOS. 23.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia & inæqualia, non constituentur ad eadem partes.



a 10. tertij. b 16. primi.

SI enim fieri potest, super recta A B, constituantur ad eadem partes duo segmenta similia, & inæqualia A C B, A D B. Perspicuum est autem, quod se solùm intersecent in punctis A, & B; [a] Circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quàm duobus. Vnde peripheria vnius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta A D, secans circunferentias in C, & D, & connectantur rectæ C B, D B. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. definitionem huius libri angulus A C B, æqualis angulo A D B, externus interno: [b] quod est absurdum. Non igitur segmenta sunt similia: Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

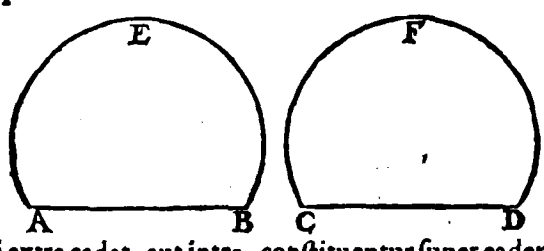


SCHOLIVM.

EADEM *ratione, neque ad diuersas partes super eadem recta linea duo segmenta circulorum similia, & inæqualia constituentur. Nam si alterum eorum intelligatur moueri circa lineam A B, vt iam ambo sint ad eadem partes, in idem absurdum incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet propter inæqualitatem.*

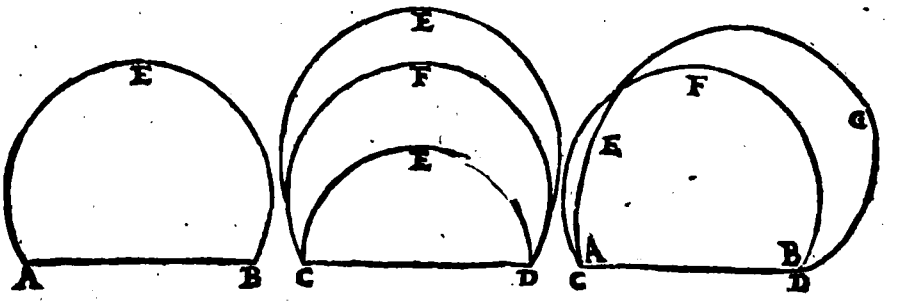
23. ## THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.



SVPER rectis lineis æqualibus A B, C D, constituta sint segmenta similia A E B, C F D. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim A B, C D, cùm sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmentum A E B, segmento C F D, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quòd si extra cadat, aut intra, constituentur super eadem recta C D, duo segmenta A E B, A F B, similia, & inæqualia, quorum vnum totum extra aliud cadit. quod est absurdum. [c] Demonstratum enim est contrarium. Quòd si partim extra cadat, partim intra, secabunt sese in pluribus punctis, quàm duobus, nimirum in A, B, G. Quod est absurdum. [d] Circuli enim non se secant in pluribus punctis.

c 23. tertij. d 10. tertij.



punctis, quàm duobus. Congruet igitur segmentum AEB, segmento CFD, atque adeò ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

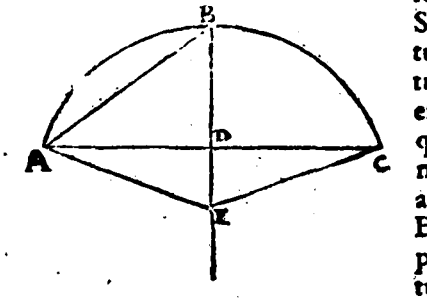
Non solùm in hac propositione ostenditur, segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verùm etiam ipsas peripherias, eò quòd, vt demonstratum est, sibi mutuò congruant.

Conversvm quoque huius propositionis & præcedentis, facilè demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint. Quòd si quis dicat, non sibi mutuò congruere segmenta, secabit necessariò vna circunferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inæqualia namque forent segmenta, quod est contra hypothesin. Sint ergo segmenta AFB, AGB, æqualia super eandem rectam AB, secentq; se mutuò in G. Igitur circuli AFB, AGB, secant sese in punctis A, G, B, pluribus quàm duobus, quod est absurdum. [a] *Circuli enim non se intersecant in pluribus punctis, quàm duobus. Eodem modo res demonstrabitur, si æqualia segmenta super æquales rectas sint constituta: si nimirum altera alteri superponatur, &c.* a 10. tertij.

PROBL. 3. PROPOS. 25. 24.

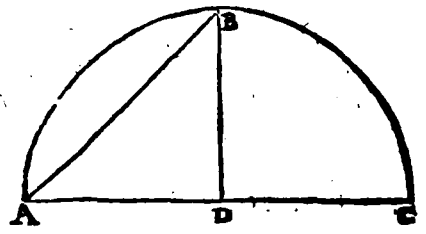
Circvli segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

Sit segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel maior est angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primùm maior, (quod quidem continget, quâdo segmentum ABC, minus fuerit semicirculo. Tunc enim, quia BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius libri, quod est extra segmẽtum, cùm ponatur esse minus: erit DA, maior, quàm DB, cùm DB, perficiens diametrum, [a] sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circunferentiam cadunt. Quare angulus DBA, [b] maior erit angulo DAB,) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentum ABC. Ducta enim recta EC, erũt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli contenti, recti. [c] Quare bases EA, EC, æquales erunt; [d] Est autem & EA, æqualis ipsi EB, quòd anguli EAB, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erunt; [e] ac propterea E, centrum erit circuli ABC. quandoquidem ex E, plures quàm duæ rectæ æquales cadunt in circunferentiam.

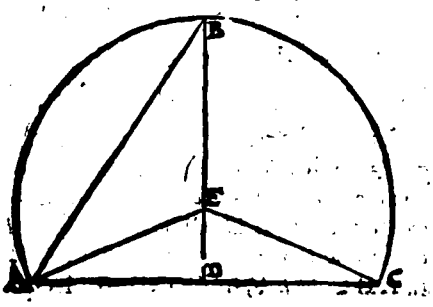


a 7. tertij.
b 18. primi.
c 4. primi.
d 6 primi.
e 9. tertij.

Sit deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis: (Quod demum continget, quando segmentum ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum, atque adeò rectæ DA, DB, æquales; quare [f] & anguli DAB, DBA, æquales erunt.) [g] Erunt igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipsi DA, quòd recta AC, secta sit bifariam. Quapropter cùm tres rectæ DA, DB, DC, cadãt ex D, in circunferentiam, [h] erit D, centrum.



f 5. primi.
g 6. primi.



h 9. tertij.

Sit tertiò angulus DBA, angulo DAB, minor, (qd quidem eueniet, si segmentum ABC, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius libri. quod quidem intra segmentum, cùm maius esse ponatur, existit; [i] erit DB, omnium, quæ ex D, in circunferentiam cadunt, maxima: maior igitur erit quàm DA, [k] ideoque angulus DAB, maior

i 7. tertij.
k 18. primi.

angulo D B A.) fiatque angulus B A E, æqualis angulo D B A, & secet recta A E, rectam E D, in F. puncto, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo idipsum ostendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo D A B, vt constat, si recta ducatur E C. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

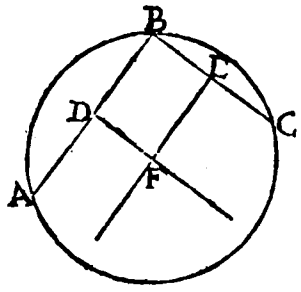
Sed fortassis hæc demonstratio Euclidis, quæ per omnia tria circuli segmenta progreditur, ita facilius instituetur. Diuisa recta A C, bifariam in D, erectaq; perpendiculari D B, & ducta A B, aut D B, minor est,

a 18. primi. *quàm D A, aut æqualis, aut maior. Si minor,* [a] *erit angulus D B A, maior angulo B A D. Constituto igitur angulo B A E, æquali ipsi A B D, ostendemus, vt priùs, E, centrum esse. Atque hoc euenit, quando segmentum est semicirculo minus.*

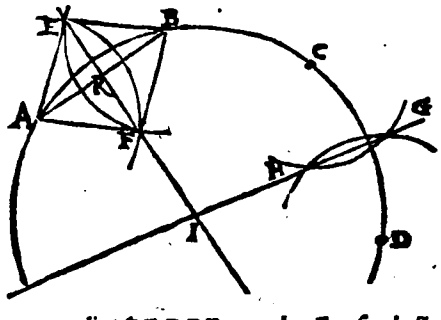
b 9. tertij. *Si verò D B, æqualis est ipsi D A; erunt omnes tres D A, D B, D C, æquales;* [b] *ac proinde D, centrum. Quæ ratio locum habet in semicirculo.*

c 18. primi. *Si denique D B, maior est, quàm D A,* [c] *erit angulus D B A, minor angulo D A B. Constituto ergo angulo B A E, æquali ipsi A B E, ostendetur E, esse centrum, vti prius. Hoc autem maiori segmento accidit.*

Aliter idem problema hoc modo absoluetur. Positis ijsdem, quæ priùs, fiat angulo D B A, æqualis angulus E A B. Et siquidem recta A E, cadit infra A C, erit segmentum semicirculo minus, vt in prima figura. Si verò A E, cadit supra A C, erit segmentum semicirculo maius, vt in tertia figura: semper autem E, centrum erit, vt demonstratum est. Si denique rectæ efficiens cum A B, in A, angulum æqualem angulo A B D, coincidit cum A C, erit segmentum semicirculus, punctumq; D, centrum erit, vt in secunda figura.



Brevius tamen inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, siue illud semicirculo minus sit, siue æquale siue maius, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti tria puncta vtcunque A, B, & C, quæ duabus rectis coniungantur A B, B C, quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad A B, B C, perpendiculares D F, E F. Quoniam igitur per corollarium propos. 1. huius libri, tam D F, quàm E F, incedit per centrum circuli, cuius A B C, est segmentum, coibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum est inuentum. Quod est propositum.



Aliter, vt Mechanici solent. Accipiantur in circunferentia duo puncta vtcunque A, & B, è quibus describantur duo arcus ad idem interuallum quodcunque, qui se inter secẽt in E, & F. Postea ex aliis duobus punctis C, & D, alij arcus se secantes in G, & H, describantur ad quoduis interuallum, siue idem quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur rectæ E F, G H, transibunt ambæ per centrum. Quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum. Quòd autem linea E F, G H, per centrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ A E, A F, B E, B F, quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorum. Quoniam igitur latera A E, E F, trianguli A E F, æqualia sunt lateribus B E, E F, trianguli B E F; & bases quoque A F, B F, æquales:

d 8. primi. *[d] Erunt anguli A E F, B E F, æquales. Rursus ducta recta A B, quæ secet E F, in K: quoniam latera A E, E K, trianguli A E K, æqualia sunt lateribus B E, E K, trianguli B E K; & anguli A E K, B E K, ostensi quoq; æquales,*

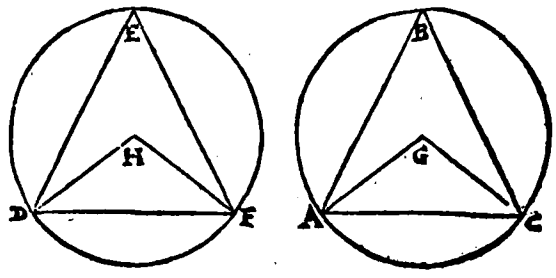
e 4. primi. *[e] erunt & bases A K, B K, & anguli A K E, B K E, æquales, ideoq; recti. Quare cùm E F, diuidat rectam A B, in circulo bifariam, & ad angulos rectos, transibit per centrum, ex corollario propos. 1. huius libri. Eadem ratione ostendetur G H, transire per centrum. Debent autem quatuor puncta A, B, C, D, in tali situ accipi, vt rectæ E F, G H, non in directum sibi occurrant, sed vt se mutuò secent. Quòd si quando contingat, rectas E F, G H, in directum esse constitutas, diuidenda erit recta intra circunferentiam comprehensa, bifariam. Punctum enim diuisionis erit centrum circuli: propterea quòd tunc recta illa est diameter circuli, quandoquidem per centrum transit, ex corollario propos. 1. huius libri.*

25. THEOR. 23. PROPOS. 26.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis insistũt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

In circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, constituti sint primùm ad centra anguli æquales A G C, D H F. Dico peripherias A C, D F, quibus insistunt, siue super quas ascenderunt, esse æquales. Sumantur enim in peripheriis A B C, D E F, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur A B, C B, D E, F E, connectanturque rectæ A C, D F. Quoniam igitur

a 20. tertij. [a] anguli B, & E, dimidij sunt æqualium angulorum G, & H; erũt & ipsi æquales inter se. Quare ex definitione, segmenta A B C, D E F, similia erunt. Et quia latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia sunt lateribus D H, H F,



DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent G, H, æquales, ex hypothesi: [a] erũt bases AC, DF, æquales. Cùm igitur segmenta similia ABC, DEF, sint super lineas æquales AC, DF, [b] erunt ipsa inter se æqualia. Quare si à circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta AC, DF, inter se æqualia; atque adeò peripheriæ AC, DF, æquales erunt. Quod est propositum.

[a] 4. primi.
[b] 24. tertij.

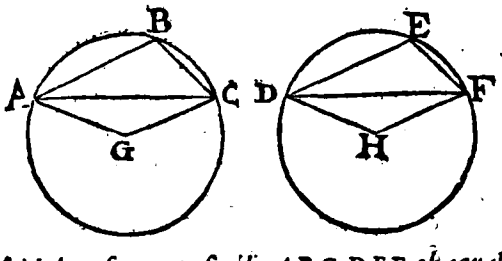
SINT deinde ad peripherias constituti duo anguli æquales B, & E; Dico rursus, peripherias AC, DF, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, vt priùs, segmenta ABC, DEF, similia. Cùm igitur sint super æquales lineas AC, DF: (cùm enim anguli G, H, æquales sint, [c] quod sint dupli angulorum æqualium B, & E;) erunt, vt priùs, rectæ AC, DF, æquales) [d] erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 20. tertij.
[d] 24. tertij.

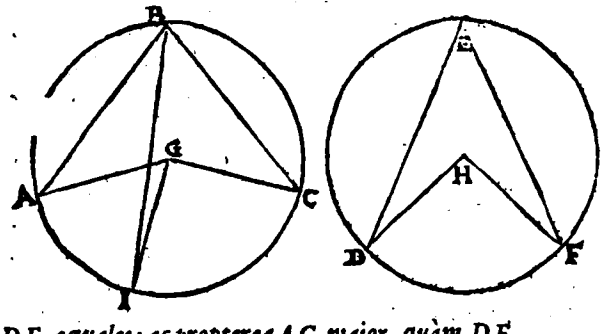
SCHOLIVM.

HAEC secunda pars breuiùs ita demonstrabitur. Quoniam anguli G, H, dupli sunt angulorum æqualium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare, vt ostensum est priùs, peripheriæ AC, DF, super quas ascenderunt, æquales erunt.

IAM verò, si quando contingat, rectas AG, CG; DH, FH, non constituere angulos in centris supra bases AC, DF, sed supra bases ABC, DEF, vt subiecta hæc figura monstrant, ita secunda pars huius propositionis demonstranda est. Quoniam spatia ad centra G, H, insistentia arcubus AC, DF, æqualia inter se sunt, cũ ex scholio propos. 20. huius lib. dupla sint angulorum B, E, ad circunferentias; erunt etiam anguli AGC, DHF, reliqui quatuor rectorum, quibus tam spatium circa G, quàm spatium circa H, æquale est, ex corollar. 2. propositionis 15. libri 1. inter se æquales. Quare, vt priùs, ostendemus, bases AC, DF, triangulorum AGC, DHF, æquales esse, ideóque segmenta similia ABC, DEF, ob æqualitatem angulorum B, E, super æquales bases AC, DF, esse æqualia, &c.



HINC etiam fit, spatia æqualia in centris, insistere arcubus æqualibus. Nam si spatia in centris G, H, insistentia arcubus maioribus AC, DF, æqualia sunt; erunt quoque, vt ostendimus, anguli AGC, DHF, æquales. Igitur, vt in prima parte propositionis demonstratum est, erunt & arcus AC, DF, maiores, & minores ABC, DEF, inter se æquales.



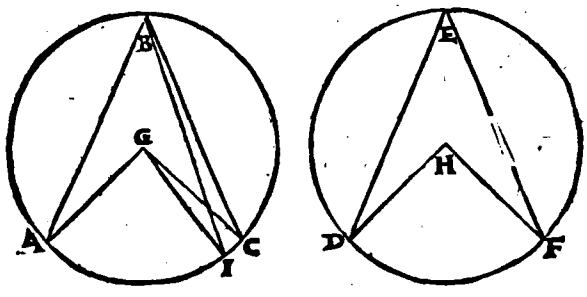
QVOD si dicti anguli fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheriæ, quàm minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, sit angulus AGC, ad centrum maior angulo DHF, ad centrum: Item angulus ABC, ad circunferentiam, maior angulo DEF, ad circunferentiam. Dico peripheriam AC, maiorem esse peripheria DF. Si enim fiat angulus CGI, angulo DHF, & angulus CBI, angulo DEF, æqualis; erunt, vt ostensum est, peripheriæ CI, DF, æquales; ac propterea AC, maior, quàm DF.

PORRO propositio hæc, & tres proximè sequentes intelligendæ etiam sunt in eodem circulo. Hoc est, In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, &c. vt ex demonstratione huius propositionis, & sequentium trium liquidò constat. Eadem enim semper demonstratio, quæ duobus, pluribúsve circulis accommodatur, locum habet in vno eodemq; circulo.

THEOR. 24. PROPOS. 27. 26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, insistant primùm anguli ad centra AGC, & DHF, æqualibus peripheriis AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales esse. Si



enim non ſunt æquales, ſit angulus G maior, fiatque angulus A G I, æqualis angulo D H F.[a] Erunt igitur peripheriæ A I, D F, æquales. Cùm igitur peripheria A C, æqualis ponatur peripheriæ D F, erunt peripheriæ A I, A C, inter ſe æquales, pars, & totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli A G C, D H F, æquales.

a 26. tertij.

INSISTANT deinde eiſdem peripheriis æqualibus A C, D F, anguli B, & E, ad peripherias; quos rurſus dico æquales eſſe. Nam ſi alter, vt A B C, maior eſt; fiat angulo E, æqualis angulus A B I,[b] eruntque peripheriæ A I, D F, æquales. Quare, vt priùs, erunt peripheriæ A I, A C, æquales, pars & totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli A B C, D E F, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, q̃ æqualibus peripheriis inſiſtunt, &c. Quod demonſtrandũ erat.

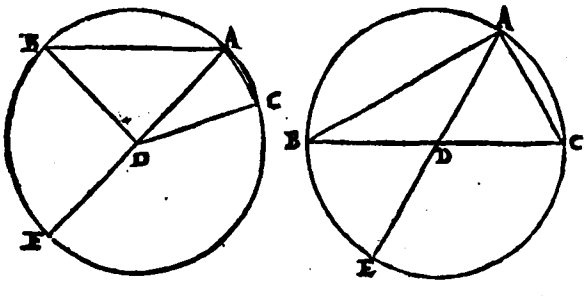
b 26. tertij.

SCHOLIVM.

HAEC ſecunda pars ita quoque demonſtrabitur, quando rectæ A G, C G; D H, F H, in centris angulos conſtituunt ſupra baſes A C, D F. Quoniam[a] *anguli A B C, & E, dimidij ſunt angulorum A G C, & H, quos iam oſtendimus eſſe æquales; erunt & ipſi inter ſe æquales.*

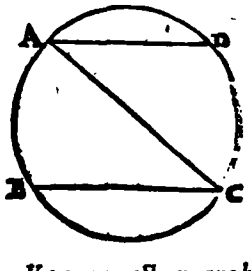
a 20. tertij.

EODEM modo, ſpatia in centris G, H, inſiſtentia arcubus A B C, D E F, æqualibus, æqualia erunt. Nam ablatis arcubus æqualibus A B C, D E F, ex circulis æqualibus, reliqui fient æquales arcus A I C, D F; ideoq̃, vt oſtendimus, anguli A G C, D H F, æquales erunt: quibus ablatis ex ſpatijs circa centra G, H, quæ æqualia ſunt, cùm quodlibet ſit quatuor rectis æquale, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. reliqua erunt & ſpatia in centris G, H, inſiſtentia arcubus A B C, D E F, æqualia.



SI verò peripheriæ fuerint inæquales, inſiſtet maiori maior angulus, ſiue ad centrũ, ſiue ad circunferentiam, quàm minori. In figura enim ſcholij præcedentis ſit peripheria A C, maior, quàm peripheria D F. Dico angulum A G C, maiorem eſſe angulo D H F; & angulum A B C, maiorem angulo D E F. Si enim fiat peripheria C I, æqualis peripheriæ D F, ducanturq̃, rectæ I G, I B, erunt, vt oſtenſum eſt, tam anguli ad centrum C G I, D H F, quàm anguli ad circunferentiam C B I, D E F, æquales. Quare & angulus A G C, angulo D H F, & angulus A B C, angulo D E F, erit maior. Quod etiam de ſpatijs ad centra G, H, inſiſtentibus arcubus A B C, D E F, intelligendum eſt. Nam eodem modo demonſtrabimus ſpatium ad H, arcui D E F, inſiſtens, maius eſſe ſpatio ad G, quod arcui A B C, inſiſtit, ſi arcus D E F, maior ponatur arcu A B C.

EX hac porrò propoſitione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, ſe mutuò non ſecantes, eſſe parallelas. Et ſi ſint parallelæ, ab ipſis arcus æquales intercipi. In circulo enim A B C D, rectæ A D, B C, intercipiant arcus æquales A B, D C. Dico A D, B C, eſſe parallelas. Ductis namque rectis A C, cùm arcus A B, D C, ponantur æquales,[b] *erũt anguli A C B, C A D, ipſis inſiſtentes, æquales; qui cùm ſint alterni,*[c] *erunt A D, B C, parallelæ.*



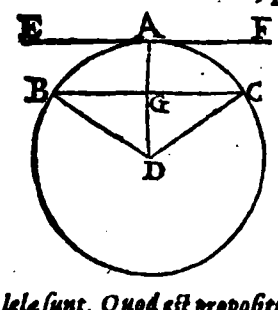
b 27. tertij.
c 27. primi.

SINT iam A D, B C, parallelæ. Dico arcus interceptos A B, D C, eſſe æquales. Cùm enim ſint parallelæ A D, B C, ducta recta A C,[d] *erunt anguli alterni A C B, C A D, æquales; Ac proinde*[e] *arcus A B, D C, quibus inſiſtunt, æquales erunt.*

d 29. primi.
e 26. tertij.

VISVM eſt quoque hoc loco apponere ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile: videlicet.

LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela eſt rectæ lineæ, quæ peripheriam illam ſubtendit.

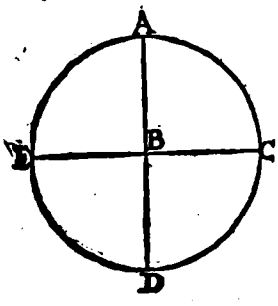


IN circulo A B C, cuius centrum D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ B A C, linea E F, tangens circulũ. Dico E F, parallelã eſſe rectæ B C, arcũ B A C, ſubtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta D A, ſecante rectam B C, in G, connexiq̃, rectis D B, D C,[f] *erunt anguli A D B, A D C, circunferentijs æqualibus A B, A C, inſiſtentes, æquales: Sunt autem & latera B D, D G, trianguli B D G, lateribus C D, D G, trianguli C D G, æqualia, vtrumque vtriq;.*[g] *Igitur & anguli ad G, æquales ſunt ſuper baſes G B, G C, ac propterea recti. Igitur & A G B, A G C, illis deinceps recti ſunt: Sunt autem & anguli G A E, G A F, recti,*[h] *quòd D A, perpendicularis ſit ad E F.*[i] *Ergo E F, B C, parallelæ ſunt. Quod eſt propoſitum.*

f 27. tertij.
g 4. primi.
h 18. tertij.
i 28. primi.

Ex demonſtratis in hac propoſitione, & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonſtrauimus.

ANGVLVS rectus in centro inſiſtit quadranti; acutus verò arcui quadrante minori; & obtuſus arcui quadrante maiori. Et contrà, angulus in centro quadranti inſiſtens, rectus eſt; inſiſtens verò arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtuſus.

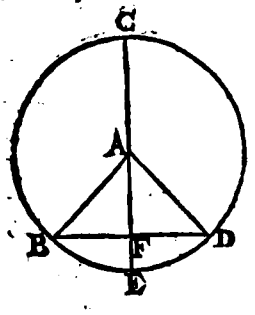


RECTVS angulus A B C, inſiſtat arcui A C, in centro B, circuli A C D E. Dico arcum A C, quadrantem eſſe, &c. Productis enim rectis A B, C B, ad D, E, erunt quoq; anguli A B E, C B D, recto A B C, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. nec non & angulus D B E, rectus, [a] cùm æqualis ſit recto angulo A B C, ad verticem. a 15. primi. *Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales ſunt, vtpote recti: ac propterea [b] arcus A C, C D, D E, E A, quibus inſiſtunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans eſt. Et quoniam recta cum A B, in B, conſtituens angulum acutum, cadit in arcum A C: recta verò cum eadem A B, in B, continens angulum obtuſum, cadit in arcum C D; liquidò conſtat, angulum acutum inſiſtere arcui quadrante minori, obtuſum verò maiori.* b 26. tertij.

SED inſiſtat iam quadranti A C, angulus A B C, in centro B. Dico angulum A B C, eſſe rectum, &c. Productis enim rurſum rectis A B, C B, ad D, E; quoniam tam C A E, quàm A C D, & A E D, ſemicirculus eſt, eſtq; A C, quadrans; erit tam A E, quàm C D, quadrans quoque, ac proinde & D E, in ſemicirculo A E D, quadrans erit. Sunt ergo quatuor arcus A C, C D, D E, E A, æquales, [c] ac proinde anguli ad centrum B, illis inſiſtentes, æquales erunt. Quare cùm omnes quatuor ſint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum A B, auferens minorem arcum quadrante A C, facit in centro B, cum A B, minorem angulum recto angulo A B C; recta verò cum eadem A B, auferens maiorem arcum quadrante A C, conſtituit in centro B, angulum recto angulo A B C, maiorem; perſpicuũ eſt, angulum minori arcui quadrante inſiſtentem, eſſe acutum; maiori verò, obtuſum. Quod eſt propoſitum. c 27. tertij.

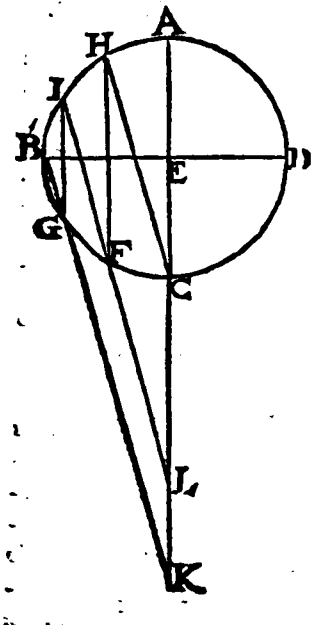
PARI ratione & hoc theorema ex demonſtratis elicitur, quod in ſinubus etiam demonſtrauimus.

RECTA linea è centro circuli ducta, ſecansque aliam rectam non per centrum ductam bifariam, ſecabit & arcum, cui hæc recta ſubtenditur bifariam. Et contrà, ſi ſecet arcum bifariam, ſecabit & rectam ei ſubtenſam bifariam.



EX centro A, circuli B C D E, recta egrediẽs A E, ſecet rectam B D, bifariam in F. Dico & arcum B E D, in E, ſectam eſſe bifariam, &c. Ductis enim rectis A B, A D; quoniam duo latera A E, A F, duobus lateribus A D, A F, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, baſisq; B F, baſi D F, æqualis ponitur; [d] erit angulus B A F, angulo D A F, æqualis. Igitur [e] arcus B E, arcui D E, æqualis erit. Sectus ergo eſt arcus B D, in E, bifariam. d 8. primi. e 26. tertij.

SECET iam recta A E, arcum B D, in E, bifariam. Dico rectam quoq; B D, in F, bifariam eſſe ſectam. Ductis enim rurſum rectis A B, A D; quoniam arcus B E, D E, ponuntur æquales; [f] erunt & anguli B A E, D A E, in centro æquales. Itaque quia duo latera A B, A F, duobus lateribus A D, A F, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales, vt oſtendimus; [g] erunt quoque baſes B F, D F, æquales: ac proinde recta B D, in F, ſecta eſt bifariam. Quod erat oſtendendum. f 27. tert. g 4. primi.



NEQVE verò omittenda hoc loco videtur eximia quædã proprietas circuli, quam Ioan. Bapt. Benedictus ex Cardano lib. 16. cap. 1. de Subtilitate deſumptam demonſtrat. Videlicet.

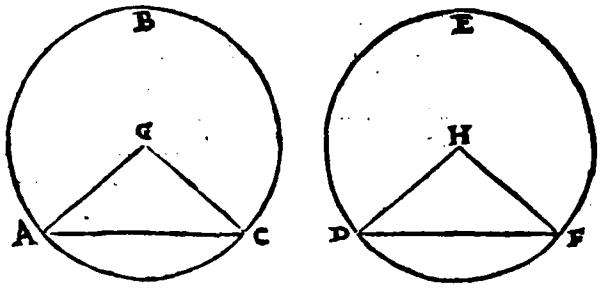
SI in circulo ductis duabus diametris ſeſe ad angulos rectos ſecantibus, altera earum producatur, eiq; ex vna parte quotquot parallelæ agantur, diuidentes vtrumque Quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximę parallelæ recta ducatur conueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concurſus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vnà cum diametro, quæ producta eſt, ſimul ſumptis, æqualis.

In circulo A B C D, ſecent ſe ad rectos angulos diametri A C, B D, & A C, producatur verſus C, quantumlibet. Diuiſo autem Quadrante B C, in quotuis partes æquales C F, F G, G B, & Quadrante B A, in totidem, iungantur rectæ F H, G I, quæ ex ſcholio huius propoſitionis ipſi A C, parallelæ erunt, cùm arcus æquales intercipiunt. Ex B, per G, denique extendatur recta B G, occurrens A C, productæ in K. Dico rectam A K, æqualem eſſe omnibus parallelis A C, H F, I G, ſimul ſumptis. Ductis enim rectis H C, I F, & productis, donec cum

a 27. tertij. A K, conueniant; a quoniam anguli C H F, H F I, arcubus æqualibus C F, H I, insistentes, sunt æquales; b erũt
b 27. primi. recta H C, I L, parallelæ. Est autẽ & F H, ipsi C L, parallela. Parallelogrammum ergo est C H F L; c ac proin-
c 34. primi. de recta C L, rectæ F H, æqualis erit. Eadem ratione erit K L, ipsi G I, æqualis: & sic deinceps, si sint plures. Addita ergo communi A C, fiet tota A K, omnibus A C, H F, I G, simul sumptis æqualis. Quod est propositum.

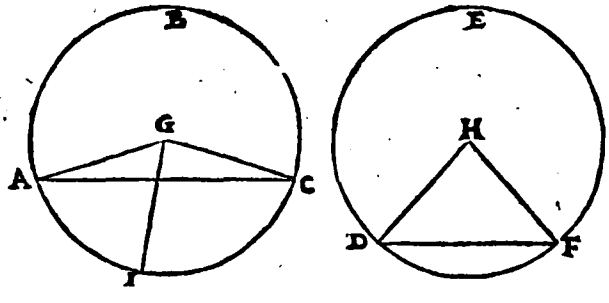
27. THEOR. 25. PROPOS. 28.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt: maiorem quidem maiori, minorem autem minori.



IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sint rectę æquales A C, D F. Dico maiorem peripheriam A B C, æqualẽ esse maiori D E F, & minorẽ A C, minori D F. ductis enim rectis A G, G C, D H, H F; erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F. Ponuntur autem & bases A C, D F, æquales. Igitur a anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ A C, D F,
a 8. primi.
b 26. tertij. quibus insistunt, b æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquẽt etiam æquales A B C, D E F. In æqualibus ergo circulis, æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

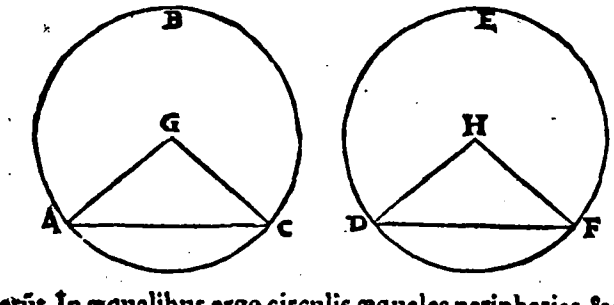
SCHOLIVM.



QVOD si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nam si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quàm minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, quorũ centra G, & H, sit recta A C, maior, q̃ D F. Dico peripheriam A C, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria D F. At peripheriam A B C, minorem peripheria D E F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F. Ponitur
a 25. primi. *autem basis A C, maior basi D F. Igitur a angulus A G C, maior erit angulo D H F. Fiat angulus C G I, an-*
b 26. tertij. *gulo D H F, æqualis; eritq; propterea b peripheria C I, peripheriæ D F, æqualis; Ac proinde peripheria A I C, maior, quàm peripheria D F: Ideoq; reliqua A B C, minor, quàm reliqua D E F.*

28. THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

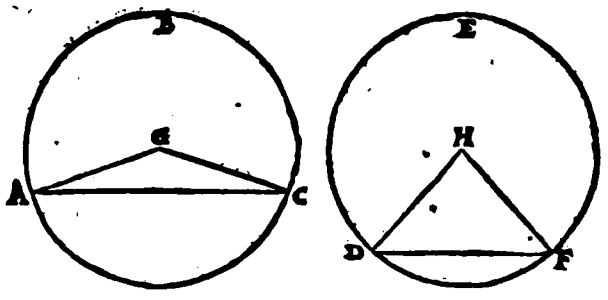


IN circulis eisdem æqualibus. ponantur æquales peripheriæ A B C, D E F. Item A C, & D F. Dico rectas A C, D F, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F. Sunt autem & anguli G, H, a æquales, quòd æqualibus peripheriis A C, D F, insistant. Igitur b bases A C, D F, æquales
a 27. tertij.
b 4. primi. erũt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

SI autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiorem maior linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quàm minorem. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sint peripheriæ semicirculo minores A C, D F, sitq; A C, maior, q̃ D F; Ac proinde A B C, minor, quàm D E F. Dico lineam A C, maiorem esse, quàm D F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F; erit angulus A G C, maior angulo D H F, ex scholio propositionis 27. huius libri. Cùm igitur latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia sint late-

ribus



ribus DH, HF, trianguli DHF, [a] *erit baſis AC, maior baſe DF, &c.* a 4. primi

SVNT autem proximè antecedentes quatuor propoſitiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo, vt in ſcholio propoſ. 26. monuimus, quemadmodũ conſtat ex demonſtrationibus adductis. Eadem enim locum habent in vno eodemq; circulo.

ITAQVE eadem quatuor propoſitiones magis vniuerſales fient, ſi ita proponãtur.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

IN æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt: maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ ſubtendũt.

SED & ſequentes propoſitiones demonſtrare, non fuerit inutile.

I.

CIRCVLI, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt ſimiles circunferẽtias, æquales ſunt.

EX circulis ABC, DEF, rectæ lineæ æquales AC, DF, abſcindant ſimiles circunferentias ABC, DEF. Dico circulos ipſos æquales eſſe. Nam ſi ſegmenta ABC, DEF, ſimilia ſunt, erunt & reliqua ſegmenta AC, DF, ſimilia, vt ad propoſ. 22. demonſtrauimus. Rurſus quia ſuper rectas æquales AC, DF, conſtituta ſunt ſimilia ſegmenta ABC, DEF, [b] *ipſa inter ſe æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erũt ſegmenta AC, DF, quæ ſimilia ſunt demonſtrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, ſi rectæ æquales AC, DF, dicantur auferre ſimiles circunferentias AC, DF, erunt ex ijs, quæ ad propoſit. 22. demonſtrauimus, & ſegmenta ABC, DEF, ſimilia.* [c] *Tam ergo illa, quàm hæc inter ſe æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter ſe. Quod eſt propoſitum.* b 24. tertij. c 24. tertij.

II.

Ex circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circunferentias diſſimiles auferunt.

IN eadem figura ponantur rectæ AC, DF, æquales, at circuli ABC, DEF, inæquales. Dico circunferentias ABC, DEF, diſſimiles eſſe. Si enim ſimiles eſſent, circuli ipſi, vt proximè demonſtrauimus, eſſent æquales. Quod pugnat cum hypotheſi. Diſſimiles ergo ſunt circunferentiæ ABC, DEF. Eadem ratione circunferentiæ AC, DF, erunt diſſimiles. Quod erat oſtendendum.

III.

Ex circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circũferẽtias ſimiles auferũt, inæquales ſunt.

IN eadem figura ponantur circuli inæquales, at circunferentiæ ABC, DEF, ſimiles. Dico rectas AC, DF, inæquales eſſe. Si enim dicantur eſſe æquales, erũt, ex primo theoremate, circuli æquales, quod eſt abſurdum, cùm ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ AC, DF, inæquales. Eodem modo, ſi ſimiles dicantur circunferentiæ AC, DF, demonſtrabitur, rectas lineas AC, DF, inæquales eſſe.

IIII.

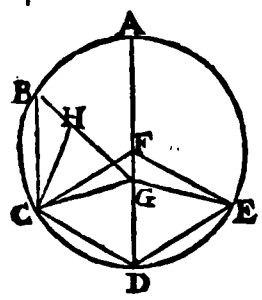
RECTAE lineæ, quæ ex quibuſcunque circulis circunferentias ſimiles inæquales auferunt, inæquales ſunt.

IN eadem figura ponantur circunferentiæ ABC, DEF, ſimiles & inæquales. Dico rectas AC, DF, inæquales eſſe. Aut enim circuli æquales ſunt, vel inæquales. Sint primùm æquales. Si ergo rectæ AC, DF, dicantur æquales, [d] *erunt circunferentiæ ABC, DEF, ablatæ æquales, quod eſt contrà hypotheſin. Non ergo æquales ſunt rectæ AC, DF. Sint deinde circuli inæquales. Igitur rectæ AC, DF, auferentes circunferentias ABC, DEF, ſimiles, inæquales ſunt, vt in tertio theoremate demonſtratum eſt. Non aliter oſtendemus, rectas AC, DF, inæquales eſſe, ſi circunferentiæ AC, DF, ponantur ſimiles & inæquales.* d 28. tertij.

V.

SI in diametro circuli præter centrum punctum ſumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ nõ in eaſdem partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abſcindent æquales. Et ſi lineæ ſint æquales, conſtituent rectæ illæ ad diametrum angulos æquales, abſcindentq; æquales arcus. Si denique arcus æquales abſcindant, erunt rectæ illæ æquales, conſtituentq; ad diametrum angulos æquales.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, ſumatur in diametro AD, punctum G, præter centrũ, conſtituanturq; primùm duo anguli æquales CGD, EGD. Dico tam rectas GC, GE, quàm arcus CD, ED, æquales eſſe.



a 13. primi. *Quoniam enim* [a] *tam duo anguli C G D, C G F, quàm duo E G D, E G F, duobus rectis æquales sunt, si demantur æquales C G D, E G D; erunt & reliqui C G F, E G F, æquales. Ductis igitur C F, E F, ad centrum, erũt duo latera F C, F G, duobus lateribus F E, F G, æqualia, angulique* [q3] *F G C, F G E, æqualibus lateribus oppositi æquales. Cùm ergo reliquorum angulorum F C G, F E G, vterque* [q3] *sit recto minor; (Ducta enim recta C D, erit angulus F C D, in Isoscele F C D, acutus. ex 3. corollario propos. 17. lib. 1. ac propterea à fortiori F C G, acutus erit. Eodémque modo, ducta recta D E, angulus F E G, acutus erit,) erit ex iis, quæ ad finem lib. 1. demonstrauimus, basis G C, basi G E, æqualis, & angulus C F G, an-*

b 26. tertij. *gulo E F G;* [b] *ac proinde arcus C D, E D, æquales erunt. Constat ergo propositum.*

Deinde sint lineæ G C, G E, æquales. Dico & angulos C G D, E G D, æquales esse, & arcus C D, E D. Si enim lineæ G C, G E, sunt æquales, erunt duo latera G C, G F, æqualia duobus lateribus G E, G F. Est autem

c 8 primi. *& basis F C, basi F E, æqualis.* [c] *Igitur anguli F G C, F G E, æquales erũt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui C G D, E G D, erunt æquales. Rursus quia duo latera F C, F G, duobus lateribus F E, F G, æqualia sunt, ba-*

d 8. primi. *ses* [q3] *æquales ponuntur G C, G E;* [d] *erunt & anguli C F D, E F D, æquales,* [e] *atque* [q3] *idcirco & arcus C D, E D,*

e 26. tertij. *æquales erunt. Quod est propositum.*

Tertio sint arcus C D, E D, æquales. Dico & lineas G C, G E, & angulos C G D, E G D, esse æquales. Si

f 27. tertij. *enim arcus C D, E D, æquales sunt,* [f] *erunt & anguli C F D, E F D, æquales. Quare cùm duo latera F C, F G,*

g 4. primi. *duobus lateribus F E, F G, sint æqualia, angulos* [q3] *æquales contineant;* [g] *erunt & bases G C, G E, æquales, & anguli F G C, F G E; ac proinde ex duobus rectis reliqui C G D, E G D. Quæ omnia demonstranda erant.*

VI.

Si in diametro circuli præter centrum sumatur punctum quodpiam, in quo ad eandem partes duo anguli æquales constituãtur, insistent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui à minori portione diametri remotior est.

In eadem figura proxima sint duo anguli æquales C G D, C G B. Dico arcum B C, arcu C D, maiorẽ esse.

h 7. tertij. *Ductis enim rectis B C, C D,* [h] *quoniam recta G B, maior est, quàm recta G D, abscindatur G H, ipsi G D, æqualis, iungatur* [q3] *recta C H. Quia igitur duo latera G H, G C, duobus lateribus G D, G C, æqualia sunt, angu-*

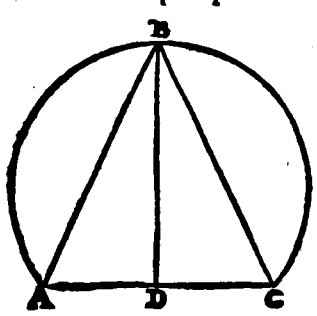
i 4. primi. *los* [q3] *continent æquales;* [i] *erunt & bases C H, C D, æquales, & angulus G H C, angulo G D C, æqualis. Est autem G D C, in Isoscele F C D, acutus, ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. Igitur & G H C, acutus erit; ac proinde ex*

k 17. primi. *duobus rectis reliquus C H B, obtusus erit. Cùm ergo* [k] *duo anguli C H B, C B H, sint duobus rectis minores,*

l 19. primi. *erit C B H, acutus. Quare* [l] *latus B C, latere C H, maius erit. Est autem C H, recta ostensa ipsi C D, æqualis. Igitur recta B C, maior quoque erit, quàm C D; ac propterea ex scholio propos. 28. huius lib. arcus B C, arcu C D, maior erit. Quod erat ostendendum.*

29. PROBL. 4. PROPOS. 30.

DATAM peripheriam bifariam secare.



a 4. primi. b 28. tertij.

Sit peripheria A B C, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens A C, qua diuisa bifariam in D, erigatur perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis A B, C B, erunt latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia lateribus C D, D B, trianguli C D B. Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur [a] & bases A B, C B, æquales erunt. Ac propterea [b] peripheriæ A B, C B, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus. Quod erat faciendum.

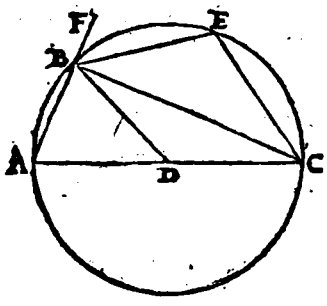
PRAXIS.

Non differt praxis diuidendi datam peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propos. 10. lib. 1. tradidimus. Si namque quicunque arcus proponatur, vt A B C, intelligenda semper est recta linea eum subtendens A C, etiamsi ducta non sit; atque [q3] *ex punctis A, & C, describendi arcus eodem interuallo se mutuò intersecantes supra & infra puncta A, & C, &c. non secus, ac si dicta recta A C, secanda esset bifariam. Recta enim diuidens rectam A C, bifariam, secabit quoque arcum datum bifariam.*

30. THEOR. 27. PROPOS. 31.

In circulo angulus, qui in semicirculo rectus est: qui autem in maiore segmẽto, minor recto: qui verò in minore segmẽto, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmẽti, recto quidẽ maior est: minoris autẽ segmenti angulus, minor est recto.

Circvli enim A B C, cuius centrum D, diameter sit A C, constituaturque in semicirculo angulus



gulus A B C, exiſtetq; angulus B A C, in maiori ſegmento C A B. Conſtituatur quoque in C E B, minori ſegmento angulus B E C. Dico angulum A B C, in ſemicirculo rectum eſſe; angulum verò B A C, in maiore ſegmento, minorem recto: & angulum B E C, in minori ſegmento, maiorem recto. Item angulum maioris ſegmenti comprehenſum recta B C, & peripheria B A C, eſſe recto minorem. At angulum minoris ſegmenti comprehenſum recta B C, & peripheria B E C, recto minorem: Ducatur enim recta B D, ad centrum, & extendatur A B, in F. Quoniam igitur rectæ D A, D B, æquales ſunt, [a] erit angulus D B A, angulo D A B, æqualis. Eadem ratione erit angulus D B C, angulo D C B, æqualis, ideoq; totus angulus A B C, duobus angulis B A C, B C A, æqualis erit. [b] Eſt autem & angulus F B C, externus eiſdem duobus internis angulis B A C, B C A, in triangulo A B C, æqualis. Quare æquales erunt inter ſe anguli A B C, F B C; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur eſt angulus A B C; quod eſt primum.

[a] 5. primi.

[b] 32. primi.

QVONIAM verò in triangulo A B C, [c] duo anguli A B C, & B A C, ſunt duobus rectis minores; Et eſt angulus A B C, oſtenſus rectus: Erit angulus B A C, in ſegmento maiori, recto minor; quod eſt ſecundum.

[c] 17. primi.

RVRSVS quia in quadrilatero A B E C, intra circulum deſcripto, [d] duo anguli oppoſiti B A C, & B E C, ſunt duobus rectis æquales; Et angulus B A C, oſtenſus eſt recto minor: Erit B E C, angulus in ſegmento minore, recto maior; quod eſt tertium.

[d] 22. tertij.

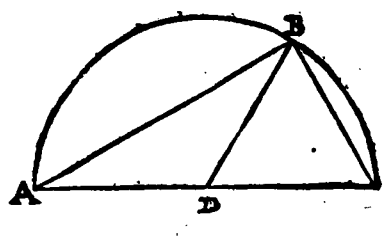
SATIS autem eſt demonſtraſſe, vnum angulum in ſemicirculo, nimirum A B C, rectum eſſe: & in maiori ſegmento, qualis eſt B A C, recto minorem: at denique in ſegmento minori, cuiuſmodi eſt B E C, maiorem recto. Cùm enim omnes anguli in eodem ſegmento ſint inter ſe æquales, perſpicuum eſt, ſi vnus angulus in ſemicirculo rectus ſit, omnes in eodem ſemicirculo eſſe rectos: Et ſi in maiore ſegmento vnus ſit recto minor, omnes in eodem ſegmento eſſe recto minores: Et ſi denique in minore ſegmento vnus ſit maior recto, omnes in eodem ſegmento maiores eſſe recto. Hoc idcircò dixerim: quia Euclides non probat abſolutè, quemcunque angulum in ſegmento maiore B A C, eſſe recto minorem, vt conſtat, ſi alius angulus in eo ſegmento conſtitueretur; cùm is non contineretur à diametro, quemadmodum angulus B A C. Quare quicunque alius oſtendetur eſſe etiam recto minor, quia [a] æqualis eſt angulo B A C, in eodem ſegmento maiore, qui recto minor eſt oſtenſus ab Euclide.

[a] 21. tertij.

AMPLIVS cùm angulus rectus A B C, pars ſit anguli ſegmenti maioris B A C, qui comprehenditur recta B C, & peripheria B A C; erit angulus ſegmenti maioris, recto maior: quod eſt quartũ.

POSTREMO, cùm angulus ſegmenti minoris, comprehenſus recta B C, & peripheria B E C, pars ſit quoque anguli recti F B C; Erit angulus ſegmẽti minoris, recto minor; quod eſt quintum. In circulo igitur angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

Alia demonſtratio huius propoſitionis.



IN ſemicirculo, cuius diameter A C, & centrum D, ſit angulus A B C, quem dico eſſe rectum. Ducta enim recta B D, [e] erunt anguli D B A, D A B, æquales, quòd rectæ D A, D B, æquales ſint. Cùm igitur angulus B D C, externus [f] æqualis ſit duob⁹ angulis internis D B A, D A B, in triangulo A B D; Erit angulus B D C, duplus anguli D B A. Eodem modo erit angulus A D B, duplus anguli D B C; atque adeò duo anguli ad D, dupli erunt totius anguli A B C. Cùm igitur [g] anguli ad D, ſint duobus rectis æquales; erit angulus A B C, eorum dimidium, rectus: quod eſt primum.

[e] 5. primi.

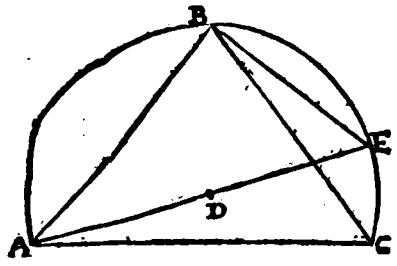
[f] 32. primi.

[g] 13. primi.

VEL ſic. Quoniã [h] angulus D A B, angulo D B A, & angulus D C B, angulo D B C, æqualis eſt; erunt duo anguli A, C, angulo A B C, æquales in triangulo A B C: ac proinde angulus A B C, dimidium erit trium angulorum A, C, & A B C, eiuſdem trianguli. Quocirca [i] cùm tres anguli in triangulo A B C, ſint æquales duobus rectis; erit A B C, dimidium duorũ rectorum, atq; idcircò rectus.

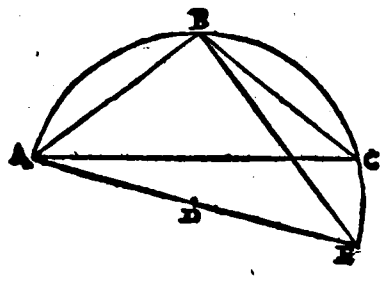
[h] 5. primi.

[i] 32. primi.

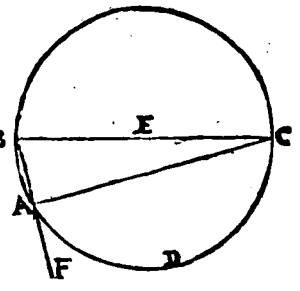


SIT rurſus in ſegmeno maiori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico eſſe recto minorem. Ducta enim diametro A E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in ſemicirculo rectus, vt demonſtratũ eſt. Quare angulus A B C, pars recti, recto minor erit: quod eſt ſecundum. Atque hæc demonſtratio in omnem angulum in minori ſegmento quadrat: quod de ſuperiori demonſtratione dici non poterat, vt ibidem monuimus.

SIT iterum in ſegmento minori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico eſſe recto maiorem. Ducta enim dia-



metro A E, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E. in semicirculo rectus, vt demonstratum est; qui cùm sit pars anguli A B C, erit angulus A B C, recto maior: quod est tertium.



Iam verò ꝓponatur segmẽtum maius A B C, & segmentũ minus A D C, quorum centrum E. Dico angulum C A B, segmenti maioris, qui videlicet constituitur à recta C A, & peripheria A B C, esse recto maiorem; At angulum C A D, segmenti minoris, qui fit à recta eadem C A, & peripheria A D C, recto minorẽ. Ducta enim diametro C B, & recta B A F, cadet eius segmentum B A, duo puncta B, A, coniungens, [a] intra circulum, reliqua verò pars A F, extra circulum; eritque angulus B A C, in semicirculo rectus, atque adeò ei deinceps F A C, rectus quoque. Cùm igitur angulus rectilineus rectus B A C, sit pars anguli C A B, segmenti maioris, qui nimirum sub recta C A, & peripheria A B C, continetur; & angulus C A D, segmenti minoris, contentus videlicet sub recta C A, & peripheria A D C, pars quoque anguli recti F A C; constat vtrumque.

a 2. tertij.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, quòd angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eò quòd illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priore demonstratione. Vel eò quòd dimidium sit trium angulorum trianguli, [a] *qui duobus rectis æquiualent. Quod ex posteriore demonstratione manifestum est.*

a 32. primi.

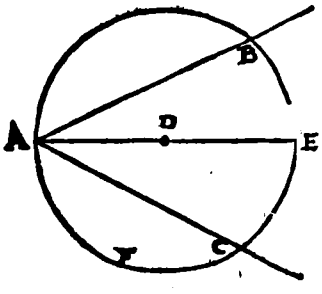
EX CAMPANO.

Ex hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propos. 16. huius libri, quarum vna est.

Transitvr à maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

Altera verò est eiusmodi.

Contingit reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.



b 31. tertij.
c 16. tertij.
d 31. tertij.

In circulo enim A B C, cuius centrum D, & diameter A E, ducatur recta A B. [b] *Erit angulus A B E, segmenti maioris, recto maior. Quare si A B, moueatur versus A E, circa A, punctum fixum, faciet semper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum A E, peruenerit,* [c] *vbi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quòd si vlterius moueatur ad A C,* [d] *faciet à fortiori angulum A C F, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, vel etiam segmenti minoris, quorum vterque recto minor est; non tamen per angulum recto æqualem. Cùm igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, vitiosas esse predictas consequentias.*

SCHOLIVM.

Manifestvm quoque est conuersum huius theorematis: hoc est.

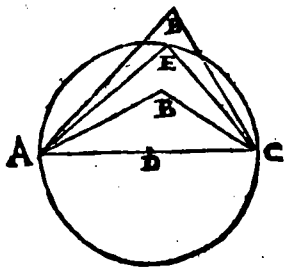
Segmentvm circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo verò angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus. Et segmentum, cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius; cuius verò angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.

Nam angulo existente recto, si segmentũ non sit semicirculus, erit vel maius, & sic angulus erit acutus, vel minus, & sic angulus in eo obtusus erit: quorum vtrumque pugnat cum hypothesi. Rursus angulo existente acuto, si segmentum non sit semicirculo maius, erit vel semicirculus, & sic angulus in eo erit rectus: vel minus, & sic angulus in eo erit obtusus: quorum vtrumque cum hypothesi etiam pugnat. Denique angulo existente obtuso, si segmentum non sit minus semicirculo, erit vel semicirculus, atq; ita angulus in eo rectus erit; vel maius, atq; ita angulus in eo acutus erit: quòd similiter hypothesi contrarium est. Praterea quando segmenti angulus est recto maior, si segmentum non sit maius semicirculo, erit vel semicirculus, vel semicirculo minus, & sic eius angulus recto erit minor: quod non potuit. At quando angulus segmenti est recto minor, si segmentum non sit semicirculus, aut semicirculo minus, erit maius, atq; ita eius angulus recto quoq; maior erit. quod hypothesi aduersatur.

Qvin

QVIN & hoc theorema verum eſt, ſcilicet.

SI angulo recto linea recta ſubtenſa, hoc eſt, ſi in triangulo rectangulo latus recto angulo oppoſitum, bifariam ſecetur, & ex puncto diuiſionis circa illam rectam, vel latus, circulus deſcribatur; tranſibit neceſſariò circulus ille per angulum rectum.

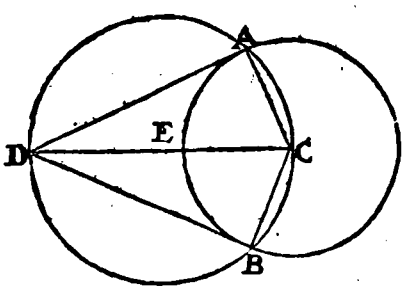


ANGVLO enim recto A B C, ſubtenſa recta A C, vel in triangulo rectangulo A B C, latus A C, recto angulo B, oppoſitum bifariam ſecetur in D, puncto, ex quo ad interuallum D A, vel D C, circulus deſcribatur A E C, quem dico tranſire per B. Si enim tranſeat citra B, vel vltra; ductis rectis A E, C E, ita vt rectas A B, A C, non ſecent, ſed vel intra eas cadant, vel extra; erit [a] *angulus A E C, rectus quoq;. Quare anguli recti B, & E, æquales erunt, quod eſt abſurdum: cùm angulus E, ſit neceſſariò,* [b] *vel maior, vel minor angulo B. Tranſit igitur circulus per punctum B: quod eſt propoſitum.*

a 31. tertij.

b 21. primi.

EX iis, quæ in priore parte huius propoſitionis demonſtrata ſunt; nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad vtramque partem rectæ ex eodem puncto per centrum circuli ductæ, quæ circulum tangant. Id quod ad propoſ. 17. huius libri polliciti ſumus.

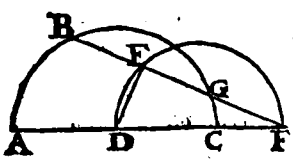


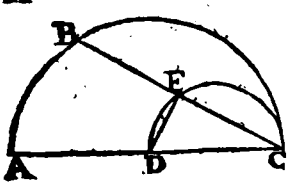
SIT enim circulus A B, cuius centrum C, & punctum D, extra ipſum. Ducta recta D C, ex dato puncto ad centrum, eaq; diuiſa bifariam in E, deſcribatur ex E, ad interuallum E C, vel E D, circulus A C B D, ſecans datum circulum in punctis A, B, tangantq; recta D A, D B. Dico vtramque circulum tangere in A, & B. Ductis enim rectis A C, B C, [c] *erit vterque angulus A, & B, in ſemicirculo rectus. Quare per coroll. propoſ. 16. huius libri, recta D A, circulum A B, tanget in A; & recta D B, eundem tanget in B: quandoquidem tam illa perpendicularis eſt ad extremitatem ſemidiametri A C, quàm hæc ad extremitatem ſemidiametri C B.*

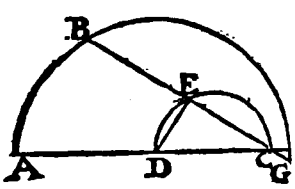
c 31. tertij.

SED & hoc theorema non inlucundum ex Pappo Alexandrino demonſtrabimus hoc loco; nimirum.

SI per centrum circuli alius circulus deſcribatur, & per vtriuſque circuli centrum recta eiiciatur, à puncto verò, vbi hæc recta à poſteriori circulo ſecatur, ducatur recta vtcunque: ſecabitur eius portio intra priorem circulum à circunferentia poſterioris bifariam.







SIT circulus A B C, per cuius centrum D, deſcribatur alius circulus D E F, & per horum circulorum centra ducatur recta A F; ac denique ex puncto F, vbi circulus D E F, rectam A F, interſecat, ducatur recta F B, ſecàs circunferentias in B, E, G. Dico B E, G E, eſſe æquales. Ducta enim recta D E, [d] *erit angulus D E F, in ſemicirculo D E F, rectus. Igitur* [e] *recta D E, rectam B G, ſecat bifariam.*

d 31. tertij.

e 3. tertij.

QVOD ſi poſterior circulus tranſeat per punctum C, vt in ſecunda figura; erit [f] *rurſum angulus D E C, in ſemicirculo D E C, rectus; ac* [g] *propterea B C, in E, ſecabitur bifariam.*

f 31. tertij.

g 3. tertij.

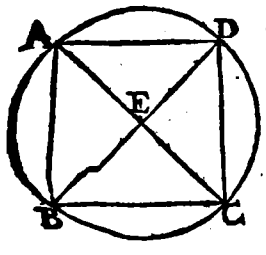
SI denique poſterior circulus totus ſit intrà priorem, vt in tertia figura; erit iterum [h] *angulus D E F, in ſemicirculo D E F, rectus. Quare* [i] *recta D E, rectam B G, bifariam ſecabit. Quod erat oſtendendum.*

h 31. tertij.

i 3. tertij.

FACILE etiam aliud hoc theorema demonſtrabitur.

QVADRILATERVM in circulo deſcriptum, cuius duo latera oppoſita ſunt parallela, & æqualia, parallelogrammum eſt rectangulum, hoc eſt, vel quadratum, vel altera parte longius.



IN circulo A B C D, deſcriptum ſit quadrilaterum A B C D, cuius duo oppoſita latera A D, B C, parallela ſint, & æqualia. Dico ipſum eſſe parallelogrammum, & rectangulum. Cùm enim rectæ A D, B C, parallelæ ſint, & æquales, [k] *erunt quoq; A B, D C, parallelæ, & æquales. Parallelogrammum ergo eſt A B C D. Quia verò* [l] *& arcus A D, arcui B C, ob rectas æquales A D, B C, & arcus A B, arcui D C, ob æquales rectas A B, D C, æqualis eſt; erit totus arcus B A D, toti arcui B C D, & totus arcus A D C, toti arcui A B C, æqualis; ac proinde, ductis rectis B D, A C, ſemicirculi erunt B A D, B C D, A D C, A B C. Quare* [m] *anguli quadrilateri recti erunt. Quod eſt propoſitum.*

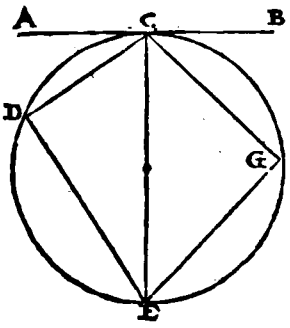
k 33. primi.

l 28. tertij.

m 31. tertij.

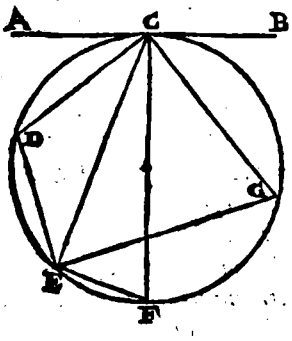
31. ## THEOR. 28. PROPOS. 32.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à cõtactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.



TANGAT recta AB, circulũ CDE, in C, puncto, à quo ducatur recta CE, diuidês circulũ in duo segmẽta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem esse angulo CGE, in alterno segmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoque segmento. Transeat enim primum, vt in priore figura, recta CE, per centrum. [a] Erit igitur vterque angulus ACE, BCE, rectus. [b] Sunt autem & anguli CGE, CDE, in semicirculis recti. Igitur angulus ACE, angulo CGE; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis est.

a 18. tertij.
b 31. tertij.



NON transeat iam CE, recta per centrum, vt in figura posteriore. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta EF: [c] eritque CF, perpendicularis ad AB, [d] & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, [e] æquales erunt vni recto, vt angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis. [f] Est autem angulo CFE, æqualis quoque angulus CGE, cũ vterque sit in segmẽto CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis erit. Quoniam verò in quadrilatero CDEG, [g] duo anguli CDE, CGE, duobus sunt rectis æquales: [h] Sunt autem & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.

c 18. tertij.
d 31. tertij.
e 32. primi.
f 21 tertij.
g 22. tertij.
h 13. primi.

SCHOLIVM.

POTEST theorema hoc conuerti hoc modo.

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem figura priore transeat primùm recta CE, per centrum, secans circulum CDE, & ducatur recta AB, per C, faciens angulum ACE, æqualem angulo CGE. Dico AB, tangere circulum. Quoniam [a] *angulus CGE, rectus est, erit & angulus ACE, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget. Iam verò CF, non transeat per centrum, construaturq́; figura posterior, vt suprà. Quoniam igitur angulus ACE, æqualis ponitur angulo CGE, in alterno segmento maiore,* [b] *& hic est æqualis angulo CFE; erit & angulus ACE, æqualis angulo CFE. Addito ergo communi angulo ECF, erit angulus ACF, æqualis duobus angulis EFC, ECF: Atqui anguli EFC, ECF, æquales sunt vni recto; quòd* [c] *angulus CEF, rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo CEF,* [d] *æquales sint duobus rectis. Angulus igitur ACF, rectus quoq; erit; ideoq; per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget.*

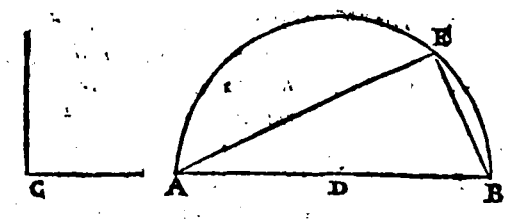
a 31. tertij.
b 21. tertij.
c 31. tertij.
d 32. primi.

EODEM modo, si angulus BCE, æqualis fuerit angulo CDE, in alterno segmento minori, ostendetur recta AB, tangere circulum. Cùm enim [e] *anguli BCE, ACE, duobus sint rectis æquales:* [f] *Item duo anguli CDE, CGE, duobus rectis æquales; si demantur æquales BCE, CDE, remanebunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, vt demonstratum iam est, recta AB, circulum tanget.*

e 13. primi.
f 22. tertij.

32. ## PROBL. 5. PROPOS. 33.

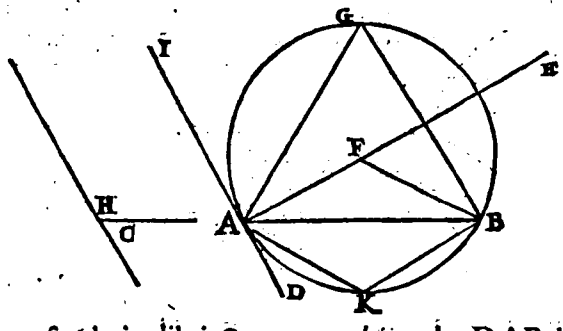
SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.



RECTA data sit AB, & datus angulus primũ rectus C. Oportet igitur super AB, segmentum describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem DA, vel DB, semicirculus AEB; factumque erit, quod proponitur. Nam [a] angulus AEB, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto.

a 31. tertij.

SIT deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpendicularis AE, quæ cadet



cadet supra AB. Fiat deinde angulo FAB, æqualis angulus FBA, secetq; BF, rectam AE, in F. [a] Erũt igitur rectę FA, FB, æquales. Quare si centro F, & interuallo FA, circulus describatur AGB, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento AGB, quod descriptum est super AB, esse æqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento AGB. Quia igitur AE, per centrũ F, transit, & ei perpendicularis est DA, tanget DA, recta circulum in A, per coroll. propos. 16. huius libri. Quapropter [b] angulus DAB, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno AGB.

[a] 6. primi.

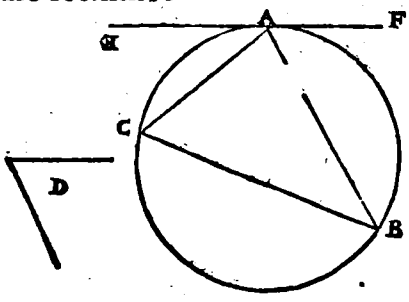
[b] 32. tertij.

Sit tertiò angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus IAB, & agatur ad IA, perpendicularis AE, quæ supra AB, cadet. Reliqua omnia fiant, vt priùs, descriptumque erit super AB, segmentum AKB, in quo angulus K, æqualis est angulo dato obtuso H. Nam angulus IAB, hoc est, angulus datus H, [c] æqualis est angulo K, in alterno segmento AKB. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

[c] 32. tertij.

PROBL. 6. PROPOS. 34. 33.

A DATO circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.



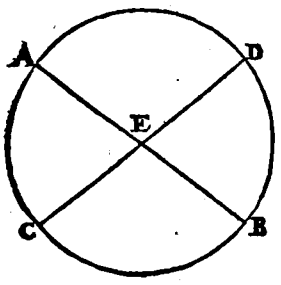
DATVS circulus sit ABC, à quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo D. [d] Ducatur recta EF, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus FAB, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum ACB, in segmento ablato ACB, æqualem esse dato angulo D. Est enim [e] angulus FAB, æqualis angulo C, in alterno segmento ACB. Cùm ergo angulo dato D, factus sit æqualis angulus FAB; erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abscidimus segmentum ACB, &c. Quod erat faciendum.

[d] 17. ter[illegible]

[e] 32. tertij.

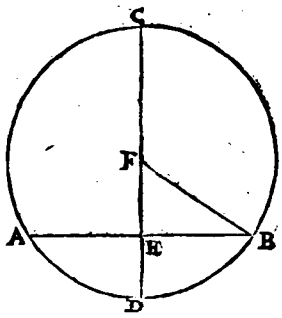
THEOR. 29. PROPOS. 35. 34.

SI in circulo duæ rectæ lineæ seſe mutuò secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.



IN circulo ACBD, secant se mutuò rectæ AB, CD, in F. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AE, EB, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmẽtis CE, ED. Aut enim vtraque linea transit per centrum, aut vna tantùm, aut neutra. Transeat primùm vtraq; per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus vnius lineæ æquale esse ei, quod sub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex iis, quæ ad initium lib. 2. scripsimus.

TRANSEAT deinde CD, sola per centrum F, diuidatque primùm rectam AB, bifariã, [f] ac propterea ad angulos rectos, coniungaturq; recta BF. Quoniam igitur CD, diuisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E; [g] erit rectangulum sub CE, ED, vnà cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ FD, ideoq; quadrato rectæ FB, cũ rectę FD, FB, sint æquales: Est autem quadratum rectę FB, [h] æquale quadratis rectarũ FE, EB. Igitur rectangulum sub CE, ED, vnà cũ quadrato rectæ EF, æquale quoque erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato cõmuni quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc est, rectangulo sub AE, EB; cùm AE, EB, rectæ sint æquales: ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum, ex iis, quæ ad defin. 1. lib. 2. scripsimus.



[f] 3. tertij.

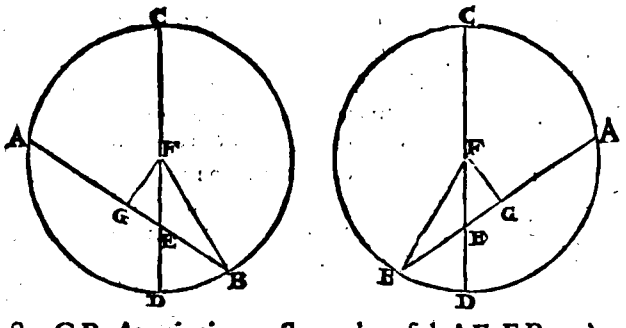
[g] 5. secundi.

[h] 47. primi.

DIVIDAT iam CD, transiens per centrum rectam AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducanturque rectæ FG, FB; [i] eritque FG, perpendicularis ad AB. Quoniam verò rectangulum sub CE, ED, vnà cum quadrato rectæ FE, [k] æquale est quadrato rectæ FD, hoc est,

[i] 3. tertij.

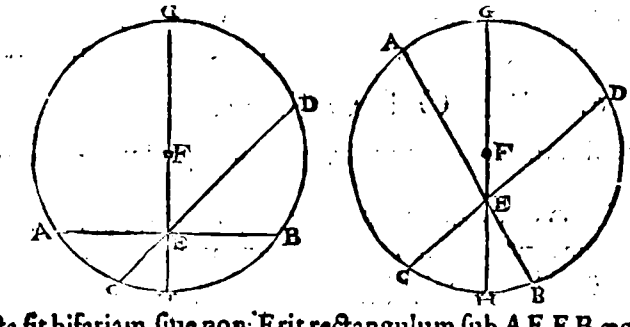
[k] 5. secundi.



quadrato rectæ FB: Est autem quadratum rectæ FE, [a] æquale quadratis rectarum FG, GE; & quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB; Erit quoque rectangulum sub CE, ED, vnà cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub CE, ED, vnà cum quadrato rectę GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, vnà cum quadrato rectæ GE, [b] æquale est eidem quadrato rectæ GB: propterea quòd recta AB, secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED, vnà cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vnà cum quadrato eiusdem rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB. quod est propositum.

a 47. primi.

b 5. secundi.

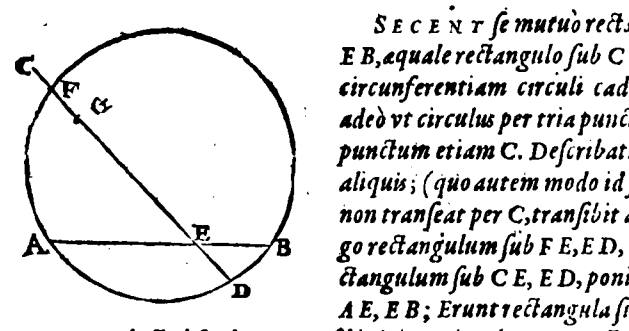


TERTIO neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta GH. Quoniam ita que ostensum est, rectangulum sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE, EH, siue AB, diuidatur bifariam, siue non: Item rectangulum sub CE, ED, æquale esse quoque eidem rectangulo sub GE, EH, siue CD, secta sit bifariam, siue non; Erit rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. quod est propositum. Si in circulo igitur duę rectæ lineæ sese mutuò secent, &c. Quod demonstrandū erat.

SCHOLIVM.

CONVERTI *poterit theorema istud hoc modo.*

SI duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub vnius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, circulus per quælibet tria puncta earum extrema descriptus, per quartum quoque punctum transibit.



SECENTVR se mutuò rectæ AB, CD, in E, sitq; rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circunferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi: adeò vt circulus per tria puncta A, D, B, descriptus, transeat necessariò & punctum etiam C. Describatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis; (quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut vltra C, vel citra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub FE, ED, [a] *æquale est rectangulo sub AE, EB. & rectangulum sub CE, ED, ponitur quoque æquale eidem rectangulo sub AE, EB; Erunt rectangula sub CE, ED, & sub FE, ED, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C. quod erat propositum.*

a 35. tertij.

35. THEOR. 30. PROPOS. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur quadrato.

EXTRA circulum ABC, punctum sumatur D, à quo linea ducatur DA, secans circulum in C, [a] & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat enim primùm recta DA, per centrum E, & iungatur recta EB, [b] quæ perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum CD, [c] erit rectangulum sub DA, DC, vnà cum quadrato rectæ EC, hoc est, cum

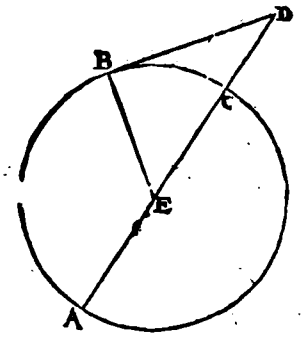
a 17. tertij.

b 18. tertij.

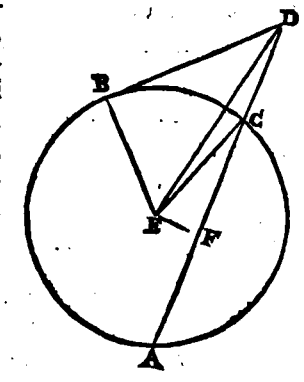
c 6. secundi.

quadrato

quadrato rectæ EB, æquale quadrato rectæ DE: Est autem quadratum rectæ DE, [a] æquale quadratis rectarum EB,BD. Quare rectangulum sub DA,DC, vnà cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadratis rectarum DB,BE. Ablato igitur communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA,DC, quadrato rectæ DB, æquale. Quod est propositum. a 47. primi.



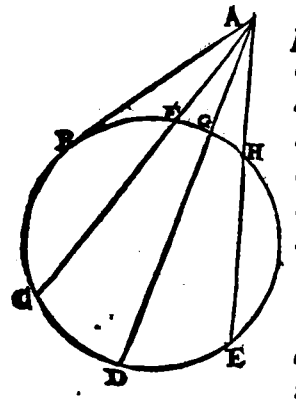
NON trâseat iam DA, secans p centrum E. Diuisa ergo AC, bifariam in F, ducantur rectæ EB, EC, ED, EF; [b] eritque EB, ad BD, perpendicularis; [c] & EF, ad AC. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD, [d] erit rectangulum sub DA, DC, vnà cum quadrato rectæ CF, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur communi quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, vnà cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF, FE. Est autem quadratis rectarum CF, FE, [e] æquale quadratum rectæ EC, ideoque & quadratum rectæ EB; Et [f] quadratis rectarum DF, FE, æquale est quadratum rectæ DE. Quare rectangulum sub DA, DC, vnà cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cùm igitur quadratum rectæ DE, [g] æquale sit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectangulum sub DA, DC, vnà cum quadrato rectæ EB, æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale: quod est propositũ. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrãdum.



b 18. tertij.
c 3. tertij.
d 6. secũdi.
e 47. primi.
f 47. primi.
g 47. primi.

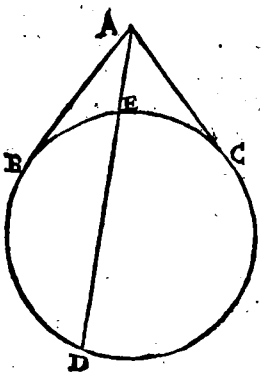
COROLLARIVM I.

HINC manifestum est, si à puncto quouis extra circulum assumpto plurima linea recta circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se esse aequalia. Vt si ex A, ducantur recta AC, AD, AE, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF; Item sub AD, AG; & sub AE, AH, aequalia inter se. Nam ducta AB, tangente circulum, [a] *erunt quadrato rectæ AB, aequalia singula illa rectangula; quare & inter se omnia aequalia erunt.* a 36. tertij.



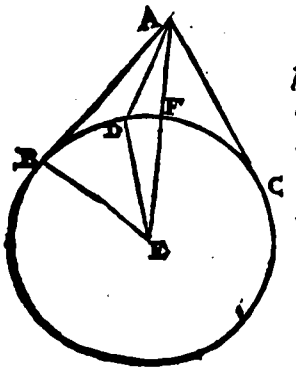
COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulũ tangant, inter se esse aequales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulum; quas dico esse aequales inter se. Ducta enim recta AD, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ AB, quàm quadratum rectæ AC, [b] *æquale rectangulo sub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter se aequalia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, aequales quoque erunt.* b 36. tertij.



COROLLARIVM III.

PERSPICVVM quoq; est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantùm posse duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci posit tertia AD, circulum eundem tangens; ductis rectis EB, ED, ex centro E, [c] *erunt anguli ABE, ADE, recti, ideoq; æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta AE,* [d] *erit angulus ADE, maior angulo ABE.* c 18. tertij. d 21. primi.



ALITER. Si tertia AD, circulum etiam tangat, erunt duæ tangentes AB, AD, aequales, vt ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta AE, ad centrum E, quæ circulum secet in F, [e] e 8. tertij.

erit A D, cùm ſit propinquior minimæ A F, minor, quàm A B, quæ à minima A F, remotior eſt. Vel ſic: Si A B, A D, ſunt æquales; additis æqualibus E B, E D, erunt quoque A B, B E, ipſis A D, D E, æquales, quod eſt abſurdum. [a] *Sunt enim maiores A B, B E, quàm A D, D E. Solùm igitur duæ rectæ ducentur à puncto A, quæ circulum tangant. Quod eſt propoſitum.*

a 21. primi.

COROLLARIVM IV.

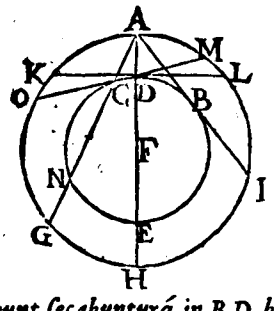
ILLVD denique conſtat etiam, ſi duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt ſi duæ rectæ A B, A C, in antecedente figura ſint æquales, & A C, tangat circulum in C, tanget quoque A B, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur A D, tangens (ſemper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci poſſunt, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 31. huius lib.) eruntq; ex 2. coroll. A C, A D, æquales. Cùm ergo & A B, ipſi A C, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales A B, A C, A D, quod eſt abſurdum. [b] *Duæ enim tantùm duci poſſunt.*

b 8. tertij.

ALITER. Ponantur in figura ſequentis propoſitionis duæ rectæ æquales D B, D F, & D B, circulum tangat, in B. Dico & D F, eundem tangere in F. Ductis enim rectis E B, E F, ex centro, erunt duo latera D B, B E, duobus lateribus D F, F E, æqualia, & baſis D E, communis. [c] *Igitur anguli B, F, æquales erunt:* [d] *Sed B, rectus eſt. Igitur & F, rectus erit: atque idcircò D F, circulum tanget in F, ex coroll. propoſ. 16 huius libri.*

c 8. primi.
d 18. tertij.

SCHOLIVM.



FACILLIMO negotio propoſitionem hanc per antecedentem propoſitionem demonſtrabimus, hoc modo. Ex puncto A, extra circulum B C D, ducatur tangens A B, & ſecans A E, quæ primùm per centrum F, tranſeat, ſecetq; circunferentiam in D. Dico rectangulum ſub A E, A D, æquale eſſe quadrato ex A B. Deſcripto namque ex F, per A, circulo A K L, producantur A E, A B, vſq; ad H, I; & per D, ad A H, perpendicularis K L, quæ eundem circulum B C D, tanget in D, ex coroll. propoſ. 16. huius libri. Eruntq; ex demonſtratis in ſcholio propoſ. 3. huius libri A D, H E, æquales, ac proinde, addita communi D E, & A E, H D, æquales erunt. Item ex ſcholio propoſ. 18. huius libri A I, K L, æquales erunt, ſecabunturq; in B, D, bifariam: ac propterea rectangula ſub A B, B I, & ſub K D, D L, æqualia inter ſe erunt, atq; adeò quadrata, ob æqualitatem rectarum A B, B I; K D, D L. Itaque quoniam rectangulum ſub H D, D A, hoc eſt, ſub A E, (quæ ipſi H D, oſtenſa eſt æqualis) A D, [e] *æquale eſt rectangulo ſub K D, D L, hoc eſt, rectangulo ſub A B, B I, ſiue quadrato ex A B; conſtat propoſitum.*

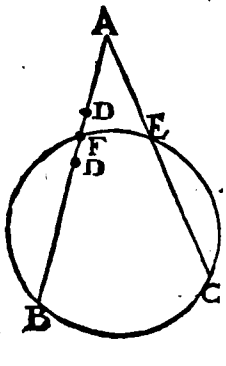
e 35. tertij.

SED iam ſecans linea A N, non tranſeat per centrum F, ſecet q; circunferentiam in C. Dico rurſum, rectangulum ſub A N, A C, quadrato ex A B, æquale eſſe. Deſcripto enim rurſus ex F, per A, circulo A K L, producantur A N, A B, vſque ad G, I; & per C, ducatur O M, circulum B C D, tangens. Eruntq; ex ſcholio propoſ. 3. huius libri A C, G N, æquales, ac proinde, addita communi C N, & A N, G C, æquales erunt. Item ex ſcholio propoſ. 18 huius lib. A I, O M, æquales erunt, ſecabunturq; in B, C, bifariam: ac propterea rectangula ſub A B, B I, & ſub O C, C M, æqualia inter ſe erunt, atq; adeò quadrata, ob æqualitatem rectarum A B, B I, O C, C M. Itaque quoniam rectangulum ſub G C, C A, hoc eſt, ſub A N, (quæ ipſi G C, oſtenſa eſt æqualis) A C, [f] *æquale eſt rectangulo ſub O C, C M, hoc eſt, rectangulo ſub A B, B I, ſiue quadrato ex A B; conſtat rurſus id, quod proponebatur.*

f 35. tertij.

PRIMVM etiam corollarium huius propoſitionis hoc modo fermè conuertemus.

Si à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitę egrediantur, quę ita ſecentur in binas partes, vt rectangula ſub totis, & ſegmentis prope punctum comprehẽſa ſint æqualia: deſcribi poterit per extrema puncta alicrũ ſegmentorum circulus, hoc eſt, circulus per tria puncta extrema aliorum ſegmentorum deſcriptus, per quartum etiam punctum extremũ tranſibit.

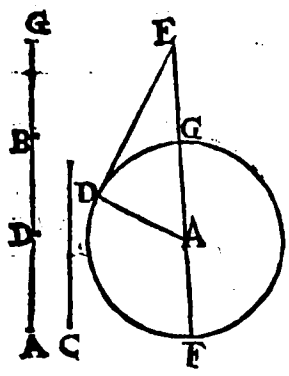


EX puncto enim A, egrediantur duæ rectæ A B, A C, quæ ita ſecentur in punctis D, E, vt rectangula ſub A B, A D, & ſub A C, A E, ſint æqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circunferentiam circuli cadere; hoc eſt, per ea poſſe deſcribi circulum: adeò vt circulus per tria puncta B, C, E, deſcriptus, tranſeat neceſſariò per reliquum etiam punctum D. Deſcribatur enim per tria puncta B, C, E, (vt ad propoſ. 5. lib. 4. docebimus) circulus B C E, qui ſi dicatur nõ tranſire per quartum punctum D, tranſibit aut citra D, aut vltra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum ſub A B, A F, æquale eſt, ex coroll. 1. huius propoſ. rectangulo comprehenſo ſub A C, A E; & rectangulum ſub A B, A D, eidem rectangulo ſub A C, A E, ponitur æquale: erunt rectangula ſub A B, A F, & ſub A B, A D, inter ſe æqualia, pars & totum: quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonſtrandum.

LICEBIT

Liceбit quoque ex demonſtratis hac propoſitione colligere huiuſmodi problema.

Datis duabus rectis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum ſub tota compoſita, & adiuncta comprehenſum, quadrato alterius ſit æquale.

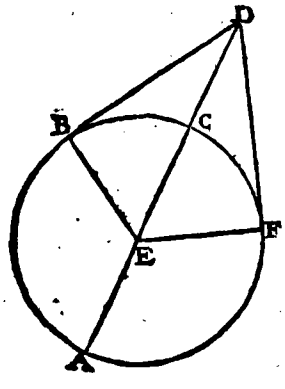


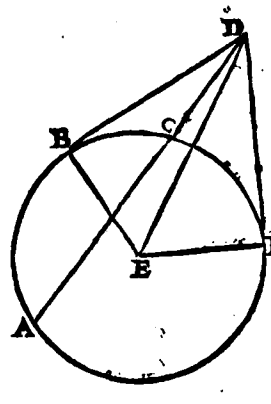
Sint data duæ rectæ A B, & C, ſitq; ipſi A B, maiori adiungenda rectâ, ita vt rectangulum comprehenſum ſub tota compoſita, & adiuncta, æquale ſit quadrato rectæ C, minoris. Diuiſa recta A B, bifariam in D, deſcribatur ex quouis centro A, ad interuallum A D, dimidiatæ, circulus D F G, & ad A D, in D, excitetur perpendicularis D E, ipſi C, æqualis, ac denique ex E, per A, centrum recta extendatur E F, ſecans circunferentiam in G. Dico ſi rectæ A B, adijciatur B G ipſi E G, æqualis, rectangulum ſub tota A G, & G B, æquale eſſe quadrato rectæ C. Quoniam enim rectangulum ſub F E, E G, [a] *æquale eſt quadrato rectæ E D; (quòd E D, circulum tangat in D, ex coroll. propoſ. 6. huius lib.) Eſt autem rectangulum ſub F E, E G, æquale rectangulo ſuâ A G, G B, (quòd rectæ F E; E G, rectis A G, G B, æquales ſint. Sumpta enim G B, ipſi E G, æqualis, & A B, ipſi F G, æqualis poſita eſt,) & quadratum ex E D, quadrato ex C, (ob æqualitatem rectarum E D, & C, ex conſtructione.) æquale. Igitur & rectangulum ſub A G, G B, quadrato ex C, æquale erit. Quod eſt propoſitum.* a 36. tertij.

No ſecus propoſitum demonſtrabitur, ſi rectæ C, minori adiungenda ſit rectâ, ita vt rectangulum ſub tota compoſita & adiuncta comprehenſum quadrato rectæ A B, maioris æquale ſit.

THEOR. 31. PROPOS. 37. 36.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; ſit autem, quod ſub totâ ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur, quadrato; incidens ipſa circulum tanget.





Extra circulum A B C, cuius centrum E, punctum ſumatur D, à quo ducatur recta D A, circulum ſecans in C, & recta D B, incidens in circulum ad punctum B; ſitque rectangulum ſub D A, D C, æquale quadrato rectæ D B: Dico D B, circulum tangere in B. [a] Ducatur enim D F, tangens circulum, & iungãtur rectæ E B, E F. Quod ſi D A, ſecans nõ tranſeat per centrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam igitur rectangulo ſub D A, D C, [b] æquale eſt quadratum rectæ tangentis D F; Et eidem rectangulo ſub D A, D C, æquale ponitur quadratum rectæ D B: erunt quadrata rectarum D F, D B, inter ſe æqualia, ideoque & rectæ D F, D B, æquales inter ſe erunt. Itaque quia latera D F, F E, trianguli D F E, æqualia ſunt lateribus D B, B E, trianguli D B E; & baſis D E, communis: [c] erunt anguli D F E, D B E, æquales: [d] Atqui angulus D F E, rectus eſt, quòd D F, circulum tangat. Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter per coroll. propoſ. 16 huius lib. D B, circulum tanget; quod eſt propoſitum. Si ergo extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 17. tertij.
b 36. tertij.
c 8 primi.
d 18. tertij.

SCHOLIVM.

Est autem hoc theorema conuerſum præcedentis theorematis, vt perſpicuum eſt.

Placet hoc loco ſequens etiam theorema demonſtrare.

Si à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vſque ad conuexam peripheriam inter ſe æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli ducta angulum ab eis comprehenſum diuidit bifariam: Et contrà, Linea recta angulum ab eis comprehenſum diuidẽs bifariam, per centrũ circuli tranſibit.

In priori figura huius propoſitionis duæ rectæ D B, D F, circulum A B C F, tangant in B, F, punctis quæ ex 2. coroll. præcedentis propoſitionis æquales erunt: Vel ducantur quæcunque duæ æquales D B, D F. Et per centrum E, ducatur recta linea D E A. Dico angulum B D F, ſectum eſſe bifariam à rectâ D A. Cùm enim iunctis rectis E B, F F, duo latera B D, D E, duobus lateribus F D, D E, æqualia ſint; baſis [a] *E B, baſi E F, æqualis; erunt duo anguli ad D, inter ſe æquales. Quod eſt propoſitum.* a 8. primi.

DIVIDAT iam recta D A, angulum B D F, bifariam. Dico rectam D A, per centrum transire. Si enim in D A, non est centrum, sit extra ipsam centrum E, iungaturq́, recta E D, vt in posteriori figura huius propositionis. Ergo, vt demonstratum est, recta E D, angulum B D F, bifariam diuidet; ac propterea anguli B D A, B D E, cùm sint dimidiata partes anguli B D F, æquales inter se erunt, pars, & totum; quod est absurdum. Transit ergo recta D A, per centrum. Quod demonstrandum erat.

FINIS ELEMENTI TERTII.

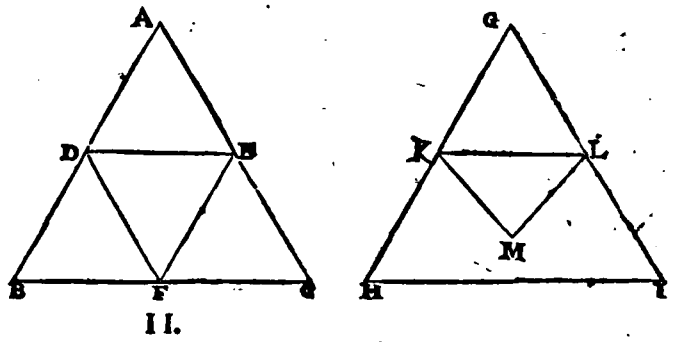
EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cùm singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

GENS Euclides quarto hoc libro de variis inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus: Item de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa easdem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens à rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangãt latera A B, A C, B C, trianguli externi A B C; dicetur triãgulũ D E F, in triangulo A B C, esse inscriptũ. At quoniã angulus M, triãguli K L M, nõ tangit latus H I, triãguli G H I, nõ dicetur triangulum K L M, inscribi in triãgulo G H I, quãuis totũ illud sit intra hoc, duoq́, anguli K, L, tangãt duo latera G H, G I.

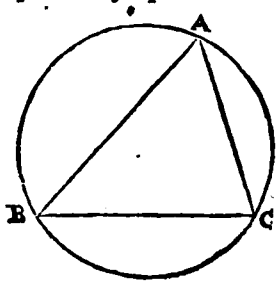


II.

SIMILITER & figura circũ figurã describi dicitur, cũ singula eius, quæ circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quã illa describitur.

E contrario dicetur triangulum A B C, describi circa triangulum D E F; quoniã singula latera illius singulos huius angulos tangunt; At triangulum G H I, non dicetur descriptũ esse circa triangulum K L M, propterea quòd latus illius H I, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

CAETERVM propriè figura rectilinea dicuntur in figuris rectilineis describi, & circa easdem describi, quando inscripta, & circumscripta habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamuis hoc non sit omnino necessarium, cùm & quadratum intra triangulum describi possit, vt ad finem lib. 6. docebimus.

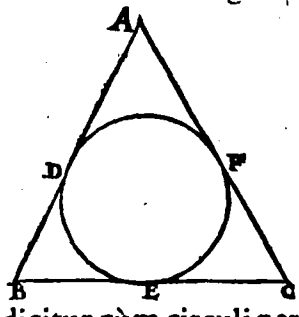


III.

FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cùm singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

VT si tangant anguli A, B, C, trianguli A B C, peripheriã circuli A B C, dicetur triãgulũ in circulo esse inscriptũ. Quòd si vel vnus tantũ angulorũ non tangeret peripheriam, nõ diceretur triangulũ esse inscriptũ in circulo.

FIGVRA



IIII.

FIGVRA verò rectilinea circa circulum describi dicitur, cùm singula latera eius, quæ circunscribitur, circuli peripheriam tangunt.

At verò, si latera trianguli A B C, singula tangant peripheriam circuli D E F; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.

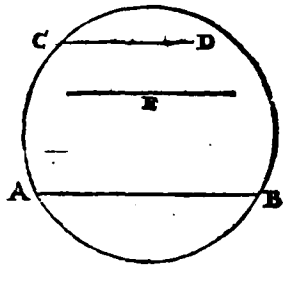
V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cùm circuli peripheria, singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

CIRCVLVS autem circum figurā describi dicitur, cùm circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circunscribit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus D E F, in figura definitionis 4. inscriptus esse in triangulo A B C: At verò circulus A B C, in figura definitionis 3, descriptus esse circa triangulum A B C. Idem iudicium habeto de alijs figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.



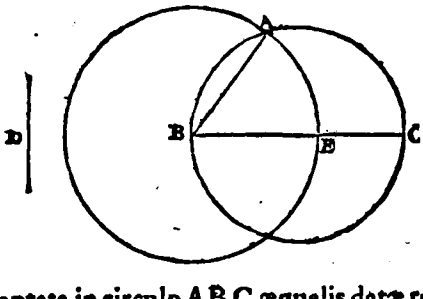
VII.

RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cùm eius extrema in circuli peripheria fuerint.

VT recta linea A B, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli A B C, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, vel C D; quia hæc alterum duntaxat extremorū, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa verò neutrum.

PROBL. I. PROPOS. I. 1.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

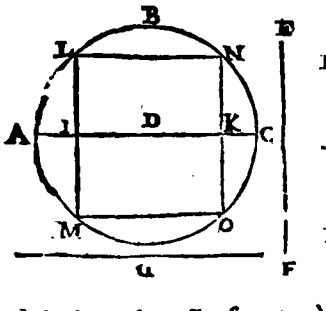


IN circulo A B C, coaptāda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamē maior nō sit diametro circuli dati. Cùm enim diameter [a] sit omnium rectarū in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, nō posset in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter B C. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit B C, illi æqualis: Si verò D, minor fuerit diametro, [b] abscindatur B E, æqualis ipsi D; & centro B, interuallo autem B E, circulus describatur E A, secans circulum A B C, in A. Ducta igitur recta B A, erit ea aptata in circulo A B C, æqualis datæ rectæ D. [c] Est enim B A, æqualis ipsi B E; & D, æqualis eidem B E, per constructionem. Quare A B, & D, inter se æquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

[a] 15. tertij.
[b] 3. primi.
[c] 15. defin. primi.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

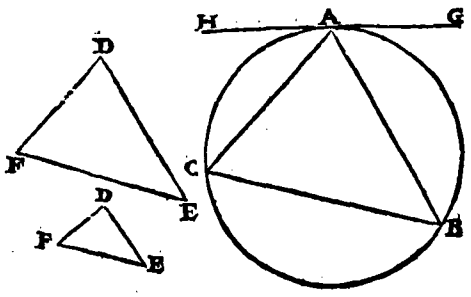


IN dato circulo A B C, cuius centrū D, accommodāda sit recta æqualis rectæ E F, quæ diametro maior non sit, & alteri rectæ G, parallela. [a] *Ducatur per centrū D, diameter A C, rectæ G, parallela. Quòd si recta E F, diametro fuerit æqualis, factū iam erit, quod proponitur. Si verò E F, diametro minor fuerit, secta ea bifariam in H, abscindatur D I, ipsi H E, & D K, ipsi H F, æqualis, vt tota I K, toti E F, sit æqualis.* [b] *Et per I, K, ad angulos rectos ipsi A C, ducantur L M, N O; iungatur q; L N. Dico L N, accommodatam esse æqualem ipsi E F, & ipsi G, parallelam. Cùm enim L M, N O, æqualiter à centro distent,* [c] *ipsæ æquales inter se erunt:* [d] *quæ cùm diuidantur bifariam in I, & K, quòd ad angulos rectos secentur à recta A C, per centrum D, transeunte; erunt & earum semisses L I, N K, æquales.* [e] *Quia verò L I, N K, parallelæ etiā sunt;* [f] *erunt quoq; L N, I K, æquales, & parallelæ. Quare cùm I K, æqualis sit ipsi E F, & parallela ipsi G; erit etiam L N, æqualis ipsi E F, & ipsi G, parallela.* [g] *Eadem ratione, si recta ducatur M O, erit ea æqualis ipsi E F, & parallela ipsi G. Quod est propositum.*

[a] 31. primi.
[b] 11. primi.
[c] 14. tertij.
[d] 3. tertij.
[e] 28. primi.
[f] 33. primi.
[g] 30. primi.

2. PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

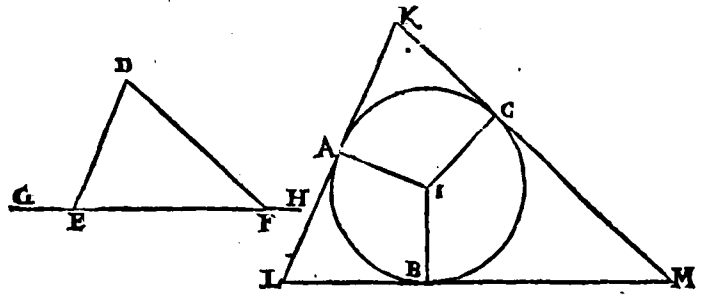


SIT in circulo A B C, dato deſcribẽdum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque D E F. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatq; angulus G A B, angulo F, æqualis, & angulus H A C, angulo E, atque extendantur rectæ A B, A C, ad circunferentiam vſque in puncta B, & C, coniungaturq; recta B C. Non cadet autem recta A C, in rectam A B, vel inter rectas A B, A G: propterea quòd anguli G A B, H A C, hoc eſt, anguli F, E, [a] minores ſunt duobus rectis. [b] Eſſent autem duobus rectis æquales, ſi A C, in A B, caderet; vel maiores duobus rectis, ſi inter A B, A G, caderet. Dico triangulum A B C, circulo dato inſcriptũ, eſſe æquiangulum dato triangulo D E F. Eſt enim angulus C, [c] æqualis angulo G A B, & eidem angulo G A B, æqualis eſt angulus F, ex conſtructione. Quare anguli C, & F, inter ſe quoque [d] erunt æquales. Similiter quia angulus B, [d] æqualis eſt angulo H A C; & eidem angulo H A C, æqualis eſt, per conſtructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter ſe æquales. Cùm igitur duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales ſint duobus angulis E, & F, trianguli D E F, [e] erũt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum eſt ergo triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circulo triangulum deſcripſimus, &c. Quod faciendum erat.

a 17. primi.
b 13. primi.
c 32. tertij.
d 32. tertij.
e 32. primi.

3. PROBL. 3. PROPOS. 3.

CIRCA datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiãgulum.



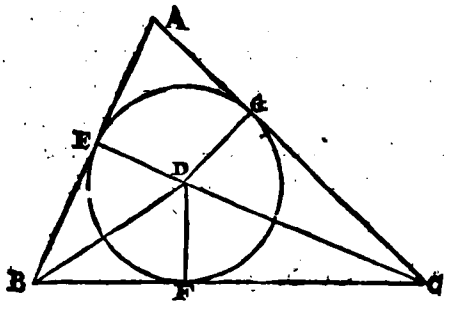
CIRCA circulum datum A B C, deſcribẽdum ſit triangulum æquiangulum dato triangulo D E F. Producto latere E F, vtrinque ad G, & H, ſumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque A I, & fiat angulus A I B, æqualis angulo D E G; & angulus B I C, angulo D F H. Deinde ex A, B, C, educantur ad A I, B I, C I, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per corollarium propoſ. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta A C, fierent duo anguli K A C, K C A, duobus rectis minores; ac proinde A K, C K, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta A C, caderet ſupra rectas A I, C I, quod hæ angulum conſtituant in I. Cùm enim ſpatium circa I, æquale ſit quatuor rectis, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. hoc eſt, quatuor angulis ad E, & F; ſintque duo anguli A I B, C I B, duobus angulis D E G, D F H, æquales; erit reliquũ ſpatium A I C, reliquis duobus angulis D E F, D F E, æquale: Sed [f] hi minores ſunt duobus rectis. Igitur & ſpatium A I C, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit A I C. Aliàs ſpatium illud eſſet vel æquale duobus rectis, ſi nimirum A I, C I, vnam rectam lineam conſtituerent; vel maius duobus rectis, ſi recta A I, producta caderet ſupra I C. Cadit igitur neceſſariò A I, producta infra C I; atque idcircò angulus fiet A I C, ad partes K, & ducta recta A C, faciet cum A K, C K, duos angulos minores duobus rectis, ideoque rectæ A K, C K, coibunt in K. Non ſecus oſtendemus, A L, B L, coire in L; & C M, B M, in M: quia ductæ rectæ A B, B C, facient cum A L, B L; C M, B M, angulos minores duobus rectis. Deſcriptũ eſt igitur circa circulum triangulum K L M, quod dico eſſe æquiangulum triangulo D E F. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales ſunt quatuor rectis, vt ad 32. propoſ. lib. 1. oſtenſum fuit; & anguli I A L, I B L, ſunt duo recti; erunt reliqui A I B, & L, duobus rectis æquales. Cùm igitur [g] & anguli D E G, D E F, ſint duobus rectis æquales; ſi auferantur æquales A I B, D E G, remanebit angulus L, angulo D E F, æqualis. Pari ratione oſtendemus angulum M, æqualem eſſe angulo D F E. [h] Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcircò triangulum K L M, æquiangulum triangulo D E F. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

f 17. primi.
g 13. primi.
h 32. primi.

4. PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inſcribere.

SIT deſcribendus circulus in dato triangulo A B C. Diuiſis duobus angulis A B C, A C B, bifariam



riam rectis B D, C D, quæ intra triangulum coeant in D; ducatur ex D, ad tria latera, perpendiculares D E, D F, D G. Quoniam igitur duo anguli D B E, D E B, trianguli D B E, æquales sunt duobus anguli D B F, D F B, trianguli D B F, vterque vtrique; & latus B D, commune; [a] erunt quoque latera D E, D F, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera D F, D G, in triangulis D C F, D C G. Cùm igitur tres rectæ D E, D F, D G, sint æquales; circulus ex D, ad interuallum D E, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trianguli in E, F, G, per corollarium propos. 16. lib. 3. quòd latera perpendicularia sint ad semidiametros D E, D F, D G. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

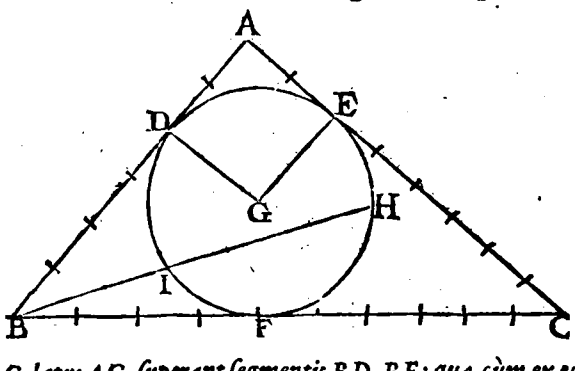
a 26. primi

SCHOLIVM.

VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonstrauit; [a] *in omni triangulo duo latera quomodolibet assumpta reliquo esse maiora; non abs re fuerit demonstrare hoc loco, cum Ioan. Baptista Benedicto, quanto maiora sint, hoc proposito theoremate.*

a 20. primi

IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quòd si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti.



SIT triangulum A B C, [b] *cui circulus inscribatur D E F, tangẽs latera trianguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo B, siue rectus is sit, siue obtusus, siue acutus, ducatur recta B H, secãs circulum in I. Dico duo latera B A, B C, superare latus A C, recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub B H, B I, comprehensi. Quoniam enim per coroll. 2. propos. 36. lib. 3. recta C F, rectæ C E, & recta A D, rectæ A E, æqualis est; erũt duæ rectæ F C, D A, lateri A C, æquales. Latera igitur B A, B C, latus A C, superant segmentis B D, B F: quæ cùm ex eodem corollario sint æqualia; superabunt eadem latera B A, B C, latus A C, recta, quæ dupla est segmenti B D. Sed quadratum rectæ, quæ dupla est segmenti B D, quadruplum est quadrati rectæ B D, ex scholio propos. 4. lib. 2. Et* [c] *quadratum rectæ B D, æquale est rectangulo sub B H, B I. Igitur latera B A, B C, superant latus A C, recta, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub B H, B I. Quod est propositum.*

b 4. quarti

c 36. tertij

QVOD si angulus A, rectus sit, dico nõ solùm duo latera A B, A C, superare latus B C, recta, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ex A, in cauam peripheriam ducta, & eius segmento exteriore, vt ostensum est: verùm etiam excessum illum esse diametro circuli D E F, æqualem. Ductis enim ex centro G, ad puncta contactuum D, E, rectis G D, G E; [d] *erunt anguli ad D, & E, recti. Cùm ergo & angulus A, ponatur rectus,* [e] *erunt tam recta A E, D G, quàm A D, E G, parallelæ inter se: atque idcirco A G, parallelogrammum erit.* [f] *Quare tam recta, A D, semidiametro E G, quàm recta A E, semidiametro D G, æqualis erit: hoc est, duæ rectæ A D, A E, simul toti diametro circuli erunt æquales. Superant autem duo latera A B, A C, latus B C, duabus rectis A D, A E, vt ostensum est. Nam E C, ipsi F C, & D B, ipsi F B, æqualis est, ex corollario 2. propositionis 36. libri 3. Igitur eadem latera A B, A C, superant latus B C, diametro circuli inscripti. Quod est propositum.*

d 18. tertij

e 28. primi

f 34. primi

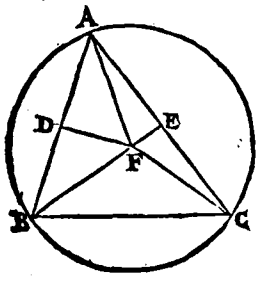
ITAQVE quæuis duo latera superant reliquum duabus rectis circulum triangulo inscriptum tangentibus, quæ inter angulum duobus illis lateribus comprehensum, & circulum interiacentur. Ostensum enim est, latera A B, A C, superare latus B C, rectis tangentibus A D, A E, &c.

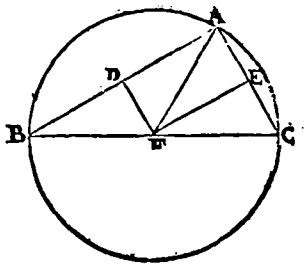
IAM verò his ita demonstratis, si tria latera trianguli cognita sint, inuenientur nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triangulo inscribendus latera tangere debet. Quia enim latera, verbi gratia, A B, A C, superare debent latus B C, duabus tangentibus ex A, ductis; quæ quidem æquales sunt: si demptum latus B C, notum ex notis lateribus A B, A C, relinquentur duæ tangentes A D, A E, notæ. Semissis ergo huius excessus dabit vtrumque punctum D, E. Reliquum deinde segmentum E C, dabit segmentum C F, vsque ad punctum tertium F: Vel reliquum segmentum D B, dabit segmentum B F, ad idem punctum F. Si igitur ex duobus punctis D, E, erigantur perpendiculares D G, E G, coibunt hæ in G, centro circuli inscribendi. Exempli gratia. Sit latus A B, 6. latus A C, 8. & latus B C, 10. palmorum. Dempto latere B C, 10. palmorum ex duobus lateribus

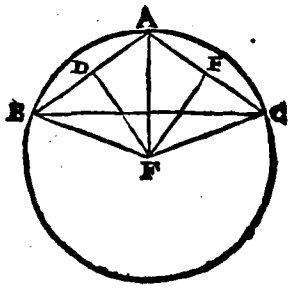
A B, A C, hoc eſt, ex 14. palmis relinquuntur 4. palmi. Tam ergo A D, quàm A E, duos palmos continebit. Segmentum ergo D B, continebit 4. palmos, totidemq; ſegmentum B F, habebit. Segmentum autem E C, ac proinde & C F, erit 6. palmorum. Sic etiam dempto latere A B, 6. palmorum, ex lateribus A C, B C, id eſt, ex 18. palmis, reliqui fiunt 12. palmi. Vtrumque ergo ſegmentum C E, C F, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumque A E, A D, 2. palmorum, & vtrumque B D, B F, 4. palmorum. Poſtremò dempto latere A C, 8. palmorum ex lateribus A B, C B, hoc eſt, ex palmis 16. remanent 8. palmi. Vtrumque ergo ſegmentum B D, B F, habebit 4. palmos: At vtrumque C F, C E, 6. palmos: & vtrumque A D, A E, 2. palmos.

5. PROBL. 5. PROPOS. 5.

CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.







SIT circulus deſcribendus circa datum triangulum A B C. Diuidantur duo latera A B, A C, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtuſangulo ſumenda ſunt facilitatis gratiâ, circa rectum, vel obtuſum angulum, quamuis hoc non ſit omnino neceſſarium, ſed duo quęuis latera bifariam poſſint ſecari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quòd enim coeant, patet. Nam ſi ducta eſſet recta D E, fierent anguli F D F, F E D, duobus rectis minores.) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere B C, vel extra triangulum. Ducantur rectæ F A, F B, F C. Quoniam igitur latera A D, D F, trianguli A D F, æqualia
a 4. primi. ſunt lateribus B D, D F, trianguli B D F, & anguli ad D, recti: [a] erunt baſes F A, F B, æquales. Eodem modo erunt F A, F C, æquales. Cùm ergo tres rectæ, F A, F B, F C, ſint æquales, circulus deſcriptus ex F, ad interuallum F A, tranſibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triangulum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

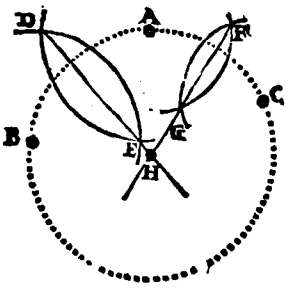
COROLLARIVM.

a 31. tertij. b 31. tertij. c 31. tertij.

HINC manifeſtum eſt, ſi centrum intra triangulum cadat, [a] omnes angulos eſſe acutos, quoniam omnes ſunt in maiori ſegmento circuli: ſi verò ſit in latere B C, [b] angulum B A C, ei lateri oppoſitum, eſſe rectum, quòd ſit in ſemicirculo: Si denique cadat extra triangulum, [c] angulum oppoſitum B A C, obtuſum eſſe, cùm ſit in minori ſegmento circuli.

CONTRA verò perſpicuum eſt, ſi triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: ſi rectangulum, in latus recto angulo oppoſitum: ſi denique obtuſangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facilè oſtendetur, ducendo ad incommodum aliquod, ſiue abſurdum. Quia ſi in acutangulo caderet centrum in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus rectus: ſi verò extra, eſſet idem angulus obtuſus. Item ſi in rectangulo centrum caderet intrà, eſſent omnes anguli acuti: ſi verò extra, eſſet angulus oppoſitus, obtuſus. Denique ſi in triãgulo obtuſangulo caderet in vnũ latus, eſſet angulus ei oppoſitus, rectus: ſi verò intra, omnes anguli eſſent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius corollarij colliguntur, & pugnant cum hypotheſi.

SCHOLIVM.

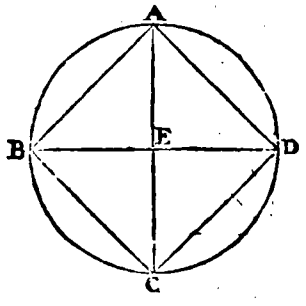


COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte deſcribendus ſit circulus, qui per data tria puncta non in vna recta linea exiſtentia tranſeat. Nam ſi data puncta tribus rectis iungantur, vt conſtituatur triangulum, facilè circa ipſum circulus deſcribetur, vt hac propoſitione traditum eſt. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propoſ. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C; Ex A, & B, quouis interuallo eodem duo arcus deſcribãtur ſe interſecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur D H. Item ex A, & C, quouis alio interuallo eodem, vel etiam, ſi placet, priori illo, alij duo arcus delineentur, ſecantes ſeſe in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur F H, ſecans rectam D H, in H. Dico H, eſſe centrum circuli tranſeuntis per data puncta A, B, & C. Nam ſi ducerentur

tentur rectæ A B, A C, B C, diuiderentur latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam à rectis D H, F H, ceu demonstratum est in praxi illa propos. 25. lib. 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, descripti. Quod est propositum.

PROBL. 6. PROPOS. 6. 6.

IN dato circulo quadratum describere.

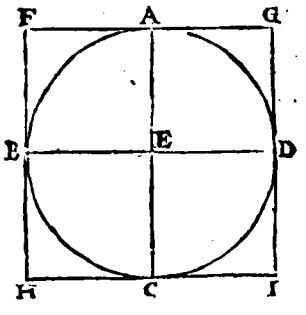


SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes sese ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ A B, B C, C D, D A. Dico A B C D, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera E A, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cùm omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; [a] erunt bases A B, B C, æquales. Eadem ratione æquales erũt rectæ B C, C D; Item rectæ C D, D A; Et rectæ D A, A B. Omnia igitur latera quadrilateri A B C D, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum recti; [b] erũt quatuor arcus, quibus insistunt, æquales; [c] ac proinde & rectę quatuor subtensæ æquales erũt. Omnia ergo latera quadrilateri A B C D, inter se æqualia sunt. Sunt autem, [d] & anguli recti, cùm omnes in semicirculis existãt. Quare quadratum erit A B C D; propterea; in dato circulo quadratũ descripsimus. Quod erat faciendum.

a 4. primi.
b 26. tertij.
c 29. tertij.
d 31. tertij.

PROBL. 7. PROPOS. 7. 7.

CIRCA datum circulum quadratum describere.

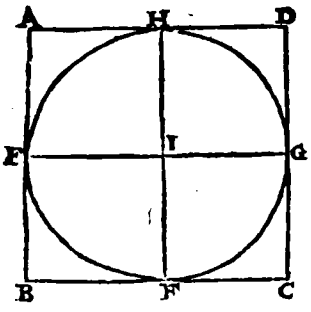


SIT circa datum circulum A B C D, cuius centrũ E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes se in E, centro, ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares F G, F H, H I, I G, coeuntes in punctis F, H, I, G. Quòd enim coeant A F, B F, patet ex eo, quòd ducta recta A B, faciat cum A F, B F, duos angulos duobus rectis minores: atque ita de reliquis. Dico F H I G, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cùm enim anguli A E B, F B E, sint recti, [e] erũt F H, A C, parallelæ; similiterque erunt G I, A C, parallelæ. [f] Quare & F H, G I, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt F G, H I. Quoniam igitur parallelogrammum est A C H F, [g] erunt latera opposita A C, F H, æqualia, & anguli oppositi A C H, A F H, æquales: Sed A C H, est rectus. Igitur & A F H, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse, & latera H I, I G, G F, æqualia esse diametris B D, A C. Quare cùm diametri sint æquales, erunt & quatuor latera F G, F H, H I, I G, æqualia, ideoque F G I H, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

e 28. primi.
f 30. primi.
g 34. primi.

PROBL. 8. PROPOS. 8. 8.

IN dato quadrato circulum describere.

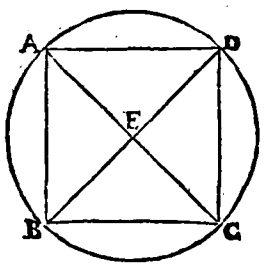


SIT in dato quadrato A B C D, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ E G, F H, secantes se in I. Quoniam igitur A D, B C, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum A H, B F, æquales, & parallelæ. [b] Quare & A B, parallela est, & æqualis ipsi F H. Eadem ratione erit D C, parallela, & æqualis eidem F H: Itemque rectæ A D, B C, parallelæ erunt, & æquales ipsi E G. Sunt igitur parallelogramma A I, I B, C I, I D; ideoque rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt rectis A H, E B, D H, A E: Sunt autem hæ inter se æquales, cùm sint semisses æqualium A D, A B, &c. Quare & rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum I E, transibit quoque per puncta F, G, H, qui cùm contingat latera A B, B C, C D, D A, per coroll. propos. 16. lib. 3. [i] quòd anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato A C. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat.

b 33 primi.
i 29. primi.

PROBL. 9. PROPOS. 9. 9.

CIRCA datum quadratum circulum describere.



a 5 primi.

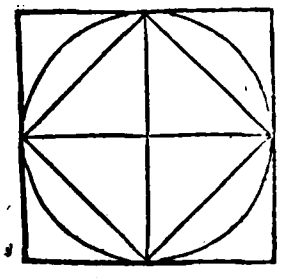
b 32. primi.

c 6. primi.

SIT describendus circulus circa quadratum A B C D. Ducantur diametri A C, B D, secantes se in E. Quoniam igitur latera A B, A D, trianguli A B D, æqualia sunt; [a] erũt anguli A B D, A D B, æquales: Est aũt angulus B A D, rectus. [b] Quare A B D, A D B, semirecti erũt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cũ ergo anguli E A D, E D A, sint æquales; [c] erunt rectæ E A, E D, æquales. Eadem ratione E A, E B, æquales erunt; nec non E B, E C; Item E C, E D. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo E A, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

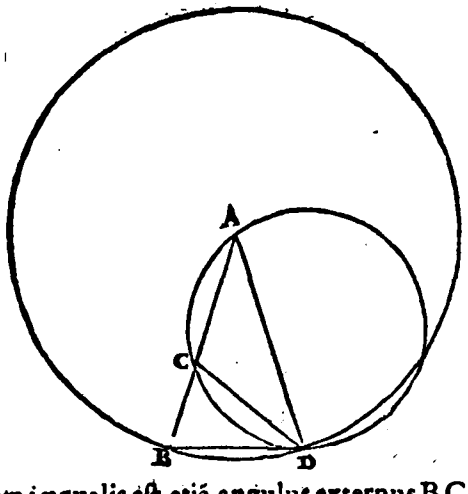
SCHOLIVM.

QVOD si circa datum circulum describatur quadratũ, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit quadratũ circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam enim latus quadrati circumscripti æquale est diametro circuli, vt ex 7. propositione huius libri constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum verò diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, vt ad 47. propositionem libri primi ostendimus; Constat propositum.



10. PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulum constituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.



d 11. secũdi.

e 1. quarti.

f 5. quartĩ.

g 37. tertĩ.

h 32. tertĩ.

SVMATVR quæuis recta linea A B, quæ [d] diuidatur in C, ita vt rectangulum sub A B, B C, æquale sit quadrato rectæ A C. Deinde centro A, interuallo verò A B, circulus describatur, in quo [e] accommodetur recta B D, æqualis ipsi A C, iungaturque recta A D. Quoniam autem rectæ A B, A D, æquales sunt, erit triangulum A B D, Isosceles. Dico vtrumque angulorum A B D, A D B, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta C D, [f] describatur circa triangulum A C D, circulus D C A. Quoniam igitur rectãgulum sub A B, B C, æquale est quadrato rectæ B D; & recta A B, secat circulum D C A: [g] tanget recta B D, eundem circulum D C A, in D. Quare angulus B D C, [h] æqualis est angulo A, in alterno segmento C A D. Addito igitur communi C D A, erit totus angulus A D B, æqualis duobus angulis C A D, C D A: Sed his eisdem [i] æqualis est etiã angulus externus B C D. Angulus ergo B C D, æqualis erit angulo A D B, [k] hoc est, angulo A B D, cùm A B D, A D B, æquales sint: ac propterea [l] rectæ C D, B D, æquales erunt. Est autem B D, æqualis posita rectę A C. Igitur & C D, ipsi C A, æqualis erit; [m] ac propterea anguli C A D, C D A, æquales. Angulus igitur A D B, qui æqualis ostensus est duobus angulis C A D, C D A, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus A B D, duplus erit eiusdem anguli A. Isosceles ergo triangulum constituimus habes, &c. Quod erat efficiendum.

i 32. primi.

k 5. primi.

l 6. primi.

m 5. primi.

COROLLARIVM.

QVONIAM verò tres anguli trianguli A B D, [a] *æquales sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis duorum rectorum; perspicuum est, angulum A, esse quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, esse duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, quatuor quintas partes: quandoquidem omnes tres* [b] *æquales sunt duobus rectis, hoc est, decem quintis vnius recti.*

a 32. primi.

b 32. primi.

SCHOLIVM.

POTVISSET problema hoc proponi ad instar theorematis, hoc modo.

SI recta linea secetur, vt propos. 11. lib. 2. traditum est; Isosceles triangulum, cuius basis maiori segmento æqualis est, vtrumuis verò laterum æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad basim, duplum reliqui.

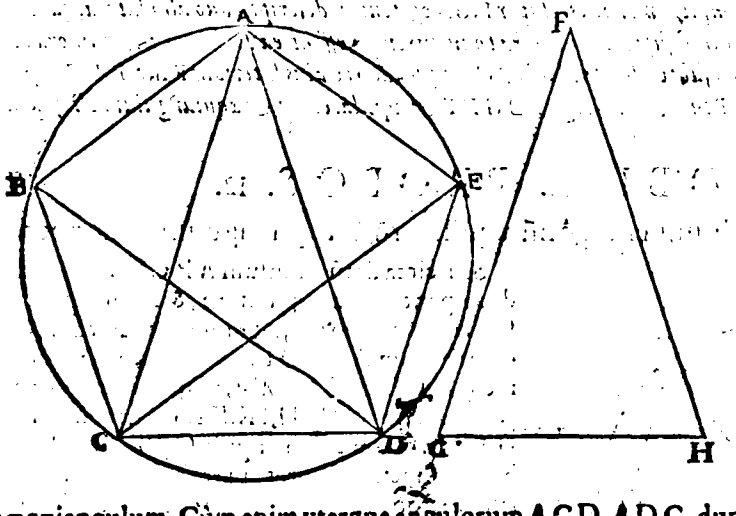
NON est autem quòd se excrucient Campanus & Peletarius, vt probent, rectam B D, ita applicari circulo D C A, vt eum nullo modo secet. Nam propterea quòd quadratum rectæ B D, æquale est rectangulo sub A B, B C,

B C, ostensum est vltima propos. 3. lib. rectam B D, perpendicularem esse ad semidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione secabit.

QVA arte autem construi debeat triangulum Isosceles, cuius vterque angulorum ad basim, ad reliquum habeat quamcunque proportionem datam, non solùm duplam, vt hic ab Euclide factum est, trademus cum Pappo ad finem lib. 6. Quæ res hactenus desiderata est.

PROBL. II. PROPOS. II.

In dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.



SIT in dato circulo A B C D E, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulũ. [a] Constituatur triangulũ Isosceles F G H, ita vt vterque angulorum G, H, duplus sit reliqui F: & in circulo [b] inscribat triangulum A C D, æquiangulum triangulo F G H, & vterque angulorum A C D, A D C, [c] bifariam diuidatur rectis C E, D E; atque rectę iungantur A B, B C, C D, D E, E A. Dico pentagonũ A B C D E, in circulo dato inscriptum, esse æquilaterũ, & æquiangulum. Cùm enim vterque angulorum A C D, A D C, duplus sit anguli C A D, & diuisus bifariam; erunt quinque anguli A D B, B D C, C A D, D C E, E C A, æquales. [d] Quare arcus A B, B C, C D, D E, E A, super quos ascenderunt, atque idcircò, [e] & rectæ A B, B C, C D, D E, E A, æquales erunt. Æquilaterum est igitur pentagonum A B C D E. Rursus quia arcus A B, E D, æquales sunt; addito cõmuni B C D, fient æquales A B C D, E D C B. [f] Anguli ergo A E D, B A E, dictis arcubus insistentes æquales erunt. Eodem modo æquales erũt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus, quorum singuli externis arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum est ergo pentagonum A B C D E. Quare cum & æquilaterum esse sit ostensum, inscriptum erit in dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum: Quod faciendum erat.

[a] 10. quarti.
[b] 2. quarti.
[c] 9. primi.
[d] 26. tertij.
[e] 29. tertij.
[f] 27 tertij.

COROLLARIVM.

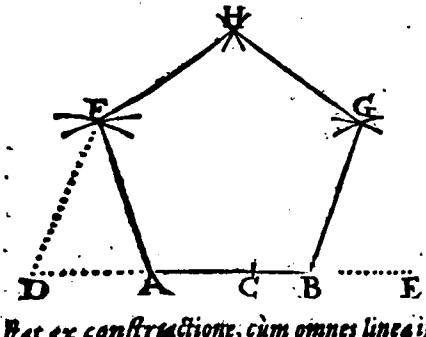
SEQVITVR hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum, vel sex quintas vnius recti. [a] *Cùm enim tres anguli B A C, C A D, D A E, æquales sint, vtpote qui æqualibus arcubus B C, C D, D E, insistant; sit autem C A D, per coroll. præcedentis propositionis quinta pars duorum rectorum, vel duæ quintæ vnius recti; erit totus B A E, tres quintæ duorum rectorum: vel sex quintæ vnius recti.*

[a] 27. tertij.

SCHOLIVM.

QVOD si detur recta linea terminata C D, super ea constituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. [b] *Fiat triangulum Isosceles F G H, habẽs vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde constituantur anguli A C D, A D C, æquales angulis G, H, coëantq; rectæ C A, D A, in A,* [c] *quæ efficient angulum C A D, æqualem angulo F; ac propterea trianguli A C D, vterque angulorũ A C D, A D C, duplus erit reliqui anguli C A D. Iam verò circa triangulum A C D, circulus* [d] *describatur A B C D E; In quo cùm sit inscriptum triangulum A C D; si anguli A C D, A D C, bifariam secentur, inscribetur, vt prius, pentagonum æquilaterum & æquiangulum, cuius latus est recta C D. Quod est propositum.*

[b] 10. quarti.
[c] 32. primi.
[d] 5. quarti.



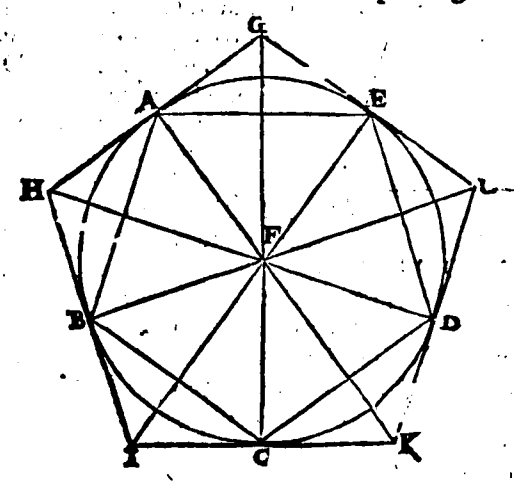
FACILIVS idem efficiemus hac ratione. Secta recta proposita A B, supra quam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituendum est, in C, vt propos. 11. lib. 2. traditum est, producatur ad vtramque partem, sintq; A D, B E, maiori segmento A C, æquales. Interuallo deinde datæ rectæ A B, ex A, D, duo arcus describantur, secantes sese in F. Item ex B, E, eodem interuallo alij duo se inter secantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo se diuidentes in H, coniungantur q; rectæ A F, F H, H G, G B. Dico pentagonum A B G H F, super datam rectam A B, descriptum, esse æquilaterum, atq; æquiangulum. Quòd enim sit æquilaterum, constat ex constructione, cùm omnes lineæ ipsi A B, sumptæ sint æquales: hoc est, omnes arcus descripti sint ad in-

terdallum A B. Quòd autem ſit & æquiangulum, ita oſtenditur. Ducta recta D F, erit A D F, Iſoſceles, quale ab Euclide propoſ. 10. conſtructum eſt, vt ex ſcholio eiuſdem propoſitionis manifeſtum eſt. propterea quòd baſis A D, æqualis eſt maiori ſegmento A C, lineæ A B, vtrumuis verò laterum æqualium ipſi A B, æquale. Quare ex coroll. eiuſdem propoſ. 10. angulus D A F, continebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorum rectorum, nimirum B A F, reliquas tres quintas duorum rectorum continebit. Cùm ergo ex corollario huius propoſitionis angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli comprehendatur tres quintas duorum rectorum; erit B A F, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Eademq; ratione erit A B G, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Ex quo ſequitur, totam pentagonum eſſe æquiangulum. Si enim compleatur, aut concipiatur eſſe completum, hoc eſt, ſuper F, G, cogitentur deſcripta duo alia latera, cadent ea

221. primi. *neceſſariò in punctum H. Alioquin, ſi ſupra H, aut infra conuenirent, a eſſent ea vel maiora, vel minora rectis F H, G H, vt conſtat, ſi angulo H, ſubtenderetur baſis F G: atque idcirco aliis lateribus F A, A B, B G, æqualia non forent. quod eſt abſurdum. Pentagonum ergo A B G H F, & æquilaterum, & æquiangulum eſt. Quod erat oſtendendum.*

12. PROBL. 12. PROPOS. 12.

CIRCA datum circulum, pentagonũ æquilaterũ, & æquiangulum deſcribere.



a 11. quarti. SIT circa datũ circulum A B C D E, deſcribendum pentagonũ æquilaterũ, & æquiangulum. a Inſcribatur in eo pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum A B C D E, & ex centro F, ducantur rectę F A, F B, F C, F D, F E, ad quas ducantur perpendiculares G H, H I, I K, K L, L G, coeũtes in G, H, I, K, L. Cùm enim anguli G A E, G E A, duobus ſint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum F A G, F E G; b coibunt rectę A G, E G, ad partes G, & ſic de aliis. Et quia ipſæ tangunt circulum, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. erit deſcriptum pentagonum G H I K L, circa circulum, quod dico eſſe æquilaterum, atq; æquiangulum. Ductis enim rectis F G, F H, F I, F K, F L; erũt quadrato rectæ F H, c æqualia tam quadrata rectarũ F A, A H, quàm rectarum F B, B H. Quare quadrata rectarum F A, A H, æqualia erunt quadratis rectarum F B, B H. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium F A, F B, remanebunt quadrata rectarum A H, B H, æqualia; ideoque & rectæ A H, B H, æquales erunt. Quod etiam conſtat ex coroll. 2. propoſ. 36. lib. 3. cùm A H, B H, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A, & B. Quoniam ergo latera A F, F H, trianguli A F H, æqualia ſunt lateribus B F, F H, trianguli B F H: Eſt autem & baſis A H, baſi B H, æqualis, vt oſtenſum eſt; d erunt anguli A F H, B F H, æquales. Igitur e & anguli A H F, B H F. Duplus igitur eſt angulus A F B, anguli B F H, & angulus A H B, anguli B H F. Eodem modo oſtendemus, angulum B F C, duplum eſſe anguli B F I, & angulum B I C, anguli B I F. Cùm igitur f anguli A F B, B F C, ſint æquales, quòd inſiſtant circunferentiis A B, B C, g quæ æquales ſunt, cùm à rectis æqualibus ſubtendantur A B, B C, erunt & dimidij eorum B F H, B F I, æquales. Quocirca cùm duo anguli B F H, H B F, trianguli B F H, æquales ſint duobus angulis B F I, I B F, trianguli I F B, & latus illis adiacens commune B F; b erunt & latera B H, B I, æqualia, & anguli B H F, B I F, æquales. Dupla eſt ergo recta H I, rectæ H B. Eademque ratione oſtendemus G H, rectam duplam eſſe rectæ H A. Sunt autem oſtenſæ æquales H B, H A. Igitur & earũ duplæ H I, H G, æquales erunt. Similiter demonſtrabimus, rectas I K, K L, L G, æquales eſſe cuilibet rectarum H I, H G. Æquilaterũ ergo eſt pentagonum G H I K L. Rurſus quoniam oſtenſum eſt, angulos B H F, B I F, æquales eſſe, ac ſemiſſes angulorum B H A, B I C; erunt & eorum dupli B H A, B I C, æquales. Eademque ratione anguli I K L, K L G, L G H, æquales erunt cuilibet angulorum B H A, B I C. Æquiangulum igitur eſt pentagonum G H I K L. Quapropter cùm & æquilaterum ſit oſtenſum, deſcriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

d 8. primi.
e 4. primi.
f 27. tertij.
g 28. tertij.
b 26. primi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex huius problematis demonſtratione; ſi in circulo quacunque figura æquilatera, & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum ex centro ad angulos dictarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares conſtituere aliam figuram eo tidem laterum, & angulorum æqualiũ circulo circumſcriptam. Eadem enim ſemper ratione demonſtrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulóſque conficere æquales: ſi nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, vt in pentagono factum eſt: quæ quidem ipſos

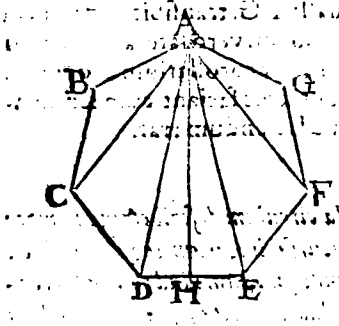
angulos

angulos bifariam secabunt; quemadmodum in pentagono hîc probatum est, &c.

SCHOLIVM.

Hvc referendum est theorema sequens ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectans, quod perutile erit ad inuenienda centra circulorum circa ipsas figuras, siue intra ipsas describendorum, vt ex sequentibus patebit.

In figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam; Et contrà, recta linea diuidens angulum bifariam, secat quoque latus oppositum bifariam. Si verò numerus angulorum est par, recta linea ex quouis angulo ad oppositum angulum ducta secat vtrumque angulũ bifariam; Et contrà, recta linea secãs quemuis angulum bifariam, cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.



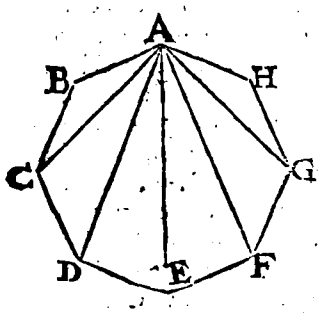
Sit primùm figura æquilatera, æquiangulaq; imparium laterum A B C D E F G, & ex angulo A, demissa recta A H, secet latus oppositum D E, bifariam. Dico angulum quoque B A G, sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera B A, B C, duobus lateribus G A, G F, æqualia sunt, angulosq; continent æquales, ex hypothesi; [a] erunt & bases A C, A F, æquales, & tam anguli B A C, G A F, quàm B C A, G F A: ac proinde reliqui anguli B C D, G F E, ponentur æquales; erunt quoq; reliqui A C D, A F E, æquales. Quia igitur rursus duo latera G A, G D, duobus lateribus F A, F E, æqualia sunt, continent q; angulos æquales, vt ostensum est; [b] erunt & bases A D, A E, æquales, & tam anguli C A D, F A E, quàm C D A, F E A. Atque ita procedendo tandem deuenietur ad latus oppositum peruentum sit. Vbi quia rursus toti anguli C D E, F E D, æquales sunt, erunt quoque reliqui A D H, A E H, æquales. Quare cùm duo latera D A, D H, duobus lateribus E A, E H, æqualia sint, angulosq; æquales contineãt, [c] erunt etiam anguli D A H, E A H, æquales. Quocirca cùm quotuis anguli B A C, C A D, D A H, totidem angulis G A F, F A E, E A H, sint æquales, singuli singulis; erit quoq; totus angulus B A H, toti angulo G A H, æqualis; ac proinde angulus B A G, sectus erit bifariam. Quod est propositum.

a 4. primi.

b 4. primi.

c 4. primi.

Sed iam recta A H, secet angulum B A G, bifariam. Dico eam secare quoque latus oppositum D E, bifariam. Si enim dicatur latus D E, non secari bifariam, si ex A, ducatur alia recta secans D E, bifariam, secabit eadem & angulum B A G, bifariam, vt iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum B A G, secabunt bifariam. quod est absurdum, cùm vna medietate maior esset, quam altera. Recta ergo A H, secans angulum B A G, bifariam, secat quoq; latus D E, bifariam. Quod est propositum.



Sit deinde figura æquilatera & æquiangula parium laterum A B C D E F G H, & ex angulo A, ad angulum oppositum E, ducatur recta A E. Dico rectam A E, secare tam angulum B A H, quàm angulum I E F, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis, demonstrabimus, vt in antecedente figura quotuis angulos B A C, C A D, D A E, totidem angulis H A G, G A F, F A E, esse æquales, singulos singulis: ideoq; totum angulum B A E, toti angulo H A E, æqualem esse, nec non & angulum D E A, F E A, esse æqualem. Vtrque igitur angulus B A H, D E F, secatur bifariam. Quod est propositum.

Sed recta iam A E, secet angulum B A H, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E, eúmque diuidere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E; si ex A, ad E, ducatur alia recta, secabit ea angulum B A H, bifariam, vt iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum B A H, bifariam secabunt. quod est absurdum. Recta ergo A E, secans angulum B A H, bifariam, cadit in E, secátque propterea, vt demonstratum est proximè, angulum D E F, bifariam quoque. Quod est propositum.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

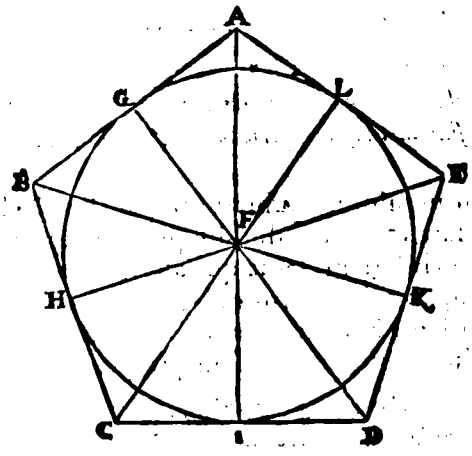
13.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

Sit inscribendus circulus in dato pentagono A B C D E. Diuidantur duo eius anguli B A E, A B C, proximi bifariam rectis A F, B F, quæ coeant in F. Cùm enim ex scholio præcedentis propositionis rectæ A F, B F, secent opposita latera C D, D E, bifariam, necesse est, duas rectas A F, B F, se mutuò intra pentagonum secare, priusquam rectis C D, D E, occurrant. Connectantur deinde rectæ F C, F D, F E. Quoniam igitur latera A B, B F, trianguli A B F, æqualia sunt lateribus C B, B F, trianguli C B F: Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales A B F, C B F, [b] erunt bases A F, C F, & anguli B A F, B C F, æquales. Cùm igitur anguli B A E, B C D, po-

a 9. primi.

b 4. primi.



nantur æquales, & BAF, dimidiũ sit anguli BAE, per constructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Diuisus est ergo angulus BCD, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diuisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula pentagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli FAG, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli FAL, estque latus AF, subtensum vni æqualium angulorum, commune; [a] erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet istarũ. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam verò latera pentagoni circulum hũc tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. eò quòd angulos rectos faciant cum semidiametris FG, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

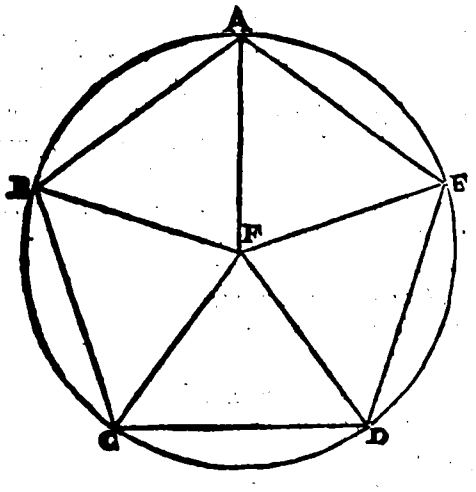
[a] 26. primi.

SCHOLIVM.

EADEM prorsus arte in quacunque figura æquilatera, & æquiangula circulum describemus. Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, si ex puncto concursus linearum angulos diuidentium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter se esse æquales: ac proinde punctum illud concursus centrum esse circuli inscribendi. Concurrent autem necessariò intra figuram duæ illa rectæ, quæ angulos duos proximos secant bifariam: propterea quòd in figura imparium laterum diuidunt latera opposita bifariam, in figura verò parium laterum angulos oppositos bifariam, vt in scholio antecedentis propos. ostensum est.

14. PROBL. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonũ æquilaterum & æquiangulum circulum describere.



SIT circa pentagonum ABCDE, æquilaterum & æquiangulũ, circulus describendus. Diuisis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propositione demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiã angulos BCD, CDE, DEA, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, & toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales sunt FAB, FBA, [b] erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autem FA, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

[b] 6. primi.

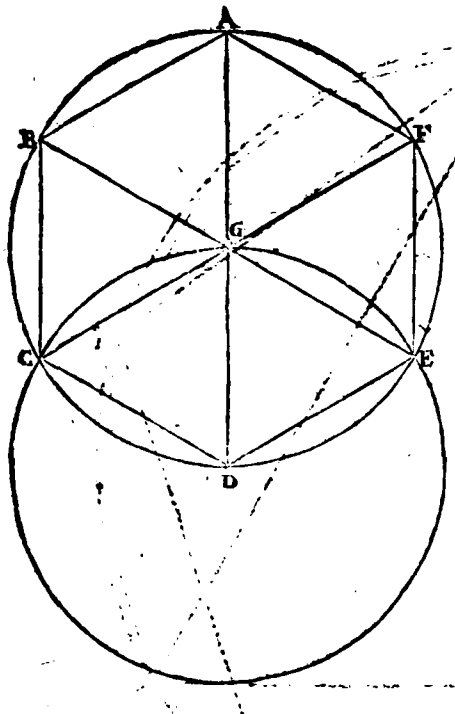
SCHOLIVM.

EODEM prorsus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulum describemus. Semper enim ostendemus diuisis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concursus linearum angulum diuidentium ad angulos figuræ ductas, inter se esse æquales: ac propterea punctum illud concursus centrum esse circuli circumscribendi, vt in scholio præcedentis propositionis diximus.

15. PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G; inscribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Ducta diametro AD, describatur circulus ex centro D, interuallo verò DG, qui secet circulum datum in punctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico esse & æquilaterũ, & æquiangulum. Cùm enim recta GC, æqualis sit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ DG, ex definitione circuli; erunt & rectæ



rectæ GC, DC, æquales inter se: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare [a] tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se erunt: qui cùm [b] æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum. Sunt autē tres anguli CGD, DGE, EGF, [c] æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se æquales; quibus cum etiam [d] æquales sint ad verticem anguli FGA, AGB, BGC; erunt sex anguli ad centrum G, æquales. [e] Quare circunferentiæ, quibus insistunt, [f] ac propterea rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum est hexagonum ABCDEF. Rursus quia circunferentia BC, æqualis est circunferentiæ AF; si addatur communis CDEF, erunt circunferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, [g] æquales erunt. Similitérque ostendemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insistit arcui compositō ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripa, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoque est hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendum erat.

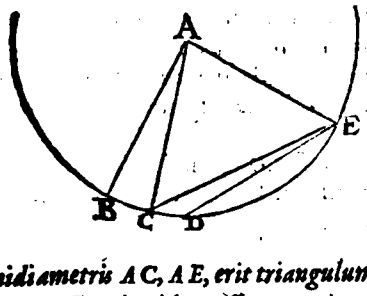
[a] 15 primi.
[b] 32. primi.
[c] 13. primi.
[d] 15. primi.
[e] 26. tertij.
[f] 29. tertij.
[g] 27. tertij.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam DC, latus hexagoni, æquale est semidiametro DG, ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

Caeterum per ea, quæ dicta sunt de pentagono, propositione duodecima, decimatertia, & decimaquarta, describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & denique circa idem hexagonum describemus circulum. Nam, vt hexagonum circulo circumscribatur, inscribendum prius erit hexagonum intra circulum, vt hac propositione decimaquinta docuit Euclides. Si verò circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum describendus sit, diuidendi erunt duo anguli proximi bifariam. Reliqua deinde perficienda, vt propositione duodecima, decimatertia, decimaquarta traditur.



Porro ex his quoque facilè demonstrabimus, dari posse triangulum Isosceles oxygonium, cuius tertium latus vtrouis æqualium maius sit; siue in quo vtrumuis laterum æqualium tertio minus sit. Id quod ad definitionem vigesimamoctauam libri primi admonuimus. Sit enim A, centrum circuli BCDE, in quo sexta pars sit DE, & quarta BE. [a] Erit ergo subtensa DE, semidiametro æqualis. Et si ex quouis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur CE; erit hac maior, quàm DE, ex scholio propositionis vigesimanonæ libri tertij, hoc est, maior, quàm semidiameter. Quare iunctis duabus semidiametris AC, AE, erit triangulum ACE, Isosceles, cuius tertium latus CE, vtrouis æqualium AC, AE, maius est. Dico idem esse oxygonium. Quoniam enim [b] anguli ACE, AEC, æquales sunt, [c] & simul duobus rectis minores, erit vterque acutus. Ducta item recta AB, erit angulus BAE, quadranti BE, in centro insistens rectus, ex scholio propositionis vigesimaseptimæ libri tertij: ac proinde CAE, acutus erit. Oxygonium ergo est Isosceles triangulum ACE, habens tertium latus CE, vtrolibet æqualium maius. Quod est propositum.

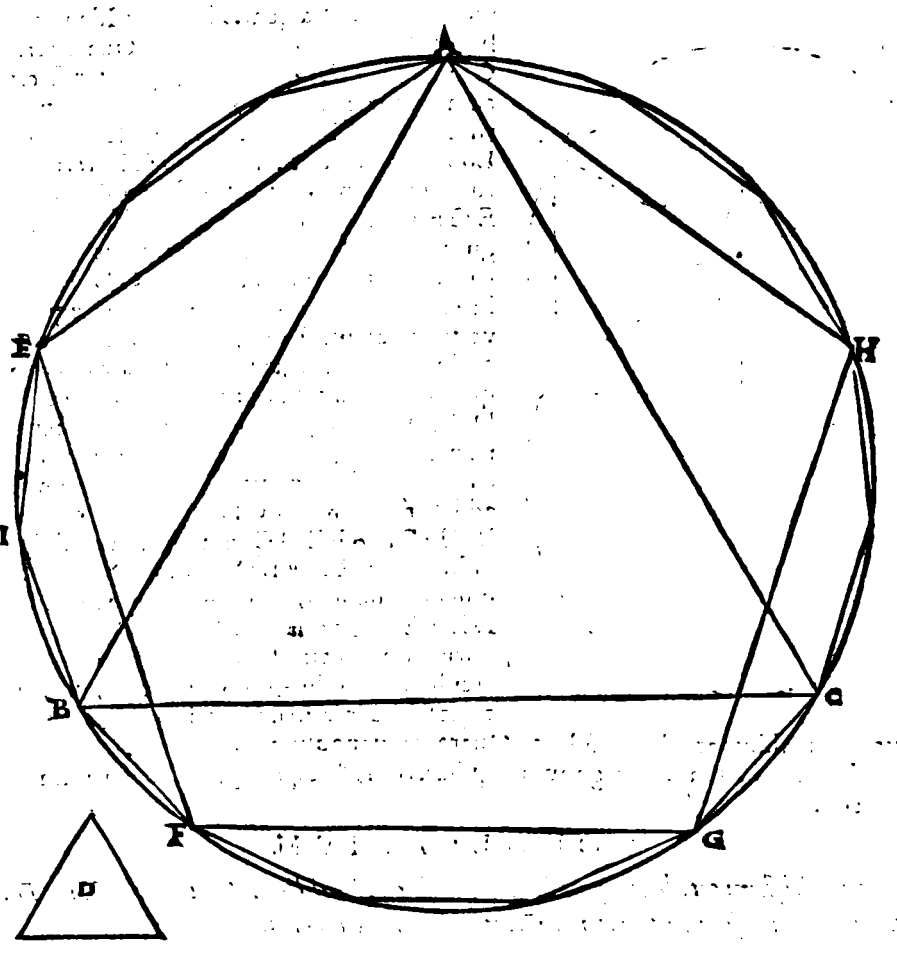
[a] 15 quarti.
[b] 5. primi.
[c] 17. primi.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

In dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit in dato circulo ABC, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, quod ex corollario propos. 6. lib. 2. erit etiam æquiangulum; [a]

[a] 2. quarti.



inſcribatur ei æquiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterum, ex
a 26. vel 28. tertij. corollario propoſ. 6. lib. 1. [a] eruntque tres arcus A B, B C, C A, æquales, vel propter tres rectas A B, B C, C A, æquales, vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli A B C. Qualium igitur partium æqualium quindecim eſt circunferentia tota A B C, talium quinque erit arcus A B, qui ter-
b 11. quarti. tia pars eſt totius circunferentiæ. [b] Inſcribatur rurſus in dato circulo pentagonum æquilaterum,
c 28. tertij. & æquiangulum A E F G H, applicans vnum angulorum ad punctum A; [c] eruntque quinque arcus A E, E F, F G, G H, H A, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim eſt tota circunferentia A B C, talium trium erit arcus A E, quinta pars exiſtens totius circunferentiæ. Itaque cùm arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres: continebit reliquus arcus
d 30. tertij. E B, duas. [d] Diuiſo ergo arcu E B, bifariam in I, erit arcus B I, pars decimaquinta totius circunferentiæ. Quare ducta recta B I, ſubtendet decimamquintam partem totius circunferentiæ; cui ſi-
e 3. quarti. miles quatuordecim, [e] æquales in circulo accommodentur, inſcriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod *f* & æquiangulum eſt, cùm eius anguli ſubtendant arcus æquales, compoſitos videlicet ex 13. arcubus æqualibus omnes, vt perſpicuum eſt. In dato igitur circulo quin-
f 27. tertij. tidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

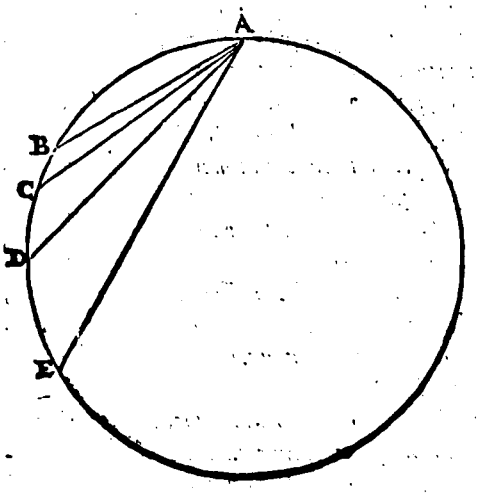
Similiter autem per ea, quæ dicta ſunt de pentagono ſuprà, propoſ. 12. 13. & 14. deſcribemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribemus; & tandem circa datũ quintidecagonum deſcribemus circulum.

SCHOLIVM.

Ex huius problematis ſtructura, atq; demonſtratione colligi poteſt methodus, atq; ars quædam, qua infinita propemodum figura in dato circulo inſcribantur. Nam quia recta A B, denominatur à ternario, quòd ea ſit latus trianguli æquilateri, & recta A E, à quinario, quòd ea ſit latus pentagoni; ſi multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duobus lateribus in circulo deſcriptis, inſcribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumq; æqualium, hac ratione. Denominator lateris A B, hoc eſt, 3. exceditur à denominatore lateris A E, id eſt, à 5. binario. Igitur arcus B E continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoq; diuiſo arcu B E, bifariam in I, erit ſubtenſa recta B I, latus figuræ 15. laterum, angulorúmque æqualium, vt demonſtratum fuit. Hac ferè arte vſus eſt Euclides in deſcribendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiuſmodi Theorema.

Si in circulo ab eodem puncto inſcribantur duo latera duarum figuratum æquilaterarum,

rum,& æquiangularum; continebit arcus inter illa latera incluſus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo,quot vnitatibus inter ſe differũt denominatores eorundem laterum: Continebit autem figura inſcribenda tot latera,angulosque æquales, quot vnitates ſunt in numero,qui ex multiplicatione denominatorum producitur.



INSCRIBANTVR in circulo A B C D E,initio ſimper facto à puncto A,plurima latera; Hexagoni quidẽ A B, pentagoni verò A C, & quadrati A D, trianguli denique æquilateri A E. Quoniam igitur denominator lateris A B; nimirum 6. excedit denominatorem lateris A C, nempe 5. vnitate; continebit arcus B C,inter ea latera incluſus vnũ latus figuræ 30.laterum, angulorumq; æqualium. Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita eſſe, ſic demonſtrabitur. Qualium partium æqualium 30. eſt tota circunferentia, talium 5. eſt arcus A B, ſexta pars circunferentiæ; & talium 6. eſt arcus A C, quinta pars circunferentiæ. Igitur arcus B C, vnam talem continebit partem.

PARI ratione arcus B D, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorúmque æqualium. Nam denominator lateris A B; videlicet 6. ſuperat dominatorem lateris A D, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.

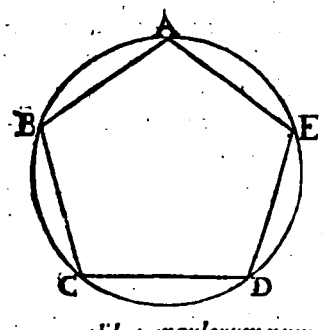
ITA quoque arcus B E,comprehendet tria latera figuræ 18.laterum.

ARCVS verò C D,complectetur vnum latus figuræ 20.laterum.

ARCVS autem C E,duo latera figuræ 15.laterum.

ASCVS denique D E,continebit vnum latus figuræ 12.laterum,angulorumq; æqualium. Hac itaq; arte; ac methodo inueſtigabuntur ferè infinitarum figurarum latera.

NON eſt autem prætereundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inſcriptam, eſſe quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumſcriptam neceſſariò æquiangulam quoque eſſe, niſi quando numerus angulorum ipſius eſt impar; vel ſi par eſt, quando duo anguli proximi æquales ſunt, vel duc nõ proximi, dummodo vno eorum primo poſito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (ſi enim ſecundum occuparet, eſſet primo proximus: quod eſt contra hypotheſim.) ſextum, octauum,decimum,&c. Qua in re nõnulli hallucinati ſunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumſcriptam,neceſſariò eſſe quoque æquiangulam: inter quos eſt Campanus,Euclidis non obſcuri nominis interpres.

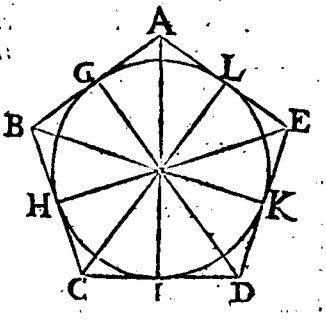


SIT enim figura æquilatera, quotcunque angulorum A B C D E, circulo inſcripta. Dico eam neceſſario eſſe quoq; æquiangulam. Cùm enim latera A B,B C,C D, ſint æqualia,[a] erunt arcus quoq; A B, B C,C D, æquales: ac proinde & totus arcus A B C,toti arcui B C D,æqualis erit. Reliqui ergo A D C, B E D, in eodem circulo æquales erunt. Quocirca[b] anguli A B C, B C D, illis inſiſtentes æquales erunt: Eodemq; modo omnes anguli oſtendentur eſſe æquales,quotquot illi ſint; ac propterea figura A B C D E,æquiangula eſt; ſiue angulorum numerus ſit par, ſiue impar. Quod oſtendendum erat.

a 28.tertij.

b 27. tertij.

SIT rurſus figura æquilatera A B C D E,quotlibet angulorum numero imparium circulo,cuius centrum F, circumſcripta. Dico enim neceſſario eſſe quoq; æquiangulam. Ductis enim ex F,centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis,[c] erunt hæ ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes A G,A L, ex coroll.2.propoſ. 36.lib.3. æquales ſunt; erunt duo latera A G, A F, duobus lateribus A L,A F, æqualia. Cùm ergo & baſes F G,F L,ex centro ſint æquales;[d] erunt & anguli ad A,æquales: ac proinde angulus B A E,diuiſus erit bifariam. Non aliter oſtendemus, reliquos omnes angulos figuræ ſectos eſſe bifariam. Rurſus quia duo latera A E,B F,duobus lateribus C B,B F, æqualia ſunt, anguliq; illis contenti, oſtenſi æquales,[e] erunt quoq; baſes A F,C F,& anguli B A F,B C F,æquales. Cùm ergo bi anguli ſint ſemiſſes angulorum B A E,B C D,vt oſtenſum eſt, erunt toti anguli B A E,B C D quoque æquales. Eadem ratione erit recta C F,recta E F, & angulus B C D, angulo D E A, æqualis: Atque ita deinceps; ſi figura plures habeat angulos, erit ſemper tertius quiſque angulus ei, à quo tertius eſt,vno relicto in medio, æqua-



c 18. tertij.

d 8. primi.

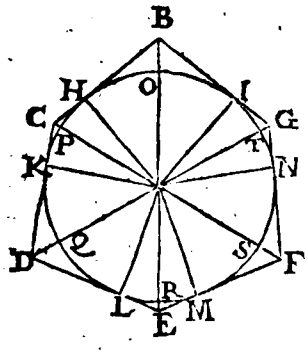
e 4. primi.

lis: hoc eſt, primus (conſtitui autem poteſt primus quicunq; angulus) æqualis erit tertio, tertius quinto, quintus ſeptimo, ſeptimus nono, &c. Atque ita omnes anguli in locis imparibus poſiti, æquales inter ſe erunt: Eadémque ratione omnes anguli parium locorum, vt ſecundus, quartus, ſextus, octauus, decimus, &c. æquales inter ſe erunt; cùm quartus ſit à ſecundo tertius, & ſextus à quarto tertium quoq; locum occupet, &c. Itaque quoniam figura propoſita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui æqualis oſtenſus eſt omnibus angulis locorum imparium, æqualis vltimo angulo impari, qui primo proximus eſt. Hic autem vltimus angulus erit eadem ratione ſecundo angulo æqualis, qui tertius eſt ab vltimo, primo relicto in medio; & omnibus alijs à ſecundo tertium locum occupantibus, vt quarto, ſexto, octauo, decimo, &c. vſq; ad penultimum. Quapropter omnes anguli figuræ propoſitæ inter ſe æquales erunt. Quod erat oſtendendum.

HÆC demonſtratio in figuris æquilateris circulo circumſcriptis, quæ habent numerum angulorum parem, locum non habet. Ex ea enim ſolùm concludetur, primum angulum æqualem eſſe tertio, quinto, ſeptimo, nono, & alijs loca imparia occupantibus; nunquam autē probabitur, primum vltimo eſſe æqualem, eo quòd vltimus locum parem occupet, vt in quadrangulo quartum, in hexagono ſextum, in octogono octauum, &c. Sic etiam ſolùm ex eadem demonſtratione colligetur, angulum ſecundum æqualem eſſe quarto, ſexto, octauo, decimo, & alijs loca paria occupantibus; nunquam autem oſtendetur, ſecundum angulum eſſe primo æqualem, propterea quòd primus locum imparem occupat. Itaque ſoli anguli imparium locorum inter ſe, & ſoli quoq; anguli locorum parium inter ſe ſemper conuincentur æquales.

QVOD ſi duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodo vnus eorum in loco impari, alter verò in loco pari collocatus ſit, fuerint inter ſe æquales, tum demum per ſuperiorem demonſtrationem concludetur omnium angulorum æqualitas. Nam ſi primus angulus æqualis ſit ſecundo, (quando enim duo anguli proximi ſunt æquales, licebit vnum eorum dicere primum, & alterū ſecundum,) cùm oſtenſum ſit, primum eſſe æqualem quoque omnibus angulis loca imparia occupantibus: ſecundum verò omnibus parium locorum; erunt omnes inter ſe æquales. Si autem primus angulus æqualis ſit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo anguli non proximi ſunt æquales, quorum vnus in loco impari, & alter in loco pari exiſtat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel ſextum, vel octauum, &c. prout ab illo diſtiterit, non autem ſecundum, quia ſecundus primo proximus eſt.) cùm primus oſtenſus ſit æqualis omnibus alijs locorum imparium, alter verò omnibus parium locorum, atque adeò & ſecundo angulo; erit quoque primus ſecundo æqualis: hoc eſt, duo proximi inter ſe æquales erunt. Quam ob rem, vt proximè demonſtrauimus, omnes anguli inter ſe erunt æquales.

VERVM ſi dicat forſan aliquis, quanquam ex ea demonſtratione colligi nequeat, omnē figuram æquilaterum, cuius angulorum numerus ſit par, circulo circumſcriptum, eſſe quoq; æquiangulam; non colligi tamen contrarium: at proinde eam poſſe eſſe æquiangulam, non quidem propter illam demonſtrationem, ſed propter quampiam aliam; adeò vt nulla dari poßit figura æquilatera circulo circumſcripta, quin ſimul ſit æquiangula, vt Campanus cum nonnullis alijs aſſeruit. Si, in quam, aliquis ita dicat, reſpondemus, infinitas figuras æquilateras angulorum numero parium circumſcriptas circulo, nō eſſe æquiangulas. Sit enim circulus ex centro A, deſcriptus, cuius circunferentia tribus diametris BE, CF, DG, in ſex partes æquales OP, PQ, QR, RS, ST, TO, diuidatur, quemadmodum propoſ. 15. in deſcriptione hexagoni traditum eſt. Deinde arcus OP, ſecetur inæqualiter in H, ſitq; maius ſegmentum OH, & minus PH. Arcui quoque OH, æquales ſumantur OI, QK, QL, SM, SN, ita vt ſex arcus æquales ad vtraſque partes trium ſemidiametrorum nō proximorum, ſed inter binas ſingulis relictis in medio, ſumantur. Eruntq; ad vtraſque partes ſemidiametrorum relictarum ſex reliqui arcus PH, PK; RL, RM; TN, TI, æquales. Ductis item ex centro A, ad puncta H, K, L, M, N, I, rectis lineis, ducatur per H, ad HA, perpendicularis BC, ſecans ſemidiametros AO, AP, productas in B, C, quæ circulum tanget in H, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Coibunt autem neceſſariò rectæ HB, AB, propterea quòd duo anguli BHA, BAH, duobus rectis minores ſunt. Eſt enim BHA, rectus, & BAH, inſiſtens arcui OH, qui minor eſt quadrante, minor recto, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. Iungatur quoq; recta BI. Et quia duo latera AH, AB, duobus lateribus AI, AB, æqualia ſunt, [a] angulosq; continent æquales æqualibus arcubus OH, OI, inſiſtentes; [b] erunt quoq; baſes BH, BI, & anguli HI, æquales. Cùm ergo BHA, rectus ſit ex conſtructione, erit & BIA, rectus: ac propterea recta BI, circulum tanget in I, conueniétq; cum ſemidiametro AT, producta in G, ob angulos AIG, GAI, duobus rectis minores. Eſt namque AIG, oſtenſus rectus, at GAI, recto minor eſt, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. ob arcum TI, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli GAI, duobus angulis H, A, trianguli CAH, æquales ſunt; (Nam I, H, recti ſunt, [c] & GAI, CAH, æquales ſunt inſiſtentes æqualibus arcubus TI, PH.) latera AI, AH, quibus adiacent, æqualia; [d] erunt quoq; latera GI, GA, lateribus HC, CA, æqualia. Cùm ergo & BI, ipſi BH, oſtenſa ſit æqualis; erit tota BG, toti BC, æqualis. Eadem ratione, ducta recta GN, tanget circulum in N, coibitq; cum ſemidiametro AF, producta in F, eritq; ipſi GB, æqualis. Item iuncta recta FM, circulum tanget in M, & cum ſemidiametro AR, producta conueniet in E; ipſiq; FG, æqualis erit. Similiter ducta recta EL, tanget



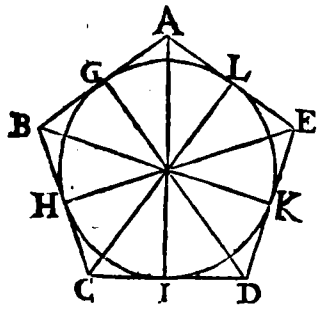
a 27. tertij.
b 4. primi.
d 27. tertij.
e 26. primi.

tanget circulum in L, & ſemidiametro A Q, protracta occurret in D, ipſiq; E F, fiet æqualis. Denique iuncta recta D K, eundem circulum tanget in K, & cum ſemidiametro A P, producta concurret in C, fietq; ipſi D E, æqualis. Quòd autem D K, in eodem puncto C, occurrat ſemidiametro A P, in quo recta B H, eidem occurrit, manifeſtum eſt. Si enim in alio puncto eam ſecaret, cum ducta recta C K, circulum tangeret in K, vt demonſtratum eſt, tangerent duæ rectæ circulum in eodem puncto K; atq; adeò inter peripheriam, & tangentem interciperetur ad punctum contactus vna linea recta: quod fieri non poſſe, [a] *Euclides demonſtrauit. Eſt ergo* a 16 tertij
hexagonum B C D E F G, circulo circumſcriptum, æquilaterum. At idem eſſe non æquiangulum, ita demonſtrabimus. Quoniam figura B C D E F G, æquilatera eſt, erũt quidem per ea, quæ paulò antè monſtrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter ſe, & anguli locorum parium, vt C, E, G, inter ſe æquales; omnesq; ſecti erunt bifariam à ſemidiametris: At quia tres anguli trianguli A B H, [b] *tribus angulis trianguli A C H, æquales ſunt; ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus æquales. Eſt autem B A H, maior quàm C A H, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. quod & arcus O H, maior ſit arcu P H. Igitur reliquus A B H, reliquo A C H, minor erit: qui cùm ſemiſſes ſint totorum angulorum B, C, vt oſtenſum eſt; erit totus quoq; C B G, toto B C D, minor. Eodemq; modo toti anguli D, F, totis angulis E, G, minores oſtendentur. Non eſt ergo hexagonum B C D E F G, æquiangulum. Quod erat oſtendendum.* b 32. primi

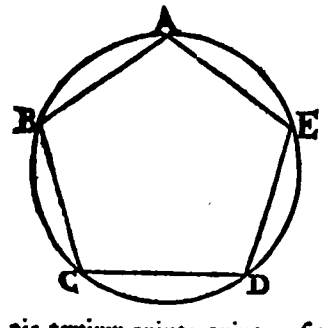
EADEM omnino conſtructio, & demonſtratio fieri poteſt in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, ſi circulus quatuor diametris ſecetur in 8. partes, vel quinque diametris in 10. &c.

QVOD ſi figura æquilatera quotcunq; angulorum circulo circumſcribatur per doctrinam propoſ. 12. deſcripta nimirum prius ſimili figuræ intra circulum, & ductis lineis circulum tangentibus in figura inſcripta angulis, &c. vt factum eſt in pentagono propoſ. 12. tum neceſſariò figura illa erit ſimul æquiangula, vt ex demonſtratione eiuſdem propoſ. liquidò conſtat.

OBSERVATIONE quoque dignum eſt, omnem quidem figuram æquiangulam circulo circumſcriptam, eſſe etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulam circulo inſcriptam neceſſariò æquilateram quoq; eſſe, niſi quando numerus laterum ipſius eſt impar; vel ſi par eſt, quando duo latera proxima æqualia ſunt, vel duo nõ proxima, dummodo vno eorum poſito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (ſi enim ſecundùm occuparet, eſſet primo proximum, quod eſt contra hypotheſim.) ſextum, octauum, decimum, &c. Qua in re facilè etiam quis hallucinari poſsit.



SIT enim figura æquiangula A B C D E, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumſcripta. Dico eam eſſe quoque neceſſariò æquilateram. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactuũ rectis F G, F H, F I, F K, F L, [c] *quæ ad latera figuræ ſunt perpendiculares; emittantur quoque ex centro F, ad angulos figuræ rectæ F A, F B, F C, F D, F E. Et quoniam tangentes A G, A L, ex 2. coroll. propoſ. 36. lib. 3. æquales ſunt, erũt duo latera A G, A F, trianguli A G F, duobus lateribus A L, A F, trianguli A L F, æqualia. Sunt autem & baſes F G, F L, ex centro æquales.* [d] *Igitur anguli quoque ad A, illis lateribus comprehenſi æquales ſunt, ideoq; angulus B A E, ſectus eſt bifariam. Non aliter oſtendemus, reliquos angulos figuræ bifariam ſectos eſſe:* [e] *proinde cùm toti anguli ponantur æquales, & eorum ſemiſſes æquales erunt. Quocirca duo anguli A, G,* [f] *trianguli A F G, duobus angulis B, G, trianguli B F G, æquales erunt. Eſt autem latus F G, vni æqualium angulorum oppoſitum, commune.* [g] *Igitur latera quoq; A G, B G, æqualia erunt; atq; ideò latus A B, ſectum erit bifariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figuræ latera ſecta eſſe bifariam. Quia ergo A G, A L, dimidia æquales ſunt, erunt quoq; totæ lineæ A B, A E, æquales. Eademq; ratione A B, B C; & B C, C D; & C D, D E; & D E, E A, æquales erunt. Quam ob rem figura A B C D E, æquilatera eſt, ſiue numerus laterũ ſit par, ſiue impar. Quod erat demonſtrandum.* c 18. tertij d 8. primi e 26. primi



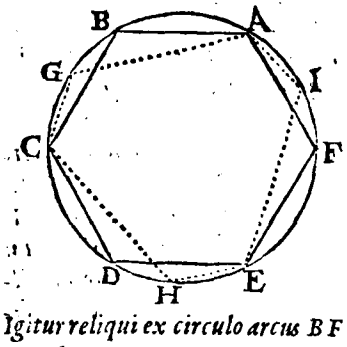
SIT rurſus figura æquiangula A B C D E, quotuis laterum numero imparium circulo inſcripta. Dicõ eam neceſſariò eſſe quoq; æquilaterã. Quoniam enim anguli B A E, A B C, ponũtur æquales, [f] *erũt arcus B C E, A D C, quibus inſiſtunt, æquales: quibus demptis ex communi circulo, æquales quoque erunt reliqui arcus B A E, A B C. Dempto ergo communi arcu A B, erunt & reliqui arcus A E, B C, æquales. Eadem ratione arcus B C, arcui D E, æqualis erit; ac proinde* [g] *& latus A F, lateri B C, & latus B C, lateri D E, æquale erit: atq; ita deinceps, ſi figura plura habeat latera, erit ſemper tertium quodque latus ei, à quo tertium eſt, vno relicto in medio, æquale: hoc eſt, primum (conſtitui autem quoduis latus poteſt primum) æquale erit tertio, tertium quinto, quintum ſeptimo, ſeptimum nono, &c. atq; in hunc modum omnia latera in locis imparibus poſita, æqualia inter ſe erunt. Eademq; ratione omnia latera parium locorum, vt ſecundum, quartum, ſextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter ſe erunt, cùm quartũ ſit à ſecundo tertium, & ſextum à quar-* f 26. tertij g 29. tertij

to tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam proposita figura numerum laterum habet imparem, æquale erit vltimum primo, cui proximum est. Hoc autem vltimum latus eadem ratione æquale erit secundo, quod ab vltimo tertium est, primo in medio relicto; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, &c. vsque ad penultimum. Quocirca omnia latera figuræ propositæ inter se æqualia erunt. Quod ostendendum erat.

Hæc etiam demonstratio in figuras æquiangulas parium laterum circulo inscriptas non quadrat. Ex ea enim solùm concludetur, primum latus esse æquale tertio, quinto, septimo, & alijs loca imparia occupantibus; nunquam autem per eam demonstrabitur, primum vltimo esse æquale, propterea quòd vltimum occupat locum parem, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, &c. Pari ratione eadem demonstratio conuincet tantùm latus secundum æquale esse quarto, sexto, octauo, & alijs loca paria possidentibus; at per eam nunquam colligetur, secundum latus esse æquale primo, eò quòd primum in loco impari locetur. Itaque sola latera imparium locorũ inter se, & sola latera in paribus locis posita inter se conuincentur esse æqualia.

QVOD si duo latera proxima, vel etiam duo non proxima, dummodo vnum eorum in loco impari, alterum verò in loco pari positum sit, fuerint inter se æqualia, tum demum superior demonstratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam si primum latus secundo sit æquale, (quando enim duo proxima latera æqualia sunt, dici poterit vnum primum, & alterum secundum) cùm demonstratum sit, primum æquale esse quoq; omnibus lateribus locorum imparium, secundum verò omnibus parium locorum; perspicuum est omnia inter se esse æqualia. Si autem primum latus æquale sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo latera nõ proxima sunt æqualia, ita tamen vt vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, licebit vnum eorum appellare primum, & alterum vel quartum, vel sextum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundum primo proximum est.) cùm primum ostensum sit æquale omnibus alijs positis in locis imparibus: alterum verò omnibus loca paria occupantibus, atq; idcirco & secundo lateri; erit quoq; primum secundo æquale: ac proinde duo proxima inter se æqualia erunt. Vt ergo proximè demonstratum est, omnia latera erunt inter se æqualia.

SI quis autem dubitet, dari posse figuram æquiangulam parium laterum circulo inscriptam, quæ non sit æquilatera, (quanquam enim superior demonstratio non probet omnia latera esse æqualia, si omnes anguli æquales sint: contrarium tamen ex ea inferre non licet.) demonstrabimus id Geometricè hac ratione. Primùm quidem constat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior æquiangula est, quippe cùm omnes eius anguli sint recti, sed nõ æquilatera. Quis autem dubitet, eam circulo posse inscribi? Deinde verò sit hexagonum æquilaterum, & æquiangulum A B C D E F, in circulo descriptum, sumaturq; in arcu B C, quodlibet punctũ G, & arcui B G, in tertio arcu ab eo arcus æqualis D H; Item in quinto ab eo arcus æqualis F I: iungantur q; rectæ A G, G C, C H, H E, E I, I A. Dico hexagonum A G C H E I, æquiangulum esse, at non æquilaterum. Quòd enim sit æquiangulum, sic ostendemus. Anguli B, G, [a] æquales sunt in eodem segmento A B C. Eadem ratione æquales sunt anguli D, H, & F, I. Præterea quia arcus B G, D H, æquales sunt, per constructionem: addito cõmuni G D, erũt toti arcus B C D, G C H, æquales. [b] Igitur reliqui ex circulo arcus B F D, G F H æquales erunt; [b] ac proinde anguli B C D, G C H, illis insistentes æquales quoq; erunt. Non aliter ostendemus & angulos D E F, H E I, & F A B, I A G, æquales inter se esse. Ergo sex anguli hexagoni A G C H E I, sex angulis hexagoni A B C D E F, æquales sunt, singuli singulis: ideoq; cùm hoc ponatur æquiangulum, erit quoq; illud æquiangulum. Quòd autem non sit æquilaterum, ita probabimus. Latus A G, latere A B, maius est, & latus G C, latere B C, minus, ex scholio propos. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera C H, E I, lateribus C D, E F, maiora sunt, & latera H E, I A, lateribus D E, F A, minora. Cùm ergo latera A B, B C, C D, D E, E F, F A, æqualia ponãtur, erunt A G, G C, C H, H E, E I, I A, inæqualia: quanquam A G, C H, E I, inter se, & G C, H E, I A, inter se, relicto semper vno in medio, æqualia sint, vt suprà ostendimus.



a 21. tertij.

b 27. tertij.

IDEM prorsus eodem modo demonstrabitur fieri posse in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, si in circulo inscribantur prius octogonum, decagonũ, & aliæ figuræ æquilateræ, atq; æquiangulæ, &c.

QVOD si figura inscribatur circulo per doctrinam propos. 11. 15. & 16. erit ea perpetuò & æquiangula, & æquilatera, vt ex earum propositionum demonstrationibus perspicuum est.

PORRO qualemcunque figuram æquilateram & æquiangulam in circulo nouerimus inscribere, talem etiam sciemus describere circa circulum, & in ea circulum quoq; inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

RVRSVS inscripta figura quacunque æquilatera, & æquiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum æquilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideò dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoq; ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atq; adeò figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

CÆTERVM omnes figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inscribi possunt beneficio Isoscelium

ſcelium triangulorum, vt rectè hoc loco nonnulli Euclidis interpretes monent.

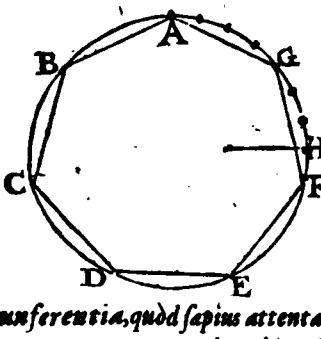
IMPARIVM enim laterum figuræ inſcribentur beneficio triangulorum Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſin multiplices ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Vt beneficio Iſoſcelis, cuius vterq; angulorum ad baſin æqualis eſt ei, qui ad verticem, deſcripti in circulo inſcribetur prima figura imparium laterum, hoc eſt, triangulum æquilaterum. Nam Iſoſceles huiuſmodi, triangulum æquilaterum erit. Quòd ſi in circulo inſcribatur Iſoſceles, cuius vterque angulorum ad baſin duplus ſit eius, qui ad verticem, inſcribetur ſecunda figura imparium laterum, nimirum pentagonũ, in circulo, ſi duo anguli æquales ſecentur bifariam, veluti propoſitum fuit oſtenſum. At heptagonum, tertia figura laterum imparium, inſcribetur in circulo, per triangulum Iſoſceles habens vtrumque angulorum ad baſin triplum eius, qui ad verticem, ſi duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad verticem. Ita quoque figura quarta imparium laterum, quale eſt Hexagonum, in circulo inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterq; angulorum ad baſin quadruplus eſt eius, qui ad verticem, ſi vterque diſtribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad verticem, &c.

DIVISIO autem hæc angulorum ad baſin in partes æquales perfacilis eſt. Nam ſi angulo ad verticem conſtituantur ad baſin tot anguli æquales ordine, quot vnitates ſunt in numero proportionis multiplicis, quam vterque angulorum æqualium habet ad reliquũ, diuiſus erit angulus in partes æquales. Verùm deſcripto huiuſmodi triangulo Iſoſcele in circulo, deſcribetur figura in circulo ſine diuiſione angulorum ad baſin, ſi baſi accõmodentur rectæ æquales in circulo. Baſis enim ſemper eſt vnã figuræ latus, vt in pentagono patuit.

PARIVM verò laterum figuræ in circulo inſcribẽtur, beneficio Iſoſcelium, quorũ anguli æquales ad baſin multiplices ſeſquialteri ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Vt quadratũ conſtituens primam figuram parium laterum, inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterq; angulorum ad baſin ſeſquialter eſt anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem inſiſtit quartæ parti circunferentiæ. Cùm enim duo anguli ad baſin ſimul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem, quod quilibet ſemel eum contineat, & dimidiatam inſuper eius partem; ſubtendent ipſi tres partes circunferentiæ, & idcirco angulus ad verticem vnam duntaxat. Hexagonum, hoc eſt, ſecunda figura laterum parium, inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterque angulorum ad baſin duplus ſeſquialter eſt eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, inſiſtit ſextæ parti circunferentiæ, cùm reliqui anguli ſimul cõpoſiti contineant ipſum quinquies; propterea quòd quilibet bis eum continet, & dimidiatam eius inſuper partem. Ita quoque Octogonum, id eſt, tertia figura laterum parium inſcribetur beneficio Iſoſcelis habentis vtrumque angulorũ ad baſin triplum ſeſquialterum anguli ad verticem, &c.

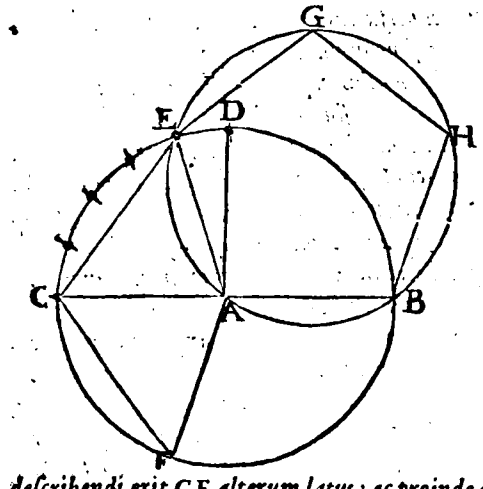
SI igitur inuenta fuerit ars, qua Iſoſcelia triangula conſtruantur habentia angulos ad baſin multiplices eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum, quemadmodum Euclides Iſoſceles fabricauit, habens vtrumque angulorum ad baſin duplum anguli ad verticem, facilè in circulo deſcribentur figuræ omnes laterum imparium. Et ſi arcus earum diuidantur bifariam, inſcribentur quoq; omnes figuræ parium laterum. Poſt quadratum, atq; adeò circunferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æquales partes Geometricè diuidetur. Quæ res ſummam Aſtronomis afferret vtilitatem. Verùm hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim rectè ſibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, vt ipſe ait, deſiderato de abſoluta figurarum rectilineãrũ omnium deſcriptione intra circulum, &c. cùm eius demonſtrationes falſæ ſint, ac ſophiſticæ, vt Geometricè oſtenſum eſt à Petro Nonio Luſitano in libello de erratis Orontij.

NOS tamen ad finem lib. 6. ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometricè deſcribemus, qua non ſolùm triangula Iſoſcelia, quorum anguli ad baſin ad reliquum habeant datam proportionem, conſtruantur, ac proinde omnes figuræ æquilateræ, & æquiangulæ in circulo deſcribantur: verum etiam arcus quiuis circuli diſtribuatur in quotcunque partes æquales, ſiue is quadrans ſit, ſiue non. Quin etiam eiuſdem lineæ inflexæ beneficio iucunda operatione circulus quilibet ſine vllo negotio in quadratum æquale commutabitur, vt ibidem dicemus. Quæres ad hunc vſque diem animos Mathematicorum tenuit ſuſpenſos.



SED doceamus, ſi placet, qua etiam via figura quauis æquilatera, & æquiangula circulo inſcribatur ſine triangulis Iſoſcelibus, quorum anguli ad baſin ad reliquum habeãt proportionem datam. Sit ergo in circulo A B C D E F G, inſcribendum heptagonum æquilaterum, & æquiangulum. Secetur eius quadrans A H, in ſeptem partes æquales, in tot videlicet, quot latera angulóſue figura inſcribenda continet. Secabis autem quadrantem A H, in propoſitas partes æquales vel ex iis, quæ ad finem lib. 6. nos demonſtraturos diximus, vel beneficio circini, dilatãdo eius crura modò magis, modò minus, donec reperias eorum diſtantiam partiri quadrãtem in partes optatas. Facilius enim quadrans in quotuis æquales diuidetur partes, quàm tota circunferentia, quòd ſæpius attentando, & quaſi repetendo opus, clarius appareat in parua magnitudine, quàm in magna, quantum detrahi, vel addi debeat parti vni beneficio circini acceptæ, ſi ea partẽ deſideratam non offerat. Secto quadrante in ſeptem partes æquales, vel in plures, ſi figura plurium laterum deſideretur, erit recta linea A G, quæ quatuor eiuſmodi partes ſubtendit, latus figuræ inſcribendæ. Quoniam enim in tota circunferentia quater tot partes æquales continentur, in quot quadrans diuiſus eſt, continebitur aggregatum

ex quatuor partibus toties in tota circunferentia, quoties vna pars in quadrante: quia qualibet pars cum aliis tribus, quarum ſingulæ in ſingulis aliis tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod etiam ita perſpicuum fiet. Quoniam partes eandem proportionem habent, quam earum æquemultiplices, vt ab Euclide demonſtratur lib. 5. propoſ. 15. (Liceat enim huc accommodare eam propoſitionem, cùm ex antecedentibus nullo modo pendeat.) ita ſe habebit vna pars ad quadrãtem, vt quadruplum vnius partis, hoc eſt, arcus A G, ad quadruplum quadrantis, id eſt, ad totam circunferentiam. Qualis ergo pars quadrantis eſt vna illarum, in quas quadrans diuiſus eſt, talis erit arcus A G, totius circunferentiæ. Atq; ita ſi quadrans diuiſus ſit in 7. partes, continebuntur eiuſmodi partes 28. in tota circunferentia. Igitur 4. efficient $\frac{4}{28}$. hoc eſt, $\frac{1}{7}$. totius circunferentiæ. Ita quoq; ſi quadrans ſectus ſit in 11. partes, continebuntur eiuſmodi partes 44. in tota circunferentia: atq; adeò 4. efficient $\frac{4}{44}$. hoc eſt, $\frac{1}{11}$. totius circunferentiæ. & ſic de cæteris. Itaq; ſi arcui A G, quatuor partium abſcindantur arcus continuè æquales, eiſdemq; arcubus rectæ ſubtendantur, inſcripta erit circulo figura propoſita, vt ex demonſtratis diquet.



IAM verò ſi ſupra datam rectam lineam quæuis figura æquilatera, & æquiangula deſcribenda ſit, efficietur id hac ratione. Sit ſupra datam rectam A B, conſtituendum pentagonum æquilaterũ, & æquiangulum. Producta B A ad C, vt A C, ipſi A B, æqualis ſit, deſcribatur ex A, per C, circuli circumferentia C E F, ducaturq; A D, perpendicularis ad A C; vt quadrans ſit C D, ex ſcholio propoſ. 22. lib. 3. diuidatur quadrans C D, in quinque partes æquales, in tot videlicet, quot laterum figura conſtruenda ſit. quarum 4. ſint C E, iungaturq; recta A E, quæ ipſi A B, æqualis erit. Dico angulum B A E, æqualem eſſe angulo pentagoni æquilateri & æquianguli. Sumpto enim arcu C F, æquali arcui C E, iungantur rectæ C E, C F. Et quoniam C E, recta ſubtendens 4. partes quadrantis, latus eſt pentagoni æquilateri & æquianguli, vt proximè demonſtrauimus, in circulo E C F deſcribendi, erit C F, alterum latus: ac proinde duo latera E C, F C, comprehendent angulum pentagoni æquilateri & æquianguli E C F. Quoniam verò, ducta recta A F, duo latera E C, C A, duobus lateribus F C, C A,

a 8. primi. *æqualia ſunt, & baſes item æquales A E, A F; a erunt anguli E C A, F C A, æquales. Cùm ergo, b & anguli*

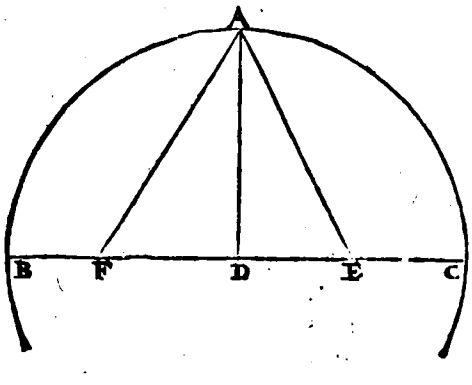
b 5. primi. *A C E, A E C, ſint æquales; erit & A C F, ipſi A E C, æqualis: additoq; communi A C E, totus angulus E C F,*

c 32. primi. *duobus angulis A C E, A E C, æqualis erit. Eſt autem c externus B A E, eiſdem internis A C E, A E C, æqualis. Igitur & E C F, B A E, inter ſe æquales erunt. Cùm ergo E C F, ſit angulus pentagoni, erit quoq; B A E, pen-*

d 1. quarti. *tagoni angulus. Quocirca ſi circa tria puncta B, A, E, circulus deſcribatur, & rectis A B, A E, d rectæ æquales in eo accommodentur B H, H G, G E, deſcriptum erit pentagonum æquilaterũ & æquiangulum deſcriptum in circulo A B H G E, ac proinde ſupra datam rectam A B. Quod faciendum erat. Non eſt autem dubitandum, quin rectis A B, A E, æquales rectæ poſſint in circulo accommodari, quæ totam circunferentiam abſoluant. Nam angulus pentagoni B A E, inſiſtit tribus quintis partibus totius circunferentiæ: ſingula autem latera A B, A E, ſingulas quintas partes ſubtendunt: ac proinde ſingulæ B H, H G, G E, ſingulas quoque quintas partes ſubtendent, cùm ipſis A B, A E, ſumptæ ſint æquales, propterea q; totum arcum B G E, continentẽ tres quintas partes abſoluent. Eadem ratio eſt de aliis figuris æquilateris, & æquiangulis.*

SI fortè in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & æquiangulam, cui ſupra datam rectam lineam deſideramus conſtituere ſimilem, ſine ea in circulo aliquo deſcripta ſit ſiue non: ſatis erit vni eius angulo æqualem angulum conſtituere B A E, in extremo datæ lineæ A B. Si namque, poſita recta A E, æquali ipſi A B, per tria puncta B, A, E, circulus deſcribatur, perficiemus figuram propoſitam, vt antè diximus.

QVONIAM verò longa eſt, atq; difficilis ea inſcriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua vna eademq; opera Ptolemæus lib. 1. magnæ conſtructionis, in circulo dato inſcribit pentagonum, & decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus A B C, cuius centrum D; Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuiſa ſemidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æqualis abſcindatur E F. Itaq; ſi ducatur recta A F, erit A F, latus pentagoni, & D F, latus decagoni in dato circulo inſcribendi, vt ipſe demonſtrat. Cæterùm cùm demonſtratio huius rei pendeat ex decimotertio libro Euclidis, non videtur hoc loco ſcribenda, ſed in proprium locum, vtpote in librum decimumtertium differenda.



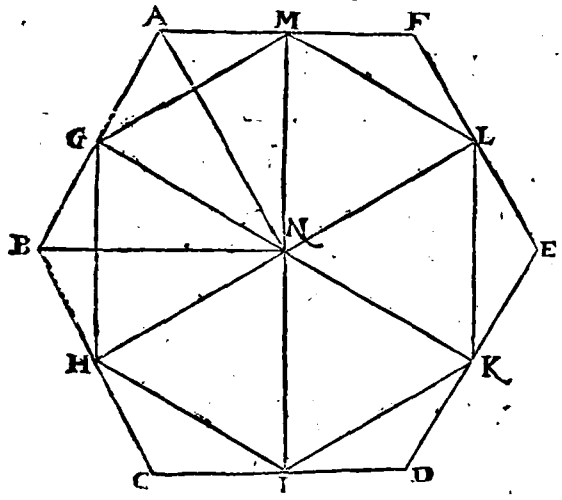
10. 13.

Non

Non erit etiam præter inſtitutum noſtrum, aut ab hoc libro alienum, ſi ſequens adhuc theorema adiungamus: videlicet.

Si bifariæ ſectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inſcripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.

Centrvm figuræ æquilateræ, & æquiangulæ appellatur punctum illud, è quo circulus figuræ inſcribitur, aut circumſcribitur: ita vt idem ſit centrum circuli & figuræ.



Sit igitur figura æquilatera, & æquiangula A B C D E F, cuius latera bifariam ſecentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis G H, H I, I K, K L, L M, M G. Dico figuram G H I K L M, inſcriptam figuræ A B C D E F, æquilateram eſſe quoq;, ac æquiangulam, idémq; centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera cùm ſubtendant angulos æquales cõprehenſos æqualibus rectis, vtpote dimidiis laterum æqualium, [a] *æqualia ſunt. Quoniam verò tam tres anguli A M G, G M L, L M F, quàm tres F L M, M L K, K L E,* [b] *duobus ſunt rectis æquales: Sunt autem A M G, L M F; F L M, K L E,* [c] *inter ſe æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, ſubtendanturq; à baſibus æqualibus; Erunt reliqui anguli G M L, M L K, æquales. Eodemq; argumento concludemus, reliquos angulos & hiſce, & inter ſe æquales eſſe. Æquiangula igitur quoq; eſt figura G H I K L M.*

a 4. primi.
b 13. primi.
c 8. primi.

Qvod autem idem habeat centrum, ita oſtendetur. Ex centro N, figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inſcriptæ ducantur rectæ N G, N H, &c. iunganturq; rectæ N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia ſunt lateribus B G, G N, trianguli B G N: ſuntq; baſes A N, B N, cùm ſint ſemidiametri circuli circa figuram deſcripti, æquales: [d] *Æquales erunt anguli A G N, B G N, ideoq; recti. Quare N G, perpendicularis eſt ad latus A B; Eodemq; modo reliquæ N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera B C, C D, &c. Quæ cùm ex defin. 4. lib. 3. oſtendant diſtantias rectarum A B, B C, &c. æqualium à centro N;* [e] *æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo N G, deſcriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet; Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M, hoc eſt, circuli circa eam figuram deſcripti. Quod eſt propoſitum.*

d 8. primi.
e 14. tertij.

Neqve verò & hoc omittendum eſt, inter omnes figuras æquilateras, & æquiangulas, ſolum triangulum, quadratum, & hexagonum replere locũ, hoc eſt, aliquot triangula, vel quadrata, vel hexagona, ita in plano poſſe inter ſe aptari, vt inter eorũ angulos nihil ſit vacui, ſed planã ſuperficiem conſtituãt. Nam ſex anguli in triangulo æquilatero, & quatuor in quadrato, & tres in hexagono æquilatero, & æquiãgulo, æquales ſunt quatuor rectis, quantũ nimirum eſt ſpatium circa punctum quodlibet in plano, vt ad propoſitionem decimamquintam libri primi oſtendimus. Quoniam enim vnus angulus trianguli æquilateri continet $\frac{2}{3}$. vnius recti, quòd omnes tres contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, hoc eſt, duos rectos, continebunt ſex eiuſmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id eſt, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato ſunt quatuor recti. Denique quia vnus angulus hexagoni æquilateri, & æquianguli continet $\frac{4}{3}$. vnius recti, quòd omnes ſex contineant $\frac{24}{3}$. vnius recti, hoc eſt, 8. rectos, continebunt tres eiuſmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id eſt, 4. rectos. Quod in alijs figuris planis æquilateris, & æquiangulis non cernitur. Nam tres anguli in pentagono æquilatero & æquiangulo æquales ſunt $\frac{18}{5}$. vnius recti, hoc eſt, angulis rectis $3\frac{3}{5}$. duntaxat, at quatuor æquales ſunt $\frac{24}{5}$. vnius recti, id eſt, angulis rectis $4\frac{4}{5}$. propterea quòd omnes quinque æquiualent 6. rectis, hoc eſt, conſtituunt $\frac{30}{5}$. vnius recti, atque idcircò vnus continet $\frac{6}{5}$. vnius recti, &c. Tria igitur pentagona locum replere non poſſunt, cùm trium in plano aptatorum tres anguli minores ſint quatuor rectis: quippe qui efficiant tantùm tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt, propterea quòd quatuor in plano aptatorum quatuor anguli maiores ſunt quatuor rectis, cùm æquales ſint quatuor angulis rectis, & inſuper quatuor quintis vnius recti, vt dictum eſt. Pari ratione neque ex heptagonis locus poterit repleri. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni æquilateri, & æquianguli æquales ſunt $\frac{30}{7}$. vnius recti, hoc eſt, angulis rectis $4\frac{2}{7}$. Quoniam enim omnes ſeptem anguli 10. rectis ſunt æquales, hoc eſt, complectuntur $\frac{70}{7}$. vnius recti; fit, vt vnus contineat $\frac{10}{7}$. vnius recti, hoc eſt, vnum rectum, & præterea $\frac{3}{7}$. vnius recti: ac proinde tres contineant quatuor rectos, & $\frac{2}{7}$. vnius recti. Non ergo tribus heptagonis in plano aptatis, eorum tres anguli locum replere poſſunt, cùm quatuor rectos excedant. A fortiori neque quatuor heptagona locum replebunt: neque tria octogona æquilatera, & æquiangula, aut quatuor,

neque tres aut quatuor figuræ æquilaterę, atque æquiangulæ plurium laterum, quàm octo: quippe cùm semper tres anguli simul sumpti sint maiores quatuor rectis, propterea quòd maiores sunt tribus angulis heptagoni æquilateri & æquianguli, quos ostendimus quatuor rectis esse maiores. Solum ergo triangulum æquilaterum, quadratum, & hexagonum æquilaterum atque æquiangulum, suis angulis locum replere possunt, vt diximus.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

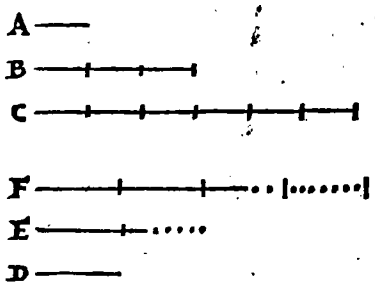
EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

AGIT in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolutè considerata; Nunc verò duobus sequentibus de eadem disputat, non absolutè, sed prout vna ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non descendendo ad vllam quantitatis speciem, vt ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto verò libro ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se linea, anguli, circunferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ plana. Vt igitur institutum suum seruet, definit priùs vocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.



ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B: sexies autem sumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At verò quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinē E, & sumpta ter, deficit à magnitudine F, sumpta autē quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

DVPLEX autem est pars apud Mathematicos: Quædam metitur suum totum, ita vt aliquoties repetita totū suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8.12.16.20. &c. collatis; Quædam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum vel excedit, vel ab eodē deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collatus cum 6.7.9.10.18.38. &c. Prior dici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc solùm metitur suum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia, vt ex lib. 7. constabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duæ partes tertiæ, quales sunt duo binarij. Accedit etiam, quòd in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vn de mirum sanè est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Peletarius, contendere, partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quàm aliquantam; cùm tamen in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem est maior minoris, cùm minor metitur maiorem.

VT in superiori exemplo tam magnitudo B, quàm magnitudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam hæc

hæc vtramque illam metitur. At verò neq; magnitudo E, neq; magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D: propterea quòd hæc neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita vt minor quantitas mensurans maiorem, dicatur pars maioris; Maior verò mensurata à minori, dicatur minoris multiplex.

SITIS autem perspicuè ex hac definitione colligitur, partem antea definitam esse eam, quæ perfectè metitur suum totum. Si enim 6. diceretur metiri 7. vt vult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

CAETERVM quando duæ magnitudines minores duas alias maiores æquè metiuntur: hoc est, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in alterà maiore; dicuntur duæ hæ maiores duarum illarum minorum æquemultiplices. Quod idem dices, si plures minores æquè metiantur plures maiores.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundùm quantitatem, habitudo.

QVANDO duæ quantitates eiusdem generis, vt duo numeri, duæ lineæ, duæ superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundùm quantitatem, hoc est secundùm quod vna maior est, quàm altera, vel minor, vel æqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio, seu (vt alijs placet) Proportio. Itaque si comparetur linea aliqua cum superficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quòd neq; linea, & superficies; neq; numerus, & linea sint eiusdem generis quantitates. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundùm qualitatem, hoc est secundùm quòd vna est alba, & altera nigra; aut quòd vna est calida, & altera frigida, &c. quamuis ambæ sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit secundùm quantitatem.

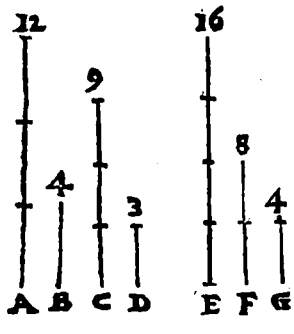
QVANQVAM autem in solis quantitatibus propriè reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentia, proportionem quoq; dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur, secundùm quantitatem. Vt cùm dicimus; tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quædam.

CAETERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs, antecedens proportionis; Ea verò, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione lineæ 6 palmorum ad lineam 3. palmorum; linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis: at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quòd si è contrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens, linea 3. palmorum; consequens verò linea 6. palmorum, & sic in cæteris.

IIII.

PROPORTIO verò est rationum similitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, plerisque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionũ inter se, proportionalitas solet nuncupari. Vt si proportio quantitatis A, ad quantitatẽ B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D; dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hæc similitudo proportionalitas. Multæ autem habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim cum pluribus comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus: habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem) à scriptoribus, præsertim Boëtio, & Iordano, describuntur; inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atq; Musica, seu Harmonica, de quibus paulò post dicemus: Verùm Euclides de sola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex est, continua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, sed qualibet quantitas intermedia sit, & antecedens & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens verò quantitatis antecedentis. Vt si dicatur, qua est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera verò discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantùm accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens tantùm, vel consequens tantùm. Vt si dicatur, qua est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, discreta, siue non continua.



DE PROPORTIONIS DIVISIONIBVS.

OPERAE pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionis

tionum apud Mathematicos, & quanam ſint præcipuæ proportionalitates, earumq; proprietates, vel ob hanc præcipuè vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonſtrantur de proportionibus magnitudinum, rebus poſſint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ à Philoſophis cum Ariſtotele de proportione motuum diſputantur, intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas ex admirabilibus proportionum affectionibus percipi poſſit, inſtituemus paulò vberiorem tractationem in hac poſteriori editione, quàm in priori: reiicientes nihilominus innumera propemodum, quæ dici poſſent, in pleniorem noſtram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentiſſimè perſequemur.

PROPORTIO igitur ab Euclide definita, diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis eſt ea, quæ in numeris poteſt exhiberi. Qualis eſt proportio linea 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hiſce numeris 20. & 10. oſtenditur. Irrationalis verò proportio ea eſt, quæ in numeris exhiberi nequit. Qualis eſt proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiuſdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non poteſt, vt in 10. lib. ab Euclide demonſtratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam eſſe, quam habent quæuis duæ quantitates commenſurabiles: Irrationalem verò eam, quam habent duæ qualibet quantitates incommenſurabiles. Dicuntur autem quantitates commenſurabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam, ſeu quas eadem menſura communis metitur. Cuiuſmodi ſunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum eſt vtriuſque pars aliquota, ſimiliter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quàm 2. palmorum metitur lineam 20. palmorum; Ita quoque eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8. palmorum menſurat. Non aliter omnes numeri, commenſurabiles dicentur, quia ſaltem vnitas omnes metitur. Quantitates verò incommenſurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, ſeu quarum nullam menſuram communem contingit reperiri. Cuiuſmodi ſunt diameter, & latus eiuſdem quadrati. Quamuis enim qualibet harum linearũ infinitas habeat partes aliquotas, vtpote partem dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alteram metiri poteſt, vt demonſtratur ab Euclide lib. 10. propoſ. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommenſurabiles oſtenduntur, præter illas duas. Itaq; in numeris inuenitur ſola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quàm irrationalis proportio continetur.

ALIO modo diuidi ſolet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Æqualitatis proportio, eſt inter duas quantitates æquales, vt inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorum, & lineam 10. palmorum, &c. Inæqualitatis verò proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter 20 & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum, & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum ſuperioribus duobus eam connexionem, vt omnis proportio æqualitatis ſit neceſſariò rationalis, ſed non contra. Omnis item proportio irrationalis neceſſariò ſit proportio inæqualitatis, ſed non contra. Ex quo manifeſtum eſt, minus rectè à quibuſdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis ſit neceſſariò æqualitatis, inæqualitatisve, non tamen contra omnis proportio huiuſmodi eſt rationalis; cùm multæ proportiones inæqualitatis ſint irrationales. Pari ratione perſpicuum eſt, quoſdam non ſatis rectè diſtribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis ſit neceſſariò rationalis irrationalisve, non tamen omnis huiuſmodi proportio è contrario eſt proportio inæqualitatis: cùm multæ proportiones rationales ſint proportiones æqualitatis. Rectius igitur, meo iudicio, duplici diuiſione ſecanda eſt proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Poſteriori verò in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; vt à nobis factum eſt. Ita enim membra diuidentia cum Diuiſo (vt cum Dialecticis loquamur) in vtraque diuiſione reciprocantur. Scio rectè poſſe ſubdiuidi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; quàm proportionem inæqualitatis in proportionem rationalem, & irrationalem; ſi in vtraque diuiſione ſubintelligatur Diuiſum. Sed cur duplicem noſtram diuiſionem, qua proportio in tota ſua latitudine diuiditur, vtrique harum ſubdiuiſionum prætulerim, ſupra expoſui in reſponſione mea ad Apologiam Peletarij.

RVRSVS

RVRSVS proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionẽ, quoniam amplius ſubdiuidi nequit, cùm quæcunque quantitates æquales, ſiue magnæ, ſiue paruæ fuerint, eandem ſemper habeãt proportionem æqualitatis) ſubdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Maioris inæqualitatis proportio eſt, quando maior quantitas cum minore confertur; qualis eſt proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c. Proportio minoris inæqualitatis eſt, quando minor quantitas ad maiorem refertur; qualis eſt proportio 10. ad 20. Item lineæ 6. pedum ad lineã 8. pedum, &c. Non eſt autem hæc diuiſio inanis & ſuperuacanea, vt multi ſuſpicantur. Neque enim eadem eſt proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. ſed multum inter ſe differunt, cùm valdè diuerſus ſit vſus vtriuſq; vt perſpicuum eſt ijs, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ ſunt verſati. Hæ igitur ſunt generales diuiſiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla ſecluſa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quàm minoris inæqualitatis, quatenus ſolas proportiones rationales comprehendunt, ſubdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. eſt ſermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inæqualitatis, diſtribuitur in quinque genera, vt in proportionem multiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientem, multiplicem ſuperparticularem, & multiplicem ſuperpartientem. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera ſecatur, ſi modò ſingulis vocabulis præponatur præpoſitio (ſub) vt in proportionẽ ſubmultiplicem, ſubſuperparticularem, ſubſuperpartientem, ſubmultiplicem ſuperparticularem, & ſubmultiplicem ſuperpartientem. Horum autem quinque generum priora tria ſunt ſimplicia, poſteriora verò duo ex illis tribus compoſita; vt manifeſtum eſt. Cur verò tantùm ſint quinque hæc genera proportionis rationalis tam maioris, quàm minoris inæqualitatis, poſt explicationem omnium harum quinque proportionum oſtendemus.

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI.

PROPORTIO Multiplex eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur; qualis eſt proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.

HAEC autem ſub ſe cõtinet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantùm continet, dicitur proportio dupla: ſi ter, tripla: ſi decies, decupla: ſi centies, centupla, &c.

EX his facilè omnes ſpecies proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nil erit aliud, quàm habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodemq; modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quincupla, qualis eſt 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorẽ continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & ſic de reliquis.

CAETERVM omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc eſt, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad vnitatem habet primam proportionem multiplicem, quæ inueſtigatur: hoc eſt, numerus ille, & vnitas ſunt primi ac minimi numeri, inter quos propoſita proportio multiplex reperitur. Atque numerus ille idem, atq; vnitas dicuntur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, quæ proponitur. Inuentis hiſce terminis, inter quos prima proportio multiplex propoſita reperitur, ſi vterque duplicetur, producentur duo numeri habentes ſecundam proportionem multiplicem propoſitam: ſi vterque idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propoſitæ: ſi vterque quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæſitæ. Atq; ita ſi iidem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propoſitæ, quæ eum locum inter omnes proportiones multiplices illius ſpeciei obtinet, quẽ numerus, qui vtumque terminum multiplicauit, indicat: Adeò vt, ſi multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centeſimum locum inter omnes numeros propoſitam proportionem habentes. EXEMPLI gratia. Quarantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintupla inter 5. & 1. qui duo termini ſi ducantur in 2. reperietur ſecunda proportio quintuplæ inter 10. & 2. Si idem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertiæ proportionis quintuplæ: Et ſic deinceps. Itaque ſi decima proportio quintupla quæratur, ducendi erunt

duo primi termini inuenti 5.& 1.per 10. ſi verò milleſima reperienda ſit, multiplicandi erunt ijdem termini per 1000.&c.

OMNES *item numeri cuiuſque proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Conſtituãtur duæ ſeries numerorum in infinitũ progredientes: quarum inferior ab vnitate incipiat,& per ſericm naturalem numerorum progrediatur; ſuperior autem ab eo numero, qui ſignificat,quoties maior numerus minorem in data proportione cõtinet,initium ducat,progrediaturq; per continuam additionem eiuſdem numeri, primùm ad ſeipſum,deinde ad conflatum numerum,&c. Nam ſuperioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris,vt primus ad primum, ſecundus ad ſecundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices ſpeciei propoſitæ. Exempla hîc habes in proportionibus quintuplis,ſeptuplis,& decuplis.*

Proportiones quintuplæ.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	&c.

Proportiones ſeptuplæ.

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	&c.

Proportiones decuplæ.

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	&c.

DE PROPORTIONE SVPERPARTICVLARI.

PROPORTIO *ſuperparticularis eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet,& inſuper vnam eius partẽ aliquotam, ſcilicet dimidiatam,tertiam,quartam,&c. Qualis eſt proportio 3. ad 2. Nam 3.continent 2.ſemel, & inſuper vnitatem,quæ dimidiata pars eſt numeri 2. Ita quoque linea 12.pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet ſuperparticularem,quia prior linea continet poſteriorem ſemel, & inſuper lineam 3.pedum, quæ tertia pars eſt lineæ 9.pedum,&c.*

HÆC quoq; proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate,eſt dimidiata pars minoris quantitatis, conſtituitur proportio ſeſquialtera; Si eſt tertia pars,exurgit proportio ſeſquitertia; ſi quarta, ſeſquiquarta; ſi milleſima,ſeſquimilleſima, &c. VNDE ex ipſomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum ſuperparticularium. Erit enim proportio ſeſquioctaua,quando maior quantitas minorem ſemel includit,& inſuper octauam partem minoris: qualis eſt inter 9.& 8. Item inter 45.& 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

INVENIENTVR *omnes proportiones ſuperparticulares, ſiue omnes numeri, inter quas proportio ſuperparticularis quæcunq; reperitur hoc modo. Accipiatur numerus,qui partem aliquotam in proportione expreſſam denominat. Ad eum enim numerus proximè maior,qui videlicet eum vnà ſola vnitate ſuperat,habebit primam proportionem ſuperparticularẽ propoſitam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri,qui termini datæ proportionis dicuntur, ſi duplicentur, triplicentur, vel per quemcunque alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirũ ſecundam,tertiam,vel eam, quam numerus multiplicans indicat. VERBI cauſa. Si quærantur omnes proportiones ſeſquiſeptimæ; quoniam hic exprimitur pars ſeptima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8.vna vnitate illum ſuperans: atq; inter 8.& 7.prima proportio ſeſquiſeptima exiſtit. Quũ duo termini ſi duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16.& 14. inter quos ſecunda proportio ſeſquiſeptima cernitur: ſi triplicentur,erit tertia proportio eadem inter 24.& 21. Si denique centeſima proportio eadem quæratur,ducendi erunt termini inuenti 8.& 7. per 100.vt gignantur numeri 800.& 700.*

NVMERI *quoq; omnes cuiuſq; proportionis ſuperparticularis comperientur, ſi conſtituantur duo ordines numerorum, quorum inferior à numero partem aliquotam denominante incipiat, ſuperior verò à numero proximè maiore: vterq; verò per continuam additionem numeri, à quo initium ſumit, primùm ad ſe, deinde ad conflatum numerum,&c. progrediatur. Exempla hîc poſuimus in proportionibus ſeſquialteris,ſeſquiſeptimis,& ſeſquidecimis.*

Proportiones ſeſquialteræ.

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	&c.	
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	&c.	

Proportiones

Proportiones sesquiseptimæ.

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	&c.
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	&c.

Proportiones sesquidecimæ.

11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	&c.	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	&c.	

DE PROPORTIONE SVPERPARTIENTE.

PROPORTIO superpartiēs est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes vnam aliquotam. Qualis est proportio 8. ad 5. Nam 8. continent semel 5. & insuper tres vnitates, quarum qualibet est pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. Ipse autem ternarius ex illis compositus, non est pars vna aliquota numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere constituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ prima aspectu videntur esse superpartientes, cùm tamen sint superparticulares; cuiusmodi proportio est inter 10. & 8. Quanquam enim 10. contineant semel 8. & duas insuper vnitates, quarum qualibet est octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compositus, est quarta pars 8. non dicenda est ea proportio superpartiens, sed superparticularis, nempe sesquiquarta. Itaque vt duæ quantitates dicantur habere proportionem superpartientem, necesse est, vt maior quantitas minorem contineat semel, & plures eius partes aliquotas, quæ simul sumptæ non constituant vnam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt.

DIVIDITVR primùm proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorē semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas nō constituentes vnam, conficitur proportio superbipartiens; si tres partes aliquotas, supertripartiens; si decem, superdecupartiens, &c.

DIVIDITVR deinde quodlibet horū genervm, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarū maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quòd si duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus superbipartientibus. Pari ratione superdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus vndecimis, appellabitur superdecupartiens vndecimas. Quòd si decem illæ partes sint decimatertiæ, vocabitur proportio superdecupartiens decimastertias; & sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus.

NE autem proportiones superpartientes vel inter se confundantur, vel cum proportionibus superparticularibus, quod à plerisque factum esse deprehendimus, diligenter considerandæ sunt ea, quæ sequuntur. Primùm, in pronunciatione cuiuscunque proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorū alter monstrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore supersint; alter verò, quotæ partes eæ sint, aut quantæ, indicat. Vt in proportione supertripartiente octauas, denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior significat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere semel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturq; syllaba illa [tri] quando dicitur, supertripartiens: posterior autem per vocem [octauas] expressus ostendit, illas tres partes aliquotas, esse partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione supertripartiente duos prædictos numeros, (qui quidem facilè ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, vt ex proximo exemplo patet) eiusmodi esse debere, vt nō habeant vllam partem aliquotam communem, præter vnitatem, quæ quidem est omnium numerorum pars aliquota: hoc est, vt sint inter se primi. Numeros enim, qui præter vnitatem nullam aliam partem aliquotam communem admittunt, dicunt Arithmetici cū Euclide, primos inter se, vt ex lib. 7. constabit. Tales sunt duo illi numeri 3. & 8. in superiori proportione supertripartiente octauas expressi. Nam sola vnitas, vt constat, est vtriusq; pars communis aliquota. Quare rectè denominabimus proportionem inter 11. & 8. supertri-

partientem octauas: qualis etiam est inter 22. & 16. Non autem rectè appellabitur proportio posterior inter 22. & 16. supersextupartiens sextas decimas, quamuis maior minorem contineat semel, & insuper sex vnitates, quarum qualibet decima sexta pars est minoris: Non, inquam, rectè sic appellabitur; quia duo numeri 6. & 16. in ea expressi, habent partem aliquotam 2. per quam, vt in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{16}$. ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio ea dicenda est, supertripartiens octauas. Sic etiam non rectè vocabitur proportio inter 9. & 6. supertripartiens sextas, quoniam duo numeri in ea denotati 3 & 6. habet præter vnitatem, aliam communem mensuram, videlicet 3. Nam ternarius semel sumptus, se ipsum, & bis repetitus, senarium metitur, ac proinde $\frac{3}{6}$. reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit sesquialtera, cùm maior quantitas contineat semel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non rectè dicetur proportio inter 10. & 6. superquadripartiens sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atque ita dicenda erit talis proportio superbipartiens tertias, cùm maior quantitas contineat minorem semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuique, denominare conuenienter omnes proportiones superpartientes.

PERSPICVVM *etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem superbipartientem diuiserimus paulò antè, in proportionem superbipartientem tertias, quintas, septimas, nonas, &c. prætereuntes superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cùm enim ha posteriores omissæ, sint superparticulares, propterea quòd $\frac{2}{4}$. faciũt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{6}$. constituunt $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{8}$. efficiunt $\frac{1}{4}$. denique $\frac{2}{10}$. aquiualent $\frac{1}{5}$. confunderentur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsæ in numerum portionum superbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, præter vnitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, nécne, in Arithmetica docetur, demonstrabiturq; ab Euclide, ad initium libri 7.*

INVENTIO *omnium proportionum superpartientium cuiusque speciei sic se habet. Numerus tot vnitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quæ in proportione nominantur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem speciei propositæ ad numerum easdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati, gignent secundos numeros eandem proportionẽ habentes, tertios, vel alios, vt suprà dictum est. VERBI gratia, si inquirendi sint omnes numeri proportionis supertripartientis decimas, erunt primi huiusmodi numeri 13. & 10. quia maior superat minorem, qui partes decimas denominat, tribus vnitatibus, quot videlicet partium decimarum mentio fit, in proportione supertripartiente decimas. Dupli eorum, qui nimirum secundam proportionem constituunt, sunt 26. & 20. Tripli, 39. & 30. Centesima autem eiusmodi proportio erit 1300. ad 1000. cùm hi numeri centupli sint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti sunt.*

EOSDEM *numeros omnium proportionum superpartientium reperies, si statuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat à partium aliquotarum denominatore, superior autem à numero, qui numero partium nominatarum priorem illum superat: vterque deniq; ordo progrediatur per continuã additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad numeros cõstatos, vt suprà diximus. Exempla hic adiecimus proportionũ superbipartientium quintas, superoctupartientium nonas, & superseptupartientium decimas.*

Proportiones superbipartientes quintas.

7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	&c.
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	&c.

Proportiones superoctopartientes nonas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	&c.

Proportiones superseptupartientes decimas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	&c.
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	&c.

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI SVPERPARTICVLARI.

PROPORTIO *multi[plex] [super]particularis est habitudo maioris quãtitatis ad minorem, quando*

quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Cuiusmodi est proportio 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, vtpote cum dupla.) & insuper comprehendunt vnitatem, quæ est quarta pars numeri minoris; (qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ, eadem proportio proposita similis est.) vt rectè proportio hæc composita dicatur ex multiplici, & superparticulari.

DIVIDITVR autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in duplam superparticularem; triplam superparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quatérve, &c. & insuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

VNVMQVODQVE rursus horum generum in infinita alia subdiuiditur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio, verbi gratia, tripla superparticularis continet sub se triplam sesquialteram, (quando scilicet maior quantitas minorem ter continet, & præterea dimidiatam eius partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

REPERIEMVS verò omnes proportiones multiplices superparticulares cuiuslibet speciei, si aduertamus diligenter denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis, quarum in proposita proportione mentio fit. Nam si denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, producto q3 numero adiiciamus vnitatem; habebit hic numerus conflatus ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem speciei propositæ. Et hi duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, nimirum secundos, tertios, vel alterius ordinis, pro numero vnitatum, quæ in numero multiplicante continentur, vt in aliis dictum est. EXEMPLI gratia, si inueniendi sint omnes numeri proportionis sextuplæ sesquinonæ; ducemus 9. denominatorem partis nonæ in 6. denominatorem multiplicis proportionis, producto q3 numero 54. addemus 1. Conflatus namque numerus 55. ad 9. denominatorem partis nonæ expressæ habet primam proportionem sextuplam sesquinonam, ita vt in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Dupli horum numerorum 110. & 18. erunt secundi numeri in eadem proportione: Tripli verò 165. & 27. erunt tertij, &c. ita vt eorundem centupli 5500. & 900. exhibeant centesimam proportionem eandem.

EASDEM proportiones multiplices superparticulares inuenies, si constituas duas series numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquotæ nominatæ, superior autem à numero conflato ex vnitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotæ eiusdem in denominatorem proportionis multiplicis expressæ: Vter q3 verò ordo per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad conflatum numerum, &c. progrediatur, vt in superioribus dictum est. Exempla hic vides proportionis duplæ sesquialteræ, triplæ sesquiseptimæ, & decuplæ sesquitertiæ.

Proportiones duplæ sesquialteræ.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	&c.
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	&c.

Proportiones triplæ sesquiseptimæ.

22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	&c.
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	&c.

Proportiones decuplæ sesquitertiæ.

31	62	93	124	155	186	217	248	279	310	341	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	&c.

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI SVPERPARTIENTE.

PROPORTIO denique multiplex superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis est proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes vnam, ob causam dictam in proportione superpartiente. Nam si partes illæ aliquotæ vnam efficerent, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex superparticularis. Vt proportio 20. ad 6. non dicenda est multiplex superbipartiens sextas, quamuis 20. contineant ter 6. & duas

sextas; quia duæ sextæ conficiunt vnam tertiam partem. Quare vocabitur proportio tripla sesquitertia.

DISTRIBVITVR autem hæc proportio primùm, habita ratione proportionis multiplicis, vt multiplex in duplam superpartientem; triplam superpartientem, &c.

DEINDE qualibet harũ, habita ratione numeri partium, sub se cõtinet genera infinita. Vt sub tripla superpartiente, continetur tripla superbipartiens; tripla supertripartiens, &c.

POSTREMO quæuis istarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in genera adhuc infinita secatur. Vt tripla supertripartiens diuiditur in triplam supertripartientem quartas; in triplam supertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones & exempla non difficile est cuiuis ex dictis depromere, &c.

OMNES proportiones multiplices superpartientes postremæ diuisionis ita inueniemus. Denominator partium aliquotarum propositarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propositæ, productoq; numero addatur numerus partium aliquotarũ expressus. Conflatus enim numerus ad earundem partium aliquotarum denominatorem habet primam proportionem earum, quæ inuestigantur. Atq; hi duo numeri, si duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcunque numerum multiplicentur, dabunt secundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELVTI si quærantur omnes proportiones quadruplæ superoctupartientes vndecimas, ducemus 11 denominatorem partium vndecimarum in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, numeroq; procreato 44. adiciemus 8. numerum octo partium. Nam conflatus numerus 52. ad 11. denominatorem partium habet primam proportionem quæsitam. Secundi numeri erunt 104. & 22. Tertij 156. & 33. nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt 5200. & 1100. habent centesimam proportionem inter omnes quadruplas superoctupartientes vndecimas.

QVOD si duo numerorum ordines constituantur, quorũ inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propositarum, & per continuam eiusdem additionem, primùm ad se, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur, superior verò incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorẽ multiplicis proportionis datæ, & ex numero partium expresso, ac per eiusdem continuam additionem primùm ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoque omnes numeros oblatæ proportionis, vt in superioribus quoq; diximus. Exempla hic vides in proportione duplæ superbipartientè tertias, duplæ superquintuparticnte sextas, & quintuplæ supertripartiente quintas.

Proportiones duplæ superbipartientes tertias.

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	&c.

Proportiones duplæ superquintupartientes sextas.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204		&c.
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72		&c.

Proportiones quintuplæ supertripartientes quintas.

28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308			&c.
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55			&c.

DE PROPORTIONIBVS RATIONALIBVS MINORIS INAEQVALITATIS.

OMNIA, quæ dicta hactenus sunt de quinque generibus proportionũ rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda sunt quoque de quinque generibus correspondentibus minoris inæqualitatis, præmissa tamen semper præpositione (sub,) vt dictum est. Nam si in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correspondentes. Quemadmodum enim proportio 100. ad 1. est centupla, ita proportio 1. ad 100. est subcentupla. Sicut etiam proportio 11. ad 3. est tripla superbipartiens tertias, ita proportio 3. ad 11. est subtripla superbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.

NON videtur autem hoc loco prætermittenda insignis vtilitas tabulæ Pythagoricæ, quam cap. 4. nostræ Arithmeticæ construximus, in omnibus proportionibus rationalibus inuenientis: quæ eiusmodi est. Constructa tabula Pythagorica, (Est autem constructio facillima, cùm numeri in sinistro latere constituant seriem numerorum naturalem, in infinitumq; progredi possint; qualibet autem linea in transuersum procreetur ex continua additione numeri in sinistro latere, à quo incipit, ad seipsum, & ad numerum conflatum, & sic in infinitum:

infinitum: ita vt hæ lineæ in transuersum nil aliud sint, quàm progressiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentiæ sint primi numeri earundem linearum.) primùm omnes numeri cuiusuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in supremalinea acceptus ad vnitatem in sinistro latere habet primam eam proportionẽ multiplicem: Numeri autem sub eodem denominatore descendentes per lineam rectam ad numeros sub vnitate in latere sinistro positos, singuli ad singulos, habent secundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiusdem speciei, in infinitum. Vt prima proportio noncupla erit inter 9. supremæ lineæ ad 1. in sinistro latere; secunda inter 18. sub 9. ad 2. sub 1; tertia inter 27. eiusdem lineæ à 9. descendentis; & 3. in sinistro latere, &c. atque ita de aliis proportionibus multiplicibus dicendum est.

DEINDE *omnes numeri cuiusuis proportionis superparticularis sic inuenietur. Ad denominatorem partis aliquotæ, quæ in proportione exprimitur, in latere supremo acceptum habet proximè insequens numerus primam proportionem datam: Et si per lineam rectam ab hisce duobus numeris descẽdamus, reperiemus omnes alios numeros eiusdẽ proportionis, vt de multiplicibus dictum est. Verbi gratia, prima proportio sesquioctaua erit 9. ad 8. aliæ verò ordine erunt inter numeros sub illis positos, vt secunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.*

TERTIO *sic reperies omnes proportiones superpartientes cuiuslibet speciei. Post denominatorem partium aliquotarum, quarum in proportione data mentio fit, in supremo latere acceptũ numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorẽ earundem partium habebit primam proportionem superpartientem propositam. Secunda autem, tertia, quarta, & aliæ ordine, reperientur inter numeros sub illis duobus collocatos. Exempli causa, si quis omnes numeros proportionis superoctupartientis vndecimas desideret, sumat in latere supremo denominatorem partium, id est, 11. post quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. Vltimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem superoctupartientem vndecimas. Secundam habebit numerus 38. ad 22. tertiam. 57. ad 33. & alias alij numeri sub 19. & 11. per rectam lineam descripti.*

QVARTO *numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis inuenies hac ratione. In supremo latere accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ expressæ habeat proportionem multiplicem, cuius mentio fit. Numerus enim proximè insequens habebit ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem propositam: Secundam autem, tertiam, & alias habebunt numeri sub illis duobus positi. Vt autem scias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ habeat multiplicem proportionem propositam, sumendus est denominator partis in supremo latere, & in sinistro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in sinistro latere, & posterior in supremo.*

IN *angulo enim communi reperies numerum multiplicem, quem desideras. Exempli gratia. Inueniendi sint omnes numeri proportionis triplæ sesquiquintæ. Primùm quæratur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hoc est, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui est 3. & denominatoris partis aliquotæ, qui est 5. quorum alteruter in supremo latere, & alter in si-*

TABVLA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322

niſtro ſumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere ſupremo. Numerus enim 16. proximè inſequens ad denominatorem partis aliquotæ, id eſt, ad 5. habet primam proportionem triplam ſeſquiquintã. Alias proportiones eiuſdẽ ſpeciei reperies in numeris, q̃ ſub illis duobus ponuntur, vt de aliis dictũ eſt.

QVINTO, & vltimo, reperientur omnes numeri cuiuslibet proportionis multiplicis ſuperpartientis, hoc modo: In latere ſupremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propoſitam: qui quidem inuenietur quoque in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde poſt acceptum numerũ multiplicem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum ſit mentio. Vltimus namque ad denominatorẽ partium aliquotarũ comperietur habere primam datam proportionem multiplicem ſuperpartientem. Alias proportiones eiuſdem ſpeciei reperies ſub illa prima, vt de aliis diximus. Vt ſi cupiat quis omnes proportiones quadruplas ſupertripartientes quintas, Primùm inquirat numerum quadruplum denominatoris partium quintarum, qui eſt 5. Inueniet autem eum numerum eſſe 20. quippe qui in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui eſt 4. & denominatoris partium quintarum, qui eſt 5. deſcriptus ſit. Deinde poſt numerum hunc 20. inuẽtum numeret in ſupremo latere tres hos numeros, 21. 22. 23. quòd tres partes quintæ nominentur. Nam vltimus 23. ad 5. hoc eſt, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam ſupertripartientem quintas. Numeri aliarum proportionum eiuſdem ſpeciei continentur ſub duobus illis numeris, vt in aliis traditum eſt.

INVENTIS hac arte omnibus numeris cuiuslibet proportionis maioris inæqualitatis, ſi minores cum maioribus conferantur, inuenti quoq; erunt omnes numeri eiuſdem proportionis minoris inæqualitatis.

NEQVE verò ſilentio tranſiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cuiuslibet proportionis rationalis; quæ ſic ſe habet. Inuentis minimis, ſiue primis terminis, numerisue cuiuslibet proportionis, ſi conſtituatur progreſſio, ſeu proportionalitas Arithmetica, incipiens à numero, qui vna vnitate minor ſit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progrediens q̃ per ipſammet eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius proportionis tot numeri in ſerie naturali numerorum, quot vnitates ſunt in primo termino conſtitutæ tuæ proportionalitatis Arithmeticæ; Inter ſecundos verò, qui primorum dupli ſunt, tot, quot in ſecundo termino eiuſdem progreſſionis continentur vnitates; Inter tertios autem tot, quot vnitates in tertio termino eiuſdem progreſſionis continentur: at q̃ ita deinceps. Exempli gratia, ſi proponatur portio dupla, cuius minimi numeri ſunt 2. & 1. conſtituetur progreſſio incipiens ab 0. (quòd differentia inter 2. & 1. ſit 1. & figura 0. vna vnitate minor, quàm 1.) progrediens q̃ per continuam additionem vnitatis, nimirum differentiæ inter 2. & 1. primùm ad 0. deinde ad conflatum numerum 1. Poſtea ad numerum confectum 2. &c. hoc ſcilicet modo: 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. &c. Ita q̃ inter primos numeros duplæ proportionis, hoc eſt, inter 2. & 1. nullus cadit medius numerus; Inter ſecundos, quo ſunt 4. & 2. cadet vnus medius, nimirum 3. Inter tertios 6. 3. duo medij intercipiuntur 5. 4. Inter quartos 8. 4. tres medij exiſtunt, 7. 6. 5. & ſic deinceps. Id quod in hac formula apparet, vbi numeri extremi cuiuslibet lineæ habent proportiones omnes duplas, vt primam, ſecundam, tertiam, &c. Multitudines autẽ numerorum ſeriei naturalis inter eos cadentium reſpondent numeris ſuperioris proportionalitatis Arithmeticæ.

								2.	1.										
							4.	3.	2.										
						6.	5.	4.	3.										
					8.	7.	6.	5.	4.										
				10.	9.	8.	7.	6.	5.										
			12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.										
		14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.										
	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.										
18.	17.	16.	15.	14.	13.	12	11.	10.	9.										
20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.									

QVOD ſi ſuperiori proportionalitati Arithmeticæ ſuperponas ſeriem naturalem numerorum, quæ ab 2. incipiat, ita vt ſinguli eius termini ſingulis terminis conſtitutæ tuæ Arithmeticæ proportionalitatis reſpondeant, dicto citius cognoſcemus, quotnam numeri cadant medij inter quoſuis duos numeros proportionis duplæ. Numeri enim ſeriei huius naturalis indicabunt, quem locum duo numeri duplæ proportionis obtinent, reſpondentes verò numeri in proportionalitate Arithmetica conſtituta multitudinem numerorum inter illos cadentium ſignificabunt. Exemplum hic vides.

Ordo proportionum duplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	*&c.*
Multitudo mediorũ numerorũ.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*&c.*

Itaque

Itaq; si scire cupias, quot numeri cadant inter vndecimos numeros proportionis duplæ, cape in serie naturali numerum 11. cui supponitur numerus 10. Dico ergo 10. numeros inter illos intercipi, & sic de cæteris.

PROPONATVR *deinde proportio decupla, cuius termini minimi sunt 10. & 1. Differentia eorũ est 9. & numerus vna vnitate minor, 8. Progressio ergo Arithmetica incipiet ab 8. progredieturq; per continuam additionem 9. primùm ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & sic deinceps; vt hic videre licet, vbi suprà scripsimus etiam seriem numerorum naturalem, cuius idem vsus hic est, qui suprà fuit in proportione dupla.*

Ordo proportionum decuplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	*&c.*
Multitudo mediorũ numerorum.	8	17	26	35	44	53	62	71	*&c.*

Itaque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8. numeri medij; Et 17. inter secundos: Et 26. inter tertios. At inter octauos intercipientur 71. numeri medij. & sic de cæteris. Vt hæc formula declarat.

						10	9	8	7	6	5	4	3	2	1			
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

RVRSVS *detur proportio quæcunque superparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt sola vnitate, quemadmodum & minimi numeri proportionis duplæ, inseruient hic eadem progressiones, quæ in dupla proportione, ita vt idem numerus sit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perspicuum est in proportione sesquioctaua.*

Ordo proportionis sesquioctauæ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	*&c.*
Multitudo medior. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*&c.*

								9.		8.								
							18.		17.		16.							
						27.		26.		25.		24.						
					36.		35.		34.		33.		32.					
				45.		44.		43.		42.		41.		40.				
			54.		53.		52.		51.		50.		49.		48.			
		63.		62.		61.		60.		59.		58.		57.		56.		

OFFERATVR *quoque proportio superquadrupartiens septimas, cuius minimi termini sunt 11. & 7. Differentia eorum est 4. Progressio ergo Arithmetica incipiet à 3. progredieturq; per 4. vt hic patet, vnà cum serie naturali ei superimposita.*

Ordo proport. superquadr. sept.	1	2	3	4	5	6	7	8	*&c.*
Multitudo medior. numerorũ.	3	7	11	15	19	23	27	31	*&c.*

IGITVR *inter primos numeros proportionis superquadrupartientis septimas comprehenduntur 3. numeri medij. Et 7. inter secundos: Et 23. inter sextos, atq; ita de cæteris, vt hic vides.*

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |

búntque eius numeri differentiam 5. veluti hic manifestum est, vnà cum numerorum naturali serie.

Ordo propor. dupl. superbip. tertias.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*&c.*
Multitudo mediorum numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39	44	*&c.*

Cadent ergo inter duos primos numeros proportionis duplæ superbipartientis tertias, 4. numeri medij, & inter secundos, 9. & inter septimos, 34. &c. vt hic perspicuum est.

									8.	7.	6.	5.	4.	3.											
								16.	15	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.							
						24.	23.	22.	21.	20.	19.	18.	17.	16.	15	14	13.	12.	11.	10.	9.				
32.	31.	30.	29.	28.	27.	26.	25	24.	23.	22.	21.	20	19.	18.	17.	16.	15	14	13.	12.					

MANIFESTVM autem est, quod de proportionibus maioris inæqualitatis hoc loco diximus, verum quoque esse de minoris inæqualitatis proportionibus, cùm ijdem numeri inter maiorem numerum ac minorem, & inter minorem, ac maiorem interijciantur.

CAETERVM ex iis, quæ de quinq; speciebus proportionis rationalis tam maioris, quàm minoris inæqualitatis diximus, perspicuè colligitur, non posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quàm quinq; iam exposita. Cum enim, vt Euclides demonstrat propos. 5. lib. 10. commensurabiles quantitates quæcunq;, inter quas, vt diximus, est proportio rationalis, inter se proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, vt omnis proportio rationalis quarumcunq; quantitatum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfectè; qua ratione constituitur proportio multiplex: Aut semel tantummodo, ac præterea vnam eius partem aliquotam; & sic habetur proportio superparticularis: Aut semel duntaxat, & insuper plures partes eius aliquotas non facientes vnam; & conficitur proportio superpartiens: Aut aliquoties, & vnam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex superparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes vnã; & exurgit proportio multiplex superpartiens. Neq; verò alio modo maior quantitas minorem continere, aut minor quantitas à maiore contineri potest. Eadem ratione constat, totidem esse genera proportionis minoris inæqualitatis. Rectè ergo proportionem rationalem tũ maioris inæqualitatis, tũ minoris, in quinq; genera, quæ exposuimus, partiti sumus.

DE PROPORTIONVM RATIONALIVM DENOMINATORIBVS.

QVONIAM verò non exiguus est vsus Denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus exposuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibusnam numeris singulæ proportiones denominentur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distinctè, & apertè habitudinem vnius quãtitatis ad alteram. Vt denominator proportionis octuplæ est 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ, continere minorem octies. Similiter denominator proportionis sesquiquintæ est $1\frac{1}{5}$; quoniam iste numerus significat, maiorem quantitatem proportionis sesquiquintæ, continere minorem semel, & quintam eiusdem partem. Atq; ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum est, vt arbitror, quòd Euclides in lib. 6. & plerique alij Mathematici, appellent denominatorem cuiusuis proportionis, quantitatem illius; quia denominator, vt diximus, ostendit, quanta sit vna quantitas ad alteram, cum qua confertur, vt ex propositis exemplis constat.

EX iis autem, quæ diximus, facile colligi potest denominator cuiusq; proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quæcunq; ea sit, est numerus integer tot continens vnitates, quoties maior quantitas minorem continere dicitur in ea proportione, cuius denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator est 2. Noncuplæ, 9. Centuplæ, 100. miliecuplæ, 1000 &c. Denominatores autem proportionum submultiplicium multiplicibus correspondentium, sunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus respõdent, denominatæ. Vt denominator proportionis subduplæ, est $\frac{1}{2}$; subquintuplæ, $\frac{1}{5}$. subnoncuplæ, $\frac{1}{9}$: subcentuplæ, $\frac{1}{100}$: submillecuplæ, $\frac{1}{1000}$. Eodem modo denominatores aliarum proportionum submultiplicium reperiemus. Itaq; denominator cuiuscunq; proportionis submultiplicis

riplicis est numerus fractus, cuius numerator perpetuò est vnitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, vt ex prolatis exemplis patet. Neq; verò vlla difficultas est in cuiusq; proportionis multiplicis, vel submultiplicis denominatore reperiendo, si ea quæ dicta sunt, rectè intelligantur: quippe cum ipsa prolatio proportionis denominatorem offerat, vt ex datis exemplis manifestum est.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis superparticularis est vnitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet vltra minorem comprehendere. Vt proportionis sesquialteræ denominator est $1\frac{1}{2}$; *sesquioctauæ,* $1\frac{1}{8}$; *sesquimillesimæ,* $1\frac{1}{1000}$, *&c. Neq; difficile erit denominatorem cuiusq; proportionis superparticularis inuenire; cum ipsa proportionis prolatio denominatorem exprimat per suam partem aliquotam, vt ex datis exemplis perspicuum est. Denominatores autem proportionum subsuperparticularium correspondentium, sunt fractiones, quarum numeratores vna tantum vnitate minores sunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis subsesquialteræ, est* $\frac{2}{3}$; *subsesquioctauæ,* $\frac{8}{9}$; *subsesquimillesimæ,* $\frac{1000}{1001}$; *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ in proportione expressæ, & pro eiusdem fractionis denominatore, numerus vnitate maior. Vt denominator proportionis subsesquidecimæ, est* $\frac{10}{11}$. *cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem eiusdem fractionis numeratorem superet vnitate, &c. Reperiemus quoq; denominatorem cuiusuis proportionis subsuperparticularis hoc modo. Denominatorem correspondentis proportionis superparticularis reuocabimus ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator superabit hic semper vna vnitate denominatorem, qui etiam denominator est partis aliquotæ, cuius mentio fit in oblata proportione. Nam si huius fractionis terminos inuertamus, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, habebimus denominatorem propositæ proportionis subsuperparticularis. Vt si offeratur proportio subsesquiseptima: quoniam denominator proportionis sesquiseptimæ, quæ illi respondet, est* $1\frac{1}{7}$. *qui reuocatur ad hanc fractionem* $\frac{8}{7}$. *cuius numerator vna vnitate maior est, quàm denominator partis aliquotæ. Quare si eam fractionem inuertamus hoc modo* $\frac{7}{8}$. *dicemus denominatorem proportionis subsesquiseptimæ esse* $\frac{7}{8}$. *Facilius deniq; cuiusuis proportionis subsuperparticularis denominator fortassis reperietur, si inueniantur primi numeri habentes proportionem superparticularem respondentem, vt suprà docuimus. Nam fractio, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator verò maior, erit denominator propositæ proportionis. Vt si proponatur proportio subsesquiseptima: quoniam primi, siue minimi numeri habentes proportionem sesquiseptimam, sunt 8. & 7 si ex minore fiat numerator, & ex maiore denominator, conficiemus hanc fractionem* $\frac{7}{8}$. *pro denominatore proportionis subsesquiseptimæ propositæ, vt prius.*

DENOMINATOR cuiusuis proportionis superpartientis est vnitas cum illis partibus aliquotis non efficientibus vnam, quas maior quantitas debet vltra minorem continere. Vt denominator proportionis supertripartientis septimas est $1\frac{3}{7}$; *supertripartientis vigesimas,* $1\frac{3}{20}$. *&c. Neq; vlla difficultas est in huiusmodi denominatoribus inueniendis: propterea quòd prolatio ipsa proportionis denominatorem proprium exhibet, vt ex superioribus exemplis liquidò constat. Denominatores autem proportionum subsuperpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores tot vnitatibus minores sunt, quàm earundem fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem superat. Vt denominator proportionis subsupertripartientis septimas, est* $\frac{7}{10}$; *subsupertripartientis vigesimas,* $\frac{20}{23}$; *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quæ in proportione exprimuntur, cui si addatur numerus earundem partium, habebitur eiusdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis subsuperquadripartientis vndecimas, est* $\frac{11}{15}$, *cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partes vndecimas, nimirum 11. cui additus est numerus 4. quatuor partium, vt fiat eiusdem fractionis denominator 15. Denominator autem proportionis subsupertripartientis quintas est hæc fractio,* $\frac{5}{8}$. *Nam eius numerator est numerus denominans partes quintas, nimirum 5. Denominator autem 8. eiusdem fractionis conflatus est ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademq; ratione reperiemus & aliarũ proportionum subsuperpartientium denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Res-*

uoca denominatorem proportionis cuiuſque ſuperpartientis correſpondentis ad vnã fractionem, vt in Arithmetica odcuimus; cuius quidem numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expreſſas denominat, ſuperabit hic ſemper tot vnitatibus, quot ſunt partes aliquotæ. Nam huius fractionis numeri inuerſi, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, dabunt denominatorem propoſitæ propoſitionis ſubſuperpartientis. Vt denominator proportionis ſubſuperdecupartiẽtis decimastertias eſt $\frac{1}{2}\frac{3}{3}$. *quia denominator proportionis ſuperdecupartientis decimastertias eſt* $1\frac{10}{13}$. *qui ad hãc fractionem* $\frac{23}{13}$. *reuocatur, cuius numeri inuerſi efficiunt hanc fractionem* $\frac{13}{23}$. *Denique facilius cuiuſuis proportionis ſubſuperpartientis denominator inuenietur fortaſſis, ſi reperiantur primi vel minimi numeri habentes proportionem ſuperpartientem correſpondentem, vt ſuprà tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator ſit eorũ numerorum minor, denominator autẽ maior, denominator erit propoſitæ proportionis ſubſuperpartientis. Veluti ſi proponatur proportio ſubſuperquadrupartiens nonas: quoniam minimi numeri habentes proportionem ſuperquadrupartientem nonas, ſunt 13. & 9. faciemus fractionem* $\frac{9}{13}$. *pro denominatore proportionis ſubſuperquadrupartientis nonas: & ſic de cæteris.*

DENOMINATOR *cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperparticularis eſt numerus integer multiplicem proportionem expreſſam denominãs, cum illa parte aliquota, quam maior quantitas continere debet vltra minorem quantitatem. Vt denominator proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ, eſt* $3\frac{1}{7}$. *Quintuplæ ſeſquinonæ,* $5\frac{1}{9}$, *&c. Vt nullus omnino labor ſit, exhibere denominatorem cuiuslibet proportionis multiplicis ſuperparticularis; quippe cùm ipſa prolatio proportionis diſtinctè exprimat & denominatorem multiplicis proportionis, & partem aliquotam, vt exempla propoſita declarant. Denominatores autem proportionum ſubmultiplicium ſuperparticularium, ſunt fractiones, quarum numeratores numeri ſunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expreſſis. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, eſt* $\frac{7}{22}$; *ſubquintuplæ ſeſquinonæ,* $\frac{9}{40}$, *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ: qui ſi multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis, addaturq; vnitas numero producto, habebitur denominator eiuſdem fractionis. Vt denominator proportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ, eſt* $\frac{6}{25}$; *cùm huius fractionis numerator 6. denominet partes ſextas, iſq; ductus ſit in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, ac producto numero 24. addita vnitas, vt eiuſdem fractionis denominator conficiatur 25. &c. Iidem denominatores proportionum ſubmultiplicium ſuperparticularium inuenientur, ſi denominator cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperparticularis reſpondentis reuocetur ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus, multiplicando nimirum denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero vnitatem, id eſt, numeratorem eiuſdem fractionis addendo. Nam ſi huius fractionis termini commutent ordinem inter ſe, fiet denominator proportionis propoſitæ. Vt ſi detur proportio ſubquadrupla ſeſquiſexta: quoniam denominator correſpondentis proportionis quadruplæ ſeſquiſextæ eſt* $4\frac{1}{6}$. *ducemus 4. id eſt, denominatorem multiplicis proportionis, in 6. hoc eſt, in denominatorem fractionis adhærentis, numeroq; producto 24. addemus 1. nimirum numeratorem eiuſdem fractionis, vt totum denominatorem* $4\frac{1}{6}$. *reuocemus ad fractionem* $\frac{25}{6}$. *Cuius termini ſi inter ſe ordinem permutent, fiet hæc fractio* $\frac{6}{25}$. *pro denominatore proportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ. Eodemque modo in cæteris agendum erit. Denique facilius fortaſſe denominatorem cuiuſque proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis inuenies, ſi duos primos, minimósve numeros proportionis multiplicis ſuperparticularis correſpondentis reperias, vt ſuprà traditum eſt. Nam fractio, cuius numerator ſit minor eorum numerus, denominator autem maior, erit denominator proportionis propoſitæ. Vt ſi offeratur proportio ſubtripla ſeſquiſeptima: quoniam primi ſiue minimi numeri proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ ſunt 22. & 7. fiet ex illis fractio hæc* $\frac{7}{22}$. *pro denominatore proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, atq; ita de cæteris.*

DENOMINATOR *cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperpartientis, eſt numerus integer denominans proportionem multiplicem in ea expreſſam, cum illis partibus aliquotis, non conſtituentibus vnam, quas maior quantitas vltra minorem debet comprehendere. Vt denominator proportionis triplæ ſuperquincupartientis octauas, eſt* $3\frac{5}{8}$; *quadruplæ ſuperbipartiẽtis quin-*

tis quin-

tis quintas, $4\frac{2}{5}$. &c. Nihil enim difficultatis habet hæc inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus ſuperpartientibus, quòd apertè & diſtinctè in qualibet earum exprimatur tam denominator proportionis multiplicis in ea contenta, quàm partes aliquotæ, vt perſpicuè in exemplis prolatis apparet. Denominatores verò proportionum ſubmultiplicium ſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores numeri ſunt denominantes partes aliquotas, quæ in proportionibus expreſſæ ſunt. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſuperquincupartientis octauas, eſt $\frac{8}{29}$; ſubquadruplæ ſuperbipartientis quintas, $\frac{5}{12}$, &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partium aliquotarum: quem ſi multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroq; producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis eiuſdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis ſubduplæ ſuperoctupartientis decimaſtertias, eſt $\frac{13}{34}$; quia huius fractionis numerator 13. denominat partes tertias decimas: qui ſi ducatur in 2. denominatorem duplæ proportionis, producto q; numero 26. adiiciatur numerus 8. octo partiũ, conficietur eiuſdẽ fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quoq; cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis ſic reperies. Reduc denominatorem proportionis multiplicis ſuperpartientis, quæ propoſitæ reſpondet, ad vnam fractionem, vt in Arithmetica præcepimus, nimirum multiplicando denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærẽtis, & producto numero addendo numeratorem eiuſdem fractionis. Nam huius fractionis termini, ſi inter ſe permutent ordinem, dabunt fractionem, quæ denominator erit proportionis ſubmultiplicis ſuperpartiẽtis. Velut ſi proponatur proportio ſubquintupla ſupertripartiens decimas, reducemus denominatorem correſpondentis proportionis quintuplæ ſupertripartiẽtis decimas, hoc eſt, $5\frac{3}{10}$. ad hanc fractionem $\frac{53}{10}$. quod fit ducendo 5. in 10. producto q; numero addendo 3. vt fiat numerator 53. cui idem denominator 10. ſupponendus eſt. Nam ſi hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis ſubquintuplæ ſupertripartientis decimas, $\frac{10}{53}$. &c. Sed forſitan facilius denominatorem cuiuſuis proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis obtinebis, ſi primos, ſiue minimos numeros proportionis multiplicis ſuperpartientis reſpondentis reperias, ex eisq; fractionem conſtituas, ſumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Fractio enim hæc dabit denominatorem proportionis propoſitæ. Vt ſi proponatur proportio ſubquintupla ſupertripartiens decimas: quoniam minimi numeri in proportione quintupla ſupertripartiente decimas ſunt 53. & 10. conſtituetur ex eis denominator proportionis propoſitæ hæc fractio $\frac{10}{53}$. & ſic de cæteris.

DENOMINATOR denique proportionis æqualitatis perpetuò eſt vnitas: quia vna quantitas debet in ea proportione eſſe æqualis alteri, ac proinde vna alteram continere ſemel, & nihil præterea: quod quidem vnitas ſignificat.

EX his, quæ de proportionum denominatoribus diximus, perſpicuum eſſe puto, denominatores proportionũ maioris inæqualitatis re & nomine ipſas proportiones maioris inæqualitatis denominare; denominatores verò proportionum minoris inæqualitatis re tantùm, non autem & verbo, ſiue nomine denominare proportiones minoris inæqualitatis. Id quod ex prolatis exemplis liquidò conſtat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis triplæ ſuperquadrupartientis nonas, qui eſt $3\frac{4}{9}$. hoc eſt, tria integra, & quatuor nonæ partes, re & verbo denominat eam proportionem, cùm diſtinctè, aperteq; nobis indicet, in ea maiorem quantitatem continere minorem ter, & inſuper quatuor eius partes nonas. At verò denominator correſpondentis proportionis ſubtriplæ ſuperquadrupartientis nonas, nimirum $\frac{9}{31}$. id eſt, nouem trigeſimaprimæ partes, re quidem ipſa proportionem ſubtriplam ſuperquadrupartientem nonas denominat, cùm verè ſignificet, minorẽ quantitatem in ea eſſe maioris nouem partes trigeſimas primas, quod omnino neceſſarium eſt, vt minor quantitas ad maiorem habeat proportionem ſubtriplam ſuperquadrupartientem nonas: Verbo autem, ſiue nomine, eam proportionem nequaquam denominat; quippe cùm $\frac{9}{31}$. hoc eſt, nouem partes trigeſimæprimæ cum nomine proportionis ſubtriplæ ſuperquadrupartientis nonas nihil videantur habere commune, ſed penitus ab eo diſcrepare.

QVARE ſi denominator alicuius proportionis minoris inæqualitatis numeris expreſſius ſit, nimirum per fractionem, vt dictum eſt; vt ſcias, quo pacto proportionem, quam denominat, efferre debeas, vide quam proportionem habeat denominator eius fractionis ad numeratorem: quod ſcies, ſi partiaris denominatorem fractionis per numeratorẽ. Nam Quotiens denominabit proportionem, quam denominator fractionis habet ad numeratorẽ. Eodem enim nomine proportionẽ dati denominatoris, proportionis minoris inæqualitatis pronunciabis, præpoſita tantũ ſyllaba, ſub, quo illa denominatoris fractionis ad numeratorem appellatur. Vt ſi detur

denominator $\frac{1}{8}$. dicetur eius proportio ſuboctupla. Quando enim numerator fractionis eſt vnitas, proportio dati denominatoris erit ſubmultiplex ab eiuſdem fractionis denominatore denominata. Quòd ſi datus denominator ſit, $\frac{2\,0}{3\,2\,7}$. Diuiſo denominatore 327. per numeratorem 20. ſit Quotiens $16\frac{7}{2\,0}$. Denominator igitur fractionis $\frac{2\,0}{3\,2\,7}$. ad numeratorem habet proportionem ſedecuplam ſuperſeptupartientem vigeſimas: ac proinde proportio cuius denominator eſt $\frac{2\,0}{3\,2\,7}$. dicenda eſt ſubſedecupla ſuperſeptupartiens vigeſimas, & ſic de cæteris.

Quia verò nõ ſemper commodè omnes proportiones propriis nominibus appellari poſſunt, (quis enim proportionem, verbi gratia, 37. ad 1. commode dixerit triginta ſeptuplam, vel trigecuplam ſeptuplam, vel alio id genus nomine? Quis item commodè proportionem 48. ad 29. dixerit ſupernouemdecupartientem vigeſimasnonas? &c.) ſolent Geometræ plerunque in ſuis ſcriptis exprimere proportionem quamcunque per primos, ſiue minimos numeros eius proportionis. Vt proportionẽ 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quàm tredecuplam. Et vicißim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quàm ſubtredecuplam. Ita quoque proportionem 52. ad 40. vocant proportionem 13. ad 10. quæ aliàs diceretur ſupertripartiens decimas. Proportionem verò 40. ad 52. appellant eam, quæ eſt 10. ad 13. quæ proprio nomine diceretur ſubſupertripartiens decimas, & ſic de aliis.

QVANQVAM autem proportio qualibet exprimi poſſit per minimos eius numeros, vt diximus: per neceſſaria tamen eſt cognitio denominatoris eiuſdem proportionis, vt habitudinem vnius numeri ad alterum cognoſcamus. Nam etiamſi aliquis proportionem numeri 1700. ad 400. dicat eſſe eam, quæ eſt numeri 17. ad 4. non intelligam tamen planè, quænam ſit illa proportio, niſi eius denominatorem cognouero, qui eſt $4\frac{1}{4}$. Hic enim manifeſtè declarat, maiorem numerum continere minorem quater, & inſuper quartam eius partem. Atque hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quàm ex numeris non minimis. Quòd ſi quando minimi numeri alicuius proportionis ſint ita magni, vt denominator ex illis non facilè poſſit intelligi, recurrendum erit ad præceptum, quod mox ſubiungam, & ex quo denominator proportionis inter quoſuis duos numeros, ſiue minimi ij ſint, ſiue non, notus efficitur.

QVOD ſi proportionem quamcunque per eius numeros minimos efferunt Mathematici, licebit nobis multò commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem, ita vt proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator eſt 5. Item proportionem 48. ad 38. eam, cuius denominator eſt $1\frac{5}{19}$. quæ dicenda eſſet ſuperquintupartiens decimasnonas. Sic etiam proportio 20. ad 100. dici poteſt ea, quæ habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 38. ad 48. ea, cuius denominator eſt $\frac{1\,9}{2\,4}$. atque ita de reliquis: quoniam videlicet denominator clariſſimè demonſtrat habitudinem vnius numeri ad alium, vt dictum eſt.

DENOMINATOR porrò proportionis inter duos quoſuis numeros ita reperietur. Diuidatur numerus antecedens, qui nimirum ad alium refertur, per conſequentem. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, ſi qua adſit, ad minimos numeros, vt in Arithmetica tradidimus, erit eius proportionis denominator. Veluti propoſita proportione 39. ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem eius eſſe 3. Quotientem videlicet numerum diuiſionis 39. per 3. vel 390. per 30. Quòd ſi viciſſim conferantur 3. cum 39. vel vel 30. cum 390. erit quotiens diuiſionis fractio hæc $\frac{3}{3\,9}$. vel $\frac{3\,0}{3\,9\,0}$. Nam quando minor numerus per maiorẽ diuiditur, Quotiens ſemper eſt fractio, cuius numerator eſt minor numerus, & denominator, maior, vt in Arithmeticis explicauimus. Et quia vtraque fractio, ſi eius numeri ad minimos reuocentur, reducitur ad hãc $\frac{1}{1\,3}$. dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39. vel 30. ad 390. eſſe $\frac{1}{1\,3}$. Rurſus data proportione 52. ad 40. ex diuiſione 52. per 40. ſit Quotiens $1\frac{2}{4\,0}$. cuius fractio reducitur ad hanc $\frac{3}{1\,0}$. Igitur denominator proportionis 52. ad 40. erit $1\frac{3}{1\,0}$. Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inuenietur denominator, ſiue Quotiens $\frac{4}{5}\frac{0}{2}$. hoc eſt, in minimis numeris, $\frac{1\,0}{1\,3}$. Præterea proportio 100. ad 20. denominatorem habebit 5. Diuiſis enim 100. per 20. Quotiens eſt 5. Proportionis verò 20. ad 100. denominator erit $\frac{1}{5}$. propterea quòd diuiſis 20. per 100. Quotiens eſt $\frac{2\,0}{1\,0\,0}$. id eſt, in minimis numeris, $\frac{1}{5}$. Denique denominator proportionis 48. ad 10. erit $4\frac{4}{5}$. quòd diuiſis 48. per 10. Quotiens ſit $4\frac{8}{1\,0}$. hoc eſt, in numeris minimis, $4\frac{4}{5}$. At denominator proportionis 10. ad 48. erit $\frac{1\,0}{4\,8}$. id eſt, in minimis numeris $5\frac{5}{2\,4}$. Et quia denominator fractionis $\frac{5}{2\,4}$. ad numeratorem habet proportionem quadruplam ſuperquadrupartientem quintas, (quòd diuiſis 24. per 5. Quotiens fiat $4\frac{4}{5}$.) appellabitur proportio 10. ad 48. ſubquadrupla ſuperquadrupartiens quintas. Vt enim ritè efferatur proportio minoris inæqualitatis, denominanda prius eſt proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, vt ſuprà diximus.

INVENTO denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, vt dictum eſt, eoq; reducto ad vnam fractionem, vt in Arithmetica traditum eſt, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter quos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportione, quando nimirum denominator inuentus non habet annexam fractionem, erit denominator inuentus, & vnitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. eſt $2\frac{9}{1\,0}$. ſi reducatur ad hãc vnam fractionem, $\frac{2\,9}{1\,0}$. (quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorẽ fractionis 10. productoq; numero eiuſdem fractionis numeratorem 9. addendo.) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Sic etiam, quia denominator porportionis 824. ad 1133. eſt $\frac{8}{1\,1}$. erunt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133. Item quia denominator proportionis 84. ad 12. eſt 7. erunt in ea proportione minimi nũ

minimi numeri 7. & 1. Viciſſim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cuius denominator eſt $\frac{1}{7}$. erunt 1. & 7. Ita q3 propoſitis duobus numeris quibuſcunq3, ſi quærantur minimi numeri, eandem quam illi habentes proportionem, inueniendus erit denominator proportionis eorum, vt dictum eſt, is q́ ad vnum fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator & denominator, erunt minimi numeri quæſiti. Vt ſi quærantur minimi numeri proportionis, quam habent 400. ad 90. Diuiſo antecedente per conſequentē terminum, fit Quotiens $4\frac{4}{9}$. in minimis numeris. Quo reuocato ad hanc fractionem $\frac{40}{9}$. dicemus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. eſſe 40. & 9. Eademq3 ratio eſt de cæteris.

IAM verò ſi, propoſitis duabus proportionibus, cognoſcere velis, vtrum earū maior ſit, vel minor, dices eam maiorē eſſe, cuius denominator maior eſt: minorē verò eam, cuius denominator eſt minor. Quòd ſi denominatores ſint æquales, proportiones quoq3 æquales eſſe pronunciabis. Vt ſi proponātur duæ hæ proportiones, ſuperoctupartiens decimasquintas, & ſuperdecupartiens decimasſeptimas, quarū denominatores ſunt $1\frac{8}{15}$. & $1\frac{10}{17}$. dices priorē poſteriore eſſe minorem: quia denominator $1\frac{8}{15}$. minor eſt denominatore $1\frac{10}{17}$. Qua verò arte cognoſcas, vtra duarū fractionū maior ſit, vel minor, an verò æquales ſint, tradidimus in Arithmetica. Eadem ratione, ſi offerantur duæ proportiones, quarū denominatores ſint $10\frac{1}{1000}$. $9\frac{1}{101}$. dicemus priorem eſſe maiorem. Quanquam enim fractio $\frac{1}{1000}$. minor ſit fractione $\frac{100}{101}$. numerus tamē integer 10. integro numero 9. maior eſt. Sic ſi dentur duæ proportiones, vna 17. ad 11. altera 18. ad 12. dices illam hac eſſe maiorem, quia illius denominator $1\frac{6}{11}$. maior eſt huius denominatore $1\frac{1}{2}$. Cæterū, quādo duæ proportiones proponuntur in numeris, dignoſcemus facilè, vtra earū ſit maior, etiamſi earū denominatores non inquiramus, hac ratione: Multiplicto antecedente termino prioris proportionis in terminū conſequentem poſterioris, & termino antecedente poſterioris in conſequentē terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminus maiorem numerum produxerit, illa proportio maior eſt: Et ſi duo æquales numeri geniti fuerint, proportiones inter ſe æquales erunt. Vt ſi proponantur duæ proportiones 17. ad 11. & 18. ad 12. comperiemus priorē maiorem eſſe, quia illius antecedens 17. in huius conſequentem 12. ductus procreat 204. at antecedens huius 18. in conſequentē illius 11. producit tantummodò 198. Rurſus ſi dentur duæ proportiones 18. ad 12. & 108. ad 72. producetur idem numerus 1296. tam ex prioris antecedente 18. in poſterioris conſequētem 72. q́ ex antecedente poſterioris 108. in conſequentem prioris 12. multiplicato. Quare proportiones ipſæ æquales inter ſe erunt. Ratio huiuſce operationis eſt: quia hac ratione, propoſitis quatuor numeris, multiplicātur inter ſe tam extremi duo, quàm duo intermedij, vt in datis exemplis patet. Igitur ſi procreentur numeri æquales, erit eadem proportio primi ad ſecundum, quæ tertij ad quartum, vt ab Euclide demonſtratur lib. 7. propoſ. 19. Hinc fit, ſi primus in quartum producat maiorem numerum, quàm ſecundus in tertium, maiorē eſſe primum, quàm vt eandem habere poſſit proportionem ad ſecundum, quàm tertius ad quartum: quandoquidem minor eſſe deberet, vt eundem numerum poſſet producere, ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquā duo numeri in quacunque proportione, ſiue ij primi ſint, ſiue non, hos ergo, vt inueniamus, multiplicabimus quemcunque numerum aſſumptum, vel diuidemus per propoſita proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad aſſumptum, qui multiplicatus eſt, vel aſſumptus, qui diuiſus eſt, ad Quotientem habebit proportionem propoſitam. Verbi gratia, ſi ſint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, ducemus quemcunque numerum, vt 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. diuidemus per denominatorem 5. Nam diuiſus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoque datam proportionem quintuplam. Ita quoque ſi inueniendi ſint duo numeri in proportione dupla ſeſquitertia, cuius denominator eſt $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemuis numerum, vt 24. per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habet proportionem denominatam à $2\frac{1}{3}$. Item ſi numerum 24. diuidamus per $2\frac{1}{3}$. habebit diuiſus numerus 24. ad Quotientem $10\frac{2}{7}$. proportionem datam duplam ſeſquitertiam. Sed vt fractiones vitentur, ſiquidem per multiplicationem rem expedire lubet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur à denominatore partis aliquotæ, vel pluriū partium, quarū in proportione fit mentio: In proportione tamē multiplici, quia nullius partis fit mentio, aſſumi poteſt quilibet numerus. Vt ſi deſiderentur duo numeri proportionis triplæ ſuperbipartientis nonas, accipiendus erit numerus à 9. numeratus; qualis eſt 18. vel 27. 36. 45. &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{9}$. gignet numerum integrum: vt ductis 45. in $3\frac{2}{9}$. fit numerus 145. qui ad aſſumptum numerum 45. proportionem habet datam. Sic etiam ſi cupiat quis proportionem ſubquadruplam, cuius denominator eſt $\frac{1}{4}$. ſumendus erit numerus à 4. numeratus, vt 12. Hic enim ductus in denominatorem $\frac{1}{4}$. producet 3. numerum integrum, qui ad aſſumptum 12. habet proportionem ſubquadruplam. Si verò per diuiſionem agendum ſit, & fractiones vitandæ, ſumendus erit in proportione multiplici numerus à denominatore proportionis numeratus. In aliis autem proportionibus, reuocandus erit denominator proportionis ad vnam fractionem, numerus q́ ſumendus à numeratore numeratus. Vt ſi quæratur proportio quintupla, ſumendus erit, verbi gratia, numerus 30. à 5. numeratus. Hic enim diuiſus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionem habet quintuplam. Si autem deſideretur proportio, cuius denominator ſit $4\frac{3}{7}$. reuocato eo ad fractionem $\frac{31}{7}$. ſumendus erit numerus à 31. numeratus, vt 62. Nam hoc diuiſo per $\frac{31}{7}$. fit Quotiens 14. ad quē acceptus numerus 62. habet proportionem à $4\frac{3}{7}$. denominatam, nimirum quadruplam ſupertripartientē ſeptimas. Cæterùm ſi duo numeri proponantur;

cupiat q3 quis alios duos in eadem proportione reperire, ſatis erit, ſi vtrumque per quemuis numerum multiplicet, aut diuidat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propoſiti duo numeri. Item ſi propoſito quouis numero; inueniendus ſit alius, qui ad eum proportionem habeat datam vel ad quem is datam habeat proportionem, aſſequeris primùm, ſi propoſitum numerum per denominatorem proportionis multiplices: at ſecundum obtinebis, ſi eundem per denominatorem proportionis diuidas. Quòd ſi proportio detur in duobus numeris, proponatur q3 tertius quiſpiam numerus ſiquidem inueniendus ſit quartus, ad quem tertius datus eandem habeat proportionem, quam primus datus ad ſecundum: ſiquidem denominator proportionis duorum numerorum datorum notus eſt, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem. Quotiens enim numerus erit, quem quarimus. Vel certè, ſiue denominator cognitus ſit, ſiue non, multiplicandus erit tertius numerus per ſecundum datum: hoc eſt, per conſequentem terminum datæ proportionis, productus q3 numerus per primum, ſiue per antecedentem terminũ, diuidendus. Vt ſi dentur duo numeri 4. 7. quorum proportionis denominator eſt $\frac{4}{7}$. detur item tertius numerus 20. Diuide numerum 20. per denominatorem $\frac{4}{7}$. producetur q3 quartus numerus quæſitus 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per ſecundum 7. & productum numerum 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si verò inueniendus ſit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri: ſi quidem denominator notus eſt, ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem quæris. Vel ſiue notus ſit denominator, ſiue non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per ſecundum, id eſt, per conſequentem terminum, diuidendus. Vt datis eiſdem duobus numeris 4. 7. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{4}{7}$. denominatorem gigneturq3 quæſitus numerus $11\frac{3}{7}$. Vel duc tertium numerum 20. in primum 4. numerumq3 productum 80. partire per ſecundum 7. Nam ad tertium 20. habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$. eandem proportionem, quam 4. ad 7.

QVIA verò diximus, eam proportionem eſſe maiorem, cuius denominator maior eſt, ſit, vt in proportionibus multiplicibus detur minima, nimirum dupla, denominata à 2. nõ autem maxima: propterea quòd numerus 2. inter omnes denominatores proportionum multiplicium eſt minimus: maximus autem dari non poteſt, cùm numeri augeantur in infinitum. Efficitur quoq3, inter proportiones ſuperparticulares reperiri maximam, nimirum ſeſquialteram, denominatam à $1\frac{1}{2}$. non autem minimam: quia numerus $1\frac{1}{2}$. omnium denominatorum proportionum ſuperparticularium maximus eſt: minimus autem dari non poteſt cùm denominatores fractionum progredi poſſint in infinitum. Conſtat autem ex iis, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionem, cuius denominator maior eſt, minorem eſſe. ſi idem ſit numerator; fractionem autem, cuius denominator minor eſt, ſi idem ſit numerator, maiorem eſſe. Cùm ergo denominator 2. ſit omnium minimus, erit fractio $\frac{1}{2}$. omnium, quæ numeratorem habent 1. (quales ſunt fractiones denominatorum proportionum ſuperparticularium) maxima. Colligitur denique, in alijs proportionibus maioris inæqualitatis neque minimam poſſe dari, neque maximam. Quod intelligendum eſt de vltimis ſpeciebus. Nam ſi de vltimis ſpeciebus non ſit ſermo, erit ſuperbipartiens inter ſuperpartientes, minima: ſuperpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem ſuperparticulares maxima erit multiplex ſeſquialtera: minima verò, dupla ſuperparticularis. Inter multiplices denique ſuperpartientes maxima erit multiplex ſuperpartiens tertias; minima verò, dupla ſuperbipartiens. E contrario in proportionibus ſubmultiplicibus datur maxima, nimirum ſubdupla, non autem minima: In ſubſuperparticularibus autem reperitur minima, vt ſubſeſquialtera, non autem maxima: In aliis daniq3 proportionibus minoris inæqualitatis neq3 maxima, neq3 minima dari poteſt. Quæ omnia perſpicua erunt, ſi denominatores proportionum inter ſe conferantur.

COLLIGITVR etiam, hanc eſſe connexionem inter proportionem maioris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, vt qualibet proportio maioris inæqualitatis maior ſit proportione æqualitatis: qualibet verò proportio minoris inæqualitatis, minor: propterea quòd quilibet denominator proportionis maioris inæqualitatis, quantumuis minimus, maior eſt vnitate, quæ denominator eſt proportionis æqualitatis, cùm ille minor eſſe nequeat, quàm vnitas cum vna parte aliquota: At denominator proportionis minoris inæqualitatis ſemper minor eſt, quàm vnitas, cùm ſit fractio, cuius numerator à denominatore ſuperatur, vt ex iis, quæ ſuprà diximus, patet. Itaq3 proportio æqualitatis media eſt inter proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis, Vbi hoc animaduerſione dignũ eſt, Proportionẽ maioris inæqualitatis decreſcendo appropinquare ſemper magis ac magis in infinitum proportioni æqualitatis, nunquam tamen ad eam peruenire: E contrario verò proportionem minoris inæqualitatis creſcendo ſemper magis, ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem æqualitatis, nunquã tamen eam attingere. Nam qualibet proportione multiplici propoſita datur minor, ac minor, vſq3 ad duplam, quæ omnium multiplicium eſt minima. Deinde hac datur minor, nimirum ſuperparticularis, vel ſuperpartiens quæcunque: in qua cùm minima non poſsit dari; omnisq3 proportio eiuſmodi maior ſit proportione æqualitatis, liquidò conſtat, proportionẽ maioris inæqualitatis ad æqualitatis proportionem non poſſe peruenire, etiamſi in infinitum decreſcendo ad ipſam accedat. Rurſus cùm omnis proportio minoris inæqualitatis minor ſit proportione æqualitatis, non poſsit autem in ea reperiri maxima, manifeſtum quoq3 eſt, proportionem minoris inæqualitatis attingere non poſſe proportionem æqualitatis, licet in infinitum creſcendo ad eam accedat. Sed vt vtrumque exemplo etiam diſcatur;

ſciendum

ſciendum eſt, ſi inter duos numeros quoſuis non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior ſcilicet vno eorum, & altero minor; proportionem maioris numeri ad minorē diuiſam eſſe in duas minores, quarum vna eſt maioris numeri ad medium interpoſitum, altera verò numeri medij ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorem diuiſam eſſe in duas maiores, quarum vna eſt minoris numeri ad medium interpoſitum, altera verò medij ad maiorem. Vt ſi inter duos numeros 6.3. ponatur medius 4. hoc modo, 6.4.3. proportio 6. ad 3. quæ dupla eſt, diuiſa erit in ſeſquialteram 6. ad 4. & ſeſquitertiam 4. ad 3. quarum vtraq; minor eſt proportione dupla 6. ad 3. Contrà verò proportio 3. ad 6. quæ ſubdupla eſt, diuiſa erit in ſubſeſquitertiam 3. ad 4. & ſubſeſquialteram 4. ad 6. quarum vtraque maior eſt proportione ſubdupla 3. ad 6. Idem fit, ſi inter eoſdem numeros 6.3. interponatur medius 5. hoc modo, 6.5.3. Tam enim proportio 6. ad 5. ſeſquiquinta, quàm proportio ſuperbipartiens tertias 5. ad 3. minor eſt proportione dupla 6. ad 3. Contrà verò tam proportio ſubſuperbipartiens tertias 3. ad 5. quàm ſubſeſquiquinta 5. ad 6. maior eſt proportione ſubdupla 3. ad 6. Quæ omnia ex denominatoribus probari poſſunt. Verùm vtrumque demonſtrabitur hac ratione. Quoniam medius numerus minor eſt maiore dato, & maior minore, habebit maior datus ad minorem datū, maiorē proportionem, quàm idem maior ad medium, & quàm medius ad minorem. At verò minor ad maiorem habebit minorem proportionem, quàm idem minor ad medium, & quàm medius ad maiorem, vt manifeſtum eſt, vel ex defin. 20. lib. 7. vt ibidem explicabimus, vel ex propoſ. 8. huius lib. 5. vbi demonſtrat Euclides, propoſitis duabus quantitatibus inæqualibus, maioris ad tertiam aliquam eſſe maiorem proportionē, quàm minoris: At è contrario, tertiam eandem quantitatem ad minorem habere maiorem proportionem, quàm ad maiorem. Ex quo ſequitur id, quod diximus: nimirum poſitis his tribus numeris 6 4.3. maiorem eſſe proportionem eiuſdem numeri 6. ad minorem 3. quàm ad medium 4. maiorem: Item maiorem eſſe proportionem maioris numeri 6. ad 3. quàm minoris 4. ad eundem 3. Contrà verò maiorem eſſe proportionem eiuſdem numeri 3. ad minorem 4. quàm ad maiorem 6. Item maiorem eſſe proportionem maioris numeri 4. ad 6. quàm minoris 3. ad eundem 6. Eademq; in cæteris ratio eſt. His poſitis erit proportio dupla 4. ad 2. diuiſa hic, 4.3.2. in duas minores. Et tam proportio 8. ad 6. quæ eadem eſt, quæ 4. ad 3. diuiſa hic, 8.7.6. quàm proportio 6. ad 4. quæ eadem eſt, quæ 3. ad 2. hic, 6.5.4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 14. quæ eadem eſt, quæ 8. ad 7. diuiſa hic, 16.15.14. & proportio 14. ad 12. quæ eadem eſt, quæ 7. ad 6. hic, 14.13.12. quàm proportio 12. ad 10. quæ eadem eſt, quæ 6. ad 5. hic, 12.11.10. & proportio 10. ad 8. quæ eadem eſt, quæ 5. ad 4. hic, 10.9.8. in duas minores: atq; ita fieri poteſt in infinitum. E contrario verò proportio ſubſeſquialtera 4. ad 6. diuiſa erit hic, 4.5.6. in duas maiores. Et tam proportio 8. ad 10. quæ eadem eſt, quæ 4. ad 5. diuiſa hic, 8.9.10. quàm proportio 10. ad 12. quæ eadem eſt, quæ 5. ad 6. hic, 10.11.12. in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 18. quæ eadem eſt, quæ 8. ad 9. diuiſa hic, 16.17.18. & proportio 18. ad 20. quæ eadem eſt, quæ 9. ad 10. hic, 18.19.20. quam proportio 20. ad 22. quæ eadem eſt, quæ 10. ad 11. hic, 20.21.22. & proportio 22. ad 24. quæ eadem eſt, quæ 11. ad 12. hic, 22.23.24. in duas maiores: atq; huius incrementi nunquam erit finis. Idemq; experiri licebit in quibuſuis aliis proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. diuiſa hic eſt, 10.6.1. in duas minores: Et proportio ſubſuperſeptupartiens vndecimas 11. ad 18. diuiſa hic, 11.15.18. in duas maiores, &c.

DE PROPORTIONALITATIBVS.

PROPORTIONALITAS ab Euclide definita in plura genera diuiditur, vt videre licet apud Boetium, Iordanum, & alios Arithmeticos: ſed præcipuæ proportionalitates, quas auctores nominati Medietates vocant, ſunt hæ tres; Arithmetica, Geometrica, & Muſica, ſiue Harmonica.

ARITHMETICA proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres, vel plures numeri per eandem differentiam progrediuntur. Vt hi numeri 4.7.10.13.16. quorum quilibet ſuum antecedentem ternario ſuperat, dicuntur conſtituere proportionalitatem Arithmeticam. Eſt autem duplex, continua, & diſcreta. Continua eſt, quando in progreſſione numerorum nulla fit interruptio, ſed quilibet cum proximè antecedente confertur, vt in dato exemplo fit. Diſcreta autem eſt, quando in numerorum progreſſione interruptio fit, ita vt bini tantùm inter ſe conferantur, non autem quilibet cum proximè præcedente. Vt in his numeris contingit, 4.7.8.11.30.33. Nam eadem differentia eſt inter binos 4.7. & 8.11. & 30.33. non autem inter 4.7. & 7.8. &c.

GEOMETRICA proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres, vel plures numeri eandem proportionem habent: quam quidem Euclides definiuit. Hæc enim propriè proportionalitas dicitur, ſiue Analogia: aliæ verò impropriè, cùm non ſit eadem ſemper inter earum terminos proportio, ita vt rectius Medietates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos interijciūtur. Vt hi numeri, 2.6.18.54. quoniam quilibet ad ſuum antecedentem eandem habet proportionem triplam, conſtituunt proportionalitatem Geometricam. Hæc duplex quoque eſt, continua, & diſcreta, vt in 4. defin. huius libri explicauimus.

Continua cernitur in datis numeris, diſcreta autem in hiſce ſex, 2.3.12.18.20.30. Nam bini tantùm 2.3. & 12.18. & 20.30. eandem habent proportionem ſeſquialteram; non autem quilibet ad proximè præcedentem.

MVSICA ſiue Harmonica proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem ſit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter maiores duos ad differentiam inter duos minores: ita vt nec eadem inter eos ſit differentia, vt in Arithmetica, nec eadem proportio, vt in Geometrica. Vt tres hi numeri, 3.4.6. quoniam eadem eſt proportio maximi 6. ad minimum 3. quæ differentia inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiam inter medium 4. & minimum 3. id eſt, ad 1. (cùm vtrobique proportio ſit dupla.) conſtituunt proportionalitatem, ſiue Medietatem Muſicam, ſiue Harmonicam: Ipſi verò neq; eandem habent differentiam, neq; eandem proportionem, vt patet. Sic etiam tres hi numeri, 42.12.7. Harmonicam proportionalitatem conſtituunt, quia eadem proportio eſt maximi 42. ad minimum 7. quæ differentiæ inter maximum 42. & medium 12. hoc eſt, numeri 30. ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cùm vtrobique proportio ſit ſextupla. Dicitur autem huiuſmodi proportionalitas Muſica, ſiue Harmonica, quia plerunque eius numeri habent proportiones eas, in quibus conſonantiæ Muſicæ conſiſtunt. Vt in priori exemplo inter 6. & 4. eſt proportio ſeſquialtera, conſtituẽs conſonantiam, quæ Diapente dicitur, ſiue Quinta. Item inter 4. & 3. eſt proportio ſeſquitertia, conſtituẽs conſonantiam, quam Diateſſaron, ſiue Quartam vocant. Denique inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, quæ Diapaſon conſonantiam, ſiue Octauam conſtituit. Atque eodem modo in pleriſque alijs idem cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT TRIVM PROPORtionalitatum, ſiue Medietatum, quas explicauimus.

I.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, minor eſt proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic patet. 2.4.6. Nam proportio 6. ad 4. eſt ſeſquialtera; & 4. ad 2. dupla.

AT in tribus numeris proportionalitatis Muſicæ, maior eſt proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic vides. 3.4.6. Proportio enim 6. ad 4. eſt ſeſquialtera; & 4. ad 3. ſeſquitertia.

IN tribus denique numeris proportionalitatis Geometricæ, eadem eſt proportio maximi ad medium, quæ medij ad minimum, vt ex eius definitione conſtat, apparet q; in hiſce tribus numeris 3.6.12. Tam enim 12. ad 6. quàm 6. ad 3. duplam habet proportionẽ. Qua in re Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmeticam atq; Harmonicam, cùm in Arithmetica inter maiores numeros minor ſit proportio, quàm inter minores; Contra verò in Harmonica inter maiores numeros maior, quàm inter minores: In Geometrica autem eadem inter maiores, quæ inter minores, vt explicatum eſt.

II.

ARITHMETICA proportionalitas habet terminorum differentias æquales, proportiones verò eorundem inæquales.

GEOMETRICA è contrario differentias terminorum habet inæquales, proportiones verò eorundem æquales.

HARMONICA denique neque differentias, neque proportiones terminorum æquales habet. Patet hoc ex ſuperioribus exemplis.

III.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, medius eadem ſui parte, vel partibus minorẽ ſuperat, & à maiori ſuperatur. Vt hic, 3.7.11. Medius 7. ſuperat minorem 3. quatuor vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{4}{7}$. ipſius medij 7. Item medius idem 7. ſuperatur à maiore 11. quatuor quoq; vnitatibus, quæ conſtituunt eiuſdem medij $\frac{4}{7}$. Item hic, 15.20.25. medius 20. ſuperat minorem 15. quinque vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{1}{4}$. ipſius medij 20. Item medius idem 20. ſuperatur à maiore 25. quinque quoq; vnitatibus, quæ conſtituũt $\frac{1}{4}$. eiuſdem medij 20.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, medius eadem ſui parte, vel partibus minorem ſuperat, quæ parte, vel partibus maioris à maiore ſuperatur. Vt hic, 4.6.9. medius 6. ſuperat minorem 4. binario, qui eſt $\frac{1}{3}$. medij, ſuperaturq; à maiore 9. ternario, qui quoque eſt $\frac{1}{3}$. maioris. Sic etiam hic, 9.15.25. vbi eſt continua proportio ſuperbipartiens tertias, medius 15. ſuperat minorem 9. ſex vnitatibus, quæ faciunt $\frac{2}{5}$. ipſius medij 15. Et idem medius 15. ſuperatur à maiore 25. decem vnitatibus, quæ efficiunt quoq; $\frac{2}{5}$. ipſius maioris 25.

IN tribus denique numeris Harmonicæ proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minoris minorem ſuperat, quæ parte, vel partibus maioris à maiore ſuperatur. Vt hic, 3.4.6. medius 4. ſuperat minorem

3.vnitate, quæ est $\frac{1}{3}$.eiusdem minoris, superatur $\frac{1}{3}$ à maiore 6.binario, qui quoq; $\frac{1}{3}$ est eiusdem maioris. Rursus in hac proportionalitate Harmonica, 42.12.7. medius 12. superat minorem 7. quinque vnitatibus, quæ sunt $\frac{5}{7}$.ipsius minoris 7. Et idem medius 12. superatur à maiore 42. triginta vnitatibus, quæ sunt $\frac{30}{42}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{5}{7}$.quoq; ipsi maioris 42.

IIII.

In tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, summa extremorum dupla est medij. Vt hic, 3. 7. 11. summa extremorum 14. dupla est medij 7.

At in tribus numeris proportionalitatis tam Geometricæ, quàm Harmonicæ, summa extremorum superat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum superat. Vt hic, 4.6.9. & 3.4.6. tam summa 13. extremorum 4.9. superat duplum medij 6. hoc est, 12. vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 3. superat 2. differentiam minorum, quàm summa 9. extremorum 3.6. duplum medij 4. id est, 8. superat vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 2. superat differentiam minorum, quæ est 1. Sic etiam hic, 9.15.25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, summa 34. extremorum 9.25. superat duplum medij 15. hoc est, 30. numero 4. quo eodem differentia maiorum, 10. differentiam minorum 6. superat. Item in hac proportionalitate Harmonica, 42.12.7. summa 49. extremorum duplum medij 12. id est, 24. superat numero 25. quo differentia maiorum 30. superat differentiam minorum 5.

V.

In tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, extremi inter se multiplicati procreant numerum, qui à quadrato medij superatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic, 3. 7. 11. numerus 33. factus ex 3. in 11. superatur à 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

At in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, numerus ex primo in tertiũ genitus, quadrato medij æqualis est, vt hic, 4.6.9. Extremi inter se multiplicati faciunt 36. quadratum medij.

In tribus numeris denique Harmonicæ proportionalitatis, numerus ex multiplicatione extremorum inter se genitus superat quadratum medij numero, qui fit ex differentia minorũ in differentiam maiorum. Vt hic, 42.12.7. numerus 294. factus ex 42. in 7. superat 144. quadratum medij numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Qua in re etiam medium locũ obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmeticam, & Harmonicam; quippe cùm in Arithmetica minus producatur ex primo in tertium, quàm ex medio in se, in Harmonica verò plus; & in Geometrica idem numerus gignatur.

VI.

In tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, summa extremorum in medium ducta producit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3.7.11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui num. 1us superat numerum 66. qui duplus est producti 33. ex primo in tertium, numero 32. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatam, hoc est, in 8.

In tribus autem numeris Geometricæ proportionalitatis, summa extremorum in medium multiplicata gignit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum, in differentiam maiorum. Vt hic, 4.6.9. Summa 13. extremorum in medium 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4. in 9. id est, 72. superat numero 6. ex differentia 2. in differentiam 3. genito.

Deniqve in tribus numeris proportionalitatis Harmonicæ, ex summa extremorum in medium procreatur, numerus duplus producti ex primo in tertium. Vt hic, 3.4.6. Ex summa extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

VII.

Qvatvor numeris in proportionalitate Geometrica non continuè proportionalibus datis, si secundus est inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eosdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et si secundus medius est in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6.9.8.12. quoniam ita est 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et sunt 6.9.12. proportionales Arithmeticè, cùm eundem habeant excessum 3. vides 6.8.12. Harmonicè proportionales esse, cùm eadem sit proportio 12. ad 6. quæ differentia maiorum 4. ad 2. differentiam minorum. Item hic, 6.8.9.12. quia ita est 6 ad 8, vt 9. ad 12. Et sunt 6.8.12. proportionales Harmonicè, vt diximus, vides 6.9.12. Arithmeticè esse proportionales, cùm eundem excessum 3. habeant.

Item quatuor numeris datis, quorum alteruter mediorum sit inter extremos medios in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometricè non continuè proportionales. Vt quia datis his 4. numeris 4. 6. 8. 12. tertius 8. medius est Arithmeticè inter extremos 4. 12. & secundus 6. inter eosdem extremos 4. 12. medius est Harmonicè; vides ita esse 4. ad 6. vt 8. ad 12. Et 4. ad 8. vt 6. ad 12.

VIII.

Propositis quotquot numeris continuè proportionalibus siue Arithmeticè, siue Geometricè, siue Harmonicè, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica, quando tres primi sunt

Harmonicè proportionales, item tres primum inſequentes, relicto primo; & relictis primis duobus, alij tres, qui ſequuntur; nec non primis tribus relictis, ſubſequentes tres, & ſic deinceps.) erunt in eadem proportionalitate conſtituti numeri, qui in locis tam imparibus, quàm paribus, atq; etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodo æqualis multitudo numerorum inter quoſuis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interijciantur: cuiuſmodi ſunt primus, tertius, quintus, ſeptimus, &c. Item ſecundus, quartus, ſextus, &c. Praterea primus, quartus, ſeptimus, &c. Inſuper primus, quintus, nonus, &c. atq; ita deinceps. Id quod in exemplis, quæ ſequuntur, perſpicuum eſt.

PROPORTIONALITATES ARITHMETICÆ.

3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59
3		11		19		27		35		43		51		59
	7		15		23		31		39		47		55	
3			15			27			39			51		
	7			19			31			43			55	
3				19				35				51		

Proportionalitates Geometricæ.

5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960	81920
5		20		80		320		1280		5120		20480		81920
	10		40		160		640		2560		10240		40960	
5			40			320			2560			20480		
	10			80			640			5120			40960	
5				80				1280				20480		

Proportionalitates Harmonicæ.

252	280	315	360	420	504	630	840	1260	2520
252		315		420		630		1260	
	280		360		504		840		2520
252			360			630			2520
	280			420			840		
252				420				1260	

IX.

QVOTQVOT numeris proportionalibus datis ſiue in Arithmetica proportionalitate, ſiue Geometrica, aut Harmonica, ſi ſinguli per aliquem numerũ eundem multiplicentur, aut diuidantur, habebunt quoq; producti numeri, vel Quotientes proportionalitatem Arithmeticam, vel Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides ſingulos multiplicatos per 4. Item diuiſos per 4.

Arithmetica proport.		
20	28	36
Producti		
80	112	144
Quotientes		
5	7	9

Geometrica proport.		
20	40	80
Producti		
80	160	320
Quotientes.		
5	10	20

Harmonica proport.		
60	84	140
Producti		
240	336	560
Quotientes.		
15	21	35

CAETERVM in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandem ſpecie proportionem, quam numeri multiplicati, aut diuiſi habent: At in Arithmetica non ſeruant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentia multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatam. Vt in dato exemplo quadruplam. Differentia enim inter 20. & 28. eſt 8. at inter 80. & 112. eſt 32. Quotientem verò differentia ad differentiam numerorum diuiſorum habet proportionem ſubmultiplicem à diuiſore denominatam, præpoſita particula, ſub. Vt in dato exemplo ſubquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28. eſt 8. at inter 5. & 7. eſt duo. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atque inter Quotientes, numerosq; diuiſos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica. Ita vides differentias numerorum 80. 160. 320. Item numerorum 240. 336. 560. quadruplæ eſſe differentiarum inter numeros 20. 40. 80. & inter numeros 60. 84.

60. 84. 140. At verò differentias numerorum 5.10.20. & numerorum 15.21.35. esse earundem differentiarum subquadruplus.

DE PROPORTIONALITATE ARITHMETICA.

I.

DATIS duobus numeris quibuscunque, si eorum differẽtiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica vtroq; dato maiorem. Et si eandem differentiam huic tertio addas, conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps reperies infinitos alios semper maiores, si differentiam vltimo inuento semper adijcias. Vt datis duobus numeris 4.11. quorum differentia est 7. constituetur haec proportionalitas Arithmetica, quae extendi potest in infinitum.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quòd si eandem differentiam à minori subtrahas, quando subtrahi potest, habebis rursus tertium terminum in eadem proportionalitate vtroq; minorem. Et si differentiam eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps inuenies alios minores si differentiam ab vltimo inuẽto semper demas, donec subtractio amplius fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 30.34. quorum differentia est 4. constituetur haec proportionalitas Arithmetica vsq; ad 2, qua vlterius progredi nequit, cum differentia 4. amplius subtrahi nequeat à 2.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

EADEM proportionalitas extendetur, etiamsi differentia non assumatur, hoc modo: Datis duobus numeris, à maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim numerus erit tertius terminus vtroq; dato maior. A quo duplicato, si proximè precedentem subtrahas, habebis quartum; & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4.15. si à 15. duplicato, hoc est, à 30. subtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52. si quoq; demas 15. habebis quartum terminum 37. & sic deinceps, vt hic apparet, 4.15.26.37.48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris; si ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius terminus vtroq; minor. Et si ex huius duplo proximè precedentem demas, relinques quartum terminum adhuc minorem; & sic deinceps, donec amplius subtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20.27. si ex 20. duplicato, id est, ex 40. detrahas 27. reliquus fiet tertius terminus 13. Ab huius duplo 26. si quoq; detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab huius duplo 12. precedens terminus 13. subtrahi nõ potest, non poterit proportionalitas vlterius progredi, vt hic vides, 27.20.13.6.

II.

QVANDO terminorum numerus est impar, summa extremorum aqualis est summae quorumlibet duorum mediorum ab extremis aqualiter distantium: dupla autem medij termini, à quo extremi aqualiter distant, vt hic:

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4. & 28. Item 7. & 25. Item 10. & 22. Item 13. & 19. Item duplum medij termini 16. semper est 32.

QVANDO autem numerus terminorum est par, summa extremorum aqualis semper est summae quorumlibet duorum mediorum ab extremis aqualiter remotorum, vt hic:

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4. & 31. Item 7. & 28. Item 10. & 25. Item 13. & 22. Item 16. & 19. semper est 35.

ITAQVE quando numerus terminorum impar est, habebit summa omnium terminorum ad medium terminum ab extremis aqualiter distantem, hoc est, ad semissem summae extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis aqualiter distantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Cùm enim summa extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis aquali interuallo distantium, dupla sit termini medij, continebitur medius terminus, siue semissis summae extremorũ, in summa omnium terminorum toties, quot sunt termini; semel quidem in ipso medio termino, & bis in qualibet summa duorum à medio termino aqualiter distantium: ac proinde omnium terminorum summa ad semissem aggregati extremorum; hoc est, ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cuius denominator est numerus terminorum. Vt in hac serie nouem numerorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18. hoc est, semissem summae extremorum 6. & 30. toties, quot vnitates sunt in 9. numero terminorum, id est, summa omnium terminorum ad 18. semissem summae extremorũ, siue ad medium terminum, proportionẽ habebit nonuplam. Eademq; in cæteris est ratio.

SVMMAM igitur omnium terminorum proportionalitatis Arithmetica, cuius terminorum numerus impar est, facilè inueniemus, si semissem aggregati extremorum, (quod semper par est, quando terminorum numerus est impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac serie 11. terminorum:

7. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum est 134. Cuius semissis 67. quae à medio termino 67. non differt, in 11. numerũ termi-

norum ducta producit 737. ſummam omnium terminorum. Atq; hac ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus eſt par: ſed quando extremorum ſumma impar eſt (quando enim terminorum numerus eſt par, poteſt eſſe ſumma extremorum impar, non autem ſemper par) erit eius ſemiſsis, numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

QVANDO *autem terminorum numerus eſt par, habebit ſumma omnium terminorum ad ſummam extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium proportionem multiplicē à ſemiſſe numeri terminorum denominatam. Cùm enim ſumma quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium æqualis ſit ſummæ extremorum, continebitur hæc ſumma extremorum toties in ſumma omnium terminorum, quoties vnitas in dimidiato numero terminorum continetur, ſemel nimirum in ſumma quorumlibet duorum ab extremis diſtantium æqualiter: atq; idcircò ſumma omnium terminorum ad ſummam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac ſerie 10. terminorum.*

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorū ſummam extremorum 6. & 33. quæ eſt 39. continebit quinquies, hoc eſt, ſumma omnium terminorum ad 38. ſummam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et ſic de alijs.

SVMMAM *ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorū numerus par eſt, obtinebimus, ſi ſummam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit ſine fractione vnitatis, cùm par ponatur) ducamus. Vt in hac ſerie 10. terminorum.*

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum eſt 57. quæ in 5. ſemiſſem numeri terminorum ducta efficit 285. ſummam omnium terminorum. Hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus eſt impar: ſed ſemiſsis numeri terminorum ſemper erit integer cum $\frac{1}{2}$. *cùm numerus terminorum ponatur impar.*

VIDES *igitur ſatis eſſe, vt ſumma inueniatur, ſi extremi termini, vnà cum terminorum numero cogniti ſint. Quo pacto autem ex cognito altero extremorum, terminorum numero, atq; differentia, in cognitionem alterius extremi peruenire poſsimus, iamiam docebimus.*

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotuis terminorum alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoſcamus, reperiemus alterum extremum, hoc modo: Numerum proximè minorem numero terminorum in differentiam datam ducemus, & productum minori extremo cognito adijciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto detrahemus. Nam ibi conficiemus maius extremū, quod quæritur, hic autem reliquum fiet minus extremū ignotum. Exempli cauſa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirū numerum proximè minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. producto q; 55. minus extremum 4. adijciemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Vt in his 12. terminis manifeſtum eſt, quorum differentia eſt 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si verò proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productum ex 11. numero, qui numero terminorum proximè minor eſt, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perſpicuum eſt.

NECESSE *autem eſt, ſi minus extremum inquiratur, numerū productum ex numero, qui numero terminorum proximè minor eſt, in differentiam, minorem eſſe maiore extremo cognito, vt ſubtractio fieri poſsit. Alioquin quæſtio erit impoſsibilis: hoc eſt, fieri non poterit, vt datus numerus poſsit eſſe maius extremum in progreſsione vlla, cuius differentia, & numerus terminorum ita ſe habeant, vt proponitur. Vt ſi quis daret maius extremum 20. numerum terminorum 6. & differentiam 5. non poſſet inueniri minus extremum: propterea quòd numerus 25. productus ex 5. qui proximè minor eſt terminorum numero, in differentiam 5. maior eſt dato maiore extremo 20. Quòd ſi quando contingat, productum illum numerū maiori extremo eſſe æqualem, ita vt ſubtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quæſtio poſsibilis, ſed minus extremum erit 0. Vt ſi in poſteriori hoc exemplo maius extremum proponeretur 25. fieret hæc proportionalitas Arithmetica:*

0. 5. 10. 15. 20. 25.

IIII.

SI duo extremi termini noti ſint, vnà cum numero terminorum, reperiemus differentiam numerorū hoc pacto: Dempto minore extremo à maiore, diuidemus reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæſita. Vt ſi quis dicat, eſſe 10. terminos proportionalitatis cuiuſpiam Arithmeticæ, cuius numeri extremi ſint 7. & 52. Dempto minore extremo 7. ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, quæ quæritur, vt hic apparet:

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM

VERVM vt fractiones vitentur, progressio ꝙ proposita locum habeat in numeris integris, necesse est, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquus numerus possit numerari à numero, qui terminorum numero proximè minor est. Si enim non numeretur, differentia inuenta erit, vel fractio, vel numerus integer cum fractione: quaestio tamen erit possibilis. Vt si quis proponat extremos terminos, 2. & 38. & numerum terminorum 9. Demptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiso per 8. reperitur differẽtia $4\frac{1}{2}$. vt patet in hoc exemplo.

2. $6\frac{1}{2}$. 11. $15\frac{1}{2}$. 20. $24\frac{1}{2}$. 29. $33\frac{1}{2}$. 38.

V.

SI duo termini extremi, vnà cum differentia, noti sint, eliciemus numerum terminorum hac ratione: Detracto minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam si Quotienti adiiciamus 1. conflabimus numerum terminorum quaesitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10. ex 40. & reliquo numero 30. diuiso per 3. fit Quotiens 10. Addita ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet:

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34 37. 40.

SED vt quaestio proposita sit possibilis, hoc est, vt verè in rerum natura existat progressio aliqua, quae habeat omnes conditiones propositas, necesse est, minore extremo subducto ex maiore, reliquũ numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiamsi addatur 1. Fieri enim non potest, vt detur progressio aliqua, cuius terminorum numerus non sit integer.

VI.

SI duo extremi termini, vnà cum omnium terminorum summa, noti sint, explorabimus & numerũ terminorum, & differentiam, hac arte: Summam omnium terminorum per extremorum summam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totum numerum indicabit. Inuento autem terminorum numero, cùm & duo extremi termini cogniti sint, inueniemus differentiam, vt in 4. regula traditum est; si nimirum, minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum diuidamus per numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Verbi gratia. Si summa proponatur 515. & extremi termini 20. & 83. diuidemus summam 515. per 103. summam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differẽtiam obtinebimus, si dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernis.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Vides ergo, vt quaestio sit possibilis, hoc est, vt re vera existat aliqua progressio, in qua omnium terminorum summa, & duo extremi ita se habeant, vt proponitur, necesse esse, vt summa omnium terminorum data à summa extremorum numeretur. Alioquin terminorum numerus erui non poterit, si Quotiens non sit numerus integer: Vel certè, si summa omnium terminorum data à summa extremorum nõ numeretur, necesse esse, vt diuisa summa omnium terminorũ per extremorum summam, Quotiens sit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. vt nimirum duplicatus efficere possit numerum terminorum integrum.

VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionem duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionem: Si verò extremorum proportio maior sit, quàm dupla, proportio medij ad differentiam, minor erit, quàm tripla: Si denique minor sit extremorum proportio, quàm dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quàm tripla. Vt hic, 8. 12. 16. proportio extremorum 16. & 8. est dupla: & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8. 14. 20. proportio inter extremos 20. & 8. est dupla sesquialtera, nimirum maior, quàm dupla: & medij 14. ad differentiam 6. dupla sesquitertia, minor videlicet, quàm tripla. Hic denique 8. 11. 14. extremi 14. & 8. proportionem habent supertripartientem quartas, quae minor est, quàm dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam superbipartientem tertias, hoc est, maiorem, quàm triplam.

VIII.

INTER quosuis duos numeros constitues medium proportionalem Arithmeticè, si eorum summa accipias semissem. Vt datis duobus numeris 6. & 30. summa eorum est 36. Huius ergo semissis 18. medio loco proportionalis est Arithmeticè inter 6. & 30. vt hic manifestum est, 6. 18. 30. Itaque si medius terminus constituendus sit numerus integer, necesse est, vtrumque numerorum datorũ esse vel parem, vel imparem, vt videlicet summa extremorum semper sit par, hoc est, vt possit habere dimidium sine fractione vnitatis. Nam quando summa extremorum impar est: quod accidit cùm alter extremorum par est, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum semisse vnitatis. Vt datis numeris duobus 8. 25. summa eorũ est 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, 8. $16\frac{1}{2}$. 25.

IX.

INTER quosuis autem duos numeros constitues, quotquot quis iusserit, medios proportionales Arithme-

ticè, hoc modo: Minorem detrahe ex maiore; reliquum deinde numerum partire per numerũ proximè maiorem numero mediorum conſtituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmetica, quam ſi minori numero propoſito adiũcias, conflabis primũ medium. Huic ſi eandem differentiam addas, conficies ſecundum, & ſic deinceps. Vel ſi eam differẽtiam à maiori numero propoſito ſubtrahas, relinquetur vltimus medius. A quo ſi eandem differentiam demas, remanebit penultimus, & ſic deinceps. Veluti ſi inter 6. & 114. conſtituendi ſint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proximè maior eſt numero mediorum conſtituendorum.) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo ſe habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SED quoniam plerunque tales duo numeri proponuntur, inter quos non poſſunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quòd inuentus Quotiens pro differentia non ſemper numerus integer eſt; ſi fractiones vitare velis, neceſſe eſt, duos propoſitos numeros eſſe eiuſmodi, vt dempto minore ex maiore, reliquus à numero, qui proxime maior eſt numero mediorum conſtituendorum, numeretur: quos ita facilè reperies. Accipe pro minore extremo quemcunque numerum, eumq; adde cuicunque alij numero, quem numerus proximè maior numero mediorum inueniendorum metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt ſi velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmeticè, primus autem ſit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nouenarius, (qui proximè maior eſt numero mediorum conſtituendorum) metitur, nimirum ad 72. conficies q; maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, vt dictum eſt, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerum 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. erit differentia, vt hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD ſi quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus & maius cadant quotuis medij numeri habentes illam differentiam, ſi numerũ proximè maiorem numero mediorum conſtituendorum per datam differẽtiam multiplices, numeroq; producto minus extremum addas. Vt ſi quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum conſtituere 9. terminos medios, quorum differentia ſit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datũ minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifeſtum eſt.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione cõſtitues quotuis medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumque datorum numerorum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum conſtituendorum. Quotientes ſub illis colloca, quemque ſub ſuo, & ab eiſdem Quotientibus aſcende per continuam eorum additionem, addendo primò quemque ad ſeipſum, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas inſtituas à Quotientibus incipientes, & per eoſdem progredientes, tot terminorum, (excluſis datis duobus numeris) quot medij termini deſiderantur. Poſtremò adde ſingulos terminos vnius ordinis ſingulis terminis aduerſis alterius ordinis, id eſt, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde ſub illo, proximo ſupra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medios optatos. Exempli gratia: Sint inter 15. & 100. conſtituendi 4. medij termini Arithmeticè proportionales. Vtroque diuiſo per 5. hoc eſt, per numerum proximè maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Conſtitues ergo hos ordines 4. terminorum ſub 15. & 100. Arithmeticè proportionalium per eorundem Quotientum continuam additionem, addendo primùm 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9. Item 3. ad 9. vt fiant 12. Rurſus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides.

15	32	49	66	83	100
12					80
9					60
6					40
3					20

EX 12. ſupremo primi ordinis, & infimo 20. ſecundi ordinis fiunt 32. pro primo medio. Ex 9. & 40. fiunt 49. pro ſecundo medio. Ex 6. & 60. fiunt 66. pro tertio medio. Denique ex 3. & 80. fiunt 83. pro quarto medio. Itaque in primo ordine ſemper deſcendendum eſt à ſupremo ad infimum vſq;, in ſecundo verò ab infimo ad ſupremum vſq; aſcendendum.

EST autem dignum conſideratione, differentiam Quotientum, qui ſunt minimi numeri duorum ordinum conſtitutorum, eſſe quoque differentiam proportionalitatis conſtituenda. Ita vides differentiam in propoſito exemplo eſſe 17. quæ differentia etiam eſt inter Quotientes 3. & 20. Quocirca inuentis Quotientibus, ſi minor à maiore ſubtrahatur, & reliquus numerus minori extremo dato adiũciatur, & huic compoſito numero

numero idem ille numerus reliquus addatur, & ita deinceps, conſtituentur ijdem termini medij, etiamſi duo illi ordines non inſtituantur.

VIDES ergo, vtrum q3 numerum propoſitum numerari debere à numero, qui numerum mediorum vna vnitate ſuperat, ſi fractiones euitandæ ſint: Vel certè inueniendos eſſe duos extremos, vt in priori parte huius regulæ præcepimus. In ijs enim fractiones quoque vitantur, etiamſi eos numerus numero mediorum proximè maior non numeret: quia minore Quotiente detracto ex maiore, ſemper numerus integer relinquitur; vt in exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam in tertio eorum, verbi gratia, inter 5. & 45. conſtituẽdi ſunt 9. termini medij. Si igitur vterque per 10. diuidatur, fiunt Quotientes $\frac{5}{10}$. & $\frac{45}{10}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. quorum differentia eſt 4. numerus integer, ex cuius continua additione ad minus extremum datum medij termini optati conficiuntur: qui ijdem reperientur, ſi per Quotientes $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. duo ordines inſtituantur aſcendentes, vt dictum eſt, per ipſorum Quotientum additionem continuam, &c.

X.

NVMERVM quemlibet propoſitum diſtribuemus in partes, quotquot quis iuſſerit, proportionalitatem Arithmeticam ſeruantes, hac ratione. Diuiſo dato numero per ſemiſſem numeri terminorum, ſecabimus Quotientem in duas partes inæquales vtcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia iam dati ſunt duo termini extremi, cum numero terminorum, detrahemus minus extremum ex maiore, partiemurq3 reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Ita namque prodibit in Quotiente differẽtia, vt ex 4. regula patet. Si igitur hac differẽtia addatur minori extremo aſſumpto, deinde ad numerum conflatum, atq3 ita deinceps, conſtituetur numerus terminorum datus, quorum ſumma propoſito numero æqualis eſt: ac proinde datus numerus in numerum partium Arithmeticè proportionalium ſectus erit. Exempli cauſa, ſi numerus 830. diſtribuendus ſit in 10. partes proportionales Arithmeticè, partiemur eum per 5. ſemiſſem terminorum, Quotientemq3 166. ſecabimus in 20. & 146. terminos extremos proportionalitatis conſtituendæ. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126. diuidemus per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (vt in 4. regula dictum eſt) differentia erit proportionalitatis. Vt hic vides:

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

Rurſus ſi numerus 10. diuidendus ſit in 10. partes proportionales Arithmeticè, diuidemus eum per 5. ſemiſſem terminorum: Quotientem verò 2. in duas partes inæquales ſecabimus $\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex maiore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquam 1. per 9. numerũ proximè minorem numero partium conſtituendarum. Quotiens enim $\frac{1}{9}$. differentia erit continuè addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero conflato, &c. Quæ additio, vt facilior fiat, reducemus minus extremum $\frac{1}{2}$. & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationem, vt ad $\frac{9}{18}$. & $\frac{2}{18}$. Sic ergo diuiſus erit numerus 10. in 10. partes Arithmeticè proportionales, quarũ prima eſt $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{9}{18}$. vltima verò $1\frac{1}{2}$. ſiue $1\frac{9}{18}$. & differẽtia $\frac{2}{18}$. ſiue $\frac{1}{9}$.

$\frac{9}{18}$. $\frac{11}{18}$. $\frac{13}{18}$. $\frac{15}{18}$. $\frac{17}{18}$. $1\frac{1}{18}$. $1\frac{3}{18}$. $1\frac{5}{18}$. $1\frac{7}{18}$. $1\frac{9}{18}$.

Certum autem eſt, hac ratione varijs modis datum numerum diuidi poſſe in propoſitum numerum partium proportionalium, prout videlicet, diuiſo dato numero per ſemiſſem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas inæquales pro terminis extremis ſectus fuerit.

IDEM efficiemus hac ratione: Numero dato, ac ſi eſſet ſumma omnium terminorum conſtituendorum, diuiſo per numerum terminorum datum, dabit Quotiens duplicatus ſummam extremorum: propterea quòd huius extremorum ſummæ ſemiſsis, id eſt, Quotiens inuentus ductus in numerum terminorum, hoc eſt, in diuiſorem, producit ſummam omnium terminorum, nimirũ datum numerum, vt in 2. regula dictum eſt. Quare ſi Quotientem duplicatum in duos numeros inæquales ſecemus pro terminis extremis: & minore detracto ex maiore, reliquum numerum per numerum proximè minorẽ numero terminorum dato diuidamus, dabit Quotiens differentiam, vt in 4. regula diximus. Quam ſi ad minus extremum factum adijciamus, & iterũ ad conflatum numerum, & ſic deinceps, conſtituta erit proportionalitas Arithmetica, quæ imperatur. Veluti, ſi numerus 198. ſecandus proponatur in 9. partes Arithmeticè proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, vt fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44. ſummam extremorũ. Conſtituto igitur minore extremo 10. ac proinde maiore 34. ſi detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24. per 8. numerum proximè minorem numero terminorum partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergo ſtabunt 9. termini proportionalitatis Arithmeticæ conficientes ſummam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

Hic etiam manifeſtum eſt, varijs modis datum numerũ diſtribui poſſe in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem ſummam eſſe diximus extremorum, in alias atq3 alias partes binas ſectus fuerit, pro extremis duobus terminis.

SED fortaſſe facilius (quanquam operatio aliquantò longior ſit) idem hoc abſolues hac ratione: Cape tot numeros Arithmeticè quomodocunque proportionales, in quot partes datus numerus diſtribuendus eſt, & ſingulos in datum numerum duc, procreatosq3 numeros per ſummam omnium terminorum ſumptorum ex 2. regula inuentam partire. Quotientes enim dabunt partes, quas quæris. Verbi gratia. Sit diuidendus nume-

rus 525. in 10. partes proportionales Arithmeticè. Sume 10. numeros Arithmeticè proportionales quoſcunque, 4.7.10.13.16.19.22.25.28.31. quorum ſumma eſt 175. Ductis autem ſingulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri 2100.3675.5250.6825.8400.9975.11550.13125.14700.16275. quibus ſingulis diuiſis per ſummam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignẽtur hæ 10. partes, quas quæris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

IDEM obtinebis, ſi datum numerum per aſſumptorum numerorum ſummam partiaris, Quotientem q̃ in ſingulos aſſumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas quæris. Vt in dato exemplo, ſi datus numerus 525. diuidatur per 175. ſummam aſſumptorum numerorum, fit Quotiens 3. quo ducto in ſingulos numeros aſſumptos, 4.7.10. &c. gignentur eadem partes, quæ prius, 12.21.30. &c.

VT autem operatio fiat facilior, ac breuior, ſatis eſt, priores duos numeros proportionalitatis acceptæ multiplicare per datum numerum, productos q̃ numeros per ſummam omnium terminorum eiuſdem acceptæ proportionalitatis partiri. Vel ſatis eſt, dato numero per ſummam aſſumptorum numerorũ diuiſo, Quotientem in duos priores aſſumptos numeros ducere. Ita enim reperiẽtur primæ duæ partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differẽtia addita tertiæ, faciet quartam, & ſic deinceps. Liquidò autem hìc quoq; conſtare puto, datum numerum variis modis diſtribui poſſe in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout ſcilicet alij atq; alij numeri eiuſdem proportionalitatis Arithmeticæ fuerint aſſumpti, vel quorum alia atq; alia ſit differentia.

HAC via partes inuentæ habent ordinatim eaſdem proportiones inter ſe, quæ inter terminos proportionalitatis aſſumptæ eodem ordine reperiuntur. Perpetuò autem ſinguli numeri acceptæ proportionalitatis ad ſingulas partes inuentas, primus ad primã, ſecundus ad ſecundam, &c. eandem omnino habent proportionem, Sic vides, inter primas partes inuentas 12.21. eſſe proportionem ſupertripartientem quartas, qualis eſt inter primos numeros acceptos 4.7. &c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorſus proportionem, nimirum ſubtriplam.

ITAQVE ſi accipiatur proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionem duplam, ita vt primus ſit differentia omnium terminorum, habebunt primæ partes duplam quoq; proportionem, atq; ideò prima erit quoq; differentia, ex cuius additione alia partes coaceruẽtur. Vt ſi in ſuperiore exemplo accepiſſes hos 10. terminos, 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10. quorum ſumma eſt 55. Vel hos 10. numeros, 3.6.9.12.15.18.21.24.27.30. quorum ſumma eſt 165. multiplicaſſes q̃ primum quemque in datum numerum 525. & productos numeros 525.1575. per ſummam quemlibet propriam, vt priorem per 55. & poſteriorem per 165. diuiſiſſes, inueniſſes primam partem $9\frac{5}{11}$. quæ eadem eſt differentia. Quare partes omnes 10. conſtituentes proportionalitatem Arithmeticam fuiſſent hæ:

$9\frac{5}{11}$. $19\frac{1}{11}$. $28\frac{7}{11}$. $38\frac{2}{11}$. $47\frac{8}{11}$. $57\frac{3}{11}$. $66\frac{9}{11}$. $76\frac{4}{11}$. $85\frac{10}{11}$. $95\frac{5}{11}$.

DE PROPORTIONALITATE GEOMETRICA.

I.

DATIS quibuſuis duobus numeris, ſi denominatorem proportionis, quã habent, conferendo maiorẽ cum minore, hoc eſt, ſi diuiſo maiore per minorẽ, Quotientem ducas in maiorem, gignes tertium terminũ in proportionalitate Geometrica vtroq; dato maiorem. Et ſi eundem denominatorem, ſiue Quotientem, in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps conſtitues infinitos alios ſemper maiores, ſi denominatorem, Quotientémve, per vltimum inuentũ ſemper multiplices. Vt datis duobus numeris 4.12. denominator proportionis 12. ad 4. eſt 3. quòd diuiſis 12. per 4. Quotiens fiat 3. Si igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & ſic in infinitum, conſtitues hanc proportionalitatem Geometricam, quæ in infinitum poteſt extendi.

4. 12. 36. 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

Quòd ſi minorem cum maiore conferas, & denominatorem proportionis, quam habent, id eſt, diuiſo minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem eſt, per denominatorẽ proportionis, quam maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis vtroq; minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem, & ſic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8.16. denominator proportionis 8. ad 16. eſt $\frac{1}{2}$. quòd diuiſis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. denominator autem proportionis 16. ad 8. eſt 2. quòd diuiſis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$. in 8. vel diuidas 8. per 2. Idem q̃ cum producto numero facias, conſtituetur hæc proportionalitas Geometrica, progrediens quoque in infinitum verſus minores numeros, ſicut illa in infinitum verſus maiores numeros progrediebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$. &c.

EXTENDETVR quoq; eadem proportionalitas in infinitũ, etiamſi denominator proportionis ignotus ſit, hoc modo: Datis duobus numeris, duc maiorem in ſe, & productum per minorẽ diuide. Quotiens enim erit tertius terminus vtroq; maior. Hunc ſi iterum in ſe ducas, productum q̃ per proximè præcedentẽ terminũ diuidas, dabit Quotiens quartũ terminũ, & ſic deinceps. Vt datis duobus numeris, 3.6. Ducto 6. in ſe, fit 36.

quo

quo diuiſo per 3. fit 12. tertius terminus. Rurſus ducto 12. in ſe, fit 144. quo diuiſo per 6. fit 24. quartus terminus: atq; ita in infinitum, vt hîc vides, 3. 6. 12. 24. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris, ſi minorem in ſe duxeris, productúmque per maiorem diuiſeris, dabit Quotiens tertium terminum vtroque minorem. Quem ſi rurſum in ſe duxeris, productúmque per proximè præcedentem terminum diuiſeris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & ſic deinceps. Vt datis duobus numeris 6. 18. Ducto 6. in ſe, fit 36. quo diuiſo per 18. fit 2. tertius terminus. Rurſus ducto 2. in ſe, fit 4. quo diuiſo per 6. fit $\frac{4}{6}$. ſiue $\frac{2}{3}$. in minimis numeris pro quarto termino: atque ita in infinitum, vt hîc appareat.

18. 6. 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$. *&c.*

IAM verò ſi quamcunque proportionem non multiplicem (in multiplici enim, ſi regulam præſcriptam ſequaris, nulla eſt difficultas) extendere velis in numeris integris ad quotlibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continuè proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partem, vel partes aliquotas, cuius, vel quarum in data proportione fit mentio; tot inquam cape terminos, quot in propoſita proportionalitate non multiplici terminos deſideras. Vltimus enim eorum erit primus terminus tuæ proportionis non multiplicis. Eum ergo ſi multiplices per denominatorem datæ proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atque ita deinceps, conſtitues terminos optatos. Vbi hoc eſt mirabile, ſi termini imperati hac via reperiantur, non poſſe vltra terminos propoſitos proportionalitatem extendi ſine fractione. Verbi gratia, ſi inueniendi ſint 7. termini proportionis ſeſquialteræ: Quoniam denominator fractionis $\frac{1}{2}$. cuius mentio fit, eſt 2. ſumendi ſunt 7. termini proportionis duplæ, videlicet 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. Si ergo à 64. incipias, conſtitues 7. terminos proportionalitatis ſeſquialteræ, & non plures; hos nimirum:

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

Inuenientur autem facilè hi termini, ſi ad primum 64. adijcias eius dimidium, & ad ſecundum 96. iam factum, eius quoq; dimidium, &c. Sic quoque ſi deſiderentur 6. termini proportionis duplæ ſuperbipartientis quintas, accipiendi ſunt 6. termini proportionis quintuplæ, propter denominatorem partium quintarũ, qui eſt 5. videlicet 1. 5. 25. 125. 625. 3125. Nam ſi ab vltimo 3125. incipias, reperies hos 6. terminos in proportione duplæ ſuperbipartiente quintas.

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

Qui termini facilè reperientur, ſi duas quintas partes primi ad eundem primum duplicatum adijcias, & rurſus $\frac{2}{5}$. ſecundi iam facti ad eundem ſecundum duplicatum, &c. Atq; numeri hac via inuenti ſemper minimi ſunt in ſua proportione, ita vt alij totidem termini in eadem proportione continua reperiri, qui minores illis ſint, ſit prorſus impoſſibile, niſi fractiones admittere velimus. In proportione porrò multiplici quacunque minimi termini quotcunque perpetuò incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportione continua quadrupla ſunt hi, 1. 4. 16.

II.

QVANDO numerus terminorum continuè proportionalium impar eſt, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter ſe, æqualis eſt numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium, multiplicatione inter ſe creatur, & ei quoque, qui ex medio in ſe ipſum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis ſeſquialteræ:

16. 24. 36. 54. 81.

tam ex 16. in 81. quàm ex 24. in 54. & ex 36. in ſe, procreatur numerus 1296.

QVANDO autem proportionaliũ terminorũ numerus eſt par, etiamſi non continuè ſint proportionales, dummodo bini continuam proportionem interrumpentes, habeãt vnam eandemq; inter ſe proportionem, hoc eſt, dummodo ſecundus & tertius; Item quartus & quintus; necnon ſextus & ſeptimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) ſint quoque non continuè proportionales, in diuerſa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad ſecundum, & tertius ad quartum, & quintus ad ſextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus eſt par, numerus ex ductu extremorum vnius in alterum productus ſemper æqualis eſt numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium inter ſe gignitur. Vt hîc in 6. numeris duplæ proportionis continuæ.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem ſemper numerus 288.

Item in hac ſeſquitertia non continua 8. terminorum, vbi bini proportionem continuam interrumpentes habent vnam eandemq; proportionem, videlicet triplam, quæ à ſeſquitertia diuerſa eſt.

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnino numerus 768. fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

Hinc sequitur, quando terminorum numerus impar est, numerum ex ductu extremorum vnius in alterum, vel ex duorū quorumlibet æqualiter ab extremis, vel à medio distantium multiplicatione inter se procreatum, esse quadratum, (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in seipsum producitur; numerusq; ipsum producens latus eius, siue radix appellatur.) cuius radix, siue latus est medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in seipsum; ac proinde medius eius radix quadrata est. Numerum verò ex tribus inter se multiplicatis productum, quorum duo sunt vel extremi, vel ab extremis æqualiter remoti, tertius autem, medius, esse cubum, (Numerus ille dicitur cubus, qui producitur ex numero aliquo in seipsum ducto, & iterum in productum numerū: & numerus ille, qui in se ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus eius cubicum, siue radix cubica appellatur.) cuius latus, siue radix est medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in se cubice ducto, hoc est, primùm in se, deinde in productum ex alijs duobus inter se multiplicatis. In se enim facit productum ex alijs duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.

Sequitur quoq; quando sunt 4. numeri siue continuè, siue nō continuè proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri se mutuò multiplicare continuè, quando vnus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & sic deinceps, donec omnes numeri sint multiplicati.) esse quadratum, cuius latus siue radix est numerus ex primo in quartum, vel ex secundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4. numerorum inter se idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartum, si in productum ex secundo in tertium (qui producto ex primo in quartum æqualis est) multiplicetur. Quando autem sunt 6 numeri, siue continuè, siue non continuè proportionales, dummodo bini numeri proportionem continuam interrumpentes sint quoq; non continuè proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter se, cuius radix latásve est numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorū quorumlibet ab extremis æqualiter distantium productus: quia videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter se multiplicatis in se cubice multiplicato: hoc est, semel in se, nimirum in productum ex duobus, qui sunt extremis proximi, & iterum in productum: quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus medijs: quippe cùm tres hi numeri producti sint inter se æquales.

III.

Si propositis quotcunque terminis continuè proportionalibus, minus extremum à maiore subtrahatur, & reliquus numerus per numerum vna vnitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propositorum numerorum ad minorem habet, qui illi proximus est) diuidatur, Quotiens denique maiori extremo adijciatur, conflabitur summa omnium terminorum. Vt hic in proportione continua tripla.

2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex maiore 13122. & reliquo numero 13120 diuiso per 2. per numerum scilicet vna vnitate minorem denominatore 3 proportionis triplæ, quam quilibet eorum numerorum ad proximè antecedentem minorem habet, fit Quotiens 6560. cui si addatur maius extremum, 13122. fit summa omnium 19682. Item in hac sesquitertia continua.

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. ex maiore 1024. & reliquo numero 781. diuiso per $\frac{1}{3}$. (qui numerus vna vnitate minor est denominatore $1\frac{1}{3}$.) fit Quotiens 2343. Addito ergo maiore extremo 1024. fit omnium terminorum summa 3367.

Itaque vt vides, ad explorandam summam quotcunque terminorum proportionalitatis Geometricæ satis est, si duo extremi cognoscantur, vnà cum proportionis denominatore. Quo verò artificio inuestigandus sit vltimus terminus cuiusuis proportionalitatis Geometricæ quotcunque terminorum, etiamsi medios numeros ignoremus, copiosè tradidimus in progressionibus in nostra Arithmetica practica, vt superuacaneum sit ea hoc loco repetere.

IIII.

Propositis quotlibet numeris se mutuò æqualiter superantibus, id est, Arithmeticè proportionalibus; si totidem alij numeri sumantur, habentes easdem proportiones, quas illi, eodem ordine sumpti; superabunt se quoq; posteriores hi numeri æqualiter, hoc est, erunt Arithmeticè proportionales, sicut illi. Vt si sex hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. 19. Arithmeticè proportionales proponantur, sumanturq; alij sex cum iisdem proportionibus, cuiusmodi sunt hi, 20. 35. 50. 65. 80. 95. cōperies ipsos quoq; Arithmeticè esse proportionales; quippe cùm habeant differentiam 15. Sed caue putes, hanc proprietatem posse conuerti: Neq; enim si detur quotuis numeri Arithmeticè proportionales, & totidem alij Arithmeticè quoq; proportionales sumantur, etiamsi vtrobique eadem sit differentia, necessariò hi illis proportionales erunt. Id quod perspicuum est in hisce duabus proportionalitatibus Arithmeticis:

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.
3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

vbi

Vbi prioris duo primi numeri 2.4. habent proportionem duplam, at posterioris duo primi 3.5. superbipartientem tertias. Item primus numerus 3. in posteriore ordine ad primum numerum 2. in ordine priore habet sesquialteram proportionem, secundus autem 5. ad secundum 4. sesquiquartam, &c.

V.

DVOBVS quibuscuis numeris datis, si eorum alterutro in quotlibet partes distributo, singulæ partes in alterum ducantur, & singuli numeri producti per priorem numerum diuidantur, constituent omnes Quotientes simul sumpti posteriorem numerum, habebuntq; ordine eadem omnino proportiones inter se, quas partes prioris numeri inter se eodem ordine habent: at singuli Quotientes, siue partes posterioris numeri ad singulas partes prioris, vt prima ad primã, secunda ad secundam, &c. vnam eandemq; prorsus habebunt proportionem. Veluti, datis duobus numeris 57.285. si prior secetur in partes, quæ simul additæ ipsum conficiunt, 2.5.10.40. & earum quælibet in posteriorẽ numerum 285. ducatur, gignẽtur hi numeri 570.1425.2850.11400. quibus sigillatim per numerum priorem 57. diuisis, fiunt Quotientes, 10.25.50.200. qui in vnam collecti summam constituunt posteriorem numerum 285. habentq; easdem proportiones, quas habent partes 2.5.10.40. nimirum duplam sesquialteram, duplam, & quadruplam: singuli verò ad singulas partes, vt 10. ad 2. & 25. ad 5. & 50. ad 10. & 200. ad 40. eandem omnino proportionem habent, nimirum quintuplam.

EIDEM partes numeri posterioris obtinebis, si eum per priorem, qui in partes distributus est, partiaris, Quotientemq; factum in singulas partes eiusdem prioris numeri ducas. Vt in eodem exemplo, diuiso numero 285. per 57. fit Quotiens 5. quo ducto in 2.5.10.40. partes numeri 57. fiunt partes numeri 285. hæ 10 25.50. 200. vt prius.

HINC facilè elicitur, quo pacto duo quilibet numeri secandi sint in partes componentes ipsis numeris æquales, ita vt partes vnius sint partibus alterius proportionales, collatis tum partibus vtriusque numeri inter se, tum & partibus vnius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio distribuendi numerum propositum in quotuis partes Arithmeticè proportionales, quam in regula 10. proportionalitatis Arithmeticæ præscripsimus. Nam sumptis totidem numeris Arithmeticè proportionalibus, erit eorum summa, numerus in illos, tanquam in partes ipsum componentes, diuisus. Quare si singulæ hæ partes in datum numerum ducantur, & producti numeri per summam illam diuidantur; Vel si per assumptorum numerorum summam datus numerus diuidatur, ac Quotiens in singulos eos numeros ducatur; producentur partes totidem numeri propositi in eisdem proportionibus. Quare Arithmeticè quoq; proportionales erunt, vt ex antecedente regula 4. manifestum est.

VI.

QVOTLIBET numeris continuè proportionalibus datis, erunt eorum differentiæ continuè quoque in eadem proportione proportionales. Vt in appositio exemplo tam numeri, quàm eorum differentiæ, habent continuam proportionem sesquialteram.

Differentiæ.	32.	48.	72.	108.	162.	243.
64.	96.	144.	216.	324.	486.	729.

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod sequitur, habent & numeri, & eorum differẽtiæ duplam proportionem. Vbi vides differentias non differre à numeris duplæ proportionis, quorum sunt differentiæ. Id quod soli proportioni duplæ cuicunque accidit: quia in ea quilibet numerus maior proximè præcedẽtem minorem superat, ipsomet numero proximè antecedente, cuius duplus est, hoc est, quem bis continet.

Differentiæ.	7	14	28	56	112	224	448	896
7	14	28	56	112	224	448	896	1792

VII.

DATIS quotcunque numeris continuè proportionalibus, si eorum summa per eos sigillatim diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales. Et si Quotientum summa per ipsos Quotientes sigillatim diuidatur, creabuntur ijdem prorsus Quotientes ordine conuerso: atq; ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientum æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum, vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, vel denique, si terminorum numerus est impar, ex medio in seipsum ducto. Quod sanè incredibile videri possit. Exempli causa. Si dentur hi 4. numeri continuè proportionales in proportione dupla. 3.6.12.24. si eorum summa 45. per singulos diuidatur, erunt Quotientes 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. conuerso ordine in eadem proportione dupla continuè proportionales. Et si per hosce Quotientes diuidatur eorum summa $28\frac{1}{8}$. prodibunt ordine conuerso ijdem omnino Quotientes, & ita deinceps in infinitum. Ipsa verò summa $28\frac{1}{8}$. æqualis est numero, qui fit ex 15. in $1\frac{7}{8}$. vel ex $7\frac{1}{2}$. in $3\frac{3}{4}$. Sic etiam datis his 5. terminis in continua proportione tripla, 2.6.18.54.162. si eorum summam partiemur per eos sigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes 121.40$\frac{1}{3}$. 13$\frac{4}{9}$. 4$\frac{1}{27}$. 1$\frac{40}{81}$. in eadem continua proportione tripla. Quorum summa 180$\frac{121}{81}$. producitur vel ex 121. in 1$\frac{40}{81}$. vel ex 40$\frac{1}{3}$. in 4$\frac{1}{27}$. vel denique ex 13$\frac{4}{9}$. in seipsum. Vbi duo consideratione sunt digna. Primum, quando terminorum numerus est impar, summam

Quotientum esse numerum quadratum, cuius radix est medius terminus: quippe qui ex medio termino in seipsum ducto procreetur, vt dictum est. Deinde, eosdem semper Quotientes gigni ex diuisione summæ quotcunque terminorũ proportionis eiusdem cõtinuæ, quantumuis termini illi sint magni, aut parui, dummodo terminorum numerus idem semper sit. Veluti, si sint tres termini continuè dupli, siue magni, siue parui, erunt perpetuò hi Quotientes 7. $3\frac{1}{2}$. $1\frac{3}{4}$. Si sint quatuor, hi Quotientes erunt 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. In quinque numeris continuè triplis, erunt hi semper Quotientes, 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{13}{27}$. $1\frac{40}{81}$. Ac denique in quinque numeris continuam proportionem sesquialteram habentibus reperientur hi Quotientes, $13\frac{3}{16}$. $8\frac{19}{24}$. $5\frac{31}{36}$. $3\frac{49}{54}$. $2\frac{49}{81}$.

Ex hac proprietate inueniemus quotcunque terminos in data proportione continuè proportionales, quorum summa æqualis sit numero, qui sit ab extremis inter se multiplicatis, vel ex duobus medijs quibuslibet æqualiter distantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in seipsum ducto, si numerus terminorum fuerit impar. Nam si sumantur tot termini in data proportione continuè proportionales, quot inueniendi sunt, siue magni, siue parui, eorumq; summa per eosdem seorsum diuidatur, erunt Quotientes numeri, qui desiderantur. Quod si summa debeat esse numerus quadratus, accipiendi erũt termini, quorum numerus impar sit, & dato numero terminorum impari æqualis, &c. Quæres miraculi instar quodammodo censeri posit, dari posse in data proportione, quotquot quis iusserit, terminos continuè proportionales, quorum summa ex multiplicatione primi termini in vltimum gignatur: cùm contrarium huius experiamur in omnibus proportionibus continuis inæqualitatis, quarum termini sint numeri integri; & in aliis etiam omnibus, quarũ numeri fractiones habent admixtas, nisi hi numeri Quotientes sint producti ex diuisione summæ alicuius quotcunq; terminorum continuè proportionalium, per ipsos terminos proportionales, vt diximus.

Eodem modo satisfaciemus quæstioni, si quis petat duos numeros datam habentes proportionem, quorum summa æqualis sit numero ex eorum multiplicatione vnius in alterũ procreato. Nam si sumantur quilibet duo numeri in proportione data, atque eorum summa per eosdem figillatim diuidatur, satisfiet quæstioni propositæ per Quotientes inuentos. Vt si cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla superbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29. 9. vel 87. 27. proportionem datam habentes, vel alios quosuis. Summa etenim priorum 38. diuisa per 29. & 9. vel posteriorum summa 114. per 87. & 27. diuisa dabit Quotientes $1\frac{9}{25}$. & $4\frac{2}{9}$. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87. 27. ordine tamen conuerso, & quorum aggregatum est $5\frac{1}{2}\frac{3}{0}\frac{9}{1}$. qui videlicet numerus ex ductu etiam $1\frac{9}{29}$. in $4\frac{2}{9}$. gignitur.

VIII.

Inter duos quoscunq; numeros constituemus medium Geometricè proportionalem, si eos inter se multiplicemus, & procreati numeri radicem quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex vno in alterũ, fit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6. 24. 96. Nam 96. ad 24. habent proportionẽ quadruplam, qualem etiã habent 24. ad 6. Itaq; si inter datos duos numeros constituendus sit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi possit, necesse est vt numerus ex vno in alterum productus sit quadratus. Nisi enim quadratus sit, non habebit radicem in numeris, sed eius radix erit numerus, quem Arithmetici surdum, vel irrationalem vocant, explicantq; hoc modo, radix quadrata talis numeri: Veluti, datis duobus numeris 7. & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergo radicem quadratam numeri 63. quæ quidem numeris exprimi nequit, esse medio loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9. hoc modo, quæ quidem radix maior est, quàm 7. cùm huius quadratum sit 49. minor verò quàm 8. cùm huius quadratum sit 64. Neq; verò numerus 7. cum aliqua fractione, qui medius est inter 7. & 8. radix esse potest, etiamsi vnitas in infinitum cogitetur esse diuisa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad finem 8. demonstrabimus, cuiusmodi non est numerus 63.

7.	R. q. 63.	9.

IX.

Si quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos singuli cadant medij Geometricè proportionales, assequetur id hac ratione: Sumantur tres numeri quicunque, quorum secundus primi sit quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus. Quadrati enim numeri eorũ erunt Arithmeticè proportionales, & primus numerus acceptus in secundum ductus producet medium proportionalem Geometricè inter primum quadratum, & secundum, in proportione primi assumpti numeri ad secundum: secundus verò numerus assumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter secundum quadratum, & tertium, in proportione, quam inter se habent secundus, ac tertius numerus assumptus. Id quod perspicuè in hoc exemplo apparet.

Tres numeri assump.	*Primus* 8.	*Quintupl. pri.* 40.	*Septup. pri.* 56.
Quadr. Arith. prop.	64	1600	3136.
Medij Geometr.	320	2240	

Differentia enim trium quadratorum est 1536. & medij proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. & ex 40. in 56.

Hinc facilè reperies tres numeros quadratos, qui se æqualibus differentijs mutuò superẽt, si pro radicibus

bus eorum ſumes tres numeros, quorum ſecundus ſit primi quintuplus, & tertius eiuſdem primi ſeptuplus, vt diximus.

PARI ratione, dato quouis quadrato; reperientur alij duo maiores cum illo conſtituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati ſtatuatur primus numerus, & alij duo numeri ſumantur, quorum alter illius radicis ſit quintuplus, & ſeptuplus alter, erunt quadrati numeri horum duorum numerorum, quos quærimus. Vt ſi detur quadratus numerus 64. erit eius radix 8. primus numerus; ſecundus, 40. & tertius, 56. &c.

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmeticè proportionalibus, ſi eos per quemuis numerum eundem multiplices, vel per quamuis partem aliquotam, ſi quam habent, diuidas, erunt producti quoq; numeri, aut Quotientes Arithmeticè proportionales, inter quorum binos ſinguli etiam medij in Geometrica proportionalitate intercipiuntur: qui medij reperientur eodem modo, ſi nimirum medij inter quadratos inuenti per eundem illum numerum multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotam diuidantur. Vt ſi ſuperiores quadrati, vnà cum medijs proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

Arithmet. proport.	128		3200		6272
Medij Geomet.		640		4480	

Si verò diuidantur ijdem per 8. partem aliquotam communem quadratorum, (ſunt autem qualibet partes aliquotæ quadratorum, partes etiam aliquotæ mediorum) prodibunt hi numeri.

Arithmet. proport.	8		200		392
Medij Geomet.		40		280	

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti eaſdem ſemper proportiones, quas quadrati, eorumq; medij inter ſe habent. Quòd ſi hos 8. 200. 392. diuidas per 4. inuenies alios, 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales, inter quos cadunt Geometricè medij, 10. & 70. Et ſi deniq; hos 2. 50. 98. partiaris per 2. habebis alios, 1. 25. 49. inter quos medij Geometricè ſunt, 5. & 35.

VBI hoc etiam admiratione videtur dignum, quandocunque inter tres numeros Arithmeticè proportionales, ſiue quadrati ſint, ſiue non, cadunt duo medij Geometricè proportionales, vnus inter primum & ſecundum, & inter ſecundum ac tertium alter; quadratum prioris medij, & quadratum ſecundi numeri Arithmeticæ proportionalitatis, & quadratũ poſterioris medij conſtituere proportionalitatem Arithmeticam: Vt in poſteriori exemplo, quadrati numeri horum trium numerorum, 40. 200. 280. ſunt 1600. 40000. 78400. Arithmeticè proportionales, habentes differentiam eandem communem 38400. & ſic de cæteris.

X.

INTER quoſcunque duos numeros reperiemus quotcunque medios continuè proportionales, iucundæ ſanè & artificioſæ operationis: quam vt planius explicem, dicenda pauca ſunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex ſuis radicibus gignantur. In omni ergo proportione continua, quæ ab 1. incipit, ſecundus terminus radix eſt omnium numerorum inſequentium. Ea enim radix bis poſita, atq; ita in ſeipſam ducta, producit tertium terminum, qui eſt numerus quadratus, radix q. ipſa quadrata dicitur. Eadem radix ter poſita, & primùm in ſe, & iterum in productum multiplicata gignit quartũ terminum, qui cubus eſt, & propterea radix eius cubica appellatur. Deniq; ſi eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primùm in ſe, deinde in productum, tertiò iterum in vltimum productum, fiet quintus terminus: Et ſi ponatur quinquies, fiant q. quatuor ordine multiplicationes, orietur ſextus terminus, atq; ita in infinitum. Quo pacto autem omnes hæ radices nominari debeant, & ſignari, non eſt huius loci declarare, ſed ad Algebram tota hæc res ſpectat, vbi etiam docebimus, qua arte ex dato numero eruendæ ſint. Nunc, vt intelligatur res, de qua agimus, notandæ ſunt tres infrà ſcriptæ proportionalitates continuæ, quarum duæ primæ ſunt Arithmeticæ, nimirum duæ ſeries naturales numerorum ab 1. incipientes, tertia verò Geometrica ab 1. quoq; initium ducẽs. Vbi perſpicuè apparebit, quàm egregium vſum habeat ſeries numerorum naturalis in re propoſita.

Numerus mediorum.			1	2	3	4	5	6	*&c.*
Numeri ſignificantes radices.		1	2	3	4	5	6	7	*&c.*
Numeri Geomet. proport.	1	2	4	8	16	32	64	128	*&c.*

Prima complectitur numeros mediorum conſtituendorum: ſecunda numeros, qui ſignificant genera radicum, hoc eſt, quoties terminus ſecundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omnium inſequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatus numeros proportionalitatis Geometricæ illis reſpondentes procreet. Verbi gratia, vnitas medij ordinis ſignificat, numerum 2. tertij ordinis, qui radix eſt omnium aliorum, ſemel poſitum non eſſe multiplicandum, ſed ipſummet eſſe radicẽ omnium ex nulla ſui multiplicatione productum. At numerus 2. eiuſdem ſecundi ordinis indicat, eandem radicem 2. tertij ordinis poſitam bis hoc modo, 2. 2. & ita in ſe multiplicatam gignere 4. tertium terminũ eiuſdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij

ordinis denotat, radicem eandem 2. infimi ordinis poſitam ter hoc modo, 2.2.2. atq; ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco poſita in eandem 2. poſitam ſecundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio poſitam loco gignitur numerus 8. quartus nimirum proportionalitatis Geometricæ ſub numero 3. ordinis ſecundi. Idem dices de alijs. Vt, verbi gratia, numerus 7. ſecundæ proportionalitatis monſtrat, radicẽ eandem 2. tertij ordinis poſitam ſepties, hoc pacto, 2.2.2.2. 2.2.2. & in ſe continuè ſexies multiplicatam producere 128. octauum numerum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7. ſuppoſitum. Nam ex 2. primi loci in 2. ſecundi loci fiunt 4. & ex 4. in 2. tertij loci fiunt 8. & ex 8. in 2. quarti loci fiunt 16. & ex 16. in 2. quinti loci fiunt 32. & ex 32. in 2. ſexti loci fiunt 64. & denique ex 64. in 2. ſeptimi loci fiunt 128. &c. Atque hoc non ſolùm verum eſt in propoſita proportione continua dupla, ſed in omnibus alijs ab vnitate incipientibus, quicunque numerus ſecundum locum occupet, tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

ITAQVE ſi conſtituere vis quotlibet medios inter duos propoſitos numeros, cape numerum mediorum conſtituendorũ in primo ordine. Nam ex vtroq; numero dato extrahenda eſt radix, quæ toties ordine poſita, & continuè multiplicata vtrumq; producat, quot vnitates continentur in numero ſecundi ordinis, qui infra numerum mediorum conſtituendorum in ſupremo ordine acceptum ſcriptus eſt. Radices inuentas ſub datis numeris colloca, quam q; ſub ſuo, & ab eiſdem aſcende per continuam vtriuſque multiplicationẽ, (ducendo primùm quam q; radicem inuentam in ſe, deinde in numerum productum, & ſic deinceps.) ita vt duas proportionalitates Geometricas multiplices inſtituas à radicibus incipiẽtes, & ab eiſdem denominatas, tot terminorum, (excluſis datis duobus numeris) quot medij termini quærũtur. Poſt hæc ſingulos terminos vnius ordinis duc in ſingulos terminos alterius ordinis aduerſos & oppoſitos, hoc eſt, maximum vnius in minimũ alterius: proximum deinde ſub illo in proximũ ſupra hunc, &c. Ita vt in vno ordine ſemper deſcendas à ſupremo ad infimum vſq; , in altero verò ab infimo vſq; ad ſupremum aſcendas, vt in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos quærimus. Exempli cauſa, ſi inter 9. & 144. inueniendus ſit vnus terminus medio loco proportionalis ſumemus in primo ordine 1. & ſub hoc termino in ſecundo ordine numerum 2. qui indicat, ex vtroq; numero dato eruendam eſſe radicem quadratã, quæ videlicet bis poſita, per eius multiplicationem vtrumq; producat, vt declarauimus. Radices autem quadratæ inuentæ ſunt 3. & 12. Et quia vnus tantũ medius terminus deſideratur, non ſunt inſtituendæ proportionalitates Geometricæ à radicibus incipientes, quæ plures terminos habeant, ſed ipſæ radices inter ſe multiplicandæ. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9. & 144. vt hic vides, 9.36.144. Sic etiam ſi inter 18. & 288. conſtituendus ſit vnus terminus medius: quoniam hi numeri radices quadratas non habent, ſignabimus priorẽ hoc modo, R.q.18. poſteriorem autem ſic, R.q.288. Hæ autem radices inter ſe multiplicatæ faciunt 72. terminum medium proportionalem inter 18. & 288. hoc modo, 18.72.288. Vbi etiam admiratione dignum eſt, duos numeros, quorum neuter poteſt efferri, inter ſe multiplicatos gignere numerũ rationalem: cuius rei demonſtratio ex lib. 10. petenda eſt. Quo pacto autem inter ſe multiplicandi ſint duo numeri ſurdi, qui nimirum efferri non poſſunt, quales ſunt R.q.18. & R.q.288. docebimus in Algebra.

RVRSVS ſi dati ſint duo numeri 16. & 625. inter quos tres medij conſtituendi ſint, accipiemus in primo ordine numerum mediorum 3. cui in ordine ſecundo ſubſcribitur numerus 4. Igitur ex vtroque dato numero extrahenda eſt radix, quæ quater poſita, & continuè multiplicata vtrumque producat, quæ quadrati quadrata, vel Zenſizenſica dici ſolet, cuiuſmodi in dato exemplo ſunt 2. & 5. Conſtitues ergo hos ordines trium terminorum ſub 16. & 625. Geometricè proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eiſdem radicibus 2. & 5. à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet:

16	40	100	250	625
8				125
4				25
2				5

Ex 8. ſupremo primi ordinis in 5. infimum ſecundi ordinis fiunt 40. pro primo medio. Ex 4. in 25. fiunt 100. pro medio ſecundo. Denique ex 2. in 125. fiunt 250. pro tertio medio.

SCITVR autem dignum eſt, medios terminos inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quæ inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita eſſe 625. ad 250. & 250. ad 100. & 100. ad 40. & 40. ad 16. vt 5. ad 2. Quapropter, inuentis radicibus, ſi maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator eſt proportionis radicum inuentarum multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rurſum per eundem Quotiẽtem multiplicetur, atq; ita deinceps, conſtituentur intra duos extremos datos medij termini ijdem, etiamſi duo illi ordines proportionũ multiplicium à radicibus denominatarum non inſtituantur. Vt in exemplo dato. Diuiſa radice 5. per radicem 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$. denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorem numerum datum 16. in $2\frac{1}{2}$. gignes 40. primum medium: Et ſi rurſus ducas 40. in $2\frac{1}{2}$. procreabis 100. ſecundum medium: Et denique ſi centum ducas in $2\frac{1}{2}$. produces 250. tertium medium.

PERSPI-

PERSPICVVM autem eſt, inter datos quoslibet numeros nõ ſemper conſtitui poſſe numerum terminorum propoſitum, qui ſint rationales, ſed plerunque inuentos terminos eſſe irrationales: propterea quòd dati numeri non habent ſemper illas radices, quæ extrahendæ ſunt: aut certè non habeant eam proportionem, quam aliqui duo numeri, ex quibus eæ radices poſſunt extrahi, quod etiam ſatis eſſet. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadratiquadratas, hoc eſt, quæ quater poſitæ eos ſuis multiplicationibus producunt, tres medij termini incidunt: ita quoq; inter 48. & 1875. qui illis 16. & 625. proportionales ſunt, licet non habeant ſimiles radices, cadunt tres medij termini, vt hic patet:

48. 120. 300. 750. 1875.

QVAMOBREM ſi quis deſideret duos numeros, inter quos cadant, quotquot voles, termini medij rationales in data proportione, accipiendi ſunt duo numeri quomodocunque datam habentes proportionẽ. Eorum enim vterque ſi toties ponatur, quot termini medij quærendi ſunt, & adhuc ſemel & continuè multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus. Inter eos enim medij termini conſtituentur eo modo, quem expoſuimus: hoc eſt, vel inſtituendo ſub illis duos ordines proportionum multiplicium, quas aſſumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini quæruntur; vel multiplicãdo minorem eorum per denominatorem proportionis datæ, quæ eſt inter acceptos duos numeros, &c. Verbi gratia, ſi quis velit duos numeros, inter quos conſtitui poſſint quatuor termini medij rationales in proportione ſuperbipartiente tertias, cuius denominator eſt $1\frac{2}{3}$. ſumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem ſuperbipartientem tertias, & vtrumque quinquies ponemus hoc modo, 6.6.6.6.6. & 10.10.10.10.10. Ex multiplicatione enim continua vtriuſque exiſtent hi numeri 7776. & 100000. inter quos conſtitues quatuor medios numeros proportionales, vt hic vides:

7776	12960	21600	36000	60000	100000
1296					10000
216					1000
36					100
6					10

Qui quidẽ medij termini inueniũtur vel ex 1296. in 10. & ex 216. in 100. & ex 36. in 1000. & ex 6. in 10000. vel ex denominatore $1\frac{2}{3}$. proportionis ſuperbipartientis tertias in minorem numerum inuentũ 7776. & iterum in numerum productum, &c.

XI.

NVMERVM quemcunque datum diſtribuemus in quotuis partes proportionales Geometricè in data proportione hoc modo: Cape tot numeros continuè proportionales in data proportione, ſiue minimos, ſiue nõ minimos, in quot partes datus numerus diſtribuendus eſt, & per eorum ſummam datum numerum partire. Quotiens namque per ſingulos terminos in data proportione acceptos multiplicatus procreabit partes dati numeri ſeruantes datam proportionem inter ſe. Veluti ſi datus numerus 756. ſecandus ſit in 6. partes continuè proportionales in proportione dupla; ſi ſumantur 6. termini continuè dupli, 3.6.12.24.48.96. quorũ ſumma eſt 189. & per hanc ſummam datus numerus 756. diuidatur, Quotiens autem 4 per ſingulos acceptos numeros multiplicetur. procreabuntur hi 6. numeri continuè dupli, conficientes q3 ſimul in vnam ſummam collecti datum numerum 756. videlicet:

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eadem partes inuenientur, ſi ſumantur hi alij ſex numeri continuè dupli, $\frac{1}{100}\cdot\frac{2}{100}\cdot\frac{4}{100}\cdot\frac{8}{100}\cdot\frac{16}{100}\cdot\frac{32}{100}$. quorum ſumma eſt $\frac{63}{100}$. Vel hi 6. alij, 100.200.400.800.1600.3200. quorũ ſumma eſt 6300. Nam datus numerus 756. diuiſus per ſummam priorem $\frac{63}{100}$. facit 1200. qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum $\frac{1}{100}$. dabit primam partem 12. vt prius, &c. At idem numerus datus 756. diuiſus per poſteriorem ſummam 6300. facit Quotientem $\frac{756}{6300}$. qui ductus in primum numerum aſſumptum 100. producit eandem partem primam 12. & ſic de cæteris.

QVOD ſi cupias numerum, qui ſecari poſſit in quotuis partes proportionales ſine vlla fractione. (Nam niſi ſeruetur id, quod iam præcipiemus, incidemus plerunque in fractiones) aſſequeris propoſitum, ſi ſumas quemcunque numerum multiplicem ſummæ totidem terminorum proportionalium aſſumptorum. Vt ſi quis quærat numerum, qui poſſit diſtribui in 5. numeros integros ſeſquialteram proportionem continuam habentes, ſumptis 5. terminis in ſeſquialtera proportione continuè quibuſcunque, vt 64.96.144.216.324. quorum ſumma eſt 844. accipiemus huius ſummæ quemcunque numerum multiplicem, nimirum decuplum 8440. Hic enim per præceptum traditum ſecabitur in 5. numeros integros proportionis ſeſquialteræ continuæ, cum eo diuiſo per ſummam acceptorum numerorum, Quotiens neceſſariò ſit numerus integer.

HINC nullo negotio ſatisfaciemus quæſtioni, qua iubeamur in data proportione cõtinua reperire quotuis numeros, qui in vnam ſummam collecti conſtituant numerum quemcunque datum. Nam ſi datus numerus ſecetur in tot partes proportionales datæ proportionis, vt docuimus, ſoluta erit quæſtio. Vt ſi quis inuenire velit 4. numeros triplæ proportionis continuæ, quorum ſumma ſit 100. ſecandus erit hic numerus 100. in 4. nu-

meros proportionis triplæ, vt in $2\frac{1}{2}.\ 7\frac{1}{2}.\ 22\frac{1}{2}.\ 67\frac{1}{2}$. *Hi enim conficiunt datum numerum 100. Quòd si conficere debeant ſummam 400. erunt numeri quæſiti in tripla proportione continua hi, 10. 30. 90. 270. Horum enim ſumma eſt 400. Si deniq; ſummam conficere debeant, non ſuperantem 1. erunt huiuſmodi numeri,* $\frac{1}{40}.\ \frac{3}{40}.\ \frac{9}{40}.\ \frac{27}{40}$. *Summa enim horum eſt* $\frac{40}{40}$. *hoc eſt, 1.*

DE PROPORTIONALITATE HARMONICA.

I.

TRES *numeri in proportionalitate Harmonica inuenientur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ quibuſcunque, ſi primus in ſecundum, ac tertium, & ſecundus in tertium multiplicetur. Vt ſubiecta exempla demonſtrant.*

Arithm.	1. 2. 3.	3. 7. 11.	4. 6. 8.	10. 60. 110.
Harmon.	2. 3. 6.	21. 33. 77.	24. 32. 48.	600. 1100. 6600.

In omnibus enim ex primo termino Arithmeticæ proportionalitatis in ſecundum & tertium fit primus terminus Harmonicæ, & ſecundus: ex ſecundo verò in tertium, tertius.

ALIO *modo, & in idem recidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmeticæ. Nam medius terminus Arithmeticæ proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonicæ: extremi verò eiuſdē Arithmeticæ inter ſe multiplicati creant medium Harmonicæ. Vt in ijſdem exemplis manifeſtum eſt.*

HINC *fit, extremos terminos Harmonicæ proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmeticæ, ex qua orta eſt, habent: quia videlicet extremi Arithmeticæ per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonicæ extremos.*

QVAPROPTER *ſi reperiendi ſint tres numeri proportionalitatis Harmonicæ, quorum extremi, atq; adeò & differentia, datam habeant proportionem, ſumendi ſunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmeticæ proportionalitatis conſtituēdus: ac deniq; ex hiſce tribus terminis inueniendi tres in proportionalitate Harmonica, vt diximus. Vt ſi quærantur tres, quorum extremi habeant proportionem ſeſquitertiam, ſumemus 3. & 4. inter quos ea proportio reperitur: ſed quia eorū ſumma 7. impar eſt, non poteſt inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducemus vtrumque per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos enim 6. 8. cadet integer medius proportionalis Arithmeticè, 7. nimirum ſemiſſis eorum ſummæ. Ex his igitur tribus 6. 7. 8. Arithmeticè proportionalibus orientur hi tres Harmonicè proportionales, 42. 48. 56. quorum extremi, atq; adeò & differētia, proportionem ſeſquitertiam datam habent.*

SEQVITVR *etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonicæ binis Arithmeticæ, ex qua orta eſt, conuerſo ordine eſſe proportionales: hoc eſt, in Harmonica ita eſſe ſecundum ad primum, vt in Arithmetica tertius eſt ad ſecundum. Item in illa ſic eſſe tertium ad ſecundum, vt in hac eſt ſecundus ad primum: quia nimirum priores duo in Harmonica producti ſunt ex poſterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo verò poſteriores Harmonicæ procreati ſunt ex prioribus duobus Arithmeticæ in tertium ductis. Vt ex ſuperioribus exemplis perſpicuum eſt.*

VICISSIM *ſi primus numerus Harmonicæ proportionalitatis ducatur in ſecundum, ac tertium, & ſecundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis. Vel (quod idem eſt) ſi medius terminus Harmonicæ in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmeticæ; duo verò extremi Harmonicæ inter ſe multiplicati producent medium Arithmeticæ: eodem ſcilicet prorſus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicam oriri diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2. 3. 6. gigni hanc Arithmeticam, 6. 12. 18. Siue enim ducas primum 2. in ſecundum 3. & tertium 6. Item ſecundum 3. in tertium 6. produces 6. 12. 18. ſiue ducas medium 3. in extremos 2. 6. facies extremos 6. 18. & ex primo 2. in tertium 6. medium 12.*

HARMONICA *proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos, ſiue ad maiores numeros progrediendo, ſiue regrediendo ad minores, quando primi tres numeri ſunt proportionales Harmonicè, & tertio adiunguntur duo cum eo conſtituentes quoq; eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadem omnino proportione. Deinde vltimo, qui quintus eſt, adiunguntur eodem modo alij duo; atq; vltimo, ſiue ſeptimo, alij duo, & ſic in infinitum. Hoc autem fit verſus maiores numeros progrediendo, ſi poſteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primū habet. Vt datis his tribus numeris 2. 3. 6. Harmonicè proportionalibus, ſi poſteriores duo, 3. 6 ducantur in 3. denominatorem proportionis 6. ad 2. fient 9. 18. atq; ita erunt iam quinque termini, 2. 3. 6. 9. 18. Harmonicè proportionales. Et ſi poſteriores duo 9. 18. ducantur iterum in 3. denominatorē proportionis, erunt ſeptem hi termini, 2. 3. 6. 9. 18. 27. 54. continuè proportionales Harmonicè: & ſic progredi poterimus in infinitum, ita vt ſemper Harmonica proportionalitas cōtinuetur per terminos locorū imparium, vt per tertium, quintū, ſeptimū, nonum, &c. Quòd ſi verſus minores terminos progredi libeat, diuidendi erunt minores duo numeri per denominatorē proportionis extremorū: Et poſteriores duo minores inuēti iterum diuidendi per eundem denominatorē, & ſic deinceps in infinitum. Vt datis his*

tribus

tribus numeris, 18.9.6. ſi minores duo, 9.6. diuidantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18.6. fient 3.2. at q3 ita erũt iam quinque termini 18.9.6.3.2. Et ſi rurſus duo poſteriores inuenti 3.2. diuidantur per eundem denominatorẽ 3. adiuncti erunt vltimo termino 2. alij duo in Harmonica proportionalitate hoc modo, 18.9.6.3.2.1.$\frac{2}{3}$. At q3 ita deinceps progredi licebit in infinitum.

ALIO modo, & quidem magis proprie, continuatur proportionalitas Harmonica, ſiue ad maiores numeros progrediendo, ſiue ad minores, quando primi tres numeri ſunt Harmonicè proportionales: Item, relicto primo, alij ſequentes tres; & relictis duobus, ſequentes alij tres, at q3 ita deinceps: Sed in hac continuatione nunquã erit eadem proportio inter extremos trium, quæ inter extremos aliorũ trium. Vt in his 4. numeris, 3. 4.6.12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3.4.6. q̃ tres 4.6.12. Harmonicè proportionales ſunt: ſed priorum extremi 3.6. proportionem habent duplam, at extremi poſteriorum 4.12. triplam. Item continua eſſe dicitur Harmonica proportionalitas in his quinque terminis, 10.12.15.20.30. quia & in tribus, 10.12.15. & in tribus, 12.15.20. & in tribus, 15.20.30. Harmonica proportionalitas reperitur, licèt extremi quorumlibet trium non habeant eaſdem proportiones. Quo pacto autem in vtramque partem hoc modo continuanda ſit, quando continuari poteſt, (neque enim ſemper ad maiores numeros progrediendo poteſt hoc modo extendi) aut quo pacto quotlibet numeri continuè Harmonicè proportionales, vt expoſuimus, reperiri poſſint, ex iis, quæ ſequuntur, conſtabit.

II.

INTER quoſuis datos duos numeros conſtitues medium Harmonicè proportionalem, hac ratione. Numerum, qui ſit ex datorum duorum numerorũ differentia in eorum minorẽ partire per eorundem ſummam, Quotientem q3 minori adde. Conflatus enim numerus erit medius, quem quæris. Vel eandem differentiam datorum numerorum duc in maiorem, & productum partire per eorundem ſummam. Si enim Quotientem ex maiore dato ſubtrahas, reliquus fiet medius terminus quæſitus. Vt inter duos numeros 15. & 60. inuẽturus medium, duc eorũ differentiam 45. in minorem 15. & numerum productum 675. partire per eorum ſummam 75. Nam ſi Quotientem 9. minori 15 adijcias, conſtabis medium terminũ 24. vt hic patet, 15.24.60. Eundem medium reperies, ſi eandem differentiam 45. ducas in maiorem 60. & productum 2700. per eorum ſummam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60. detractus relinquet eundem medium terminum 24.

VIDES ergo, quando ſumma datorum duorum numerorum non metitur productum ex eorundem differentia in minorem eorum, vel in maiorem, medium inuentum eſſe neceſſariò integrum cum fractione. Vt ſi inter 7. & 10. inueniendus ſit medius, duc eorum differẽtiam 3. in minorem 7, & productum 21. per eorundem ſummam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. additus eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides $7.8\frac{4}{17}.10$. Quia tam 10. ad 7. habent proportionem ſupertripartientem ſeptimas, quàm differẽtia maiorum $1\frac{3}{17}$. ad minorem differentiam $1\frac{4}{17}$. Vel eorum differentiam 3. duc in maiorem 10. productumq3 numerum 30. partire per eorum ſummam 17. Quotiens enim $1\frac{3}{17}$. ſubtractus ex maiore 10. reliquum faciet eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

ALII tradunt medij termini inuentionẽ inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo: Inuentis duobus minimis numeris in proportione duorũ numerorũ datorum, iubent Quotientem, qui ſit ex diuiſione differentiæ datorum duorum numerorum per ſummam minimorum duorũ inuentorum, duci in minorem inuentum, & productum numerũ minori dato adijci: Vel eundem Quotientem duci in maiorem inuentum, & productum numerum ex maiore dato ſubtrahi. Semper enim vel ille conflatus numerus, vel hic reliquus dabit medium terminum, qui quæritur. Vt ſi inter 20. & 30. ſit inueniendus medius: minimi numeri proportionis inter 20. & 30. ſunt 2.3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. diuidatur per inuentorum ſummam 5. fit Quotiens 2. quem ſi ducamus in minorem inuentum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel ſi eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6. ex dato maiore 30. demamus, inuenietur ſemper medius terminus 24. Vt hic apparet, 20.24.30.

BREVIVS ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differẽtia per numerum, qui denominatorem proportionis, quã dati numeri habent, vna vnitate ſuperat. Quotiens enim minori termino additus dabit medium. Vt datis numeris 10.40. habentibus proportionem quadruplam; ſi eorum differentia 30. diuidatur per 5. qui numerus denominatorẽ proportionis vna vnitate ſuperat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16. hoc modo, 10.16.40.

SED ad memoriam iuuandã inueniemus fortaſſe commodius (licèt aliquantò longiore operatione) medium terminum inter duos extremos datos hoc modo: Si duo extremi nõ ſint impares, vel pares, ſed vnus par, & alter impar, duplica illos, & inter duplicatos conſtitue medium Arithmeticè proportionalem, qui ſemper erit ſemiſſis ſummæ eorum. Per hos deinde tres numeros Arithmeticè proportionales quære ex regula 1. tres Harmonicè proportionales. Ita enim inuentus erit medius terminus inter duos, qui eandem inter ſe proportionem habent, quam dati duo extremi. Quòd ſi fiat, vt primus inuentus ad ſecundum, ita primus datus ad aliud: hoc eſt, ſi per primum inuentum diuidatur numerus ex ſecundo inuento in primum datum factus, reperietur medius inter duos datos extremos. Vt ſi inter 7. & 10. inueniendus ſit medius; duplica eos, vt fiant 14. & 20. Summa enim horum 34. par eſt, cuius ſemiſſis 17. eſt medius Arithmeticè inter 14. & 20. hoc modo 14.17.20. Ex his tribus inuenientur hi tres Harmonicè proportionales, 238.280.340. Si ergo fiat vt primus in-

uentus 238. ad ſecundum 280. ita primus datus 7. ad aliud, inuenietur numerus 8 4/7. qui medius eſt Harmonicè inter 7. & 10. qui ab initio propoſiti fuerunt.

III.

PROPOSITIS *duobus numeris, reperiemus tertium vtroq; maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri poteſt, (Pulchrè autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterum genitum partiemur per numerum qui relinquitur, ſubtracta amborum differentia ex minore termino dato. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque dato maior, quem quærimus. Quòd ſi quando diuiſor reperiatur eſſe 0. vel quando amborum differentia ex minore termino ſubtrahi nequit, impoſſibile eſt, datis duobus numeris poſſe adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica. Vt ſi duo termini minores dentur 12. 16. diuidemus numerum ex eis procreatum 192. per 8. qui numerus relinquitur, ſi amborum differentia 4. ex minore 12. detrahatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus conſtituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12. 16. 24. Hanc extendemus, ſi ad duos terminos 16. 24. tertium adiungamus: nimirum diuidendo 384. numerum ex 16. in 24. factum, per 8. qui numerus remanet facta ſubtractione differentiæ amborũ, quæ eſt 8. ex minore 16. Inuenietur enim numerus 48. Quare ita ſtabunt 4. termini Harmonicè proportionales, 12. 16. 24. 48. Quòd ſi tentemus his adiungere alium maiorẽ, fruſtrà laborabimus. Nam datis duobus vltimis 24. 48. reperietur diuiſor eſſe 0. Differentia enim amborum, quæ eſt 24. ſubtracta ex minore 24. relinquit 0. Quòd ſi quis proponat hos duos numeros, 10. 12. adiungetur illis tertius vtroque maior, 15. Ad hos verò duos, 10. 11. apponetur tertius 12 2/9. Et ad duos 90. 99. tertius 110. At verò ad 3. 6. nullus adiũgi poterit: quia differentia inter ambos, quæ eſt 3. dempta ex minore 3. relinquit 0. Atque eodem modo, quando dati numeri habent proportionem duplam, non poteſt illis adiungi tertius proportionalis, quia differentia amborum ſemper eſt minori termino æqualis. Multò magis cùm dati numeri habent proportionem dupla maiorem, non inuenietur tertius maior illis proportionalis Harmonicè, quia differentia amborum tunc ſemper maior eſt minore termino, atq; idcircò ſubtractio fieri nequit. Vt ſi dentur numeri 3. 7. quorũ proportio eſt dupla ſeſquitertia, nimirum maior, quàm dupla, vides amborum differentiam 4. maiorem eſſe minore termino 3. Quare illis non adiungetur vllus tertius proportionalis.*

ALII *ita indaginant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiam in maiorem, numerumq; productum per numerum, qui relinquitur, ſubtracta eadem differentia ex minore numero, diuidunt; Quotientemq; denique maiori adjiciunt, vt tertium conficiant. Vt datis duobus numeris, 12. 16. ſit eorum differentia 4. ducatur in 16. & productus numerus 64. diuidatur per 8. (qui numerus relinquitur, ſubtracta eadem differentia, 4. ex minore 12.) fit Quotiens 8. qui additus ad maiorem 16. facit tertium 24. vt prius.*

ITAQVE, *vt duobus numeris adiungi poſſit tertius maior proportionalis, neceſſe eſt, illorum proportionem eſſe vel ſuperparticularem, vel ſuperpartientem, nimirum dupla minorem. Ex quo liquidò conſtat, Harmonicam proportionalitatem non poſſe progredi in infinitum verſus maiores numeros, ſi de continuatione ſecundo modo accepta loquamur, quæ propria eſt, vt in prima regula diximus. Nam cùm primùm venerit ad duos numeros, quorum proportio dupla eſt, vel maior, ibi neceſſariò proportionalitas conſiſtet, & vltrò non promouebitur.*

SEQVITVR *quoque ex priori regula, quando minor terminus ſuperat differentiam amborum ſola vnitate, tertium procreari ex primo in ſecundum: quia productus hic numerus diuiſus per illam vnitatem facit tertium numerum, vt diximus. Conſtat autem numero per vnitatem diuiſo, Quotientem eſſe eundem numerum diuiſum. Vt ſi dentur duo numeri 6. 11. quia minor 6. ſuperat amborum differentiam 5. ſola vnitate, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6. in 11. veluti hic vides, 6. 11. 66. Idem cernitur in hiſce numeris, 2. 3. 6. & 10. 19. 190. Semper enim tertius fit ex primo in ſecundum: quia primus ſuperat differentiam priorum duorum ſola vnitate.*

EX *poſteriori verò regula ſequitur, quando minor terminus ſuperat amborum differentiam ſola vnitate, tertium procreari, ſi productus ex amborum differentia in maiorem, maiori adjiciatur: quia productus ille diuiſus per illam vnitatem, non facit diuerſum Quotientem ab eo producto, &c. Vt datis eiſdem numeris 6. 11. ſi differentia 5. ducatur in 11. & productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. vt prius.*

QVARE *facilè quoque reperiri poſſunt tres numeri Harmonicè proportionales, ſi pro primo ſumatur quilibet numerus, pro ſecundo verò eius duplus, detracta prius vnitate, pro tertio denique numerus, qui ex primo fit in ſecundum. Vt ſi primus ſit 8. erit ſecundus 15. & tertius 120. & ſic de cæteris. Proportio autẽ tam extremorum, hoc modo inuentorum, quàm differentiarum, ſemper erit multiplex à medio, qui perpetuò impar eſt, denominata. Vt in his proximis tribus, 8. 15. 120. proportio eſt quindecupla.*

VNDE *ſi quærantur tres minimi numeri integri Harmonicè proportionales in quacunque proportione multiplici, ſiquidem denominator eſt numerus impar, ſtatuemus eum denominatorẽ in medio: ſemiſſem autem numeri proximè maioris in primo loco. In tertio denique collocabimus eum, qui ex primo in ſecundum fit. Vt ſi deſiderẽtur tres numeri integri, & minimi in proportione ſeptupla, locabimus 7. in medio & 4. (id eſt, ſemiſſem numeri 8. proximè maioris, q. 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, vt hic vides, 4. 7. 28. Si verò denominator eſt par, ſtatuemus numerum proximè maiorem in primo loco: in tertio verò collocabimus numerum, qui fit ex illo proximè maiore in denominatorem: In medio denique ponemus*

denomina-

denominatorem duplicatum. Vt ſi inueniendi ſint tres minimi integri in proportione octupla, conſtituemus 9. qui numerus proximè maior eſt denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerum 72. ex 9. in 8 genitum; in medio denique duplum denominatoris, nimirum 16. vt hic apparet, 9.16.72.

QVOD ſi tres numeri Harmonicè proportionales in data proportione inueniendi ſint, ſiue illi minimi ſint, & integri, ſiue non, agendum erit hoc modo: In medio ſtatuemus denominatorem datæ proportionis: In primo verò ſemiſſem numeri, qui denominatorem vna vnitate ſuperat: In tertio denique loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per medium factum. Veluti ſi quærantur tres in data proportione dupla ſupertripartiente ſeptimas, erit denominator huius proportionis, $2\frac{3}{7}$. collocandus in medio, & in primo numerus $1\frac{5}{7}$. nimirum ſemiſſis numeri $3\frac{3}{7}$. qui denominatorem $2\frac{3}{7}$. vnitate ſuperat. Tertius denique erit $4\frac{8}{49}$. factus ex primo $1\frac{5}{7}$. in medium $2\frac{3}{7}$. Ita igitur ſtabunt tres numeri inuenti, $1\frac{5}{7}.2\frac{3}{7}.4\frac{8}{49}$. qui ad hos tres eiuſdem denominationis reuocabuntur, $\frac{84}{49}.\frac{119}{49}.\frac{204}{49}$. ſi prius quilibet ad vnicam fractionē reducatur: Numeratores autem 84.119.204. erũt numeri integri Harmonicè proportionales, eritq; extremorum proportio, ac proinde & differentiarum, dupla ſupertripartiens ſeptimas, quæ videlicet data eſt.

IIII.

DVOBVS numeris datis, reperiemus tertium vtroque minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo: Numerum ex vno in alterum productum partiemur per ſummam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens enim erit is, qui quæritur. Vt ſi dentur duo nnmeri 6.12. ſi diuidamus numerum 72. ex 6. in 12. factum, per 18. ſummam ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertium 4. minorem vtroque illis proportionalem, vt hic cernis, 4.6.12. Hanc extendemus regrediendo verſus minores numeros, ſi duobus 4.6. minorem tertium adiungamus 3. hoc modo, 3.4.6.12. qui numerus 3. inuenietur, diuidendo numerum 24. factum ex 4. in 6. per 8. ſummam videlicet ex 6. & amborum differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3.4. adiungetur tertius minor $2\frac{2}{3}$. Atq; in hunc modum decreſcet proportionalitas qualibet Harmonica continuè in infinitum. Vbi animaduertere licet admirabilem ſanè varietatem inter has tres proportionalitates Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; quæ varietas tribus hiſce propoſitionibus explicatur.

I. *ARITHMETICA augetur in infinitum, ſed in infinitum non decreſcit.*

II. *HARMONICA contrà, decreſcit in infinitum ſed in infinitum augeri non poteſt. Quod intelligendum eſt, ſi ita continuari debeat, vt quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicam: hoc eſt, vt primus, ſecundus, ac tertius ſint Harmonicè proportionales: Item ſecundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam aliàs in vtramque partem extendi poteſt in infinitum, ſicut Geometrica, vt ſuprà in regula 1. diximus.*

III. *GEOMETRICA denique & augetur, & decreſcit in infinitum.*

EST & hoc notatu dignũ, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuatos, qui variè inter ſe comparati præcipuas perfectasq; conſonantias Muſicas exprimunt. Nam 6. eius baſes quadratæ; 8. anguli ſolidi, 12. latera, & 24. anguli plani conſtituunt hos 4. terminos 6.8.12.24. continuè proportionales Harmonicè. Proportio autem 8. ad 6. eſt ſeſquitertia, quæ conſonantiam Diateſſaron, ſiue Quartam conſtituit. Proportio verò 12. ad 8. ſeſquialtera eſt, continens conſonantiam Diapenten, ſiue Quintam. Proportio deinde 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla eſt, explicans conſonantiam Diapaſon, ſiue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla eſt, efficiens conſonantiam Diapaſon & Diapenten, hoc eſt, Duodecimam. Deniq; proportio 24. ad 6. quadrupla exiſtit, exhibens conſonantiam Diſdiapaſon, ſiue Decimamquintam.

V.

DATIS quotlibet numeris Arithmeticæ proportionalitatis, ſi quicunque numerus, ſiue minimus, ſiue non minimus, ab eis numeratus, per ſingulos diuidatur, erunt Quotientes conuerſo ordine Harmonicè proportionales. Et viciſſim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, ſi numerus, quem metiuntur, per ſingulos diuidatur, erunt Quotientes ordine conuerſo Arithmeticè proportionales. Verbi gratia: Sint Arithmeticè proportionales, 1.2.3.4.5.6. Numerus, quem metiuntur, eſt 720. ex eorum continua multiplicatione inter ſe procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, quæ in Arithmetica practica capite decimo ſcripſimus. Priore ergo per ſingulos datos diuiſo, inuenientur hi in proportionalitate Harmonica continua:

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Poſteriore autem per eoſdem datos diuiſo, reperientur hi:

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atque hi numeri inuenti eaſdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmeticæ proportionalitatis, bini ac bini, conuerſo tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad ſecundum, ita in Arithmetica ſecundus ad primum. Et vt in Harmonica ſecundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad ſecundum, &c. Numeri quoq; per minimum numeratum inuenti, ſunt minimi in ſuis proportionibus. Quòd ſi viciſſim numerus ab inuentis numeratus diuidatur per ſingulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmeticè pro-

portionales: Et ſi quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt ijdem numeri Arithmeticè proportionales, per quos Harmonicè proportionales inuenti ſunt, & eodem quidem ordine, quo dati ſunt, ſed ordine conuerſo, ſi cum inuentis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim ſi in vna proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progreſſus fit, & contrà.

IGITVR *ſi quis cupiat quotcunque terminos continuè Harmonicè proportionales, ſumendi ſunt totidem termini Arithmeticè quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus, (& minimus quidem, ſi minimi deſiderentur) per ſingulos diuidendus, vt diximus.*

VI.

DATIS *tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantùm ſit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia poſteriorum in primum. Vt hìc cernis. Nam tum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiuſce rei eſt: quia cùm ſit, vt 12. primus ad 6. ſecundum, ita 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, æqualis numero, qui ex ſecundo 6. fit in tertium 4. vt ex 2. regula proportionalitatis Geometricæ manifeſtum eſt. Idem conſtat in pluribus terminis, ſi terni ac terni ſumantur, cum ſuis differentijs, vt in his 6 terminis apparet:*

Differentia.	30	10	5	3	2	
Propor. Harmon.	60	30	20	15	12	10

Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10. in 15. & ex 5. in 30. ſiunt 150. Rurſus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. ſiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atque ita, vt vides, iucunda operatione probare potes, num dati quotcunque termini, aut inuenti, ſeruent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam ſumptis ternis, ac ternis, cum ſuis differentijs, ſi differentiæ commutato ordine ducantur in primum terminum, ac ſecundum, producant q3 vtrobique numeros æquales, erunt termini omnes continuè proportionales Harmonicè; ſin minus, nequaquam.

VII.

QVOD *ſi quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates exiſtant: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres inſequentes proportionalitatem Geometricam, & tres poſtremi proportionalitatem Harmonicam: ac denique primus, tertius, & quintus habeant datam proportionẽ continuam Geometricam. Vel ſi reperire quis velit tres numeros in data proportione continuè proportionales, ita vt inter primum ac ſecundum cadat medius Arithmeticè proportionalis, & inter ſecundum ac tertium medius Harmonicè proportionalis, medius denique ſtium datorum numerorum ſit inter medios inuentos medius proportionalis Geometricè, at q3 quinque numeri ita inuenti ſint minimi omnium, in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione:*

9.	6.	3.	$1\frac{1}{2}$.	1.
9.	6.	3.	$\frac{3}{2}$.	1.
18.	12.	6.	3.	2.

SIT *data proportio tripla, in qua tres minimi ſumantur termini, 9.3.1. Inter primos duos ſtatuatur medius Arithmeticè, 6. Per hunc diuidatur quadratus medij numeri 3. aſſumpti, & Quotiens $1\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. ſtatuatur, vt in primo ordine hic poſito apparet. Sed quia hic Quotiens integer eſt cum fractione, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. vt in ſecundo ordine vides. Quòd ſi eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros ſecundi ordinis per denominatorẽ 2. multiplicemus, procreabimus quinque minimos numeros quæſitos, vt in tertio ordine cernis. Nam 18.12.6. Arithmeticam habent proportionalitatem: 12.6 3. Geometricam: & 6.3.2. Harmonicam: ac denique 18.6.2. triplam datam. Quòd ſi nõ inueniendi ſint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus cõtinuatis, accipi poſſunt quicunque tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij: nimirum ſecundus, & quartus, inueſtigandi, vt dictum eſt.*

1.	2.	3.	$4\frac{1}{2}$.	9.
1.	2.	3.	$\frac{9}{2}$	9.
2.	4.	6.	9.	18.

SI *minores termini cum maioribus conferendi ſint, & data ſit proportio ſubtripla, inueniemus eodem artificio ex his tribus minimis, 1.3.9. ſubtriplis hos quinque, 2.4.6.9.18. Nam 2.4.6. ſeruant proportionalitatem Arithmeticam: 4.6.9. Geometricam: 6.9 18. Harmonicam; & 2.6.18. ſubtriplam propoſitam. Inueniendi modum conſpicis in hiſce tribus ordinibus appoſitis.*

9.	$7\frac{1}{2}$.	6.		4.
9.	$\frac{15}{2}$.	6.		4.
18.	15.	12.	$9\frac{3}{5}$.	8.
18.	15.	12.	$\frac{48}{5}$.	8.
80.	75.	60.	48.	40.

RVRSVS *ſit data proportio ſeſquialtera, in qua tres minimi termini ſint, 9.6.4. Inter 9. & 6. medius eſt Arithmeticè, $7\frac{1}{2}$. vt in primo ordine. Reuocetur ad vnicam hanc fractionem $\frac{15}{2}$. vt in ſecundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro ſecundo numero, relicto denominatore, ducantur alij in ſecundo ordine in denominatorem, 2. vt in tertio ordine factum eſt: Et quadratus numerus numeri 12. nimirũ 144. diuidatur per 15. ac*

Quotiens

Quotiens $9\frac{3}{5}$. in minimis terminis, ſtatuatur medius inter 12. & 8. eiuſdem tertij ordinis. Hunc numerum $9\frac{3}{5}$. reuocabimus ad hanc vnicam fractionem $\frac{48}{5}$. vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5. inuentiq; erunt quinque minimi numeri quaſiti, vt in quinto ordine apparet.

4.		6.		9.
4.	5.	6.	$7\frac{1}{5}$.	9.
4.	5.	6.	$\frac{30}{5}$.	9.
20.	25.	30.	36.	45.

Si minores numeri cum maioribus comparandi ſint, inuenientur in proportione data ſubſeſquialtera quinque termini minimi, vt hic vides in quarto ordine. Eademq; in cæteris eſt ratio.

Potes quoque, ſi placet, in primo ordine omnes quinque numeros conſtituere, & fractiones, ſi quæ ſint, ad vnicam denominationē minimam reuocare, & deinde quamlibet ad vnicam fractionem. Nam ſi numeratores pro illis ſubſtituas, denominatore cōmuni relicto, & reliquos numeros integros per communē denominatorē multiplices, efficies quinque numeros minimos integros quæſitos. Vt ſi ſubquadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1.4.16. Additis ſimul 1.4. erit ſumma dimidium $2\frac{1}{2}$. medius Arithmeticè inter eos. Et ſi diuidatur quadratus numerus numeri 4. per $2\frac{1}{2}$. fit Quotiens $6\frac{2}{5}$. medius Harmonicè inter 4. & 16. Duæ autem fractiones reducentur ad minimam denominationem, vt in ſecundo ordine. Et fractionibus ſingulis ad vnicam fractionem reuocatis, conſtituetur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communē multiplicatis, conſtituentur quinque minimi numeri quæſiti, vt in quinto ordine vides. Atq; in hunc modum quotcunq; terminos proportionem aliquam ſeruantes, in quibus permiſta ſunt fractiones: ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

1.	$2\frac{1}{2}$.	4.	$6\frac{2}{5}$.	16.
1.	$2\frac{5}{10}$.	4.	$6\frac{4}{10}$.	16.
1.	$\frac{25}{10}$.	4.	$\frac{64}{10}$.	16.
10.	26.	40.	64.	160.

VIII.

Quando quatuor numeri ita ordinantur, vt ipſi ſint Geometricè proportionales non continuè, vnus autem mediorum cum extremis ſeruet proportionalitatem Arithmeticam, alter verò Harmonicam, ita vt in quatuor illis numeris omnes tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri conſtituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, vt in ipſis reperiantur dua duntaxat proportionalitates, vt vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica; vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem conſtituere.

Maximam Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportione datam, ita conſtitues: Sit data proportio, qua 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam ſumma eorum eſt impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmeticè conſtituatur 7. hoc modo, 12.7.2. Quòd ſi eorum ſumma fuiſſet par, accepiſſem ſtatim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmeticè proportionalibus inueniantur tres Harmonicè proportionales per primā regulam, 84.24.14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem, quam 12. ad 2. vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84.14 qui ſemper ita inuenti pares erunt, ſtatuatur etiam medius Arithmeticè, 49. erunt quatuor quæſiti numeri, 84.49.24.14. Nam extremi habent datam proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipſos enim quatuor exiſtit Geometrica proportionalitas non continua, cùm eadem ſit proportio 84. ad 49. qua 24. ad 14. vel 84. ad 24. qua 49. ad 14. vt liquidò conſtat ex 7. proprietate trium harum proportionalitatum. At inter 84.49.14. Arithmetica. Ac denique inter 84.24.14. Harmonica ex conſtructione, vt hic vides.

Tres proportio-	84.	49.	24.	14.	*nalitates ſimul.*			
Geometricè proport.	84.	49.	24.	14.	*Vel*	84.	24.	49.	14.
Arithmeticè proport.	84.		49.		14.			
Harmonicè proport.	84.		24.		14.			

Rurſus ſit data proportio, qua 3. ad 2. Quoniam iterum eorum ſumma eſt impar, ſint eorum dupli 6.4. inter quos ſtatuatur medius in Arithmetica proportionalitate, 5. hoc modo, 6.5.4. Ex his per primam regulam inuenio Harmonicè proportionales 30.24.20. Conſtituto autem medio Arithmeticè 25. inter 30. & 20. erunt eadē ratione quatuor numeri quæſiti, 30.25.24.20. cū habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.

Geometricè proport.	30.	25.	24.	20.	*Vel*	30.	24.	25.	20.
Arithmeticè proport.	30.		25.		20.			
Harmonicè proport.	30.		24.		20.			

Eosdem 4. numeros maximæ harmoniæ reperiemus, ſi pro extremis ſumamus quoſuis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos ſtatuatur medius Arithmeticè: ſiat au-

tem, vt inuentus ad primum extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inuentus in Harmonica proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando enim in 4. numeris Geometricè proportionalibus, quales sunt 4. inuenti, vnus mediorum est medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorum medius est in Harmonica inter eosdem extremos, vt suprà diximus in 7. proprietate harũ trium proportionalitatũ. Quando igitur hi 4. numeri inuenti sunt integri, factum erit, quod proponitur: si verò admistæ sint fractiones, reducemus eos ad integros, vt ad finem antecedentis regulæ 7. scripsimus. Vt si proportio data sit dupla, statuemus extremos, 12. & 6. Dimidium summæ eorũ 9. erit medius terminus inter eos Arithmeticè proportionalis, hoc modo, 12. 9. 6. Si igitur fiat, vt 9. ad 6. ita 12. ad aliud: Vel vt 9. ad 12. ita 6. ad aliud, inuenietur semper numerus 8. inter 12. & 6. in Harmonica proportionalitate medius. Quare sic stabunt 4. numeri maximæ Harmoniæ, 12. 9. 8. 6. Postremò si in eadem proportione dupla extremorum sumamus pro extremis, 20. & 10. inueniemus medium Arithmeticè, 15. & Harmonicè $13\frac{1}{3}$. in minimis numeris, hoc modo, 20. 15. $13\frac{1}{3}$. 10. Si ergo tertium numerum ad vnicam fractionem $\frac{4}{3}$. reuocemus, & eius numeratorem 40. denominatore relicto, tertium statuamus, inuenientur alij, si inuentos per denominatorem 3. multiplicemus, vt hic vides, 60. 45. 40. 30.

Minorem autem Harmoniam sic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri sola proportionalitas, Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continuè proportionales Geometricè, quorum extremi pares ambo sint, vel impares. Si enim inter extremos statuas medium in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæsitos. Vt si sumantur hi tres numeri sesquialteri, 16. 24. 36. & inter extremos inueniatur medius Arithmeticè proportionalis, 26. erũt 4. quæsiti numeri, 16. 24. 26. 36. quorum tres 16. 24. 36. Geometricè, & tres 16. 26. 36. Arithmeticè proportionales sunt, ex constructione.

Si verò sola Geometrica cũ Harmonica desideretur, cape quoq; tres numeros quoscunque continuè proportionales Geometricè. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quæruntur. Vt si sumantur ijdem tres sesquialteri, 16. 24. 36. inuenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, $22\frac{2}{13}$. Sic ergo stabunt 4. numeri inuenti, 16. $22\frac{2}{13}$. 24. 36. qui reducentur ad hos integros, 208. 286. 312. 468. Si accepisses hos numeros tres duplos, 20. 10. 5. inuenisses inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20. 10. 8. 5.

Si denique optes solam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonicè proportionales. Si namque inter medium, & alterutrum extremorum statuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt si sumantur hi tres 6. 8. 12. erit inter priores duos medius Arithmeticè proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6, 7, 8. 12. At inter posteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo stabunt 4. inuenti numeri, 6. 8. 10. 12. qui omnes (quod casu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) sunt Arithmeticè proportionales, & non solum tres 8. 10. 12. ex constructione: at soli tres accepti 6. 8. 12. habent proportionalitatem Harmonicam.

IX.

Si inueniendi sint quotcunque numeri Arithmeticè proportionales continuè, inter quorum binos ac binos cadant singuli medij Harmonicè proportionales integri, efficietur id hac ratione: Sumantur tot termini Arithmeticè proportionales, quot quæruntur, & bini in proportione binorum proximorum minimi. Si enim accipiatur minimus numerus numeratus à summis binorum minimorum acceptorũ, atq; hic in singulos acceptos numeros Arithmeticè proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quæruntur. Sint enim, verbi gratia, inueniendi quatuor. Cape quatuor quoscunque numeros Arithmeticè proportionales, 3. 6. 9. 12. & 1. 2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2. 3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3. 4. minimos in proportione 9. ad 12. erunt q; tres summa binorum minimorum 3. 5. 7. at q; ab his minimus numeratus, 105. Si igitur hunc ducas seorsum in singulos acceptos, 3. 6. 9. 12. procreabis 4. numeros Arithmeticè proportionales, quos desideras, 315. 630. 945. 1260. Nam inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medius est, 420. Inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. vt hic cernis.

Arithm. proport.	315		630		945		1260	
Medij Harmon.		420		756		1080		

Itaque si vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonicè, sume duos minimos in data proportione, & eorum summam duc in duos data proportionis. Vt si data sit proportio tripla inter 4. & 12. erũt minimi termini, 1. 3. quorũ summã 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quæsitos. Medium Harmonicum inter eos erit 24. Vt hic vides, 16. 24. 48. Si data proportionis numeri fuissent minimi 1. 3. duxissemus vtrumque in eorum summam 4. factiq; essent hi duo numeri 4. 12. inter quos cadit Harmonicè medius 6.

X.

Si autem volueris quotcunque terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, assequeris id hoc artificio: Sume tot minimos numeros continuè proportionales Geometricè, quot desiderantur, & singulos multiplica per summam duorum in eadem proportione minimorum: Et si quidem producti fuerint omnes

nes pares, ipſi erunt, quos quærimus; ſin minus, eorum dupli dabunt quæſitos numeros. Sint enim inueniendi, verbi gratia, tres in proportione ſeſquialtera. Cape totidem minimos in data proportione, 4.6.9. & duos minimos in eadem, 2.3. Horum ſummam 5. duc in ſingulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares ſunt, dupla, habebis q3 propoſitos numeros 40.60.90. Nam inter 40.60. medium Harmonicum eſt, 48. Arithmeticum 50. Et inter 60.90. Harmonicum medium eſt, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides:

Geometr. propor.	40			60			90	
Medij Harmon.		48			72			
Medij Arithmet.			50			75		

HINC facilè reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercipiantur duo medij, alter ſecundùm proportionalitatem Arithmeticam, & ſecundùm Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis datæ proportionis, ſi eorum ſummam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoſcunque alios numeros datam habentes proportionem duxeris, erunt numeri producti, ſi pares ſunt, quæſiti: ſi verò vterq3 non eſt par, erunt eorũ dupli, quos quærimus. Vt ſi data ſit proportio ſeſquitertia, cuius minimi numeri ſunt 3.4. eorumq3 ſumma, 7. Si ergo duces 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoq3 habentes proportionem, producēs vel 21.28. vel 84. & 112. Et quia priores duo nõ ſunt pares, erunt eorum dupli, 42.56. ij, quos quærimus. Poſteriores autem duo, quia pares ſunt, erunt quæſiti. Tam enim inter illos, quàm inter hos cadunt duo medij, quos quærimus, vt hic manifeſtum eſt:

Numeri inuenti.	42			56			84			112		
Medij Harmon.		48			Vel			96				
Medij Arithm.			49						98			

XI.

SI verò quis petat ſibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorũ binos bini cadant medij, alter in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alter, exequemur id hac methodo: Inueniantur, p 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales 2.50.98. inter quorum priores binos ſit medius Geometricè, 10. & inter binos poſteriores, 70. ſtatuanturq3 ordine ſic, 2.10.50.70.98. Minimus autem numerus ab his quinque numeratus ſit 2450. Quo diuiſo per eoſdem quinque numeros, Quotientes ſint, 1225.245.49.35.25. Si igitur omnes Quotientes ſint pares, vel impares, erunt primus, tertius, & quintus, vt 1225.49.25. ij numeri, qui quæruntur. Sunt enim Harmonicè proportionales, vt conſtat ex 5. regula, cùm ſint Quotientes producti ex diuiſione numeri 2450. quem numeri 2.50.98. Arithmeticè proportionales numerant, per eoſdem numeros 2.50.98. Inter binos autem cadunt Geometricè proportionales, 245. ſecundus Quotiens; & 35. tertius Quotiens. Habent enim 1225.245.49. eaſdem proportiones conuerſo ordine, quas continuè proportionales 2.10.50. habent, vt conſtat ex 7. regula proportionalitatis Geometricæ. Eodemq3 modo 49.35.25. eaſdem habebunt proportiones, quas conuerſo ordine habent continuè proportionales 50.70.98. cùm tam illi, quàm hi, ſint Quotientes producti per diuiſionem eiuſdem numeri 2450. per 2.10.50. & per 50.70.98. Certum autem eſt, inter binos eoſdem 1225.49. & inter 49.25. cadere quoque ſingulos Arithmeticè proportionales, cùm omnes pares ponantur, vel impares. Quòd ſi non omnes ſint pares, duplicandi erunt omnes 5. Quotientes, vt pares numeri fiant, qui idem omnino præſtabũt, quod quærimus. Habebunt enim eaſdem proportiones, quas eorum ſubdupli habent, ac proinde tam inter primũ ac tertium ſecundus, quàm inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometricè proportionalis. Cùm ergo inter eoſdem cadant medij Arithmeticè, conſtat propoſitum. Exemplum ſuperius ob oculos hic poſitum eſſe vides:

Tres Harm. proport. inuent.	1225			49			25	
Medij Arithmet.		637			37			
Medij Geometr.			245			35		

XII.

RVRSVS ſi quærantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos cadant bini proportionales, Geometricè vnus, & alter Harmonicè, ſatisfaciemus quæſtioni hoc modo: Reperiatur iterum per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales, 2.50.98. inter quorum binos ſinguli medij cadant in proportionalitate Geometrica; ſumanturq3 duo minimi, 1.25. in proportione priorum duorum: Item duo minimi 25.49. in proportione duorum poſteriorum; & horum ſumma, 26.74. numerent minimum numerum 962. in quem tres illi inuenti 2.50.98. ducantur. Producti enim numeri, 1924.48100.94276. erunt, quos inquirimus. Cùm namque eaſdem proportiones habeant, quas eorum ſubmultiplices 2.50.98. ſit, vt quemadmodum inter binos horum ſinguli cadant medij Geometricè, ita quoq3 inter binos illorum ſinguli intercipiantur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia ſummæ minimorum numerorum 1.25. & 25.49. in proportionibus 2. ad 50. & 50. ad 98. (quitres, 2.50.98. Arithmeticè, ſunt

cè sunt proportionales.) numerant minimum numerum 962. qui in eos tres, 2.50.98. ductum produxit 1924. 48100.94276. cadent inter binos horum trium singuli medij Harmonicè proportionales, vt in 9 regula traditum est. Exemplum ergo cum medijs sic stabit:

Arithm.proport.inuent.	1924			48100			94276	
Medij Harmon.		37700			63700			
Medij Geometr.			96200			67340		

XIII.

EX his, quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros proportionales, siue Arithmeticè, siue Geometricè, siue Harmonicè, inter quorum binos cadant terni medij, vnus Arithmeticè, alter Geometricè, & reliquus Harmonicè. Sint enim primùm inueniendi tres Arithmeticæ proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij: vnus in Geometricæ proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoq; inter binos singuli Arithmeticè proportionales, atq; adeò quæstioni satisfacient. Si verò nō omnes pares sint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes, in tribus numeris antecedentis regulæ, qui omnes pares sunt, vt hic apparet:

Arith.proport.	1924			48100			94276	
Medij Harm.		37700			63700			
Medij Geomet.			96200			67340		
Medij Arithm.			25012			71188		

DEINDE inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni medij, in singulis proportionalitatibus singuli, sit q; proportio data, quam medij Geometricæ proportionalitatis efficere debent, nimirum sesquialtera. Cape quinque numeros minimos datæ proportionis continuè proportionales, 16.24.36.54.81. & duos minimos 4.9. in proportione primi 16. ad tertium 36. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum summam 13. duc in eundem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti enim numeri 208.468.1053. duplicati, (quoniam ipsi non omnes pares sunt, aut impares; alias non essent duplicandi) nimirū 416.936.2106. (vt inter binos cadere possint singuli medij Arithmeticè) sunt ij, quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonicè, & Arithmeticè alter, vt ex 10. regula patet: Et inter eosdem cadunt medij Geometricè, nimirum dupli eorum, qui fiunt ex eadem summa 13. duorum minimorum in secundum 24. & tertium 54. ab initio acceptos: quemadmodum hic manifestum est.

Geometr. proport.	416			936			2106	
Medij Harmon.		576			1296			
Medij Geometr.			624			1404		
Medij Arithm.				676			1521	

POSTREMO sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuentis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225.49.25. inter quorum binos cadant bini Medij, vnus Arithmeticè, & alter Geometricè, vt in 11. regula docuimus, sint proportionis priorum duorum minimi duo numeri 25.1. & proportionis duorum posteriorum minimi duo numeri 49.25. quorum summa 26.74. numerent minimum numerum 962. Hunc si in tres inuētos duxeris gignes tres quæsitos 1178450.47138.24050. Nam inter binos cadent bini medij, vnus Arithmeticè, & alter Geometricè, quemadmodum inter eorum submultiplices 1225.49.25. nimirum numeri, qui fiunt ex eodem 962. in medios suprà inuentos. Item inter eosdem binos cadent singuli medij Harmonicè, vt ex 12. regula constat, cùm producti sint ex minimo numerato à summis minimorū terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes:

Harm.prop.	1178450			47138			24050	
Medij Arit.		612794			35594			
Med.Geom.			235690			33570		
Med.Harm.				90650			31850	

XIIII.

PARI ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam datæ proportionis, inter quos cadant tres medij, vnus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. ad 3. & tres minimi in ea numeri, 4.2.1. erit q; ex defin. 10. huius libri proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1. vel 6. ad 3. data. Ducatur summa 5. ex 4. & 1. collecta in duos quosuis

numeros

numeros habentes eandem proportionem, quam 4. ad 1. hoc eſt, duplicatam datæ proportionis, vt in 12. & 3. Producti autem numeri 60. 15. duplicentur, ſi ambo non ſint pares, vel impares. Dupli enim 120. 30. ſunt quos quærimus. Et ſi vterque eſſet par, aut impar, ipſi eſſent quæſiti, & duplicatio non foret neceſſaria. Ita autem ſe habent tres medij inter 120. & 30. vt hic apparet:

Duo numeri inuenti.	120				30
Medius Arithmet.		75			
Medius Geometr.			60		
Medius Harmon.				48	

XV.

POSTREMO ſi lubeat numerum quemcunque propoſitum diſtribuere in quotuis partes, Harmonicam proportionalitatem ſeruantes, efficies id hac ratione: Cape per 5. regulam tot numeros Harmonicè proportionales, in quot partes numerus eſt diſtribuendus. Si enim per eorum ſummam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos fiunt, erunt Quotientes partes, quas quæris, eruntq; acceptis numeris eodem ordine proportionales. Vel ſi per ſummam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in ſingulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quæris. Vt ſi numerus 130. diſtribuendus ſit in tres partes Harmonicè proportionales; ſi ſumantur tres numeri 6. 8. 12. ex 5. regula inuenti, & per eorum ſummam 26. diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in aſſumptos numeros 6. 8. 12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel ſi datum numerum 130. per 26. ſummam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in ſingulos acceptos, 6. 8. 12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eadem partes, quas inquirimus. Conſtituunt enim datum numerum 130. ſunt q3 Harmonicè proportionales. ſicuti aſſũpti numeri, 6. 8. 12. Eodẽ modo diuidetur numerus 10. in has tres partes, $2\frac{4}{13}. 3\frac{1}{13}. 4\frac{8}{13}$. eodem modo proportionales. Eademq; ratio eſt de pluribus partibus.

QVO PACTO EX PROPORTIONE AEQVALITATIS OMNES INAEQVALITATIS PROPORTIONES RATIONALES ORIANTVR.

POSITIS tribus terminis æqualibus, ſiue vnitatibus, ſiue numeris, mirabile dictu eſt, quàm facili & iucunda ratione, ex varia illorum inter ſe additione, omnes proportiones rationales inæqualitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine:

AEQVALES termini, ſiue numeri, procreant numeros duplos: DVPLI triplos: TRIPLI quadruplos: QVADRVPLI quintuplos: & ſic in infinitum.

DEINDE ex multiplicibus terminis inuentis, ſi ordinem inuertant, gignentur omnes ſuperparticulares, hoc ſeruato ordine: DVPLI inuerſi producunt ſeſquialteros: TRIPLI inuerſi ſeſquitertios: QVADRVPLI inuerſi ſeſquiquartos: atq; ita deinceps.

TERTIO ex terminis ſuperparticularibus inuentis, ſi inuertant quoque ordinem, producentur omnes ſuperpartientes, hac ſerie: SESQVIALTERI inuerſi exhibẽt ſuperbipartientes: SESQVITERTII inuerſi ſupertripartientes: SESQVIQVARTI inuerſi ſuperquadrupartientes, &c.

QVARTO ex ijſdem terminis ſuperparticularibus eo ordine, quo inuenti ſunt, naſcentur omnes multiplices ſuperparticulares, hoc ordine:

SESQVIALTERI dant duplos ſeſquialteros: DVPLI ſeſquialteri triplos ſeſquialteros: TRIPLI ſeſquialteri quadruplos ſeſquialteros, &c. SESQVITERTII item gignunt duplos ſeſquitertios: DVPLI ſeſquitertij triplos ſeſquitertios: TRIPLI ſeſquitertij quadruplos ſeſquitertios, &c. SESQVIQVARTI turſus efficiunt duplos ſeſquiquartos: DVPLI ſeſquiquarti triplos ſeſquiquartos: TRIPLI ſeſquiquarti quadruplos ſeſquiquartos, &c.

QVINTO ex terminis ſuperpartiẽtibus inuentis eliciẽtur oẽs multiplices ſuperpartientes, hoc ordine: SVPERBIPARTIENTES generant duplos ſuperbipartientes. DVPLI ſuperbipartientes, triplos ſuperbipartientes: TRIPLI ſuperbipartientes quadruplos ſuperbipartientes, &c. SVPERTRIPARTIENTES quoque pariunt duplos ſupertripartientes; DVPLI ſupertripartientes, triplos ſupertripartientes: TRIPLI ſupertripartientes, quadruplos ſupertripartientes, &c. SVPERQVADRVPARTIENTES itẽ gignunt duplos ſuperquadrupartientes: DVPLI ſuperquadrupartiẽtes, triplos ſuperquadrupartiẽtes: TRIPLI ſuperquadrupartiẽtes, quadruplos ſuperquadrupartiẽtes, atq; ſic de cæteris.

MODVS autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem expoſuimus, eſt vnicus, isq; facillimus, nimirum hic:

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, ſemel ſumpto, & ſecundo bis, & tertio ſemel, exhibet primum terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ.

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis constituendæ oritur ex secundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, semel sumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricę constituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia erui debet, sumptus semel.

ATQVE hoc præceptum triplex sub oculos ponitur, hoc appositio typo, vbi liquidò constat, qui termini datæ proportionalitatis sumendi sint vel semel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis constituantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS PROPORTIONIS GEOMETRICAE EX ALIA GEOMETRICA.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	*Primus.*	*Secundus.*	*Tertius.*
Primus constituitur, si dati termini ita sumantur.	*Semel.*	*Bis.*	*Semel.*
Secundus constituitur, si termini dati ita sumantur.		*Semel.*	*Semel.*
Tertius constituitur, si ita sumantur dati termini.			*Semel.*

SEQVVNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportione. Proponimus autem duas æqualitatis proportiones: vnam in vnitatibus, alteram verò in binarijs. Vbi hoc notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari semper minimos terminos cuiusque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MVLTIPLICIVM.

Æqualitatis proportio.	1	1	1	2	2	2
Dupli ex æqualibus creati.	4	2	1	8	4	2
Tripli ex duplis.	9	3	1	18	6	2
Quadrupli ex triplis.	16	4	1	32	8	2
Quintupli ex quadruplis.	25	5	1	50	10	2

GENERATIO SVPERPARTICVLARIVM.

Dupli inuerso ordine.	1	2	4	2	4	8
Sesquialt. ex duplis inuersis.	9	6	4	18	12	8½
Tripli ordine conuerso.	1	3	9	2	6	18
Sesquitert. ex tripl. inuersis.	16	12	9	32	24	18
Quadrupli ordine conuerso.	1	4	16	2	8	32
Sesquiquart. ex quadr. conuersis.	25	20	16	50	40	32

GENERATIO SVPERPARTIENTIVM.

Sesquialteri inuersi.	4	6	9	8	12	18
Supertrip. ex sesquialt. inuersis.	25	15	9	50	30	18
Sesquiter. ordine inuerso.	9	12	16	18	24	32
Supertr. ex sesquit. inuersis.	49	28	16	98	56	32
Sesquiquart. conuerso ordine.	16	20	25	32	40	50
Superquadrup. ex sesquiq. conuersis.	81	45	25	162	90	50

GENERATIO MVLTIPLICIVM SVPERPARTICVLARIVM.

Sesquialteri directo ordine.	9	6	4	18	12	8
Dupli sesquialteri ex sesquialt.	25	10	4	50	20	8
Tripli sesquialt. ex dupl. sesquialt.	49	14	4	98	28	8
Quadrupl. sesquial. ex tripl. sesquial.	81	18	4	162	36	8

Sesquitert.

Seſquitertij ordine recto.	16	12	9	32	24	18
Dupli ſeſquitert. ex ſeſquitert.	49	21	9	98	42	18
Tripli ſeſquitert. ex dupl. ſeſquitert.	100	30	9	200	60	18
Quadrupl. ſeſquit. ex tripl. ſeſquit.	169	39	9	338	78	18

Seſquiquarti ordine recto.	25	20	16	50	40	32
Dupli ſeſquiquar. ex ſeſquiquar.	81	36	16	162	72	32
Tripli ſeſquiq. ex dupl. ſeſquiquar.	169	52	16	338	104	32
Quadr. ſeſquiq. ex tripl. ſeſquiq.	289	68	16	578	136	32

GENERATIO MVLTIPLICIVM SVPERBIPARTIENTIVM.

Superbipart. ordine recto.	25	15	9	50	30	18
Dupli ſuperbipart. ex ſuperbipart.	64	24	9	128	48	18
Tripli ſuperbipart. ex dupl ſuperbip.	121	33	9	242	66	18
Quadrup. ſuperbip. ex trip. ſuperbip.	196	42	9	392	84	18

Supertripart. directo ordine.	49	28	16	98	56	32
Dupli ſupertripart. ex ſupertripart.	121	44	16	242	88	32
Tripli ſupertrip. ex dupl. ſupert.	225	60	16	450	120	32
Quadr. ſupertrip. ex tripl. ſupertrip.	361	76	16	722	152	32

Superquadrup. recto ordine.	81	45	25	162	90	50
Dupli ſuperquadr. ex ſuperquadr.	196	70	25	392	140	50
Trip. ſuperquadr. ex dupl. ſuperq.	361	95	25	722	190	50
Quadrup. ſuperquad. ex trip. ſuperq.	576	120	25	1152	240	50

361		
95		
95	95	
25	25	25
576	120	25

aqualibus, 1.1.1. vel 2.2.2.

Hic enim perſpicuè cernis, quoslibet tres terminos ex tribus proximè antecedentibus procreatos eſſe ex præſcripto triplicis præcepti ſuperioris. Vt verbi gratia, poſtremi hi tres, 576.120.25. ita producti ſunt ex tribus antecedentibus, 361.95. 25. Primus 576. coaceruatus eſt ex primo 361. ſemel, & ex ſecundo 95. bis, & ex 25. ſemel. Secundus autem 120. conflatus eſt ex ſecundo 95. ſemel, & ex tertio 25. ſemel. Tertius denique 25. eſt tertius 25. ſemel ſumptus, vt hac appoſita formula demonſtrat. Atque hoc eodem modo omnes alij geniti ſunt, initio facto à terminis a-

QVO PACTO VICISSIM OMNIS PROPORTIO INAEQVALITATIS AD AEQVALITATIS PROPORTIONEM REVOCETVR.

PROPOSITIS rurſus tribus terminis inæqualibus in quacunque proportione, reſtituetur vicißim proportio æqualitatis, non minus iucunda, quàm facili ratione, per variam ſubtractionem terminorum inæqualium, vnius ab altero. Ita autem res expedietur triplici hoc præcepto:

MINIMVS trium terminorum inæqualium datorum ſtatuatur vnum extremum proportionis, ad quam reductio fit.

MINIMO eodem ſubtracto ex medio, reliquus numerus conſtituatur in medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

SVMMA collecta ex conſtituto iam extremo ſemel, & medio termino bis ſumpto, ſubtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterũ extremum nouæ proportionis fiat.

HAC ratione quæuis proportio trium terminorum inæqualium reuocabitur ad aliam proportionem, conferendo ſemper maiores numeros cum minoribus, & hac rurſus eodem modo ad aliam, atque ita deinceps, donec tres termini æquales occurrant. Quòd ſi tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima ſtatim operatione ad æqualitatem. Id quod exempla, quæ ſequuntur, planum facient.

Quintupla proportio.	150	30	6
Quadrupla.	96	24	6
Tripla.	54	18	6
Dupla.	24	12	6
Aequalitatis proportio.	6	6	6

Hoc enim exemplum monſtrat, quintuplam proportionem reuocatam eſſe ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & denique duplam ad æqualitatem. In hoc altero verò exemplo vides proportionem ſupertripartientem quartas reduci ad ſeſquitertiam, ſeſquitertiam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam tandem ad æqualitatem.

Proportio ſupertripartiens quartas.	49	28	16
Seſquitertia.	9	12	16
Tripla.	9	3	1
Dupla.	4	2	1
Proportio æqualitatis.	1	1	1

VIDES ergo vltimam proportionem inæqualitatis ſemper eſſe duplam, hanc verò ſtatim ad æqualitatem reduci.

EST autem animaduerſione dignum, ſi tres numeri dati fuerint in ſua proportione minimi, proportionem æqualitatis, ad quã fit reductio, conſiſtere in tribus vnitatibus: Si verò non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis conſiſtere in tribus numeris æqualibus, quorum quilibet tot vnitates continet, quotum locum occupãt tres termini dati inter omnes tres terminos eiuſdem generis proportionis. Ita vides in poſteriori exemplo tres datos numeros 49. 28. 16. minimos eſſe in proportione ſupertripartiente quartas, atque reductionem factam eſſe ad hanc æqualitatem, 1. 1. 1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150 30. 6. ſextum locum inter omnes tres numeros continuæ proportionis quintuplæ. propterea q3 æqualitas inuenta eſt inter hos tres ſenarios, 6. 6. 6. Minimi enim, ſiue primi numeri quintuplæ proportionis ſunt, 25. 5. 1. Secundi, 50. 10. 2. Tertij, 75. 15. 3 Quarti, 100. 20. 4. Quinti, 125. 25. 5. Sexti autem, 150. 30. 6. vt manifeſtum eſt. Idem experiri licebit in omnibus alijs proportionibus.

SED & hoc obſeruatione non indignum videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta eſt ad quadruplam, ex qua orta eſt: quadruplæ ad triplam. Hæc enim illam genuit, & ſic de cæteris vſq3 ad æqualitatẽ. In exemplo verò poſteriori, Supertripartiens reuocata eſt ad ſeſquitertiam ordine inuerſo. Conſtat autem, numeros ſeſquitertios conuerſo ordine gignere ſupertripartientes, vt ſuprà diximus. Item ſeſquitertia hæc, conferẽdo maiores numeros cum minoribus, reducta eſt ad triplam ordine inuerſo, quemadmodum tripla inuerſa generat ſeſquitertiam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, redacta eſt ad duplam, & hæc ad æqualitatem, &c.

NEQVE verò ſilentio prætereundum cenſeo, ex tribus terminis cuiuſcunque proportionalitatis Geometricæ, ſiue ea æqualitatis ſit, ſiue inæqualitatis, gigni poſſe quamlibet trium proportionalitatum, quas ſuprà explicauimus, ſi ipſi termini varijs modis inter ſe coagmententur. Proportionem enim trium terminorũ Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, ſi primus terminus ſemel, ſecundus bis, & tertius ſemel pro primo termino ſumatur; pro ſecundo autem ſecundus, & tertius ſemel; pro tertio denique ipſe tertius ſemel, perſpicuè conſtat ex ijs, quæ paulò antè ſcripſimus de ortu omnium proportionum inæqualitatis ex æqualitatis proportione.

AT verò vt ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, ſeruabis hoc præceptum triplex.

SVMMAM ex primo, & ſecundo termino bis, & tertio ſemel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis.

SVMMAM verò ex primo, ſecundo, & tertio ſemel confectam, ſtatue ſecundo loco.

TERTIVM, denique terminum conſtitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS PROPORTIONIS ARITHMETICAE EX GEOMETRICA.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus.	Secundus.	Tertius.
Primus fit ex datis terminis, ita coaceruatis.	Bis.	Bis.	Semel.
Secundus verò ſic.	Semel.	Semel.	Semel.
Tertius denique hoc modo.			Semel.

NIHIL porrò interest, vtrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an verò maximum, vt ex sequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICAE PROPORTIONALITATIS EX GEOMETRICA.

Geometr.proport.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Arithmet.proport.	5	3	1	20	12	4	34	19	4	29	19	9

CONSIDERATIONE *autem dignissimum est, differentiam constitutæ proportionalitatis Arithmeticæ semper æqualem esse summæ primorum duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis, per quam constituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam esse 2. summã ex 1.1. in secundo, 8. summam scilicet ex 4.4. In tertio 15. quæ summa conficitur ex 9.6. In quarto denique, 10. nimirum summam ex 4.6. collectam, atque ita in alijs.*

ITAQVE *si Arithmetica proportionalitas constituatur ex proportione æqualitatis, erit differentia duplavnius termini æqualis: vt perspicuum est in prioribus duobus exemplis.*

DENIQVE *Harmonicam proportionalitatem oriri quoque ex Geometrica, hoc alio præcepto triplici planum fiet.*

SVMMAM collectam ex primo bis, & secundo ter, & tertio semel sumpto, statue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

SVMMAM verò confectam ex secundo bis, & tertio semel sumpto, in secundo loco.

SVMMAM denique secundi & tertij, in tertio loco.

Vbi etiam nihil interest, vtrum minimus terminus dicatur primus, vel maximus. Typum porrò huius generationis hic expressum vides.

TYPVS PROCREATIONIS HARMONICAE PROPORTIONALITATIS EX GEOMETRICA.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	*Primus.*	*Secundus.*	*Tertius.*
Primus fit ex terminis datis, sic in vnum collectis.	*Bis.*	*Ter.*	*Semel.*
Secundus verò sic.		*Bis.*	*Semel.*
Tertius denique hoc modo.		*Semel.*	*Semel.*

GENERATIO PROPORTIONALITATIS HARMONICAE EX GEOMETRICA.

Geom.proport.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9
Harm.proport.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15

IAM verò è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quæcunque ad æqualitatem hoc pacto.

DETRAHE minimum terminũ ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis constituendæ.

HOC medio inuento sublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQVE minimus datus semel, & medius inuentus bis in vnam summam collecti, & ex maximo dato subtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semissis ergo huius erit ipsum alterum extremum.

HAC ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquam Geometricam, quæ ad æqualitatem redigetur, vt suprà docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas propositæ oritur ex illa Geometrica, si superius præceptum adhibeatur, ad quam per hoc præceptum reuocata est. Exempla hic vides:

Harm.proport.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15
Geom.proport.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9

ALIA EXEMPLA.

Harmon.proport.	3	4	6		60	40	30		24	16	12
Geometr.proport.	2	1	½		5	10	20		2	4	8
Aequalitas.	½	½	½		5	5	5		2	2	2

AT proportionalitas Arithmetica reuocabitur ad æqualitatẽ, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam conſtituitur, hoc modo:

MINIMVM terminum fac vnum extremorum. Subducto deinde eodem minimo ex medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio conſtituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur ſi hic numerus reliquus duplus eſt minimi, ſecto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quàm alterum extremorum; reductaq; erit data proportionalitas Arithmetica ad æqualitatem, ex qua ortum traxit.

3	9	15
3	3	3

VT ſi detur Arithmetica proportionalitas, 3. 9. 15. ſi in Geometrica conſtituenda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmeticæ data, & hunc eundem numerum demas ex dato medio 9. ſupererunt 6. qui numerus duplus eſt minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad æqualitatem hanc, 3. 3. 3. ex qua oritur ſecundum ſuperius præceptum.

SI verò reliquus ille numerus non eſt duplus minimi, ſecandus erit in duas partes, quæ cum minimo conſtituant proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

34	19	4
9	6	4

VT ſi data ſit Arithmetica proportionalitas, 34. 19. 4. Facto in Geometrica extremo vno, 4. minima data Arithmeticæ proportionalitatis, eoq; ſubducto ex medio 19. relinquitur numerus 15. qui non eſt duplus minimi. Quare ſecto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9. 6. 4. ex qua rurſus ortum ducet, ex præſcripto ſuperioris præcepti.

SED quoniam reliquus ille numerus non poteſt ſemper diuidi in tales duas partes, quæ cum minimo conſtituant continuam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem ea diuiſio facienda ſit, & quando fieri in numeris nequeat, docebimus ad propoſit. 17. lib. 6.) niſi numeri ſurdi, irrationalésve adſciſcantur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam ſtatim ad æqualitatẽ, ex qua, ſi termini æquales cum differentia propoſita cõaceruentur, ortum duxit; hoc pacto.

MINIMVS terminus datus fiat vnus ex duobus extremis. Differẽtia autem proportionalitatis ſubducta ex medio, reliquus numerus fiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino ſublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

20	27	34
20	20	20

VT ſi data ſit Arithmetica proportionalitas, 20. 27. 34. cuius differentia eſt 7. ſi 20. fiat vnum extremorum, & differentia 7. dematur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erunt aly duo termini æquales, 20. 20. Ex hac æqualitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmeticæ proportionalitatis habere debent, conficietur ipſa proportionalitas Arithmetica hac ratione.

VNVS terminorum æqualium fiat minus extremum. Huic addatur differentia data, vt fiat ſecundus terminus. Eidem denique minori extremo adiiciatur data differentia duplicata, vt efficiatur maius extremum.

VT in dato exemplo, minus extremum erit 20. cui ſi differentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et ſi eadem differentia 7. duplicata adÿciatur eidem minimo extremo 20. conflabitur maius extremũ 34. Eodem pacto data hac æqualitate, 15. 15. 15. ſi ex ea conſtitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia ſit 20. addatur hæc differentia ad 15. vnum terminorum æqualium, vt habeas ſecundum terminum 35. Quòd ſi eadem differentia duplicata, hoc eſt, numerus 40. ad eundem terminum æqualem adÿciatur, fiet tertius terminus 55. Primus autem eſt 15. vnus terminorum æqualium, vt hic vides:

Differentia 20.	15	15	15
	15	35	55

AT QVÆ pauca hæc prælibaſſe hoc loco ſufficiat ex infinitis, quæ de immenſa proportionum, proportionalitatumq; vi ac natura, innumerabilibusq; proprietatibus dici poſſent. Plura enim, & quidem ſcitu periucunda in pleniore noſtra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.

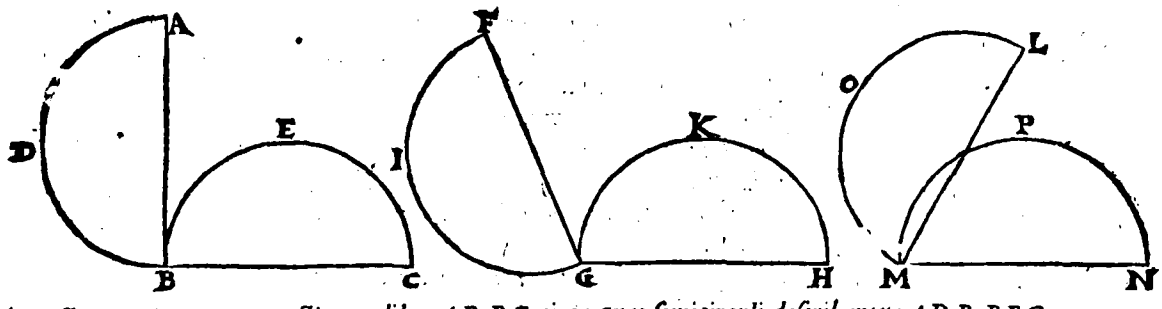
V.

RATIONEM habere inter ſe magnitudines dicuntur, quę poſſunt multiplicatæ ſeſe mutuò ſuperare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiuſdem generis, vocauerat

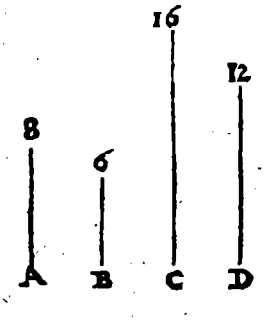
cauerat rationem, quã nos cum alijs auctoribus proportionẽ dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant duæ quantitates eiuſdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neq; enim omnes lineæ, neq; etiam omnes anguli plani, quamuis ſint eiuſdem generis quantitatis, proportionem habent inter ſe, vt mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter ſe, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem ſuperet; adeò vt ſi alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiuſdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, quæ nullo poſſit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc eſt, bis ſumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter conſtituant triangulum Iſoſceles,[a] erunt duo latera quadrati diametro eiuſdem maiora. Ita quoq; circumferentia circuli, & diameter eiuſdem, proportionem habent, (quamuis nondum ſit nobis explorata atq; cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc eſt, ſumpta quater, circumferentiam ſuperat, cum omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonſtratur, ter duntaxat cõprehendat diametrum eiuſdem, & particulam adhuc paulo minorem ſeptima parte diametri. Eodem modo multa curuilinea cum rectilineis proportione habebunt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura eſt contenta duobus arcubus circulorum, inſtar Lunæ nouæ, quando falcata eſſe cernitur: & Archimedes parabolam quadrarit, hoc eſt, ille cuidam lunulæ, hic verò parabolæ quadratũ inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atq; e contrario lunula & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quòd Archimedes in lib. de Spiralibus demonſtrauit, lineam aliquam rectam eſſe circumferentiæ circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam, &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo eſſe æquale, vt in libello de dimenſione circuli demonſtrauit. De æqualitate porrò lineæ rectæ, & circularis quadrati, & circuli, ad calcẽ lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoq; inter angulos rectilineos, ac curuilineos æqualitatem demonſtrari. Oſtendit enim lib. 3. in primum Euclidis, ad 12. Axioma, quod ipſi eſt 4. Poſtulatum, tam recto angulo, quam obtuſo, & acuto, exhiberi poſſe angulum curuilineum æqualem. Sic enim an-

a 20. primi.



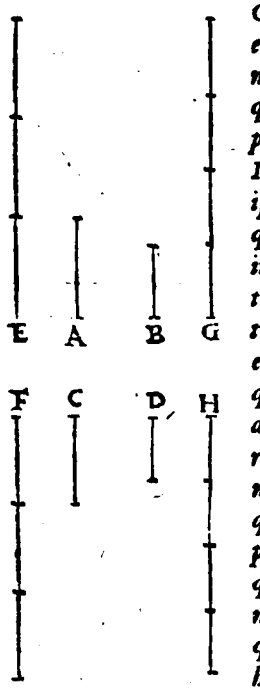
gulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus A B, B C, circa quas ſemicirculi deſcribantur A D B, B E C. Quoniam igitur anguli ſemicirculorum A B D, C B E, ſunt æquales; addito communi angulo mixto A B E, fiet angulus totus curuilineus D B E, toti angulo recto A B C, æqualis. Similiter oſtendes, angulum curuilineum I G K, æqualem eſſe obtuſo F G H; necnon curuilineum O M P, acuto L M N, dummodo hic ab angulis ſemicirculorum L M O, N M P, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea L M, & curua M P. Ex quibus conſtat, alterutrum angulorum multiplicatum poſſe alterum excedere: quare proportionem inter ſe habebunt. At verò linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunq; multiplicata, infinitam nequit ſuperare. Sic neq; linea cum ſuperficie, neq; ſuperficies cum corpore, eandem ob cauſam, vllam habebit proportionem. Deniq; non cenſebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus cõtactus quantumuis multiplicatus, minor adhuc ſemper exiſtit quouis angulo rectilineo, etiam minimo, vt propoſ. 16. lib. 3. demonſtrauimus. Itaq; vt apertius Euclides explicaret, quanam magnitudines eiuſdem generis proportionem dicantur habere, hoc eſt, quas magnitudines eiuſdẽ generis in definitione 3. intellexerit, voluit hac definitione eas intelligi, quæ hanc conditionem habeant, vt alterutra multiplicata alterã poſſit ſuperare, alias verò non, etiamſi in eodẽ quantitatis genere videantur comprehendi, quales ſunt linea finita & infinita; angulus rectilineus, & angulus contactus, &c. Hanc ob cauſam in pleriſq; demonſtrationibus proportionum, iubet toties multiplicare vnam propoſitarũ magnitudinũ, quæ proportionem ponuntur habere inter ſe, donec alteram excedat. Quod etiam facit propoſ. 1. lib. 10. & in pleriſq; alijs propoſitionibus. Taceant igitur, qui putant, per magnitudines eiuſdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas eſſe, quæ ſub eodem genere proximo, ſiue infimo continentur. Hac enim ratione non eſſet proportio inter angulos rectilineos, & curuilineos, aut inter figuras rectilineas, curuilineas q;, cum non ſub eodem contineãtur genere proximo: quod falſum eſſe diximus. Sileant quoq;, qui exiſtimãt, intelligendas eſſe magnitudines in eodem genere quantitatis, ſiue in eode genere ſubalterno, vt Logici loquuntur; ita vt ſatis ſit, ut dua quantitates dicantur habere proportionem, ſi ſint vel lineæ, vel ſuperficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio eſſet inter angulum rectilineum & angulum contactus, cùm in genere anguli contineantur: Item proportionem haberent inter ſe, linea finita, & linea infinita, cum in genere lineæ exiſtant: quorum vtrumq; falſum eſſe, liquidò ex hac definitione conſtat.

PERSPICVVM, *est ex his, quàm ineptè, & quàm falsò, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quænam magnitudines proportionem dicantur habere, sed quale proportionem duæ quæcunq; propositæ quantitates habeant. Itaq;, inquit, vult Euclides si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & amba multiplicentur æqualiter, hoc est, ambarum sumantur quæcunque æquè multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quam multiplex D, ipsius B, habere magnitudines A, & B, eã inter se proportionem, quam earũ æquè multiplicia C, & D. Non aduertit autem hoc, quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius 5. lib. vbi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, & B, magnitudines eandem habere proportionẽ, quam earũ æque multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligẽda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter C, & D, quã illa inter A, & B, quandoquidem semper eadem est. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Est ergo sensus huius definitionis ille, quem exposuimus, vt liquido constat ex verbis Euclidis.*



VI.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscunq; sit hęc multiplicatio, vtrumq; ab vtroq; vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

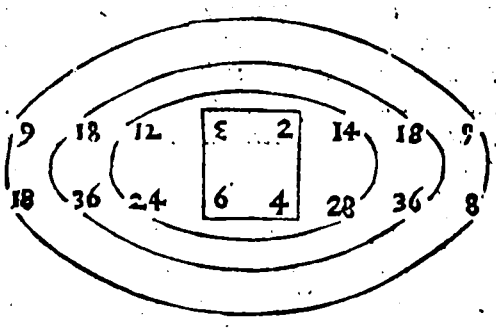


EXPLICAT *hoc loco Euclides, quasnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod vt exequatur, cogitur confugere ad earum æque multiplicia, vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima B secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturq; prima, & tertia æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipsius A; & F, ipsius C: Item sumantur secunda, & quarta alia quæcunque æquemultiplicia, G, quidem ipsius B; & H, ipsius D, siue hæc duo posteriora sint ita multiplicia secundæ, & quartæ, sicut priora duo multiplicia sunt primæ, & tertiæ, siue non. Quòd si iam inter se conferantur sumpta æquè multiplicia ea, quæ inter se respondent, vt multiplex primæ, & multiplex secundæ inter se, hoc est, E, & G; Item multiplex tertiæ, & multiplex quartæ inter se, hoc est F, & H, deprehensumq; fuerit perpetuò, ea ita inter se habere, vt si E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quàm G, multiplex secundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus sit quàm H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G, etiã F, æquale sit ipsi H: Aut denique si E, maius fuerit quàm G, etiam F, maius sit quàm H: (quod est vtrumque ab vtroque vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, id est, vt nunquam E, minus sit quàm G, quin & F, minus sit quam H, & vt nunquam E, æquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit æquale; Denique vt nunquam E, maius sit quàm G, quin & F, maius sit, quàm H. Si, inquàm, deprehensum fuerit, æque multiplicia quæuis accepta, perpetuò sese ita habere, vt dictum est; dicetur eadem esse proportio primæ magnitudinis A, ad secundam magnitudinem B, quæ est proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quòd si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex E, deficere à multiplici G, non autem multiplex F, deficere à multiplici H, aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamuis in infinitis aliis multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicẽtur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diuersas, vt ex defin. 8. fiet perspicuum.*

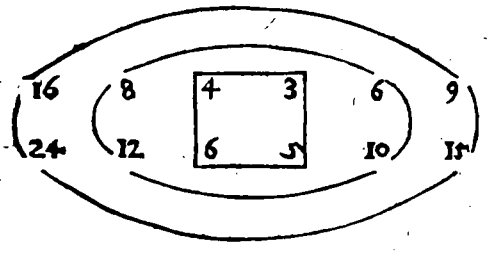
ITAQVE *vt demonstratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem perdiligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in aliis seruatur) quæcunque æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuscunque æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere semper conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut excessus; ita vt nunquam contrarium eius inueniri possit. Similiter si quatuor quantitates concedantur eande habere proportionẽ, cõcedatur quoq; necesse est, qualibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cũ quibuslibet æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut excessus cõditionem. Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perspiciatur quonam pacto, propositis quatuor magnitudinibus*

eandem

eandem proportionem habẽtibus: quadam æquè multiplicia prima, & tertia magnitudinis, à quibuſdam æquè multiplicibus ſecunda & quarta magnitudinis, vtrumque ab vtroq; vnà deficiant; alia verò vnà æqualia ſint; alia denique vnà excedant, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent: placet vnum exemplum proferre in numeris. Sint igitur 4. numeri 3. 2. 6. 4. ſumãturq; primi & tertij æquè multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item ſecũdi & quarti ſumantur alij æquè multiplices, vt ſeptupli 14. & 28. Vides igitur tam 12. multiplicem primi deficere à 14. multiplice ſecũdi, quàm 24. multiplicem tertij à 28. multiplice quarti. Rurſus primi & tertij ſumãtur alij æquè multiplices, nimirũ ſextupli, 18. & 36. Itẽ ſecũdi & quarti ſumantur alij æquè multiplices, vt noncupli 18. & 36. Vides ergo, tam 18. multiplicem primi æqualem eſſe 18. multiplici ſecundi, quàm 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Poſtremò primi & tertij ſumantur alij æquè multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item ſecundi, & quarti alij æquè multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem ſecundi, quàm 18. multiplicem tertij, ſuperare 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æquè multiplicibus, in quacunque ſumantur multiplicatione, ſemper deprehendatur, vnum trium horum verum eſſe, dicetur eadem eſſe proportio 3. ad 2. quæ eſt 6, ad 4. aliàs non.

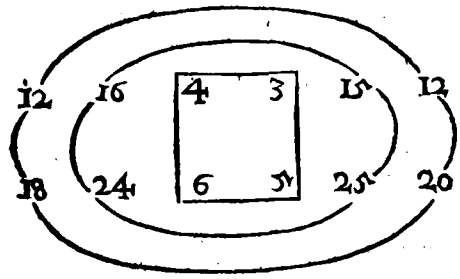


CAMPANVS *verò atq; Orontius, longè aliter definitionem hanc exponunt. Dicunt enim Euclidem velle tum demum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cùm prima & tertia æquè multiplicia, à ſecunda & quarta æquè multiplicibus, vtrumq; ab vtroq;, vel vnà deficiunt proportionaliter, hoc eſt, in eadem proportione, vel vnà æqualia ſunt, vel vnà excedunt proportionaliter, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. Clarius, vt ait Campanus, quando earum æquè multiplicia proportionalia ſunt, id eſt, cùm eandem proportionẽ habet multiplex primæ ad multiplex ſecundæ, & multiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non videt, ſi ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod ſanè abſurdum eſt. Præterea ſi Euclides vult, eas magnitudines in eadem eſſe proportione, quarum æquè multiplicia (ſi ſumantur, & inter ſe conferantur eo ordine, quo dictum eſt) in eadem proportione exiſtunt; cur obſecro in 4. Theoremate huius libri demonſtrat, ſi fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum æquè multiplicia eo ordine, quem diximus ſumpta, eandem quoq; habere proportionem? Immò cùm illud Theorema per hanc definitionem oſtendatur, perſpicuum eſt idem per idem demonſtrari, quod ridiculum eſt, veluti eo loco admonebimus. Accedit etiam, ſi ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata 5. huius lib. non poſſe demonſtrari, vt propriis locis monebimus. Intelligenda eſt igitur definitio, vt expoſuimus; nimirum propoſitis quatuor magnitudinibus, ſi quotieſcunque multiplex primæ deficit à multiplici ſecundæ, vel æquale eſt, vel excedit; neceſſariò etiam multiplex tertiæ tunc deficiat à multiplici quartæ, vel æquale ſit, vel excedat, quicunq; ſit ille defectus, exceſſúsve, non conſiderando, an proportionalis ſit, an non; ita vt nunquam contingat, multiplicem primæ à multiplici ſecundæ deficere, multiplicem verò tertiæ non deficere à multiplici quartæ: aut multiplicem primæ æqualem eſſe multiplici ſecundæ, multiplicem verò tertiæ multiplici quartæ non æqualem: aut denique multiplicem primæ maiorem eſſe multiplice ſecundæ, at multiplicem tertiæ multiplice quartæ non maiorem. Propoſitis, inquam, quatuor magnitudinibus, quarum æquè multiplicia ſumpta, vt dictum eſt, perpetuò eam conditionem in defectu, æqualitate, & exceſſu ſeruant; dicuntur quatuor illæ magnitudines eandem habere proportionem; quicquid ſit de earum æquè multiplicium proportione, quæ nunc non conſideratur: ſed quarto poſtea Theoremate demonſtrabitur, eum defectum, exceſſúmve eſſe proportionalem.*



PORRO *Campanus conatur oſtendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & exceſſu. Nam ſi de quocunque intelligeretur, eſſent, ait, quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadẽ proportione. Si enim primi & tertij, vtpotè 4. & 6. ſumantur æquè multiplices numeri, vt dupli, 8. & 12. Item ſecundi & quarti, nempe 3. & 5. æquè multiplices, vt dupli quoq;, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicẽ ſecundi, quàm 12. multiplex tertij, 10. multiplicem quarti. Idemq; cernitur ſi primi, & tertij ſumãtur quadrupli 16. & 24. ſecundi verò ac quarti, capiantur tripli 9, & 15. Si igitur ſufficit, vt æquè multiplicia accepta vnà excedant ſeſe quomodocunq;, & non requiritur vt proportionaliter ſe mutuò ſuperent, erit eadẽ proportio 4. ad 3. quæ eſt 6. ad 5. quod falſum eſt, cũ proportio 4. ad 3. ſit ſeſquitertia: proportio verò 6. ad 5. ſeſquiquinta. Intelligẽdus igitur eſt exceſſus, aut defectus æquè multiplicium proportionalis: Ita enim fiet, non eſſe eandem proportionem 4. ad 3. quæ eſt 6. ad 5. quòd eorum æquè multiplices non ſeſe excedant proportionaliter, vt conſtat. Veruntamen dicendum eſt, Campanum mirum in modum hallucinatum fuiſſe.*

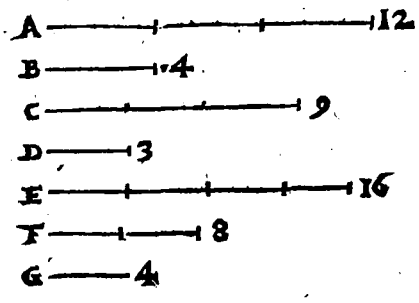
Quamuis enim numeri æquè multiplices ab eo prolati ſeſe vna excedant; tamen quamplurimi alij reperientur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem ſecundi, vel æqualis erit; at multiplex tertij deficiet à multiplice quarti. Si enim in eius exemplo primi & tertij ſumantur quadruplices 16. & 24. At ſecundi & quarti, quincuplices ſumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem ſecundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, ſed deficiet. Quòd ſi primi & tertij ſumantur tripli 12. & 18. At ſecundi, & quarti ſumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici ſecundi; At verò 18. multiplex tertij, æqualis nō erit 20. multiplici quarti, ſed ab eo deficiet. Cùm igitur non deprehendantur qualibet æquè multiplicia dictorū numerorum ſic ſe habere, vt ſi multiplex primi excedit multiplex ſecundi, multiplex tertij excedat quoq; neceſſariò multiplex quarti; quamuis id in nonnullis æquè multiplicibus ita eſſe contingat; non dicentur, iuxta hanc definitionē 6. dicti numeri eandem habere proportionem, vt adhuc clarius conſtabit ex 8. definitione.



CAETERVM definitio iſta complectitur etiam tres magnitudines eandem habentes proportionem, ſi modò ſecunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli cauſa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æquè multiplicia quæcunque ſumpta ad 9. & 6. vel vnà deficiunt ab æque multiplicibus ſumptis ad 6. & 4. vel æqualia ſunt, vel vnà excedunt, &c.

VII.

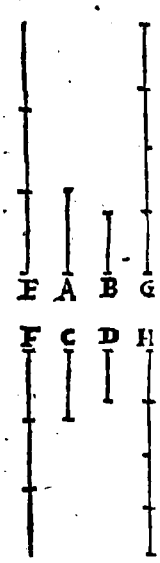
EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales vocētur.



VT ſi magnitudinum A, B, C, D, eadem ſit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur eæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, ſi eadem ſit proportio E, ad F, quæ F, ad G: dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autē quædam magnitudines proportionales continuè, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales ſunt magnitudines E, F, G; Quædam verò proportionales ſunt non continuè, ſed diſcretè, cuiuſmodi ſunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio ſit proportionum; in illis verò nequaquam, vt dictum eſt in 4. definitione.

VIII.

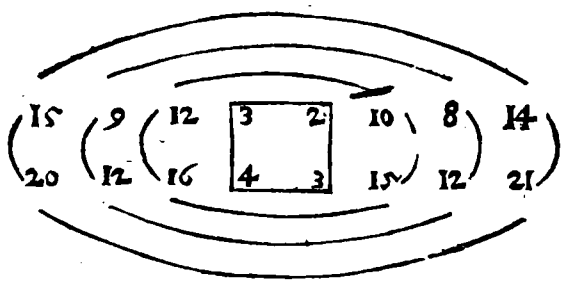
CVM verò æquè multiplicium multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ; At multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ; tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habere dicetur, quàm tertia ad quartam.



DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quàm tertia ad quartam, dicens: Si ſumpta ſint æquè multiplicia prima & tertiæ; Item alia æquè multiplicia ſecundæ & quartæ; deprehenſumq; fuerit aliquādo, (licèt nō ſemper) multiplex primæ maius eſſe multiplice ſecundæ, multiplex autem tertiæ non eſſe maius multiplice quartæ, ſed vel minus, vel æquale; dicetur maior eſſe proportio primæ magnitudinis ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam: vt perſpicuum eſt in appoſito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, ſumpta ſunt triplicia E, & F; ſecundæ verò B, & quartæ D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E, multiplex primæ maius quidem eſt, quàm G, multiplex ſecundæ; At F, multiplex tertiæ maius non eſt, quàm H, multiplex quartæ, immò minus; dicetur maior eſſe proportio A, primæ magnitudinis, ad B, ſecundam, quàm C, tertiæ, ad D, quartam.

NON eſt autem neceſſe, vt quatuor magnitudinum, prima ad ſecundam dicatur maiorem habere proportionem, quàm tertia ad quartam, æquè multiplicia ſecundùm quamuis multiplicationem ſic ſe habere, vt multiplex quidem primæ excedat multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; ſed ſatis eſt, vt ſecundum aliquam multiplicationem ita ſe habeant. Poteſt namque interdum fieri, vt tam multiplex primæ maius ſit multiplice ſecundæ, quàm multiplex tertiæ multiplicē quartæ: Item vt & multiplex primæ minus ſit multiplice ſecundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamē quia hoc non contingit in omni multiplicatione, ſed aliquando multiplex primæ ſuperat quidem multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ vel minus eſt, vel æquale multiplici quartæ: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad ſecundam, quàm tertia ad quartam; non autem eandem, vt perſpicuum eſt in appoſito exemplo.

ITAQVE



Itaque vt quatuor magnitudines dicantur proportionales, necesse est vt æquemultiplicia earum, iuxta quæsuis multiplicationes accepta, vel una deficiāt, vel vnà æqualia sint, vel vnà excedant, vt in 6. defin. fuit expositum. Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam quam tertia ad quartam, satis est vt secundum aliquam multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex verò tertiæ nō supereret multiplex quartæ; quamuis iuxta innumeras alias multiplicationes, æque multiplicia primæ, ac tertiæ vnà excedant æque multiplicia secundæ, & quartæ.

Quod si quando è contrario multiplex primæ deficiat à multiplici secundæ, non autem multiplex tertiæ à multiplici quartæ; dicetur prima magnitudo ad secundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam; quamuis secundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ vnà deficiant ab æque multiplicibus secundæ, & quartæ. Vt in eisdem numeris propositi exempli, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.

CVR EVCLIDES IN DEFIN. VI. ET VIII. QVATVOR MAGNITVDINES PROPORTIONALES, ET NON PROPORTIONALES PER EARVM ÆQVE MVLtiplicia definierit.

Quoniam mirum alicui videri possit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc est, ita esse primam ad secundam, vt est tertia ad quartam, cum æquemultiplicia primæ ac tertiæ iuxta quamcunque multiplicationem, & æquemultiplicia secundæ ac quartæ iuxta quamcunq; etiam multiplicationē accepta ita se habent, vt quotiescunq; multiplex primæ maius est quàm multiplex secundæ, multiplex quoq; tertiæ maius sit quàm multiplex quartæ; quotiescunq; verò multiplex primæ æquale est multiplici secundæ, multiplex etiam tertiæ æquale sit multiplici quartæ; quotiescunq; denique multiplex primæ minus est quàm multiplex secundæ, multiplex etiam tertiæ minus sit quàm multiplex quartæ: Item quare tum demum quatuor magnitudinum primæ ad secundam maiorem esse proportionem voluerit, quàm tertiæ ad quartam, cum aliqua æquemultiplicia primæ ac tertiæ, & alia æquemultiplicia secundæ ac quartæ accepta ita se habent, vt multiplex primæ sit maius quàm multiplex secundæ: at multiplex tertiæ maius non sit, quàm multiplex quartæ, sed vel æquale, vel minus. Quoniam, inquam, mirum alicui videri hoc possit, quòd ex illo excessu, æqualitate, & defectu æque multiplicium eo ordine sumptorum non statim appareat similitudo proportionum, dissimilitudóue: aperiendum videtur hoc loco, quare ita magnitudines tum proportionales, tum non proportionales definire voluerit Euclides.

Ad hanc difficultatē respondetur, Euclidem eas magnitudines voluisse appellare proportionales, quarum æquemultiplicia ita se habent, vt dictum est; quia non habuit quid notius, per quod explicare potuisset magnitudines tam incommensurabiles, quàm commensurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neque verò opus esse, vt ratio afferatur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur: sed satis esse, vt nunquam res definita asseratur alicui conuenire, nisi prius definitionem traditam eidem conuenire, demonstretur. Id quod in alijs etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin. 10. lib. 1. angulum rectum appellauit eum, qui fit à linea super aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita vt nunquam ei concedendum sit, angulum quempiam esse rectum, nisi prius ostenderit, eum ab eiusmodi linea effici. Item quemadmodum definitione vltima lib. 3. definiuit similia circulorum segmēta esse, in quibus anguli existentes sunt æquales, ita vt tunc solum ei concedendum sit, segmenta esse similia, cum probauerit angulos in eis existentes esse æquales: sic etiā defin. 6. & 8. huius lib. vocauit quatuor magnitudines proportionales, & nō proportionales, quarū æquemultiplicia eam conditionem habēt, quam explicauit, ita vt nunquam ei credendum sit, cum quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionē, vel non eandē, nisi prius demonstrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus conuenire. Sed quanquam responsio hæc vera sit, ac propria, tamen quia ex illa definitione non videtur colligi posse, verè magnitudines, quarū æque multiplicia illam conditionē habent, esse proportionales, vel non proportionales; etiamsi eas solū Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulò accuratius, Euclidem rectè eo modo definiuisse magnitudines proportionales, & nō proportionales, atq; adeo sine vlla dubitatione cōcedi posse à quouis, illas, quibus defin. 6. cōuenit, verè eandem habere proportionē; illas verò, quibus definitio 8. conuenit, non eandem proportionē habere.

Quod vt planius fiat, reuocandum ad memoriam est, duplicem esse proportionē; Rationalem, quæ inter quātitates cōmensurabiles existit, atq; adeò omnis in numeris reperiri potest. Et irrationalem, quæ inter quātitates incōmensurabiles existit, & nullo modo in numeris potest reperiri. Si igitur Euclides de Rationalibus duntaxat proportionib. disputationē instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo

modo,

modo,quo lib.7.defin.20.proportionales quatuor numeros definiuit,nimirum: Magnitudines proportionales ſunt,cum prima ſecundæ,& tertia quartæ,æquè multiplex eſt,vel eadem pars,vel eadem partes;Vel certè(vt nos ad eam defin.addidimus) cũ prima ſecundam,& tertia quartã æqualiter cõtinet,eandemq; inſuper illius partẽ,vel eaſdem partes.Non proportionales verò magnitudines ita definire potuiſſet: Magnitudines nõ proportionales ſunt, hoc eſt, prima ad ſecundam habet maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam, cùm prima ſecundæ magis multiplex eſt, vel maior pars, maioréſve partes, q̃ tertia quartæ: Vel certè cùm prima ſecundam ſæpius continet,quàm tertia quartã, ſiue eadem pars,aut partes vtrobique ſuperſint,ſiue nõ: Vel cùm prima ſecundam toties continet,quoties tertia quartam,ſed prima maiorem inſuper partem,maioréſve partes ſecundæ includit,quàm tertia quarta. Potuiſſet,inquam,Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac non proportionales, ſi de ſolis rationalibus proportionibus ageret: quia omnes proportiones magnitudinum exhiberi poſſent in numeris,ac proinde definiri,vt numerorum proportiones eadem,vel diuerſæ, vt diximus. Nam proportio numerorum (vt ex Campano,alijsq; ſcriptoribus,defin.24.lib.7.adiunximus) eſt habitudo quædam vnius numeri ad alterum,ſecundùm quod illius eſt multiplex,vel pars,partéſve: Vel certè ſecundùm quod illum cõtinet ſemel,aut aliquoties,& aliquam inſuper illius partem,vel partes. Quæ omnia perſpicua ſunt, tum ex definitionibus quinque ſpecierum proportionis rationalis tam maioris inæqualitatis,quàm minoris inæqualitatis,de quibus ſuprà egimus; tum ex ijs,quæ in defin.20.& 24.lib.7.ſcripſimus.

QVONIAM verò Euclides non ſolùm proportiones Rationales, ſed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quòd in proportione irrationali maior magnitudo neq; multiplex eſſe poteſt minoris,neq; eam ſemel aut aliquoties, & inſuper aliquam eius partem aut partes continere: Minor item maioris neq; pars eſſe poteſt, neq; partes; quippe cùm magnitudines irrationalem habentes proportionem incommenſurabiles ſint, ita vt nullam partem aliquotam communem; quamuis minimam,poſſint habere. Quocirca coactus eſt ſeſe conuertere ad proportiones magnitudinum rationales,hoc eſt,ad proportiones numerorum, cùm omnis proportio rationalis,ſiue magnitudinum commenſurabilium ſit,vt proportio numeri ad numerum,vt lib.10.propoſ.5.demonſtratur:Coactus,inquam,eſt inueſtigare aliquid,quod certum ſit conuenire quibuslibet quatuor numeris,ſiue magnitudinibus commenſurabilibus,eandem habentibus proportionem, vel non eandem: adeò vt, ſi idem illud conuenire demonſtretur quatuor magnitudinibus, etiam incommenſurabilibus, iure optimo magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici poſſint,vel non proportionales:quandoquidem eandem habent proprietatem,quam quilibet quatuor numeri proportionales,vel non proportionales,immò quam quælibet quatuor magnitudines commenſurabiles,eandem habentes proportionem, vel non eandem, neceſſariò habere demonſtratur.Neq; enim aliunde cognoſcere,vel explicare aliter poſſumus magnitudines incommenſurabiles proportionales eſſe, aut non proportionales, niſi per aliquid,quod certum ſit conuenire, vt diximus, numeris quibuſcunque, vel magnitudinibus commenſurabilibus,eandem,vel non eandem habentibus proportionem,in quibus euidenter ſimilitudo,diſſimilitudóve proportionum cernitur.Quemadmodum quia,quando in circulorum ſegmentis anguli æquales exiſtentes, ſunt commenſurabiles quatuor rectis, hoc eſt, quando ſunt eadem pars, vel eadem partes quatuor rectorũ, ſunt quoq; ipſa ſegmenta eadem pars, vel eadem partes circulorum, vt ad finem lib.6.demonſtrabimus; vt meritò ſimilia appellentur,ac propterea & omnia ſegmenta alia,in quibus ſunt anguli æquales,etiamſi non ſint commenſurabiles quatuor rectis,dicantur quoq; ſimilia:quandoquidem,quando anguli quatuor rectis commenſurabiles ſunt,verè illa ſegmenta ſimilia ſunt,hoc eſt,eadem pars,vel eadem partes circulorũ, licèt hoc in ſegmẽtis, quãdo anguli in eis exiſtentes quatuor rectis ſunt incommenſurabiles,nõ cernatur,q; tunc ſegmenta neq; eadem pars,neq; eadem partes poſſint eſſe circulorum,ſed ipſis circulis omnino incommenſurabilia exiſtant. Neq; enim aliud indicium habere poſſumus,ſegmenta ſimilia eſſe,aut diſſimilia,niſi angulorum in eis exiſtentium æqualitatem,vel inæqualitatem,ex qua veram ſimilitudinem, aut diſſimilitudinem ſegmentorum circulis commenſurabilium colligimus. Quam ob rem ſicut nemo ſimilitudinem hanc ſegmentorum in dubium reuocat,quanquam hæc ſimilitudo in ſegmentis, quæ circulis incommenſurabilia ſunt,non ita euidenter appareat, vt in ſegmentis quæ circulis ſunt commenſurabilia; ita non rectè fecerit,qui ſimilitudinem proportionum in magnitudinibus incommenſurabilibus in dubium reuocet,quando comperiet,illis conuenire, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus,conuenire certum ſit, licèt hæc proportionum ſimilitudo non tam euidens ſit in magnitudinibus incommenſurabilibus.

ITAQVE quoniam, propoſitis quatuor numeris proportionalibus, ſumptiſq; primi ac tertij æquè multiplicibus, iuxta quamuis multiplicationem, item ſecundi ac quarti æque multiplicibus ſecundùm quamuis etiam multiplicationem, ſemper verum eſt, vt mox demonſtrabimus, ſi multiplex primi maior eſt multiplice ſecundi,multiplicem tertij maiorẽ quoq; eſſe neceſſariò multiplice quarti: Et ſi illæ æqualis eſt,hunc quoque eſſe æqualem; & ſi minor,minorem: Et contrà quia,propoſitis quatuor numeris, ſumptis æquè multiplicibus primi ac tertij iuxta quãuis multiplicationem,item æquè multiplicibus ſecundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, ſi multiplice primi exiſtente maiore, quàm multiplex ſecundi, multiplex tertij maior quoq; ſit,quàm multiplex quarti; Et ſi illo exiſtente æquali, hic quoque æqualis ſit; & ſi illo exiſtente minore, hic ſimiliter minor exiſtat: perpetuò verum eſt, quatuor illos numeros eſſe proportionales. Rurſus,

quia

quia propoſitis quatuor numeris, quorum primus ad ſecundum maiorem proportionẽ habeat, quàm tertius ad quartum, ſumptiſq; æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus ſecundi ac quarti, neceſſariò interdum accidit, vt multiplex primi maior ſit multiplice ſecundi, multiplex verò tertij nõ ſit maior multiplice quarti: Et contrà, quia quatuor propoſitis numeris, ſumptiſq; æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus ſecundi ac quarti, ſi accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem eſſe multiplice ſecundi, at multiplicem tertij non maiorem multiplice quarti, ſine vlla dubitatione verum eſt, maiorem eſſe proportionem primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum. Quoniam, inquam, ita ſe res ſemper habet, in numeris, atq; adeò & in magnitudinibus commenſurabilibus, ita vt contrarium nunquam inueniatur, non immeritò dicentur quæcunque quatuor magnitudines, etiam incommenſurabiles, eandem habere proportionẽ, cum ſumptis æquemultiplicibus primæ ac tertiæ iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus ſecundæ ac quartæ, ſecundùm quamuis etiam multiplicationem, perpetuò deprehenditur, multiplicem tertiæ maiorem eſſe multiplice quartæ, quotieſcunq; multiplex primæ maior eſt multiplice ſecundæ; multiplicem verò tertiæ æqualem eſſe multiplici quartæ, quando multiplex primæ æqualis eſt multiplici ſecũdæ; multiplicem denique tertiæ minorem eſſe multiplice quartæ, hoc ipſo, quòd multiplex primæ minor eſt multiplice ſecundæ. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quæcunque magnitudines tam commenſurabiles, quàm incommenſurabiles, non habere eandem proportionem, ſed maiorem eſſe proportionẽ primæ ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam, cùm, ſumptis æquemultiplicibus, vt dictum eſt, interdum contingit, multiplicem primæ eſſe maiorem multiplice ſecundæ, multiplicem verò tertiæ non maiorem multiplice quartæ: quandoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, poſterior autem in non proportionalibus perpetuò reperitur, vt iamiam demonſtrabimus; nullumq; aliud indicium habere poſſumus, quo magnitudines incommenſurabiles cognoſcantur eſſe proportionales, vel non proportionales: præſertim cùm magnitudines incommenſurabiles alijs magnitudinibus, quæ hoc modo proportionales eſſe demonſtrantur, ſæpenumerò alia via oſtendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, vt nullo modo dubitandum ſit, quin omnes magnitudines, etiam incommenſurabiles, quarum æquemultiplices ita ſe habent, vt in 6. defin. dictum eſt, ſint proportionales, &c. Niſi enim hoc verum eſſet, ſequeretur hauddubiè ex illa proportionalitate aliquando abſurdum aliquod manifeſtum: quod tamen hactenus non accidit, ſed potius ea, quæ ex magnitudinibus in eo ſenſu proportionalibus demonſtrantur veriſſima eſſe plerunque alia via, vt diximus, oſtenduntur; vt poſtea etiam demonſtrabimus. Quæ cùm ita ſint, liquidò conſtare exiſtimo, cur Euclides in duabus illis definitionibus adhibuerit (& quidem rectè) magnitudinum propoſitarum æquemultiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti ſumus, Geometricè demonſtremus, adſcitis nonnullis propoſitionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. defin. aut ex demonſtrationibus huius lib. 5. pendent, vt commodiſſimè ante librũ 5. poſſint demonſtrari; atque adeò hic aſſumi, vt iam demonſtratæ. Hoc autem efficiemus quatuor propoſitionibus, quæ ſequuntur.

I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, ſumptiſq; primi ac tertij æquemultiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item ſecundi & quarti æquemultiplicibus iuxta quamcunque etiam multiplicationem; ſi multiplex primi maior ſit multiplice ſecundi, erit quoque multiplex tertij maior multiplice quarti; & ſi multiplex primi æqualis ſit multiplici ſecundi, erit & multiplex tertij æqualis multiplici quarti: ſi denique multiplex primi ſit multiplice ſecũdi minor, erit & multiplex tertij multiplice quarti minor.

HABEAT numerus primus A, ad ſecundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; ſumanturq; primi A, & tertij C, æquemultiplices E, F: Item ſecundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiſcunque hæc multiplicatio ſit. Dico ſi E, multiplex primi A, maior eſt, quàm G, multiplex ſecundi B, maiorem quoq; eſſe F, multiplicem tertij C, quàm H, multiplicem quarti D. Et ſi F, æqualis ſit ipſi G, æqualem quoque eſſe F, ipſi H. Si denique E, minor ſit quàm G, minorem quoq; eſſe F, quàm H. Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit permutando etiam, vt A, ad C, ita B, ad D: [b] Vt autem A, ad C, ita eſt E, ad F; quòd idem numerus ipſos A, C, multiplicans produxerit ipſos E, F, quippe cùm E, & F, ipſorum A, & C, ſumpti ſint æquemultiplices. Et eadem de cauſa, vt B, ad D, ita eſt G, ad H. Igitur ex lemmate propoſ. 14. lib. 7. erit quoq; vt E, ad F, ita G, ad H; [c] Et permutando vt E, ad G, ita F, ad H. Quocirca ſi E, maior eſt quàm G, erit quoq; F, maior quàm H, vt in primo exemplo: Si verò F, æqualis eſt ipſi G, erit quoq; F, ipſi H, æqualis, vt in ſecundo exemplo: Si denique E, minor eſt quàm G, erit quoq; F, minor quàm H, vt in tertio exemplo. Quod erat demonſtrandum.

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4.	B, 2.	D, 4.	H, 8.
E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 2.	D, 4.	H, 36.
E, 12.	A, 3.	C, 6.	F, 24.
G, 14.	B, 2.	D, 4.	H, 28.

[a] 13. ſeptimi.
[b] 17. ſeptimi.
[c] 13. ſeptimi.

II.

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior ſit proportio pri-

mi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum, ſi ſumantur æquemultiplices primi ac tertij, item æquemultiplices ſecundi ac quarti, fieri poteſt, vt multiplex primi maior ſit; quàm multiplex ſecundi, multiplex autem tertij non maior, quàm multiplex quarti.

HABEAT primus numerus A, ad ſecundam B, maiorem proportionem, quàm tertius C, ad quartum D. Dico fieri poſſe, vt ſumptis æquemultiplicibus primi A, & tertij C, item æquemultiplicibus ſecundi B, & quarti D, multiplex ipſius A, primi ſit maior, quàm multiplex ipſius B, ſecundi; at multiplex ipſius C, tertij maior non ſit, quàm multiplex ipſius D, quarti. Multiplicantes enim ſe mutuò numeri B, D, faciant E. Et quoniam D, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque D, eundem genitum ex C, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur D, genitum ex C, in E, per F; fietq; propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc eſt, numerus idē, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum; qui ex C, ſecundo fit in E, tertium; [a] erit vt D, primus ad C, ſecundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, vt C, ad D, ita F, ad E.

K, 56.	H, 7.	O, 21.	I, 28.
F, 8.	G, 1.	A, 3.	C, 4.
	E, 6.	B, 2.	D, 3.
M, 54.	N, 6.	P, 20.	L, 30.
K, 160.	H, 440.	O, 60.	I. 20.
F, 8.	G, 22.	A, 3.	C, 1.
	E, 80.	B, 8.	D, 10.
M, 160.	N, 80.	P, 24.	L, 30.

a 19. ſeptimi.

RVRSVS quia B, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoq; B, eundem procreatum ex A, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur B, procreatum ex A, in E, per F, G; fietq; idcircò ex B, in F G, numerus, quem B, metitur per F G, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc eſt, numerus idem, qui fit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in F G, quartum, & ex A, ſecundo in E, tertium gignitur, [b] erit vt B, primus ad A, ſecundum, ita E, tertius ad F G, quartum: Et conuertendo, vt A, ad B, ita F G, ad E. Quoniam ergo eſt, vt F G, ad E, ita A, ad B; Eſt autem proportio A, ad B, poſita maior quàm C, ad D; erit quoq; proportio F G, ad E, maior quàm C, ad D: Oſtenſum autem eſt, eſſe vt C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio F G, ad E, maior quoq; erit proportione F, ad E, ac proinde numerus F G, maior erit numero F: quæ omnia ex ijs, quæ in defin. 20. lib. 7. ſcripſimus, perſpicuè conſequūtur. Superet igitur F G, ipſum F, numero G.

b 19. ſeptimi.

SVMANTVR iam ipſorū F, G, C, æquè multiplices K, H, I, ea lege, vt H, ſit quidē maior q̄ E, at I, non minor quàm D. Eritq; ex ſcholio propoſ. 5. lib. 7. totus K H, ita multiplex totius F G, vt eſt multiplex K, ipſius F, vel I, ipſius C. Sumantur rurſus ipſorum D, E, æquè multiplices L, M N, ea lege, vt L, ſit multiplex ipſius D, proximè maior, quàm I; hoc eſt, tales æquè multiplices, vt ſubtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non ſit, quàm I, ſed vel æqualis, vt in ſecundo exemplo, vel minor; vt in primo exemplo contingit. Et quoniam oſtenſum eſt ita eſſe D, ad C, vt E, ad F; & ita eſt C, ad I, vt F, ad K, ex conſtructione, quòd I, K, ſumpti ſint ipſorum C, F, æquemultiplices, [c] erit quoque ex æquo, vt D, ad I, ita E, ad K.

c 14. ſeptimi.

PRAETEREA quoniam oſtenſum eſt eſſe D, ad C, vt E, ad F; erit permutando quoque D, ad E, vt C, ad F. Vt autem D, ad E, ita eſt L, ad M N; quòd idem numerus ipſos D, E, multiplicans fecerit L, M N, quippe cum L, M N, ſumpti ſint ipſorum D, E, æquemultiplices: Et eadem de cauſa, vt C, ad F, ita eſt I, ad K. Igitur ex lemmate propoſ. 14. lib. 7. erit quoque, vt L, ad M N, ita I, ad K, & permutando, vt L, ad I, ita M N, ad K.

QVIA ergo eſt, vt totus L, ad I, ita totus M N, ad K: Et vt D, ex L, ablatus ad eundem I, ita E, ex M N, ablatus ad eundem K erit quoq; ex theor. 6. ſcholij propoſ. 22. lib. 7. vt reliquus ex L, ad I, vt reliquus ex M N, ad K: Eſt autem reliquus ex L, non maior quam I, ſed vel minor, vt in priori exemplo, vel æqualis, vt in poſteriori; propterea quòd reliquus ex L, cum D, facit ipſum L, multiplicem ipſius D, proximè maiorem ipſo I, ex conſtructione. Igitur & reliquus ex M N, maior non erit quàm K; at q̄ idcirco ſi ex M N, detrahatur N, ipſi E, æqualis erit reliquus M, vel minor ipſo K, vt in priori exēplo, vel æqualis, vt in poſteriori. Cum ergo H, multiplex ipſius G, ſit maior quàm E, vel N, ex conſtructione; erit totus K H, toto M N, maior.

DENIQVE ſumpto O, ita multiplici ipſius A, vt K H, multiplex eſt ipſius F G, vel I, ipſius C; Item P, ita multiplici ipſius B, vt M N, multiplex eſt ipſius E, vel L, ipſius D: quoniam oſtenſum eſt, ita eſſe F G, ad E, vt A, ad B, ſumptiq; ſunt ipſorum F G, & A, primi ac tertij, æquemultiplices K H, & O, item ipſorum E, & B, ſecundi ac quarti, æquemultiplices M N, & P, ſequitur ex antecedente propoſ. ſi K H, maior eſt quàm M N, ipſum quoq; O, maiorē eſſe quàm P. Cum ergo K H, oſtenſus ſit maior quàm M N, erit quoq; O, maior quàm P. Quocirca cum O, I, ſint æquemultiplices ipſorū A, C, primi ac tertij; & P, L, æquemultiplices ipſorum B, D, ſecundi ac quarti, demonſtratum q̄ ſit, maiorē eſſe O, quàm P, ſitq; aūt I, minor quàm L, ex conſtructione: fieri poteſt, vt exiſtēte maiore proportiōe primi A, ad ſecundū B, quàm tertij C, ad D, quartū, ſumptiſq; æquemultiplicibus, vt dictum eſt, multiplex primi nimirum O, maior ſit quàm P, multiplex ſecundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non ſit quàm L, multiplex quarti. Quod demonſtrandum erat.

QVOD ſi minor ſit proportio primi ad ſecūdum, quàm tertij ad quartum, ſumantur q̄ æquemultiplices primi

primi ac tertij, item æquemultiplices ſecundi ac quarti, fieri quoq; poteſt, vt nonnunquam multiplex primi ſit minor multiplice ſecundi, multiplex verò tertij non ſit multiplice quarti minor.

In eodem enim exemplo, minor eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, q̃ A, tertij ad B, quartum: demonſtratumq; eſt, I, multiplicem primi C, minorem eſſe, quàm L, multiplicem ſecundi D, at O, multiplicem tertij A, minorem eſſe quàm P, multiplicem quarti B.

III.

Propositis quatuor numeris, ſumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus ſecundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationẽ, ſi multiplice primi exiſtente maiore, quàm multiplex ſecundi, multiplex tertij maior quoque ſit neceſſariò, quàm multiplex quarti: & ſi illo exiſtente æquali, hic quoque ſemper ſit æqualis; illo denique exiſtente minore, hic quoque perpetuò minor ſit: Erit eadem proportio primi ad ſecundum, quæ tertij ad quartum.

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4.	B, 2.	D, 4.	H, 8.
E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 2.	D, 4.	H, 36.
E, 12.	A 3.	C, 6.	F, 24
G, 14.	B, 2.	D, 4.	H, 28.

Sint quatuor numeri A, B, C, D, ſumanturq; primi A, & tertij C, æquemultiplices qualeſcunque E, F; Item ſecundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiſcunq; etiam hæc ſit multiplicatio. Dico ſi E, F, multiplices primi ac tertij ſemper ſint vel maiores, q̃ G, H, multiplices ſecundi & quarti, vel æquales, vel minores: ita eſſe A, primum ad B, ſecundum, vt C, tertium ad D, quartum. Si namq; foret maior proportio A, ad B, vel minor, q̃ C, ad D; fieri poſſet, veluti in antecedente propoſ demonſtratum eſt, vt E, multiplex primi eſſet aliquãdo maior, aut minor, quã G, multiplex ſecundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor, quàm H, multiplex quarti. Quod eſt cõtra hypotheſin. Eſt ergo A, ad B, vt C, ad D. Quod erat oſtendendum.

IIII.

Propositis quatuor numeris, ſumptisq; primi ac tertij æquemultiplicibus, item ſecundi & quarti æquemultiplicibus; ſi quando contingat, multiplicem primi maiorẽ eſſe multiplice ſecundi, multiplicem verò tertij non maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

E, 21.	A, 3	C, 4.	F, 28.
G, 20.	B, 2	D, 3.	H, 30.

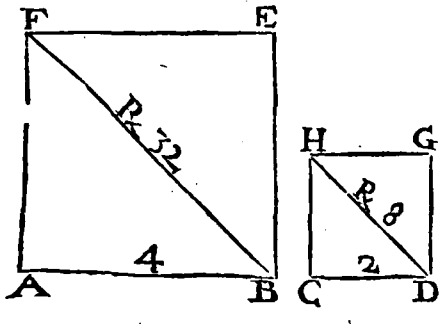
Sint quatuor numeri A, B, C, D. ſumptisq; ipſorum A, & C, primi ac tertij æquemultiplicibus E, & F, item ipſorum B, & D, ſecundi ac quarti æquemultiplicibus G, & H, ſit E, multiplex primi A, maior, q̃ G, multiplex ſecundi B, at F, multiplex tertij C, non maior q̃ H, multiplex quarti D. Dico maiorem eſſe proportionem primi A, ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Quoniam enim maior eſt E, quàm G, at F, non maior quàm H; erit maior proportio E, ad G, quàm F, ad H, cùm illa ſit proportio maioris inæqualitatis, hæc verò vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Igitur ex theor. 10. propoſ. 22. lib. 7. erit quoq; permutando maior proportio E, ad F, q̃ G, ad H. [a] *Eſt autem, vt E, ad F, ita A, ad C; q̃ idem numerus ipſos A, C, multiplicans procreauit E, & F, quippe cùm E, F, æquemultiplices ſint ipſorum A, C; Eademq; de cauſa eſt, vt G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoq; proportio A, ad C, quàm B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propoſ. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod oſtendendum erat.* a 17. ſeptimi.

Quod ſi multiplex primi ſit minor multiplice ſecundi, ſed multiplex tertij non ſit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

E, 28.	A, 4.	C, 3.	F, 21.
G, 30.	B, 3.	D. 2.	H, 20.

Eadem enim omnino demonſtratio eſt, ſi pro maiore proportione dicatur vbique minor proportio, nulla alia re mutata. Vt in hoc exemplo apparet, vbi quatuor numeri ſunt A, B, C, D, & E, multiplex primi A, minor eſt, quàm G, multiplex ſecundi B, ſed F, multiplex tertij C, minor non eſt, quàm H, multiplex quarti, &c.

Sed demonſtremus iam, in magnitudinibus, quæ alijs incommenſurabiles ſunt, & quæ ex definitione 6. proportionales ſunt, eam plerunque reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi poſſit: adeò vt verè proportionales ſint magnitudines, quibus definitio 6. conuenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo ſenſu ſumptis verum conſequitur, & nihil abſurdi inde inferri poteſt. Hoc enim paulò antè demonſtraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta A B, verbi gratia, recta C D, dupla, & ſuper ipſas rectas deſcribantur quadrata A B E F, C D G H, cum diametris E F, D H. Et quia ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. tam quadratum diametri E F, quadrati lateris A B, hoc eſt, quadrati A B E F, quàm



quadratum diametri D H, quadrati lateris C D, hoc est, quadrati C D G H, duplum est; si ponatur latus A B, 4. & latus C D, 2. erit quadratum A B E F, 16. & quadratũ diametri B F, eius duplum, 32. ac proinde diameter ipsa B F, erit radix quadrata numeri 32. quæ numeris exprimi nequit, cùm ea maior sit, q̃ 5. minor autem q̃ 6. nullusq; numerus inter 5. & 6. medius, hoc est, cõpositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, in se ductus posſit numerum integrũ 32. producere, vt ex Lemmate sequenti perspicuum fiet. Quadratum autẽ C D G H, erit 4. & quadratũ diametri D H, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipsa D H, erit radix quadrata numeri 8. quæ numeris etiam exprimi nequit, cùm ea maior sit, quàm 2. minor autẽ, quàm 3. &c. ita vt proportio tam A B, ad B F, quàm C D, ad D H, sit irrationalis, diameterq; propterea B F, lateri A B, & diameter D H, lateri C D, incommensurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propos. vlt. lib. 10. demonstrauit ex ijs, quæ lib. 6. de magnitudinibus proportionalibus per defin. 6. huius 5. lib. demonstrata sunt, Diametrum nimirum quadrati latcri eiusdem quadrati esse incommensurabilem, esse re ipsa verissimum, quippe cùm idem nos alia via sine proportionibus hoc loco ostenderimus.

RVRSVS quoniam diametri B F, D H, diuidunt angulos rectos quadratorum bifariam, vt in scholio propos. 34. lib. 1. & in coroll. 2. propos. 4. lib. 2. ostendimus, erunt anguli A B F, A F I, C D H, C H D, semirecti, ideoq; inter se æquales. Cùm igitur & recti anguli A, C, sint æquales, æquiangula erũt triangula A B F, C D H. Quare [a] *erit, vt A B, ad B F, ita C D, ad D H. Et permutando vt A B, ad C D, ita B F, ad D H. Est autem posita recta A B, recta C D, dupla. Igitur & B F, ipsius D H, dupla erit. Itaq; cũ ex defin. 6. huius lib. eò deducti simus, vt credamus diametrũ B F, diametri D H, esse duplam, quamuis vtraq; diameter ad suum latus habeat proportionem irrationalem, (Nam propos. 4 lib. 6. ex qua ostendimus, ita esse A B, ad B F, vt C D, ad D H, pendet ex propos. 2. & hæc ex 1. eiusdem lib. 6. Prima autẽ propos. lib. 6. vim suam accipit ex defin. 6. huius 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam vsi sumus, sine eadem defin. 6. demonstrari non potest in magnitudinibus incommensurabilibus, vt ex propos. 16. lib. 5. constat.) videamus, an aliunde cognoscere posſimus, diametrum B F, diametri D H, verè duplam esse, vt ex defin. 6. conclusum est, hoc ipso, q̃ latus A B, lateris C D, duplum ponitur, etiamsi proportio tam lateris A B, ad diametrum B F, q̃ lateris C D, ad diametrum D H, irrationalis sit. Hoc autẽ sine proportionibus facilè ita cognoscemus: Quoniam latus A B, lateris C D, duplum est, erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum A E, quadrati C G, quadruplum. Posito ergo quadrato A E, 4. erit quadratum C G, I. Et quia tam quadratum diametri B F, quadrati A E, q̃ quadratum diametri D H, quadrati C G, ex scholio propos. 47. lib. 1. duplum est; erit quadratum diametri B F, 8. & quadratũ diametri D H, 2. atq; idcircò illud huius quadruplum erit. Quocirca ex scholio propos. 4. lib. 2. recta B F, recta D H, dupla erit. Vides ergò rursus, si procedamus p̃ ea, quæ ex defin. 6. huius lib. de magnitudinibus proportionalibus demõstrata sunt, nos peruenisse ad conclusionẽ veram, nimirum diametros duorum quadratorũ habere proportionem inter se duplam, si latus vnius sit lateris alterius duplum: vt dubium non sit, quin magnitudines verè proportionales sint, quarum æquemultiplicia eam conditionem habent, quam defin. 6. præscribit. Porrò ex regulis quoq; numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, constat diametrũ B F, hoc est, R. 32. habere duplam proportionem ad diametrum D H, id est, ad R. 8. Nam siue R. 32. diuidatur per R. 8. Quotiens sit R. 4. hoc est, numerus 2. qui proportionem diametri B F, ad diametrum D H, denominat; siue R. 8. multiplicetur per 2. producitur R. 32. Atq; hoc modo omnia, quæ de magnitudinum incommensurabilium proportionibus demonstrantur ex defin. 6. huius lib. explicari poterunt per regulas numerorũ irrationalium. Quæ res argumento rursus est, magnitudines, quibus defin. 6. huius lib. conuenit, verè esse proportionales; quandoquidem calculus numerorum irrationalium cum demonstrationibus, quæ ex ea defin. pendent, perpetuò consentire comperitur, vt ijs, qui in Algebra præceptis versati sunt, notissimum est.*

a 4. sexti.

LEMMA.

QVOD autẽ nullius numerus compositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, quamuis vnitas in infinitũ secetur, gignere posſit integrum numerũ 32. hoc modo facilè demonstrabimus. Sit enim numerus 5. cũ quacunq; fractione $\frac{3}{7}$. hoc modo $5\frac{3}{7}$. reuocetur q̃, vt in Arithmetica tradidimus, ad hanc vnicam fractionẽ $\frac{38}{7}$. Certum autẽ est, denominatorem 7. non metiri numeratorem 38. Alioquin diuisis 38. per 7 fieret Quotiẽs numerus integer sine fractione, quod est contra hypothesin. Multiplicetur iam fractio $\frac{38}{7}$. in se, (quod fiet, vt in Arithmetica diximus, demonstrabimusq; ad finem lib. 9. si tam numerator 38. in se, q̃ denominator 7. in se ducatur.) gignaturq; fractio $\frac{1444}{49}$. ita vt numerator huius 1444. sit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49 quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. non metitur latus 38. vt [b] *ostendimus, nõ metietur quoq; quadratus 49. quadratũ 1444. Quare diuiso quadrato 1444. per quadratum 49. Quotiens non erit numerus integer, sed ei adhærebit fractio aliqua. Aliàs quadratus 49. metiretur quadratũ 1444. cuius contrariũ demonstrauimus. Atq; eadẽ ratione demonstrabitur, quemcunq; numerum integrum cum fractione qualibet in seipsum ductum gignere numerũ integrũ cũ fractione. Quòd si fractio, cuius numerator denominatore minor sit, in se ducatur, p̃ducetur semper fractio, cuius numerator etiã minor est denominatore. Nã*

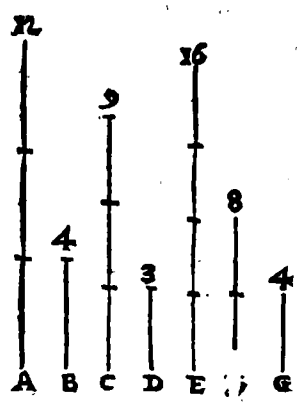
b 16. octaui.

cùm

cùm numerator fractionis productæ sit numerus quadratus numeratoris datæ fractionis, denominator autem quadratus numerus denominatoris, sit autem datæ fractionis numerator minor denominatore; erit quoq; illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{2}{3}$. *in se gignitur fractus numerus* $\frac{4}{9}$. *cuius numerator denominatore minor est. Itaq; quæcunque fractio in se multiplicata gignit numerum non integrum, nisi quando numerator datæ fractionis à denominatore numeratur, sed ea fractio numerus integer potius est: qualis est fractio* $\frac{100}{23}$. *quæ 4. integras vnitates constituit.*

IX.

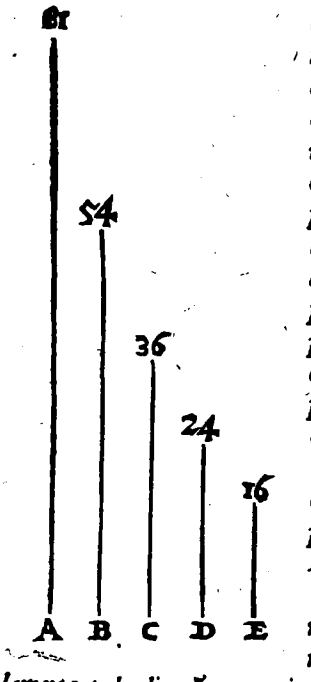
PROPORTIO autem in tribus terminis pauciſsimis conſiſtit.



QVONIAM omnis Analogia, seu proportionalitas, quam interpres, vt dictum est, proportionē nominat, similitudo est duarum, vt plurium proportionum; omnis autē proportio habet & antecedentem terminum, & consequentem; necesse est, in omni proportionalitate reperiri, vt minimū, duos terminos antecedentes, ac duos consequentes. Quare si proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltē quatuor termini, siue magnitudines; At verò si fuerit continua, erunt cū minimū tres termini; quoniā terminus medius bis sumitur, cū sit consequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: At q3 hic est minimus numerus terminorū proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscunq3 solùm proportio, non autem proportionalitas reperitur.

X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationē habere dicitur eius, quā habet ad ſecundam: At cū quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartā triplicatā rationē habere dicitur eius, quam habet ad ſecundā: Et ſemper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.



VELVTI ſi ſint magnitudines A, B, C, D, E, cōtinuè proportionales, ita vt ea ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C, & C, ad D, & D, ad E: Proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinē tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quā habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinē ſecundam: quoniā inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C, vt propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionē A, ad B, duplicatā, id eſt, bis ordine poſitam. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinē quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinē ſecundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C, & C, ad D, atque idcircò proportio A, ad D, includit quodammodo proportionem A, ad B, triplicatam, id eſt, ter ordine poſitam. Sic quoq3 proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quòd quatuor proportiones interijciuntur inter A, & E, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B, &c.

QVOD ſi è contrario ea ſit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At verò proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; ſic quoq3 proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac deſin. ſi proponantur plures quantitates cōtinuè proportionales, proportione primæ quantitatis ad tertiam, eſſe duplā proportionis primæ quantitatis ad ſecundā, eò q; Euclides illam vocet duplicatā proportionē huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartā eſſe triplam proportionis, quā habet prima quantitas ad ſecundā, &c. Quod tamen nulla eſt ratione concedendū. Neq3 enim Euclides hoc ſignificare voluit, ſed docuit tantummodò, proportionē primæ quantitatis ad tertiā, appellari duplicatā eius proportionis, quā habet prima quantitas ad ſecundam; propterea q; inter primam quantitatē, ac tertiam, reperitur quodammodo proportio primæ quantitatis ad ſecundam duplicata: quippe cùm inter primam quantitatē, ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad ſecundam, & ſic de cæteris, vt diximus. Non autē intellexit, illam duplam eſſe huius, ne Theorema proponeret, quod meritò quiſpiam concedere recuſaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continuè proportionalibus, 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam eſſe proportionis 25. ad 5. cùm potius eam quis dixerit eſſe quincuplam? At verò, illam dici huius duplicatam ad ſenſum expoſitum, nemo inficiabitur;

eò quòd bis ſit poſita, & continuè, proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cùm illa minor ſit, hæc autẽ maior? Nam per propoſ. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quàm ad quantitatem 25. propterea quòd 25. maior eſt, quàm 5. Dicetur tamen illa huius duplicata, ob cauſam iam explicatam, licèt ſit eius quinta pars. Quare etſi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio eſt eiuſdem dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla eſt proportionis quadruplæ, cùm tamen quadruplæ duplicata, ſit ſedecupla, vt hic patet 16. 4. 1. Denique in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4. 4. 4. at q3 adeò continuè proportionalibus, qui fieri poteſt, vt proportio primi ad tertium dupla ſit proportionis primi ad ſecundum, cùm ſit omnino eadem? Duplicata tamen dicetur illa huius, propterea quòd hæc ordine bis poſita eſt continuè inter primum numerum & tertium.

SED auctores, qui proportionem primæ quantitatis ad tertiam volunt eſſe duplam proportionis, quam prima quantitas habet ad ſecundam, (inter quos auctores eſt etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod valde miror, cùm alioquin Mathematicus ſit præſtantiſſimus) dicunt in hac defin. requiri terminos inæquales, primamq3 debere eſſe maiorem; ita vt definitio hæc intelligenda ſit neceſſariò de proportione continuæ maioris inæqualitatis. Quare mirum non eſt, vt aiunt, neq3 proportionẽ 1. ad 25. proportionis 1. ad 5. neq3 proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam eſſe. Verum hæc expoſitio non ſolùm vera non eſt, ſed Euclidi prorſus eſt contraria: quippe qui aſſumat plerisq3 in locis, triplicatã proportionẽ reperiri in proportione minoris inæqualitatis. Locus clariſſimus eſt, vt alios omittã, in propoſ. 12. lib. 12. vbi demonſtrat ſimiles conos, & cylindros in triplicata ratione eſſe diametrorũ, quæ in baſibus. Nam ſi conferatur maior conus, vel cylindrus ad minorem, neceſſariò in ſecunda parte eius demonſtrationis, aſſumit Euclides demonſtratum eſſe propoſ. 8. eiuſdem lib. 12. pyramides ſimiles, etiamſi minor ad maiorem referatur, in triplicata eſſe homologorum laterum ratione; vt eo in loco annotauimus. Huc accedit, propoſitiones illas, in quibus figuræ aliquæ demonſtrantur habere rationem laterum homologorum duplicatam, vel triplicatam, cuiuſmodi eſt 19. & 20. lib. 6. & 11. 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11. & 12. 18. lib. 12. non fore vniuerſales, ſi ſolùm de proportione maioris inæqualitatis eſſent intelligendæ. Explicanda ergo eſt hæc definitio, vt nos expoſuimus.

ITAQVE hoc loco Euclides explicat tantũ, quidnã intelligendũ ſit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonſtrationes ſequẽtium librorũ percipiantur, rebusq3 poſſint materialibus accommodari. Non autem determinat, quænam proportio ſit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Exempli gratia, quoniam ex propoſ. 20. lib. 6. conſtat, proportionẽ quadrati ad quadratũ duplicatam eſſe proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus poſterioris: colligendum erit, ſi continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionẽ quadrati ad quadratũ, eſſe eam, quæ eſt primi termini ad tertium, ita vt ſi prioris quadrati latus fuerit trium palmorum, poſterioris autẽ vnius palmi, prius quadratum ad poſterius habeat proportionem, quã 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ eſt noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis eſt 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perſpicuum eſt. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo eſſe maiorẽ proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum poſterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud ſit huius nona pars, propterea quòd proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eiſdem his numeris 1. 3. 9. manifeſtum eſt. Simili ratione, quoniam lib. 12. propoſ. vltima, demonſtratur ſphæras inter ſe rationem habere ſuarum diametrorum triplicatam, colligendum erit ſphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad ſphæram, cuius diameter eſt vnius palmi tantùm, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur triplæ proportionis, vt hic apparet, 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propoſitis duabus ſphæris, quarum diametri proportionem habent decuplam, habebunt ſphæræ ipſæ proportionem millecuplam, cùm hæc ſit decuplæ triplicata, vt hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, millecuplam proportionem eſſe triplo tantummodò maiorem proportione decuplæ, & non potius trigecuplam decuplæ eſſe triplam?

CAETERVM propoſita quacunq3 proportione rationali, ſi eius denominator in ſe ipſum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propoſitæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore ſcilicet proportionis quadruplæ, in ſe, producuntur 16. ideò proportio ſedecupla, dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur, 16. 4. 1. Item hic, 48. 12. 3. E contrario, cũ ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis ſubquadruplæ, in ſe, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio ſubſedecupla, duplicata proportionis ſubquadruplæ. Quòd ſi denominator rurſus in illud productũ multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ: vt in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producũtur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata, vt hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic, 192. 48 12. 3. Rurſus ſi in poſterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atq3 ita de cæteris. Itaq3 proportionis duplicatæ denominator, pducitur ex denominatore propoſitæ, pportionis bis poſito, atq3 ita multiplicato. Vt numerus denominãs proportionẽ duplicatã proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis, bis poſito, in hũc modũ, 3. 3. ac ſic multiplicato: Nam ter tria faciũt 9. denominatorẽ noncuplæ, pportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni poteſt, 9. 3. 1. Item hic, 18. 6. 2. At verò denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propoſitæ, pportionis denominatore ter poſito, & ſic multiplicato. Vt in dato exẽplo, denominator triplicatæ, pportionis, nẽpe 27. pcreatur ex

3. ter

3.ter posito sic,3.3.3.atq; ita multiplicato,dicendo ter tria ter,&c. Ita proportio quadruplicata exoritur ex denominatore quater posito; Quincuplicata ex eodem quinquies posito,atq; ita multiplicato,&c.Itaque duplicatio,triplicatio,quadruplicatio,&c. proportionis cuiuslibet,de qua in hac definitione agitur,nihil aliud est,quàm multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter se.Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis,quam extremi termini inter se habent:quæ propterea illius proportionis,cuius denominator multiplicatus est,duplicata dicitur,vel triplicata,vel quadruplicata,&c.prout videlicet dnnominator bis positus est,vel ter,vel quater,&c. atque sic multiplicatus fuit,vt exposuimus. Verbi gratia, propositis hisce quatuor numeris continuè proportionalib.in proportione quadrupla,primus 192. ad quartũ 3.proportionem habet denominatam à 64.quæ proportio dicitur triplicata proportionis quadruplæ: quia denominator 64.proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4.proportionis quadruplæ ter posito, ob tres proportiones quadruplas inter extremos interiectas, atq; ita multiplicato,dicendo quater quatuor sunt 16. & quater 16.sunt 64. Sic etiam inuersis ijsdem numeris, vt sint continuè proportionales in proportione subquadrupla,primus 3.ad quartum 192,proportionem habet denominatam à $\frac{1}{64}$. quæ proportio dicitur triplicata proportionis subquadruplæ: quia denominator $\frac{1}{64}$.proportionis primi numeri 3.ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$. proportionis subquadruplæ ter posito, & sic multiplicato, ob tres proportiones subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$.& ex $\frac{1}{16}$.in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$. Nihil obstat ergo,quò minus proportio 3.ad 192.à $\frac{1}{64}$.denominata dici possit triplicata proportionis subquadruplæ 3. ad 12. quanquam illa minor sit, quàm hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$.ter posito,& sic multiplicato,vt diximus.Non tamen proportio 3.ad 192.à $\frac{1}{64}$.denominata dici potest triplo maior proportione subquadrupla 3.ad 12.quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus nõ facit denominatorem $\frac{1}{64}$. sed $\frac{3}{4}$.atq; ita proportio subsesquitertia dicetur tripla proportionis subquadruplæ: sicut etiam non proportio à 64.denominata, sed proportio duodecupla, est proportionis quadruplæ tripla; propterea quòd denominator 4.triplicatus non producit denominatorem 64.sed 12. Potrò continuatis quotcunque numeris proportionalibus, siue maiores cum minoribus, siue minores cum maioribus conferantur,denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionũ inter se multiplicatis,demonstrabimus ad defin.5.lib.6. Proportionem autem aliquam tum demum esse alterius duplam,vel triplam,&c.cùm illius denominator huius denominatoris duplus est,vel triplus,&c. ita vt proportio decupla sit dupla quintuplæ,& sextupla sit tripla duplæ,&c. ostendemus ad finem libri 9.tractatumq; est hoc argumentum copiosè à Rodulpho Volumnio in Disputatione de Proportione proportionum. Nunc satis sit, hoc ipsum communi hominum iudicio ex sensilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod ad Patiens proportionem habeat (verbi gratia) decuplam,ita vt Agens sit 10.& Patiẽs 1.quis tam mente captus erit,qui non statim intelligat si idem Agens augeatur,vt fiat 20.Patiens autem maneat 1.Agens tunc duplo maiorem habere potentiam respectu eiusdem Patientis,quàm prius? Quare proportio vigecupla,cuius denominator 20.duplus est denominatoris 10.dupla est proportionis decuplæ;nõ autem proportio centupla, vt auctores contrariæ sententiæ volunt: sed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decuplæ propter multiplicationem denominatoris 10.in se,& propter duas proportiones decuplas,quæ inter numeros centuplam proportionem habentes interijciuntur,vt hic apparet,100.10.1. Sic etiam si è contrario, Agens aliquod ad Patiens habeat proportionem,verbi gratia.subdecuplam,ita vt Agens sit 1.& Patiens 10.quis tam hebes fuerit,ac rudis,qui non intelligat,Agens, quod sit 2.duplo esse potentius respectu eiusdem Patientis 10.quàm Agens 1.? Cùm ergo Agens 2.ad Patiens 10.habeat proportionem subquintuplam, cuius denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. conflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$.bis sumpto, erit profectò proportio subquintupla proportionis subdecuplæ dupla; non autem illa, quæ subcentupla est, vt prædicti auctores volunt, cùm hæc longè minor sit,quàm subdecupla. Dicetur tamen proportio subcentupla proportionis subdecuplæ duplicata, propter causam sæpius explicatam, vt hic patet, 1.10.100.

Denominatores.	4	4	4	
Num.propor.	192	48	12	3.

Denominatores.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
Num.propor.	3	12	48	192

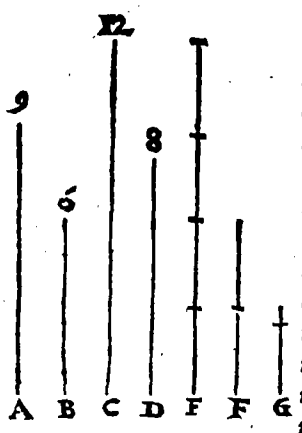
Ex his, quæ diximus, non obscurè colligi potest, proportionem duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, sapere naturam quodammodo lineæ,cùm ex nulla alia proportione producatur:Proportionem verò, cuius quantitates intercipiunt vnicum medium in continua proportionalitate habere conditionem superficiei quadratæ, quoniam gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Denique proportionem, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate interijciuntur,obtinere naturam solidi, atq; adeò cubi, cùm oriatur ex tribus æqualibus proportionibus,quemadmodum etiã cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verùm de his plura inuenies apud Arithmeticos,qui Algebra regulam exposuerunt.

XI.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines,dicuntur antecedẽtes qui-

dem antecedentibus; consequentes verò consequentibus.

DEFINIVIT suprà proportionalitatem, proportionum esse similitudinem. Docet iam, non solùm in proportionalitate quauis proportiones dici similes; Verùm etiã terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologásve; dicẽs, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec nõ consequẽtes inter se; vt intelligeremus in quam plurimis demonstrationibus, quanam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeãt esse proportionum, & quanam consequentia, vt in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, vtramq; magnitudinem antecedentẽ vel æqualem esse vtrique consequenti, vel eodem modo maiorem, aut minorem: Aliàs nõ haberet vtraq; antecedens ad vtramque consequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vtpotè dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, cõtinuè proportionalibus, vbi tam E, & F, homologæ sunt, quàm F, & G, vt constat. Atq; hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi æquè multiplicia prima & tertiæ magnitudinum, hoc est, antecedentium. Item alia æquè multiplicia secundæ, & quartæ magnitudinum, nimirum consequẽtium. Hæ enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat: in magnitudinibus verò non proportionalibus dissimiles.

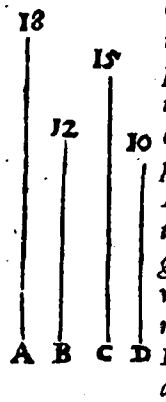


ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longè aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus variè inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; veluti in sequentibus definitionibus patebit. Verùm si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib. consideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.

XII.

ALTERNA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

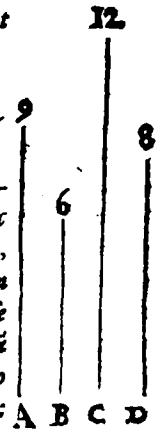
EXPLICAT hîc quosdam modos argumẽtandi in proportionibus, quorũ frequentissimus est vsus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex: Primus dicitur proportio alterna, sive permutata: Secundus, inuersa, seu proportio è contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, vel disiuncta proportionalitas. Quintus, conuersio rationis, sive euersa proportionalitas: Sextus deniq; vocatur proportio ex æqualitate, seu æqua proportio. Alterna igitur, seu permutata proportio, inquit, est, cùm propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandẽ esse proportionẽ antecedentis prioris proportionis ad antecedentẽ posterioris, quam habet consequẽs illius ad consequentẽ huius. Vt si ponamus proportionẽ A, ad B, quã C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionẽ A, ad C, quæ est B, ad D, dicemur argumẽtari à permutata proportione. Græci scriptores in hac argumentatione vtuntur hoc ferè modo loquendi: Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu vicissim, erit quoq; A, ad C, vt B, ad D. Firmã autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Cæterùm in hoc modo argumentandi, necesse est omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, vt inter binas, vt vt assumptas proportio esse possit. Non enim rectè infertur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cùm nulla sit proportio lineæ ad numerum, aut contrà, vt perspicuum est ex defin. 5. In alijs autem modis argumentandi, qui sequuntur, possunt esse priores magnitudines in vno genere magnitudinis; & posteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonstrationibus huius lib. 5. constabit.



XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, seu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

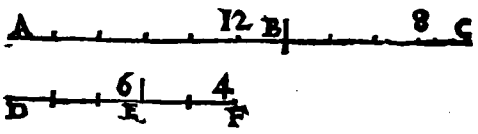
VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, vt D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic ferè loquuntur auctores: Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel è contrario, erit quoque B, ad A, vt D, ad C. Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in corollario propos. 4. huius lib. Porrò duæ priores magnitudines possunt esse vnius generis, & posteriores alterius. Rectè namq; licebit inferre; vt se habet linea A, ad lineã B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D. Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad triangulum, seu numerum C, vt ex corollario propos. 4. constabit.



COMPOSI-

XIIII.

COMPOSITIO rationis, eſt ſumptio antecedentis cũ conſequente, ceu vnius ad ipſam conſequentem.



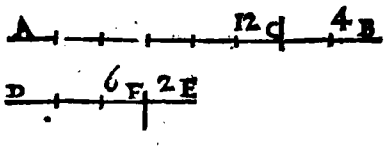
SIT proportio A B, ad B C, quæ D E, ad E F; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque eſſe proportionem totius A C, nempe antecedentis cum conſequente, ad B C, conſequentem, quam habet tota D F, antecedens nimirũm cum conſequente, ad E F, conſequẽtem; dicetur huiuſcemodi argumentatio compoſitio rationis, eò quòd ex antecedente & conſequẽte componatur aliud nouum antecedens. Hunc autẽ modum dicendi apud Græcos ſcriptores reperies in hac argumentatione: Vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; componendo ergo erit & A C, ad B C, vt D F, ad E F. Demonſtrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propoſ. 18.

HVIC modo argumentandi per compoſitionem rationis addi poſſunt alij duo: Primus dici poteſt, Compoſitio rationis conuerſa; quando nimirum ſumitur antecedens, & conſequens, veluti vna, quæ cum antecedente conferatur. Vt ſi eſt, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, inferimus q3; Ergo vt A C, ex antecedente & conſequente conflata, ad antecedentem A B, ita eſt D F, ex antecedente & conſequente compoſita, ad antecedentem D E. Quam argumentationem eſſe validam, demonſtrabimus ad propoſ. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compoſitionem rationis conuerſam.

ALTER modus dici poteſt, Compoſitio rationis contraria; quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & conſequentem, ceu ad vnam. Vt ſi eſt, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, inferimus q3 per compoſitionem rationis contrariam. Igitur erit vt A B, antecedens ad totam A C, ex antecedente, & conſequente compoſitam, ita D E, antecedens ad D F, ex antecedente, & conſequente compoſitam. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad propoſ. 18. huius lib. oſtendemus.

XV.

DIVISIO rationis, eſt ſumptio exceſſus, quo conſequẽtem ſuperat antecedens, ad ipſam conſequentem.



VT ſi dicatur, quæ proportio eſt totius A B, ad C B, ea eſt totius D E, ad F E; Igitur erit & A C, exceſſus, quo antecedens conſequentem ſuperat, ad C B, conſequẽtem, vt D F, exceſſus, quo conſequentem excedit antecedens, ad F E, conſequentem. In diuiſione autem hac rationis ita loquuntur auctores: ergo diuidendo, &c. Hæc porrò illatio oſtendetur propoſ. 17. huius lib.

POSSVNT etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuiſionem rationis conuerſam dicere poſſumus: quando nimirum conſequens ad exceſſum, quo conſequentem ſuperat antecedens, refertur. Vt ſi eſt, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E, concludimus q3 per diuiſionẽ rationis conuerſam. Ergo erit, vt C B, conſequens ad A C, exceſſum, quo antecedens conſequentem ſuperat, ita F E, conſequens ad D F, exceſſum, quo antecedens ſuperat conſequentem. Valere autem hanc argumentationem, oſtendemus ad 17. propoſ. huius lib.

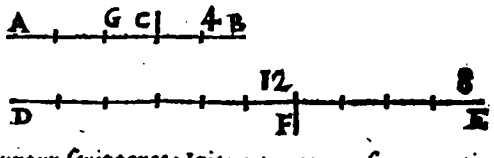
PERSPICVVM autem eſt, vt vtraque harum argumentationum per Diuiſionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & noſtra, antecedentem debere eſſe maiorem conſequente. Alias Diuiſio fieri non poſſet.

ALTER modus appellari poteſt Diuiſio rationis contraria: quando videlicet confertur antecedens cum exceſſu, quo conſequens antecedentem ſuperat. Vt cùm dicimus: Ita ſe habet A C, ad A B, vt D F, ad D E. Igitur erit quo q3 per diuiſionem rationis contrariam vt A C, antecedens ad C B, exceſſum, quo conſequens antecedentem ſuperat, ita D F, antecedens ad F E, exceſſum, quo antecedentem ſuperat conſequens. Qui modus argumentandi demonſtrabitur etiam à nobis ad propoſ. 17. huius libri.

PORRO manifeſtum eſt, in hac diuiſione rationis contraria conſequentem debere eſſe maiorem antecedente, vt ſumi poſſit exceſſus, quo conſequens antecedentem ſuperat.

XVI.

CONVERSIO rationis, eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo ſuperat antecedens ipſam conſequentem.

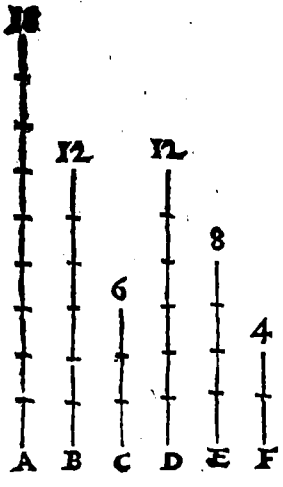


QVOD ſi colligamus hoc modo: Sicut eſt tota magnitudo A B, ad C B, ita tota D E, ad F E: Igitur ita etiam erit eadem A B, ad A C, exceſſum, quo conſequentem ſuperat antecedens, vt D E, ad D F; Dicemur per conuerſionem rationis argumentari. Vnde ſic ferè loquuntur ſcriptores: Igitur per conuerſionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in corollario propoſ. 19. huius libri.

Liquido etiam constat, in hoc modo argumentandi per conuersionem rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.

XVII.

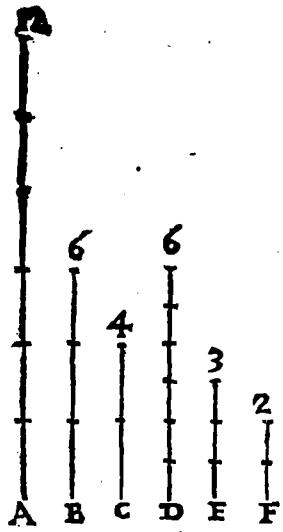
Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cùm vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.



VEL aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

Sint plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, sintq; bina ac bina in eadem proportione, hoc est, A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionē A, ad C, primæ ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, primæ magnitudinis ad vltimam in secundis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, siue ex æqualitate, in qua scilicet extremæ magnitudines, subductis mediis, colliguntur habere vnā, eandemq; inter sese proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam verò duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando sumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinatè procedendo, altero verò, cùm ordo inuertitur; explicat Euclides duabus sequentibus definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.

XVIII.

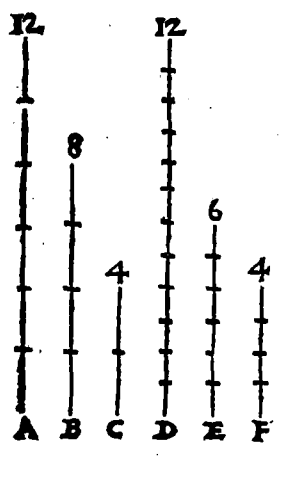


ORDINATA proportio est, cùm fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

Vt quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quàm in secundis seruatur; cùm vtrobique conferatur primùm prima cum secunda, deinde secunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Ordinata proportio, demonstratur propos. 22. huius lib. eam argumentationem esse bonam.

XIX.

PERTVRBATA autem proportio est, cùm tribus positis magnitudinibus, & aliis, quæ sint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem. Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

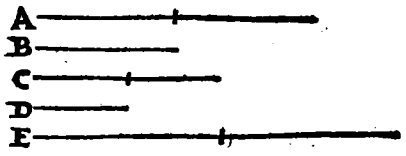


Si autem fit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde vt in primis magnitudinibus B, consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam, D, ad E, antecedentem magnitudinem; nuncupabitur huiusmodi proportio, Perturbata: quòd non seruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cùm in primis magnitudinibus conferatur prima cum secunda, at in secundis secunda cum tertia; deinde in primis secunda cum tertia, at in secundis prima cum secunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Perturbata proportio, demonstratur, eam argumētationem esse bonam, propositione 23. huius libri. Porrò tam perturbata proportio, quàm ordinata, semper infert ex æqualitate eandem extremorum proportionem, etiamsi plures magnitudines ponantur, quàm tres, vt ex propos. 22. & 23. huius libri perspicuum fiet.

Vtvntur Euclidis interpretes hoc libro, & in alijs, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate quodam: quod vt hic subijceremus, nō inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est:

QVAM

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo propoſita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propoſitam.



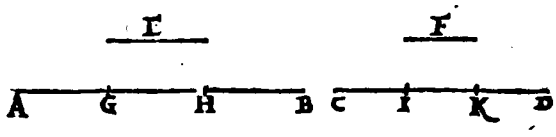
VT, quã proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo propoſita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quapiam alia E, ad propoſitam C. Quamuis enim ignoremus interdum, quanam ſit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non eſt, eam eſſe poſſe in rerum natura; cùm id contradictionem non implicet, vt Philoſophi loquuntur, neq; abſurdi aliquid ex eo conſequatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

1.

SI ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æquè multiplices; quàm multiplex eſt vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum E, F, æquè multiplices. Dico magnitudines AB, CD, ſimul, tam eſſe multiplices magnitudinũ E, F, ſimul, quàm eſt multiplex AB, ipſius E, vel CD, ipſius F. Cùm enim AB, CD, ſint æquè multiplices ipſarum E, & F, ſi AB, diuidatur in magnitudines AG, GH, HB, ipſi E, æquales, & CD, quoque in magnitudines CI, IK, KD, ipſi F, æquales; (Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cùm AB, CD, ſint ipſarum E, F, æquè multiplices, atque ideò toties E, in AB, perfectè contineatur, quoties F, in CD, vt ex iis, quæ in defin. 2. huius libri ſcripſimus, conſtat.) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot ſunt magnitudines CI, IK, KD. Quoniam verò AG, & E, æquales inter ſe ſunt, ſi ipſis addantur æquales CI, & F, [a] erunt AG, CI, ſimul æquales ipſis E, & F, ſimul. Eodem modo erunt GH, & IK, ſimul, æquales ipſis E, & F, ſimul; Necnon HB, & KD, eiſdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties & E, F, ſimul, in AB, CD, ſimul comprehẽduntur: Ideoque, quàm multiplex eſt AB, ipſius E, tam ſunt multiplices AB, CD, ſimul ipſarum E, & F, ſimul, vt conſtat ex iis, quæ in definitione 2. huius libri ſcripſimus. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinũ, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 2. pron.

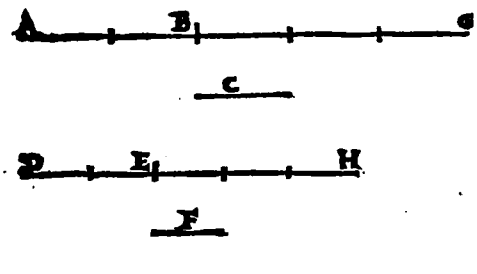
SCHOLIVM.

HOC idem demonſtrabitur vniuersè propoſ. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quàm irrationalis. Neceſſarium autem fuit, idipſum prius hoc loco in proportione multiplici demonſtrare: quia ex eo aliæ propoſitiones demonſtrandæ ſunt, antequam propoſitio 12. poſſit demonſtrari.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ æquè multiplex, atque ſexta quartæ; erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æquè multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ.

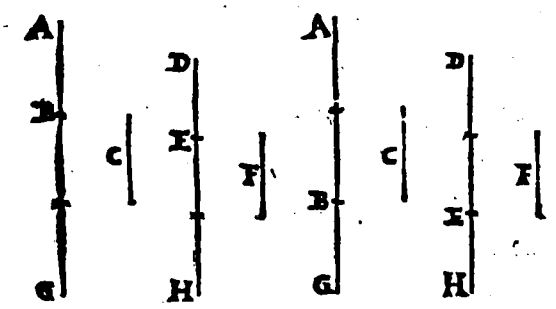


SIT magnitudo prima AB, tam multiplex ſecundæ C, quàm eſt multiplex DE, tertia, quartæ F; Rurſus tam ſit multiplex BG, quinta ipſius C, ſecundæ, quàm multiplex eſt EH, ſexta ipſius F, quartæ. Dico AB, primam cum BG, quinta compoſitam, tam multiplicem eſſe ſecundæ C, quàm multiplex eſt DE, tertia compoſita cum ſexta EH, ipſius F, quartæ. Cùm enim AB, DE, ſint æquè multiplices ipſarum C, F; erunt in AB, tot magnitudines ipſi C, æquales, quot ſunt in DE, æquales ipſi F. Eadem ratione erunt & in BG, tot æquales ipſi C, quot ſunt in EH, æquales ipſi F. Si igitur æqualibus multitudinibus AB, DE, addantur æquales multitudines BG, EH; [b] erunt totæ multitudines AG, DH, æquales. Quare toties comprehenditur C, in AG, quoties F, in DH; Ideoque tam multiplex eſt AH (prima compoſita cum quinta) ipſius C, ſecundæ, quàm multiplex eſt DH, (tertia compoſita cum ſexta) ipſius F, quartæ. Si prima itaque ſecundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat oſtendendum.

[b] 2. pron.

SCHOLIVM.

QVOD ſi prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint ſecundæ, & quartæ; Quinta verò & ſexta, æquè

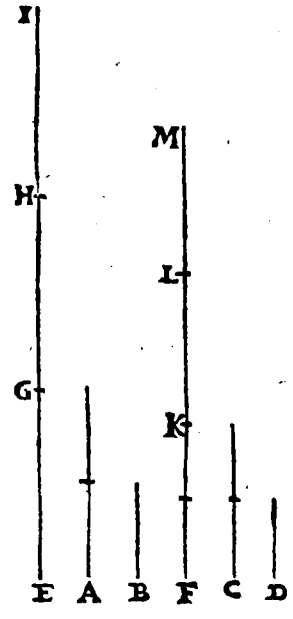


multiplices ſecundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia, æquè multiplices fuerint ſecundæ & quartæ; At quinta & ſexta, æquales ſecundæ, & quartæ: Erit eadem ratione tota A G, (prima & quinta) tam multiplex ſecundæ C, quàm multiplex eſt tota D H, (tertia ac ſexta) ipſius F, quartæ. Semper enim A G, multitudo magnitudinum æqualium ipſi C, oſtendetur æqualis eſſe ipſi D H, multitudini magnitudinum ipſi F, æqualium, vt perſpicuũ eſt in appoſitis figuris. Si verò tam prima & tertia, quàm quinta, & ſexta æquales ponantur ſecundæ, & quartæ, luce clarius eſt, primã & quintam ſimul, atque tertiam & ſextam ſimul, æquè multiplices eſſe, nimirum duplices, ſecundæ & quartæ magnitudinum.

Hoc quoque ab Euclide concludetur in omni genere proportionis vniuersè propoſ. 24. ſed operæ pretium fuit, idipſum prius in proportione multiplici demonſtrare, vt ea, quæ ſequuntur, demonſtrari poſſint.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ſit prima ſecundæ æquemultiplex, atque tertia quartæ; ſumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, ſumptarum vtraque vtriuſque æquemultiplex; altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.



a 2. quinti.

b 2. quinti.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex ſecundæ B, quàm multiplex eſt C, tertia quartæ D; ſumanturque E, F, æquemultiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem eſſe E, ipſius B, ſecundæ, quàm eſt F, ipſius D, quartæ. Nam cùm E, & F, ſint æquemultiplices ipſarum A, & C; ſi diſtribuantur E, & F, in magnitudines ipſis A, & C, æquales, vt in E G, G H, H I, & F K, K L, L M; erunt tot partes in E, æquales ipſi A, quot ſunt in F, æquales ipſi C. Quoniam verò E G, F K, æquales ſunt ipſis A, & C; ſunt autem A, & C, æquemultiplices ipſarum B, & D, ex hypotheſi; Erunt & E G, F K, earundem B, & D, æquemultiplices. Pari ratione erunt G H, K L; Item H I, L M, æquemultiplices earundẽ B, & D. Quoniam igitur E G, prima magnitudo, tam eſt multiplex ſecundæ B, quàm eſt multiplex F K, tertia quartæ D. Item G H, quinta tam multiplex eſt eiuſdem ſecundæ B, quàm multiplex eſt K L, ſexta eiuſdem quartę D, [a] Erit & E H, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quàm eſt multiplex F L, compoſita ex tertia & ſexta, quartæ D. Rurſus cùm ſit E H, prima tam multiplex ſecundæ B, quàm multiplex eſt F L, tertia quartæ D, vt proximè demonſtratum eſt; ſit autem & H I, quinta, tam multiplex ſecundæ B, quàm eſt L M, ſexta multiplex quartæ D; [b] Erit & E I, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quàm eſt F M, compoſita ex tertia ac ſexta, multiplex quartæ D. Eademque eſt ratio, ſi plures fuerint partes in E, & F. Si ſit ergo prima ſecundæ æquemultiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

OSTENDETVR hoc theorema, propoſitione 22. non ſolùm in magnitudinibus æquemultiplicibus, ſed etiam in omnibus, quæ binæ ſumptæ eandem habent proportionem, ſiue rationalem, ſiue irrationalem: ſed neceſſarium fuit, ipſum prius hic in proportione multiplici demonſtrare, vt inſequens propoſitione 4. demonſtrari poſſit.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æquemultiplices primæ & tertiæ, ad æquemultiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi, prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, ſumanturque primæ A, & tertiæ C, æquemultiplices E, & F. Item, ſecundæ B, & quartæ D, æquemultiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationem: ſiue E, F, ita multiplices ſint ipſarum A. C, ſicut G, H, ipſarum B, D, ſiue non. His poſitis, conſtat ex definitione 6 huius lib. ſi E, deficit à G, etiam F, deficere ab H. Et ſi E, æqualis eſt ipſi G, etiã F, æqualem eſſe ipſi H. Et denique ſi E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non eſſet, per defin. 6. eadem

eadem proportio A,ad B,quæ C,ad D, ſi earum æquemultiplicia non ſemper ita ſe haberent. Dico iam,multiplicia primæ ac tertiæ,non ſolùm vnà deficere à multiplicibus ſecundæ ac quartæ, aut vnà æqualia eſſe,aut vnà excedere,vt diximus: ſed eandem quoque inter ſe proportionem habere,nimirum ita eſſe E,multiplicem primæ A,ad G, multiplicem ſecundæ B,vt F,multiplicem tertię C,ad H,multiplicem quartæ D. Hoc eſt, ſi rurſus E, ſtatuatur prima magnitudo; G,ſecunda; F, tertia; & H,quarta: ſumanturque ipſarum E, F, æquemultiplicia qualiacunque; Item ipſarum G, H, quæcunque etiam æquemultiplicia; Multiplicia ipſarum E,F,à multiplicibus ipſarum G,H,vel vnà deficere,vel vnà æqualia eſſe, vel vnà excedere, vt vult defin. 6. Idem namq; eſt, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æquemultiplicia ſumpta,vt diximus,vel vnà deficere, vel vnà æqualia eſſe, vel vnà excedere. Capiantur enim rurſus I,K, ipſarum E,F,æquemultiplices; Item L,M,æquemultiplices ipſarum G,H. Quoniam igitur tam multiplex eſt E,prima ipſius A, ſecundæ, quàm F,tertia ipſius C, quartæ; ſumptæ ſunt autem & I, K, æquemultiplices ipſarum E,F, primæ ac tertiæ: [a] Erunt quoque ex æquo I,K, æquemultiplices ipſarum A,C, ſecundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L,M, ipſarum B, D,æquemultiplices. Et quia ponitur proportio A,primæ ad B,ſecundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; oſtenſæque ſunt I,K, æquemultiplices primæ & tertiæ, A, C; Item L, M, æquemultiplices ſecundæ & quartæ,B,D; [b] fit vt ſi I,multiplex primæ deficit ab L,multiplici ſecundæ, etiam K,multiplex tertiæ neceſſariò deficiat ab M,multiplici quartæ:& ſi I,æqualis eſt ipſi L,etiam K,ipſi M,ſit neceſſariò æqualis: & denique ſi I,excedit ipſam L,etiam K,excedat neceſſariò ipſam M:Idémque oſtendetur in quibuſcunque æquemultiplicibus magnitudinum E,& F,nec non magnitudinum G, & H: quia ſemper hæc æquemultiplicia, quæcunque ſint, [c] æquemultiplicia quoque erunt magnitudinum A,C, & B,D. Itaque cùm I, & K, ſint æquemultiplices primæ E, & tertiæ F; Item L,& M,æquemultiplices ſecundæ G,& quartæ H; oſtenſumque ſit, ſi I, multiplex primæ minor fuerit,quàm L, multiplex ſecundæ,multiplicem tertiæ K,minorem quoque eſſe, quàm M,multiplicem quartæ,&c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: [d] Erit,vt E,prima ad G,ſecundam,ita F,tertia ad H,quartam. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem,&c. Quod erat demonſtrandum.

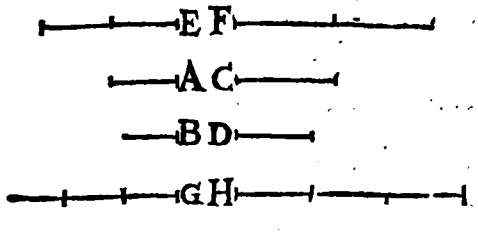
[a] 3. quinti.

[b] 6. definit. quinti.

[c] 3. quinti.

[d] 6. definit. quinti.

COROLLARIVM.



Hinc facilè demonſtrabitur Inuerſa ratio, quam Euclides definitione decimatertia explicauit; hoc eſt, ſi quatuor magnitudines fuerint proportionales, eaſdem & contrà, ſeu inuerſa ratione, proportionales eſſe. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico eſſe conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æquemultiplicibus ipſarum A, C, primæ, ac tertiæ; Item G, H, æquemultiplicibus ipſarum B, D, ſecundæ & quartæ: quoniam ex eo, quòd A, prima ad B, ſecundam ſe habet, vt C, tertia ad D, quartam, [a] neceſſariò ſequitur, ſi E, multiplex primæ minor fuerit quàm G, multiplex ſecundæ, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem eſſe, vel æqualem, vel maiorem, quàm H, multiplicem quartæ; Perſpicuum eſt, ſi è contrario G, maior fuerit, quàm E, vel æqualis, vel minor, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel minorem, quàm F, ſecundùm quamcunque multiplicationem ſint ſumpta hæc æquemultiplicia. Nam ſi vtraque E, F, minor eſt, quàm vtraque G, H, erit contrà vtraque G, H, maior, quàm vtraque E, F: & ſi vtraque E, F, æqualis eſt vtrique G, H, erit è contrario, vtraque G, H, vtrique E, F, quoque æqualis: Et denique ſi vtraq; E, F, maior eſt, quàm vtraque G, H, erit vice verſa, vtraque G, H, minor, quàm vtraque E, F. Itaq; quoniam primæ B, & tertiæ D, ſumpta ſunt æquemultiplicia G, H; Item ſecundæ A, & quartæ C, æquemultiplicia E, F, oſtenſumq; eſt G, H, vel vnà excedere E, F, vel vnà æqualia eſſe, vel vnà deficere, ſecundùm quamcunq; multiplicationem ea multiplicia ſu-

[a] 6. defin. quinti.

mantur; [a] erit vt B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonstrandum.

a 6. definit. quinti.

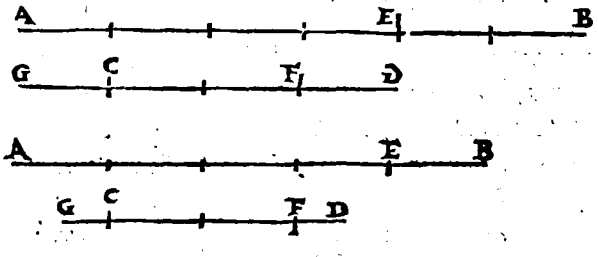
SCHOLIVM.

HAEC propositio cum suo corollario vera est, siue duæ magnitudines A, B, sint eiusdem generis cum duabus magnitudinibus C, D, siue non, vt ex demonstratione liquet.

ORONTIVS quartũ hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propos. huius lib. ostendit I, K, esse æquemultiplices magnitudinum A, C, Item L, M, esse æquemultiplices magnitudinum B, D, infert statim per conuersum 6. definitionis, iuxta suam expositionem, ita esse I, ad L, vt K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, vt F, ad H. Quæ quidem demonstratio admodum est vitiosa, tum quia secundùm hunc sensum demonstratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus proportionalibus, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ eandem habere proportionem, ex eo, quòd ex 6. defin. vt ipse explicauit, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ eandem habent proportionem; quod est absurdum: tum etiam, quia eodem modo statim à principio licuisset illi inferre, sic esse, per 6. defin. E, ad G, vt F, ad H, sine acceptione nouarum magnitudinum æquemultiplicium. Non enim est maior ratio in illis, quàm in his. Reijcienda est ergo huiusce modi demonstratio, vnà cum expositione 6. definitionis, vt suprà diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis, constat solùm, si I, minor est, quàm L, vel æqualis, vel maior, etiam K, minorẽ esse, vel æqualem, vel maiorem, quàm M; quemadmodum & idem constat in æquemultiplicibus E, F, G, H, & in quibuscunque alijs, si sumantur, prout inter se respondent. Vnde ex 6. defin. rectè colligitur, ita esse E, primam ad G, secundam, vt est F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illis 6. definitio conuenit.

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

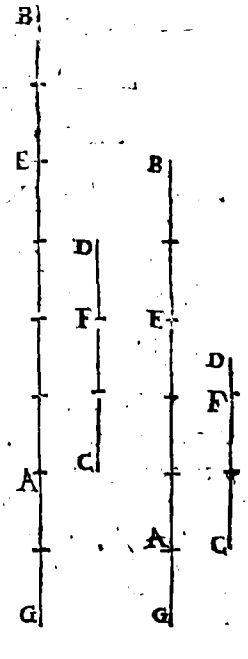
SI magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.



ITA multiplex sit tota AB, totius CD, vt est multiplex AE, ablata ablatæ CF, siue AE, CF, ablatæ sint totis AB, CD, commensurabiles, vt in prima figura: siue incommensurabiles, vt in secunda figura. Itẽ siue AE, CF, compositæ sint ex eisdem partibus, ex quibus totæ AB, CD, componuntur, vt in priori figura: siue non ex eisdem, vt in posteriori figura. Dico reliquam EB, ita esse multiplicem reliquæ FD, vt est tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuspiã magnitudinis, videlicet ipsius GC, vt est AE, multiplex ipsius CF, vel tota AB, totius CD. Quoniam igitur AE, EB, æque sunt multiplices ipsarum CF, GC; [a] erit tota AB, totius GF, ita multiplex, vt AE, ipsius CF, hoc est, omnes omnium, vt vna vnius: Sed tam multiplex etiam ponitur AB, ipsius CD, quàm est multiplex AE, ipsius CF. Igitur AB, tam est multiplex ipsius GF, quàm multiplex est ipsius CD; [b] atq; idcircò æquales sunt GF, CD. Ablata igitur communi CF, æquales erũt GC, FD. Tá multiplex igitur erit EB, ipsius FD, q̃ multiplex est ipsius GC. Sed ita multiplex posita fuit EB, ipsius GC, vt AE, ipsius CF, hoc est, vt tota AB, totius CD. Quare tá multiplex est reliqua EB, reliquæ FD, q̃ est tota AB, totius CD: quod est propositũ.

a 1. quinti.

b 6. pron.



ALITER. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, vt ablata AE, ablatę CF. Dico reliquum EB, reliquæ FD, esse sic multiplicem, vt est tota totius. Posita enim GA, ita multiplici ipsius FD, vt est AE, ipsius CF, vel vt tota AB, totius CD: quoniam AE, GA, æquè multiplices sunt ipsarum

rum CF,FD; [c] erit tota GE,ſic multiplex totius CD, vt AE, ipſius CF: Sed ita quoq; multiplex eſt AB, eiuſdem CD, vt AE, ipſius CF, ex hypotheſi. Æquemultiplices ſunt igitur GE, AB, ipſius CD; [b] atque adeò inter ſe æquales. Quare dempta communi AE, æqualet erunt GA, EB. Ideoque æquemultiplices ipſius FD; cum GA, ſit multiplex poſita ipſius FD: Atqui ita eſt multiplex poſita GA, ipſius FD, vt AB, ipſius CD. Igitur & EB, reliqua ſic erit multiplex ipſius FD, reliquæ, vt AB, tota totius CD; quod eſt propoſitum. Si magnitudo itaque magnitudinis æquè fuerit multiplex, &c. Quod erat demonſtrandum.

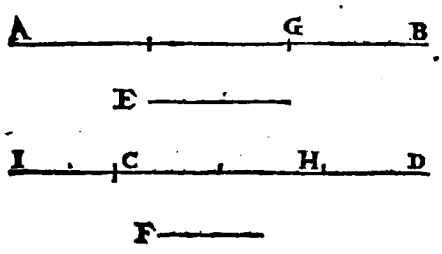
[c] 21. quinti. [b] 6. pron.

SCHOLIVM.

VNIVERSE idipſum demonſtrabitur propoſ. 19. in magnitudinibus cuiuſcunque proportionis, & non tantùm multiplicis, vt hic factum eſt.

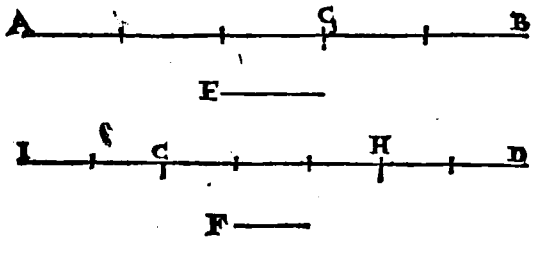
THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

SI duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æquemultiplices, & detractę quædam ſint earundem æquemultiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices.



SINT magnitudines AB, CD, æquemultiplices ipſarum E, F; & detractæ AG, CH, earundē E, F, æquemultiplices. Dico reliquas GB, HD, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certè earundē æquemultiplices. Cùm enim AB, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque AG, eiuſdem E, multiplex; erit reliqua GB, vel æqualis ipſi E, vel eius multiplex; aliâs inæqualis, vel nō multiplex magnitudo, addita multiplici, componeret multiplicē. quod eſt abſurdum. Sit igitur primū GB, æqualis ipſi E. Dico etiam HD, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipſi F. Et quia prima AG, tam eſt multiplex ſecundæ E, q̄ CH, tertia multiplex eſt quartæ F; & quinta GB, æqualis eſt ſecundæ E, ſicut & CI, ſexta æqualis eſt quartę F; [c] erit AB, prima cum quinta, ita multiplex ſecundæ E, vt HI, tertia cū ſexta multiplex eſt quartæ F: Atqui CD, ipſius F, erat quoq; tam multiplex q̄ AB, multiplex eſt ipſius E. Æquemultiplices igitur ſunt HI, CD, ipſius F; [d] Ideoq; æquales inter ſe. Quare dempta CH, cōmuni, remanebunt CI, HD, æquales. Cùm igitur CI, poſita ſit æqualis ipſi F, erit quoq; HD, eidem F, æqualis. Quod eſt propoſitū.

[c] 2. quinti. [d] 6. pron.



SIT deinde GB, multiplex ipſius E. Dico ita quoq; eſſe multiplicem HD, ipſius F. Poſita namque CI, ita multiplici ipſius F, vt eſt multiplex GB, ipſi E; [e] erit, vt prius, AB, ita multiplex ipſius E, vt HI, multiplex eſt ipſius F. [f] Quare iterum æquales erunt HI, CD; atque adeò dempta communi CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed CI, eſt ita multiplex ipſius F, vt GB, ipſius E, multiplex eſt, ex hypotheſi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipſius F, quàm GB, ipſius E, multiplex eſt. quod eſt propoſitum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum ſint æquemultiplices, &c. Quod oſtendendum erat.

[e] 2. quinti. [f] 6. pron.

SCHOLIVM.

HOC quoq; oſtendemus vniuersè propoſ. 24. in omni genere proportionis.

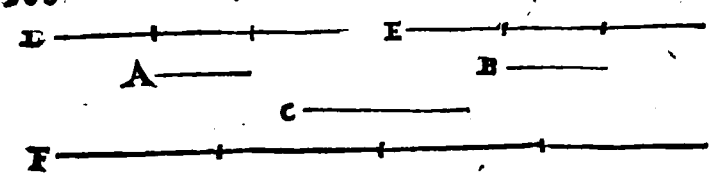
BREVIVS totam propoſ. ita demonſtrabimus. Quoniam AB, CD, ſunt ipſarum EF, æquemultiplices; erūt in AB, tot magnitudines æquales ipſi E, quot ſunt magnitudines in CD, æquales ipſi F. Rurſus quia AG, CH, earundem E, F, æquemultiplices ſunt; erūt quoq; in AG, tot magnitudines ipſi E, æquales, quot ſunt magnitudines in CH, ipſi F, æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus AB, CD, demantur multitudines æquales AG, CH; remanebunt multitudines GB, HD, æquales. Quare toties continebitur E, in GB, quoties F, continetur in HD: ac proinde ſi GB, æqualis ſit ipſi E, erit quoq; HD, ipſi F, æqualis: Si autem GB, multiplex ſit ipſius E; erit ita multiplex HD, ipſius F, vt GB, multiplex eſt ipſius E: quandoquidem toties E, in GB, continetur, quoties F, in HD, exiſtit, vt oſtenſum eſt.

THEOR. 7. PROPOS. 7. 7.

AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SINT duæ magnitudines A, B, æquales inter ſe, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Item C, viciſsim ad A, & B, eandem quoq; proportionē habere. Sumantur D, E, æquemultiplices ipſarum æqualium A, B; [g] eruntq; D, E, æquales inter ſe. Capiatur rurſus F, vtcunque multiplex ipſius C. Quoniam igitur D, E, æquales ſunt, fit vt vtraque vel minor ſit q̄ F, vel

[g] 6. pron.



æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cùm D, E, æquemultiplices primæ A, & B, tertiæ, minores sint ipsa F, multiplice, secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores: [a] erit ea proportio primæ A, ad C, secundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.

[a] 6. definit. quinti.

EODEM pacto ostendemus F, vel minorem esse vtraque D, E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cùm F, multiplex primæ & tertiæ C, vnà deficiat à D, & E, æquemultiplicibus secundę A, & quartæ B; vel vnà æqualis sit, vel maior; [b] Erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Posset brevius secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inversa ratione. Cùm enim ostensum iam sit, esse A, ad C, vt B, ad C; erit conuertendo C, ad A, vt C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. quod erat demonstrandum.

[b] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, nihil posse in hac propos. colligi ex 6. defin. iuxta expositionem Campani ac Orontij. Neq; enim per demonstrationem constat, vtramq; multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F: sed solùm cùm illa sint æquales, vtramque esse vel minorem, vel æqualem, vel maiorem multiplici F. Idemq; cernitur in omnibus ferè propositionibus, quæ per 6. defin. propositum colligunt: Vt meritò illa expositio reiecta sit à nobis.

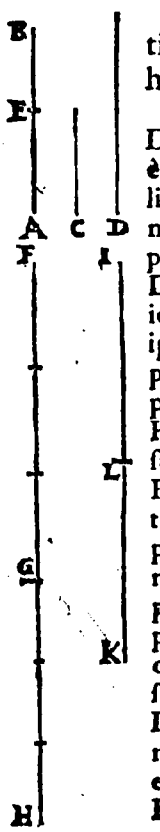
EODEM ferè modo ostendemus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales, eandem habere rationem, si loco multiplicis F, sumantur duæ æquemultiplices: quod Euclides ob facilitatem omisit: vtitur tamen eo nonnunquam in iis, quæ sequuntur, perinde ac si in hac propositione 7. esset demonstratum. Sint enim tam A, & B, inter se æquales, quàm C, & D, inter se. Dico esse A, ad C, vt B, ad D. Sumptis enim E, & F, æquemultiplicibus ipsarum A, & B, primæ & tertiæ. Item G, & H, æquemultiplicibus ipsarum C, & D, secundæ & quartæ; [a] *erunt tam E, & F, inter se æquales, quàm G, & H, inter se. Quare si E, multiplex primæ deficit à G, multiplice secundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplice quartæ deficiet: & si æqualis, æqualis: & si superat, superabit.* [b] *Eadem ergo est proportio A, primæ ad C, secundam, quæ B, tertiæ ad D, quartam. Quod est propositum.*

[a] 6. pron.

[b] 6. defin. quinti.

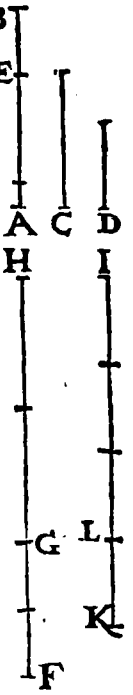
8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

INAEQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorē, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.



SINT magnitudines inæquales, AB, maior, & C, minor; Tertia autem quælibet D. Dico proportionem AB, ad D, maiorem esse proportione C, ad D. At è conuerso, maiorem esse proportionem D, ad C, quàm D, ad AB. Intelligatur enim in AB, magnitudine maiore, magnitudo AE, æqualis minori C, vt sit reliqua EB. Vtraque deinde EB, AE, æqualiter multiplicetur, hac lege, vt GF, multiplex ipsius EB, maior quidem sit, quàm D; At HG, multiplex ipsius AE, non sit minor eadem D, sed vel maior, vel æqualis. In priori figura necesse fuit sumere GF, HG, triplas ipsarum EB, AE, quia dupla ipsius AE, esset minor, quàm D. Loco triplarum potuissent accipi quæcunque aliæ æquemultiplices maiores. In posteriori autem figura satis est, sumere ipsarum EB, AE, duplas GF, HG; quia vtraque GF, HG, maior est, q̄ D. Possent tamen pro duplis sumi quæcunque aliæ maiores æquemultiplices. Quoniam igitur duæ FG, GH, æquemultiplices sunt duarū BE, EA; [a] erit & tota FH, ita multiplex totius AB, vt HG, ipsius AE, hoc est, ipsius C, cùm æquales sint positæ C, & AE. Capiatur quoq; ipsius D, multiplex IK, quæ proximè maior sit, quàm HG, nempe dupla, vt in priori figura. Quòd si dupla maior non fuerit, quàm HG, sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In posteriori figura accepta est IK, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla, quàm tripla minor est, quàm HG, at quadrupla iam maior est. Abscissa ergo LK, quæ æqualis sit ipsi D, non erit IL, maior, quàm HG, (aliàs IK, non esset multiplex ipsius D, proximè maior quàm HG; sed & IL, maior quoque esset q̄ HG. Quòd si IK, dupla sit ipsius D, perspicuum est, IL, non esse maiorem, quàm HG, cùm HG, posita sit non minor q̄ D, hoc est, quàm IL,) & idcircò HG, erit vel æqualis ipsi IL, vel maior.

[a] 1. quinti.



Et

Et quia FG, maior eſt poſita, quàm D; LK, verò æqualis eidem D; erit quoque FG, maior quàm LK. Cùm ergo HG, non minor ſit quàm IL, vt demonſtratum eſt, ſed vel æqualis, vel maior; erit tota FH, maior quàm IK. Itaque cùm FH, HG, ſint æquemultiplices primæ AB, & tertiæ C; atque IK, multiplex ipſius D, quæ inſtar eſt ſecundæ & quartæ: ſit autem FH, multiplex primæ, maior quàm IK, multiplex ſecundæ; At HG, multiplex tertiæ non ſit maior, quàm IK, multiplex quartæ, immò minor, ex hypotheſi; (ſumpta enim eſt IK, multiplex ipſius D, maior quàm HG,) [a] erit maior proportio AB, primæ ad D, ſecundam, quàm C, tertiæ ad D, quartam. [a] 8. definit. quinti.

QVONIAM verò è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, ſecunda, & AB, quarta) maior eſt quàm HG, multiplex ſecundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, maior non eſt, quàm FH, multiplex quartæ AB, immò minor, cùm FH, maior ſit, quàm IK, vt oſtenſum eſt; [b] erit maior proportio D, primæ ad C, ſecundam, quàm D, tertiæ ad AB, quartam: qd eſt propoſitũ. Inæqualium igitur magnitudinũ maior ad eandem, &c. Quod erat oſtendendũ. [b] 8. definit. quinti.

SCHOLIVM.

RECTE autem animaduertit Petrus Nonius in ſua Algebra de Proportione agens, per hanc propoſ. 8. probari non poſſe, angulum rectum maiorem habere proportionem ad quemuis alium angulum, quam angulum ſemicirculi ad eundem illum angulum, quantumuis rectus angulus maior ſit angulo ſemicirculi: quia exceſſus anguli recti ſupra angulum ſemicirculi, qui eſt angulus contingentia, quantumuis multiplicatus ſuperare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propoſ. demonſtratione requiritur. Nam FG, multiplex exceſſus EB, ſuperare debet tertiam magnitudinem D, vt patuit. Neq; hoc mirum cuipiam videatur. Nam angulus rectus ad angulum ſemicirculi nõ dicitur propriè habère proportionem, cum eum excedat angulo contactus, qui non eiuſdem naturæ eſt cum vtroque angulo, quòd ita multiplicari non poſſit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim, ſi ad lineam vnius palmi addi poſſet vnũ punctum, vt fieret linea vno puncto lineam vnius palmi excedens, non diceretur propriè linea illa compoſita maior, quàm linea vnius palmi, propterea quòd exceſſus eſt indiuiſibilis, & alterius naturæ; Item quemadmodum, ſi ad figuram planam quamcumq; apponeretur linea vnius palmi, non diceretur hæc magnitudo ex diuerſis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam habere propriè proportionem maioris inæqualitatis: quòd exceſſus non ſit eiuſdem naturæ cum plana illa figura: Ita quoq; non habet angulus rectus propriè ad angulũ ſemicirculi proportionem maioris inæqualitatis; quippe cum angulo ſemicirculi adiectus ſit angulus contactus, vt efficiatur angulus rectus; atq; adeò rectus angulus angulum ſemicirculi excedat quantitate diuerſæ naturæ, vt dictum eſt. Itaq; non ſolum ea magnitudines proportionem proprie non habent, quarum alterutra multiplicata alteram ſuperare nequit, vt ad defin. 5. huius lib. diximus: ſed neq; ea proprie dicẽtur habere proportionem, vt idem Petrus Nonius annotauit, quarum exceſſus diuerſam ab eis naturam habet, cuiuſmodi ſunt angulus rectus, & angulus ſemicirculi. Adeo vt tunc ſolum proprie magnitudines dicantur habere proportionem inter ſe, quando & alterutra multiplicata alteram ſuperare poteſt, & exceſſus earum multiplicatus ſuperare quoq; poteſt vtramq;. Fateor rem hãc eſſe perobſcuram, & quæ vix recte intelligi poſſit: Verùm hoc prouenit ex indiuiſibilitate anguli contactus per lineam rectam. Huius generis ſunt alia nonnulla in rebus Geometricis, quæ veriſſima quidem ſunt propter demonſtrationem euidentem, ſed alia ex parte talem inducunt difficultatem, vt ab ea non facile intellectus ſe expediat. Verbi gratia, Veriſſimum eſt ſphæram tangere planum in puncto, vt à Theodoſio demonſtratur propoſ. 3. lib. 1. Sed qua ratione fiat, vt hinc non ſequatur, ſi globus continuè moueatur ſuper planum, lineam rectam deſcribi compoſitam ex punctis, nemo ad hunc vſq; diem ſic explicauit, vt omni ex parte difficultas ſit ſublata.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales ſunt inter ſe: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque ſunt inter ſe æquales.

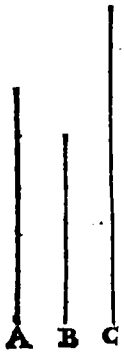
HABEANT primùm A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, eſſe inter ſe æquales. Sit enim, ſi fieri poteſt, altera, nempe A, maior, & B, minor. [c] Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quàm B, minoris ad eandem C; quod eſt contra hypotheſin. Non ergo inæquales ſunt A, & B, ſed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rurſus A, & B, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe A, eſſet maior, & B, minor; [d] haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quàm ad A, maiorem: quod eſt contra hypotheſin. Non igitur maior erit A, quàm B, ſed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonſtrandum erat. [c] 8. quinti. [d] 8. quinti.

SCHOLIVM.

CONVERTIT hæc propoſitio nona vtramque partem theorematis ſeptimi, vt manifeſtum eſt.

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.



HABEAT primùm A, ad C, maiorem proportionem, quàm B, ad eandem C. Dico A, maiorem eſſe, quàm B. Si enim A, foret ipſi B, æqualis, [a] haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor eſſet, quàm B, [b] haberet B, maior ad C, proportionem maiorem, quàm A, minor ad eandem C; quod eſt cõtra hypotheſin. Non eſt igitur A, æqualis vel minor quàm B, ſed maior. Habeat ſecundò C, ad B, maiorem proportionem, quàm ad A. Dico B, minorem eſſe, quàm A. Non enim æqualis erit B, ipſi A; [c] alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod eſt contra hypotheſin. Neque verò B, maior erit, quàm A; [d] aliàs haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem, quàm ad B, maiorem: quod magis eſt contra hypotheſin. Minor igitur eſt B, quàm A; quod eſt propoſitum. Ad eandem igitur magnitudinẽ rationem habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

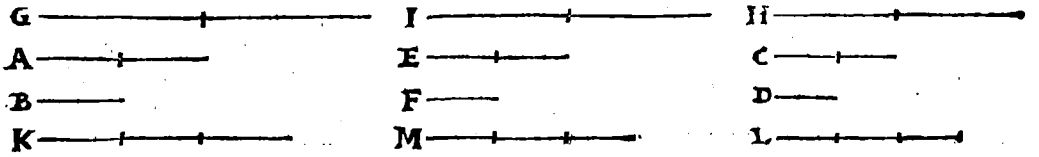
a 7. quinti.
b 8. quinti.
c 7. quinti.
d 8. quinti.

SCHOLIVM.

HAEC quoq; propoſitio conuertit vtramque partem theorematis 8. vt perſpicuum eſt.

11. THEOR. 11. PROPOS. 11.

QVAE eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.



SINT proportiones A, ad B; & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, eaſdem eſſe inter ſe ſecundùm defin. 6. hoc eſt, ſumptis æquemultiplicibus ipſarum A, C; Item æquemultiplicibus ipſarum B, D; ſemper contingere, vt multiplices ipſarum A C, à multiplicibus ipſarum B, D, vel vnà deficiant, vel vnà æquales ſint, vel vnà exǽdant. Sumantur enim ad omnes antecedẽtes A, C, E, æquemultiplices quæcunque G, H, I; & ad omnes conſequentes B, D, F, aliæ quæcunque æquemultiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam vt E, tertia ad F, quartam; [e] fit, vt ſi G, multiplex primæ deficit à K, multiplice ſecundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, vel maior, æqualis quoque ſit I, ipſi M, vel maior: [f] Sed (vt eodem modo oſtendetur) ſi I, minor eſt, quàm M, vel æqualis, vel maior, eſt quoque H, minor, quàm L, vel æqualis, vel maior: propterea quòd ponitur eſſe E, prima ad F, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quare ſi G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice ſecundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D; Et ſi G, æqualis eſt, vel maior quàm K, etiam H, æqualis erit, vel maior quàm L. Idemque oſtenderetur accidere in quibuſcunq; aliis æquemultiplicibus. [g] Quapropter erit A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. Quod erat oſtendendum.

e 6. definit. quinti.
f 6. definit. quinti.
g 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

A, 3.	B, 2.	C, 6.	D, 4.
E, 9.	F, 6.	G. 12.	H, 8.

EADEM ratione, Quæ eiſdem ſunt eadem rationes, & inter ſe ſunt eadem. Vt ſi ſit, vt A, ad B, ita C, ad D; ſit autem E, ad F, vt A, ad B. & G, ad H, vt C, ad D: erit quoque E, ad F, vt G, ad H. Quia enim proportiones E, ad F, & C, ad D, eadem ſunt proportioni A, ad B; [a] *erit vt E, ad F, ita C, ad D. Rurſus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eadem ſunt proportioni C, ad D.* [b] *erit quoque vt E, ad F, ita G, ad H.*

a 11. quinti.
b 11. quinti.

A, 3.	B, 2.	C, 6.	D, 4.	E, 9.	F, 6.
G, 12.	H, 8.	I, 18.	K, 12.	L, 30.	M, 20.

RVRSVS, ſi ſint proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eadem inter ſe; ſit autem vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita I, ad K; & vt E, ad F, ita L, ad M, erunt quoque proportiones G, ad H; I, ad K; & L, ad M, eadem inter ſe. Nam vt proximè in quatuor proportionibus oſtenſum eſt, vt G, ad H, ita eſt I, ad K; propterea quòd hæ proportiones ſimiles ſunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodem modo erit vt I, ad K, ita L, ad M; cũ proportiones I, ad K, & L, ad M, eadem ſint proportionibus C, ad D, & E, ad F, quæ æquales ſunt. Item erit vt G, ad H, ita L, ad M; cùm hæ proportiones eadem ſint proportionibus A, ad B, & E, ad F, quæ æquales ponuntur. Eadem ratio eſt de pluribus.

THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

12.

SI ſint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

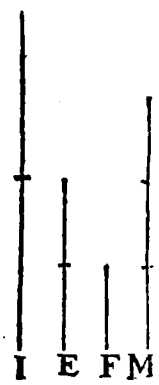
QVOD in propoſ. 1. de proportione multiplici demonſtrauit, oſtendit hîc de omni genere proportionis etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B, C, D, E, F, proportionales, hoc eſt, ſit A, ad B, vt C, ad D, & E, ad F. Dico vt eſt vna antecedentium ad vnam conſequentium, nimirum A, ad B, ita eſſe omnes antecedentes ſimul A, C, E, ad omnes conſequentes ſimul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æquè multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æquemultiplicibus conſequentium, [a] erunt omnes G, H, I, ſimul omnium A, C, E, ſimul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipſius A; & omnes K, L, M, ſimul omnium B, D, F, ſimul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt K, ipſius B. Quoniam verò ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; [b] fit vt ſi G, multiplex primæ deficit à K, multiplice ſecundæ, deficiat quoque H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M; Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, vel maior, æqualis quoque ſit H, ipſi L, & I, ipſi M, vel maior: Ac proinde ſi G, minor eſt, vel æqualis, vel maior quàm K; & omnes G, H, I, ſimul omnibus K, L, M, ſimul minores ſint, vel æquales, vel maiores. [c] Quocirca vt eſt A, prima ad B, ſecundam: ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si ſint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 1. quinti.
[b] 6. definit. quinti.
[c] 6. definit. quinti.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

13.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam.

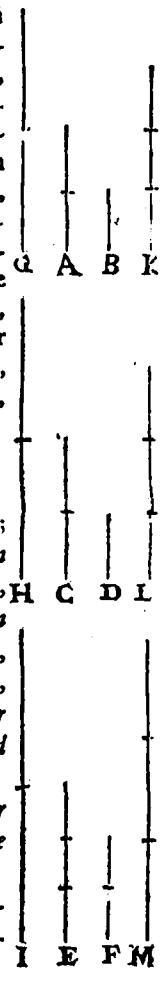


SIT prima A, ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam: ſit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quàm E, quintæ ad F, ſextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, ſecundam eſſe maiorem, quàm E, quintæ ad F, ſextam, ſecundùm definitionem 8. hoc eſt, ſumptis æquemultiplicibus ipſarum A, E: Item æquemultiplicibus ipſarum B, F, cõtingere poſſe, vt multiplex ipſius A, excedat multiplicem ipſius B, at multiplex ipſius E, multiplicem ipſius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æquemultiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æquemultiplicibus conſequentium, cùm ſit A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam; [d] fit vt ſi G, multiplex primæ exceſſerit K, multiplicem ſecundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipſam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipſam L, [e] non neceſſariò I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando erit, vel minor, quòd maior ponatur proportio C, primæ ad D, ſecundam, quàm E, tertiæ ad F, quartam. Igitur ſi G, excedit K, non neceſſariò I, exeedit M. [f] Maior eſt ergo proportio A, primæ ad B, ſecundam, quàm E, tertiæ ad F, quartam. Quam ob rem ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendum erat.

[d] 6. definit. quinti.
[e] 8. definit. quinti.
[f] 8. definit. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quàm E, quintæ ad F, ſextam; erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam minor quàm E, quintæ ad F, ſextam. Si enim proportio C, ad D, minor eſt quàm E, ad F, hoc eſt, proportio E, primæ ad F, ſecundam maior, quàm C, tertiæ ad D, quartam; [a] ſit vt ſi I, excedit ipſam M, non neceſſariò H, excedat ipſam L, ſed aliquando deficiat, vel ei æqualis ſit. [b] Sed ſi H, deficit ab L, vel ei æqualis eſt, etiam G, deficiet à K, vel ei erit æqualis, eò quòd ponatur C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare ſi I, excedit ipſam M, non neceſſariò G, excedet ipſam K; [c] atq; idcircò maior erit proportio E, primæ ad F, ſecundam, quàm A, tertiæ ad B, quartam, hoc eſt, proportio A, ad B, minor erit quàm E, ad F; Quod eſt propoſitum.



[a] 8. definit. quinti.
[b] 6. defin. quinti.
[c] 8. definit. quinti.

EODEM modo: Si prima ad ſecundam, maiorẽ habuerit rationem, quàm tertia ad quartam, tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quàm quinta ad ſextam: Prima quoque multò magis ad ſecundam, maiorem rationem habebit quàm quinta ad ſextam.

QVOD ſi prima ad ſecundam, minorẽ habuerit rationem, quàm tertia ad quartam: tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quàm quinta ad ſextam: Prima quoq; multò magis ad ſecundam, minorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam.

14. THEOR. 14. PROPOS. 14.

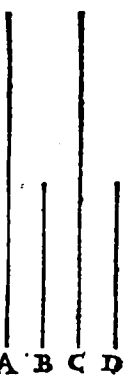
Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima verò quàm tertia maior fuerit, erit & ſecunda maior, quàm quarta. Quòd ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: Si verò minor, & minor erit.

Sit enim A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico ſi A, maior fuerit, quàm C, fore quoque B, maiorem quàm D. Quòd ſi A, æqualis fuerit ipſi C, æqualem quoque eſſe B, ipſi D: Si denique A, minor fuerit quàm C, minorem quoque eſſe B, ipſi D. Sit primùm A, maior, quàm C, [a] eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quàm C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartæ, maior eſt, vt oſtendimus, quàm C, quintæ ad B, ſextam: [b] Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quàm C, quintæ ad B, ſextam. [c] Minor eſt ergo D, quàm B; Ideoque B, maior erit quàm D. Quod eſt propoſitum.

a 8. *quinti.*
b 13. *quinti.*
c 10. *quinti.*

Sit deinde A, æqualis ipſi C; [d] eritque idcircò A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem ſunt proportioni A, ad B, [e] erunt quoque inter ſe eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; [f] Ideoque æquales erunt B, & D. Quod eſt propoſitum.

d 7. *quinti.*
e 11. *quinti.*
f 9. *quinti.*



Sit tertiò A, minor quàm C; [g] eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quàm A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam; eſt autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quàm C, quintæ ad B, ſextam; [h] Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quàm C, quintæ ad B, ſextam; [i] Ideoque B, minor erit, quàm D. quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.

g 8. *quinti.*
h 13. *quinti.*
i 10. *quinti.*

SCHOLIVM.

Quod ſi ſecunda maior ſit, vel æqualis, vel minor, quàm quarta: erit quoque eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quàm tertia. Sit enim primùm B, maior, quàm D, vt in prima figura. Dico & A, maiorem eſſe, quàm C. Cùm enim B, maior ſit, quàm D; [a] erit maior proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur eſt, vt prima A, ad ſecundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt maior, quàm C, quintæ ad B, ſextam; [b] erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam maior, quàm C, quintæ ad B, ſextam: [c] ac proinde A, maior erit, quàm C. quod eſt propoſitum.

a 8. quinti.
b 13. quinti.
c 10. quinti.

Deinde ſit B, æqualis ipſi D, vt in ſecunda figura. Dico & A, ipſi C, eſſe æqualem. Cùm enim B, ipſi D, ſit æqualis; [d] erit C, ad B, vt C, ad D: Eſt autem quoque A, ad B, vt C, ad D. [e] Igitur erit quoque ita A, ad B, vt C, ad B; [f] propterea quæ A, ipſi C, æqualis erit. quod eſt propoſitum.

d 7. quinti.
e 11. quinti.
f 9. quinti.

Tertio ſit B, minor quàm D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem eſſe, quàm C. Cùm enim B, minor ſit, quàm D, [g] erit minor proportio C, ad D, quam C, ad B. Quia igitur eſt, vt A, prima ad B, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam: Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt minor, quam C, quintæ ad B, ſextam, [h] erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam minor, quàm C, quintæ ad B, ſextam. [i] Igitur maior erit C, quàm A; ac proinde A, minor erit, quàm C. quod eſt propoſitum.

g 8. quinti.
h 13. quinti.
i 10. quinti.

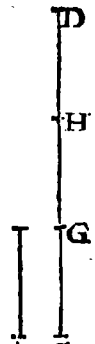
Non demonſtrauit autem Euclides, ſi prima maior eſt, vel æqualis, vel minor, quàm ſecunda, tertiam quoque maiorem eſſe, vel æqualem, vel minorem, quam quartam; (quo tamen argumentandi modo plerique Geometrarum, tum veterum, tum recentiorum vtuntur) quia id perſpicuum eſt ob ſimilitudinem proportionum. Hinc enim fit, ſi vtraq; eſt proportio maioris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem, id eſt, primam ac tertiam maiorem eſſe vtraque magnitudine conſequente, hoc eſt, ſecunda ac quarta: Si verò vtraque proportio eſt æqualitatis, vtramque magnitudinem antecedentem vtrique conſequenti æqualem eſſe. Si denique vtraque proportio eſt minoris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem vtraq; conſequente eſſe minorem.

Verbi gratia, ſi eſt vt A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Quocirca ſi A, prima maior eſt, quàm B, ſecunda, erit & C, tertia maior, quàm D, quarta: Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi minor, minor. Quod eſt propoſitum. Quod tamen Geometrice oſtendemus cum Federico Commandino, licèt id non ſit neceſſarium, ad propoſitionem decimam ſextam huius libri.

THEOR.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 15.

PARTES cùm pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

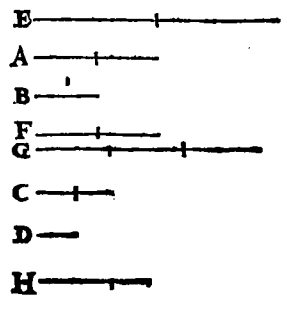


SINT partium A, & B, æquemultiplices C D, & E F. Dico ita eſſe C D, ad E F, vt A, ad B. Cùm enim C D, & E F, ſint æquemultiplices ipſarum A, & B; continebitur A, toties in C D, quoties B, in E F. Diuidatur ergo C D, in partes C G, G H, H D, æquales ipſi A; & E F, in partes E I, I K, K F, æquales ipſi B; [a] eritque C G, ad E I, vt A, ad B, quòd C G, & A, æquales inter ſe ſint, necnon E I, & B. Eadem ratione erit G H, ad I K; & H D, ad K F, vt A, ad B; [b] ideoque C G, G H, H D, ad E I, I K, K F, eandem habebunt proportionem. Quocirca vt C G, ad E I, hoc eſt, vt A, ad B, [c] ita erit C D, ad E F, nempe omnes C G, G H, H D, ſimul, ad omnes E I, I K, K F, ſimul. quod eſt propoſitum. Partes itaque cùm pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 7. quinti.
[b] 11. quinti.
[c] 12. quinti.

THEOR. 16. PROPOS. 16. 16.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.



HIC demonſtratur Alterna, ſiue Permutata proportio, ſeu ratio, quæ definitione 12. explicata eſt. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſsim, ſeu permutando, eſſe quoq; A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipſarum A, B, primæ, ac ſecundæ, æquemultiplices E, F; Item ipſarum C, D, tertiæ & quartæ, æquemultiplices G, H; [d] eritque E, ad F, vt A, ad B; cùm E, & F, ſint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cùm igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, ſint eædem proportioni A, ad B; [e] erunt & ipſæ inter ſe eædem. Rurſus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem ſunt proportioni C, ad D; [f] erunt & ipſæ eædem inter ſe: hoc eſt, vt eſt E, prima ad F, ſecundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. [g] Quare ſi E, prima maior eſt, quàm G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque F, ſecunda maior, quàm H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunque multiplicatione accepta ſint æquemultiplicia E, F, & æquemultiplicia G, H. [h] Eſt igitur A, prima ad C, ſecundam, vt B, tertia ad D, quartam (cùm E, & F, ſint æquemultiplices primæ A, & tertiæ B; At G, & H, æquemultiplices C, ſecundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vnà deficiant, vel vnà æquales ſint, vel vnà excedant, &c.) quod eſt propoſitum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & viciſsim proportionales erunt. Quod oſtendendum erat.

[d] 15. quinti.
[e] 11. quinti.
[f] 11. quinti.
[g] 14. quinti.
[h] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

PORRO demonſtratio huius propoſitionis locum ſolùm habet, quando quatuor magnitudines ſunt eiuſdem generis. Nam ſi duæ A, B, eſſent vnius generis, & duæ C, D, alterius; eſſent quoq; multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet ſunt A, B, & multiplices G, H, alterius, in quo nimirum exiſtunt C, D. Quare nō poſſet dici E, maior q̄ G, vel æqualis, vel minor: ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vſurpanda igitur erit permutata proportio in ſolis quatuor magnitudinibus eiuſdem generis. Quod nonnulli Philoſophi nō aduertentes in graues errores incidunt, cùm eam adhibeant in rebus diuerſorum generum.

EX hoc & illud demonſtrabitur, quod ad finem ſcholij propoſ. 14. ex ipſa ſimilitudine proportionū oſtendimus, recepimus q̄, nos demonſtraturos hoc loco, videlicet.

SI prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima verò, quàm ſecunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quàm quarta; Et ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

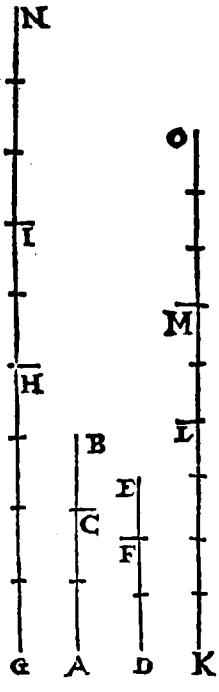
QVANQVAM id, quod hic proponitur, per ſe notum ſit, vt ad propoſitionem 14. diximus, demonſtrabimus tamen illud cum Federico Commandino, hoc modo: Sit vt A, prima ad B, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, ſi A, prima maior eſt, quàm B, ſecunda; & C, tertiam maiorem eſſe quarta D, & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem. [a] *Erit enim permutando, vt A, ad C, ita B, ad D.* [b] *Quare ſi A, prima maior eſt, quàm B, tertia, erit & C, ſecunda maior, quàm D, quarta; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. Quod eſt propoſitum.*

[a] 16. quinti.
[b] 14. quinti.

SED & hæc demonſtratio locum duntaxat habet, cùm quatuor magnitudines ſunt eiuſdem generis. Quare ſatius eſt illud ex natura proportionum monſtrare, vt à nobis ad propoſitionem decimamquartam factum eſt. Ita enim verum erit ſemper id, quod proponitur, etiamſi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immò verò licet A, B, ſint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.

17. THEOR. 17. PROPOS. 17.

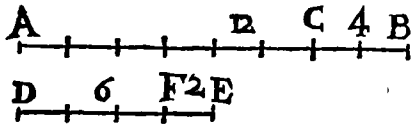
SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.



Hoc loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quam definitione 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, vt DE, ad FE. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE, in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æquemultiplices capiãtur eodem ordine GH, HI, KL, LM; [a] eritque GI, ita multiplex ipsius AB, vt est GH, ipsius AC, hoc est, vt KL, ipsius DF. Sed vt est multiplex KL, ipsius DF, [b] ita quoque multiplex est KM, ipsius DE. Æquemultiplices ergo sunt GI, KM, ipsarum AB, DE. Capiantur rursus IN, MO, æquemultiplices ipsarum CB, FE. Quoniam igitur sic est multiplex HI, prima secundæ CB, vt LM, tertia quartę FE: Item tam est multiplex IN, quinta secundæ CB, quàm multiplex est MO, sexta quartæ FE; [c] erit & HN, sic multiplex secundæ CB, vt LO, multiplex est quartæ FE. Itaque cùm sit AB, prima ad CB, secundam, vt DE, tertia ad FE, quartam; sumptæque sint æquemultiplices GI, KM, primæ ac tertiæ AB, DE; Item secundæ & quartæ CB, FE, æquemultiplices HN, LO, [d] fit vt si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Quòd si deficiat tã GI, ab HN, quàm KM, ab LO; ablatis communibus HI, LM, deficiet quoq; GH, ab IN, & KL, ab MO. Et si GI, æqualis fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO; ablatis communibus HI LM, erit & GH, æqualis ipsi IN, & KL, ipsi MO. Et si denique GI, excesserit ipsam HN, & KM, ipsam LO; ablatis communibus HI, LM, excedet quoq; GH, ipsam IN, & KL, ipsam MO. Quam ob rem cùm GH, KL, sumptæ sint æquemultiplices primæ AC, & tertiæ DF; Item IN, MO, æquemultiplices secundæ CB, & quartæ FE; ostensumque sit, (in quacunque multiplicatione illæ æquemultiplices fuerint acceptæ) æquemultiplices primæ & tertiæ ab æquemultiplicibus secundæ & quartæ, vel vnà deficere, vel vnà æquales esse, vel vnà excedere; [e] Erit AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam. quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 1. quinti.
[b] 1. quinti.
[c] 2. quinti.
[d] 6. definit. quinti.
[e] 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.



Ex his facilè demonstrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. Diuisionem rationis conuersam diximus: Hoc est, si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; esse quoq; vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. quod ita patet. Quoniam est vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] *erit diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur conuertendo erit quoq; vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.*

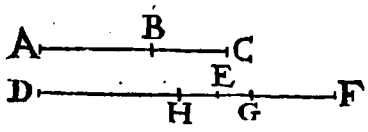
[a] 17. quinti.

NVLLO etiam negotio demonstrabitur modus ille argumentandi, quem ad eandem definit. 15. Diuisionem rationis contrariam appellauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est, quàm consequens: non autem maior, vt in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proximè demonstrauimus. Sit enim vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico esse quoque per Diuisionem rationis contrariam, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. [b] *Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Ac proinde conuertendo rursus, vt AC, ad CB, ita DE, ad FE. Quod est propositum.*

[b] 17. quinti.

18. THEOR. 18. PROPOS. 18.

SI diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.



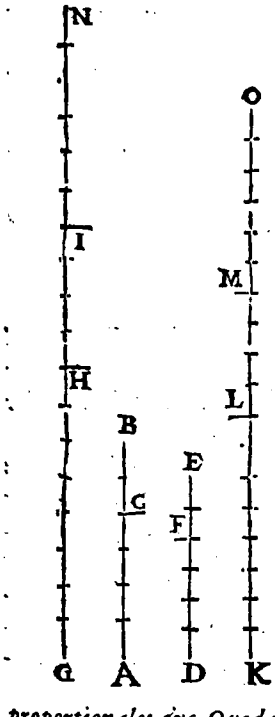
DEMONSTRAT hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudines AB, BC. & DE, EF, proportionales, hoc est, AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico & compositas proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad BC, ita esse DF, ad EF. Si enim non est, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit DF, ad aliquam magnitudinẽ minorem ipsa EF, vel maiorem, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primùm DF, ad GF, minorem ipsa EF, si fieri potest, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur est, vt AC, ad BC, ita DF

ad GF

ad G F. [a] Erit diuidendo quoque, vt A B, ad B C, ita D G, ad G F: Sed vt A B, ad B C, ita posita quoque est D E, ad E F. [b] Igitur erit etiam, vt D G, prima ad G F, secundam, ita D E, tertia ad E F, quartam. Cùm ergo D G, prima maior sit, quàm D E, tertia, [c] erit quoque G F, secunda maior, quàm E F, quarta, pars quàm totum. Quod est absurdum. a 17. quinti. b 11. quinti. c 14. quinti.

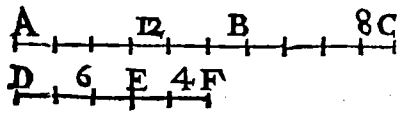
HABEAT deinde, si fieri potest, D F, ad H F, maiorem ipsa E F, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur est, vt A C, ad B C, ita D F, ad H F; [d] erit diuidendo quoque vt A B, ad B C, ita D H, ad H F. Sed vt A B, ad B C, ita posita etiam est D E, ad E F. [e] Igitur erit quoque vt D H, prima ad H F, secundam, ita D E, tertia ad E F, quartam. Cùm ergo D H, minor sit, quàm D E, tertia, [f] erit quoque H F, secunda minor, quàm E F, quarta, totum quàm pars. quod est absurdum. Non igitur habebit D F, ad minorem ipsa E F, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam A C, habet ad B C. Ergo D F, ad ipsam E F, erit, vt A C, ad B C. quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat. d 17. quinti. e 11. quinti. f 14. quinti.

SCHOLIVM.



HANC propositionem demonstrant nonnulli cum Campano eadem fermè ratione, qua antecedentem propositionem Euclides demonstrauit, hoc videlicet modo: Sint diuisa magnitudines A C, C B, D F, F E, proportionales: hoc est, A C, ad C B, vt D F, ad F E. Dico eas etiam compositas proportionales esse, vt A B, quidem ad C B, ita D E, ad F E. Sumãtur enim, vt in antecedente propositione, ipsarum A C, C B, D F, F E, æquemultiplices G H, H I, K L, L M: Item ipsarum C B, F E, aliæ æquemultiplices I N, M O; [a] eruntq; rursus G I, K M, ipsarum A B, D E, æquemultiplices. [b] Item H N, L O, ipsarum C B, F E, vt in præcedenti Theoremate ostensum est. Quoniam verò ponitur esse A C, prima ad C B, secundam, vt D F, tertia ad F E, quartam: sumptæq; sunt G H, K L, æquemultiplices primæ ac tertiæ A C, D F: Item secundæ & quartæ C B, F E, æquemultiplices I N, M O, [c] sit vt si G H, multiplex primæ A C, deficit ab I N, multiplice secundæ C B, etiam K L, multiplex tertiæ D F, deficiat ab M O, multiplice quartæ F E: & si æqualis, æqualis: & si excedit, excedat. Quòd si deficiat tam G H, ab I N, quàm K L, ab M O; additis communibus H I, L M, deficiet quoque G I, ab H N, & K M, ab L O. Et si G H, æqualis fuerit ipsi I N, & K L, ipsi M O: additis communibus H I, L M, erit & G I, ipsi H N, æqualis, & K M, ipsi L O. Et denique si G H, excesserit ipsam I N, & K L, ipsam M O; additis communibus H I, L M, excedet quoque G I, ipsam H N, & K M, ipsam L O. Quoniam ergo si G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplice secundæ C B: etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficit ab L O, multiplice quartæ F E: & si æqualis, æqualis: & si excedit, excedit: [d] erit A B, prima ad C B, secundam, vt D E, tertia ad F E, quartam. Quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum. a 1 quinti. b 2. quinti. c 6. defin. quinti. d 6. defin. quinti.

VERVM hæc demonstratio non rectè colligit propositum ex defin. 6. propterea quòd H N, L O, non sunt ita multiplices ipsarum C B, F E, vt multiplices acceptæ sunt I N, M O, earundem C B, F E. Vnde meritò dubitare quis posset, an secundum quamcunque multiplicationem æquemultiplices seruent eam conditionem defectus, æqualitatis, atque excessus, quam Euclides in 6. defin. postulauit; quandoquidem in hac demonstratione liberum nõ est assumere ipsarum C B, F E, quascunque æquemultiplices: sed tales duntaxat, quales consurgunt ex H I, I N, & ex L M, N O, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propositionis demonstratione obijci non potest: quippe cùm I N, M O, sumptæ sint ipsarum C B, F E, æquemultiplices qualescunque, ipsæq; eædem remanent æquemultiplices earundem C B, F E, in diuisa proportionalitate. Quam ob rem præferenda est Euclidis demonstratio huic demonstrationi Campani. Libuit autem eam quoq; explicare, ne tam studiosus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, vt bonam: præsertim cùm ostensiua sit, illa verò Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non potest.

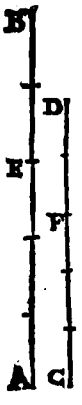


HINC facilè etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defin. 14. descripsimus. Priorem diximus compositionem rationis conuersam. Sit enim vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compositionem rationis conuersam, esse quoq; vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quoniam enim est, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, erit conuertendo, vt B C, ad A B, ita E F, ad D E. [e] Igitur & componendo erit, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. quod est propositum. e 18. quinti.

POSTERIOREM modum vocauimus compositionem rationis contrariam. Sit ergo rursus vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compositionem rationis contrariam, esse quoq; vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quoniam enim est, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F: erit conuertendo, vt B C, ad A B, ita E F, ad D E. [f] Igitur & componendo erit vt A C, ad A B, ita D F, ad D E: ac proinde conuertendo rursus erit, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum. f 18. quinti.

19. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: vt reliquum ad reliquum, vt totum ad totum se habebit.

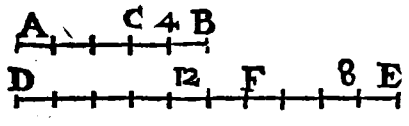


QVOD in propos. 5. demõstratum est de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonstratur. Sit enim tota AB, ad totam CD, vt ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, esse ad reliquam FD, vt est tota AB, ad totam CD. Cùm enim sit AB, ad CD, vt AE, ad CF, [a] erit & permutando AB, ad AE, vt CD, ad CF. [b] Diuidendo ergo erit EB, ad AE, vt FD, ad CF. [c] Quare permutando rursus erit EB, ad FD, vt AE, ad CF, hoc est, vt tota AB, ad totam CD; cùm posita sit AB, ad CD, vt AE, ad CF. Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 16. quinti.
b 17. quinti.
c 16. quinti.

COROLLARIVM.

HINC facilè demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur à conuersione rationis, iuxta 16. defin.



SIT enim, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cùm enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, [a] erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur & conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: [b] ac propterea componendo quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

a 17. quinti.
b 18. quinti.

SCHOLIVM.

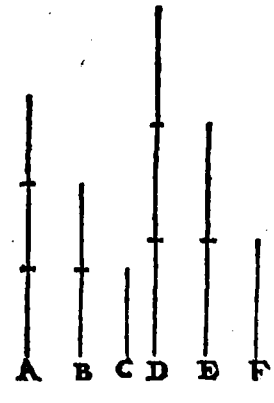
OMNES Euclidis interpretes conuersionem rationis demonstrant hac ratione: Quoniam est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [c] erit permutando, vt tota AB, ad totam DE, ita CB, ablata ad ablatam FE. [d] Igitur vt tota AB, ad totam DE, ita erit quoque reliqua AC, ad reliquam DF. Et proinde permutando rursus, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

c 16. quinti.
d 19. quinti.

SED quis non videt, hanc demonstrationem conuenire solùm magnitudinibus eiusdem generis, cùm in ea vsurpetur alterna, siue permutata proportio, quæ vim tantùm habet in eiusdem generis magnitudinibus, vt & in defin. 12. & in propos. 19. monuimus? Quare cùm Euclides, & alij Geometræ modum hunc argumentandi à conuersione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione; nostram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus conuenit. Ea enim locum habet, etiamsi priores duæ quantitates AB, CB, sint vnius generis, nimirum lineæ, posteriores verò duæ DE, FE, alterius generis, nimirum vel superficies, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quòd in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.

20. THEOR. 20. PROPOS. 20.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quàm tertia maior fuerit, erit & quarta, quàm sexta, maior. Quòd si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

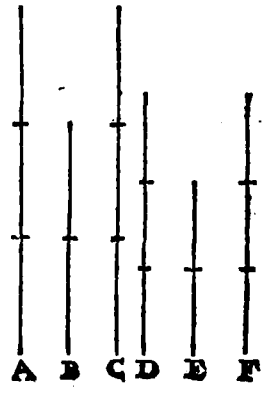


SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F: sit autem primùm A, prima maior quàm C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cùm enim A, maior sit quàm C, [a] erit maior proportio A, ad B, quàm C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. [b] Maior igitur proportio quoq; erit D, ad E, quàm C, ad B: At vt C, ad B, ita est F, ad E. (Cùm enim sit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quàm F, ad E. [c] Quare D, maior erit, quàm F. Quod est propositum.

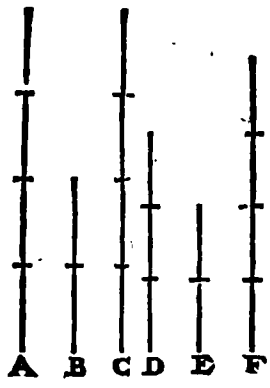
a 8. quinti.
b 13. quinti.
c 10. quinti.

SIT deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cùm enim A, sit ipsi C, æqualis, [d] erit A, ad B, vt C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. [e] Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B: At vt C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationẽ, vti priùs. Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad E. [f] Ideoque æquales erunt D, & F. Quod est propositum.

d 7. quinti.
e 11. quinti.
f 9. quinti.



SIT



SIT tertiò A, minor quàm C. Dico & D, minorem esse, quàm F. Cùm enim A, minor sit quàm C, [a] erit minor proportio A, ad B, quàm C, ad B. Sed vt A, ad B, ita est D, ad E. [b] Minor ergo quoque proportio est D, ad E, quàm C, ad B. Est autem conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoq; proportio D, ad E, quàm F, ad E, [c] propterea q; D, minor erit quàm F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod erat ostendẽdum.

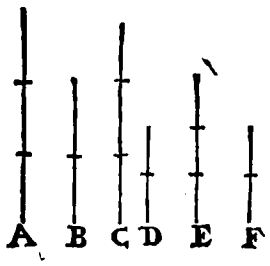
a 8. quinti.
b 13. quinti.
c 10. quinti.

SCHOLIVM.

PORRO propositione 22. ostendet Euclides, A, & D, magnitudines non solùm esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, vt hic demonstrauit: sed etiam illas ad has eandem habere proportionẽ ex æqualitate: quod quidem demonstrare non poterat, nisi prius theorema hoc ostendisset, vt ex eadem propos. 22. erit perspicuum.

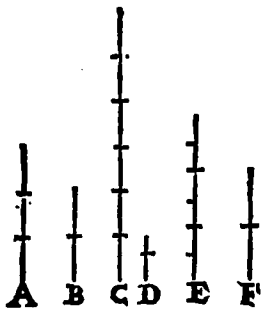
THEOR. 21. PROPOS. 21. 21.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quàm tertia maior fuerit: erit & quarta, quàm sexta maior. Quòd si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.



SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F; quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primùm A, prima maior quàm C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta F. Cùm enim A, maior sit quàm C, erit maior proportio [d] A, ad B, quàm C, ad B: Est autem vt A, ad B, ita E, ad F. [e] Maior ergo quoque prroportio est E, ad F, quàm C, ad B. Quoniam verò vt B, ad C, ita est D, ad E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quàm E, ad D: [f] Ideoq; maior erit D, quàm F. Quod est propositum.

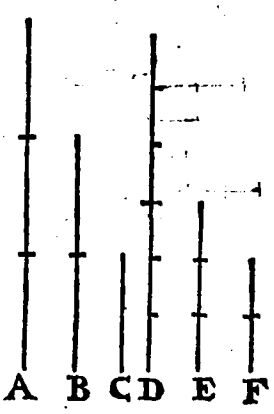
d 8. quinti.
e 13. quinti.
f 10. quinti.



SIT deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cùm enim A, sit æqualis ipsi C, [g] erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita est E, ad F. [h] Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Est autem ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad D; [i] atque idcircò D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.

g 7. quinti.
h 11. quinti.
i 9. quinti.

SIT tertiò A, minor, quàm C. Dico & D, minorem esse, quàm F. Cùm enim A, sit minor quàm C, [k] erit minor proportio A, ad B, quàm C, ad B: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F. [l] Minor est ergo proportio E, ad F, quàm C, ad B. Quoniam verò, vt antè, ex inuersa ratione, est vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quàm E, ad D; [m] ac propterea D, minor erit, quàm F. quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.



k 8. quinti.
l 13. quinti.
m 10. quinti.

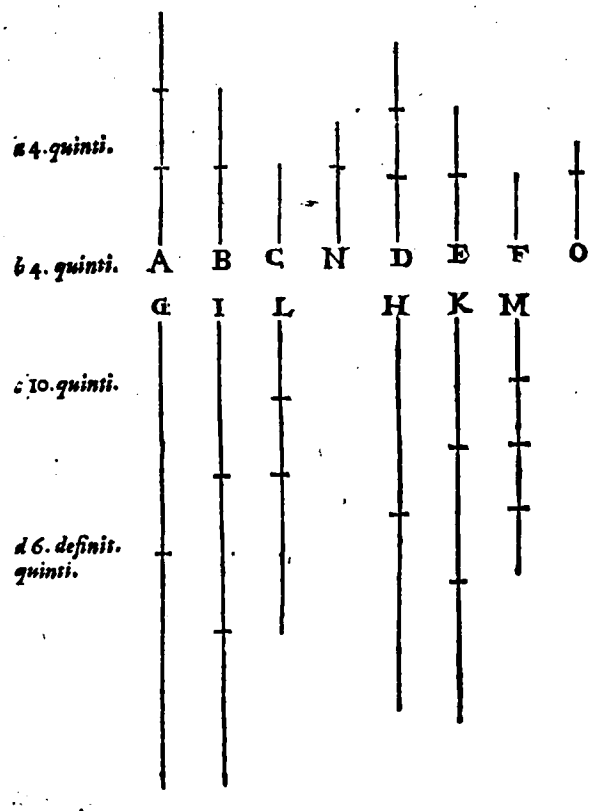
SCHOLIVM.

CAETERVM propositione 23. ostendet Euclides duas magnitudines A, & D, non solùm esse maiores, vel æquales, vel minores, duabus magnitudinibus C, & F, sed etiam illas ad has eandem habere proportionẽ ex æqualitate: quod quidem sine auxilio huius theorematis demõstrare nõ poterat, vt ex propositione illa vigesimatertia patebit.

THEOR. 22. PROPOS. 22. 22.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IAM hîc demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio est ordinata. Sint enim primùm tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: sitque



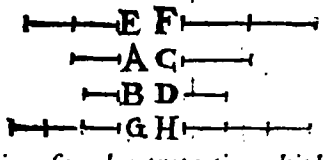
A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æquemultiplicibus G, H; Item ipsarum B, E, æquemultiplicibus I, K; Item ipsarum C, F, æque multiplicibus L, M; cùm sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia ad E, quartam, [a] erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cùm sit B, prima ad C, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; [b] erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur; [c] fit vt si G, prima superat tertiam L, superet necessariò quoque H, quarta sextam M: Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaque cùm G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vnà ab L, M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vnà æquales sint, vel vnà excedant: in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia; [d] erit A, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

DEINDE sint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiam C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. Cùm enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F; ponatur autem C, ad N, vt F, ad O; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor: sicut id in quatuor demonstratum fuit, per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CAETERVM non videtur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis vsitatum de familiare, quanquam à nemine, quod sciam, sit adhuc demonstratum. Id autem eiusmodi est.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æquemultiplices primæ ac tertiæ, ad secundam & quartam, eandem rationem: Item æquemultiplices secundæ, & quartæ ad primam & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contrà, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æquemultiplices primæ & tertiæ: Item prima ac tertia ad æquemultiplices secundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.



SIT enim vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam; sumanturq; E, F, ipsarum A, C, æquemultiplices: Item G, H, æquemultiplices ipsarum B, D. Dico ita esse E, ad B, vt F, ad D: Item ita G, ad A, vt H, ad C. Et contrà, ita esse B, ad E, vt D, ad F: Item ita A, ad G, vt C, ad H. Quoniam enim est, vt E, ad A, ita F, ad C, ex constructione, cùm vtrobique sit eadem proportio multiplex; ponaturq; vt A, ad B, ita C, ad D; [a] *erit ex æquo, vt E, ad B, ita F, ad D. Rursus quia est, vt G, ad B, ita H, ad D, quòd vtrobique sit eadem proportio multiplex, ex constructione; estq; vt B, ad A, ita D, ad C; (Cùm enim ponatur, vt A, ad B, ita C, ad D, erit conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C.)* [b] *erit ex æquo, vt G, ad A, ita H, ad C.*

DEINDE, quia est vt B, ad A, ita D, ad C, per inuersam rationem; Et vt A, ad E, ita C, ad F, quòd ex constructione vtrobique sit eadem proportio submultiplex; [c] *erit ex æquo, vt B, ad E, ita D, ad F. Rursus quia ponitur, vt A, ad B, ita C, ad D; estq; vt B, ad G, ita D, ad H, quòd ex constructione sit vtrobique eadem proportio submultiplex;* [d] *erit ex æquo, vt A, ad G, ita C, ad H. Quod est propositum.*

EX quo constat modus argumentandi, quo frequentissimè vtuntur Geometræ, maximè Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon, & alij. Videlicet vt A, ad B, ita est C, ad D. Ergo vt E, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius A, ad B, ita quoq; erit F, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius C, ad D. Item vt A, ad B, ita est C, ad D. Igitur vt A, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius B, nimirum ad G, ita erit quoq; C, ad duplum vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius D, videlicet ad H.

a 22. quinti.
b 22. quinti.
c 22. quinti.
d 22. quinti.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

23.

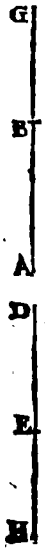
Si sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Demonstratvr hîc ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A,B,C, & aliæ tres D,E,F, sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A,B,D, æquemultiplicibus G,H,I; Item ipsarum C,E,F, æquemultiplicibus K,L,M; [a] Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cùm G,H, sint ipsarum A, B, æquemultiplices. At vt A, ad B, ita est E, ad F. [b] Igitur vt G, ad H, ita quoq; est E, ad F; [c] Sed vt E, ad F, ita quoque est L, ad M; quod L,M, sint ipsarum E, F, æquemultiplices. [d] Igitur erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; [e] erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C; ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G,H,K, & aliæ tres I,L,M, quæ binæ in eadem ratione sumuntur, estq; earum proportio perturbata; cùm ostensum sit esse vt G, ad H, ita L, ad M: Et vt H, ad K, ita I, ad L; [f] fit vt si G, prima superat tertiam K, superet quoque quarta I, sextam M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaque cùm G, & I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vnà deficiant, vel vnà æquales sint, vel vnà excedant; [g] erit vt A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam. quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

a 15. quinti.
b 11. quinti.
c 15. quinti.
d 11. quinti.
e 4. quinti.
f 21. quinti.
g 6. definit. quinti.

SCHOLIVM.

Qvod si fuerint plures magnitudines tribus, fueritq; earum proportio perturbata, nimirum si fuerit A, ad B, vt F, ad O; & B, ad C, vt E, ad F; & C, ad N, vt D, ad E. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. quanquam proportio ex æqualitate, quando proportio est perturbata, apud Geometras in vsu non sit in pluribus magnitudinibus, quàm in tribus. quæ causa fuit, cur Euclides antecedentem propositionem de quotquot magnitudinibus, hanc autem de tribus duntaxat proposuerit, quamuis vera etiam sit de pluribus. quod ita probatur. Cùm iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt E, ad O: Ponatur autem esse ita C, ad N, vt D, ad E, erunt tres magnitudines A,C,N, & aliæ tres D,E,O, quæ binæ in eadem sumuntur proportione, & earum proportio est perturbata. Ergo rursus ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemq; modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, sicut id in quatuor fuit demonstratum, per tres; Et sic de pluribus. Quod est propositum.



THEOR. 24. PROPOS. 24.

24.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

Qvod proposit. 2. demonstrauit Euclides de sola proportione multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim A B, prima ad C, secundam, vt D E, tertia ad F, quartam; Item B G, quinta ad C, secundam, vt E H, sexta ad F, quartam. Dico ita esse A G, compositá ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est D H, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cùm enim sit vt B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo vt C, ad B G, ita F, ad E H. Quoniam igitur est A B, ad C, vt D E, ad F; & C, ad B G, vt F, ad E H; [b] erit ex æquali A B, ad B G, vt D E, ad E H. [i] Componendo igitur erit vt tota A G, ad B G, ita tota D H, ad E H. Itaque cùm rursus sit A G, ad B G, vt D H, ad E H; & B G, ad C, vt E H, ad F; [k] erit ex æquali A G, ad C, vt D H, ad F. quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

b 22. quinti.
i 18. quinti.
k 22. quinti.

SCHOLIVM.

HAEC propositio vera est, siue magnitudines AB, BG, & C, sint eiusdem generis cum magnitudinibus DE, EH, & F, siue non, vt ex demonstratione constat.

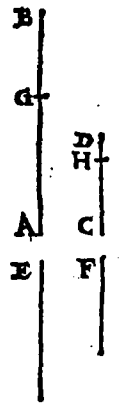
EODEM ferè modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate 6. huius lib. demonstratum est in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet:

Si duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem; & detractæ quædam habeant ad easdem eandem proportionem: & reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt.

HABEANT enim AG, DH, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit AG, ad C, vt DH, ad F. Item detracta AB, DE, ad easdem C, F, eandem habeant proportionem; ita vt sit quoque AB, ad C, vt DE, ad F.
a 22. quinti. *Dico & reliquas BG, EH, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse BG, ad C, vt EH, ad F.*
Cùm enim sit vt AB, ad C, ita DE, ad F; erit conuertendo vt C, ad AB, ita F, ad DE. Quoniam igitur est AG,
b 17. quinti. *ad C, vt DH, ad F; & C, ad AB, vt F, ad DE; [a] erit ex æqualitate AG, ad AB, vt DH, ad DE. [b] Diuidendo*
c 22. quinti. *ergo erit quoq; vt BG, ad AB, ita EH, ad DE. Itaq; cùm rursus sit BG, ad AB, vt EH, ad DE; & AB, ad C, vt DE, ad F: [c] erit ex æquali BG, ad C, vt EH, ad F. Quod est propositum.*

25. THEOR. 25. PROPOS. 25.

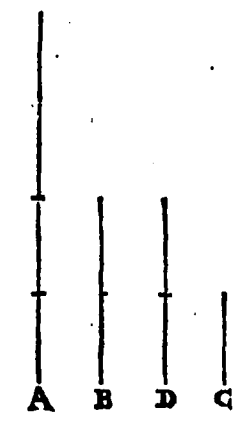
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.



Sit enim AB, ad CD, vt E, ad F, sitque AB, omnium maxima, & F, minima. Dico duas AB, & F, simul esse maiores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipsi F. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc est, vt AB, ad CD. Quare cũ sit tota AB, ad totam CD,
a 19. quinti. vt ablata AG, ad ablatam CH; [a] erit quoque vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Est autem AB, (cùm sit omnium maxima) maior, quàm CD. Igitur & GB, maior erit quàm HD. Quoniam verò AG, & E, æquales sunt: si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E; fient AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul maiores quàm E, & CD, simul, cũ GB, sit maior quàm HD. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

NECESSARIO autem sequitur, si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam: vt in proposito exemplo
a 14. quinti. *cernere licet. Cùm enim sit vt AB, ad CD, ita E, ad F, & AB, prima maior, quàm tertia E: [a] erit quoque CD, secunda maior quàm F, quarta. Item quia maior est AB, quàm CD, erit quoque E, maior, quàm F, ob eandem proportionem AB, ad CD, & E, ad F, vt in scholio propositionis 14. ostendimus. Quòd si è contrario antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt CD, ad AB. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, aliàs non posset vna magnitudo componi ex maxima & minima, immò neque ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non dissimile, videlicet:*



Si tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quàm dupla reliquæ.

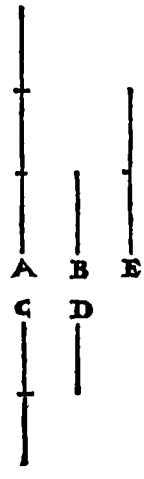
SIT vt A, ad B, ita B, ad C, sitq; A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim D, ipsi B, æquali, erit vt
b 25. quinti. *A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, simul maiores erunt, quàm B, & D, simul, [b] vt proximè demonstratum est, hoc est, quàm dupla ipsius B. Quod est propositum.*

HIC finem Euclides imponit quinto libro. Verùm quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quasdam propositiones, quibus sape numero grauissimi scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri potest, breuitate demonstrare, necnon in numerum ac seriem propositionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus improportionalibus, quarum prima hæc est.

THEOR.

THEOR. 26. PROPOS. 26. 26.

SI prima ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quàm tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionem, quàm quarta ad tertiam.

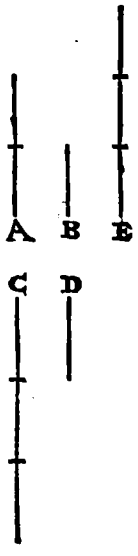


HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quàm C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem eſſe proportione D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior quoque quàm E, ad B; [a] ac propterea A, maior erit quàm E. [b] Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quàm B, ad E, minorem: Sed vt eſt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor eſt quoque, quàm D, ad C. Quod eſt propoſitum.

a 10. quinti.
b 8. quinti.

SCHOLIVM.

EODEM ferè modo demonſtrabimus, ſi prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quàm tertia ad quartam, conuertendo maiorem eſſe proportionem ſecundæ ad primam, quàm quartæ ad tertiam; dummodo vocem maioris mutemus in vocem minoris, & contrà.



SIT enim minor proportio A, ad B, quàm C, ad D. Dico conuertendo B, ad A, maiorem habere proportionem, quàm D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; Eritq; proportio A, ad B, etiam minor, quàm E, ad B, [a] ac propterea A, minor erit, quàm E. [b] Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quàm B, ad E, maiorem. Sed vt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior eſt, quàm D, ad C. Quod eſt propoſitum.

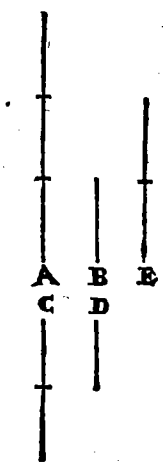
a 10. quinti.
b 8. quinti.

ALITER. Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quàm C, ad D; erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. [c] Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quàm B, ad A, ac proinde maior erit proportio B, ad A, quàm D, ad C. Quod eſt propoſitum.

c 26. quinti.

THEOR. 27. PROPOS. 27. 27.

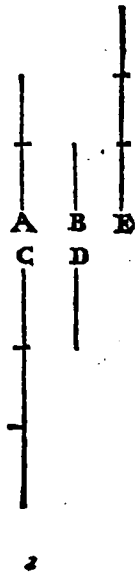
SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionē, quàm tertia ad quartam: Habebit quoque viciſſim prima ad tertiam maiorem proportionem, quàm ſecunda ad quartam.



HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quàm C, ad D. Dico permutando maiorem eſſe quoque proportionem A, ad C, quàm B, ad D. Intelligatur namque eſſe E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior etiam, quàm E, ad B: [a] Ideoque A, maior erit, quàm E. [b] Quare maior erit proportio A, ad C, quàm E, ad C. [c] Quoniam verò permutando eſt, vt E, ad C, ita B, ad D. (cùm poſita ſit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit, quàm B, ad D. Quod eſt propoſitum.

a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 16. quinti.

SCHOLIVM.



SIMILITER oſtendemus, ſi prima ad ſecundam minorem habuerit proportionem, quàm tertia ad quartam, viciſſim primam ad tertiam minorem eſſe proportionem, quàm ſecundam ad quartam.

SIT namque minor proportio A, ad B, quàm C, ad D. Dico permutando, minorem quoque eſſe proportionem A, ad C, quàm B, ad D. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; Eritq; proportio A, ad B, minor quoque, quàm E, ad B; [a] Ac propterea A, minor erit, quàm E. [b] Quare minor erit proportio A, ad C, quàm E, ad C. [c] Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D. (cùm poſita ſit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoque erit, quàm B, ad D. Quod eſt propoſitum.

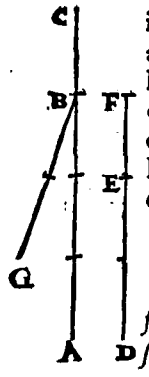
a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 16. quinti.

ALITER. Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quàm C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. [d] Ergo permutando, maior etiam erit proportio C, ad A, quàm D, ad B: [e] ac proinde conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quàm B, ad D. Quod eſt propoſitum.

d 27 quinti.
e 26. quinti.

28. THEOR. 28. PROPOS. 28.

Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoq; compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam maiorem proportionem, quàm compoſita tertia cum quarta, ad quartam.

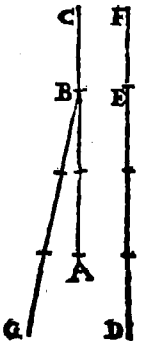


Sit maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo maiorem eſſe proportionem AC, ad BC, quá DE, ad EF. Intelligatur enim eſſe GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritq́ue proportio AB, ad BC, maior quoque, quam GB, ad BC; [a] Ideoq́ue AB, maior quam GB. Addita ergo communi BC, fiet AC, maior quam GC, [b] maiorq́; propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, [c] vt eſt GC, ad BC, ita eſt DF, ad EF. (quòd poſita ſit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Maior ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.

a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 18. quinti.

SCHOLIVM.

Eadem ratione oſtendemus, ſi proportio prima ad ſecundam minor fuerit, quam tertia ad quartam, minorem quoq; eſſe proportionem prima & ſecunda ſimul, ad ſecundam, quam tertia & quarta ſimul ad quartam.



Sit enim minor proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo minorem eſſe proportionẽ AC, ad BC, quã DF, ad EF. Intelligatur enim eſſe GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritq́; proportio AB, ad BC, minor quoque, quam GB, ad BC, [a] ideoque AB, minor erit, quam GB. Addita ergo communi BC: fiet AC, minor quam GC; [b] minórque propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, vt GC, ad BC, ita eſt DF, ad EF. (quòd poſita ſit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Minor ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.

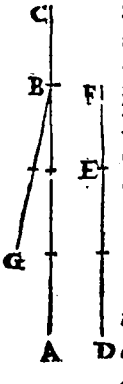
a 10. quinti.
b 8. quinti.

Aliter. Quoniam minor eſt proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF, erit maior proportio DF, ad EF, quàm AB, ad BC. [c] Igitur componendo, maior quoq; proportio erit DF, ad EF, quàm AC, ad BC, ac propterea, minor erit proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. quod eſt propoſitum.

c 28. quinti.

29. THEOR. 29. PROPOS. 29.

Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoq; diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

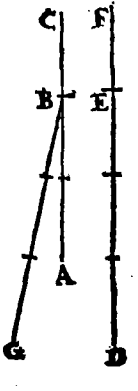


Sit maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem eſſe proportionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim eſſe GC, ad BC, vt DF, ad EF; eritq́ue proportio AC, ad BC, maior quoque proportione GC, ad BC: [a] ideoque maior erit AC, quam GC. Ablata ergo communi BC; maior erit AB, quam GB: [b] Ac propterea maior erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC. [c] Sed diuidendo, vt eſt GB, ad BC, ita eſt DE, ad EF. (Poſita namque eſt GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod eſt propoſitum.

a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 17. quinti.

SCHOLIVM.

Quod ſi prima cum ſecunda ad ſecundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad ſecundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam.



Sit enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico diuidendo quoque minorem eſſe proportionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim eſſe GC, ad BC, vt DF, ad EF, eritque proportio AC, ad BC, minor quoque, quam GC, ad BC: [a] ideoque minor erit AC, quàm GC. Ablata ergo communi BC; minor erit AB, quàm GB: [b] Ac propterea minor erit proportio AB, ad BC, quàm GB, ad BC: [c] Sed diuidendo eſt, vt GB, ad BC, ita DE, ad EF. (Poſita namque eſt GC, ad BC, ut DF, ad EF.) Igitur minor quoque proportio erit AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Quod eſt propoſitum.

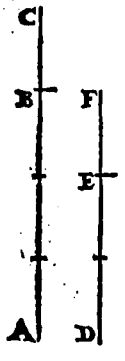
a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 17. quinti.

Aliter

ALITER. Quoniam minor proportio eſt A C, ad B C, quàm D F, ad E F; erit maior proportio D F, ad E F, quàm A C, ad B C. [a] *Igitur & diuidendo, maior erit proportio D E, ad E F, quàm A B, ad B C: atq; idcirco minor erit proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Quod eſt propoſitum.* a 29. quinti.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm compoſita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, minorem proportionem, quàm tertia cum quarta, ad tertiam.

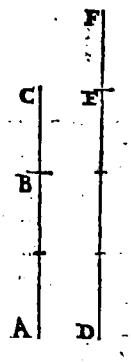


SIT maior proportio AC, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico per conuerſionem rationis, minorem eſſe proportionem A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Cùm enim ſit A C, ad B C, maior proportio, quàm D F, ad E F; [a] erit & diuidendo, maior proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. [b] Quare conuertendo, minor erit proportio B C, ad A B, quàm E F, ad D E; [c] Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius A C, ad A B, quàm totius D F, ad D E. Quod eſt propoſitum.

a 29. quinti. b 26. quinti. c 28. quinti.

SCHOLIVM.

NON diſſimili ratione oſtendemus, ſi compoſita prima cum ſecunda minorem habuerit proportionem ad ſecundam, quàm compoſita tertia cũ quarta ad quartam, per conuerſionem rationis, maiorem eſſe proportionem primæ & ſecundæ ad primam, quàm tertiæ & quartæ ad tertiam.



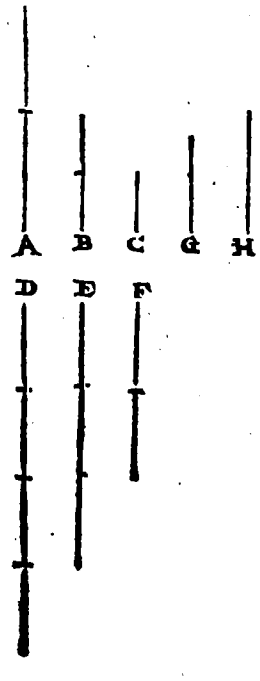
SIT enim minor proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico per conuerſionem rationis maiorem eſſe proportionem A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Cùm enim minor ſit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F; [a] *erit & diuidendo minor proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Quare* [b] *conuertendo, erit maior proportio B C, ad A B, quàm E F, ad D E.* [c] *Ac proinde & componendo maior proportio erit A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Quod eſt propoſitum.*

a 29. quinti. b 26. quinti. c 28. quinti.

ALITER. Quoniam minor eſt proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F; erit maior proportio D F, ad E F, quàm A C, ad B C. [d] *Ergo per conuerſionem rationis minor erit proportio D F, ad D E, q. A C, ad A B: Hoc eſt, maior proportio erit A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Quod eſt propoſitum.* d 30. quinti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quàm primæ poſteriorum ad ſecundam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ poſteriorum ad tertiam.



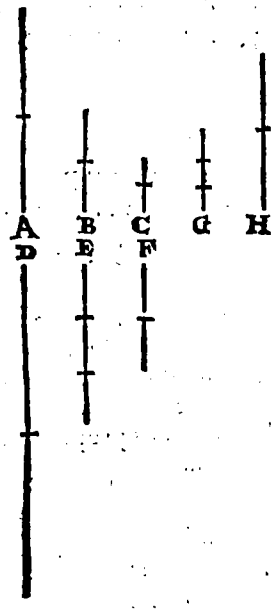
SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitq; maior proportio A, ad B, quàm D, ad E; Item maior B, ad C, quàm E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque eſſe A, ad C, quàm D, ad F. Intelligatur enim eſſe G, ad C, vt E, ad F; eritq; propterea proportio B, ad C, maior, quàm G, ad C; [a] Ideoque B, maior erit, quàm G. Quare [b] maior erit proportio A, ad G, minorem quàm A, ad B, maiorem. Ponitur autem proportio A, ad B, maior quàm D, ad E. Multò ergo maior erit proportio A, ad G, quàm D, ad E. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G; [c] Ideoque A, maior erit, quàm H. [d] Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quàm minor quantitas H, ad eandem C: [e] Atqui vt H, ad C, ita eſt, ex æqualitate D, ad F. (quoniam vt D, ad F, ita eſt H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quàm D, ad F. Quod eſt propoſitum.

a 10. quinti. b 8. quinti. c 10. quinti. d 8. quinti. e 22. quinti.

SCHOLIVM.

EADEM ratione oſtendemus, ſi fuerit proportio A, ad B, quæ D, ad E: At B, ad C, maior quàm E, ad F: Vel contrà, ſi proportio A, ad B, fuerit maior quàm D, ad E: At B, ad C, eadem, quæ E, ad F; ex æqualitate maiorem eſſe quoque proportionem A, ad C, quàm D, ad F.

SIT enim primum A, ad B, vt D, ad E, ſed maior proportio B, ad C, quàm E, ad F. Intelligatur eſſe G, ad C, vt E, ad F; eritq; propterea proportio B, ad C,



a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 10. quinti.
d 8. quinti,
e 22. quinti.
f 9. quinti
g 7. quinti.
h 10. quinti.
i 8. quinti.
k 22. quinti.

maior, quàm G, ad C: [a] Ideoq; B, maior erit, quàm G. [b] Quare maior erit proportio A, ad G, quàm A, ad B. Ponitur autem A, ad B, vt D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; erit q; propterea maior proportio A, ad G, quã H, ad G: [c] Ideoq; A, maior erit, quàm H. [d] Quare maior erit proportio A, ad C, quàm H, ad C. [e] Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo prbportio quoq; erit A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.

Deinde sit maior proportio A, ad B, quàm D, ad E. sed B, ad C, vt E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F; erit q; propterea etiam B, ad C, vt G, ad C: [f] ideoq; B, ipsi G, æqualis erit. [g] Quare erit A, ad G, vt A, ad B. Ponitur autem proportio A, ad B, maior quàm D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; erit q; propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G: [h] Ideoq; A, maior erit, quàm H. [i] Quare maior proportio erit A, ad C, quàm H, ad C. [k] Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo erit quoque proportio A, ad C, q; D, ad F. Quod est propositum.

Non dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarũ esse minorem. Idemq; euenit, si fuerit A, ad B, vt D, ad E; sed minor sit proportio B, ad C, quàm E, ad F: Aut contrà, si proportio A, ad B, fuerit minor, quàm D, ad E; at B, ad C, sit, vt E, ad F. Eadem namque semper erit demonstratio; si modò vocem, maioris, vbique permutes in vocem minoris, vt patet.

Quod si plures fuerint magnitudines tribus, siue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum sint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum; siue vna tantùm maior, quàm vna vel duæ, &c. ostendemus maiorem vel minorem quoque esse proportionem primæ priorum ad vltimam, q; primæ posteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propos. 22. tradidimus: adhibendo propos. 22. loco huius propos. 31. quando tres magnitudines vnius ordinis proportionales sunt tribus magnitudinibus alterius ordinis: item vsurpando hoc scholium, quando vna tantùm proportio in tribus magnitudinibus æqualis est vni tantùm proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

A.	E.	
B.	F.	
C.	G.	
D.	H.	

l 31. quinti.
m 31. quinti.
n 22. quinti.

Nam si maior est proportio A, ad B, quàm E, ad F; & maior B, ad C, quàm F, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H: [l] erit ex æquo maior proportio A, ad C, quàm E, ad G. Quia igitur rursus maior proportio est A, ad C, quàm E, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H; [m] erit quoq; ex æquo maior proportio A, ad D, quàm E, ad H.

Quod si tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, proportionales sint, sed maior sit proportio C, ad D, quàm G, ad H; [n] erit ex æquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc scholio, maior proportio erit A, ad D, quàm E, ad H.

Si verò maior proportio sit A, ad B, quàm E, ad F; sed tres B, C, D, proportionales sint tribus F, G, H; erit ex hoc scholio maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: Et rursus maior A, ad D, quàm E, ad H.

Si autem maior sit proportio A, ad B, quàm E, ad F: sed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D, quàm G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F; sed maior proportio B, ad C, quàm F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H, erit semper ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: ac proinde rursus maior A, ad D, quàm E, ad H, &c.

Idem concludes, si omnes proportiones, vnius ordinis sint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, vel vna, vel duæ. Item si sint plures magnitudines, vt propositione 22. diximus.

22.

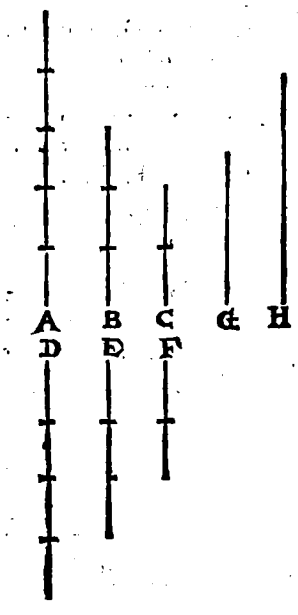
THEOR. 32. PROPOS. 32.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quàm secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque maior proportio A, ad B, q; E, ad F; Item maior B, ad C, quàm D, ad E. Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quàm D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E; eritque propterea proportio B, ad C, maior quàm G, ad C: [a] Ideoque maior erit B, quàm G. [b] Quare maior erit proportio A, ad G, minorem, quàm eiusdem A, ad B, maiorem: Est autem proportio A, ad B, maior, quàm E, ad F. Multò ergo maior est proportio A, ad G, quàm E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritq;

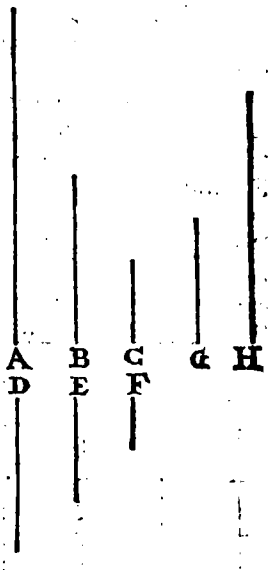
a 10. *quinti.*
b 8. *quinti.*

propterea



propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G; [a] ideoque maior erit A, quàm H. [b] Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quàm H, minor ad eandem C: [c] At vt H, ad C, ita est ex æqualitate D, ad F. (Quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C; & vt E, ad F, ita est H, ad G.) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quã D, ad F. Quod est propositum.

[a] 10. quinti. [b] 8. quinti. [c] 23. quinti.



SCHOLIVM.

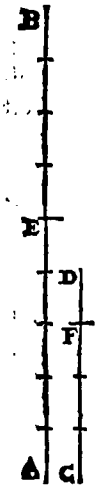
EADEM ratione, si fuerit proportio A, ad B, quæ E, ad F; At B, ad C, maior quàm D, ad E. Vel contrà, proportio A, ad B, maior quàm E, ad F: At B, ad C, eadem, quæ D, ad E; ostendemus, ex æqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quàm D, ad F, vt in proposita figura perspicitur.

HAVD secus ostendemus, si proportiones priorum magnitudinũ minores fuerint, etiam extremarum proportionem esse minorem, &.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, demonstrabimus, maiorem quoque vel minorem esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quàm primæ posteriorum ad vltimam, ea arte, qua vsi sumus propos. 23. &c. Quæ omnia perspicua sunt, si diligenter demonstrationes scholij præcedentis propositionis considerentur.

THEOR. 33. PROPOS. 33.

33.



SI fuerit maior proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quàm totius ad totum.

SIT maior proportio totius AB, ad totam CD, quàm ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ EB, ad reliquam FD, maiorem esse, quàm totius AB, ad totam CD. Cùm enim maior sit proportio AB, ad CD, quàm AE, ad CF; [d] erit quoque permutando maior proportio AB, ad AE, quàm CD, ad CF; [e] ac propterea per conuersionem rationis, minor erit proportio AB, ad EB, quàm CD, ad FD. [f] Permutando igitur, minor quoque erit proportio AB, ad CD, quàm EB, ad FD; hoc est, EB, reliqua ad reliquã FD, maiorem habebit proportionem, quàm tota AB, ad totam CD. Quod est propositum.

[d] 27. quinti. [e] 30. quinti. [f] 27. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si tota ad totam habuerit minorem proportionem, quàm ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quàm tota ad totam, vt ex modo demonstrandi liquet, ponendo semper vocem, minoris, pro voce, maioris; & vocem maioris, pro voce, minoris.

THEOR. 34. PROPOS. 34.

34.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsi æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quàm secundæ ad secundam; & hæc maior quàm tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quóque prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam posteriorum.

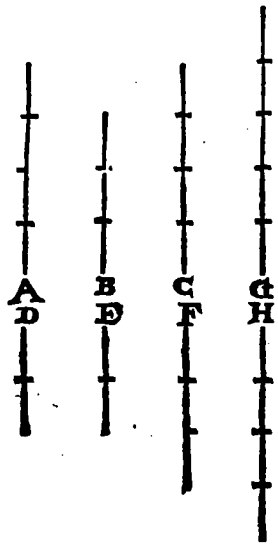
SINT primùm tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F; Sit autem maior proportio A, ad D, quàm B, ad E; Item maior B, ad E, quàm C, ad F. Dico proportionem ipsarum A, B, C, simul ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportione ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F, simul; minorem verò, proportione A, ad D; maiorem denique etiam proportionem C, ad F. Cùm enim maior sit proportio A, ad D, quàm B, ad E; [g] erit permutando maior A, ad B, quàm D, ad E. [h] Igitur componendo, maior erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quàm ipsarum D, E, simul ad E. [i] Permutando ergo rursus, maior erit proportio

[g] 27. quinti. [h] 28. quinti. [i] 27. quinti.

A,B,ſimul ad D,E,ſimul,quàm B,ad E. Itaque cùm tota A,B,ad totam D,E,maiorem habeat pro-
a 33. quinti. portionem, quàm ablata B, ad ablatam E; a habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem,quàm tota A,B,ad totam D,E. Eadem ratione,maior erit proportio B,ad E,quàm totius B,C,ad totam E,F. Multò ergo maior erit proportio A, ad D,quàm B,C, totius ad totam E,
b 27. quinti. F. b Permutando igitur,maior erit proportio A, ad B, C, quàm D, ad E, F; c & componendo ergo
c 28. quinti. maior eſt proportio totius A,B,C, ad B,C, quàm totius D,E,F,ad E,F. d Et rurſus permutando,maior
d 27. quinti. proportio omnium A,B,C,ſimul ad omnes D,E,F,ſimul,quàm B,C,ad E,F. quod eſt primum.

ITAQVE cùm ſit maior proportio totius A,B,C, ad totam D,E,F, quàm ablatæ B,C, ad abla-
e 33. quinti. tam E,F; e erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quàm totius A,B,C, ad totam D,E, F. quod eſt ſecundum.

f 27. quinti. QVONIAM verò maior eſt proportio B,ad E,quàm C,ad F; f erit permutando maior quoque
g 28. quinti. B,ad C;quàm E,ad F; g & componendo, maior totius B C,ad C,quàm totius E,F,ad F; h & rurſus
h 27. quinti. permutando, maior B,C, ad E, F, quàm C, ad F. Eſt autem maior proportio A,B,C,ad D,E,F, vt oſtendimus,quàm B,C,ad E,F. Multò ergo maior erit proportio omnium A,B,C,ad omnes D,E, F,quàm vltimæ C,ad vltimam F; quod eſt tertium.



i 27. quinti.
k 28. quinti.
l 27. quinti.
m 33. quinti.

DEINDE ſint quatuor magnitudines vtrobique cum eadem hypotheſi, hoc eſt,ſit quoque maior proportio tertiæ C,ad F,tertiam,quàm G,quartæ ad H,quartam. Dico eadem conſequi. Vt enim iam in tribus eſt oſtenſum, maior eſt proportio B, ad E, quàm B,C,G, ad E,F, H. Multò ergo maior erit A,ad D,quàm B,C,G,ad E,F,H. i Permutando ergo,maior erit A,ad B,C,G,quàm D,ad E,F,H; k & componendo maior A,B,C,G, ad B,C,G,quàm D,E,F,H,ad E,F,H; l & permutádo A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quàm B, C, G, ad E, F, H. quod eſt primum.

ITAQVE cùm ſit maior proportio totius A,B,C,G,ad totam D,E, F,H,quàm ablatæ B,C,G,ad ablatam E,F,H; m erit & reliquę A,ad reliquam D, maior proportio, quàm totius A,B,C,G, ad totam D,E,F, H;quod eſt ſecundum.

QVONIAM verò,vt in tribus eſt demonſtratum,maior eſt proportio B,C,G,ad E,F,H, quàm G, ad H; & maior A,B,C,G, ad D,E,F,H, quàm B,C,G,ad E,F,H,vt fuit oſtenſum; multò maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quàm vltimæ G, ad vltimam H; quod eſt tertium.

EADEM arte concludes, eadem conſequi in quinque magnitudinibus per quatuor;& in ſex per quinque,& in ſeptem,per ſex,&c. quemadmodum oſtendimus in quatuor, per tres. Conſtat ergo totum Theorema,&c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLI:

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

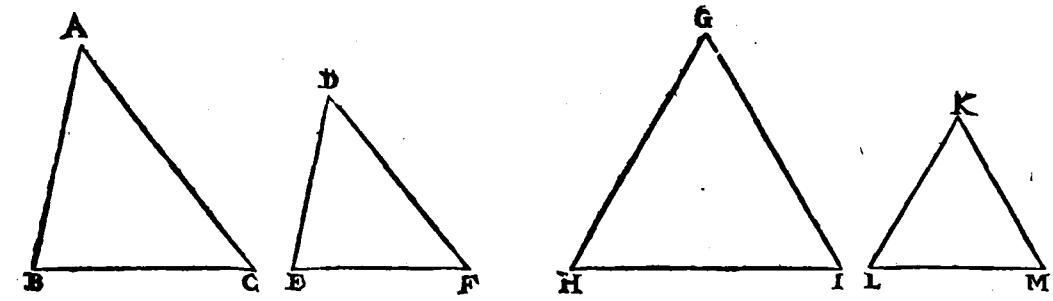
DEFINITIONES.

I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

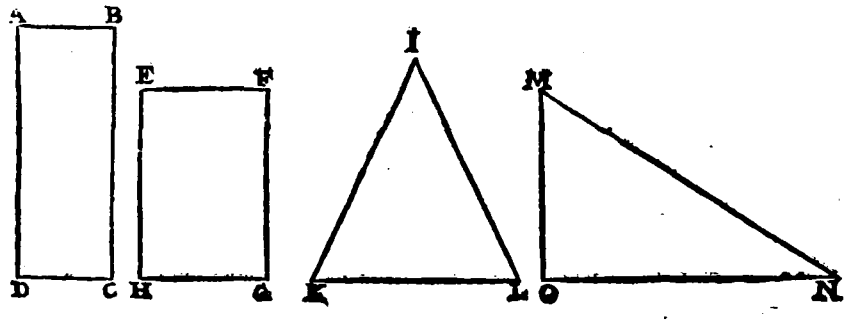
VT *triangula A B C, D E F, similia dicentur, si fuerint æquiangula, ita vt angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi F, æqualis sit: Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F; & vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; & vt A C, ad C B, ita D F, ad F E.*

QVOD *si anguli vnius æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contrà; non dicentur tales figuræ similes: cuiusmodi sunt quadratum, & figura altera parte longior. Hæ etenim figuræ habent quidem angulos æquales, vtpote rectos, at latera vnius lateribus alterius proportionalia non sunt; quippe cùm latera quadrati circa quemuis angulum rectum habeant proportionem æqualitatis: latera verò figuræ altera parte longioris circa quemuis angulum rectum, proportionem inæqualitatis. Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas æquiangulas, & æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse similes, quanquam inter se maximè sint inæquales. Cuiusmodi sunt triangula æquilatera G H I, K L M. Propter laterum enim æqualitatem, erit G H, ad G I, vt K L, ad K M: Item G H, ad H I, vt K L, ad L M: & G I, ad I H, vt K M, ad M L, cùm semper sit proportio æqualitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.*

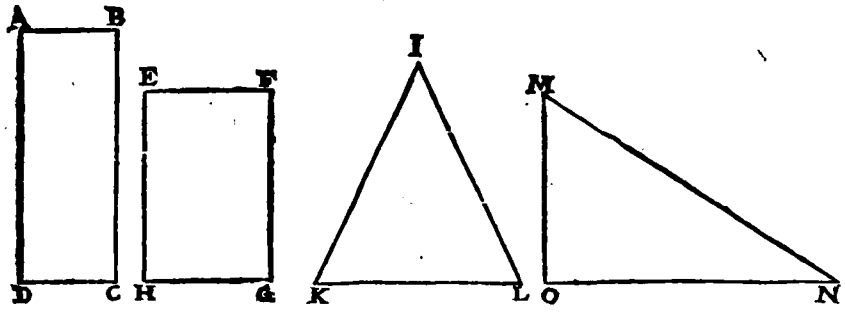


II.

RECIPROCAE autem figuræ sunt, cùm in vtraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.



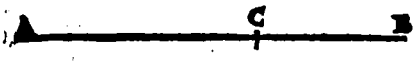
VT si in parallelogrammis A B C D, E F G H, latera A B, B C, ita proportionalia fuerint lateribus E F, F G, vt vtrobique sit & antecedens & consequens diuersarum proportionum, hoc est, vt sit ea proportio



AB, ad EF, quæ FG, ad BC seu eadē AB, ad FG, quæ EF, ad BC; (vtroque enim modo AB, est antecedens vnius proportionis, & BC, consequens alterius, in figura ABCD; quēadmodum & primo modo EF, est consequens vnius, & FG, antecedens alterius; vel secundo modo FG, consequens, & EF, antecedens, in figura EFGH,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamuis similia non sint. Similiter erunt triangula IKL, MNO; reciproca, si fuerit vt IK, ad MN, ita MO, ad IL; vel vt IK, ad MO, ita MN, ad IL. Neq; memini me inuenisse apud Geometras vsum reciprocarum figurarum in aliis figuris, quàm in parallelogrammis, & triangulis.

III.

SECVNDVM extremã, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cùm vt tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

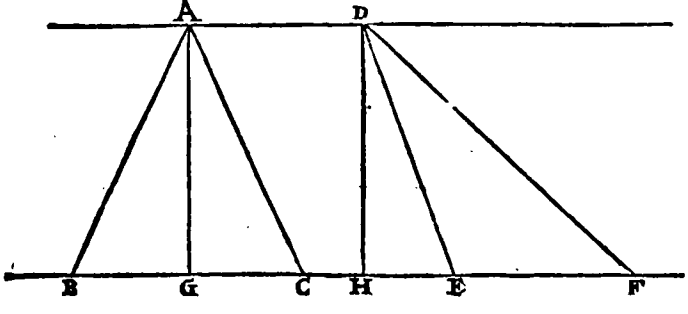


SI linea recta quæuis AB, ita diuidatur in C, inæqualiter, vt sit, quemadmodum tota AB, ad maius segmentum AC, ita AC, maius segmentum ad CB, minus segmentum; dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuisionem docebit Euclides propos. 30. huius lib. eamq; sub aliis verbis iam docuit lib. 2. propos. 11. vt fiet perspicuum propos. 30. huius lib. Sunt autem penè innumeræ dignitates atq; vtilitates lineæ hoc modo diuisæ, vt ex libris Stereometriæ constabit, præsertim lib. 13. vt non immeritò à quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea eo modo est diuisa.

IIII.

ALTITVDO cuiusq; figuræ est linea perpēdicularis à vertice ad basin deducta.

SI à vertice A, trianguli ABC, ad basin BC, perpendicularis ducatur AG; dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli ABC; ita vt tantam dicatur habere altitudinem triangulum, quanta est perpendicularis AG. Sic etiam perpendicularis DH, ducta à D, vertice trianguli DEF, ad basin EF, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli DEF. Itaq; si duarum figurarum perpendiculares à verticibus ad bases (siue hæ protractæ sint, siue nō) demissæ, fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem huiusmodi perpendiculares erunt æquales, cùm bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cuiusmodi sunt perpendiculares AG, DH, triangulorum ABC, DEF, in eisdem parallelis constitutorum. Cùm enim anguli AGH, DHG, interni ex eadem parte sint duobus rectis æquales, immò duo recti; [a] *erunt rectæ AG, DH, parallelæ; Sunt autem & AD, GH, parallelæ, eò quòd ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG;* [b] *ac propterea latera opposita AG, DH, æqualia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quòd si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases verò AB, & DE, non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad basin DE, protractam æqualis non est perpendiculari ex C, ad basin AB, deductæ, cùm nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, vt manifestum est.*



a 28. primi.

b 34. primi.

RECTE verò ab Euclide altitudo figuræ cuiusuis definita est per lineam perpendicularem, quæ à vertice ad basin deducitur: quoniam, vt scribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de Dimensione, mensura cuiuscunq; rei debet esse stata, determinataq;, & nō indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas meritò Geometræ, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinataq; longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminataq;. Qua de re plura scripsimus ad initium commentariorum, quos in Sphæram Ioan. de Sacro bōsco edidimus.

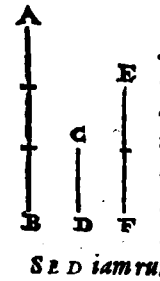
V.

RATIO ex rationibus componi dicitur, cùm rationū quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

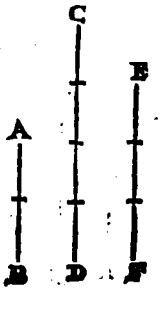
QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta ſit magnitudo antecedens ad conſequentem; (vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. oſtendit, in quauis proportione quadruplæ antecedentem magnitudinem quater continere conſequentem: denominator verò proportionis ſubquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem eſſe partem quartam conſequentis, &c.) dici ſolet propterea denominator à Geometris, quantitas proportionis: vt idem ſignificet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur hæc definitio proportionem aliquã ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, ſeu quantitates inter ſe multiplicatæ effecerint illam proportionem, ſeu (vt vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, ſiue denominatorem. Vt proportio duodecuplæ componi dicitur ex duplæ, & ſextuplæ: quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem ſextuplæ, hoc eſt, in 6. Sic eadem proportio duodecuplæ dicitur componi ex triplæ & quadruplæ. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecuplæ componi dicitur ex duplæ, triplæ, & quintuplæ. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter ſe multiplicati gignunt 30. denominatorem illius. Sic etiam proportio duplæ dicetur componi ex ſeſquialteræ, & ſeſquitertiæ: quia ſeſquialteræ denominator $1\frac{1}{2}$. ductus in $1\frac{1}{3}$. denominatorem ſeſquitertiæ, gignit 2. denominatorẽ duplæ. Rurſus eadem proportio duplæ componetur ex ſeſquiſeptimæ, & ſupertripartientis quartas. Nam harum proportionum denominatores $1\frac{1}{7}$. $1\frac{3}{4}$. inter ſe multiplicati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadem duplæ proportio componi dicetur ex ſeſquiquartæ, & duplæ ſeſquialteræ; propterea quod harum denominatores $\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{2}$. inter ſe multiplicati producunt quoque eundem denominatorem 2. proportionis duplæ. Atque ita ex infinitis aliis proportionibus componi dicetur duplæ proportio: quod etiam de quauis alia proportione dici poteſt, vt paulò poſt patebit.

PORRO quemadmodum in magnitudinibus continuè proportionalibus, proportio primæ ad vltimam componi dicitur ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, &c. cùm illæ ex his intermedijs conſtet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter ſe multiplicatis producatur, vt quinto libro defin. 10. expoſuimus: ita vt ſi fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimam duplicata proportionis primæ ad ſecundam. ſi tres, triplicata, &c. Sic etiam in magnitudinibus quibuſcunque ordine poſitis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartã, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam conſurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis. Quod quidem primùm inductione quadam Theonis Alexandrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde verò idem duabus demonſtrationibus, quarum vna traditur ab Eutocio Aſcalonita lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de Conicis elementis, propoſ. 11. Altera autem à Vitellione lib. 1. propoſ. 11. ſuæ Perſpectiuæ, comprobabimus.

THEON igitur rem propoſitam ita conatur abſoluere. Habeat A B, ad C D, rationem datam, veluti duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; & C D, ad E F, eandem quoque datam. Dico quòd ipſius A B, ad E F, ratio conſtat ex A B, ad C D; & ex C D, ad E F, ratione: vel quòd ipſius A B, ad C D, rationis quantitas multiplicata in ipſius C D, ad E F, rationis quantitatem, efficit ipſius A B, ad E F, rationis quantitatem. Sit enim primùm A B, quàm C D, maior; & C D, quàm E F: & ſit quidem A B, ipſius C D, dupla, & C D, ipſius E F, tripla. Quoniam igitur C D, ipſius E F, tripla eſt, ipſius autem C D, dupla eſt A B: erit A B, ipſius E F, ſextupla. Quoniam ſi triplum alicuius duplicamus, fit ſextuplum: hoc enim eſt propriè compoſitio. Vel ſic. Quoniam A B, dupla eſt ipſius C D, diuidatur A B, in ipſis C D, æqualia, hoc eſt, A G, & G B: & quoniam C D, ipſius E F, tripla eſt; æqualis autem eſt A G, ipſi C D; & A G, igitur ipſius E F, tripla eſt: Id propterea & G B, ipſius E F, tripla eſt. Tota igitur A B, ipſius E F, ſextupla eſt. Ipſius igitur A B, & E F, ratio connectitur per C D, medium limitem, compoſita ex ipſius A B, ad C D; & C D, ad E F, ratione.



SIMILITER autem, & ſi minor fuerit C D, vtraq; ipſarum A B, & E F, idipſum colligitur. Sit enim rurſus A B, ipſius C D, tripla: At C D, ipſius E F, ſit dimidia. Et quoniam C D, ipſius E F, dimidia eſt; Ipſius autẽ C D, tripla eſt A B; erit A B, ſeſquialtera ipſius E F. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipſum ſemel, & dimidium. At quoniam A B, ipſius C D, tripla eſt; & C D, ipſius E F, dimidia: qualium A B, æqualium ipſi C D, trium, talium eſt E F, duorũ. Quare ſeſquialterum eſt A B, ipſius E F. Igitur ratio ipſius A B, ad E F, connectitur per C D, medium limitem, compoſita ex ipſius A B, ad C D; & C D, ad E F, ratione.



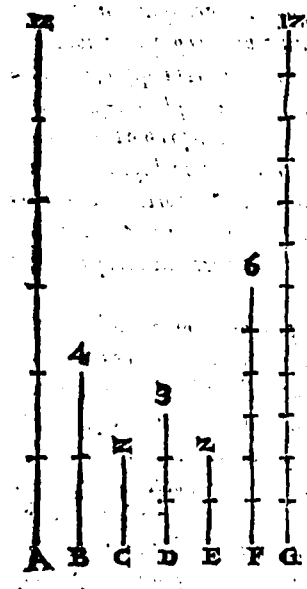
SED iam rurſus ſit C D, vtraq; ipſarum A B, & E F, maior: & ſit quidem A B, ipſius C D, dimidium, & C D, ipſius E F, ſeſquitertium. Quoniam igitur, qualium eſt A B, duorũ, talium eſt C D, quatuor: qualium autem C D, quatuor, talium E F, trium. Et qualium igitur A B, duorũ, talium E F, trium. Connectitur igitur rurſus ratio ipſius A B, ad E F, per C D, medium

limitem, quæ duorum est ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quòd si à composita ratione quauis vna compositarum auferatur, vno simplicium erecto, reliqua compositarum assumetur.

HÆC ad verbum desumpsimus ex Theone, iuxtà interpretationem Zamberti.

EVTOCII verò demonstratio ita se habet.

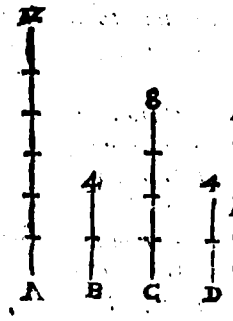
SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Quod quidem facilè demonstrabitur, assumpto prius hoc principio: Quantitatem, seu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinem proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cùm enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundùm denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcircò 3. multiplicata in 4. producunt 12. Item quia 4. ad 20. habent proportionem subquintuplam, cuius denominator est $\frac{1}{5}$. fit, vt $\frac{1}{5}$. in consequentem 20. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D: proportionis verò B, ad C, denominator sit E; & D, multiplicans E, producat F. Dico F, esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C, produci A. Producatur namque G, ex multiplicatione F, in C. Dico G, ipsi A, aequalem esse, ac proindè & A, fieri ex F, in C. Cùm enim D, sit denominator proportionis A, ad B, si multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione, si E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producunt G, & B; (nam ex F, in C, fit G; & ex E, in C, fit B, vt dictum est,) [a] erit vt F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A; [b] erit vt E, ad B, ita F, ad A; & permutando vt E, ad F, ita B, ad A; & conuertendo rursus, vt F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B: Ideoq; æquales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cùm G, producatur ex F, in C, producetur quoque A, ex F, in C; propterea q; F, quantitas erit proportionis A, ad C. Quod est propositum.



A, 100.	B, 20.	C, 5.
D, 5.	E, 4.	
G, 100.	F, 20.	

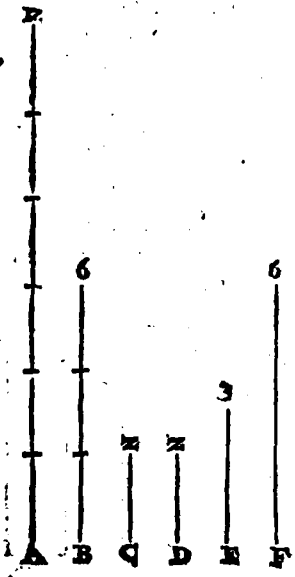
a 18. septimi.
b 17. septimi.

SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio prima ad vltimam componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C, & C, ad D, vt ostensum est: At verò eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoq; ex proportionibus A, ad B, B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunque magnitudinibus.



VITELLIO denique huiusmodi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C, Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocij. Denominatorem videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis, producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C; At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E, quod ita fiet: Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur, æquale est ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cùm semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens: similiter ex D, denominatore in B, consequentem producitur antecedens A,) [c] erit vt F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cùm igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. Quod est propositum. Hæc Vitellio.



A, 100.	B, 20.	C, 5.
D, 5.	E, 4.	
E, 20.		

c 19. septimi.

IDEM ostendetur in pluribus magnitudinibus, vt prius ex Eutocio. Veluti datis sex magnitudinibus A, B, C, D, E, F, componetur proportio A, ad F, ex proportio-

A.	B.	C.	D.	E.	F.
12.	6.	3.	2.	1.	4.

proportionibus A,ad B; B,ad C; C,ad D; D,ad E; & E,ad F. Nam vt oſtenſum eſt, proportio A,ad F, componitur ex proportione A, ad B; & B, ad F. Hæc autem proportio B,ad F, componitur ex proportione B, ad C, & C,ad F. Et hæc proportio C,ad F,componitur ex proportione C,ad D, & D,ad F: Atq; hæc tandem proportio D,ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A,ad F,ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc eſt, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinque proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis.

EX his liquidò conſtat id,quod ad defin.10.lib.5.docuimus: nimirum Continuatis quotlibet quantitatibus continuè proportionalibus, proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs æqualibus,hoc eſt,denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis,quam prima habet ad ſecundam,in ſeipſum multiplicato, & ex eodem in numerũ productum,& ſic deinceps,donec tot multiplicationes fiant, vna minus,quot proportiones inter primam quantitatem,& vltimã ſunt interpoſitæ: Adeò vt duplicata proportio alicuius proportionis conſurgat, cùm huius proportionis denominator bis ponitur, (propter duas æquales proportiones inter primam quantitatẽ & tertiam poſitas) atque ita in ſe multiplicatur: triplicata verò,quando idem denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primam quantitatem,& tertiam poſitas) atq; ita multiplicatur,primùm in ſe,deinde iterum in numerum productum.Et ſic de quadruplicata,quintuplicata,& de alijs dicendum eſt in infinitum. Eſt enim eadem demonſtratio in magnitudinibus continuè proportionalibus,& in magnitudinibus non proportionalibus: Solùm in illis denominatores æquales erunt. Vt ſi A,B,C, ponantur continuè proportionales,æquales erunt denominatores D,E,& F,erit denominator proportionis duplicata,&c.

ET SI autem demonſtratio tam Eutocij, quàm Vitellionis propriè quadrat in proportiones tantùm rationales,cùm vtraque propoſitionibus lib.7.Euclidis nitatur: quia tamen,quæ de numerorum proportionibus demonſtrantur,conueniunt quoq; magnitudinibus incommenſurabilibus, hoc eſt, proportionibus irrationalibus,dici poteſt vtraq; demonſtratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiamſi non conſtaret,propoſitis pluribus magnitudinibus denominatorem proportionis,quam prima ad vltimã habet, produci ex multiplicatione denominatorũ intermediarum proportionũ inter ſe, vt demonſtrauimus; nõ tamen propterea demonſtrationes, in quibus compoſitio proportionũ adhibetur, minus certæ erunt:quippe cũ in illis hæc denominatorũ multiplicatio non vſurpetur.Nam quemadmodũ, propoſitis pluribus magnitudinibus continuè proportionalibus,primã ad tertiam dixit Euclides defin.10. lib.5. habere proportionẽ duplicatam eius, quã prima habet ad ſecundam: nimirum compoſitã ex duabus proportionibus intermedijs æqualibus: primã verò ad quartam habere proportionem triplicatam eius, quã prima ad ſecundam habet, hoc eſt, compoſitam ex tribus intermedijs proportionibus æqualibus: & ſic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorũ: Ita quoq; ſi ponãtur ordine plures magnitudines eiuſdem generis non continuè proportionalibus,dicetur prima ad vltimã habere proportionẽ compoſitam ex omnibus proportionibus intermedijs,licet inter ſe non ſint omnes æquales,ſiue aliquæ ſint maioris inæqualitatis,& aliquæ æqualitatis,& aliquæ minoris inæqualitatis,ſiue omnes eiuſdem generis ſint,ſolùm eam ob cauſam,q; illæ proportiones intermediæ ſint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodũ defin.10.lib.5.proportio primæ ad tertiam dicebatur duplicata,hoc ſolo nomine, quia duæ proportiones æquales interpoſitæ ſunt inter extremas duas magnitudines: Adeò vt nõ ſit aliud diſcrimen inter hanc compoſitionẽ proportionum,& illam duplicationẽ,triplicationẽ,&c. quæ lib.5.explicata eſt, q̃ quòd in duplicatione,triplicatione,&c. proportionũ interijciuntur proportiones omnes æquales:in cõpoſitione verò proportionũ non neceſſe eſt,interpoſitas proportiones æquales eſſe. Multiplicatio tamen denominatorũ vtilis eſt,vt ſciamus,quænam ſit illa proportio quæ alterius dicitur duplicata,triplicata,etc.vel quæ ex propoſitis proportionibus cõpoſita eſſe dicitur:

VERBI gratia. Vt ſciamus, quæ proportio ſit illa,quæ dicitur duplicata proportionis decuplæ, ponemus 10.denominatorem decuplæ proportionis bis hoc modo,10.10.& vnum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100.denominator eſt proportionis,quæ decuplæ eſt duplicata.Vt autem habeamus denominatorem proportionis,quæ eiuſdem decuplæ triplicata dicitur,ponemus 10.denominatorem ter hoc modo, 10.10.10. & primum in ſecundum ducemus,& numerum productum 100.in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000.denominat proportionem decuplæ triplicatam.Quod de alijs quoq; proportionibus dicendum eſt.Sed hoc etiam diſcemus abſq; denominatorum multiplicatione.Nam ſi continuentur tres numeri in proportione data,vt in tractatu proportionum, cùm de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: ſi verò continuentur quatuor numeri,habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis. Conferendus autem eſt maior cum minore,quando data proportio eſt maioris inæqualitatis: minor verò cum maiore,cùm data proportio minoris inæqualitatis eſt. Veluti ſi deſideretur proportio decuplæ proportionis duplicata, continuabimus tres numeros in proportione decupla,hoc modo,1.10.100.Vel 3.30.300. Nam proportio 100. ad 1.vel 300.ad 3.quæ centupla eſt,dicetur decuplæ duplicata. Eodem modo proportio 1.ad 100.vel 3.ad 300.quæ ſubcentupla eſt,dicitur duplicata proportionis ſubdecuplæ 1.ad 10.vel 3.ad 30.

EADEM ratione,vt cognoſcamus,quænã ſit proportio illa,quæ(verbi gratia) cõponi dicitur ex tripla,

dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia, ſtatuemus ordine harũ denominatores hoc modo, 3. 2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. eosq; inter ſe multiplicabimus, primùm 3. in 2. deinde productum numerũ 6. in $1\frac{1}{2}$. & hunc rurſus numerũ procreatum 9. in $1\frac{1}{3}$. & ſic deinceps. ſi plures eſſent denominatores. Vltimus enim productus 12. eſt denominator proportionis, quæ ex datis proportionibus cõponi dicitur; ita vt proportio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia. Hoc aũt intelligemus etiam ſine hac multiplicatione denominatorum. Si namq; proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad ſecundum habeat primam proportionem componentem, ſecundus ad tertium ſecundam, tertius ad quartum tertiam, quartus ad quintum quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, compoſita ex datis proportionibus. Vt in proximo exẽplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. 1 $\frac{1}{3}$. 1. Vbique enim primus numerus ad ſecundum proportionem habet triplam, ſecundus ad tertium duplam, tertius ad quartũ ſeſquialteram, & quartus ad quintum ſeſquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duodecupla eſt, componi dicitur ex quatuorillis proportionibus, vt prius. Quo pacto autẽ quotuis proportiones continuandæ ſint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propoſ. 4.

IT A QVE cùm Euclides demonſtrat hoc lib. propoſ. 23. æquiangula parallelogrãma habere proportionem compoſitã ex duabus proportionibus, quas duo latera circa vnũ angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quàm ſi duæ illæ proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionẽ parallelogrãma inter ſe habere, quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt ſi proportio vnius lateris primi parallelogrammi ad vnũ latus ſecundi fuerit, vt 8. ad 3. proportio verò alterius lateris ad alterũ latus, vt 1. ad 2. nihil aliud eſt intelligendũ, quàm ſi ſumantur tres numeri, 24. 9. 18. quorũ primus ad ſecundũ eſt, vt 8. ad 3. & ſecundus ad tertium, vt 1. ad 2. proportionẽ parallelogrãmi primi ad ſecundũ eſſe eandem, quam habet primus numerus 24. ad tertium 18. quæ eſt ſeſquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur, vt dictum eſt, ex proportionibus 24. ad 9. & 9. ad 18. hoc eſt, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera eſſe diximus.

PORRO quemadmodũ interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatã proportionem, & triplicatam, &c. verè eſſe maiorẽ illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirũ duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem eſſe intelligendam de magnitudinibus continuè proportionalibus in proportione maioris inæqualitatis, quod tamen falſum eſſe ibi indicauimus: ita ijdem volunt etiam in hac cõpoſitione proportionũ, extremorum proportionẽ, quæ ex proportionibus intermediis cõponi dicitur, verè eſſe maiorẽ qualibet intermediarum componentium, vtpote conflatam ex additione omnium intermediarũ proportionũ inter ſe, ac proinde omnes intermedias proportiones debere eſſe minores extremorũ proportione. Verùm hoc falſum eſt, & Euclidi omnino repugnans, vt ex proximo exẽplo, quod ex propoſ. 23. huius lib. protulimus, perſpicuum eſt. Nam poſitis tribus hiſce numeris, 24. 9. 18. qui habent eaſdem proportiones ordine inter ſe, quas latera vnius parallelogrãmi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrãmi ad parallelogrammum eadem, quæ 24. ad 18. nimirum ex laterum proportionibus cõpoſita, vt Euclides demonſtrat. Quis autem non videt, proportionem 24. ad 18. quæ ſeſquitertia eſt, multò minorem eſſe proportione 24. ad 9. quæ dupla eſt ſuperbipartiens tertias? Sed de hac re plura ſcribemus ad finem lib. 9.

HAEC cum ita ſint, ſi quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes, id eſt, quarum denominatores inter ſe multiplicati gignant datæ proportionis denominatorẽ, ſtatuendi erunt inter duos numeros datæ proportionis quoſcunq; tot numeri medij quicunq;, quot proportiones componẽtes deſiderantur, minus vno. Vt ſi quis velit tres proportiones, ex quibus cẽtupla proportio componatur, ſatisfiet quæſtioni, ſi inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. Nam extremorum proportio 100. ad 1. componitur ex intermediis tribus, hoc eſt, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoq; ſi alios numeros ſtatuas medios hoc modo, 100. 10. 3. 1. componetur eadem proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla, ſeſquitertia, & tripla. Sic etiam vides hic, 2. 3. 1. 10. 1. duplam proportionem compoſitam eſſe ex quatuor, nimirum ex ſubſeſquialtera, tripla, ſubdecupla, & decupla. Quòd ſi quis petat quotuis proportiones datam proportionem componentes, quæ etiam omnes datæ ſint præter vnam, continuabimus ab vno extremo datæ proportionis omnes datas proportiones componentes ordine. Hæ enim cum proportione, quam vltimus medius ad alterum extremum datæ proportionis habet, componẽt datam proportionẽ. Vt ſi quis dicat, Da mihi quinq; proportiones, quarum quatuor ſint, dupla, tripla, ſeſquialtera, & quintupla ſeſquitertia, componentes proportionem ſeſquialteram inter 9. & 6. ſtatuemus hos quatuor numeros medios, 9. $4\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$. 1. $\frac{3}{1\,6}$. 6. ita vt 9. ad $4\frac{1}{2}$. habeant proportionem duplam, & $4\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{2}$. triplam & $1\frac{1}{2}$. ad 1. ſeſquialteram: & 1. ad $\frac{3}{1\,6}$. quintuplam ſeſquitertiam. Ex his etenim quatuor, vnà cum proportione $\frac{3}{1\,6}$. ad 6. quæ eadem eſt, quæ 1. ad 32. componitur proportio ſeſquialtera 9. ad 6. Idem eueniet. ſi datæ quatuor proportiones cõtinuentur à minori extremo 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. ita vt 12. ad 6. habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplam; & 54. ad 36. ſeſquialteram, & 288. ad 54. quintuplam ſeſquitertiam. Nam quinta proportio 9. ad 288. eadem eſt, quæ prius $\frac{3}{1\,6}$, ad 6. qualis eſt 1. ad 32.

EX his nullo negotio ſatisfaciemus quæſtioni, qua quiſpiam poſtulat ſibi dari quotuis numeros, qui inter ſe multiplicati procreent datum quemcunq; numerum. Si namque ſumantur duo numeri habentes proportionem

portionem à dato numero denominatam, & inter eos ſtatuantur tot numeri quicunq;, minus vno, quot numeri deſiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, qui quaeruntur. Nam ij inter ſe multiplicati producunt denominatorem proportionis extremorū, vt demonſtratum eſt, hoc eſt, numerū datum. Veluti ſi quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignantur 100. ſtatuemus inter duos numeros 500. 5. centuplam proportionē habētes, duos medios numeros quoſcunq;, hoc modo, 500. 250. 50. 5. erūtq; tres quaeſiti numeri, 2. 5. 10. nimirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250. ad 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5. fiunt 10. & ex 10. in 10. fiunt 100. Quod ſi quis poſtulet vnum numerum, qui vnà cum quotlibet aliis datis, ſi inter ſe multiplicentur, producat datum quemcunque numerum: Sumendi erunt rurſus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui produci debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuandae proportiones à datis aliis numeris denominata. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum erit numerus, quem quaerimus. Vt ſi dentur hi quatuor numeri, 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{5}$. quaeratur q; quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum $1\frac{1}{2}$. accipiemus duos numeros 9. & 6. proportionem ſeſquialteram habentes à dato numero $1\frac{1}{2}$. denominatam; & à 9. continuabimus quatuor proportiones à 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{5}$. denominatas, hoc modo, 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{3}{10}$. 6. Quintus enim numerus quaeſitus erit denominator proportionis $\frac{3}{10}$. ad 6. nimirum $\frac{1}{3}$. Nam quinq; hi numeri, 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. quorum priores quatuor dati ſunt, quintus autem inuētus, inter ſe multiplicati procreant datum numerum $1\frac{1}{2}$. idem quintus numerus $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$. inuenietur, ſi quatuor proportiones à datis numeris denominatae continuentur à numero 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. Denominator enim proportionis 9. ad 288. eſt $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$. vt prius. Sic etiam ſi quaerendi ſint quatuor numeri, qui inter ſe multiplicati procreent 1. ſtatuemus inter quoſuis datos numeros aequales proportionem aequalitatis ab 1. denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides, 4. 2. 1. 3. 4. Nam denominatores proportionum 4. ad 2. & 2. ad 1. & 1. ad 3. & 3. ad 4. nimirum 2. 2. $\frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}$. ſunt quatuor numeri, qui quaeruntur, quippe cum inter ſe multiplicati gignant 1.

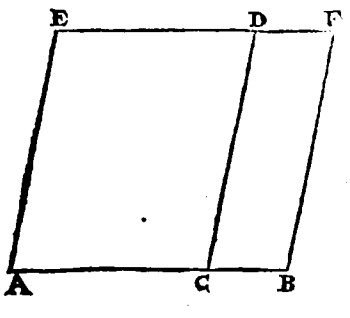
FACILIVS huiuſmodi quaeſtiones ſoluuntur, ſi tot numeri quicunq;, minus vno, quot petuntur, inter ſe multiplicentur & per vltimum numerum productum diuidatur datus numerus qui gigni debet. Quotiens enim & aſſumpti numeri, qui multiplicati inter ſe ſunt, erunt quos quaerimus. Vt in proxima quaeſtione, ſi hi tres numeri, verbi gratia, 4. 5. 6 inter ſe multiplicētur, & per numerum productū 120. diuidatur 1. quae produci debet, fiet Quotiens $\frac{1}{120}$. Quatuor ergo numeri quaeſiti ſunt 4. 5. 6. $\frac{1}{120}$. Nam ex 4. in 5. fiunt 20. & ex 20. in 6. fiunt 120. & ex 120. in $\frac{1}{120}$. fit 1.

POSTREMO neq; hoc praetermittēdum eſt, videlicet: Quemadmodum, ordine poſitis quotcunque numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarū proportionum, vt demonſtrauimus: ita poſitis quotcunq; numeris ordine, ita tamen, vt quilibet inſequens ſit ſuo antecedente maior, differentia extremorum coaceruatur ex omnibus differentijs intermediorū numerorum. Vt hic 3. 7. 12. 20. 30. 100. 713. differentia inter 3. & 713. eſt 710. At differentia inter 3. & 7. eſt 4. Inter 7. & 12. eſt 5. Inter 12. & 20. eſt 8. Inter 20. & 30. eſt 10. Inter 30. & 100. eſt 70. Inter 100. denique & 713. eſt 613. quae omnes differentiae, 4. 5. 8. 10. 70. 613. conficiunt 710. differentiam extremorum.

AT QVE haec dicta ſint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. lib. poſitis, quibus addendam eſſe censemus ſequentem ſextam, quae multum conducet, vt facilius intelligantur 27. 28. 29. & 30. propoſitiones huius libri, & quamplurimae aliae decimi libri. Ea autem eſt eiuſmodi.

VI.

PARALLELOGRAMMVM ſecundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrāmo, quando non occupat totam lineā: Excedere verò, quando occupat maiorē lineam, quàm ſit ea, ſecundum quā applicatur: ita tamen, vt parallelogrammū deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, conſtituatq; cum eo totum vnum parallelogrammum.



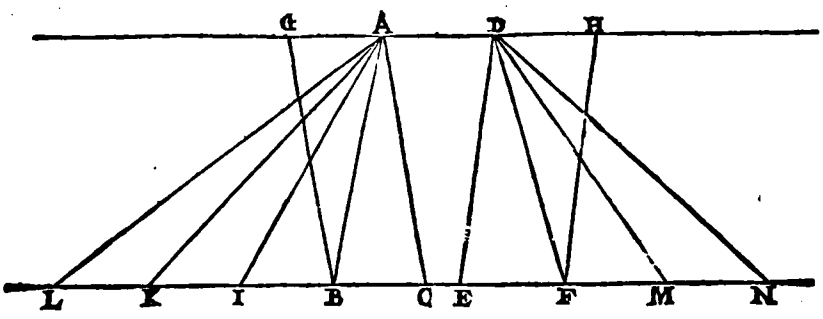
SIT data recta linea A B, ſupra quam conſtituatur parallelogrammum A C D E, quod non occupet totam lineam A B, ſed deſit C B; & ducta B F, parallela ipſi C D, donec cum E D, protracta cōueniat in F, compleatur totum parallelogrammum A B F E. Parallelogrammum igitur A D, applicatum ſecundum rectā A B, deficere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, appelletur defectus.

RVRSVS ſit data recta linea A C, ſupra quam conſtituatur parallelogrammū A B F E, quod habeat latus A B, maius recta data A C; & ducatur C D, ipſi B F, parallela. Parallelogrammū igitur A F, applicatū ſecundum rectam A C, excedere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, vocetur exceſſus.

HIC autem defectus D B, vel exceſſus, in rectangulis quidem eſſe poteſt vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides, vt perſpicuum eſt.

1. # THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes.



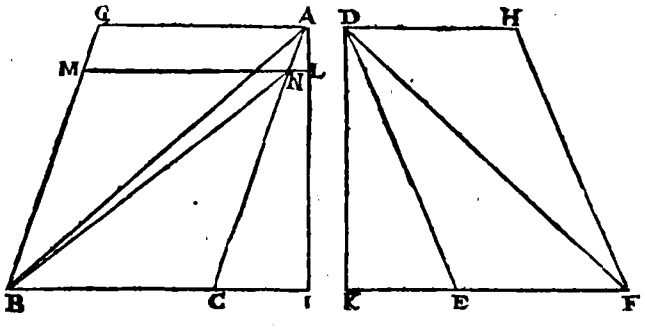
SINT duo triangula A B C, D E F, eandem habentia altitudinem, quorũ baſes B C, E F. Itẽ duo parallelogrãma C G, E H, eiuſdem altitudinis, quorũ eædem baſes B C, E F. Dico ita eſſe triangulum A B C, ad triãgulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H, vt eſt baſis B C, ad baſin E F. Hoc eſt, ſi baſis B C, ſtatuatur prima magnitudo, & baſis E F, ſecunda: At triangulum A B C, vel parallelogrammum C G, tertia, & triangulum D E F, vel parallelogrammum E H, quarta; æquemultiplicia primæ ac tertiæ ab æquemultiplicibus ſecundæ & quartæ vel vnà deficere, vel vnà æqualia eſſe, vel vnà excedere, vt definitio 6. lib. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quàm parallelogramma inter eaſdem parallelas G H, L N. (Nam vt in definitione 4. dictum eſt, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cùm inter eaſdem fuerint conſtituta parallelas: ſic enim perpendiculares à verticibus ad baſes demiſſæ æquales erunt,) & ex B L, ſumantur quotcunque rectæ B I, I K, K L, ipſi B C, æquales: Item ex F N, abſcindantur quotcunque
a 38. primi. rectæ F M, M N, æquales rectæ E F. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ A I, A K, A L; D M, D N. [a] Erunt igitur triangula A B C, A I B, A K I, A L K, ſuper æquales baſes, & inter eaſdẽ parallelas conſtituta, inter ſe æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula D E F, D F M, D M N. Quàm multiplex eſt ergo recta C L, rectæ B C, tam multiplex quoque erit triangulum A C L, trianguli A B C; & quàm multiplex eſt recta E N, rectæ E F, tam quoque multiplex erit triangulum D E N, trianguli D E F: quia in tot triangula æqualia ſunt diuiſa tota triangula A C L, D E N, in quot rectas æ-
b 38. primi. quales ſectæ fuerunt totæ rectæ C L, E N. Quoniam verò ſi baſis C L, æqualis fuerit baſi E N, [b] neceſſariò triangulum A C L, æquale eſt triangulo D E N: ac proinde ſi C L, maior fuerit quàm E N, neceſſariò A C L, maius eſt, quàm D E N, & ſi minor, minus; deficient propterea vnà C L, recta, & triangulum A C L, æquemultiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ A B C, ab E N, recta, & triangulo D E N, æquemultiplicibus ſecundæ E F, & quartæ D E F, vel vnà æqualia erunt, vel vnà
c 6. definit. quinti. excedent, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. [c] Quare quæ proportio eſt primæ B C, ad ſecundam E F, baſis ad baſin, ea eſt tertiæ A B C, ad quartam D E F, trianguli ad triangulum. Sicut igitur baſis ad baſin, ita eſt triangulum ad triangulum. quod eſt propoſitum.

d 15. quinti. QVONIAM autẽ [d] vt triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita eſt parallelogrammum C G,
e 34. primi. ([e] quod duplum eſt trianguli A B C.) ad parallelogrammum E H; ([f] quod eſt duplum trianguli
f 34. primi. D E F,) perſpicuum eſt, [g] ita quoque eſſe parallelogrammum ad parallelogrammũ, vt eſt baſis ad
g 11. quinti. baſin. Quod tamen eodem argumento confirmari poteſt, quo vſi ſumus in triangulis, ſi prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipſi B G; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipſi F H, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita ſe habent inter ſe, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SED & conuerſum huius demonſtrabimus. Videlicet:

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt baſes, æquales habẽt altitudines, vel eandem.

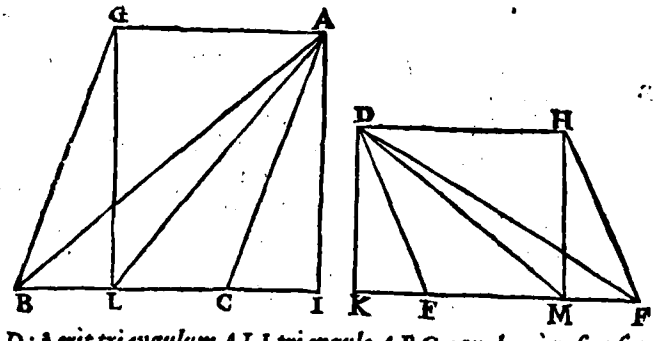


SIT triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, vt baſis B C, ad baſin E F. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares A I, D K, eſſe æquales. Si enim non ſunt æquales, ſit A I, ſi fieri poteſt, maior, quàm D K. Abſciſſa igitur I L, ipſi D K, æquali, ductáque L M, ipſi B C, parallela, quæ latus A C,
a 1. ſexti. *ſecet in N, coniunctáque recta B N,* [a] *erit N B C, triangulum ad triangulum D E F,*
b 11. quinti. *vt baſis B C, ad baſim E F; cùm altitudines L I, D K, ponantur æquales: Sed fuit etiam A B C, ad D E F,*
c 9. quinti. *vt B C, ad E F.* [b] *Igitur triangula N B C, A B C, ad triangulum D E F, eandem habent proportionem;* [c]

Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt altitudines A I, D K, ſed æquales. Eadem eſt ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento oſtendemus, parallelogramma N M, B C, A G B C, æqualia eſſe, ſi altitudines A I, D K, inæquales dicantur, & L I, D K, æquales.

Addit hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demõſtrabimus. Videlicet:

Triangvla, & parallelogramma, quorum æquales ſunt baſes, vel eadem, ita ſe habent inter ſe, vt altitudines.



Sint duo triangula A B C, D E F; & parallelogramma A G B C, D E F H, habentia baſes æquales B C, E F. Dico eſſe triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, vt altitudo A I, eſt ad altitudinem D K. Si enim ſumantur rectæ I L, K M, baſibus B C, E F, æquales, ducantúrque rectæ L A, M D; [a] *erit triangulum A L I, triangulo A B C, æquale, cùm ſint ſuper baſes æquales L I, B C, & inter eaſdem parallelas A G, I B. Eodem modo æquale erit triangulum D K M, triangulo D E F.* [b] *Quare erit vt A B C, ad D E F, ita A L I, ad D K M:* [c] *Eſt autem, vt A L I, ad D K M, ita A I, ad D K. (Nam ſi baſes ponantur A I, D K, erunt rectæ æquales L I, K M, altitudines.) Igitur & A B C, ad D E F, erit, vt A I, ad D K. Quod eſt propoſitum.*

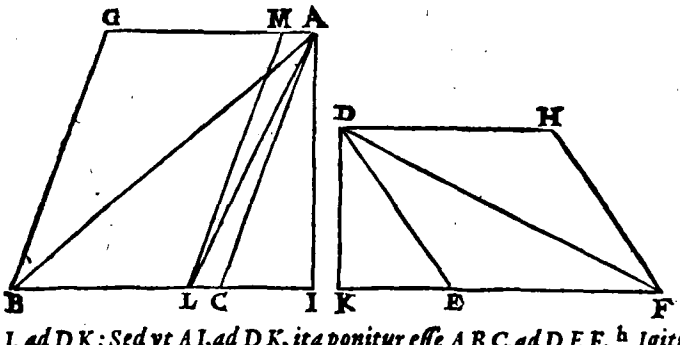
a 38. primi.
b 7. quinti.
c 1. ſexti.

Qvoniam verò eſt, [d] *vt A B C, ad D E F, ita parallelogrammum A G B C,* [e] *quod trianguli A B C, duplum eſt ad parallelogrammum D E F H,* [f] *quod trianguli D E F, eſt duplum:* [g] *Erit quoq; A G B C, ad D E F H, vt A I, ad D K. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, ſi rectæ ducantur L G, M H. Idem ſequetur, ſi triangula, & parallelogramma eandem habuerint baſin.*

d 15. quinti.
e 34. primi.
f 34. primi.
g 11. quinti.

Hoc verò conuertemus etiam, ad hunc modum.

Triangvla, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt altitudines, æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant.



Sit triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammũ A G B C, ad parallelogrammũ D E F H, vt altitudo A I, ad altitudinem D K; Dico eorũ baſes B C, E F, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit B C, ſi fieri poteſt, maior, quàm E F. Abſciſſa igitur B L, ipſi E F, æquali, ductaq; recta L A, erit, vt proximè demonſtrauimus, A B L, ad D E F, vt A I, ad D K: Sed vt A I, ad D K, ita ponitur eſſe A B C, ad D E F. [h] *Igitur A B L, A B C, ad D E F, eandem habent proportionem.* [i] *Ac proinde inter ſe æqualia ſunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes B C, E F, ſed æquales. Eademq; eſt ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento ducta L M, ipſi G B, parallela, oſtendemus, parallelogramma M G B L, A G B C, æqualia eſſe, ſi baſes B C, E F, dicantur inæquales, & B L, E F, æquales.*

h 11. quinti.
i 9. quinti.

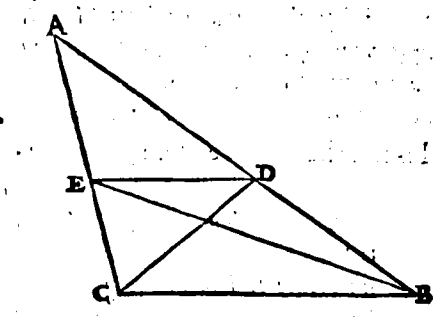
In omnibus autem his non variabitur demonſtratio, etiamſi triangula & parallelogramma ſint rectangula, ita vt altitudines ſint ipſorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum verò non. Nos aſſumpſimus caſum difficiliorem, quando ſcilicet neutrum eſt rectangulum. Ita enim demonſtratio maiore indiget nonnunquam conſtructione.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ad ſectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.

In triangulo A B C, ducatur primùm recta D E, parallela lateri B C. Dico latera A B, A C, ſecta eſſe proportionaliter in D, & E, hoc eſt, eſſe vt A D, ad D B, ita A E, ad E C. Ductis enim rectis C D, B E,* [a] *erunt triangula D E B, D E C, ſuper eandem baſin D E, & inter eaſdem parallelas D E, B C, conſtituta, inter ſe æqualia.* [b] *Quare vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita eſt triangulum idem A D E, ad triangulum D E C:* [d] *Atqui vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita eſt*

a 37. primi.
b 7. quinti.
c 1. ſexti.



basis A D, ad basin D B; (cùm hæc triangula sint eiusdem altitudinis, vt constat, si per E, agatur parallela recta ipsi AB.) & eadem ratione, vt triangulum A D E, ad triangulum D E C; ita est basis A E, ad basin E C. [a] Vt igitur A D, ad D B, ita est A E, ad E C, (cũ hæ duæ proportiones eædem sint ꝓportioni trianguli A D E, ad triangulũ D E B, & eiusdem trianguli A D E, ad triangulum D E C.) quod est propositum.

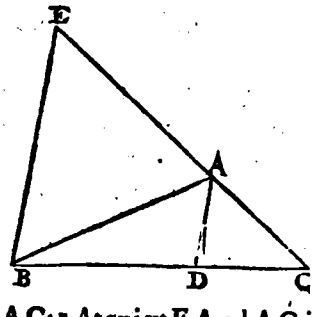
a 11. *quinti.*

Secet deinde recta D E, latera AB, AC, proportionaliter. Dico D E, parallelam esse reliquo lateri B C. Ductis enim rursum rectis C D, B E, [b] erit vt basis A D, ad basin D B; ita triangulum A D E, ad triangulum D E B, cùm sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem vt AD, ad D B, ita AE, ad E C. [c] Igitur erit vt triangulum A D E, ad triangulum DE B, ita A E, ad E C. Sed rursus [d] vt basis A E, ad basin E C, ita est triangulum A D E, ad triangulum D E C, cũ sint altitudinis eiusdẽ. [e] Igitur vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita est triangulũ idem A D E, ad triangulum D E C. [f] Æqualia ergo sunt triangula D E B, & D E C: Ac propterea cùm eandem habeant basin D E, [g] inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est D E, ipsi B C. qd̃ est propositũ. Si itaq; ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

b 1. *sexti.*
c 11. *quinti.*
d 1. *sexti.*
e 11. *quinti.*
f 9. *quinti.*
g 39. *primi.*

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autẽ angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebũt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quã reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.



In triangulo A B C, recta A D, secet primò angulum B A C, bifariam, Dico esse vt B A, ad A C, ita B D, ad D C. Agatur enim per B, recta B E, parallela ipsi AD, donec cum C A, producta conueniat in E; (coibunt autem omninò B E, C A, propterea quòd anguli C, & C B E, minores sunt duobus rectis. Cùm enim C, & C D A, [b] minores duobus rectis sint; [i] sit autem angulus C D A, angulo C B E, externus interno, æqualis: erunt quoq; C, & C B E, duobus rectis minores.) [k] eritq; angulus E B A, æqualis alterno B A D; & angulus E, externo D A C. Cùm igitur duo anguli B A D, D A C, æquales ponantur; erũt & anguli E B A, & E, inter se æquales; [l] Ideoq; & rectæ B A, E A, inter se æquales. [m] Vt igitur E A, ad A C, ita B A, ad eandẽ A C: [n] Atqui vt E A, ad A C, ita est B D, ad D C; cùm in triangulo B C E, recta A D, sit parallela lateri B E. [o] Igitur vt B A, ad A C, ita est B D, ad D C. quod est propositum.

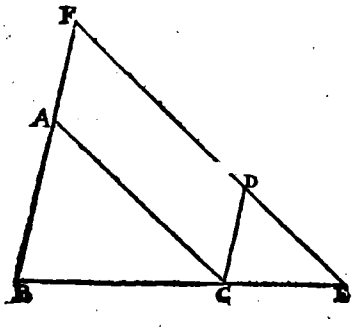
b 17. *primi.*
i 29. *primi.*
k 29. *primi.*
l 6. *primi.*
m 7. *quinti.*
n 2. *sexti.*
o 11. *quinti.*

Sit deinde vt B A, ad A C, ita B D, ad D C. Dico rectam A D, bifariam secare angulum B A C. Agatur enim rursus per B, recta B E, ipsi A D, parallela coiens cum C A, protracta in E. Quoniam igitur vt B A, ad A C, ita ponitur B D, ad D C. [p] Vt autem B D, ad D C, ita est E A, ad A C; (quòd in triangulo B C E, recta A D, sit lateri B E, parallela.) [q] Erit vt B A, ad A C, ita E A, ad eandẽ A C, [r] Æquales igitur sunt B A, & E A, inter se, [s] ac propterea anguli A B E, & E, æquales quoq; erunt. Cùm igitur angulus A B E, æqualis sit alterno B A D; & angulus E, externo D A C, erunt & duo anguli B A D, D A C, inter se æquales. quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

p 2. *sexti.*
q 11. *quinti.*
r 9. *quinti.*
s 5. *primi.*
t 29. *primi.*

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

Aequiangulorũ triangulorũ proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.



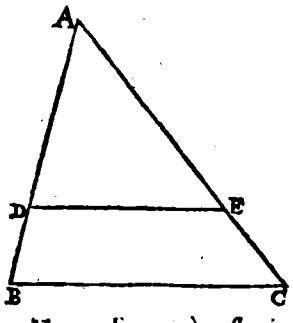
Sint æquiangula triangula A B C, D C E, sintq; æquales anguli A B C, D C E; & A C B, D E C; & B A C, C D E. Dico esse A B, ad B C, vt D C, ad C E; & B C, ad C A, vt C E, ad E D; & AB, denique ad A C, vt D C, ad D E. Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaq; sunt ea latera, quę æqualibus angulis subtenduntur. hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera B C, C E, secundum lineam rectam, ita vt angulus D C E, externus sit æqualis interno A B C; pariterq; externus A C B, interno D E C. Et quia duo anguli A B C, A C B, [u] minores sunt duobus rectis: est autẽ angulo A C B, æqualis angulus

u 17. *primi.*

gulus D E C; erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. Quare rectæ B A, & E D, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam verò angulus externus D C E, æqualis est interno opposito A B C; [b] parallelæ erunt C D, & B F. Eadem ratione, parallelæ erunt C A, & E F; quòd angulus externus A C B, sit æqualis interno D E C. Parallelogrammũ est igitur A C D F; [c] propterea q; recta A F, æqualis rectæ C D; & recta G A, rectæ D F. Quoniam igitur in triangulo B E F, recta A C, parallela est lateri E F, [d] erit A B, ad A F, hoc est, ad D C, (quæ æqualis est ipsi A F,) vt B C, ad C E. Permutando [e] igitur erit A B, ad B C, vt D C, ad C E. Rursus quia in eodem triangulo B E F, recta C D, parallela est lateri B F, [f] erit B C, ad C E, vt F D, hoc est, vt C A, (quæ æqualis est ipsi F D,) ad E D. Permutando [g] igitur erit B C, ad C A, vt C E, ad E D. Cùm igitur sit A B, ad B C, vt D C, ad C E; & B C, ad C A, vt C E, ad E D: [h] erit & ex æquali A B, ad C A, vt D C, ad E D. Quod est propositum. Æquiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

a 13. primi.
b 28. primi.
c 34. primi.
d 2. sexti.
e 16. quinti.
f 2 sexti.
g 16. quinti.
h 22. quinti.

COROLLARIVM.



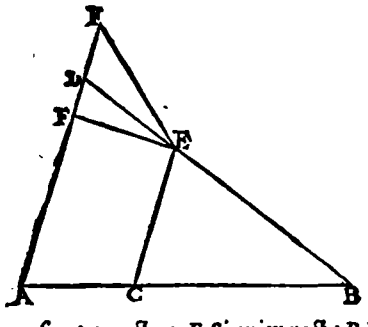
Hinc fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triãgulo simile. Ducatur enim in triãgulo A B C, lateri B C, parallela D E. Dico triangulũ A D E, toti triangulo A B C, esse simile. Aequiangula namq; sunt, [a] *cũ anguli A D E, A E D, æquales sint angulis A B C, A C B, externi internis; & angulus A, communis. Quare, vt demonstratum est,* [b] *habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.*

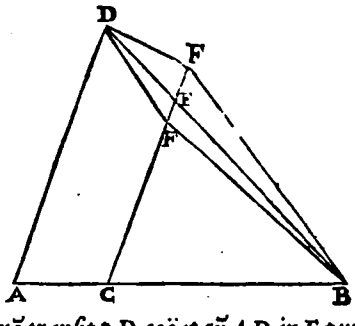
a 29. primi.
b 4. sexti.

SCHOLIVM.

Non alienum à nostro instituto esse puto, si hic demonstremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonstrat in libello Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua: Secundum verò in Commentarijs in Apollonij Conica. Horum primum est:

Si ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorũ alterum sit extremum, alterũ verò intra lineam, duæ parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita vt proportionẽ habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum includlæ: Recta coniungens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ, transibit per extremũ alterius lineæ.



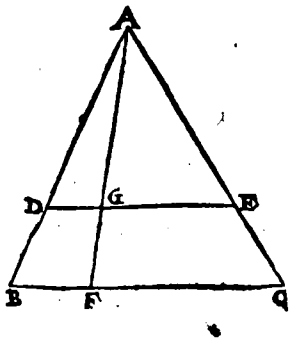


Sit recta A B, & ex punctis A, & C, educantur duæ parallelæ A D, C E, proportionem habentes, quam A B, B C, ita vt sit A D, ad C E, sicut A B, ad B C; vel C E, ad A D, vt B C, ad A B. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, transire p punctum D. Item rectam, quæ coniungit extrema B, & D, transire p punctum E. Si enim recta B E, nõ transit p D, coëat cũ A D, in F. puncto, quod sit vel supra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur p coroll. huius propos. triãgula B A F, B C E, similia sunt; [c] *erit vt A B, ad A F, ita B C, ad C E: Et permutando,* [d] *vt A B, ad B C, ita A F, ad C E. Vt autem A B, ad B C, ita erat quoq; A D, ad C E.* [e] *Igitur erit, vt A F, ad C E, ita A D, ad C E:* [f] *Ac propterea æquales erunt rectæ A F, A D, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta B E, per punctum D. Quod est primum.*

c 4. sexti.
d 16. quinti.
e 11. quinti.
f 9. quinti.

Rvrsvs si recta B D, non transit per E, transeat per F, punctum, quod sit vel supra E, vel infra, vt in secunda figura. Quoniam ergo p coroll. huius propos. triangula B A D, B C F, similia sunt; [g] *erit, vt A B, ad A D, ita B C, ad C F,* [h] *& permutando, vt A B, ad B C, ita A D, ad C F: Vt autem A B, ad B C, ita quoq; erat A D, ad C E.* [i] *Igitur erit, vt A D, ad C F, ita A D, ad C E:* [k] *Ac proinde æquales erunt rectæ C F, C E, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta B D, per E. Quod est secundum.* ALTERVM *verò est:*

g 4. sexti.
h 16. quinti.
i 11. quinti.
k 9. quinti.



Si in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur, & ex quocunq; puncto illius lateris ad angulũ oppositũ recta educat linea: diuidentur linea parallela, & latus illud in easdẽ rationes.

In triãgulo A B C, ducta sit D E, lateri B C, parallela, & ex puncto F, quocunq; ad angulũ A, recta extendatur F A, secans D E, in G. Dico esse, vt B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quoniam enim triangula A F B, A G D, ex coroll. huius propos. similia sunt; [l] *erit vt A F, ad B F, ita A G, ad D G;* [m] *& permutando, vt A F, ad A G, ita B F, ad D G. Atq; eodem argumento concludemus esse, vt A F, ad A G, ita F C, ad G E.* [n] *Igitur erit, vt B F, ad D G, ita F C, ad G E; & permutando vt B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quod est propositum.*

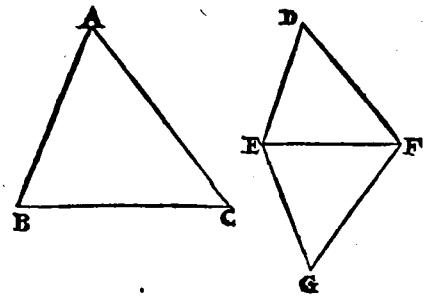
l 4. sexti.
m 16. quinti.
n 11. quinti.

ALITER. Quoniam triangula ABF, ADG, similia sunt, nec non triangula AFC, AGE, per corollarium huius propositionis [a] *erit, vt BF, ad FA, ita DG, ad GA. Item vt FA, ad FC, ita GA, ad GE.* [b] *Ex æquo igitur, vt BF, ad FC, ita erit DG, ad GE. Quod erat demonstrandum.*

a 4. sexti.
b 22. quinti.

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

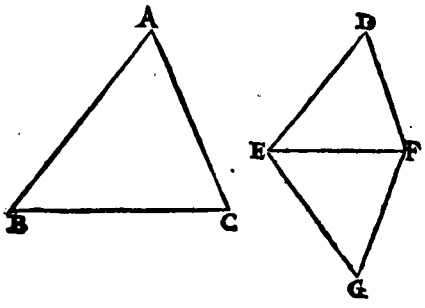


HABEANT triangula ABC, DEF, latera proportionalia, sitque AB, ad BC, vt DE, ad EF; & BC, ad CA, vt EF, ad FD; & AB, denique ad AC, vt DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D; & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C; conueniantque rectæ EG, FG, in G: [c] eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Æquiangula igitur sunt triangula ABC, GEF. Quare [b] vt AB, ad BC, ita est GE, ad EF. Vt autem AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. [c] Igitur vt GE, ad EF, ita est DE, ad EF, eandem: [d] propterea quæ æquales erunt GE, DE. Rursus, [e] quoniam vt BC, ad CA, ita est EF, ad FG; Vt autem BC, ad CA, ita ponitur EF, ad FD; [f] erit vt EF, ad FG, ita eadem EF, ad FD; [g] ideoque æquales erunt FG, FD. Itaque cùm latera EG, FG, æqualia sint lateribus DE, DF, vtrumque vtrique; & basis communis EF; [h] erunt anguli G, & D, æquales; [i] ac propterea & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis angulis DEF, DFE, æquales erunt. Quamobrem cùm angulus G, æqualis sit angulo A; erit & angulus D, eidē angulo A, æqualis, eodemq; modo angulus DEF, angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit. quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat.

a 32. primi.
b 4 sexti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 4. sexti.
f 11. quinti.
g 9. quinti.
h 8. primi.
i 4 primi.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.



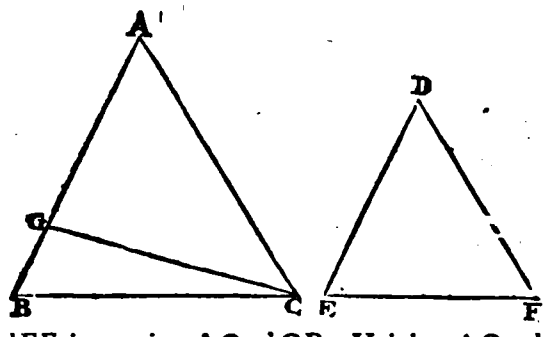
SIT angulus B, trianguli ABC, æqualis angulo E, trianguli DEF, sintque latera AB, BC, proportionalia lateribus DE, EF, hoc est, sit AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; & angulo C, angulus EFG; eritque, vt in precedenti propositione dictum est, triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare [k] vt AB, ad BC, ita est GE, ad EF. Sed vt AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. [l] Igitur vt DE, ad EF, ita est GE, ad eandem EF; [m] atq; idcirco DE, GE, æquales erunt. Itaque cùm latera DE, EF, æqualia sint lateribus GE, EF, & anguli ipsis contenti æquales quoque; (Nam angulo B, cui factus est æqualis angulus FEG, æqualis est positus angulus DEF, propterea; æquales ad inuicem erunt anguli DEF, GEF,) [n] erunt reliqui anguli D, EFD, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cùm ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli DEFD; & ob id æquiangula erūt triangula ABC, DEF, quod est propositum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.

k 4. sexti.
l 11. quinti.
m 9. quinti.
n 4. primi.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum verò simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

SIT angulus A, trianguli ABC, æqualis angulo D, trianguli DEF; & latera AC, CB, circa angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE, circa angulum F, hoc est, sit vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; hac tamen lege, vt quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor.



nor. Dico æquiangula esse triangula angulos scilicet A C B, & F, circa quos sunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primùm tam B, quàm E, recto minor: Quo posito, si anguli A C B, & F, nō sunt æquales, sit A C B, maior, quàm F; fiatque ipsi F, æqualis A C G. Cùm igitur & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [a] erit & reliquus A G C, reliquo E, æqualis; ideoque triangula A G C, D E F, æquiangula erunt. Quare [b] vt A C, ad C G, ita erit D F, ad F E: Sed vt D F, ad F E, ita ponitur A C, ad C B. [c] Vt igitur A C, ad C G, ita erit eadem A C, ad C B; [d] ac propterea æquales erunt C G, C B; [e] & anguli C B G, C G B, æquales. Cùm igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & C G B, minor recto, ideoque ei deinceps A G C, recto maior; [f] cùm A G C, C G B, sint duobus rectis æquales: Est autem ostensus angulus A G C, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est quoque angulus E: Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum.

a 32. primi.
b 4. sexti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 5. primi.
f 13. primi.

Sit deinde tam B, angulus, q̄ E, recto non minor; eritque vt prius, angulus B, angulo C G B, æqualis; ideoque & C G B, recto non minor erit; ac propterea angulus C B G, C G B, in triangulo B C G, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel æquales duobus rectis. quod est absurdum. [g] Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli A C B, & F, sed æquales, [h] atque idcircò reliqui etiam anguli B, & F, æquales erunt. quod est propositum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

g 17. primi.
h 32. primi.

SCHOLIVM.

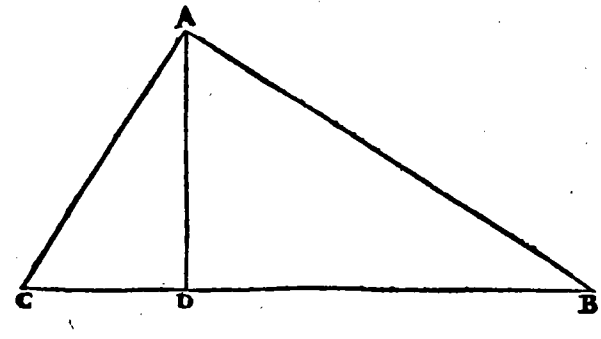
Addidit Euclides, vtrumque angulorum reliquorum B, & E, debere esse vel minorem recto, vel non minorem. Nam aliàs, manente tota hypothesi, non sequeretur, triangula esse æquiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, sit C G, æqualis ipsi C B, (quod fieri potest, quando angulus B, acutus est, & maior angulo A. Sic enim [a] erit latus C A, latere C B, maius. Si igitur ex C, ad interuallum C B, circulus describatur, secabit is rectam A B, priusquam rectam A C, quæ longior est, quàm C B, secet. Secabit autem ille circulus necessariò rectam A B, propterea quòd ob acutum angulum B, recta A B, intra eum circulum cadit: quippe cùm infra contingentem lineam ducatur, quæ ad B, angulum rectum constituit cum C B, vt patet ex propositione 16. lib. 3.) habebunt duo triangula A B C, A G C, vnum angulum vni angulo æqualem, immò angulum A, communem; & circum alios angulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc est, [b] vt A C, ad G B, ita erit eadem A C, ad C G, cùm æquales ponantur rectæ C B, C G: & tamen non sunt vllo modo æquiangula triangula A B C, A G C, vt constat. Quod ideò euenit, quia non vterque angulorum A B C, A G C, minor est recto, vel non minor. Immò A B C, est quidem recto minor; A G C, verò recto maior. Cùm enim C G, C B, latera æqualia sint, [c] & ideò anguli C B G, C G B, æquales; [d] erit vterque eorum recto minor, [e] ac propterea A G C, recto maior.

a 19. primi.
b 7. quinti.
c 5. primi.
d 17. vel 32. primi.
e 13. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.



In triangulo A B C, angulus B A C, sit rectus, à quo ad basin perpendicularis agatur A D. Dico triangula A D B, A D C, similia esse, & toti triangulo A B C, & inter se. Cùm enim in triangulis A B C, D B A, anguli B A C, & A D B, sint recti, & angulus B, communis; [a] erunt & reliqui anguli A C B, & D A B, æquales. Æquiangulum est igitur triangulū D B A, triangulo A B C; [b] ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit vt C B, ad B A, ita B A, ad B D; & vt B A, ad A C, ita B D, ad D A; & vt B C, ad C A, ita B A, ad A D. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, vt vult propositio 4. huius libri. Quare simile est triangulum A D B, toti triangulo A B C. Eodem modo ostendetur, triangulum A D C, simile eidem triangulo A B C. Nam anguli B A C, & A D C, sunt recti, & angulus C, cōmunis; [c] ac propterea reliqui anguli A B C, & C A D, æquales. Quare [d] vt B C, ad C A,

a 32. primi
b 4. sexti.
c 32. primi.
d 4. sexti.

ita est CA,ad CD; & vt CA,ad AB,ita CD,ad DA;& vt CB,ad BA,ita CA,ad AD. Sic enim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus,ex præscripto propos. 4.huius lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula ADB,& ADC, cùm anguli ADB,ADC, sint
a 4.sexti. recti,& anguli ABD,CAD,ostensi æquales, nec non anguli BAD,ACD; Atque idcircò sit a vt BD,ad DA,ita DA,ad DC; & vt DA,ad AB,ita DC,ad CA; & vt AB, ad BD,ita CA,ad AD. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit,&c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

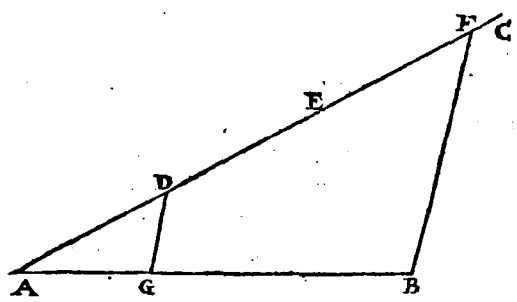
Ex hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse medium proportionalem inter duo basis segmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adiacet.

OSTENSVM est enim, esse vt BD, ad DA, ita DA, ad DC; ac propterea DA, esse mediam proportionalem inter BD, & DC: Item esse vt CB, ad BA, ita BA, ad BD: & idcircò BA, mediam esse proportionalem inter CB, & BD: Denique esse vt BC, ad CA, ita CA, ad CD; ideoq; CA, esse proportionalem mediam inter BC, & CD. Quod est propositum.

PROBL. I. PROPOS. 9.

11.

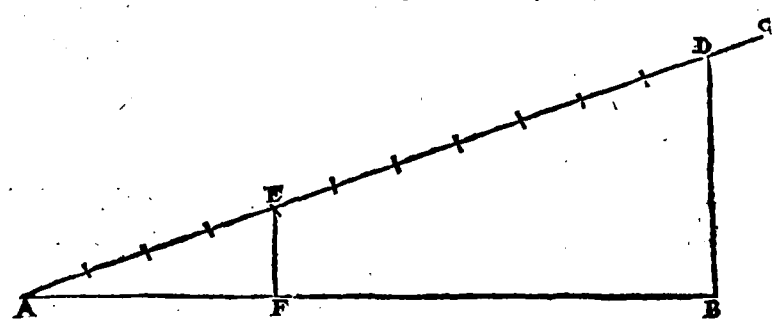
A DATA recta linea imperatam partem auferre.



b 2.sexti.
c 18.quinti.

IMPERETVR, vt ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, vtcunque faciens angulum CAB; & ex AC, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex AB, vt in pposito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur FB, cui per D, parallela agatur DG. Dico AG, esse partem tertiam imperatam rectæ AB. Nam cùm in triangulo ABF, lateri FB, parallela sit recta DG; b erit vt FD, ad DA, ita BG, ad GA. c Componendo igitur, vt FA, ad DA, ita BA, erit ad GA: Sed FA, ipsius AD, est tripla, ex constructione. Igitur & BA, ipsis AG, erit tripla, ideoque AG, tertia pars erit ipsius AB, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

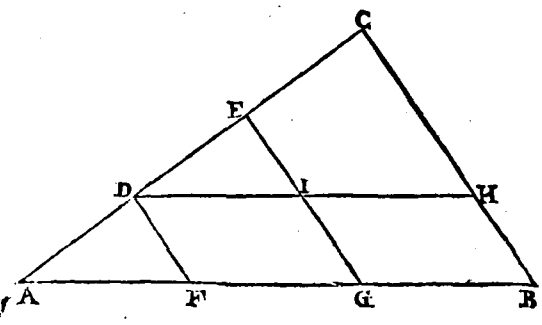
SCHOLIVM.



QVOD si ex AB, auferenda sit pars non aliquota, sed quæ plures aliquotas non efficientes vnam complectatur, nimirũ quæ contineat quatuor vndecimas ipsius AB, sumendæ erunt ex AC, vndecim partes æquales vsque ad D, punctũ, ex quo ad B, recta ducatur DB; & huic parallela EF, ex E, termino quatuor partium. Nam AF, erit pars imperata. Erit enim rursus vt DA, ad AE, ita BA, ad AF: Quare & conuertendo, vt AE, ad AD, ita AF, ad AB: Est autem AE, pars continens quatuor vndecimas ipsius AD, ex constructione. Igitur & AF, eadem pars erit rectæ AB. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex AB, pars complectens quotcunq; partes ipsius aliquotas, nõ facientes vnam.

PROBL. 2. PROPOS. 10.

12.



DATAM rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

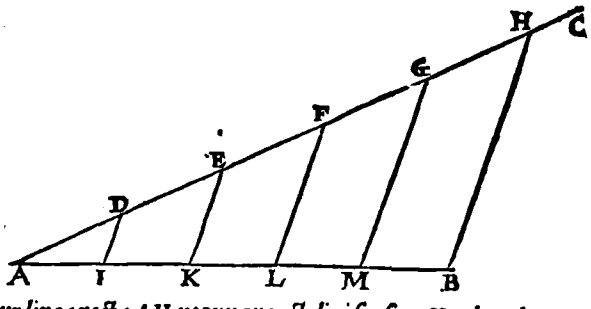
SIT recta AB, secanda similiter, vt secta est recta AC, in D, & E; hoc est, in partes, quæ sint partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunq; BAC, & connectatur recta BC. Deinde ex DE, agantur DF, EG parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB, similiter esse

sectam

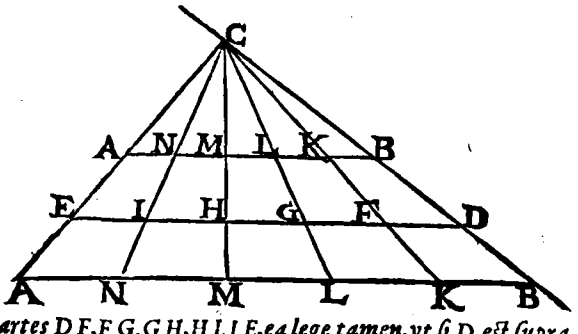
sectam in F,& G,vt est secta A C,in D,& E. Nam [a] vt A D,ad D E,ita est A F,ad F G. Proportionales ergo sunt partes A F, F G, partibus A D, D E. Quòd si ducatur D H, ipsi F B, parallela,secans E G,in I; [b] erit rursus,vt D E,ad E C,ita D I,ad I H,hoc est,ita F G,ad G B; [c] quòd F G,ipsi D I, & G B,ipsi I H,æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes F G,G B, partibus D E, E C. Eademq; ratio est de pluribus partibus, si ex E,& C, ipsi A B,parallelæ agantur,&c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

[a] 2. sexti.
[b] 2. sexti.
[c] 34. primi.

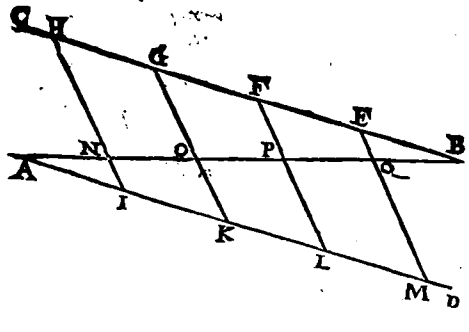
SCHOLIVM.



Ex hoc problemate colligi potest facilis admodum via ac ratio diuidendi lineam rectam datam in partes quotcunque æquales: id quod nos ad propos.10.lib.1. facturos recepimus, & alia iam via idem ad propos.40.lib. 1.demonstrauimus. Sit enim data recta A B. diuidenda in quinque partes æquales. Ducta recta A C, faciente cũ A B, quemcunque angulum C A B, sumantur ex ea quinque partes æquales A D, D E, E F, F G, G H. Quia igitur linea recta A H, vtcunque est diuisa, si ex H, ad B, ducatur recta H B, & huic ex punctis D, E, F, G parallelæ agantur D I, E K, F L, G M; erit A B, similiter diuisa, vt A H, vt constat ex demonstratione huius problematis. Cùm igitur A H, sit diuisa in quinque partes æquales, erit & A B, in totidem æquales partes diuisa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur eadem recta A B.



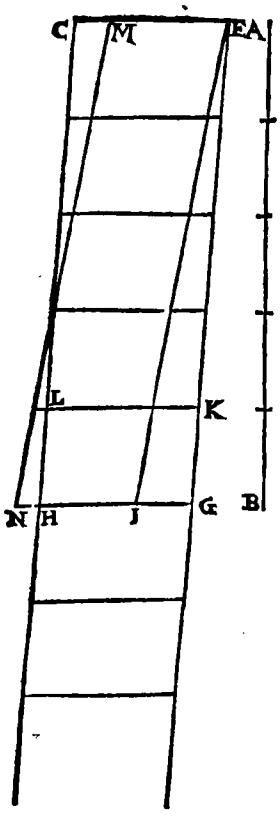
Hvic rationi diuidendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi possunt aliæ nõ iniucũdæ: vt propos.10.lib.1. sumus pol liciti, atque ad propos.40.lib.1. demonstrauimus. Sit enim rursus data linea recta A B, diuidenda in quinq; partes æquales. Ducatur ex B, recta B C, vtcunque faciens angulum cum A B; Deinde ex assumpto puncto D, siue supra B, siue infra, agatur D E, parallela ipsi A B, ex qua abscindantur quinque æquales partes D F, F G, G H, H I, I E, ea lege tamen, vt si D, est supra B, recta D E, ex quinque partibus æqualibus constans, minor sit, quàm A B, maior verò, si D, existit infra B. Postremò ex A, per E, recta ducatur A C, occurrens ipsi B C, in C, puncto, à quo per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur C K, C L, C M, C N, quas dico diuidere rectam A B, in quinque partes æquales. Cùm enim D E, sit parallela ipsi A B, diuidentur E H, & A M, in triangulo C A M, proportionaliter, ex scholio propos.4. huius lib. Cùm ergo E H, secta sit bifariam in I, secta quoq; erit A M, bifariam in N. Eadem ratione recta N L, in triangulo C N L; & recta M K, in triangulo C M K; & recta L B, in triangulo C L B, secta erit bifariam. Est ergo A N, ipsi N M, & N M, ipsi M L, & M L, ipsi L K; & L K, ipsi K B, æqualis; ac proinde A B, secta erit in quinque partes æquales. Quod est propositum.



Aliter. Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ B C, A D, inter se parallelæ; hoc est, constituentes angulos A B, æquales: Et ex B C, abscindantur quatuor partes æquales B E, E F, F G, G H, vt sint tot partes, vna minus, in quot est linea diuidenda; His autẽ ex A D, totidem æquales rescecentur A I, I K, K L, L M. Ductis igitur rectis E M, F L, G K, H I, secantibus rectam A B, in N, O, P, Q, dico ipsam A B, sectam esse in quinque partes æquales. Cùm enim æquales sint, & parallelæ G H, I K, [a] erunt & H I, G K, parallelæ; Eademq; ratione parallelæ erunt G K, F L, E M. Quare cùm A M, secta sit in quatuor æquales partes, erit & A Q, similiter in quatuor partes æquales diuisa, vt constat ex demonstratione huius 10. propos. Eadem ratione diuisa erit & B N, in quatuor partes æquales, eo quòd B H, in totidem est partes æquales diuisa. Quare cùm tam A N, quàm B Q, æqualis sit singulis partibus N O, O P, P Q: erunt omnes quinque partes A N, N O, O P, P Q, Q B, inter se æquales. Quod est propositum.

[a] 33. primi.

Aliter. Præparetur prius instrumentum huic rei accommodatum in hunc modum: Ductis duabus rectis inter se parallelis vtcunque C D, E F; ex vtraq; abscindantur partes inter se æquales quotcunque, saltem tot, in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta correspondentia lineis rectis iungantur. Deinde beneficio circini capiatur longitudo rectæ A B, diuidendæ, eaq; ex aliquo puncto lineæ C E, vt ex E, transferatur in instrumentum ad punctum I, illius lineæ transuersæ, quæ tot spatia terminat, in quot partes lineæ



proponitur diuidenda, qualis in exemplo eſt recta G H: ea enim includit quinque ſpatia. Poſtremò ex E, ad I, recta ducatur E I, quam dico diuiſam eſſe in quinque æquales partes. Cùm enim G K, H L, æquales ſint, & parallelæ, [a] *erunt quoq; G H, K L, parallelæ. Eodemq; modo omnes lineæ inter rectas C D, E F, inter ſe parallelæ oſtendentur. Quare, vt ex demonſtratione huius 10. propoſitionis liquet, quemadmodum E G, diuiſa eſt in quinque partes æquales, ita ſimiliter in totidem diuiſa erit E I. Nam ſi punctum E, ſumptum non fuerit idem quod E, vel C, producenda eſt I E, donec cum F E, vel D C, coëat. Tunc enim, vt in hac 10. propoſ. probatum eſt, erunt rectæ E I, E G, ſimiliter diuiſæ. Quòd ſi fortè I E, nec cum F E, nec cum D C, concurrat, ſed vtrique ſit parallela,* [b] *erunt ſingulæ partes rectæ E I, ſingulis partibus rectæ E G, æquales, ob parallelogramma inter parallelas incluſa. Cùm ergo omnes partes rectæ E G, ſint æquales, erunt quoque omnes partes rectæ E I, æquales. Si igitur beneficio circini ſingulæ partes lineæ E I, transferantur in rectam propoſitam A B, ipſi E I, æqualem, diuiſa erit & A B, in quinque partes æquales. Quod eſt propoſitum.*

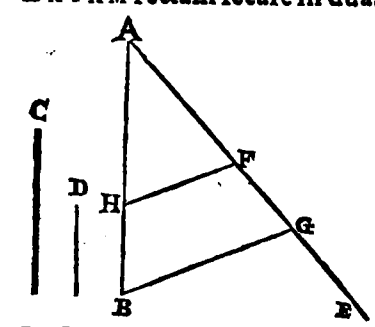
a 33. primi.

b 34. primi.

Est autem nonnunquam neceſſe lineas parallelas extra inſtrumentum producere. Vt ſi eadem linea transferatur ab M, vſque ad N, punctum lineæ G H, protractæ, erit quoq; M N, diuiſa in quinque partes æquales. Vt conſtat. ſi ducatur ex M, ipſi E G, parallela, vſque ad rectam G H: Vel ſi N M producatur, donec cum G E, producta conueniat. Quòd ſi linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipiendæ erunt partes parallelarum C D, E F, minores, &c. Si verò linea ſit longiuſcula, & diuidenda in paucas partes æquales; transferri poterit in duplo plura ſpatia, vel in triplo plura, vel quadruplo plura, &c. Nam duo, vel tria, vel quatuor ſpatia, &c. dabunt vnam partem. Vt ſi diuidenda ſit in tres partes, transferatur q; in ſex ſpatia, dabunt duo ſpatia vnam partem: ſi transferatur in quindecim ſpatia, dabunt quinque ſpatia vnam partem, propterea quòd quinque ſpatia conficiunt tertiam partem quindecim ſpatiorum. Sic ſi linea diuidenda in duas æquales partes transferatur in octodecim ſpatia, dabunt nouem ſpatia vnam partem; quippe cùm nouem ſpatia conſtituant ſemiſſem octodecim ſpatiorum: & ſic de cæteris.

Eodem modo, ad ſimilitudinẽ huius propoſitionis, licebit nobis facili negotio ſequens problema, quod non rarò à Geometris adhibetur, demonſtrare. quod eſt eiuſmodi:

Datam rectam ſecare in duas partes, quæ habeant proportionẽ quamcunque datam.

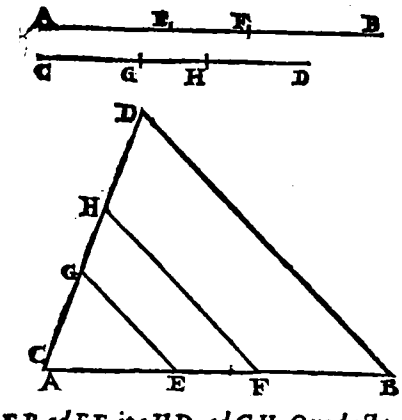


Sit ſecanda recta A B, in duas partes, quæ habeant proportionem inter ſe, quam rectæ C, & D. Ex A, ducatur linea A E, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abſcindatur recta A F, ipſi C, & F G, ipſi D, æqualis: Ducta deinde G B, ducatur ei per F, parallela F H. Dico A B, ſectam eſſe in H, ſecundùm proportionem C, ad D. Hoc autem manifeſtum eſt, [c] *cùm ſit, vt A F, ad F G, atque adeò, vt C, ad D, ita A H, ad H B.*

c 2. ſexti.

Postremo inferemus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam ſectiones pertinens, deſumptum ex Federico Commandino in lib. Archimedis de ijs quæ vehuntur in aqua. Nimirũ:

Si duę rectæ lineæ ſecentur in binis punctis proportionaliter, erunt quoque intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuslibet ſegmentis duobus.



Secentur rectæ A B, C D, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita vt ſit A E, ad E B, ſicut C G, ad G D; Item A F, ad F B, vt C H, ad H D. Dico ſectiones inter medias E F, G H, proportionales quoq; eſſe cum duobus ſegmẽtis F B, H D; vel cum duobus A E, C G, hoc eſt, eſſe F B, ad E F, vt H D, ad G H. Item A E, ad E F, vt C G, ad G H. Cùm enim ſit, vt A E, ad E B, ita C G, ad G D; erit componendo, vt A B, ad E B, ita C D, ad G D. Item cùm ſit, vt A F, ad F B, ita C H, ad H D; erit componẽdo, vt A B, ad F B, ita C D, ad H D; & conuertendo, vt F B, ad A B, ita H D, ad C D. Itaque cùm ſit vt F B, ad A B, ita H D, ad C D; Et vt A B, ad E B, ita C D, ad G D; [d] *Erit ex æquo, vt F B, ad E B, ita H D, ad G D; Et conuertendo, vt E B, ad F B, ita G D, ad H D; Et per conuerſionem rationis, vt E B, ad E F, ita G D, ad G H; Et diuidendo, vt F B, ad E F, ita H D, ad G H. Quod eſt primum.*

d 22. quinti.

RVRSVS, quia est, vt A E, ad E B, ita C G, ad G D: Et vt E B, ad E F; ita G D, ad G H, vt ostensum est; Erit ex æquo, vt A E, ad E F, ita C G, ad G H. Quod est secundum.

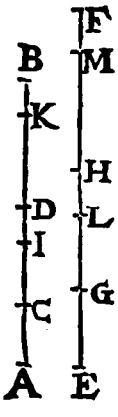
BREVIVS idem demonstrabitur hoc modo. Conueniant duo puncta A, & C, in vnum, vt fiat angulus B C D, vel B A D; iungaturq; recta D B, H F, G E. Quia igitur ponitur, vt A E, ad E B, ita C G, ad G D; [a] *Parallela erit G E, ipsi D B. Rursus cum ponatur, vt A F, ad F B, ita C H, ad G D;* [b] *Parallela erit quoque H F, ipsi D B.* [c] *Quare & G E, H F, inter se parallelæ erunt: Ac propterea* [d] *erit, vt A E, ad E F, ita C G, ad G H. Quod est secundum.*

a 2. sexti. b 2 sexti. c 30. primi. d 2. sexti.

EODEM modo, si puncta extrema B, D, conueniant in vnum, &c. ostendemus esse, vt B F, ad E F, ita H D, ad G H; & conuertendo, vt E F, ad F B, ita G H, ad H D. Quod est primum.

SED neq; omittendum videtur hoc loco theorema, quod sequitur.

SI linea recta sit secta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quæ eadem inter se, quas illæ, proportiones habeant: erunt quoque partes huius lineæ Arithmeticè proportionales.



RECTA linea A B, secta sit in partes A C, C D, D B, Arithmeticè proportionales, hoc est, habentes eundem excessum. [e] *Secetur autem recta E F, in partes E G, G H, H F, illis proportionales. Dico has partes eundem quoq; habere excessum, hoc est, Arithmeticè esse proportionales. Sit enim C I, ipsi A C; & D K, ipsi C D, æqualis: vt I D, sit excessus inter C D, A C; & K B, excessus inter D B, C D, atque adeò ipsi I D, æqualis. Sit quoque G L, ipsi E G; & H M, ipsi G H, æqualis: vt L H, excessus sit inter G H, E G; & M F, excessus inter H F, & G H. Probandum est, excessus L H, M F, æquales esse. Quoniam igitur est, vt A C, ad C D, ita E G, ad G H; erit permutando quoque vt A C, ad E G, ita C D, ad G H. Item quoniam est, vt C D, ad D B, ita G H, ad H F; erit quoque permutando, vt C D, ad G H, ita D B, ad H F. Atque ita si plures fuerint partes, habebunt semper partes lineæ A B. ad partes lineæ E F, singulæ ad singulas, eandem proportionem, quamuis partes vnius lineæ non sint continuè proportionales. Itaque cum sit, vt C D, ad G H, ita A C, ad E G, hoc est, ita C I, ad G L;* [f] *erit quoque reliqua I D, ad reliquam L H, vt tota C D, ad totam G H. Rursus quia est, vt D B, ad H F, ita C D, ad G H, hoc est, ita D K, ad H M;* [g] *erit quoq; reliqua K B, ad reliquam M F, vt tota D B, ad totam H F, vel vt ablata D K, ad ablatam H M, hoc est, vt C D, ad G H. Erat autem quoque I D, ad L H, vt C D, ad G H.* [h] *Igitur erit vt I D, ad L H, ita K B, ad M F. Est autem I D, ipsi K B, æqualis.* [i] *Igitur & L H, ipsi M F, æqualis erit: atque idcirco E G, G H, H F, Arithmeticè proportionales erunt, cum excessus habeant æquales. Quod est propositum.*

e 10. sexti. f 19. sexti. g 19. sexti. h 11. quinti. i 14. quinti.

HOC theorema nullo modo conuerti potest. Non enim sequitur, si duæ lineæ secta sint in partes Arithmeticè proportionales, partes vnius habere eadem proportiones, quas partes alterius habent. Nam si lineæ E F, secunda pars statuatur G M, ita vt excessus inter E G, G M, sit L M: Deinde ipsi G M, post M. sumatur portio ipsi G M, æqualis, eiq; adiiciatur idem excessus L M; fient tres partes Arithmeticè proportionales in lineæ E F, & tamen non habent eadem proportiones inter se, quas habent partes lineæ A B: [k] *quippe cum minor sit proportio E G, ad G M, quàm E G, ad G H, hoc est, quàm A C, ad C D.*

k 8. quinti.

INFERTVR hinc aliud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque excessus priorum ad excessum posteriorum, vt priorum vna ad vnam posteriorum.

VT in superiori figura, quoniam erat, vt A C, ad E G, hoc est, vt C I, ad G L, ita C D, ad G H; ostensum est ita quoque esse excessum I D, ad excessum L H, vt C D, ad G H. Itaque si A C, C D, sint duplæ, aut dimidiatæ partes ipsarum E G, G H, erit quoque I D, dupla vel pars dimidiata ipsius L H, &c.

EX his quoque hoc problema absoluemus.

LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmeticè proportionales secare.

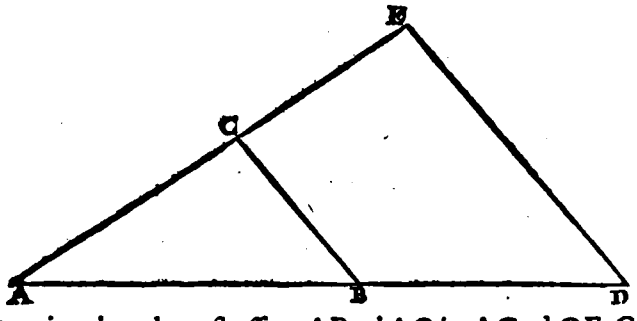
SIT enim recta E F, secanda in tres partes Arithmeticè proportionales. Sumantur tres rectæ A C, C D, D B, quomodocunque Arithmeticè proportionales componentes rectam lineam A B. Si igitur data recta E F, [l] *secetur similiter in G, H, vt A B, in C, D, secta est; erunt partes E G, G H, H F, Arithmeticè proportionales, vt demonstratum est.*

l 10. sexti.

HÆC omnia vera etiam sunt in numeris, & in quibusuis aliis magnitudinibus, cum semper eadem sit demonstratio. Atque ex his desumpsimus in 10. regula proportionalitatis Arithmeticæ postremam rationem distribuendi datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales. Nam per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ eadem habent proportiones, quas assumpti numeri proportionalitatis Arithmeticæ: cum semper fiat vt summa assumptorum numerorum ad datum numerum, ita singuli numeri assumpti ad aliud; Hinc enim fit, numeros assumptos cum partibus dati numeri inuentis eandem habere proportionem. Quare vt hic ostensum est, partes inuentæ sunt Arithmeticè proportionales.

10. # PROBL. 3. PROPOS. 11.

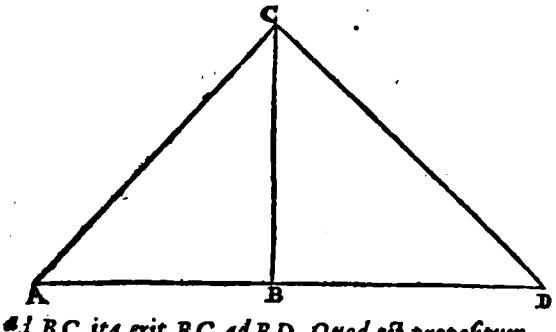
DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.



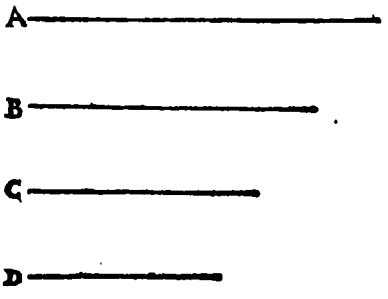
SINT duæ rectæ A B, A C, ita diſpoſitę, vt efficiant angulum A, quemcunque, fitque inuenienda illis tertia proportionalis, ſicut quidem A B, ad A C, ita A C, ad tertiam. Producatur A B, quam volumus eſſe antecedentem, & capiatur B D, æqualis ipſi A C, quæ conſequęs eſſe debet, ſiue media. Deinde ducta recta B C, agatur illi ex D, parallela D E, occurrens ipſi A C, productæ in E. Dico C E, eſſe tertiam proportionalem: hoc eſt, eſſe vt A B, ad A C, ita A C, ad C E. Cùm enim in triangulo A D E, lateri D E, parallela ſit recta B C; [a] erit vt A B, ad B D, ita A C, ad C E: [b] Sed vt A B, ad B D, ita eadem A B, ad A C, æqualem ipſi B D. Vt igitur A B, ad A C, ita A C, ad C E. quod eſt propoſitum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

a 4. ſexti.
b 7. quinti.

SCHOLIVM.

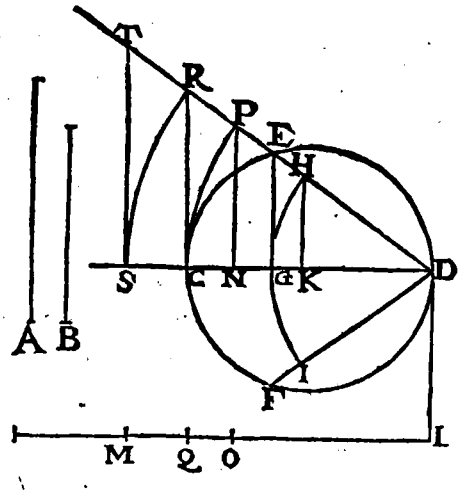


ALITER idem demõſtrabimus, hoc modo: Duæ rectæ datæ A B, B C, conſtituantur ad angulum rectum A B C, & coniungatur recta A C. Producta autem A B, antecedente, ducatur ex C, ad A C. perpendicularis C D, occurrens ipſi A B, productæ in D. Dico B D, eſſe tertiam proportionalem. Cùm enim in triangulo A C D, angulus A C D, ſit rectus, & ab eo ad baſin A D, deducta perpendicularis C B; erit per corollarium propoſitionis 8. huius libri, B C, media proportionalis inter A B, & B D, hoc eſt, vt A B, ad B C, ita erit B C, ad B D. Quod eſt propoſitum.



INVENTA autem tertia linea continuè proportionali, ſi primã omiſeris, & alijs duabus tertiã inueneris, habebis quatuor lineas cõtinuè ꝓportionales. Vt ſi lineis A, & B, adinueniatur tertia ꝓportionalis C, & duabus B & C, tertia ꝓportionalis D, erũt quatuor lineæ A, B, C, D, cõtinuè ꝓportionales. Eadẽ arte reperietur quinta ꝓportionalis, ſexta, ſeptima, octaua, & ſic in infinitũ.

EXPEDITIVS reperiemus quotlibet lineas continuè ꝓportionales in data proportione, hoc modo: Sit primùm data proportio lineæ A, maioris ad minorem B. Circa rectam C D, ipſi A, æqualem deſcribatur circulus C E D E, in quo applicentur D E, D F, ipſi B, æquales. Applicata autẽ regula punctis E, F, ducatur recta E G, quæ ad C D, perpendicularis erit. Cũ enim recta D C, per centrũ tranſiens ſecet arcum E C F, bifariam, (ablatis enim æqualibus arcubus D E, D F, ex ſemicirculis æqualibus D E C, D F C, reliqui arcus C E, C F, æquales erunt.) ſecabit eadem & rectã ductam E F, bifariam, ꝓea, quæ in ſcholio propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus. [a] *Igitur & ad angulos rectos. Et quoniã, ſi duceretur recta E C,* [b] *angulus ad E, in ſemicirculo rectus eſſet; erit ex coroll. propoſ. 8. huius lib. D E, media proportionalis inter C D, D G: ac proinde D G, erit tertia proportionalis ipſis C D, D E, hoc eſt, datis duabus A, & B. Quòd ſi ex D, per G, arcus deſcribatur, ſecans rectam D E, D F, in H, I: applicatáq; regula ad puncta H, I, ducatur recta H K; erit D K, quarta proportionalis. Nã propter angulos H D G, I D G, (qui* [c] *ob æquales arcus E C, F C, æquales ſunt)* [d] *arcus H G, I G, æquales erunt, ac propterea, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. recta ducta H I, bifariam ſecabitur in K;* [e] *ideoq; & ad angulos rectos.* [f] *Parallela ergo ſunt E G, H K.* [g] *Vt igitur recta E D, ad D G, ita erit D H, hoc eſt, D G, ad D K. Sunt ergo quatuor lineæ C D, D E, D G, D K, continuè proportionales. Quòd ſi ex D, per K, alius arcus deſcribatur, ſecans rectas D E, D F, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atq; ita in infinitum.*



a 3. tertij.
b 31. tertij.
c 27. tertij.
d 26. tertij.
e 3. tertij.
f 28. primi.
g 2. vel 4. ſexti.

DEINDE ſit data proportio lineæ B, minoris ad maiorem A. Ductis duabus rectis D C, L M, ad D L, perpendi-

pendicularibus, abſcindantur recta D N, L O, minori B, æquales; applicataq; regula ad puncta O, N, ducatur recta N P. [a] *quæ ad D C, perpendicularis erit,* [b] *cùm ſit parallela ipſi D L. Sumpta deinde recta D C, æquali ipſi A, maiori deſcribatur ex D, per C, arcus ſecans rectam N P, in P, extendaturq; ex D, per P, recta D P T, erit q; D P, ipſi D C, hoc eſt, ipſi A, æqualis. Abſciſſa quoq; L Q, ipſi D C, æquali, applicataq; ad punctum Q, C, regula, ducatur recta C R, quæ eadem ratione ad D C, perpẽdicularis erit, & ipſi N P, parallela.* [c] *Et quoniam eſt, vt N D, ad D P, hoc eſt, vt B, ad A, (quòd N D, D P, ipſis B, A, acceptæ ſint æquales) ita C D, ad D R, hoc eſt, ita D P, ad D R; erunt tres rectæ N D, D P, D R, continuè proportionales: ideoq; D R, ipſis B, A, tertia proportionalis erit. Quòd ſi ex D, per R, arcus deſcribatur ſecans D C, in S, & rectæ D S, æqualis auferatur L M: applicataq; regula ad puncta M, S, recta ducatur S T, erit D T, quarta proportionalis. Nam eadem ratione erit S T, ipſi C R, parallela, & ad D C, perpendicularis.* [d] *Quare erit, vt C D, ad D R, hoc eſt, vt A, ad D R, ita S D, id eſt, D R, ad D T. Sunt ergo quatuor lineæ N D, D P, D R, D T, continuè proportionales. Quòd ſi ex D, per T, alius arcus deſcribatur, ſecans rectam D C, protractam, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.*

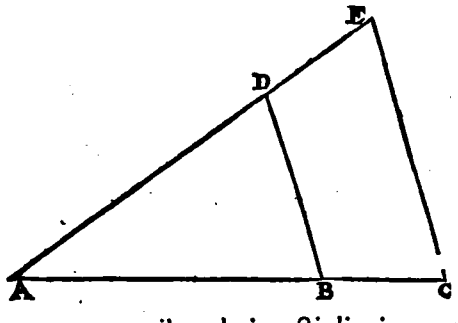
a 29. primi. b 33. primi. c 2. vel 4. ſexti. d 2. vel 4. ſexti.

Ex his ſanè magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, non quidem Geometricè omnino, ſed quaſi attentando, & praxim ipſam iterum atq; iterum repetendo, donec id, quod quærimus, aſſequamur. Vt ſi inter C D, D K, inuenienda ſint duæ mediæ proportionales, deſcripto circa maiorem C D, circulo C E D F, erigemus ex K, ad C D, perpendicularem K H, ducemusq; D H, ea lege, vt ex puncto E, (vbi D H, circunferentiæ occurrit) perpendicularis ad D C, demiſſa E G, auferat rectam D G, rectæ D H, æqualem, hoc eſt, vt arcus ex D, per H, deſcriptus tranſeat per punctum G. Hoc enim facto, erunt D E, D H, inter C D, D K, mediæ proportionales. Nam, vt oſtendimus, eſt vt C D, ad D F, ita D E, ad D G, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. [e] *Et vt D E, ad D G, ita D H, hoc eſt, D G, ad D K. Sunt ergo quatuor rectæ C D, D E, D H, D K, continuè proportionales, ac proinde D E, D H, inter C D, D K, mediæ proportionales ſunt. Quod ſi rectæ D H, D G, comperiantur non eſſe æquales, ſiquidem D H, fuerit minor, eleuanda erit D H, magis: ſi verò maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales D H, D G.*

e 2. vel 4. ſexti.

PROBL. 4. PROPOS. 12. 10.

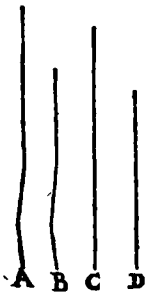
TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.



SINT tres lineæ rectæ A B, B C, A D, quibus inuenienda ſit quarta proportionalis; ſicut quidem A B, ad B C, ita A D, ad quartam. Diſponantur primæ duæ A B, B C, ſecundùm lineam rectam, quæ ſit A C: Tertia verò A D, cũ prima A B, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per C, parallela ducatur C E, occurrens rectæ A D, productæ, in E, puncto. Dico D E, eſſe quartam proportionalem. Cùm enim in triangulo A C E, lateri C E, acta ſit parallela B D; [a] erit vt A B, ad B C, ita A D, ad D E. Quare D E, quarta eſt proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendũ erat.

a 2. ſexti.

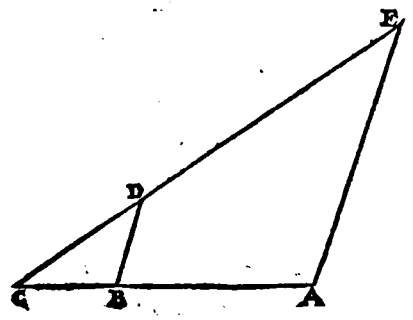
SCHOLIVM.



HINC facilè elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri poſſint. Si enim datæ ſint duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, ſi tertia qualibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, vt ſit quemadmodum A ad B, ita C, ad D, factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur ſex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarũ binæ ſemper eandem habeant proportionem.

OSTENDEMVS etiam cum Pappo ſequens Problema. Videlicet;

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ ſit ad tertiam, vt prima ad ſecundam.



SINT tres rectæ A B, B C, C D, oporteátque inuenire quartam, quæ ad C D, tertiam ſit, vt A B, prima ad B C, ſecundam. Diſponantur primæ duæ A B, B C, in directum, vt faciant rectam A C: Tertia verò C D, cũ ſecunda B C faciat angulum C quemcunq;. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per A parallela ducatur A E, occurrens rectæ C D, productæ in E. Dico E D, eſſe quartam, hoc eſt, eſſe E D, ad D C, tertiam, vt eſt A B, prima ad B C ſecundam. Hoc autem manifeſtum eſt, [a] *cùm A C, E C, proportionaliter ſecentur in B, & D, punctis.*

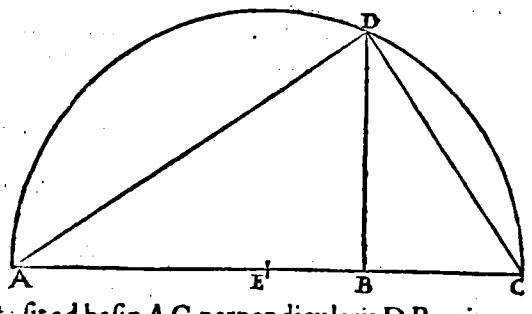
a 2. ſexti.

ALITER. Ex ſecunda C B, fiat prima, & ex prima A B, fiat

a11. sexti. *secunda,* [a] *atque inueniatur tribus C B, B A, C D, quarta proportionalis D E: Vt sit secunda C B, ad primam B A, vt tertia C D, ad quartam D E. Erit enim & conuertendo A B, prima ad B C, secundam vt D E, quarta ad C D, tertiam.*

9. PROBL. 5. PROPOS. 13.

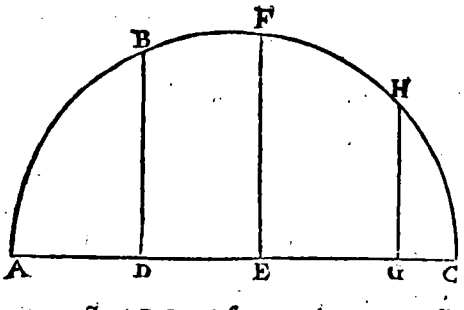
DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.



SINT duæ rectæ A B, B C, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositę secundùm lineam rectam A C. Diuisa A C, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo E A, vel E C, semicirculus describatur A D C: Deinde ex B, ad A C, perpendicularis educatur B D, ad circunferentiam vsque. Dico B D, esse mediam proportionalem inter A B, & B C. Ductis enim rectis A D, C D; [a] erit angulus A D C, rectus in semicirculo. Cùm igitur ex angulo recto A D C, trianguli rectanguli A D C, deducta sit ad basin A C, perpendicularis D B; erit per corollarium propositionis 8. huius lib. B D, media proportionalis inter A B, & B C. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

a31. tertij.

SCHOLIVM.

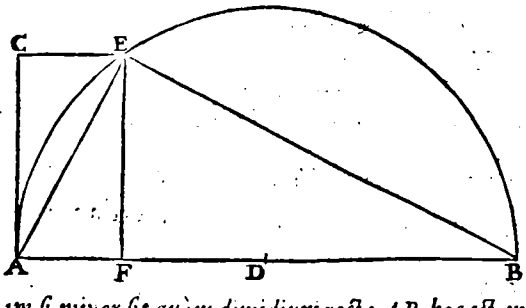


PERSPICVVM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circunferentiam vsque, mediam esse proportionalem inter duo diametri segmenta, quæ à perpendiculari facta sunt. Detur enim semicirculus A B C, & ex puncto D, diametri A C, ducatur ad circunferentiam recta D B, perpendicularis ipsi A C. Dico D B, esse proportionalem mediam inter A D, & D C. Id quod liquidò constat ex demonstratione huius problematis. Si enim ducantur rectæ A B, C B, [a] *fiet angulus A B C, rectus. Quare per corollarium propos. 8. constat propositum. Eadem ratione erit perpendicularis E F, media proportionalis inter A E, & E C. Item G H, inter A G, & G C, atque eodem modo de alijs quibuscunque dicendum est, quæ ex quibusuis punctis diametri ad ipsam diametrum perpendiculares ducentur.*

a31. tertij.

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.



SIT data recta A C, & diuidenda proponatur recta A B, (quæ minor non sit, quàm dupla ipsius A C, sed vel dupla, vel maior) ita vt inter huius segmenta media proportionalis sit A C. Disponantur rectæ A B, A C, ad angulum rectum B A C; & diuisa A B, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem D A, vel D B, semicirculus describatur A E B. Deinde per C, ducatur ipsi A B, parallela C E, secans, vel tangens circunferentiam in E, puncto: (Secabit autem necessariò C E, circunferentiam, vel tanget. Nam si minor sit quàm dimidium rectæ A B, hoc est, minor, quam semidiameter ad angulos rectos erecta ex D, secabit circunferentiam: tanget autem eandem circunferentiam, si æqualis sit dimidio rectæ A B, hoc est, æqualis semidiametro ex D, ad angulos rectos eductæ. Cùm ergo positum sit A C, non esse maiorem dimidio rectæ A B, secabit necessariò A C, circunferentiam, aut tanget.) a quo demittatur ad A B, perpendicularis E F. Dico A C, esse mediam proportionalem inter segmenta A F, F B. Ductis enim rectis A E, B E, erit, vt iam

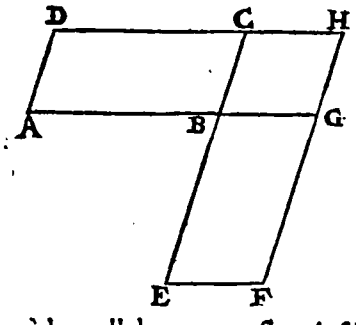
b34. primi. *est demonstratum ex corollario propos. 8. huius libri, E F, media proportionalis inter A F, & F B.* [b] *Cùm igitur E F, æqualis sit ipsi A C, eò quod parallelogrammum sit A C E F: (est enim C E, ipsi A F, parallela per constru-*

c28. primi. *ctionem,* [c] *& A C, ipsi E F, propter angulos rectos C A F, & E F A,) erit & A C, media proportionalis inter A F, & F B. Quod erat propositum.*

THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 14. 13.

AEQVALIVM,& vnum vni æqualem habẽtium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca ſunt latera,quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.

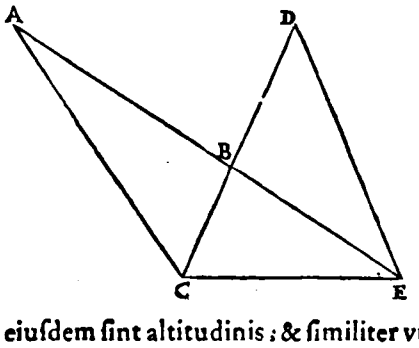


SINT duo parallelogrãma æqualia A B C D, B E F G, habentia angulos A B C, E B G, æquales. Dico latera circum hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe vt A B, ad B G, ita E B, ad B C. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt A B, & B G, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cùm anguli A B C, E B G, ſint æquales, erunt & E B, B C, vna recta linea, vt ad propoſ. 15. lib. 1. ex Proclo demonſtrauimus. Producantur iam D C, & F G, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia ſunt parallelogramma D B, B F: [a] erit vt D B, ad B H, ita B F, ad idem B H: Sed vt D B, ad B H, [b] ita eſt A B, baſis ad baſin B G, quòd parallelogramma ſint eiuſdem altitudinis; & ſimiliter vt B F, ad B H, ita eſt baſis E B, ad baſin B C. Igitur vt A B, ad B G, ita eſt E B, ad B C. Quod eſt propoſitum. *a 7. quinti.* *b 1. ſexti.*

E CONTRARIO, ſint iam latera circa æquales angulos A B C, E B G, reciproca, hoc eſt, vt A B, ad B G, ita E B, ad B C. Dico parallelogramma D B, B F, eſſe æqualia. Facta enim eadem conſtructione, cùm ſit, vt A B, ad B G, ita E B, ad B C: [c] Vt autem A B, ad B G, ita D B, ad B H; & vt E B, ad B C, ita B F, ad idem B H; erit quoque vt D B, ad B H, ita B F, ad idẽm B H; [d] Atque idcircò æqualia erunt parallelogramma D B, B F. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonſtrandum. *c 1. ſexti.* *d 9. quinti.*

THEOR. 10. PROPOS. 15. 14.

AEQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos; illa ſunt æqualia.



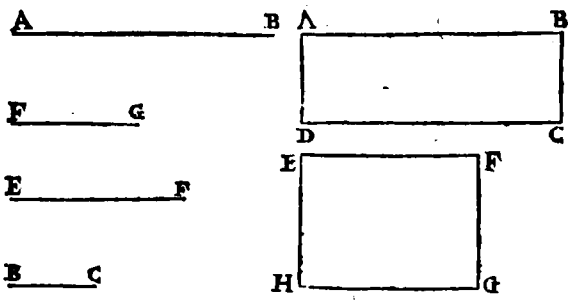
SINT duo triangula æqualia A B C, D B E, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt A B, B E, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cùm anguli A B C, D B E, ſint æquales; erunt & D B, B C, vna recta linea, vt demonſtratum eſt ad propoſ. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta C E; quoniam æqualia ſunt triãgula A B C, D B E; [e] erit vt A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E. Sed vt triangulum A B C, ad triangulum B C E, [f] ita eſt baſis A B, ad baſin B E, quòd hæc triangula eiuſdem ſint altitudinis; & ſimiliter vt D B E, ad B C E, ita eſt baſis D B, ad B C. Quare vt A B, ad B E, ita eſt D B, ad B C. Quod eſt propoſitum. *e 7. quinti.* *f 1. ſexti.*

IAM verò contrà, ſint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc eſt, vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. Dico triangula A B C, D B E, eſſe æqualia. Facta enim conſtructione eadem, cùm ſit vt A B, ad B E, ita D B, ad B C; vt autem A B, ad B E, [g] ita triangulum A B C, ad triangulum B C E; & vt D B, ad B C, ita triangulum D B E, ad triangulum idem B C E: Erit vt A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E; [h] propterea quæ æqualia erunt triangula A B C, D B E. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod oſtendendum erat. *g 1. ſexti.* *h 9. quinti.*

THEOR. 11. PROPOS. 16. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub mediis comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub mediis continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A B, F G, E F, B C; vt quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C: Sitque rectangulum A B C D, comprehenſum ſub extremis A B, B C; rectangulum verò E F G H,

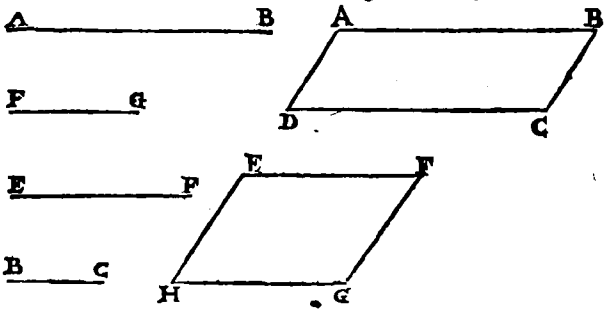


cõprehenſum ſub mediis EF, FG. Dico rectangula AC, EG, eſſe æqualia. Cùm enim anguli recti B, & F, ſint æquales, & ſit vt AB, ad FG, ita EF, ad BC; erũt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. [a] Quare parallelográma AC, EG, æqualia erũt. Quod eſt propoſitũ.

[a] 14. ſexti.

CONTRA verò, ſint iam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, eſſe proportionales; hoc eſt, eſſe vt AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cùm enim æqualia ſint rectangula AC, EG, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & F; [b] erunt latera circa hoſce angulos reciproca; ſicut quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC. Itaque ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

[b] 14. ſexti.

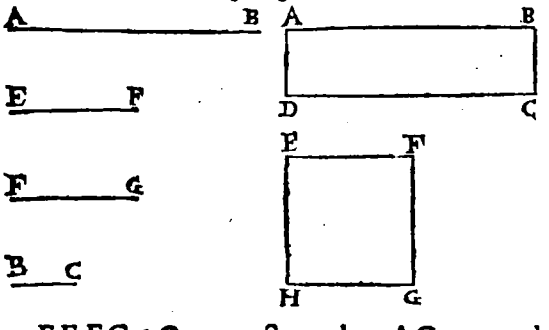


SCHOLIVM.

IDEM verũ eſt, etiamſi parallelogramma AC, EG, non ſint rectangula, dummodò ſint æquiangula, ita vt anguli dictis rectis lineis comprehenſi ſint æquales. Veluti manifeſtum eſt in hac figura. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

16. THEOR. 12. PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ ſint proportionales: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod à media deſcribitur, quadrato. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei, quod à media deſcribitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT tres rectæ lineæ AB, EF, & BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: ſitq; rectangulum ABCD, contentum ſub extremis AB, BC; & quadratũ mediæ EF, ſit EFGH. Dico æqualia eſſe rectangulum AC, & quadratum EG. Sumpta enim recta FG, quæ æqualis ſit ipſi EF, erũt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, comprehẽſum ſub mediis EF, FG, propter æqualitatem rectarum EF, FG. [c] Quare rectangulum AC, comprehenſum ſub extremis AB, BC, æquale eſt quadrato EG, hoc eſt, rectangulo ſub mediis EF, FG, comprehenſo. Quod eſt propoſitum.

[c] 16. ſexti.

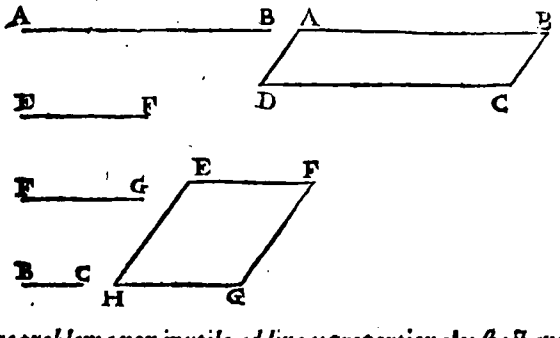
SED ſint iam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico eſſe vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cùm enim æqualia ſint rectangula AC, & EG; [d] erit vt AB, ad EF, ita FG, ad BC: [e] Vt autem FG, ad BC, ita eſt EF, ipſi FG, æqualis, ad eandem BC. Quare vt AB, ad EF, ita eſt EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ ſint proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

[d] 16. ſexti.

[e] 7. quinti.

COROLLARIVM.

Ex poſteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineã eſſe mediam proportionalem inter quaſuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ AB, BC, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ EF, oſtẽſum fuit, eſſe vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media eſt proportionalis inter AB, & BC.



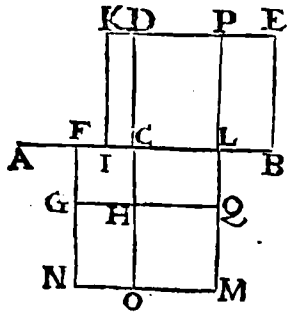
SCHOLIVM.

EADEM omnino conſequuntur, etiamſi parallelogramma nõ ſint rectangula, dummodò ſint æquiangula, ita vt EG, ſit Rhõbus, & AC, Rhomboides. Non enim diſſimilis erit in his demonſtratio, vt figura indicat.

LIBET hoc loco cum Peletario demonſtrare problema non inutile ad lineas proportionales ſpectans; quod eſt eiuſmodi:

SECTA

SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continuè proportionales.



SIT recta A B, diuisa in C, vtcunq; oporteat q; partem C B, ita secare in duas alias partes, vt omnes tres partes continuè proportionales sint. Secetur A C, bifariam in F; & F C, iterũ bifariam in I, vt C I, quarta pars sit primæ partis A C: & ex B, I, erigãtur duæ perpendiculares B E, I K, primæ parti A C, æquales, ducaturq; recta E K, ita vt rectangulum I E, comprehensum sit sub A C, prima parte, & recta I B, cõposita ex altera parte B C, & ex C I, quarta parte primæ partis. Et quoniã A C, diuisa est bifariam in F, eiq; addita in rectum C B, [a] *erit rectangulum sub A B, B C, vnà cum quadrato ex C F, æquale quadrato ex B F. Est aũt rectangulum I E, minus rectangulo sub A B, B C, vnà cũ quadrato ex C F. (Ducta enim C D, ad A B, perpendiculari, erit rectangulum C E, contentũ sub A C, C B, minus rectangulo sub A B, B C: At rectangulum C K, quadrato ex C F, æquale, cùm vtrumq; quarta pars sit quadrati ex A C; rectangulum quidẽ C K,* [b] *quia sic est rectangulum C K, ad quadratũ ex A C, hoc est, ad rectangulum sub A C, C D, vt C I, ad C A: ac proinde cũ C I, sit quarta pars rectæ A C, erit & C K, quarta pars quadrati ex A C: At verò quadratum ex C F, quarta pars est eiusdem quadrati ex A C, ex scholio propos. 4. lib. 2.) Igitur minus quoq; erit quadrato ex B F. Si igitur* [c] *fiat quadratũ rectãgulo I E, æquale, erit eius latus minus recta F B; maius autẽ, q; F C: quippe cùm quadratũ ex F C, æquale sit ostensum rectangulo C K, ac propterea minus rectangulo I E. Sit ergo latus illud F L. Dico partẽ C B, ita sectam esse in L, vt tres partes A C, C L, L B, sint continuè proportionales. Describatur enim ex F L, quadratũ F M, rectaq; D C, extendatur ad O, & latus M L, ad P, sumptisq; duabus F G, L Q, ipsi C F, æqualibus, ducatur recta G Q, secans C O, in H. Eritq; C G, quadratum rectæ C F, ob æqualitatem rectarum C F, F G. Et quia ablatis æqualibus F C, F G, ex æqualibus F L, F N, reliquæ C L, G N, æquales sunt;* [d] *& est C I, ipsi H Q, & G N, ipsi H O, æqualis: æquales quoq; erunt H Q, H O ideoq; H M, quadratũ erit rectæ C L. Rursus quia tam rectangulum C Q, comprehenditur sub C L, & C H, siue C F, si minsse ipsius A C, q; rectangulum G O, sub G N, siue C L, & G H, siue C F, semisse eiusdem A C, siue C D:* [e] *erunt duo rectangula C Q, G O, simul æqualia rectangulo C P, comprehenso sub eadem C L, & C D, quæ ipsis C H, G H, simul æqualis est. Itaq; cùm rectangulum I E, quadrato F M, æquale sit; & rectangulum C K, quadrato C G; & rectangulum C P, duobus rectangulis C Q, G O, simul: erit reliquum rectangulum L E, comprehensum sub B E, siue A C, & B L, reliquo quadrato H M, æquale. Quocirca cũ datis tribus rectis A C, C L, L B, rectangulum L E, sub extremis A C, B L, comprehensum æquale sit quadrato H M, mediæ C L;* [f] *erunt ipsæ tres lineæ A C, C L, L B, continuè proportionales. Quod est propositum.*

a 6. secũdi.
b 1. sexti.
c 14. secundi.
d 34. primi.
e 1. secũdi.
f 17. sexti.

IN numeris idem problema ita perficietur. Posteriori parti numeri propositi adijciatur prioris partis pars quarta, & conflatus numerus in priorẽ partẽ ducatur. Huius deinde producti numeri quadrata radix eruatur. Nam si ex radice inuenta dematur semissis prioris partis, reliqua fiet secunda pars proportionalis, quam si ex posteriori parte dati numeri subtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti si linea A B, ponatur 76. pars autem A C, 36. & C B, 40. adijciemus C I, hoc est, 9. quartã partẽ prioris partis 36. ad C B, id est, ad 40. posteriorẽ partem, & conflatũ numerum 49. lineam scilicet I B, in priorem partẽ 36. siue in lineam A C, ducemus, atque ex producto numero 1764. hoc est, ex rectangulo I E, radicem quadratã eruemus 42. pro linea F L, ex qua si detrahemus C F, semissem partis A C, nimirũ 18. reliqua erit pars C L, 24. Hac ablata ex tota posteriori parte C B, 40. remanebit tertia pars L B, 16. Sunt ergo tres partes A C, C L, L B, numeri A B, 76. hæ tres, 36. 24. 16. continuè proportionales. Ex quo constat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto, problema effici nõ posse in numeris. Atq; hinc intelligentur ea, quæ lib. 5. in tractatione proportionũ prope finem scripsimus, cũ de ortu proportionalitatis Geometricæ ex Arithmetica proportionalitate ageremus. Sed quãdo hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus disputauimus, non alienũ erit à nostro instituto, de eisdem quoq; cũ Pappo Alexandrino differere, qui datis duobus terminis ex tribus cuiuscunq; Medietatis, siue Arithmeticæ, siue Geometricæ, siue Harmonicæ, tertium inquirit: Et in Geometrica proportionalitate aliter, quàm ab Euclide factum est. Hoc autem exequemur sequentibus propositionibus, quarum prima hæc sit.

I. (inuenire.

DATIS duabus rectis lineis, mediã proportionalem in Arithmetica proportionalitate

SINT datæ duæ rectæ A B, & C, (quæ p vnitates in longũ dispositas hic repræsentantur) inter quas media in proportionalitate Arithmetica sit inuenienda. Minori C, ponatur æqualis F H, & ex maiore A B, abscindatur alia æqualis A D. Diuiso autẽ segmento B D, bifariam in E, sumatur ipsi D E, æqualis H G. Dico F G, esse mediã Arithmeticè proportionalẽ inter A B, & C. Excedit enim A B, ipsam F G, excessu B E; & F G, ipsam C, excessu G H, siue D E. Cũ ergo duo excessus B E, D E, sint æquales, ex constructione, liquidò cõstat rectas A B, F G, & C, Arithmeticè proportionales esse.

HINC efficitur mediã lineã F G, esse semissẽ summæ ex extremis conflatæ. Cũ enim tam A D, q; C, ipsi F H, sit æqualis, erit summa ex A D, & C, ipsius F H, dupla. Est autem & D B, ipsius H G, dupla. [g] *Igitur & summa ex A B, & C, totius F G, dupla erit; ac proinde F G, semissis erit summæ extremarum. Quod est propositum.*

g 1. quinti.

II.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datæ duæ rectæ A B, & F G, quibus inuenienda sit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore F G, detrahatur recta G H, excessui B E, quo A B, ipsam F G, superat, æqualis: & ipsi F H, ponatur æqualis C. Dico C, esse tertiam proportionalem minorem. Excedit enim A B, ipsam F G, excessu B E; & F G, ipsam C, excessu G H: qui quidem duo excessus B E, G H, ex constructione æquales sunt.

III.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

SINT in eadem figura, datæ duæ rectæ C, & F G, quibus inuenienda sit tertia maior in Medietate Arithmetica. Sumatur A E, ipsi F G, æqualis, eiq; addatur E B, excessui G H, quo F G, ipsam C, superat, æqualis. Dico A B, esse tertiam proportionalem maiorem; ita vt tres A B, F G, & C, sint proportionales Arithmeticè. Nam A B, excedit ipsam F G, excessu B E; & F G, ipsam C, excessu G H. Cùm ergo duo excessus B E, G H, ex constructione sint æquales patet propositum.

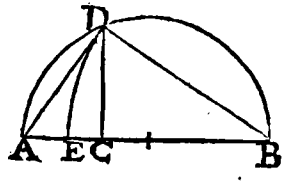
ITAQVE datis duobus numeris inæqualibus 30. 16. si semissis excessus, nimirum 7. minori 16. adjiciatur, constabitur medius proportionalis Arithmeticè, 23. vt hic apparet, 30. 23. 16. Vel medius terminus habebitur, si summæ extremorum semissis sumatur; vt in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum est 46, & eius semissis 23. medium terminum constituit.

SI verò ex minore 16. detrahatur excessus 14. reliquum erit minus extremum 2. in Medietate Arithmetica, vt hic vides, 30. 16. 2.

SI denique maiori 30. adjiciatur excessus 14. conficietur maius extremum 44. in proportionalitate Arithmetica, vt hic patet, 44. 30. 16.

IIII

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.



SINT datæ rectæ A B, B C, eundem terminum B, habentes, inter quas inuenienda sit media Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem A B, semicirculo A D B, excitetur ex C, ad A B, perpendicularis C D; & ex B, per D, arcus describatur secans A B, in E. Dico B E, mediam proportionalem esse inter A B, B C, in proportionalitate Geometrica. Ductis enim rectis A D, B D, [a] *erit angulus A D B, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. recta B D, hoc est, ipsi æqualis B E, media proportionalis erit inter A B, B C. Quod est propositum.*

a 31. tertij.

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire.

SINT in eadem figura, datæ rectæ A B, B E, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem A B, semicirculo A D B, describatur ex B per E, arcus secans circunferetiam A D B, in D, puncto, ex quo ad A B, perpendicularis demittatur D C. Dico B C, tertiam proportionalem esse ipsis A B, B E. Ductis enim rectis A D, B D, [b] *erit angulus A D B, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. erit B D, hoc est, ipsi æqualis B E, media proportionalis inter A B, B C: id est, erit A B, ad B E, vt B E, ad B C. Quod est propositum.*

b 31. tertij.

VI.

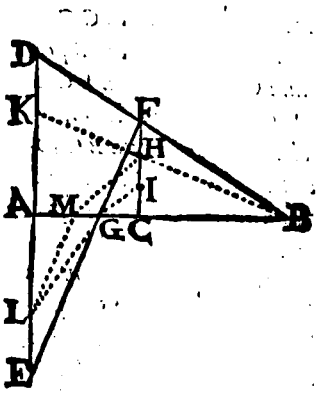
DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datæ rectæ C B, B E, eundem terminũ B, possidentes, quibus inuenienda sit maior tertia Geometricè proportionalis. Ex C. termino minoris excitetur ad E B, perpendicularis C D, quam arcus ex B, per E, descriptus secet in D. Ducta autem recta B D, excitetur ad eam in D, perpendicularis D A, secans B E, productam in A. Dico A B, tertiam proportionalem esse ipsis C B, B E. Quoniam enim angulus A D B, rectus est; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. B D. hoc est, B E, ipsi æqualis, media proportionalis inter B C, & A B: Hoc est, erit C B, ad B E, vt B E, ad A B. Quod est propositum.

VII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT datæ rectæ A B, B C, eundem terminum B, possidentes, inter quas inuenienda sit media Harmonicè proportionalis. Ducta per A, ad A B, perpendiculari D E, ponantur æquales A D, A E, quantacunque. Excitetur quoque ex C, ad A B, perpendicularis C F, secans ductam rectam B D, in F, puncto, ex quo ad E, recta ducatur



catur F E, secans A B, in G. Dico B G, esse mediam Harmonicè proportionalem inter A B, B C: hoc est, esse A E, primam ad tertiam B C, vt A G, excessum inter primam A B, ac mediam B G, ad G C, excessum inter mediam B G, & tertiam B C. Quoniam enim [a] C F, parallela est ipsi D E, ob rectos angulos A, C; erit ex scholio propos. 4. huius libri triangulum B C F, triangulo B A D, simile: hoc est, erit vt A B, ad A D, ita B C, ad C F, & permutando, vt A B, ad B C, ita A D, ad C F: hoc est, ita A E, ad C F. Rursus ob similitudinem triangulorũ A E G, C F G, [b] erit vt A E, ad A G, ita C F, ad C G; & permutando vt A E, ad C F, ita A G, ad G C. Erat autem vt A E, ad C F, ita A B, ad B C. Igitur erit quoque A B, ad B C, prima linea ad tertiam, vt A G, excessus inter primã A B, & mediam B G, ad G C, excessum inter mediam B G, & tertiam B C. Quod est propositum. a 28. primi. b 4. sexti.

Non determinantur autem magnitudines rectarum A D, A E: quia vtcunque sumantur, siue maiores, siue minores, eadem media B G, inuenietur. Sint enim aliæ æquales A K, A L: Ducta autem recta B K, secet perpendicularem C F, in H, iungaturq; recta L H: quam dico per G, transire. Si enim transeat per aliud punctum, vt per M, inter A, & G; ostendemus eodem modo, esse vt A B, ad B C, ita A M, ad M C. Fient enim rursus triangula æquiangula A L M, M H C, si recta est H M L. Est autem vt A B, ad B C, ita A G, ad G C, vt ostensum est. Igitur erit quoq; A M, ad M C, vt A G, ad A C. quod est absurdum. Nam [c] minor est proportio A M, ad G C, quàm A G, ad G C: Sed adhuc minor est proportio A M, ad M C, q̃ ad G C. Multò ergo minor erit proportio A M, ad M C, quàm A G, ad G C. Non ergo ita est A M, ad M C, vt A G, ad G C: ac propterea H L, non secabit A G, in M. Eodem modo non secabit G C. Transit igitur per G: atq; idcirco eadem media B G, inuenietur per rectas A K, A L, æquales. c 8. quinti.

VIII

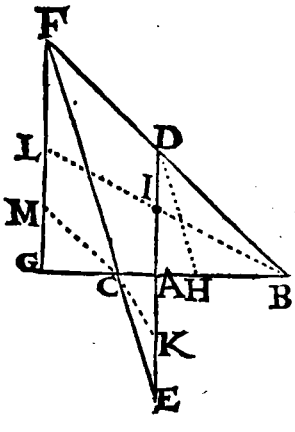
Datis duabus rectis lineis, minorẽ extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.

Sint in eadem figurâ, data recta A B, B G, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Harmonicè proportionalis. Ducta D E, ad A B, perpendiculari ponantur æquales A D, A E, quantacunque: iuncta autem recta B D, ducatur ex F, per G, recta secans B D, in F, puncto, ex quo ad A B, perpendicularis demittatur F C. Dico B C, ipsis A B, B G, esse Harmonicè proportionalem: Hoc est, esse A B, primam ad B C, tertiam, vt A G, excessus inter primam & secundam, ad G C, excessum inter secundam ac tertiam. Quod quidem demonstrabitur, vt in præcedenti propositione.

Non determinantur etiam hic magnitudines rectarum A D, A E: quia vtcunque sumantur, siue maiores, siue minores, eadem tertia B C, reperietur. Sint enim aliæ æquales A K, A L: Ducta autem recta B K, secet perpendicularem C F, in H, iungaturq; recta L G, quam dico cadere in H. Si enim cadat infrà, vt in I, ostendemus eodem modo, esse vt A B, ad B C, ita A K, ad C H: hoc est, ita A L, ad C H. Vt autem A B, ad B C, ita erat A G, ad G C. Erit igitur quoq; vt A G, ad G C, ita A L, ad C H. Et quia si recta linea est L G I, ob similitudinem triangulorũ A L G, C I G, [d] est vt A L, ad A G, ita C I, ad G C, erit permutando, vt A L, ad C I, ita A G, ad G C. Cùm ergo ostensum sit, esse vt A G, ad G C, ita A L, ad C H; erit A L, ad C H, vt ad C I. [e] Æquales sunt igitur C H, C I, totum & pars. quod est absurdum. Non ergo cadet L G, infra H: eodemq; modo ostendemus non cadere supra. Cadit ergo in H, vbi B K, perpendicularem C F, secat; ac proinde ex H, demissa perpendicularis H C, ad A B, exhibebit eandem tertiam minorem B C, proportionalem Harmonicè. d 4. sexti. e 9. quinti.

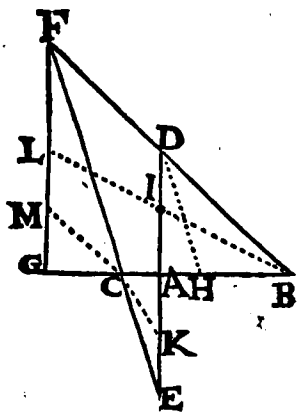
Hinc sequitur, datis tribus rectis Harmonicè proportionalibus, minimam esse maiorẽ excessu, quo media minimã superat. Cùm enim sit, vt A B, ad B C, ita A G, ad G C: sit autẽ A B, prima maior, q̃ A G, excessus inter primã A B, & mediam B G; [f] erit quoq; B C, tertia maior, q̃ G C, excessus inter mediã B G, & minimã B C. f 14. quinti.

IX.



Datis duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.

Sint data recta A B, B C, eundem habentes terminum B, quibus inuenienda sit maior tertia Harmonicè proportionalis. Ducta per A, ad B C, perpendiculari D E, ponantur æquales A D, A E, quantacunque, ducaturq; recta B D, quam productam secet E C, producta in F, puncto, (quòd autem sic inueniant B D, E C, mox demonstrabimus) ex quo ad B C, productam demittatur perpendicularis F G. Dico G B, ipsis C B, B A, Harmonicè proportionalem esse: Hoc est, esse G B, primam ad B A, tertiam, vt G C, excessum inter primam G B, & mediam B C, ad C A, excessum inter mediam C B, & tertiam B A. Quoniam enim G F, ipsi A D, parallela est, ob angulos rectos G, A, erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum B A D, triangulo B G F, simile: id est, erit vt G B, ad G F, ita B A, ad A D, & permutando, vt G B, ad B A, ita G F, ad A D: hoc est, ad A E. Rursus ob similitudinem triangulorum F G C, E A C; g 28. primi. h 4. sexti.



erit vt F G, ad G C, ita E A, ad C A; & permutando vt F G, ad A E, ita G C, ad C A. Erat autem vt F G, ad A E, ita G B, ad B A. Igitur erit quoq; vt G B prima, ad B A, tertiam, ita G C, excessus inter primam G B, & mediam B C, ad C A, excessum inter mediam B C, & tertiam B A. Quod est propositum.

Qvod autem B D, E C, conueniant, sic probabitur. Quoniam B C, ponitur media, & B A, tertia, siue minima, maior erit B A, tertia, quàm C A, excessus, quo media B C, minimam B A, superat, vt ad finem antecedentis problematis ostendimus. Nisi enim maior esset A B, quàm A C, non posset reperiri tertia maior. Cùm ea inuenta semper demonstraretur tertia A B, maior excessu A C, quo media tertiã superat. Abscindatur ergo A H, ipsi A C, æqualis, connectaturq; recta H D. Quoniam igitur latera A E, A C, lateribus A D, A H, æqualia sunt, angulosq; comprehendunt æquales, vtpote rectos, siue ad verticem A; [a] *erunt & anguli A C E, A H D, æquales: qui cùm alterni sint,* [b] *erunt rectæ E C, H D, parallelæ;* [c] *ac proinde anguli interni D H C, H C F, duobus rectis æquales erũt. Cùm ergo* [d] *angulus D H C, maior sit interno angulo B; erũt duo anguli B C F, C B F, duobus rectis minores.* [e] *Quocirca B D, E C, coibũt. Quod est propositũ.*

a 14. primi.
b 27. primi.
c 29. primi.
d 16. primi.
e 13. pron.

Non determinantur quoq; hic magnitudines rectarum A D, A E: quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia B G, reperietur. Sint enim aliæ æquales A I, A K: Ducta autem recta B I, quæ producta secet perpendicularem F G, in L, ducatur K C, quam productam dico cadere in L. Si enim cadat infra, vt in M; ostendemus eodem modo, esse vt G B, ad B A, ita G L, ad A I, id est, ad A K. Vt autem G B, ad B A, ita erat G C, ad C A. Erit igitur, vt G C, ad C A, ita G L, ad A K. Et quia, si recta linea est K C M, ob similitudinem triangulorum G M C, A K C, [f] est vt G M, ad G C, ita K A, ad A C: erit permutando, vt G M, ad K A, ita G C, ad C A. Cùm ergo ostensum sit, esse vt G L, ad A K, ita G C, ad C A; erit quoque G M, ad A K, vt G L, ad A K. [g] Æquales sunt igitur G M, G L, pars & totum. quod est absurdum. Non ergo cadet K C infra L: eadémque ratione neque supra cadet. Cadit ergo in L, vbi B I, producta perpendicularem F C, secat; ac proinde ex L, demissa perpendicularis L G, ad G B, cadet in G, exhibebitq; eandem tertiam G B, maiorem, Harmonicè proportionalem.

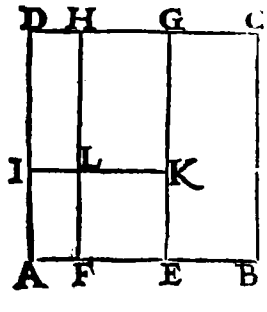
f 4. sexti.
g 9. quinti.

Ex his perspicuum est, quando duo numeri proportionem habent duplam, vel dupla maiorem, illis non posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica, vt in tractatione proportionum in 3. regulã proportionalitatis Harmonicæ diximus. Quia enim ostendimus, B A, minimam lineam esse maiorem excessu A C, quo media B C, minimam A B, superat; erit A B, maior semisse ipsius B C: ac proinde B C, ad A B, media ad minimam, minorem proportionem habebit, quàm duplam. Quòd si B C, ad A B, esset dupla, vel maior, quàm dupla, esset A B, vel æqualis ipsi A C, vel minor. Quare, vt ostensum est, non posset reperiri tertia maior in Harmonica proportionalitate: quia E C, cum B D, non coiret.

Sed demonstremus etiam cum Ioanne Baptista Benedicto, qua ratione ijdem termini proportionalitatis Harmonicæ in numeris reperiantur. Hinc enim patebit ratio quarundam praxiũ, quas in tractatione proportionum in lib. 5. explicauimus. Vtemur autẽ nonnullis propositionibus libri 7. cùm eæ ex lib. 5. & 6. nõ pendeant, atq; idcirco ante hos libros demonstrari possint. Hinc igitur exordium sumemus.

X.

Ex datis quibusuis duobus numeris, tres numeros Harmonicè proportionales, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri, reperire.



Ex qualibet recta A B, describatur quadratum A B C D. Sumptis q; duabus partibus æqualibus B E, E F, in latere A B, ducantur E G, F H, ipsis A D, B C, parallelæ. Item sumpta recta A I, æquali ipsi B E, vel E F, agatur I K, ipsis A B, D C, parallela secans F H, in L. Erit rectangulum A G, contẽtum sub A B, (id est, sub summa rectarum A E, E B: [h] *cùm E G, sit ipsi B C, ideoq; ipsi A B, æqualis) & A E, (maiore scilicet parte summæ A B.) Rectangulum verò E C, continebitur sub A B, (hoc est, sub eadem summa rectarum A E, E B,) & E B, (minore videlicet parte eiusdem summæ A B.) Tam deniq; rectangulum A K, quàm G L, sub partibus A E, E B, comprehendetur; propterea quòd A I, sumpta est ipsi E B, æqualis;* [i] *& H L, L K, ipsis A E, E B, æquales.* [i] *Cùm enim F H, ipsi A D, hoc est, ipsi A B;* [k] *& F L, ipsi A I, hoc est, ipsi E B, sit æqualis: erit reliqua H L, reliquæ A E, æqualis:* [k] *At K L, ipsi E F, siue ipsi E B, æqualis est. Ex quo fit, duo rectangula A K, K H, simul continere duplum eius, quod sub partibus A E, E B, continetur. Dico rectangulum A G; & summam duorum rectangulorum A K, K H; & rectangulum E C, constituere proportionalitatem Harmonicam: hoc est, vt est A G, primum, ad E C, tertium, ita esse I H, excessum inter primũ A G, & secundum H L I A E G, ad A L, excessum inter secundũ H L I A E G, & tertium E C, siue F G,* [l] *quod ipsi E C, æquale est. Nam cùm H L, ipsi A E; & L F, ipsi E B, æqualis sit, vt ostendimus;* [m] *erit A E, ad E B, vt H L, ad L F. Vt autem A E, ad E B,* [n] *ita est A G, ad E C: Et vt H L, ad L F, ita*

h 34. primi.
i 34. primi.
k 34. primi.
l 16. primi.
m 7. quinti.
n 1. sexti.

est

eſt H I, ad A L. Igitur erit quoq; A G, primum ad E C, tertium, vt H I, exceſſus inter primum ac medium, ad A L, exceſſum inter medium ac tertium. Quod eſt propoſitum.

ITAQVE ſi A E, ponatur 6. & E B, 4. erit ſumma A B, 10. quam ſi ducamus in A E, & E B, fiet A G, 60. & E C, 40. Duplum autem eius, quod ſit ex A E, in E B, hoc eſt, H L I A E G, fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonicè proportionales erunt 60. 48. 40. quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri 6. 4. Cum enim eadem ſumma 10. ex 6. & 4. collecta multiplicans vtrunq; 6. 4. produxerit extremos 60. 40. [a] *erit 60. ad 40. vt 6. ad 4. Quod etiam patet ex figura.* [b] *Eſt enim A G, id eſt, 60. ad E C, id eſt, ad 40. vt A E, id eſt, 6. ad E B, id eſt, ad 4.*

a 17. ſeptimi.
b 1. ſexti.

HAC arte, ſi ſumma quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in vtrumq; ſeorſum, gignentur extremi termini proportionalitatis Harmonicè eandem habentes proportionem, quam dati duo numeri: Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorũ duorum numerorũ inter ſe.

ALITER.

INTER datos duos numeros 6. 4. ſtatuatur medius Arithmeticè proportionalis, 5. nimirum ſemiſſis eorum ſummæ, hoc modo. 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignat 30. & 20. inter quos ſtatuatur medius 24. quem extremi inter ſe multiplicati producunt, hoc modo, 30. 24. 20. Dico hos tres eſſe Harmonicè proportionales. Quoniam enim tres numeri 60. 48. 40. qui fiunt ex ſumma 10. datorum numerorum 6. 4. in datos numeros 6. & 4. & ex 4. in 6. bis, dupli ſunt trium numerorum hîc inuẽtorum, quòd hi producti ſint ex ſemiſſe ſummæ datorum numerorum in datos numeros, & ex 4. in 6. ſemel, vt perſpicuũ eſt: erit quoq; tam exceſſus inter 60. & 48. duplus exceſſus inter 30. & 24. quàm exceſſus inter 48. & 40. ipſius exceſſus inter 24. & 20. vt ad propoſ. 10. oſtendimus. Cùm ergo tres numeri 60. 48. 40. ſint Harmonicè proportionales, vt in præcedenti problemate demonſtrauimus; erunt quoq; eorum ſemiſſes, 30. 24. 20. [c] *eaſdem habentes proportiones, Harmonicè proportionales: quandoquidem & exceſſus eandem proportionem habent, quam exceſſus numerorum, 60. 48. 40. quippe cùm exceſſus numerorum 30. 24. 20. ſemiſſes ſint horum numerorum 60. 48. 40. exceſſuum, vt dictum eſt.*

60.	48.	40
30.	24.	20

c 15. quinti.

XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem inuenire.

SINT duo numeri dati A B, 15. & B C, 10. inter quos inueniendus ſit medius proportionalis Harmonicè. Dematur ex maiore A B, 15. numerus B D, minori B C, 10. æqualis, & reliquus numerus A D, 5. nimirum

A...E..D.....B.....C

differentia datorum numerorum, ducatur in minorem B C, 10. productus q; numerus 50. diuiſus per A C, 25. ſummam datorum numerorum, faciat Quotientem D E, 2. qui additus minori B D, 10 faciat B E, 12. Dico B E, eſſe medium proportionalem Harmonicè inter A B, B C, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex A D, in B C, fit, diuiſo per A C, Quotiens eſt D E; producetur idem numerus diuiſus ex D E, Quotiente in diuiſorem A C, vt conſtat ex defin. Diuiſionis. Quia igitur idem numerus fit ex A C, primo, in D E, quartum, qui ex B C, vel B D, ſecundo, in A D, tertium; [d] *erit A C, primus ad B C, ſecundum, vt A D, tertius ad D E, quartum: Et diuidendo, A B, ad B C, primus datus ad tertium datum, vt A E, exceſſus inter primũ A B, & medium inuentum, B E, ad D E, exceſſum inter medium B E, & B D, ſiue tertium B C. Sunt ergo A B, B E, B C, nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod eſt propoſitum.*

d 9. ſ. primi, vel 16. ſexti.

ITAQVE ſi differentia datorum numerorum ducatur in minorem, numerus q; productus diuidatur per datorum numerorum ſummam, ac denig; Quotiens minori adijciatur, conſtabitur medius terminus Harmonica proportionalitatis.

XII.

DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT duo numeri dati A B, 15. & A C, 12. quibus inueniendus eſt minor Harmonicè proportionalis.

A.....E..C...B...D

Addatur B D, æqualis ipſi B C, exceſſui inter datos numeros. Per hanc ſummam A D, 18, collectam ex maiore numero, & differentia datorum numerorum, diuidatur numerus 36. factus ex minore dato A C, in B C, differentiam datorum numerorum; & Quotiens C E, ex minore dato A C, detrahatur. Dico reliquum A E, 10. eſſe terminum tertium minorem quæſitum, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex A C, in B C, fit, diuiſo per A D, Quotiens eſt C E: producetur idem numerus diuiſus ex C E, Quotiente in diuiſorem A D, multiplicato, vt ex Diuiſionis defin. manifeſtum eſt. Quia igitur idem numerus gignitur ex A D, primo, in C E,

A.....E..C...B...D

quartum, qui ex B C, ſecundo in A C, tertium; [e] *erit A D, primus ad B C, ſecundum, hoc eſt, ad B D, vt A C, tertius ad C E, quartum. Et diuidendo, A B, ad B D, hoc eſt, ad B C, vt A E, ad C E: Et permutando, A B, primus datus, ad A E, tertium inuentum, vt B C, exceſſus inter primum A B, & medium A C, ad C E, exceſſum inter*

e 19. ſeptimi vel 16. ſexti.

medium A C,& tertium A E.Sunt igitur tres numeri A B, A C,A E, id eſt,15.12.10. Harmonicè proportionales.Quod eſt propoſitum.

Itaqve ſi per ſummam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex minore numero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus, Quotiens q_3 ex minore dato detrahatur,reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

ALITER.

Sint rurſum dati duo numeri A B,15.& A C, 12. quibus inueniendus ſit minor in Harmonica Medietate.Maiori A B,addatur B D,æqualis differentia B C,3.datorum numerorum:Et per ſummã A D,18.diuidatur

A .....E..C...B...D

numerus 180.ex multiplicatione datorum numerorum A B,A C,hoc eſt, 15. 12. inter ſe procreatus, ſitq; Quotiens A E,10.Dico A E,minorem extremum eſſe in Medietate Harmonica. Quoniã enim numero, qui ex A B, in A C,gignitur,diuiſo per A D,Quotiens ſit A E;producetur idem numerus diuiſus ex A E,Quotiente in diuiſorem A D,multiplicato,vt ex defin. Diuiſionis conſtat. Quiá igitur idem numerus ſit ex A D, primo in A E,

a 19. ſeptimi. vel 16. ſexti.

quartum,qui ex A B,ſecundo in A C,tertium; [a] *erit A D,primus ad A B,ſecundũ,vt A C, tertius ad A E, quartum;ac proinde cum A D,maior ſit,quàm A B, erit quoque A C, maior quàm A E. Quare erit & diuidendo B D,id eſt,B C,ad A B,vt C E,ad A E:Et conuertendo A B,ad B C,vt A E,ad C E: Et permutando A B, primus ad A E,tertium inuentum,vt B C,exceſſus inter primum A B,& medium A C, ad C E, exceſſum inter mediũ A C,& tertium A E.Sunt igitur tres numeri A B,A C,A E,hoc eſt,15.12.10. Harmonicè proportionales. Quod eſt propoſitum.*

Itaqve ſi per ſummam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter ſe procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonicæ Medietatis.

XIII.

DATIS duobus numeris,maiorẽ extremũ in Harmonica proportionalitate inuenire.

Sint dati duo numeri A B,10.& A C, 12.quibus inueniendus ſit tertius maior in Medietate Harmonica.

A .....D..B..C...E

Ex minore A B,detrahatur B D,æqualis differentia B C, 2.datorum numerorum. Et per reliquum numerum A D,8.diuidatur numerus 24.factus ex maiore numero A C,12.in differentiam datorum numerorum B C,2. vel B D.Quotiens autem C E,3.maiori numero A C,12.adiiciatur.Dico ſummam A E, 15. eſſe terminum maiorem in proportionalitate,ſiue Medietate Harmonica,hoc eſt,tres numeros A E, A C, A B,nimirum 15. 12. 10. eſſe Harmonicè proportionales.Quoniam enim numero,qui ex A C,in B D,fit,diuiſo per A D,Quotiẽs fit C E, producetur idem numerus diuiſus ex C E,Quotiente in diuiſorem A D,multiplicato. Quia igitur idem numerus gignitur ex A C, primo in B D,quartum, qui ex C E, ſecundo in A D, tertium;

b 19. ſeptimi vel 16. ſexti.

[b] *erit A C,primus ad C E, ſecundum,vt A D,tertius ad B D,quartum:Et componendo A E,ad C E,vt A B,ad B D,hoc eſt,ad B C:Et permutando A F,primus ad A B,tertium,vt C E,exceſſus inter primum A E, & medium A C, ad exceſſum B C, inter medium A C,& tertium A B.Sunt ergo tres numeri A E,A C,A B,nimirum 15.12.10. Harmonicè proportionales.Quod eſt propoſitum.*

Itaqve datis duobus numeris,ſi eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotiens q_3 maiori numero adiiciatur,conflabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonicæ.

ALITER.

Sint rurſum duo dati numeri A B,10. & A C, 12.quibus inueniendus ſit maior in Harmonica Medietate.Ex minore A B,demptur B D,æqualis exceſſui B C,datorum numerorum:Et per reliquum numerum A D, 8.diuidatur numerus 120.factus ex multiplicatione datorum numerorum A B,10.& A C.12.procreatus, Quotiens q_3 ſit A E,15.Dico A E,eſſe terminũ maiorem in proportionalitate Harmonica. Quoniam enim numero,

A .....D..B..C...E

qui fit ex A B,in A C,diuiſo per A D.Quotiens eſt A E;producetur idem numerus diuiſus ex A E, Quotiente in diuiſorem A D,ex defin. Diuiſionis. Quia igitur idem numerus gignitur ex A B, primo in A C, quartum, qui

c 19. ſeptimi vel 16. ſexti.

ex A D,ſecundo in A E,tertium, [c] *erit A B,primus ad A D,ſecundum,vt A E,tertius ad A C, quartũ; ac proinde cum A B,maior ſit quàm A D,erit & A E,maior quam A C.Et cum ſit,vt A E, ad A C, ita A B, ad A D; erit per conuerſionem rationis A E,ad C E,vt A B,ad B D,hoc eſt,ad B C:Et permutando A E, primus inuentus ad A B,tertium,vt C E,exceſſus inter primum A E,& medium A C, ad B C, exceſſum inter medium A C, & tertium A B.Igitur tres numeri A E,15.A C,12.A B,10.Harmonicè proportionales ſunt.Quod eſt propoſitum.*

Itaqve datis duobus numeris,ſi eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter ſe genitus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonicæ.

Postremo libet quoq; ex Pappo praxes illas demonſtrare, quibus ad finem tractationis proportionum

num ex æqualitatis proportione omnes proportiones rationales, & vicißim ex inæqualitatis proportione qualibet æqualitatem, ac deniq; ex quauis proportionalitate Geometrica & Geometricam, & Arithmeticam, & Harmonicam, oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate Geometrica tam æqualium terminorũ, quàm inæqualium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inæqualium terminorum.

XIIII.

PROPOSITIS tribus terminis Geometricè proportionalibus, siue æqualibus, siue inæqualibus; Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa conflata ex secundo & tertio semel: ac tertius semel, sunt Geometricè proportionales.

A, 1.	B, 1.	C, 1.		A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 4.	E, 2.	F, 1.		D, 27.	E, 9.	F, 3.

SINT tres termini continuè proportionales Geometricè, A, B, C: sitq; D, summa ex A, semel, & B, bis, & C, semel collecta: At E, summa ex B, & C, semel conflata, ac deniq; F, ipsi C, æqualis. Dico D, E, F, Geometricè quoq; proportionales esse. Cùm enim sit A, ad B, vt B, ad C; erit quoq; componendo A, B, simul ad B, vt B C, simul ad C. [a] *Igitur omnes antecedentes simul, nimirum A, B, & B, C, ad omnes consequentes simul, nimirum ad B, C, vt vna antecedens, hoc est, B, C, ad vnam consequentem C. Est autem D, æqualis ipsis A, B, & B, C: Et E ipsis B, C: ac denique F, ipsi C. Igitur erit quoq; D, ad E, vt E, ad F: ac proinde D, E, F, Geometricè sunt proportionales. Quod est propositum.* [a] 12. quinti.

A,	B,	C,
1.	1.	1.
D.	E.	F.
4.	2.	1.

HINC manifestum est, si termini A, B, C, sint æquales; D, E, F, esse duplos. Nam B, C simul dupli erunt ipsius C; ac propterea & E, ipsius F: quòd E, ipsis B, C: & F, ipsi C, sit æqualis. Cùm ergo D, E, F, sint continuè proportionales, ipsi erunt in dupla proportione. Quòd si termini æquales A, B, C, sint vnitates, generabitur dupla proportionalitas D, E, F, in minimis terminis 4. 2. 1. propterea quòd F, æqualis est ipsi C, hoc est, vnitati.

A.	B.	C.
4.	2.	1.
D.	E.	F.
9.	3.	1.

SI verò A, B, C, sint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam si B, ipsius C, duplus est; erit summa ex B, C, collecta, id est, E, ipsius C, hoc est, ipsius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplam habebunt. Atq; eode modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & sic in infinitũ.

A.	B.	C.
1.	2.	4.
D.	E.	F.
9.	6.	4.

AT si termini A, B, C, sint dupli inuerso ordine, erunt D, E, F, geniti, sesquialteri. Nam cùm B, sit semißis ipsius C, erit summa ex B, C, collecta, hoc est, E, ipsius C, siue ipsius F, sesquialtera. Eodem modo si A, B, C, sint conuerso ordine tripli, erunt procreati D, E, F, sesquitertij. Nam B, erit ipsius C, tertia pars. Igitur summa ex B, C, conflata, id est, E, continebit C, siue F, semel & insuper eius partem tertiam: ac propterea D, E, F, habebunt continuam proportionem sesquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inuersis nascentur sesquiquarti, & ex inuersis quintuplis sesquiquinti, atq; ita in infinitum. Non aliter monstrabimus, aliarum proportionum generationes ex alijs proportionibus rectè esse præscriptas in tractatione proportionum. Item rectè quamcunq; proportionem inæqualitatis ad æqualitatem reuocari: quippe cùm in ea reductione retexamus quodammodo operationem, qua inæqualitatis proportionem ex æqualitate gigni tradidimus.

A.	B.	C.
1.	3.	9.
D.	E.	F.
16.	12.	9.

XV.

PROPOSITIS tribus terminis, siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata: ac denique tertius semel, sunt Arithmeticè proportionales.

A, 1.	B, 1.	C, 1.		A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 5.	E, 3.	F, 1.		D, 39.	E, 21.	F, 3.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: sitq; D, summa collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, semel: At E, summa conflata ex A, B, C, semel: Ac denique F, ipsi C, æqualis. Dico D, E, F, esse Arithmeticè proportionales. Quoniam enim summa ex A, bis, & B, bis, & C, semel, hoc est, terminus D, superat summam ex A, B, C, semel, hoc est, terminum E, aggregato ex A, B, semel collecto: Item summa ex A, B, C, hoc est, terminus E, superat terminum C, siue F, eodem aggregato ex A, B, semel collecto; erit idem excessus inter D, & E, qui inter E, & F: ac propterea D, E, F, Arithmeticam proportionalitatem, siue Medietatem constituent. Quod est propositum.

A.	E.	C.
3.	20.	1.
D.	E.	F.
47.	24.	1.

EADEM prorsus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuscunque, etiamsi non sint proportionales: vt in hoc exemplo perspicuum est.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus Geometricè proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel: ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel: & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coaceruata, Harmonicè proportionales sunt.

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 6.	E, 3.	F, 2.	D, 45.	E, 15.	F, 9.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: sitq; D, summa collecta ex A, bis, ex B, ter, & ex C, semel: At E, summa ex B, bis, & C, semel conflata: Ac denique F, summa ex B, semel, & C, semel collecta. Dico D, E, F, constituere proportionalitatem, siue Medietatem Harmonicam. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita B, ad C; erunt ex scholio propos. 22. lib. 5. vt A, bis ad B, ita B, bis ad C. Igitur componendo, vt A, bis, & B,
a 12. quinti. *semel, ad B, ita B, bis, & C, semel ad C.[a] Igitur vt omnes antecedentes simul, nimirum A, bis, & B, ter, & C, semel, hoc est, terminus D, ad omnes consequentes simul, nimirum ad summam ex B, C, id est, ad F, ita vnum antecedens, nimirum A, bis, & B, semel ad B. Est autem A, bis, & B, semel excessus, quo A, bis, & D, ter, & C, semel, superant B, bis, & C, semel; hoc est, excessus inter D, primum terminum, & medium E: At B, excessus, quo B, bis, & C, semel, superant summam ex B, C, hoc est, excessus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit vt D, primus ad F, tertium, ita excessus inter primum & medium, ad excessum inter medium ac tertium: ideoq; D, E, F, Harmonicè proportionales erunt. Quod est propositum.*

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, sunt vnitates; vt in exemplis prolatis manifestum est. Quando autem A, B, C, non sunt vnitates, etiamsi in sua proportione minimi sint, non semper creantur minimi termini D, E, F. Id quod liquidò constat in his exemplis.

A, 9.	B, 6.	C, 4.	A, 1.	B, 4.	C, 16.	A, 9.	B, 12.	C, 16.
D, 40.	E, 16.	F, 10.	D, 30.	E, 24.	F, 20.	D, 70.	E, 40.	F. 28.

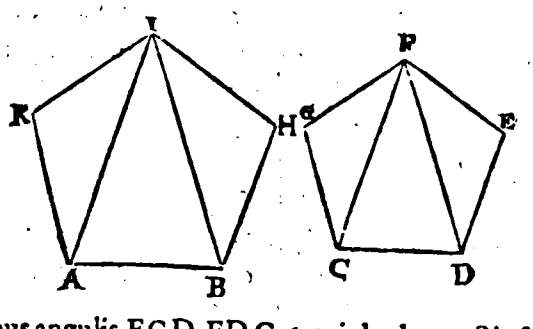
In primo enim exemplo, ex minimis terminis proportionis sesquialterę, & in secundo ex minimis terminis subquadruplę proportionis, & in tertio ex minimis terminis subsesquitertię proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quòd si termini inuertantur, tum demum (quod mirum est) minimi termini Medietatis Harmonicæ procreabuntur, vt hæc exempla demonstrant.

A, 4.	B, 6.	C, 9.	A, 16.	B, 4.	C, 1.	A, 16.	B, 12.	C, 9.
D, 35.	E, 21.	F, 15.	D, 45.	E, 9.	F, 5.	D, 77.	E, 33.	F, 21.

19.

PROBL. 6. PROPOS. 18.

A DATA recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere.



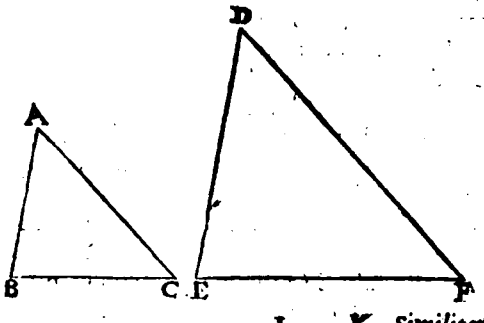
SIT data recta AB, super quâ describendũ sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile simileque positum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad singulos angulos oppositos, rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI, coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quòd duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores sunt, cùm æquales sint duo-
a 17. primi. bus angulis FCD, FDC,[a] qui duobus rectis sunt minores.) [b] eritque reliquo angulo CFD,
b 32. primi. reliquus angulus AIB, æqualis: totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum.
c 17. primi. Rursus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus DIH: Et [c] quia duo anguli EDF, EFD, minores sunt duobus rectis; erunt quoque duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Coeant ergo in puncto H; eritq; eadem ratione triangulũ BHI, triangulo DEF, æquiangulũ. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK;
d 17. primi. & angulo FCG, angulus IAK:[d] Et qa duo anguli GCF, GFC, minores sunt duob⁹ rectis; erũt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atq; idcircò rectę AK, IK, cõueniẽt in aliquo pũcto.

Conueniant

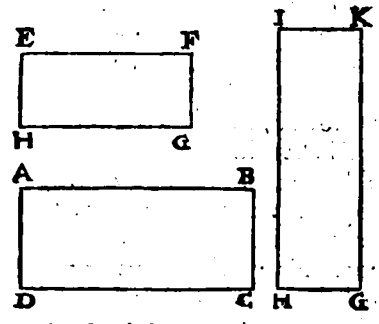
Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoque A K I, triangulo C G F, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G, simile esse, similiterq; positum. Cùm enim angulus I A B, cõstitutus sit æqualis angulo F C D; & angulus I A K, angulo F C G; erit totus angulus B A K, toti angulo D C G, æqualis: Eademque ratione angulus A B H, angulo C D E, æqualis erit: & reliqui reliquis, vt cõstat ex constructione: cũ singulę partes vnius singulis partibus alterius factæ sint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineũ A B H I K, rectilineo C D E F G. Quoniam verò, [a] ita est A B, ad B I, vt C D, ad D F; & ita B I, ad B H, vt D F, ad D E; [b] erit ex æquo ita A B, ad B H, vt C D, ad D E. Quare latera circa æquales angulos A B H, C D E, proportionalia sunt, [c] quẽadmodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula B H I, D E F. [d] Rursus ita est H I, ad I B, vt E F, ad F D; & ita I B, ad I A, vt F D, ad F C; & ita I A, ad I K, vt F C, ad F G. [e] Igitur ex æquo erit ita H I, ad I K, vt E F, ad F G; & ideò latera quoque circa æquales angulos H I K, E F G, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cũ sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterq; descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describimus. Quod faciendum erat.

a 4. sexti
b 22. quinti.
c 4. sexti.
d 4. sexti.
e 22. quinti.

SCHOLIVM.

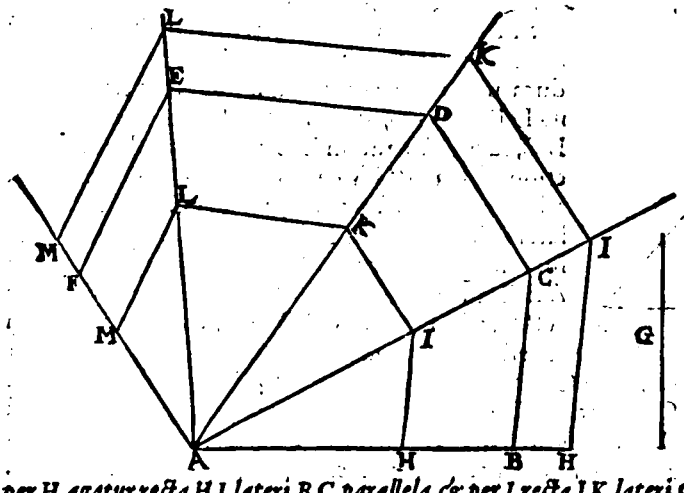


DIVNTVR autẽ rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia, & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli, q̃ latera proportionalia semper ordine sese consequuntur. Vt triangula A B C, D E F, non solùm erũt similia, sed etiam super rectas B C, E F, similiter descripta, si anguli B C, æquales fuerint angulis E, F, & ita sit A B, ad B C, vt D E, ad E F, etc. At supra rectas B C, D E, nõ dicentur similiter esse descripta, (quamq̃ similia sint.) cùm anguli B C, nõ sint æquales angulis D, E.



Similiter rectangula A C, E G, similia, dicentur similiter esse descripta super rectas D C, H G, quoniam vt A D, ad D C, ita est E H, ad H G, &c. At verò rectangula A C, I G, non dicentur similiter descripta super rectas D C, H G, quamuis sint similia, vt manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas D C, I H, vel super rectas A D, H G.

CAETERVM omnes figuræ secundùm constructionẽ huius problematis descriptæ, sunt necessariò similiter positæ, vt patet in rectilineis A B H I K, C D E F G, super lineas A B, & C D, descriptis. Item omnes æquilaterę figuræ, & æquiangulæ, sunt quoque positæ similiter super qualibet earum latera.



FORTASSIS autem expeditius Problema propositum conficiemus ad hunc modum: Sit dato rectilineo A B C D E F, super datam rectam G, vel aliam ei æqualem, describendum simile rectilineum, similiterq; positum. Productis duobus lateribus A B, A F, circa angulum A, educantur ex A, & omnes alios angulos recta A C, A D, A E, quantũlibet. Deinde ex A B, abscindatur A H, æqualis datæ rectæ G, vel certè ex ipsa A B, vlterius producta, si forte G, fuerit maior, quàm A B. Post hæc per H, agatur recta H I, lateri B C, parallela, & per I, recta I K, lateri C D, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera suas habeant parallelas demptis duobus lateribus productis A B, A F: factumq; erit, quod proponitur: hoc est, figura A H I K L M, super rectam A H, datæ rectæ G, æqualem, similis erit, similiterq; posita figuræ propositæ A B C D E F, super rectam A B, constitutæ. Cùm enim angulus H A M, sit cõmunis, & anguli A B C, A F E, [a] æquales sint anguli A H I, A M L: Item anguli A C B, A C D, æquales sint anguli A I H, A I K, hoc est, toti angulo B C D, æqualis sit angulus totus H I K; Eodemq; modo anguli C D E, D E F, æquales sint angulis I K L, K L M: Æquiangula erunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M. Sed & latera circum æquales angulos

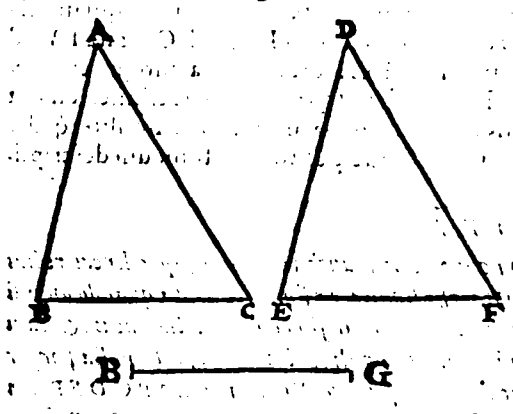
a 29. primi.

habent proportionalia. Cùm enim triangula A H I, A I K, A K L, A L M similia sint, per coroll. propos. 4. huius
a 4. sexti. *libri, triangulis A B C, A C D, A D E, A E F; Erit,* a *vt A B, ad B C, ita A H, ad H I. Rursus, vt B C, ad C A, ita H I, ad I A; Et vt C A, ad C D, ita I A, ad I K: Ac proinde, ex æquo, vt B C, ad C D, ita H I, ad I K, &c. Igitur, ex defin. similia sunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M, atq; adeò similiter posita, per ea, quæ proximè hoc scholio scripsimus.*

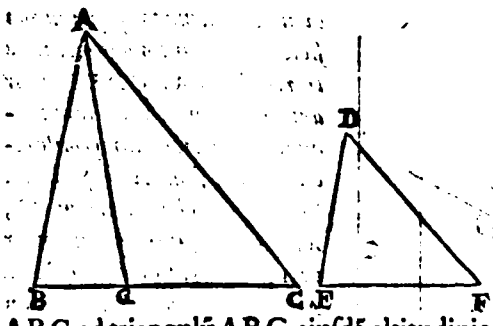
THEOR. 13. PROPOS. 19.

17.

SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.



SINT triangula similia A B C, D E F, habentia angulos æquales B, & E; Item C, & F, &c. Et sit vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, &c. Dico triangula inter se rationem habere duplicatã eius, quam habẽt latera homologa B C, & E F; vel A B, & D E; vel A C, & D F: hoc est, si homologis lateribus B C, E F, inueniatur tertia proportionalis B G; ita esse triangulum A B C, ad triangulum D E F, vt rectã B C, ad rectam B G: ac proinde cũ ex defin. 10. lib. 5. proportio B C, ad B G, dicatur duplicata proportionis B C, ad E F; proportionẽ trianguli ad triangulum dici quoq; duplicatã proportionis laterum homologorum B C, E F. Ita vt nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterq; positas habere proportionẽ duorum laterum homologorũ duplicatam, q̃ ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figurã, vt est prima linea ad tertiam, cũ tres lineæ fuerint continuè proportionales in proportione duorũ laterũ homologorum: quales hîc sunt tres lineæ rectæ B C, E F, B G, continuè proportionales in proportione homologorum laterum B C, E F. Sint ergo primùm latera B C, E F, æqualia, ac proinde & tertia proportionalis B G, illis æqualis: ita vt pportio B C, ad B G, quę duplicata dicitur proportionis lateris B C, ad latus E F, sit proportio æqualitatis.
a 26. primi. Quoniam igitur triangula A B C, D E F, habent quoq; proportionem æqualitatis, a q̃ ipsa inter se æqualia sunt, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatẽ laterũ B C, E F, quibus adiacent: erit triangulum ad triangulum, vt recta B C, ad rectam B G. Cùm ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum B C, E F; dicetur quoque proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, proportionis, quam latus B C, ad latus E F, habet, duplicata. Quod etiã hinc constare potest. Quoniam, vt dictum est, triangula A B C, D E F, æqualia sunt, hoc est, proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa B C, E F: Proportio autem æqualitatis duplicata solùm efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quã habet prima ad secundam, vt constat ex defin. 10. lib. 5. cùm tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam,) habebit triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem duplicatam eius, quam habet latus B C, ad latus E F. Quod est propositum.



b 11. sexti. SIT deinde B C, latus latere E F, maius, & ex B C, b abscindatur rectis B C, E F, tertia proportionalis B G, ducaturq; recta A G. Quia igitur est vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit permutando vt A B, ad D E, ita B C, ad E F. Vt autem B C, ad E F, ita est p̃ constructionẽ E F, ad B G. Vt ergo A B, ad D E, c ita erit E F, ad B G. Quare cùm triangula A B G, D E F, habeãt latera circa angulos B, E, æquales reciproca, d ipsa inter se æqualia erunt, & propterea vt triangulum A B C, ad triangulum D E F, e ita erit triangulum A B C, ad triangulum A B G: Vt autẽ triangulum A B C, ad triangulũ A B G, eiusdẽ altitudinis, f ita est basis B C, ad basin B G. Igitur vt triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita est B C, ad B G. Atqui cùm tres lineæ B C, E F, B G, sint continuè proportionales, proportio primæ B C, ad tertiã B G, duplicata dicitur proportionis B C, primæ ad E F, secundã. Igitur & triangulũ A B C, ad triangulũ D E F, pportionẽ habet duplicatã proportionis lateris B C, ad latus E F. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

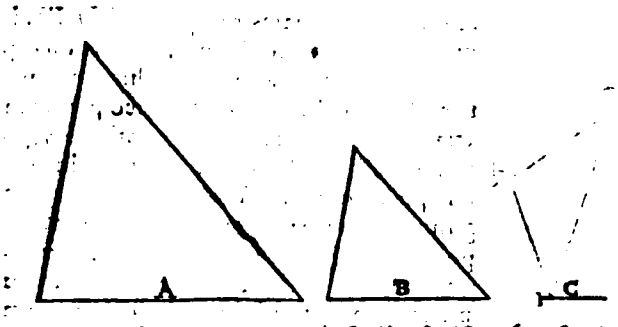
c 11. quinti.
d 15. sexti.
e 7. quinti.
f 1. sexti.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, vt est prima ad tertiã, ita esse triangulũ super primã descriptũ ad triangulũ supra secundã simile similiterq; descriptũ.

SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C; & super primã A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterq; descripta. Dico, vt est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A,

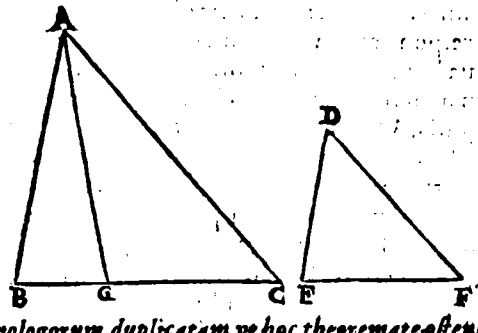
ad



ad rectam B. [a] *Cùm igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoq; proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit vt recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.* a 19. sexti.

Eodem modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulũ supra tertiam simile similiterq; descriptum, vt est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterq; posita B, & A. Dico, vt est recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata, est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectã A. [b] *Cùm igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa; Erit vt C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.* b 19. sexti.

SCHOLIVM

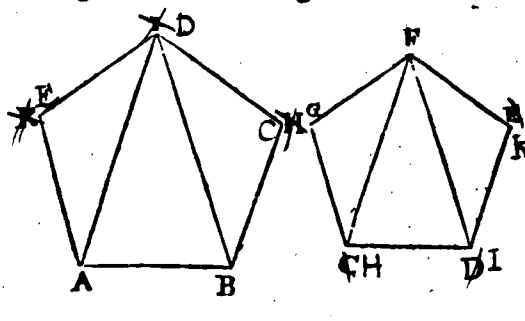


Itaque si proportio lateris BC, ad latus EF, nota sit in numeris, nimirum vt 6. ad 5. cognoscemus quoq; ex hac propos. 19. in numeris, quam proportionem habeat triangulum ABC, ad triangulum DEF. Si enim proportio 6. ad 5. cõtinuetur in tribus numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. hoc est, habebit proportionẽ, cuius denominator est $1\frac{1}{5}$. Quia enim proportio 36. ad 25. est duplicata proportionis 36. ad 30. siue 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem & triangula proportionem laterum homologorum duplicatam, vt hoc theoremate ostensum est; erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. Eandem proportionem triangulorum cognoscemus, si denominatorem proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{5}$. in se multiplicemus. Productus enim numerus $\frac{36}{25}$. id est, $1\frac{11}{25}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata est proportionis laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quòd hæc etiam duplicata sit eiusdem proportionis laterum.

Sic etiam, si latera homologa haberent proportionem, quam 10. ad 1. haberent triangula proportionem, quam 100. ad 1. cùm hæc illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator decuplæ proportionis, id est, 10. in se multiplicatus gignit 100. denominatorem proportionis, quæ decuplæ duplicata est.

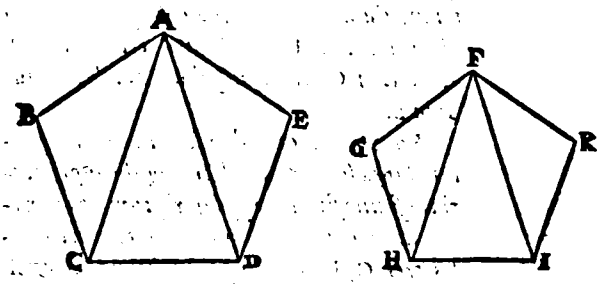
THEOR. 14. PROPOS. 20. 18.

SIMILIA polygono in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia & homologa totis: Et polygona duplicata habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



SINT polygona similia ABCDE, FGHIK, habẽtia angulos æquales BAE, GFK: Item angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primùm, hæc polygona diuidi in triangula similia, quæ sunt numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint AC, AD, FH, FI; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam verò angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; [a] æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habẽtia angulos BAC, GFH, æquales; Item angulos ACB, FHG, lateribus homologis oppositos: [b] Ideoq; latera habebunt circa æquos angulos proportionalia; ac propterea inter se similia erunt: Eadem ratione erunt similia triangula AED, FKI, habentia angulos EAD, KFI, & angulos ADE, FIK, æquales. Deinde [c] quia est vt AC, ad CB, ita FH, ad HG, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; vt autem CB, ad CD, ita est, ex hypothesi, HG, ad HI, ob similitudinem polygonorum: [d] erit ex æquo vt AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI; est autem & ablatus ACB, ostensus æqualis ablato FHG; erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis. [e] Quare triangula ACD, FHI, cùm habeant

a 6. sexti
b 4. sexti.
c 4. sexti.
d 22. quinti.
e 6. sexti.



latera, circa æquales angulos A C D, F H I, proportionalia, æquiangula erunt, ideoq; similia. Eademq; ratio eſt de aliis omnibus triangulis, ſi plura fuerint. Dico præterea triangula hæc eſſe homologa totis polygonis, hoc eſt, ita eſſe quodlibet triangulum in vno polygono, ad ſuũ correſpondens triangulum in altero polygono, vt polygonũ ad polygonũ. Quoniã enim ſimilia ſunt triangula A B C, F G H; [a] erit eorũ proportio duplicata proportionis homologorũ laterum A C, F H. Atq; eodẽ argumento proportio triangulorũ A C D, F H I, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum A C, F H. Quare vt triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita erit triangulum A C D, ad triangulum F H I, cùm vtraque hæc proportio triangulorum ſit duplicata eiuſdem proportionis lateris A C, ad latus F H. Neque diſsimili ratione concludetur quoque eſſe triangulum A D E, ad triangulum F I K, vt A C D, ad F H I: Atq; ita deinceps, ſi plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius ſint antecedentia, & triangula alterius conſequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum conſequens, [b] ita ſunt omnia antecedentia ad omnia conſequẽtia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad ſibi reſpondẽs triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis.

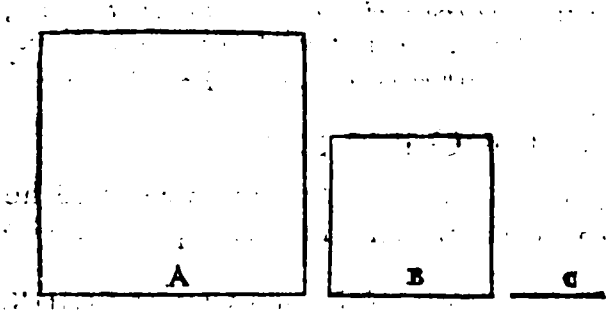
a 19. ſexti.

b 12. quinti.

Dico poſtremò, polygona inter ſe proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa: hoc eſt, ſi homologis lateribus, verbi gratia, A B, F G, inueniatur tertia linea proportionalis, ita eſſe polygonum A B C D E, ad polygonũ F G H I K, vt eſt prima linea A B, ad tertiam inuentam: ac proinde, cùm proportio A B, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis A B, ad F G; dici quoque proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum A B, F G. Cùm enim ſit, vt triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K; Triangulum verò A B C, ad triangulum F G H, [c] habeat proportionem duplicatam eius, quã habent latera homologa A B, F G, hoc eſt, eandem quam habet A B, ad illam tertiam inuentam; habebunt quoque polygona inter ſe proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum A B, F G, hoc eſt, eandem, quam habet A B, ad illam tertiam inuentam. Itaq; ſimilia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, &c. Quod demonſtrandum erat.

c 19. ſexti.

COROLLARIVM.



Hinc manifeſtum eſt, ſi fuerint tres rectæ lineæ proportionales, vt eſt prima ad tertiam, ita eſſe polygonum ſuper primam deſcriptum, ad polygonum ſuper ſecundam ſimile, ſimiliterq; deſcriptũ: Vel ita eſſe polygonum ſuper ſecundam deſcriptum ad polygonum ſuper tertiam ſimile ſimiliterq; deſcriptum.

Hoc nõ aliter demonſtrabitur ex hoc theoremate, quàm oſtenſum fuit corollarium præcedentis theorematis ex ſuo theoremate: Vt perſpicuum eſt in hac figura appoſita.

SCHOLIVM.

Quando polygona ſimilia ſunt pentagona, vt in figura, demonſtrabitur etiam hoc modo triangula media A C D, F H I ſimilia eſſe. Quoniam anguli A C B, F H G, æquales ſunt, ob ſimilitudinem triangulorum A B C, F G H; ſi auferantur ex angulis B C D, G H I, qui æquales etiam ſunt, ob ſimilitudinem polygonorum: æquales erunt & reliqui anguli A C D, F H I. Eademq; ratione æquales oſtendentur anguli A D C, F I H: ac propterea, [a] & reliqui C A D, H F I, æquales erunt. Igitur cùm æquiangula ſint triangula A C D, F H I, [b] habebunt latera circa angulos æquales proportionalia, ac proinde ſimilia erunt.

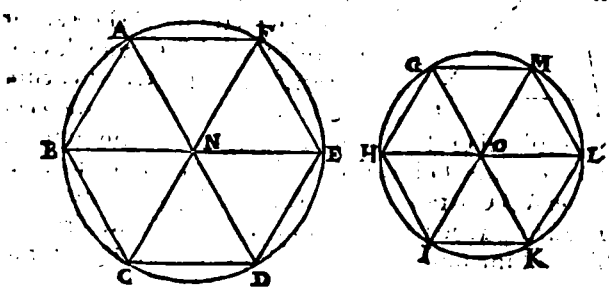
a 32. primi.

b 4. ſexti.

At verò quando polygona habent plures angulos, demonſtrandum eſt, triangula media ſimilia eſſe, ex æqualitate, & propoſ. 6. huius lib. vt in propoſitione factum eſt: quia nõ poſſunt probari anguli æquales, præter vnum, qui videlicet prope præcedens triangulum ſimile exiſtit, qualis eſt angulus A C D & F H I. Nam angulus A D C, oſtendi non poteſt æqualis angulo F I H; & tunc alia adhuc triangula ſuperſint vſq; ad triangula ſimilia A E D, F K I, &c. Hoc ideò dixerim, ne quis exiſtimet, fruſtra in propoſ. nos dixiſſe, ita eſſe A C, ad C B, vt F H, ad H G: Et ita C B, ad C D, vt H G, ad H I; ac proinde ex æqualitate ita A C, ad C D, vt F H, ad H I; ideoq; cùm anguli A C D, F H I, ſint æquales, ſimilia eſſe triangula A C D, F H I. Hæc enim demonſtratio eſt omnino neceſſaria, conuenitq; omnibus polygonis quotcunq; angulorũ, cùm omnia triangula media eo modo

oſtendantur

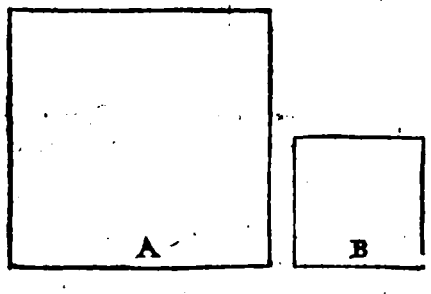
oſtendantur eſſe ſimilia, vt perſpicuum eſt. Nam ſi triangula A D E, F I K, non eſſent vltima, demonſtrarentur ſimiliá hoc modo: Quoniam eſt vt A D, ad D C, ita F I, ad I H, ob ſimilitudinem triangulorum A C D, F H I: Item vt D C, ad D E, ita I H, ad I K, ob ſimilitudinem polygonorũ; erit ex æquo, vt A D, ad D E, ita F I, ad I K. Et quia angulus C D E, æqualis ponitur angulo H I K: Eſt autem & ablatus A D C, oſtenſus ablato F I H, æqualis; erit & reliquus A D E, reliquo F I K, æqualis. [a] *Quare triangula A D E, F I K, ſimilia erunt; cùm habeant latera circa æquales angulos A D E, F I K, proportionalia. Atq; ita deinceps, ſi fuerint plura triangula.* a 6. ſexti.



Vnde ſi polygona ſimilia, fuerint æquilatera & æquiangula, diuidentur quoq; in ſimilia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis è centris circulorũ ipſa circumſcribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona ſimilia, æquilatera, & æquiangula A B C D E F, G H I K L M, quæ circumſcribantur à circulis circa centra N, O, ex quibus rectis ducantur N A, N B, &c. Dico triangula N C D, O I K, ſimilia eſſe, & homologa totis polygonis. Quoniã enim anguli C N D, I O K, æquales ſunt, (quòd æquè ſubmultiplices ſint quatuor rectorum. Nam vtrumq; ſpatium N, & O, quatuor rectis æquiualens, ex corollario 2. propoſit. 15. libri 1. diuiditur in angulos & numero, & magnitudine æquales. Cùm enim anguli in centro N, inſiſtant æqualibus arcubus, [b] *ipſi inter ſe æquales erunt: eademq; ratione anguli in centro O, æquales erunt.) Sunt autem & latera circum ipſos proportionalia, cùm vtrobiq; ſit proportio æqualitatis:* [c] *Similia erunt triangula N C D, O I K. Eademq; eſt ratio de cæteris. At verò hæc triangula eſſe homologa totis polygonis, nullo negotio demonſtrabitur. Cùm enim tota polygona ſint ipſorum triangulorum æquè multiplicia, vt patet;* [d] *habebunt vtique eandem cum ipſis proportionem.* b 27. tertij. c 6. ſexti. d 15. quinti.

Porro ex hoc theoremate perfacilè demonſtrabimus theorema illud, quod iam aliter in ſcholio propoſitionis 4. lib. 2. oſtendimus. Nimirum:

Si linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratũ illius quadruplum erit quadrati huius: Et contrà, ſi quadratũ quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.



Sit primùm recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum eſſe quadrati B. Cùm enim omnia quadrata ſint ſimilia, vt conſtat ex defin. 1. huius lib. erit, per hanc propoſitionem, proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quæ cùm inter ſe proportionem habeant duplam, erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata eſt duplæ proportionis, vt hic apparet, 1. 2. 4.

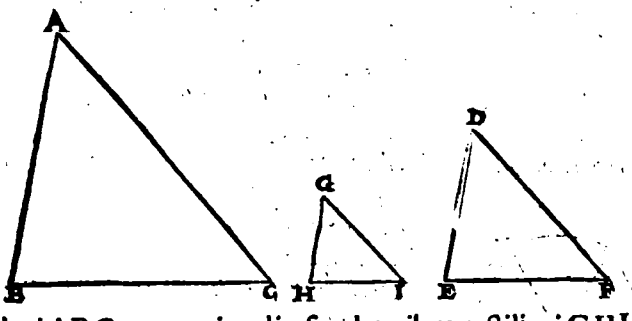
Sit deinde quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum eſſe lateris B. Cùm enim proportio quadratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata ſit proportionis laterum homologorum, vt dictum eſt, habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in exemplo adducto ſuperius apparet.

Iterum ſi proportio lateris A B, ad latus F G, in polygonis, quæ in propoſ. deſcripſimus, nota ſit in numeris, nimirum vt 5. ad 4. cognoſcemus quoq; ex hac propoſ. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. hoc eſt, habebit proportionem, cuius denominator eſt $1\frac{9}{16}$. Quia enim proportio 25. ad 16. eſt duplicata proportionis 25. ad 20. ſiue 5. ad 4. quam homologa latera A B, F G, ponuntur habere; demonſtratumq; eſt hoc theoremate, polygona quoq; habere duplicatam proportionem eius, quã latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. Idem denominator proportionis polygonorum cognoſcetur, ſi denominator proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{4}$. in ſe multiplicetur. Productus enim numerus $2\frac{5}{16}$. id eſt, $1\frac{9}{16}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex iis, quæ in defin. 10. lib. 5. ſcripſimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum; cùm hæc ſit etiam duplicata eiuſdem proportionis laterum homologorum.

Sic etiam, ſi latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam; cùm hæc illius ſit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator 10. proportionis decuplæ in ſe multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centuplæ, quæ decuplæ duplicata dicitur.

THEOR. 15. PROPOS. 21. 20.

QVAE eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.



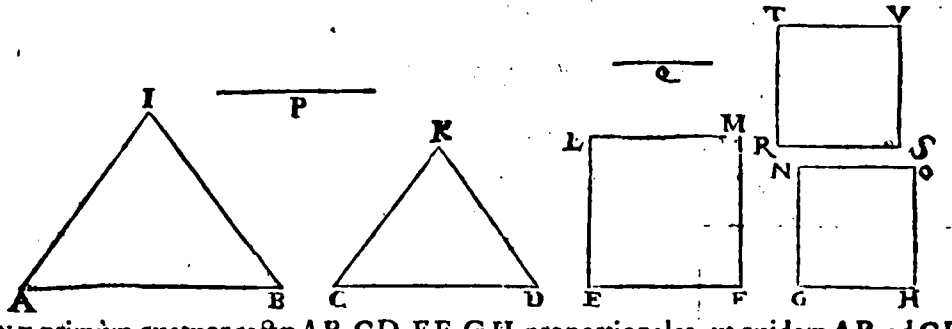
SINT rectilinea A B C, D E F, rectilineo G H I, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cùm enim propter similitudinem, anguli rectilinei A B C, æquales sint angulis rectilinei G H I; Item eadem de causa anguli rectilinei D E F, æquales anguli eiusdem rectilinei G H I: [a] erunt anguli rectilinei A B C, æquales angulis rectilinei D E F. Rursus cùm ob eandem similitudinem, latera rectilinei A B C, proportionalia sint lateribus rectilinei G H I, ea videlicet iis, quæ circum æquales sunt angulos: Item eandem ob causam, latera rectilinei D E F, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei G H I; [b] erunt quoque latera rectilinei A B C, lateribus rectilinei D E F, proportionalia, ea nimirum lis, quæ angulos ambiunt æquales. Atq; adeo per definitionem, similia existét rectilinea A B C, D E F. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

a 1. pron.

b 11. quinti.

21. THEOR. 16. PROPOS. 22.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similitérque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT primùm quatuor rectæ A B, C D, E F, G H, proportionales, vt quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H; Constituanturque super A B, C D, duo quæcunque rectilinea similia similiterq; descripta A B I, C B K; Item super E F, G H, alia duo quæcunque rectilinea similia similiterq; descripta, E F M L, G H O N. Dico, & hæc rectilinea esse proportionalia, vt quidem A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. [c] Inueniatur enim rectis A B, C D, tertia proportionalis P; & rectis E F, G H, tertia proportionalis Q. [d] eritque ex æquo, vt A B, ad P, ita E F, ad Q: Vt autem A B, ad P, ita est rectilineum A B I, ad rectilineum C D K, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius libri. vel si fuerint triangula, ex corollario propositionis 19. Et eadem ratione vt E F, ad Q, ita rectilineum E M, ad rectilineum G O. [e] Igitur vt A B I, ad C D K, ita erit E M, ad G O. Quod est propositum.

c 11. sexti.

d 22. quinti.

e 11. quinti.

DEINDE sint A B I, C D K, E M, G O, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas A B, C D, E F, G H, esse quoque proportionales, vt quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H. [f] Inueniatur enim tribus rectis A B, C D, E F, quarta proportionalis R S, super quá describatur rectilineum R S V T, simile rectilineo E M, similiterque positum; [g] & ob id rectilineo G O. Quoniam igitur est, vt A B, ad C D, ita E F, ad R S; erit quoque, vt iam est ostensum, vt A B I, ad C D K, ita E M, ad R V. Vt autem A B I, ad C D K, ita quoq; ponitur E M, ad G O. [h] Igitur erit vt E M, ad R V, ita E M, ad G O. [i] Atque idcirco æqualia erunt R V, G O. Quæ cùm sint similia similiterque posita, consistent necessariò, vt mox ostendemus, super rectas R S, G H, æquales. [k] Quare erit, vt E F, ad R S, ita E F, ad G H. Ponitur autem E F, ad R S, vt A B, ad C D. [l] Igitur erit quoque vt A B, ad C D, ita E F, ad G H. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

f 12. sexti.

g 21. sexti.

h 11. quinti.

i 9. quinti.

k 7. quinti.

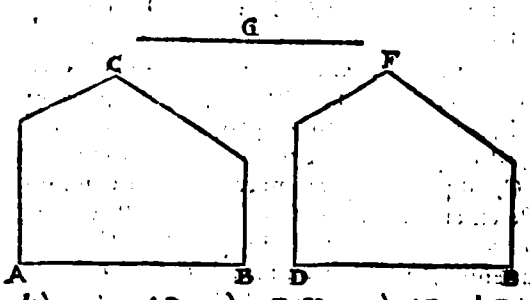
l 11. quinti.

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea similia similiterq; descripta, qualia sunt G O, R V, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt G H, R S; sit G H, maior. Cùm igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit vt G H, ad H O, ita R S, ad S V; Ponatur autem G H, maior quàm R S; [a] erit quoque H O, maior quàm S V; & propterea rectilineum G O, maius rectilineo R V, cùm hoc intra ipsum possit constitui; quod est absurdum, cùm sit contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt rectæ G H, R S. Quod est propositum.

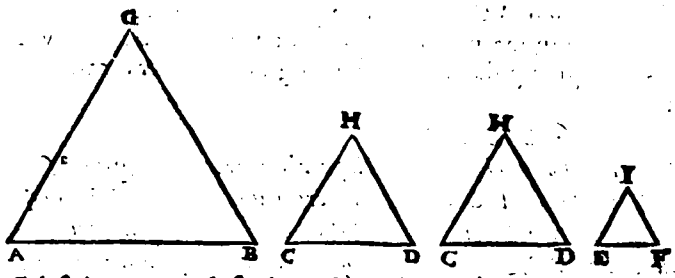
a 14. quinti.

ALITER.

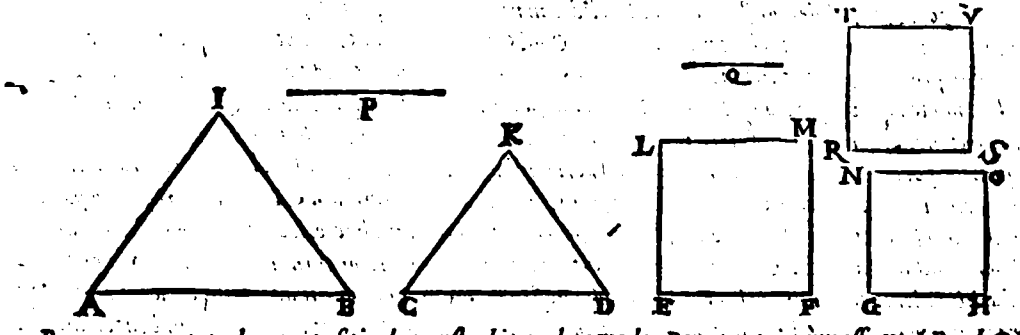


ALITER. Sint duo triangula A B C, D E F, æqualia, & similia similiterq; posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt rectæ A B, D E, esse æqualia. Si enim nõ credantur æqualia, sit A B, maius, quàm D E; inveniaturq; rectis A B, D E, tertia proportionalis G. Quoniã ergo est, vt A B, ad D E, ita D E, ad G; Est autem A B, maior, quàm D E: Erit quoq; D E, maior, quàm G; ac propterea multò maior A B, quàm G. Vt verò A B, ad G, ita est rectilineũ A B C, ad rectilineum D E F, per corollarium propositionis 19. vel 20. huius libri. Igitur cùm A B, maior sit, quàm G; erit quoque rectilineum A B C, maius rectilineo D E F: quod est absurdum, cùm positum sit æquale. Non ergo maior est A B, recta, quàm recta D E. Sed neque minor erit eadem ratione; quia & rectilineum A B C, minus ostenderetur rectilineo D E F: quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ A B, D E.

SCHOLIVM.



EODEN modo, si fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterq; descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusq; rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonstravit. Cùm igitur id, quod à secunda est descriptum, æquale sit ei, quod à tertia, immò idem: manifestum est quod proponitur.



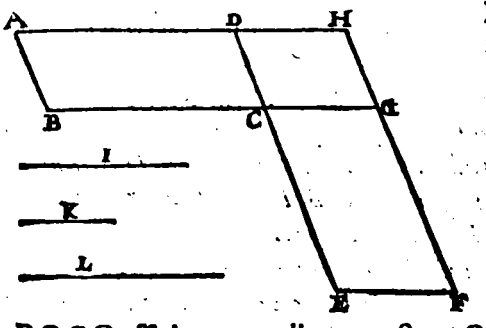
BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur, hoc modo: Ponatur primùm esse vt A B, ad C D, ita E F, ad G H. Dico esse quoq; vt A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. [a] *Cùm enim sit proportio rectilinei A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Item proportio rectilinei E M, ad rectilineum G O, duplicata proportionis E F, ad G H; erunt proportiones A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales; quandoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium A B, ad C D; & E F, ad G H. Quod est primum.* a 19. vel 20. sexti.

PONATVR deinde esse, vt A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Dico esse quoque, vt A B, ad C D, ita E F, ad G H. [b] *Cùm enim sit proportio A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Item proportio E M, ad G O, duplicata proportionis E F, ad G H: Erunt proportiones A B, ad C D; & E F, ad G H, æquales: quandoquidem earum proportiones duplicatæ A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales ponuntur. Quod est secundum.* b 19. vel 20. sexti.

THEOR. 17. PROPOS. 23. 24.

AEQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

SINT parallelogramma æquiangula AC, CE, habẽtia angulos B C D, E C G, æquales. Dico proportionem eorũ esse compositã ex duabus proportionibus, quas habẽt duo latera vnius circa angulum æqualẽ, ad duo latera alterius circa angulũ æqualẽ, ita vt antecedentia proportionũ sint in vno parallelogrãmo, & consequentia in altero; hoc est, proportionẽ AC, parallelogrammi ad parallelogrammum CF, compositam esse ex proportionibus rectæ B C, ad C G, rectam, & rectæ D C, ad rectam C E: Vel etiam ex proportionibus rectæ B C, ad rectam C E, & rectę D C, ad rectã G G:



Id est, si sumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, sit, sicut B C, latus ad latus C G; & K, ad L, vt latus D C, ad latus C E; ita esse parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, vt est recta I, ad rectam L: ac proinde cùm ex definitione 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F, dici compositam esse ex eisdem proportionibus, hoc est, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt B C, C G, efficiant vnam lineam rectam: Quo posito, cùm anguli B C D, E C G, sint æquales, erunt & D C, C E, vna recta linea, vt ad propositionem 15. libri 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur deinde A D, F G, donec conueniant in H; Sumptaque recta I, quacunque, [c] inueniatur tribus B C, C G, & I, quarta proportionalis K: Item tribus D C, C E, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur est, [b] vt B C, ad C G, ita A C, ad C H. Vt autem B C, ad C G, ita posita est I, ad K; [c] erit quoque vt A C, ad C H, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, vt H C, ad C F, ita K, ad L. Nam vt D C, ad C E, [d] ita est H C, ad C F. Cùm ergo posita sit K, ad L, vt D C, ad C E, erit quoque H C, ad C F, vt K, ad L. [e] Ex æquo igitur erit, vt A C, ad C F, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus B C, ad C G; & D C, ad C E. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoq; proportio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F. Eademque ratione ostendemus, proportionem A C, ad C F, componi ex proportionibus B C, ad C E, & D C, ad C G; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt B C, C E, efficiant vnam rectam lineam, &c. Æquiangula itaque parallelogramma inter se rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.

a 12. sexti.
b 1. sexti.
c 11. quinti.
d 1. sexti.
e 22. quinti.

SCHOLIVM.

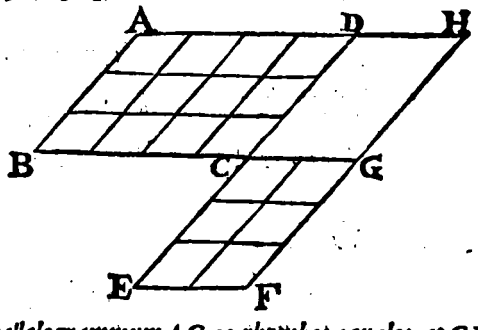
Expeditius idem demonstrabitur, hoc modo: Coniunctis parallelogrammis, vt prius; [a] Cùm sit vt A C, ad C H, ita B C, ad C G: & vt C H, ad C F, ita D C, ad C E; Proportio autem A C, ad C F, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus A C, ad C H, & C H, ad C F; componetur quoque eadem proportio A C, ad C F, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E, quæ illis intermedijs sunt æquales. Quod est propositum.

a 1. sexti.

Hanc porrò propos. demonstrat etiam Euclides in numeris lib. 8. propos. 5.

Itaque si proportiones laterum, nimirũ B C, ad C G, & D C, ad C E, notæ sint in numeris, veniemus quoq; ex hac propos. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F, in numeris, hoc modo: Sit proportio B C, ad C G, eadem, quæ 11 ad 5. & D C, ad C E, eadem quæ 7. ad 11. atque hæ duæ proportiones continuentur in tribus numeris 77. 35. 55. ita vt sit 77. ad 35. sicut 11. ad 5. & 35. ad 55. vt 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55, hoc est, ex proportionibus laterum, erit vt 77. ad 55. ita parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, [b] quod proportio parallelogrammorum sit etiam composita ex eisdem proportionibus laterum: hoc est, proportio parallelogrammorum denominabitur à $1\frac{2}{5}\frac{2}{7}$. Continuabuntur autem duæ datæ proportiones in tribus numeris vel ex ijs, quæ propos. 4. lib. 8. demonstrantur, vel certè hoc modo: Posita priore proportione 11. ad 5. fiat vt 7. ad 11. (quæ est posterior proportio) ita 5. ad aliud, inuenieturq; numerus $7\frac{5}{7}$. Ita ergo stabunt tres numeri habentes duas illas proportiones 11. 5. $7\frac{5}{7}$. Quòd si tertius reuocetur ad hanc vnicam fractionem $\frac{55}{7}$. & alij duo numeri per denominatorem 7. multiplicentur, erunt duo producti numeri 77. 35. & numerator 55. tres numeri integri in eisdem proportionibus.

b 23. sexti.



Sic etiam si proportiones laterum sint, vt 4. ad 2. & 3. ad 3. continuabuntur duæ hæ proportiones in hisce tribus numeris 4. 2. 2. Vel in hisce mininis 2. 1. 1. Et quia primus ad tertium est duplus, erit quoque parallelogrammorum proportio dupla. Id quod ex hac figura perspicuum est. Nam si latus B C, diuidatur in 4. partes æquales, & C G, in 2. At D C, in 3. & C E, in 3. ita vt B C, ad C G, proportionem habeat duplam, at D C, ad C E, proportionem æqualitatis, vt positum est: ducantur autem per puncta diuisionum lateribus parallelæ, continebit parallelogrammum A C, 12. rhombos æquales, at C F, solùm 6. atq; adeò parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, duplam proportionem habebit, vt dictum est.

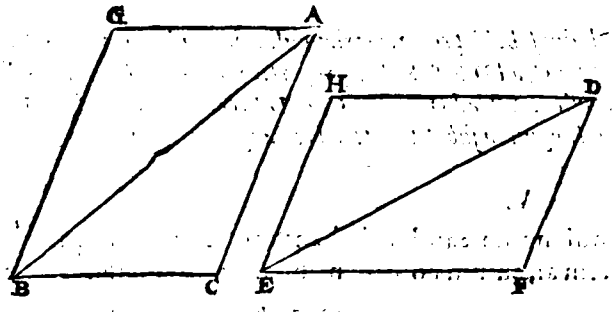
Perspicuum autem est, alteram proportionũ componentium posse esse maiorem proportione composita, & æqualem. In priori enim exemplo proportio lateris B C, ad C G, est vt 11. ad 5. hoc est, cuius denominator est $2\frac{1}{5}$. quæ maior est proportione parallelogrammorum, cùm huius denominator sit $1\frac{2}{5}\frac{2}{7}$. In posteriori verò exemplo proportio lateris B C, ad C G, est dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum.

Vt vel hinc etiam constare possit, hanc proportionum compositionem non esse additionem, vt nonnulli interpretes volunt. Item proportionem maioris inæqualitatis posse componi tum ex proportione minoris inæqualitatis, tum ex æqualitatis proportione; quod idem interpretes negant. In exemplo namque priori proportio lateris D C, ad C E, est minoris inæqualitatis, in posteriori vero, æqualitatis. Sed hæc de re plura scribemus ad finem libri 9.

DEMONSTRAT *hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quæ vel ad compositionem proportionum pertinent, vel ex ea demonstrantur, non inutilia, quæ nos quoq; afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus: Sunt autem ea, quæ sequuntur.*

I.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam.

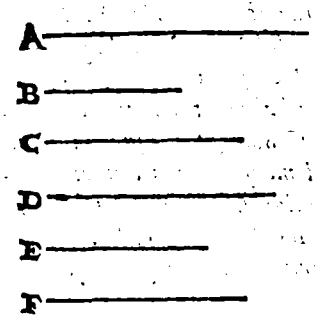


SINT triangula A B C, D E F, angulum C, angulo F, habentia æqualem. Dico proportionem trianguli A B C, ad triangulum D E F, compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportione B C, ad E F, & ex proportione A C, ad D F: Vel ex proportione B C, ad D F, & ex proportione A C, ad E F. Completis enim parallelogrammis C G, F H, erunt ea æquiangula; [a] *atque adeò eorum proportio ex lateribus componetur. Cùm ergo triangula A B C, D E F, cum ipsis,* [b] *quorum sunt dimidia,* [c] *eandem habeant proportionem: Erit quoq; proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, composita ex proportionibus laterum B C, A C, ad latera E F, D F.*

a 23. sexti. b 34. primi. c 15. quinti.

II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.

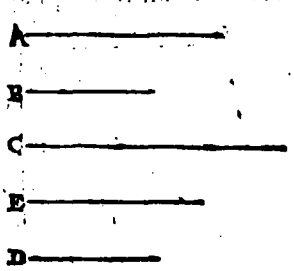


HOC, quo modo fiat, facilè colligitur ex demonstratione huius propos. 23. Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, in lineis exhibitæ. Oportet iam ex ipsis vnam proportionem componere. [d] *Fiat vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita H, ad I; & vt E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cùm enim ea composita sit ex proportionibus G, ad H; H, ad I; & I, ad K, per definitionem 5. huius libri, composita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F; quòd his illæ sumptæ sint æquales.*

d 12. sexti.

III.

PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.



SIT proportio A, ad B, minor auferenda ex proportione maiore C, ad D. [e] *Fiat, vt A, ad B, ita C, ad E; statuaturq; E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam esse proportionem A, ad B, ex proportione C, ad D, reliquamq; esse proportionem E, ad D. Cùm enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D: Si proportio C, ad E, hoc est A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.*

e 12. sexti.

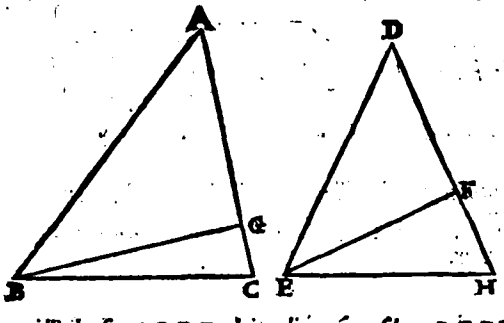
VERVM hac compositio, & detractio proportionum non est additio, & subtractio proprie, quia alias totũ esset æquale parti, & minus, & maior proportio posset detrahi ex minore, vt ad finem lib. 9. ostendemus.

IIII.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

SINT triangula A B C, D E F, angulum A, angulo D, habentia æqualem. Dico esse triangulum A B C, ad triangulum D E F, vt rectangulum sub A B, A C, ad rectangulum sub D E, D F. Ductis enim ad A C, D F, perpendicularibus B G, E H; erunt triangula A B C, D E H, æquiangula, vt constat ex corollario primo, propositionis 32. libri 1. cùm duo anguli A, A G B, duobus angulis D, D H E, sint æquales. [f] *Igitur erit, vt G B, ad B A, ita H E, ad E D: Vt autem G B, ad B A,* [g] *ita est rectangulum sub B G, A C, ad rectangulum sub A B, A C. (Nam si bases ponantur G B, B A, erit eorum eadem altitudo A C.) Et eadem ratione, vt*

f 4. sexti. g 1. sexti.



a 11.quinti. *HE, ad ED, ita est rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF.* [a] *Rectangulum igitur sub BG, AC, ad rectangulum sub AB, AC, est, vt rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF; & permutando, rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Sed vt rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF,* [b] *ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF,* [c] *quòd hæc triangula sint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim easdem cum illis bases AC, DF, altitudines q3 easdem BG, EH: ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta.) Igitur erit quoq3 triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Quod est propositum.*

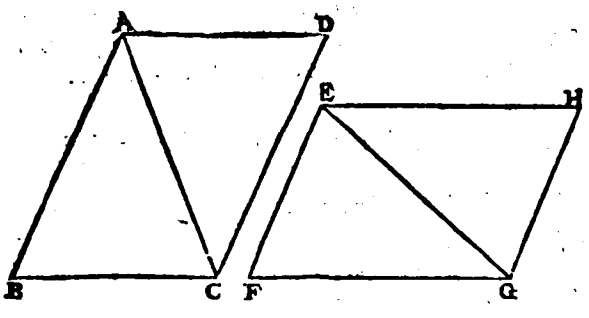
b 15.quinti.
c 41.primi.

ALITER, & facilius. Ex theoremate 1. huius scholij, proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita est ex proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF: [d] *Sed & proportio rectanguli sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF, ex eisdem proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DE, composita est. Igitur erit triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Quod est propositum.*

d 23. sexti.

V.

PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa.

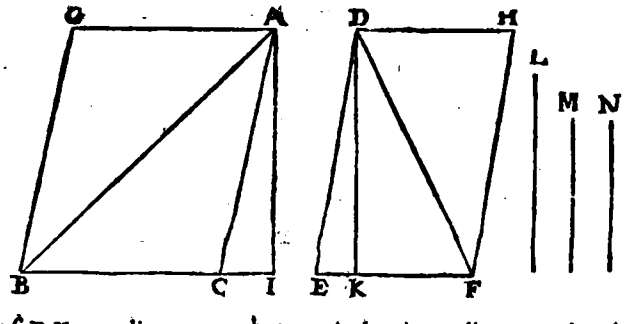


SINT parallelogramma ABCD, EFGH, æquiangula inter se, quorum anguli B, & F, sint æquales. Dico esse, vt parallelogrammum BD, ad parallelogrammum FH, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Ductis enim diametris AC, EG, quæ angulos æquales B, F, subtendant; habebunt triangula ABC, EFG, angulũ B, angulo F, æqualem. Quare, vt iam demonstrauimus, erit, vt triangulum ABC, ad triangulum EFG, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG, [e] *Cùm ergo parallelogramma BD, FH, eandem habeãt proportionem, quam triangula ABC, EFG;* [f] *quòd hæc ipsorum sint dimidia;* [g] *Erit quoq3 vt parallelogrammum BD, ad FH, parallelogrammum, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Quod est propositum.*

e 15 quinti.
f 34.primi.
g 11.quinti.

VI.

TRIANGVLA & parallelogramma inter se proportionem habẽt compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

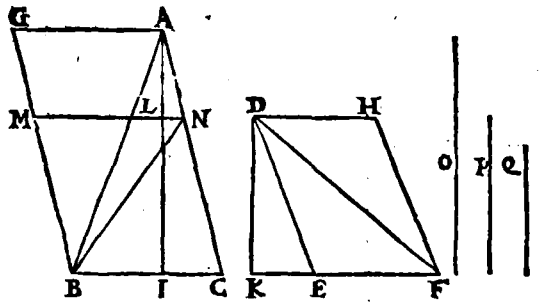


SINT triangula ABC, DEF, & parallelogramma CG, EH, quorum altitudines AI, DK. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis BC, ad basin EF, & proportione altitudinis AI, ad altitudinẽ DK. Sint enim primùm altitudines æquales, bases verò vel æquales etiam, vel inæquales: Fiat q3, vt BC, ad EF, ita L, ad M. Vt aũt AI, ad DK, ita M, ad N. Quo facto erit M, ipsi N, æqualis, q & AI, ipsi DK, æqualis ponatur; [h] *Ac proinde erit L, ad N, vt L ad M, hoc est, vt BC, ad EF.* [i] *At verò vt BC, ad EF, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammũ CG, ad parallelogrammũ EH.* [k] *Igitur quoq3 erit, vt L, ad N, ita triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH: Sed proportio L, ad N, composita est ex proportione L, ad M, hoc est, ex proportione basis BC, ad basin EF, & ex proportione M, ad N, hoc est, altitudinis AI, ad altitudinem DK. Proportio ergo trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH, ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.*

h 7.quinti.
i 11.sexti.
k 11.quinti.

SINT iam altitudines AI, DK, inæquales, & AI, maior, bases verò BC, EF, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, vt AI, ad DK, ita O, ad P; & vt BC, ad EF, ita P, ad Q. Abscissa deinde IL, æquali ipsi DK, ducatur per L, ipsi BC, parallela LM, secans AC, in N, iungaturq3 recta BN. Quoniam igitur est triangulum

ABC, ad



A B C, ad triangulum N B C; & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum C M, vt altitudo A I, ad altitudinem I L, vel ad D K, ipſi I L, æqualem, hoc eſt, vt O ad P per ea, quæ ad 1. propoſitionem huius libri ex Commandino oſtendimus; quòd triangulorum & parallelogrammorum eadem ſit baſis B C: Et vt triangulum N B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum E H, [a] *ita eſt baſis B C, ad baſin E F, (cùm eadem ſit altitudo) hoc eſt, ita P, ad Q:* [b] *erit ex æquo A B C, ad D E F, & C G, ad E H, vt O, ad Q. Quare cùm proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc eſt, ex proportione altitudinis A I, ad altitudinem D K; & ex proportione P, ad Q, hoc eſt, ex proportione baſis B C, ad baſin E F: Ex eiſdem proportionibus cõponetur proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H. Quod eſt propoſitum.*

a 1. ſexti.

b 22. quinti.

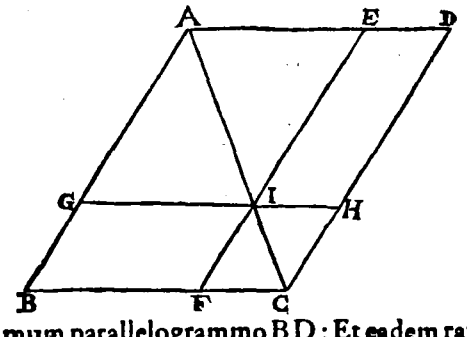
Eodem pacto oſtendetur proportio trianguli D E F, cuius altitudo minor eſt, ad triangulum A B C, & parallelogrammi E H, ad parallelogrammum C G, compoſita eſſe ex proportione baſis E F, ad baſin B C, & proportione altitudinis D K, ad altitudinem A I. Si enim fiat, vt E F, ad B C, ita Q, ad P; & vt D K, ad A I, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius; [c] *erit triangulum D E F, ad triangulum N B C, & parallelogrammum E H ad parallelogrammum C M, vt E F, ad B C, hoc eſt, vt Q, ad P. Item triangulum N B C, ad triangulum A B C, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum C G, vt L I, ſeu D K, ad A I, hoc eſt, vt P, ad O, ex iis, quæ ad propoſ. 1. huius lib. ex Commandino demõſtrauimus.* [d] *Ex æquo igitur erit, vt D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ita Q, ad O. Quocirca cùm proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc eſt, ex proportione baſis E F, ad baſin B C; & ex proportione P, ad O, id eſt, ex proportione altitudinis D K, ad altitudinem A I; componetur etiam proportio D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ex eiſdem proportionibus. Quod eſt propoſitum.*

c 1. ſexti.

d 22. quinti.

PROBL. 18. PROPOS. 24. 22.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt parallelogramma & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.



ESTO parallelogrammum A B C D, in quo ducatur diameter A C, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectæ E F, G H, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma E G, F H, circa diametrum, ſimilia eſſe & toti parallelogrammo, & inter ſeſe. Quòd enim æquiangula ſint toti, facilè oſtendetur. Nam angulus G A E, idem eſt, qui angulus B A D; [a] & angulus externus A E I, æqualis interno A D C; & angulus A G I, externus interno A B C; & angulus E I G, externus interno B F I; & hic externus interno B C D. Quare æquiangulum eſt E G, parallelogrammum parallelogrammo B D: Et eadem ratione eidem B D, æquiangulum erit F H. Quòd autem latera circa æquales angulos habeãt proportionalia lateribus totius, hoc modo demonſtrabimus. Cùm triangulum A G I, æquiangulum ſit triangulo A B C; & triangulum A E I, triangulo A D C, vt perſpicuum eſt ex 29. propoſitione libri 1. vel etiam ex corollario propoſitionis 4. huius libri, [b] erit vt A B, ad B C, ita A G, ad G I; atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia ſunt. Rurſus [c] erit, vt B C, ad C A, ita G I, ad I A; Item vt C A, ad C D, ita I A, ad I E. [d] Ex æquo igitur, vt B C, ad C D, ita eſt G I, ad I E; ac propterea & latera circa æquales angulos B C D, G I E, proportionalia exiſtunt. Non aliter demonſtrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, eſſe proportionalia. Quare per definitionem, ſimile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte oſtendes parallelogrammum F H, ſimile eſſe eidem parallelogrammo B D; [e] atque adeò & ipſa inter ſe ſimilia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, &c. Quod erat oſtendendum.

a 29. primi.

b 4. ſexti.

c 4. ſexti.

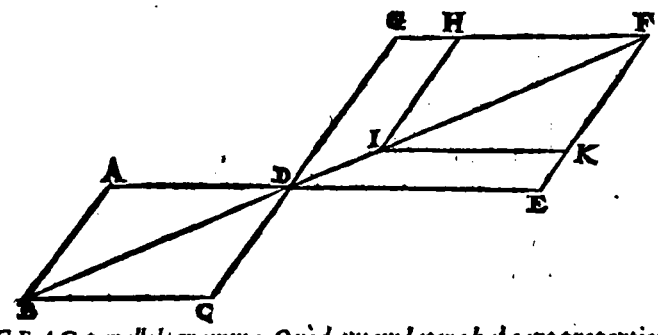
d 22. quinti.

e 21. ſexti.

SCHOLIVM.

INTELLIGENDA autem ſunt parallelogramma circa diametrum totius eſſe talia, quæ habeant vnum angulum cum toto parallelogrammo communem, vt manifeſtum eſt ex forma demonſtrationis.

QVOD ſi circa diametrum alicuius parallelogrammi productam conſiſtat parallelogrammum aliud, ita vt duo huius latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certè illa his ſint parallela, iiſdem ferè medijs oſtendetur hoc illi eſſe ſimile. Parallelogrammi enim A B C D, diameter B D ſit producta ad F, circa quam conſiſtat parallelogrammum D E F G, cuius duo latera D E, D G, rectas lineas efficiant cum A D, D C, lateribus parallelogrammi A C. Dico parallelogrammum G E, ſimile eſſe parallelogrammo



a 29. primi. b 34. primi. c 15. primi. d 34. primi.

AC. Quòd enim ambo inter se sint æquiangula, facilè ostendetur. [a] *Nam quia angulus A, æqualis est angulo alterno AD G; huic autem æqualis quoq; est alternus angulus G; erunt æquales anguli A, & G.* [b] *Quare his oppositi C, & E, æquales quoq; erũt.* [c] *Rursus, quia anguli ADC, GDE, ad verticem, sunt æquales,* [d] *erũt his quoq; oppositi ABC, GFE, æquales. Igitur æquiangula sunt GE, AC, parallelogramma. Quòd autem latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cùm triangulum BAD, æquiangulũ sit triangulo DGF, & triangulũ BCD, triangulo DEF, vt constat ex propos. 29. lib. 1.* [e] *Erit vt BA, ad AD, ita DG, ad GF. Rursus vt AD, ad DB, ita GF, ad FD; & vt DB, ad DC, ita FD, ad FE.* [f] *ac propterea ex æquo vt AD, ad DC, ita GF, ad FE. Sunt igitur latera circa angulos A, ADC, proportionalia lateribus circa angulos G, GFE, & illis æquales sunt. Nõ secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse. Quare similia sunt parallelogrãma AC, GE.*

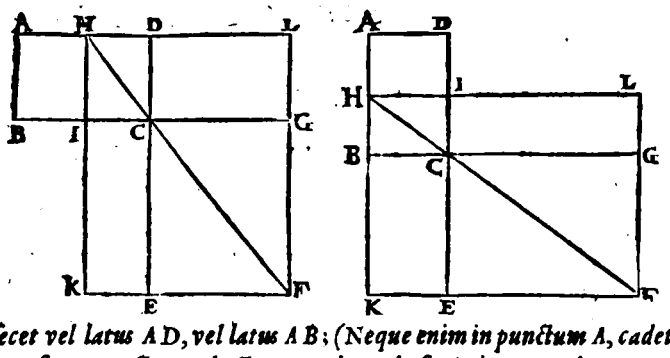
e 4. sexti. f 22. quinti.

QVOD si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum HIKF, habens latera parallela lateribus parallelogrammi AC, idem demonstrabitur. Nam productis AD, CD, donec occurrant rectis FK, FH, productis in E, & G; erit HK, simile ipsi GE, [g] *& vt Euclides demonstrauit: Atqui eadem GE, simile est quoque AC, vt nunc ostendimus.* [h] *Igitur & HK, AC, inter se similia sunt. Quod est propositum.*

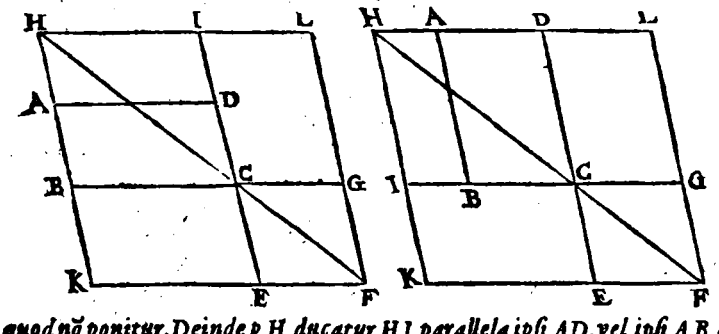
g 34. sexti h 21. sexti.

SED & absoluemus cum Peletario sequens problema.

DATIS duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare.

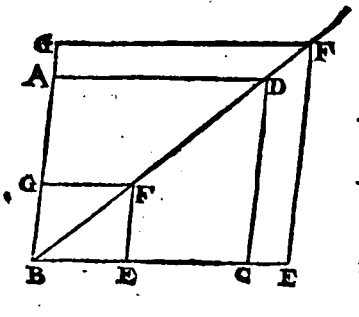


DVO parallelogramma æquiangula, sed non similia, sint ABCD, CEFG; & ex ABCD, abscindendum sit parallelogrammum ipsi CEFG, simile. Coniungantur ambo ad angulos æquales BCD, ECG, ita vt sit vna linea recta BCG, & propterea, vt ad propos. 15. lib. 1. demonstratũ est, ECD, quoque vna recta linea. Deinde ducta diameter FC, producatur, donec in H, secet vel latus AD, vel latus AB; (Neque enim in punctum A, cadet: quia AC, esset simile ipsi CF, vt demonstratum est, quod est contra hypothesim) & per H, ducatur HI, parallela ipsi AB, vel ipsi AD. Dico parallelogrammum abscissum HC, simile esse ipsi CF. Si enim totum parallelogrammum KL, compleatur, erunt HC, CF, circa diametrum. Quare inter se similia erũt, vt Euclides demonstrauit in hac propositione.



EADEM autem arte ferè alterutrum ipsorum augeri poterit, vt fiat simile alteri. Sit enim augendum ABCD, vt fiat ipsi CEFG simile. Coniungãtur vti prius, & diameter FC, extẽdatur, donec in I, secet vel latus BA, protractũ, vel latus DA, protractũ. Neq; enim in punctũ A, cadet: quia AC, esset ipsi CF simile, vt demonstratũ est, quod nõ ponitur. Deinde [p] *H, ducatur HI, parallela ipsi AD, vel ipsi AB, donec secet vel latus CD, protractũ, vel CB, protractum in I. Dico parallelogrammum auctum HC, simile esse parallelogrammo CF. Nam si compleatur totum parallelogrammum KL, consistent HC, CF, circa diametrum.* [i] *Quare similia inter se erunt.*

i 24. sexti.



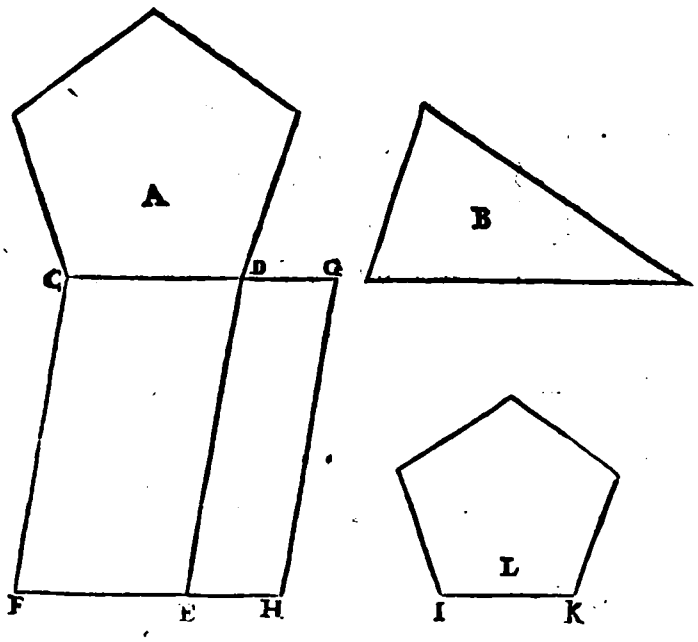
k 24. sexti.

PERSPICVVM autem est, ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis à nobis propositi in hoc scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solùm esse similia, verùm etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo ABCD, si maius debeat describi illi simile similitérque positum, producendum erit latus vnum, nempe BC; Atque ex E, quolibet puncto vltra C, ipsi CD, parallela EF, ducenda, secans diametrum BD, productam in F; & per F, ducenda FG, parallela ipsi AD, occurrens rectæ BA, productæ in G. [k] *Erit enim parallelogrammum GF, simile similiterq;*

similiterq; positum ipsi AC, & maius eodem. Quòd si minus debeat describi, sumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, vt prius, vt figura indicat.

PROBL. 7. PROPOS. 25. 25.

DATO rectilineo simile, similiterque positum; & alteri dato æquale idem constituere.

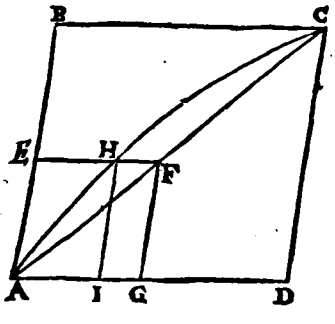


SINT data duo rectilinea A, & B; sitque constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale verò ipsi B. Super CD, vnum latus rectilinei, cui simile debet constitui, [a] constituatur parallelogrammum CE, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam DE, in angulo EDG, qui æqualis sit angulo DCF, parallelogrammum DH, æquale ipsi B; eritq; tam CDG, quàm FEH, linea vna recta, vt demonstratum est propositione 45. libri 1. [b] Inueniatur iam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK; [c] super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterque positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B. Cùm enim sint proportionales tres rectæ CD, IK, DG; erit per corollarium propositionis 19. vel 20. huius libri, vt CD, prima ad DG, tertiam, ita A, rectilineum super primam CD, ad rectilineum L, super IK, secundam simile similiterque descriptum: [d] Vt autem CD, ad DG, ita est parallelogrammum CE, ad parallelogrammum DH, eiusdem altitudinis. [e] Igitur erit vt CE, ad DH, ita A, ad L. [f] Vt autem CE, ad DH, ita est A, ad B: propterea quòd parallelogrammum GE, rectilineo A; & parallelogrammum DH, rectilineo B, constructum est æquale. [g] Quare erit, vt A, ad B, ita A, ad L; [h] propterea quæ æqualia erunt rectilinea B, & L. Est autem & L, simile ipsi A, similiterque positum, per constructionem. Dato igitur rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

a 44. *vel* 45 *primi.*
b 13. *sexti.*
c 18. *sexti.*
d 1. *sexti.*
e 11. *quinti.*
f 7. *quinti.*
g 11. *quinti.*
h 9. *quinti.*

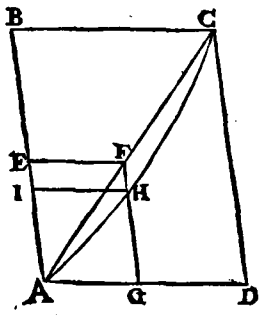
THEOR. 19. PROPOS. 26. 23.

SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.



EX parallelogrammo BD, abscissum sit parallelogrammum EG, simile ei, similiterque positum, habens cum ipso angulum communem EAG. Dico EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ si fuerint vna linea recta, perspicuum est, cum AF, sit diameter ipsius EG, & AC, diameter ipsius BD, parallelogrammum EG, consistere circa diametrum AFC, totius parallelogrammi. Quòd si AF, CF, non dicantur efficere lineam rectam; ducatur totius parallelogrammi diameter, AC, secans latus EF, in H, puncto, per quod ipsi FG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD, EI, sunt circa eandem diametrum AHC; [i] ipsa erunt similia, similiterque posita. [k] Quare erit vt BA, ad AD, ita EA, ad AI: Sed vt BA, ad AD, ita quoque est EA, ad AG; quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam similia, similiterque posita. [l] Igitur erit vt EA, ad AI, ita EA, ad AG. [m] Ac propterea æquales erunt rectæ AI, AG; pars & totum. Quod est absurdum.

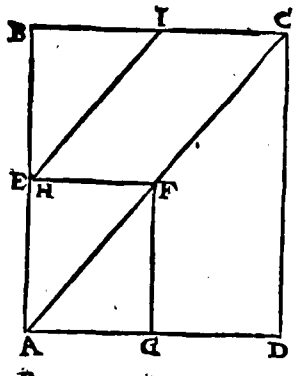
i 24. *sexti.*
k 1. *definit. sexti.*
l 11. *quinti.*
m 9. *quinti.*



a 24. sexti.
b 1. definit. sexti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.

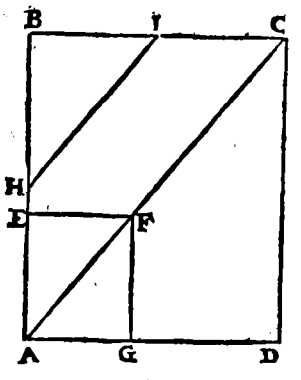
QVOD si dicatur, recta A H C, secare alterum latus F G; Tunc ducta H I, parallela ipsi E F; [a] erũt rursus similia parallelogramma B D, I G, similiterque posita. [b] Quare erit, vt D A, ad A B, ita G A, ad A I: Sed vt D A, ad A B, ita quoque est G A, ad A E, ob similitudinem parallelogrammorum B D, E G. [c] Igitur erit vt G A, ad A I, ita G A, ad A E; [d] ideoque æquales erunt rectæ A I, A E; pars & totum. Quod est absurdum. Constituũt ergo rectæ A F, F C, vnam rectam lineam; hoc est, ducta diameter A C, transit per punctum F; & ducta diameter A F, cadit in punctum C. Itaque si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

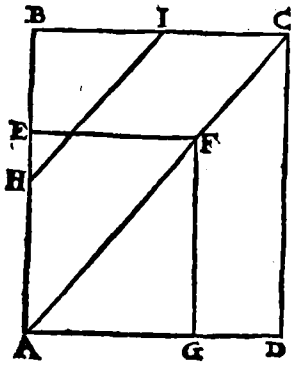
SCHOLIVM.

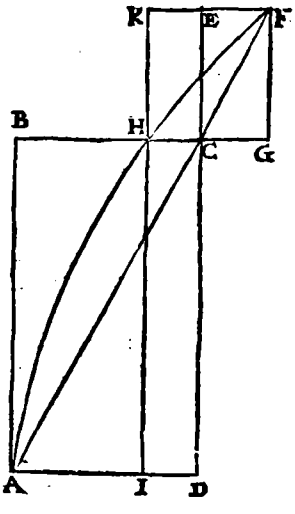


a 15. quinti.
b 11. quinti.
c 30. primi.
d 6. sexti.
e 28. primi.
f 2. sexti.

ALITER idem theorema demonstrabimus ostensiuè hoc modo: Diuisis lateribus A B, B C, bifariam in punctis H, I, siue punctum H, cadat in punctum E, siue suprà, siue infrà; ducantur rectæ H I, A F. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est vt A B, ad B C, ita A E, ad E F; Vt autem tota A B, ad totam B C; [a] ita est dimidia H B, ad dimidiam B I; [b] erit vt H B, ad B I, ita A E, ad E F. Triangula igitur H B I, A E F, cùm habeãt circa angulos B, E, (qui æquales sunt, ob similitudinẽ parallelogrammorum B D, E G: Vel quia vnus est internus, & alter externus in parallelis B C, E F; [c] quæ parallelæ sunt, cùm vtraq; parallela sit ipsi A D.) latera proportionalia, [d] erũt æquiangula, habebuntq; æquales angulos B H I, E A F, externum, & internum inter rectas H I, A F. [e] Quare parallelæ erunt rectæ H I, A F. Quoniam verò recta, quæ ex puncto A, ad punctum C, duci concipitur, [f] parallela quoque est rectæ H I; propterea quòd latera A B, B C, trianguli tunc constituti A B C, proportionaliter essent secta in H, & I, vtpote bifariam; efficitur, vt ducta recta A C, eadem fiat, quæ A F, transeatq; per punctum F; cùm ex puncto A, solùm vna linea parallela rectæ H I, posset duci, vt manifestum est. Consistunt ergo B D, E G, parallelogramma similia, similiterq; posita circa eandem diametrum A F C. Quod est propositum.





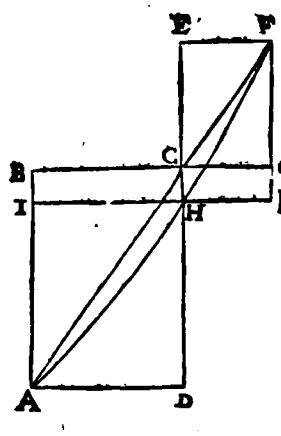


QVOD si duo parallelogramma similia similiterq; posita non habeant angulum communem, sed vnum sit extra aliud, hac tamen lege, vt ita sint connexa inter se secundùm duos eorum angulos æquales, vt duo latera vnius cũ duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus ijsdem ferè medijs, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia, similiterq; posita B D, E G, quæ ad angulos æquales B C D, G C E, ita coniungantur, vt lineæ B C, C G, in directum iaceant, et ob id. per ea, quæ ad propositionem 15. lib. 1. ostendimus, lineæ D C, C E, vnam quoque lineam rectam componant. Dico parallelogrãma B D, E G, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum A C, cũ diametro F C, vnam rectam lineam conficere. Si enim A C, F C non faciunt vnam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta secans B C, in H, puncto, per quod agatur H I, parallela ipsi C D, occurrens rectæ F F, productæ in K. Quoniam igitur parallelogramma B I, K G, circa eandem diametrum A H F, producta consistunt, efficiuntq; duæ rectæ B H, H I, cum duabus rectis H G, H K, duas lineas rectas, ipsa erunt similia similiterque posita, per ea, quæ ad propositionem vigesimam quartam huius libri demonstrauimus.

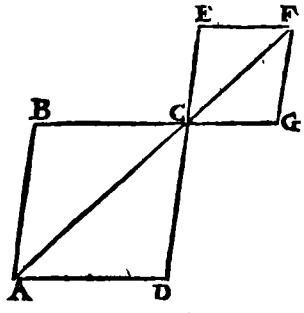
g 8. quinti. *Quare erit vt H B, ad B A, ita F K, ad K H. g Habet autem C B, maior ad B A, proportionem maiorem, quàm H B, minor ad eandem B A: & est, vt C B, ad B A, ita F E, ad E C, eò quòd parallelogramma B D, E G, ponuntur similia similiterque descripta. Igitur & F E, ad E C, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quàm H B, ad B A, hoc est, quàm F K, ad K H. Quam ob rem si F E, ad K H; maiorem habeat proportionem, quàm F K, ad eandem K H;*

h 10. quinti. *h erit E F, maior quàm F K; pars quàm totũ. Quod est absurdum.*

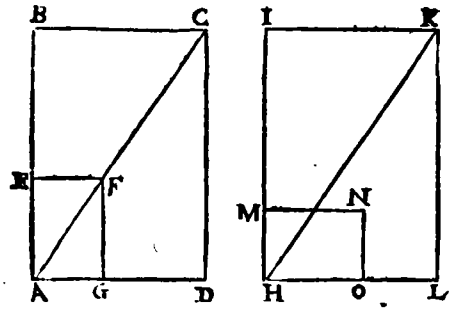
QVOD si quis dicat, rectam A H F, secare latus C D. Tunc per H, ducta recta B C, parallela H I, quæ occurrat



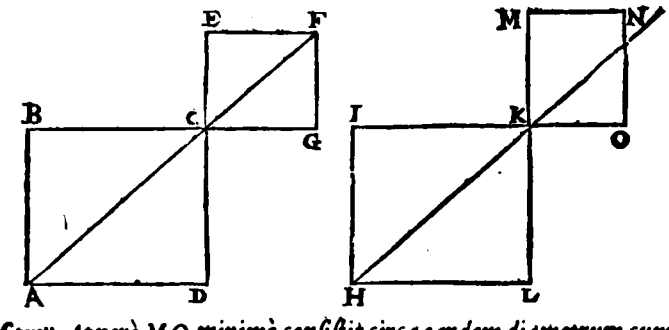
currat recta F G, protracta in K; erunt rursus similia similiterq; posita parallelogramma I D, E K, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit vt H D, ad D A, ita F K, ad K H. [a] Habet autem C D, ad D A, maiorem proportionem, q̃ H D, ad D A, & est vt C D, ad D A, ita F G, ad G C; propterea quòd parallelogramma B D, E G, similia similiterq; posita, sunt concessa. Igitur & F G, ad G C, hoc est, ad sibi æqualem K H; maiorē habebit proportionem q̃ F K, ad K H; [b] ideoq; F G, maior erit, q̃ F K; pars q̃ totũ. Quod est absurdum. a 8. quinti. b 10. quinti.



Ostensive idem hac ratione ostenditur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorũ B D, E G, anguli B, E, sunt æquales, est q̃ vt A B, ad B C, ita C E, ad E F; habebunt triangula A B C, C E F, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia; [c] atq; idcirco æquiãgula erũt, habebuntq; angulos B C A, E F C, æquales. Addito ergo cõmuni angulo B C F, erũt duo anguli B C A, B C F, duobus angulis E F C, B C F, æquales: [d] Sed hi inter parallelas B C, E F, æquales sunt duobus rectis. Igitur & B C A, B C F, duobus erunt rectis æquales; [e] Ac propterea A C, F C, vnam component rectam lineam. Quod est propositum. c 6. sexti. d 29. primi. e 14. primi.



Recte autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum à toto ablatum nõ solùm esse toti simile, verùm etiam similiter positũ, vt ostendatur circa eandem esse cum toto diametrum. Nam si ex altera parte longiori B D, abscindatur altera parte longius E G, circa eandem cum toto diametrum consistens, [f] erit E G simile similiterq; positum. At verò si in rectangulo I L, quod sit æquilaterum & æquiangulum ipsi B D, sumatur H M, æqualis ipsi E F, & M N, æqualis ipsi A E, &c. erit quidem rectangulum M O, æquale, & simile rectangulo E G, propter æqualitatem laterum, & angulorum, qui sunt recti; & ob id simile rectangulo I L; sed tamen quia non est similiter positum, non consisteret circa eandem cum toto I L, diametrum. f 24. sexti.

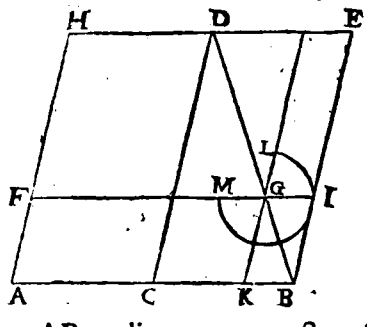


Idem quoq; hic perspicitur in rectangulis similibus, quorum vnum est extra alterum, secundùm tamen angulos eorum ita inter se connexa, vt duo latera vnius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula B D, E G; & I L, M O, in quibus E G, quidem consistit circa eandem diametrũ cum rectangulo B D, quoniam est similiter positum. At verò M O, minimè consistit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non est similiter positum, quãuis simile fit, cùm prorsus sit æquale ipsi E G. Nam K M, æqualis est ipsi E F, & M N, ipsi F C, &c.

THEOR. 20. PROPOS. 27. 26.

Omnivm parallelogrammorum secundùm eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis similibus similiterq; positis, ei, quod à dimidia describitur; maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

Detvr recta A B, diuisa bifariam in C, superq; eius dimidiam B C, constituatur quodcunque parallelogrammum C D E B, cuius diameter B D. Si igitur compleatur totum parallelogrammum A B E H, erit parallelogrammum A D, super dimidiam A C, consistens, applicatum secundùm A B, deficiens parallelogrãmo C E, & existens simile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum deficiensq; parallelogrammo C E, maximum esse omnium, quæ secundùm A B, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus similiterq; positis ipsi C E. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro B D, & ductis p G, rectis F G I, K G, quæ sint parallelæ rectis A B B E; erit parallelogrammum F K, secundùm rectam A B, applicatũ, deficiens parallelogrammo K I, [a] quod ipsi C E, simile est, similiterq; positum, cùm sit circa eandem a 24. sexti.

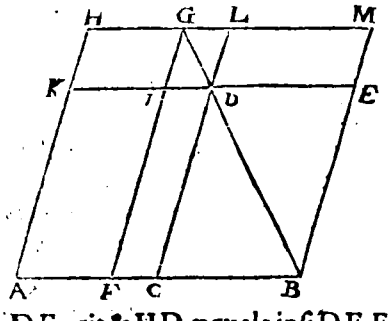


dem cum C E, diametrum. [c] Quoniam verò complementa C G, G E, æqualia ſunt; ſi addatur commune K I, erunt quoque æqualia C I, K E: [b] Eſt autem C I, æquale ipſi C F, propter baſes æquales A C, C B. Igitur & C F, K E, æqualia erunt: additoque cõmuni C G, æqualia erũt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cũ C E, maius ſit gnomone L M, (continet enim C E, præter gnomonẽ, parallelogrammum adhuc D G,) erit quoque A D, [c] æquale exiſtens ipſi C E, propter baſes æquales A C, C B, maius q̃ parallelogrammũ A G, eodem parallelogrammo D G. Eodemque modo oſtendetur A D, maius eſſe omnibus parallelogrammis, quæ ita ſecundùm rectam A B, applicantur, vt punctum G, ſit inter puncta B, & D, hoc eſt, quæ occupát maiorẽ lineam ſemiſſe A C, habentq; minorem altitudinem, quàm A D; dummodo defectus ſimiles ſint ipſi C E.

[a] 43. primi. [b] 36. primi. [c] 36. primi.

[d] 36. primi. ALITER demonſtrabitur A D, maius eſſe parallelogrammo A G, hoc modo: [d] Parallelogramma F D, D I, ſunt æqualia, cùm baſes H D, D E, ſint æquales: Eſt autem D I, maius, quàm G E, hoc eſt, quàm complementum C G, ([e] quod ipſi G E, æquale eſt,) parallelogrammo D G. Igitur & F D, maius erit, quàm C G, parallelogrammo eodem D G. Atque idcirco addito communi C F; maius erit A D, quàm A G, parallelogrammo eodem D G.

[d] 36. primi. [e] 43. primi.



QVOD ſi punctum G, ſumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum C E. Tunc ducta per G, recta H M, quæ ſit parallela ipſi A B, occurratq; rectis A K, B E, protractis in H, & M; Item ducta G F, parallela ipſi A H; erit parallelogrammum A G, applicatum ſecundùm rectam A B, deficiẽs parallelogrammo F M, [f] quod ipſi C E, eſt ſimile, ſimiliterq; poſitũ, cùm ſit circa eandem diametrum cum C E. Dico adhuc maius eſſe A D, ipſo A G. Protracta enim C D, ad L, erũt æquales rectæ H L, L M, [g] cùm æquales ſint æqualibus A C, C B, [h] ideoq; æqualia parallelogramma H D, D M. [i] Cùm igitur D M, ſit æquale complemento D F; erit & H D, æquale ipſi D F. Eſt autem H D, maius quàm H I, parallelogrammo I L. Quare & D F, maius erit, quàm H I, eodem parallelogrammo I L; Ac propterea cõmuni addito A I, maius erit A D, quàm A G, eodem parallelogrammo I L. Iiſdem argumentis concludes A D, maius eſſe quocunque parallelogrammo ita applicato ſecundùm rectam A B, vt punctum G, ſit vltra D, in diametro B D, producta: hoc eſt, quod occupat minorem lineam ſemiſſe A C, habetq; maiorem altitudinem, quàm A D; dummodo defectus ſimilis exiſtat parallelogrammo C E. Itaque omnium parallelogrammorũ ſecundùm eandẽ rectam lineam applicatorũ, &c. Quod erat demonſtrandũ.

[f] 24. ſexti. [g] 34. primi. [h] 36. primi. [i] 43. primi.

SCHOLIVM.

MANIFESTVM autem eſt, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, eſſe vel maiorem dimidiata A C, qualis eſt A K, in priori figura; vel minorem, cuiuſmodi eſt A F, in figura poſteriori: prout punctum G, ſumitur vel in diametro B D, vel in ea producta ad partes D.

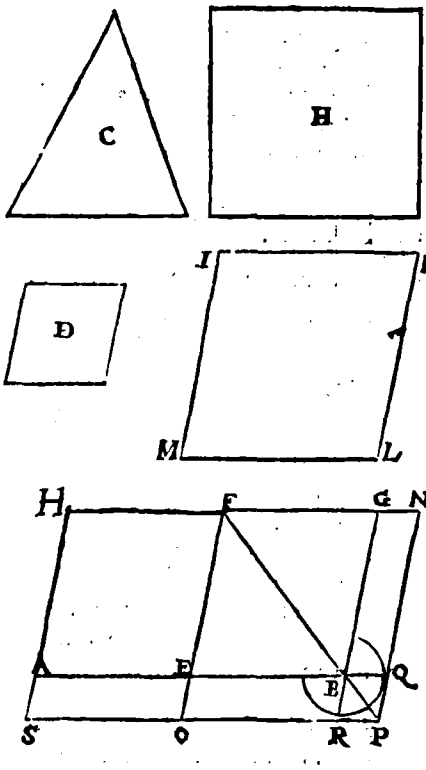
27. PROBL. 8. PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, nõ maius eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, cùm ſimiles fuerint defectus & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui ſimile deeſſe debet.

AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum ſit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod ſit ſimile dato alteri parallelogrammo D. Secta A B, bifariam in E, ſuper medietatem E B, [k] deſcribatur parallelogrammum E F G B, ſimile ipſi D, ſimiliterq; poſitum; & compleatur totum parallelogrammum A H G B. Si igitur A F, æquale eſt ipſi C; cùm ſit applicatum ad A B, deficiens parallelogrammo E G, ſimili ipſi D; factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius eſt quàm C; (Neque enim minus eſſe debet. Nam cùm per propoſitionem præcedentem, ipſum ſit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus ſint ſimiles, non poſſet applicari vllum ad A B, quod eſſet ipſi C, æquale, ſed omnia eſſent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoque ſibi æquale E G, maius q̃ C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua verò ratione exceſſus duorum rectilineorum ſit inquirendus, docuimus ad propoſ. 45. lib. 1.) [l] & conſtituatur parallelogrammum K L M N, ſimile quidem ſimiliterq; poſitum ipſi D, ſeu ipſi E G, æquale verò exceſſui inuento I; vt ſit E G, æquale rectilineo C, & parallelogrammo K M, ſimul; & ob id maius q̃ K M. Cùm igitur ob ſimilitudinem ſit vt E F, ad F G, ita N K, ad K L; erunt quoq; latera E F, F G, maiora lateribus N K, K L. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, eſſet etiam E G, æquale ipſi N L, vel minus, vt conſtat. Quare abſciſsis rectis F O, F Q,

[k] 18. ſexti. [l] 25. ſexti.

quæ

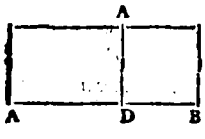


quæ ſint æquales ipſis K N, K L, & completo parallelogrammo F Q P O; erit hoc ipſi L N, æquale, & eidem ſimile ſimiliterque poſitum, & propterea ipſi E G: [a] atque adeò circa eandem diametrũ cum E G, conſiſtet, quæ ſit B F. Productis iam rectis Q P, O P, erit parallelogrammum A P, ad rectam A B, applicatum deficiens parallelogrammo P B, [b] quod ſimile eſt ipſi E G, ſimiliterque poſitum, & propterea ipſi D. Dico igitur A P, æquale eſſe ipſi C, rectilineo. [c] Nam cùm P G, æquale ſit complemento P E; ſi addatur commune P B, erit & B Q, æquale ipſi E R, hoc eſt, ipſi E S, [d] quod æquale eſt ipſi E R, propter baſes æquales E A, E B. Quare ſi æqualibus A O, B Q, commune addatur E P, erit A P, æquale gnomoni T V. Sed gnomon T V, æqualis eſt rectilineo C, (Nam cùm E G, parallelogrammũ æquale ſit ipſi C, vnà cum L N; ſi auferantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon T V, ipſi C, æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo A B, applicatum eſt parallelogrammum A P, deficiens parallelogrammo P B, quod ſimile eſt dato parallelogrammo D, & æquale exiſtens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

[a] 26. ſexti.
[b] 24. ſexti.
[c] 43. primi.
[d] 36. primi.

SCHOLIVM.

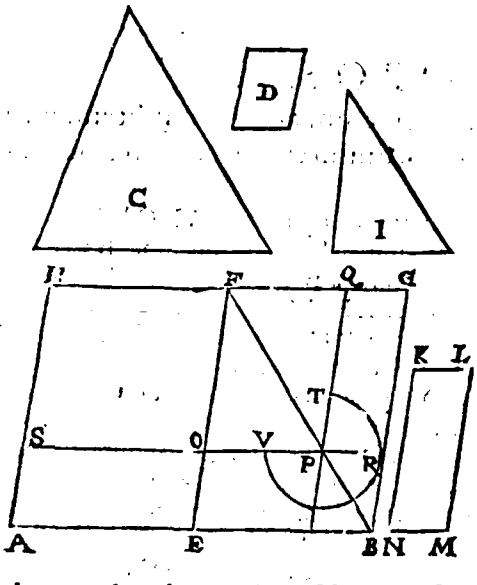
MOVENT hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta noſtram conſtructionem locum non habet, cùm ſuper E B, conſtituerimus E G, parallelogrammum non ſolùm ſimile ipſi D, verùm etiam ſimiliter poſitum; quod ipſi minimè fecerunt. Quæ de re, ſi placet, conſule eorum Commentarios.



PERSPICVVM autem eſt, ſi ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipſum applicatum æquale eſſe rectangulo, quod ſub ſegmẽtis lineæ per applicationem factis continetur. Vt ſi ad A B, applicetur A C, deficiens quadrato C B, erit A C, applicatum, rectangulum contentum ſub A D, & D C. Cùm ergo D C, æqualis ſit ipſi D B, propter quadratum C B; continebitur quoque A C, ſub ſegmentis A D, D B, per applicationem factis. Quod eſt propoſitum.

PROBL. 9. PROPOS. 29. 28.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammũ applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato.



AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum ſit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod ſimile ſit dato alteri parallelogrammo D. Diuiſa A B, bifariam in E; [e] ſuper dimidiam E B, conſtruatur parallelogrammum E F G B, ſimile ipſi D, ſimiliterque poſitum. [f] Deinde rectilineo C, & parallelogrammo E G, conſtituatur quadratum H, æquale; [g] cui quidem fiat parallelogrammum I K L M, æquale, ſimile verò ipſi E G, ſimiliterque poſitum: eritq; propterea I K L M, maius quàm E F G B, quandoquidem æquale eſt quadrato H, quod conſtructum eſt rectilineo C, vna cum parallelogrammo E G, æquale. Cùm igitur ob ſimilitudinem M K, E G, ſit vt M I, ad I K, ita E F, ad F G, erunt quoque latera M I, I K, lateribus E F, F G, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, eſſet quoque M K, vel æquale ipſi E G, vel minus, vt perſpicuum eſt. Productis igitur F E, F G, vt rectæ F O, F N, æquales ſint rectis I M, I K, & completo parallelogrammo O N; erit hoc ſimile ſimiliterq; poſitũ ipſi E G, cũ ſit æquale ipſi M K, & ſimile, ſimiliterq; poſitum. [h] Quare O N, E G circa eandem diametrũ conſiſtét, quæ ſit F P. Productis iam A B, G B, ad Q R, & P O, donec cum A S, ipſi F O, parallela conueniat in S, erit parallelogrammũ A P, applicatũ ad rectã A B, excedens

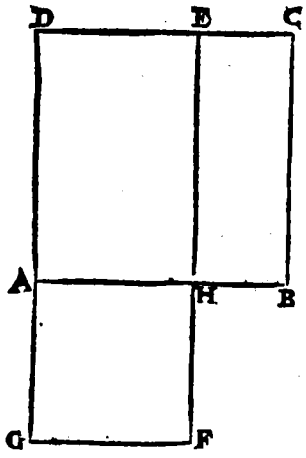
[e] 18. ſexti.
[f] 14. ſecundi.
[g] 25. ſexti.
[h] 26. ſexti.

parallelogrammo QR, [a] quod ſimile eſt ipſi EG, ac propterea ipſi D. Dico igitur AP, æquale eſſe rectilineo C. [b] Nam cùm AO, ER, ſint æqualia, [c] & ER, æquale complemento BN; erit & AO, ipſi BN, æquale. Addito ergo communi OQ, fiet AP, æquale gnomoni EPG. Atqui gnomon EPG, æqualis eſt rectilineo C. (Nam cùm MK, hoc eſt, ON, æquale ſit rectilineo C, vnà cũ EG; ſi auferatur commune EG, remanebunt æqualia gnomon EPG, & rectilineum C.) Igitur & AP, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum eſt AP, excedens parallelogrammo RQ, quod ſimile eſt alteri dato D. Quod faciendum erat.

a 24. ſexti.
b 36. primi.
c 43. primi.

29. PROBL. 10. PROPOS. 30.

PROPOSITAM rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione ſecare.

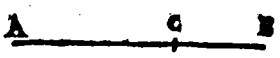


SIT recta AB, ſecanda extrema ac media ratione. Deſcripto ſuper eam quadrato ABCD; [d] ad latus DA, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, ſimili ipſi quadrato, ita vt ſit AF, quoq; quadratum, cum quadrato ſolum quadratum ſit ſimile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, ſectam eſſe extrema ac media ratione. Cùm enim æqualia ſint DF, & AC; ſi dematur cõmune AE, remanebunt æqualia GH, HC; quæ cũ habeant angulos æquales AHF, BHE, vtpote rectos; [e] erunt latera circa illos reciproca: hoc eſt, erit vt EH, hoc eſt, vt AB, ipſi EH, æqualis, ad HE, hoc eſt, ad AH, ipſi HF, æqualem, vt AH, ad HB. Quare cùm ſit, vt tota AB, ad ſegmentum AH, ita ſegmentum AH, ad ſegmentum HB, ſecta eſt AB, extrema ac media ratione, per definitionem. Propoſitam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.

d 29. ſexti.
e 14. ſexti.

ALITER quoq; oſtendemus AB, eſſe ſectam in H, extrema ac media ratione. Cùm tres lineæ dentur AB, AH, HB, ſitq; rectangulum HC, comprehenſum ſub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato mediæ AH; [f] erunt ipſæ proportionales: vt AB, quidem prima ad AH, ſecundam, ita AH, ſecunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem ſecta eſt AB, in H, extrema ac media ratione.

f 17. ſexti.



ALITER totum problema conficiemus. [g] Diuidatur AB, in C, ita vt rectangulum ſub tota AB, & ſegmento CB, æquale ſit quadrato alterius ſegmenti AC. Dico AB, in C, eſſe ſectam extrema ac media ratione. [h] Erunt enim rurſus, vt prius, tres lineæ AB, AC, CB, continuè proportionales. Conſtat ergo propoſitum.

g 11. ſecundi.
h 17. ſexti.

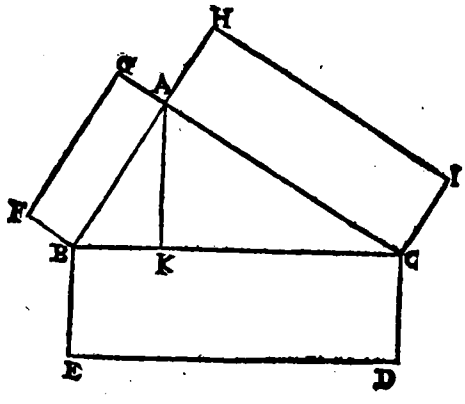
SCHOLIVM.

PRAXIS diuiſionis lineæ rectæ extrema ac mediæ rationis inſtituenda eſt, vt ad propoſitionem 11. lib. 2. tradidimus.

HABET autẽ admiranda hæc ſectio lineæ extrema ac mediæ rationis inſignes vtilitates proprietatesq;, vt in libris Stereometriæ manifeſtum erit, vt non ſine cauſa à pleriſque Mathematicis linea ita diuiſa diuinam quodammodo, ob admirabilem eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab alijs verò ſimpliciter vocetur diuiſa proportionaliter.

31. THEOR. 21. PROPOS. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.



TRIANGVLVM rectangulum ſit ABC, habens angulum BAC, rectum; deſcribaturq́ue ſuper BC; quæcunque figura rectilinea BCDE, [i] cui ſimiles ſimiliterq́ue poſitæ ſuper AB, AC, conſtituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem eſſe duabus figuris AF, AI. Demiſſa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK; erit per coroll. propoſ. 8. huius lib. vt BC, ad CA, ita CA, ad CK. Quare vt BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, ſuper primam, ad figuram CH, ſuper ſecundam, ſimilem ſimiliterq́ue poſitam, per corollarium propoſ. 19. vel 20. huius lib. & conuertendo vt CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Non ſecus oſtendetur, eſſe quoque vt BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD; cùm tres lineæ BC, BA, BK, ſint quoq; proportionales, &c. Quoniam igitur eſt vt CK, prima

i 18. ſexti.

prima quantitas ad B C, ſecundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item vt B K, quinta quantitas ad B C, ſecundam, ita B G, ſexta ad B D, quartam; [a] erit vt prima C K, cum quinta B K, ad B C, ſecundam, ita tertia C H, cum ſexta B G, ad B D, quartam: Sunt autem prima C K, & quinta B K, ſimul æquales ſecundæ B C. Igitur tertia C H, & ſexta B G, ſimul æquales quoque erunt quartæ B D. Quod eſt propoſitum. *a* 24. *quinti.*

ALITER. [b] Cum triangulo A B C, ſimile ſit triangulum K A C, ſintque homologa latera ipſorum B C, C A; (Nam eſt vt B C, ad C A, in triangulo A B C, ita C A, ad C K, in triangulo K A C,) [c] habebit triangulum K A C, ad triangulum A B C, duplicatam proportionem eius, quam habet C A, ad B C. [d] Habet autem & figura C H, ad figuram B D, proportionem duplicatam proportionis C A, ad B C. [e] Quare erit vt triangulum K A C, ad triangulum A B C, ita figura C H, ad figuram B D. Eadem ratione oſtendetur eſſe, vt triangulum K B A, ad triangulum A B C, ita figuram B G, ad figuram B D. Quoniam ergo rurſus eſt, vt K A C, prima quantitas ad A B C, ſecundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item, vt K B A, quinta ad A B C, ſecundam, ita B G, ſexta ad B D, quartam; [f] erit & prima K A C, compoſita cum quinta K B A, ad ſecundam A B C, vt compoſita tertia C H, cum ſexta B G, ad quartam B D: Sunt autem K A C, K B A, prima & quinta ſimul æquales ſecundæ A B C. Igitur C H, B G, tertia & ſexta ſimul, æquales quoque erunt quartæ B D. Quod eſt propoſitum. *b* 8. *ſexti.* *c* 19. *ſexti.* *d* 19. *vel* 20. *ſexti.* *e* 11. *quinti.* *f* 24. *quinti.*

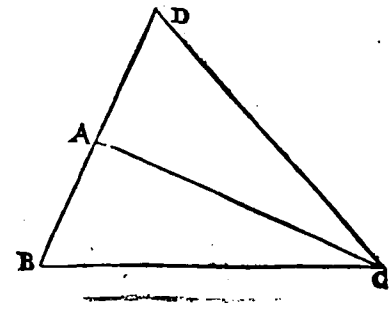
ALITER. Vt quadratum rectæ A C, prima quantitas, ad quadratũ rectæ B C, ſecundam quantitatem, ita eſt figura C H, tertia quantitas ad figuram B D, quartam quantitatem; [g] cum vtraque proportio ſit duplicata proportionis A C, ad B C. Similiter erit, vt quadratum rectæ A B, quinta quantitas, ad quadratum rectæ B C, ſecundam quantitatem, ita figura B G, ſexta quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem. [h] Quocirca erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirũ quadratum rectæ A C, cum quadrato rectæ A B, ad ſecundam, hoc eſt, ad quadratũ rectæ B C, ita tertia quantitas cum ſexta, nimirum figura C H, cum figura B G, ad quartam, videlicet ad figuram B D: [i] Sunt autem quadrata rectarum A C, A B, ſimul æqualia quadrato rectæ B C. Igitur & figuræ C H, B G, figuræ B D, æquales erunt. Quod eſt propoſitum. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis, &c. Quod erat oſtendendum. *g* 19. *vel* 20. *ſexti.* *h* 24. *quinti.* *i* 47. *primi.*

SCHOLIVM.

VIDES igitur, longè eſſe vniuerſalius theorema hoc Euclidis, quod ſeſe ad omnes figuras ſimiles ſimiliterq́, deſcriptas extendit, quàm illud Pythagoræ inuentum, quod ſola quadrata includit, vt propoſ. 47. primi lib. monuimus. Videtur tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonſtrauimus, aliqua ex parte adhuc eſſe vniuerſalius, quàm hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammis q́, etiam non ſimilibus; Hoc verò de triangulo tantummodo rectangulo, figuris q́, ſimilibus, & ſimiliter poſitis, proponatur.

CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano non aliter, quàm 47. propoſitionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab vno laterum trianguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.

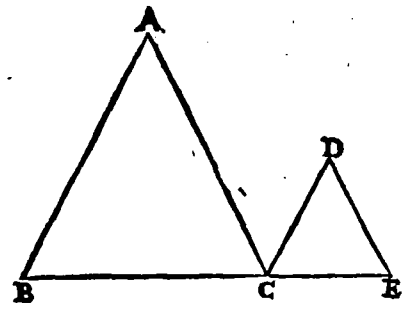


DETVR triangulum A B C, ſit q́, figura quæuis ſuper latus B C, deſcripta æqualis duabus figuris ſibi ſimilibus ſimiliterq́, deſcriptis ſuper reliqua latera A B, A C. Dico angulum B A C, eſſe rectum. Ducatur enim A D, ad A C, perpendicularis, quæ ſit ipſi A B, æqualis, & connectatur recta C D. Quoniam igitur angulus C A D, rectus eſt, [a] *erit figura ſuper C D, (quæ ſimilis ſit ei, quæ ſuper B C, ſimiliterq́, poſita) deſcripta æqualis figuris ſuper A D, A C, deſcriptis, quæ ei ſimiles ſint, ſimiliterq́, poſitæ: Eſt autẽ figura ſuper A D, æqualis figuræ ſuper A B, ob æqualitatem laterum. Igitur figura ſuper C D, æqualis erit figuris ſuper A B, A C. Cum igitur figura ſuper B C, eiſdem figuris ſuper A B, A C, æqualis ponatur, erunt figuræ ſuper C D, B C, inter ſe æquales, ac propterea rectæ C D, B C, æquales erunt, vt conſtat ex lemmate propoſ. 22. huius lib. Quoniam igitur latera A D, A C, trianguli A D C, æqualia ſunt lateribus A B, A C, trianguli A B C, & baſis D C, oſtenſa eſt quoq́, æqualis baſi B C,* [b] *erunt anguli D A C, B A C, æquales. Quare cum D A C, rectus ſit, ex conſtructione, rectus quoque erit B A C. Quod eſt propoſitum.* a 31. ſexti. b 8. primi.

THEOR. 22. PROPOS. 32. 30.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulum compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

HABEANT triangula A B C, D C E, latera A B, A C, lateribus D C, D E, proportionalia, vt qui-

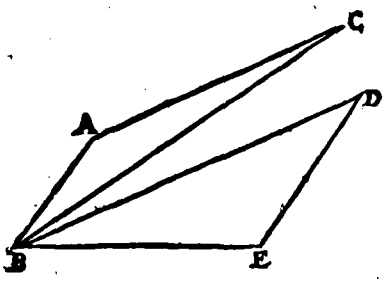


dem AB, ad AC, ita DC, ad DE, componanturque ad angulum ACD, ita vt latera homologa AB, DC; Item AC, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam componere lineam. Cùm enim parallelæ sint AB, DC, [a] erit angulus A, alterno ACD, æqualis: Eadémque ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa [b] erunt inter se æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito cõmuni ACB, fient [c] tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: [c] Sed illi tres æquales sunt [d] duobus rectis. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: [d] Atque idcirco BC, CE, vnam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant. &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 29. primi.
[b] 6. sexti.
[c] 32. primi.
[d] 14. primi.

SCHOLIVM.

DEBENT autem predicta duo triangula ita secundum vnum angulum esse compõsita, vt vterq; angulorum à lateribus proportionalibus comprehensus, alternus sit illi angulo, secundum quem triangula componuntur; veluti in figura theorematis factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quem triangula sunt compõsita, alternus est tam angulus A, quàm angulus D, quorum vterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales, & propterea triangula esse æquiangula; atque adeo ex BC, CE, vnam rectam lineam componi, vt ex demonstratione liquet.

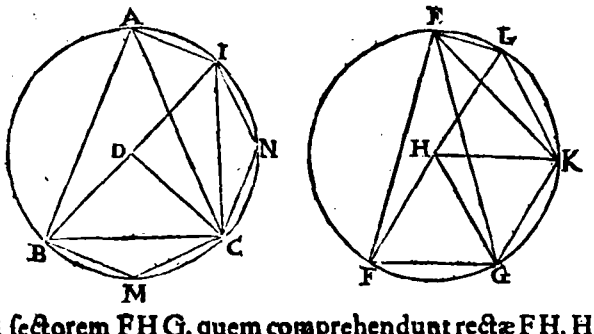


QVOD si vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componuntur, licet reliquæ hypotheses theorematis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duo triangula ABC, DBE, habent duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DB, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DE, ad DB, compositaq; sunt ad angulum CBD, ita vt tam homologa latera AB, DE, quam AC, DB, sint parallela: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, non constituunt vnam lineam rectam, propterea quod angulo CBD, non sit alternus vterque angulorum A, & D, immo neuter eorum, vt perspicuum est. Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.

THEOR. 23. PROPOS. 33.

§2.

IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper verò & sectores, quippe qui ad centra consistunt.



SINT duo circuli æquales ABC, EFG, quorum centra D, H; sumanturq; ex circulis duo arcus quicunq; BC, FG, quibus ad centra quidem insistant anguli BDC, FHG; ad circunferentias verò anguli BAC, FEG. Dico esse ex sententia defin. 6. lib. 5. vt arcum BC, ad arcum FG, ita angulum BDC, ad angulum FHG; & angulum BAC, ad angulum FEG; & sectorem insuper BDC, qui rectis BD, DC, & arcu BC, continetur, ad sectorem FHG, quem comprehendunt rectæ FH, HG, & arcus FG. Ductis enim rectis BC, FG, [e] applicentur ipsis in circulis æquales rectæ; CI, quidem ipsi BC; At verò GK, KL, ipsi FG: ducanturque rectæ ID, KH, LH. Quoniam igitur æquales sunt rectæ BC, CI, [f] erunt quoque æquales arcus BC, CI; [g] ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK, KHL. Quàm multiplex ergo est arcus BCI, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui BCI, anguli BDC: Et quàm multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, seu aggregatũ angulorũ prope centrum H, arcui FGKL, insistentium, anguli FHG: quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam verò si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL,

[e] 2. quarti.
[f] 28. tertij.
[g] 27. tertij.

FGKL, [a] necessariò angulus BDI, angulo FHL, æqualis est; Ac proinde si arcus BCI, maior fuerit arcu FGKL, necessariò angulus BDI, maior est angulo FHL; & si minor, minor: Deficiēt propterea vna arcus BCI, & angulus BDI, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æquemultiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vnà æqualia erunt; vel vnà excedēt; si ea sumantur, quæ inter se respondent. [b] Quare quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem. Atq; hoc verum etiam est de spatiis in centris: hoc est, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, vt spatium ad centrum D, insistens arcui BAC, ad spatium ad centrum H, insistens arcui FEG: vt ex demonstratione patet. Nam & hæc spatia, si æqualia sunt, insistunt æqualibus arcubus; & si inæqualia, inæqualibus, &c.

a 27. tertij.

b 6. definit. quinti.

QVONIAM verò vt angulus BDC, ad angulū FHG, [c] ita est angulus BAC, ad angulū FEG; [d] cùm illi horum sint dupli; perspicuum est, [e] ita esse quoque angulum BAC, ad angulum FEG, vt est arcus BC, ad arcum FG. Quod tamen eisdem argumentis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centra constitutis, si prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c. Quòd si ad circunferentias constituti sint anguli eiusmodi BAC, FEG, vt rectæ ductæ BD, CD; FH, GH, nō constituant angulos in centris versus arcus BMC, FG; sumenda erunt spatia BDC, FHG, quæ dupla etiam sunt angulorum ad circunferentias, ex scholio propos. 20. lib. 3.

c 15. quinti.

d 20. tertij.

e 11. quinti.

CONSTITVANTVR iam in segmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, [f] qui æquales erunt, cùm insistant arcubus æqualibus BAC, CBAI. Quare similia erunt segmenta BMC, CNI, [g] atque adeò inter se æqualia, propterea quòd sunt super rectas BC, CI, æquales. Additis igitur triangulis BDC, CDI, [h] quæ æqualia quoque sunt, fient sectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector BDI, sectoris BDC, quàm est multiplex arcus BCI, ipsius arcus BC. Similiter ostendemus, sectorem FHL, tam multiplicem esse sectoris FHG, quàm multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG. Quoniam verò si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, sector quoque BDI, sectori FHL, æqualis est; (vt in sectoribus BDC, CDI, ostensum fuit,) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & sector BDI, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab arcu FGKL, & sectore FHL, æquemultiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vnà æqualia erunt; vel vnà excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. [i] Quamobrem quæ proportio est arcus BC, primę magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit sectoris BDC, tertiæ magnitudinis, ad sectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, &c. Quod demonstrandum erat.

f 27. tertij.

g 24. tertij.

h 4. primi.

i 6. definit. quinti.

COMMODIVS fortasse instituetur demonstratio hoc modo: Sumantur quotuis circuli æquales circulo ABC, atque in singulis sumantur singuli arcus arcui BC, æquales, quibus insistant anguli tam ad centra, quàm ad circunferētias. Erunt enim omnes hi anguli æquales angulis BDC, BAC, ob æqualitatem arcuum, quibus insistunt; ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorum BDC, BAC, vt est multiplex aggregatum omnium arcuum ipsius arcus BC. Deinde sumantur etiam quotuis circuli æquales circulo EFG, & in singulis accipiantur singuli arcus arcui FG, æquales, &c. Hac enim ratione vitabitur confusio linearum, & angulorum in circulis ABC, EFG, quę necessariò oritur, quando arcus BC, FG, sunt magni, & eorum multiplices accipiendi sunt, vt perspicuum est. Nam si arcus essent BCI, FGL, quibus insistunt anguli BDI, FHL, ad centra, & BAI, FEL, ad circunferentias; non poterunt eorum multiplices sumi sine confusione, vt patet. Hæc autem confusio vitatur, si plures circuli æquales adhibeantur, vt diximus.

COROLLARIVM I.

HINC manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, vt est angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem est proportioni arcus ad arcum. [a] *Quare & inter se eadem erunt.*

a 11. quinti.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circunferentiam. Et contrà, vt sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circunferentiam ad arcum illi angulo subtensum.

NAM vt est angulus in centro ad angulum rectum in centro, [b] *ita est arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos; ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circunferentiam, per ea, quæ ad 22. propos. lib. 5. demonstrauimus. Quod est primum. Quoniam igitur est, vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circunferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circunferentia ad arcum angulo in centro subtensum. Quod est secundum. Verùm hoc etiam ita demonstrabitur.* [c] *Cùm sit, vt angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoque, per ea, quæ ad propos. 22. lib. 5. ostēdimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita qua-*

b 33. sexti.

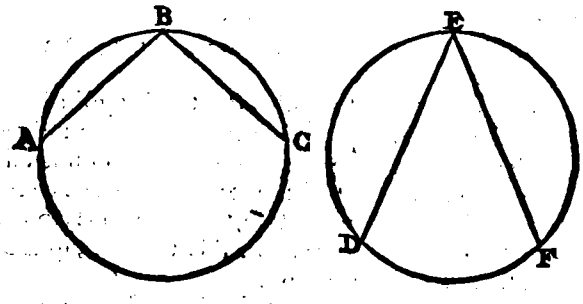
c 33. sexti.

druplum quadrantis, nimirum tota circunferentia, ad arcum illi angulo ſubtenſum. Quod eſt propoſitum.

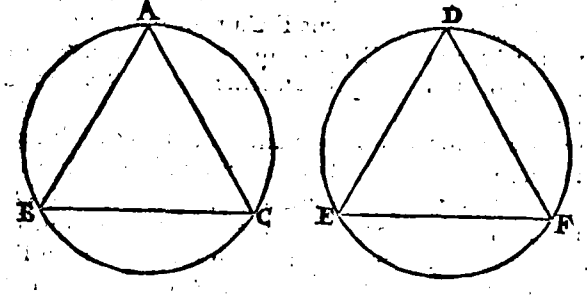
IDEM verum eſt de ſpatio in centro: hoc eſt, vt eſt ſpatium in centro ad quatuor rectos, ita eſt arcus ſubtenſus illi ſpatio ad totam circunferentiam, &c. vt ex demonſtratione patet.

SCHOLIVM.

CAETERVM ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum, qui circunferentiæ alicui inſiſtit, referendum eſſe ad arcum, qui baſis eſt ipſius anguli, non autem ad arcum, in quo exiſtit. Non enim eadem eſt proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, ſi ſumantur arcus, in quibus anguli exiſtunt, vt vult Euclides in propoſito hoc theoremate. Sint enim circuli æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferẽtiam conſtituti ſint B, E; maior quidem B, minor autem E. Quo poſito, erit arcus A C, maior arcu D F, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 3. ac propterea reliquus arcus A B C, minor reliquo arcu D E F. Quare proportio anguli B, ad angulum E, eſt maioris inæqualitatis; proportio verò arcus A B C, ad arcum D E F, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem eſt proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quòd ſi ſumamus arcus, ſuper quos anguli aſcenderũt, quales ſunt arcus A C, D F, tum demũ erit angulus B, ad angulum E, vt arcus A C, ad arcum D F, vt rectè demonſtrauit Euclides. Quocirca cùm dicimus angulum eſſe in ſegmento, aliud intelligere debemus, quàm cùm dicimus, angulum inſiſtere ſegmento, ſeu arcui. Id quod in expoſitione deſin. 8. lib. 3. monuimus.



NON obſcurè quoq; ex hoc theoremate demonſtrari poteſt, ſimilitudinem ſegmentorum in circulis ſimilium, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipſis ſegmentis exiſtentes, conſiſtere in eo, quòd ſegmenta, ſeu circunferentiæ ſimiles, ad integras circunferentias circulorũ eandem habeant proportionem: & propterea quando ſegmenta totis circulis commenſurabilia ſunt, qualis pars eſt vna circunferentia totius ſuæ circunferentiæ, talis quoq; ſit alia circunferentia ſimilis totius ſuæ circunferentiæ; veluti in expoſitione prædicta definitionis docuimus. Sint enim primùm duo circuli æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferẽtias conſtituantur æquales B A C, E D F: Quo poſito, ſegmenta B A C, E D F, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur ſimilia. Manifeſtum autem eſt, eorum circunferentias habere eandem proportionem ad integras circulorum circunferẽtias. Cùm enim ob circulorum æqualitatem, [a] *arcus B C, E F, quibus anguli*



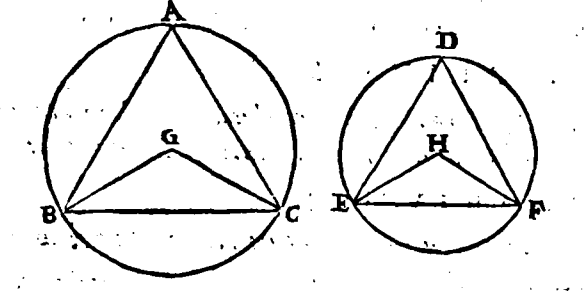
a 26. tertij.

æquales inſiſtunt, ſint æquales; efficitur reliquas circunferentias B A C, E D F, eſſe quoq; æquales. Quare ad

b 7. quinti.

totas circunferentias, quæ æquales etiam ponuntur, [b] *eandem proportionẽ habebunt: Atq; idcirco, quæ pars eſt arcus B A C, totius circunferentiæ A B C A, eadem pars erit arcus E D F, totius circunferentiæ D E F D.*

SINT deinde duo circuli inæquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferẽtias conſtituantur æquales B A C, E D F: Quo poſito, dicentur ſegmenta B A C, E D F, ex Euclidis ſententia, ſimilia. Dico rurſus arcus B A C, E D F, eandem habere proportionem ad integras ſuas circunferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ B G, C G, E H, F H. Quoniã igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erũt quoq; ad centra anguli G, & H, æquales, [c] *cũ*



c 20. tertij

hi illorum dupli exiſtant: Vel erunt ſpatia ad centra, æqualia, cùm hæc quoq; ſint angulorum ad circunfe-

d 7. quinti.

rentias dupla, ex ſcholio propoſ. 20. lib. 3. [d] *Quare quatuor recti ad angulum, vel ſpatium G, eandem habebũt rationem, quam ad angulum, vel ſpatium H. Atqui vt quatuor recti ad angulum, vel ſpatium G, ita eſt tota circunferentia A B C A, ad arcum B C: Et vt quatuor recti ad angulum, vel ſpatium A, ita eſt tota circun-*

e 11. quinti.

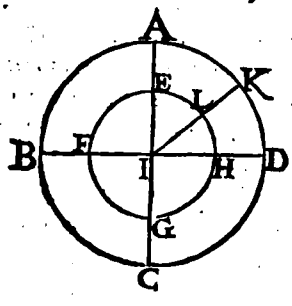
ferentia D E F D, ad arcum E F, ex corollario 2. huius propoſit. 33. [e] *Igitur vt tota circunferentia A B C A, ad arcum B C, ita erit tota circunferentia D E F D, ad arcum E F. Per conuerſionem ergo rationis erit quoque, vt tota circunferentia A B C A, ad arcum B A C, ita tota circunferentia D E F D, ad arcum E D F. Et conuertendo, vt arcus B A C, ad totam circunferentiam A B C A; ita arcus E D F, ad totam circunferentiam D E F D. Quocirca quæ pars eſt arcus B A C, totius circunferentiæ A B C A, eadem pars erit arcus E D F, totius circunferentiæ D E F D. Quod eſt propoſitum.*

CONSTAT

Constat igitur rectè Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales: quandoquidē huiusmodi segmenta eandē habent proportionē ad circulos suos integros.

Facile ex his demonstrabitur, theorema illud, quod ad calcem cap. 1. in sphærā, & ad propos. 22. lib. 3. sine proportionibus ostendimus, videlicet:

Si duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duę aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti similes.



Sint duo circuli A B C D, E F G H, circa idem centrū I, descripti. Si igitur egrediantur è centro I, duæ rectæ I B, I D, efficientes vnam lineam rectam B D, manifestum est, arcus B A D, F E H, similes esse, cū sint semicirculi. Rursus si ex I, egrediantur duæ rectæ I A, I D, constituentes angulum rectū A I D, perspicuum quoq; est, arcus A D, E H, similes esse, cùm ex scholio propos. 27. lib. 3. sint Quadrantes suorum circulorum.

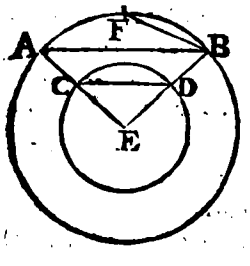
Emittantur iam ex I, duæ rectæ I D, I K, faciētes quemcunq; angulum nō rectum D I K. Dico adhuc arcus D K, H L, similes esse, hoc est, ita esse arcum D K, ad totam circunferentiam A B C D, vt est arcus H L, ad totam circunferentiam E F G H. Quoniā enim vt angulus D I K, ad quatuor rectos, ita est ex coroll. 2. huius propos. tam arcus D K, ad totam circunferentiam A B C D, quàm arcus H L, ad totam circunferentiam E F G H; [a] erit vt arcus D K, ad totam circunferentiam A B C D, ita arcus H L, ad totam circunferentiam E F G H: ac proinde arcus D K, H L, similes erunt. Quod est propositum. a 11. quinti.

Brevius idem confirmabitur hoc modo: Quoniam arcubus D K, H L, insistunt in centro I, anguli æquales, immò idem; erunt ex scholio propos. 22. lib. 3. arcus D K, H L, similes: ac proinde ad totas circunferentias eandem proportionem habebunt, vt paulò antè ostensum est.

Eadem ratione ostendemus arcus B A K, F E L, similes esse, id est, habere ad totas circunferentias eandem proportionem.

Sed etiam hic demonstrare lemma, quod ad propos. 6. lib. 3. Theodosii proposuimus, cùm ad multa alia conducat, tum autem est eiusmodi.

Æqvales rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorq; est arcus minoris circuli, quàm vt similis sit arcui circuli maioris.

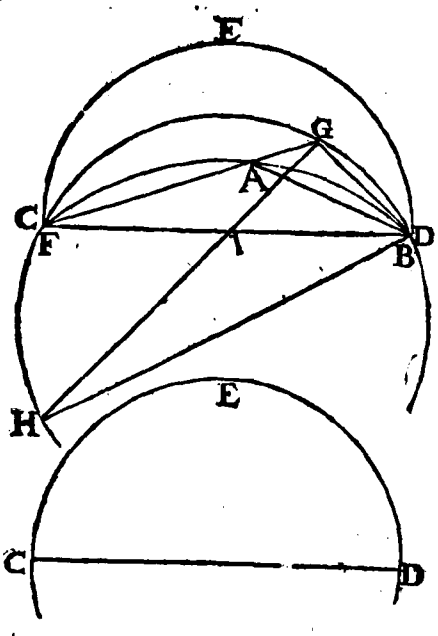


Sint circuli inæquales A B, C D, circa idem centrū E, descripti. Ducantur autē ex E, duæ rectæ vtcunq; E A, E B, secantes circulos in A, B, & C, D, punctis; erunt q; arcus A B, C D, similes, vt proximè demonstrauimus. Et quoniam rectæ E A, E B, sectæ sunt in C, D, proportionaliter, quòd tam E A, E B, q̄ E C, E D, inter se æquales sint; [b] erūt ductæ rectæ A B, C D, parallelæ; atq; ideò triangula E A B, E C D, ex coroll. propos. 4. huius lib. similia erunt. [c] Erit igitur vt E A, ad A B, ita E C, ad C D. Est autem E A, maior q̄ E C. [d] Igitur & A B, maior erit, q̄ C D. Accommodetur ergo ipsi C D, in circulo A B, æqualis B F; erit q; ex scholio propos. 28. lib. 3. arcus A B, maior arcu F B. Quare cū arcus C D, arcui A B, similis sit; erit arcus C D, maior, quàm vt similis sit ipsi F B. Æquales igitur rectæ C D, B F, ex circulis inæqualibus A B, C D, arcus inæquales auferunt, maiorq; est arcus C D, circuli minoris, quàm vt similis sit arcui F B, circuli maioris. Quod est propositum. b 2. sexti. c 4. sexti. d 14. quinti.

Hinc perspicuum est, multò magis minorē lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, q̄ vt similis sit ei, quem ex circulo maiore aufert linea minor. Cùm enim recta C D, æqualis ipsi B F, auferat arcū C D, maiorem, quàm vt similis sit arcui F B, multò magis linea maior, quàm C D, auferet maiorem arcum, quàm vt similis sit arcui F B; cùm illa maiorem arcum abscindat, q̄ C D, vt in scholio propos. 28. lib. 3. ostendimus.

Hæc autē demonstratio propositum tantùm colligit, quando arcus abscisi sunt semicirculo minores, quales sunt B F, C D, vt ex ipsa demonstratione constat. Nam aliàs non constitueretur angulus in E, centro communi: quod tamen ad demonstrationem requiritur. Verùm nihilominus erit, si arcus semicirculo minor circuli minoris maior est, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris, multò maiorem esse arcum semicirculo maiorem circuli minoris, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris. Quòd si quando contingat, rectam C D, ex minori circulo auferre semicirculum, vt quando est diameter circuli; liquidò constat, semicirculum minoris circuli maiorem esse, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris; neq; opus tunc erit alia demonstratione.

Hinc etiam nullo negotio ostendemus, æquales rectas lineas ex circulis inæqualibus auferre arcus simpliciter, et absolutè inæquales, ita vt arcus minoris circuli simpliciter maior sit arcu circuli maioris, & nō solùm maior, q̄ vt similis sit. Sint enim rectæ lineæ C D, B F, æquales, auferat q; C D, arcum minoris circuli C E D, & F B, arcum circuli maioris F G B. Dico simpliciter arcū C E D, maiorē esse arcu F G B. Congruente enim recta C D, rectæ F B, cadet necessariò arcus C E D, extra arcum F G B; atq; idcircò arcus C E D, maior erit arcu F G B, cū ille hunc totū intra se contineat, sintq; ambo arcus in eandem partē caui, atq; eadem extrema puncta habeant, vt vult Archimedes in suppositionibus antè lib. 1. de Sphæra & cylindro. Neq; verò arcus C E D,



a 16. primi.

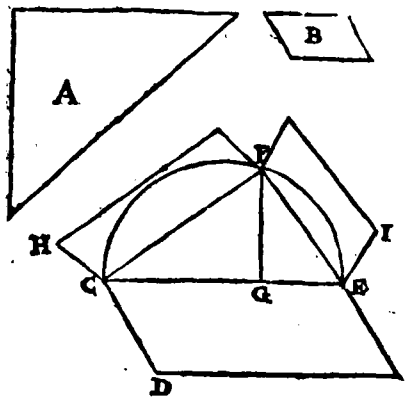
arcui F G B, congruet, aut intra ipſum cadet. Nam ſi dicatur congruere, congruet etiã tota circunferentia circuli C E D, toti circunferẽtiæ circuli F G B, atq; adeò æquales erunt circuli. quod eſt abſurdum, cũ inæquales ponantur. Si verò arcus C E D, dicatur cadere intra arcũ F G B, cuiuſmodi eſt arcus C A D; quoniam, vt paulò antè oſtẽdimus, arcus C E D, id eſt, C A D, maior eſt, q̃ vt ſimilis ſit arcui F G B; ſumatur arcus B F H, arcui C A D, ſimilis, atq; ideò maior arcu F G B: Aſſum pto autem in arcu C A D, puncto A, vtcunq; ducantur rectæ A F, A B, productæq; rectæ F A, donec arcum F G B, ſecet in G, ducantur rectæ G H, G B. Itaq; quoniam arcus C A D, H F B, ſimiles ſunt; erunt anguli C A D, H G B, in illis ſegmentis exiſtentes æquales. a Quia verò angulus C A D, angulo C G B, maior eſt, externus interno; et angulus C G B, angulo H G B, maior quoq; totũ parte; erit multò maior angulus C A D, angulo H G B. quod eſt abſurdũ. Oſtenſus enim eſt æqualis. Non ergo arcus C E D, cadet intra arcũ F G B: ſed neq; ei cõgruit, vt demonſtratum eſt. Cadet ergo extra; atq; ideò maior erit arcus C E D, arcu F G B, vt dictum eſt. Quod eſt propoſitum.

Ex quo liquidò conſtat, multò magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem ſimpliciter eo, quem minor linea ex circulo maiore abſcindit.

Quoniam verò Euclides multa dixit de inuentione linearum proportionalium, nihil verò de ſuperficierum, vel planorũ proportionalium inueſtigatione nobis præcipſit; non abs re me facturũ exiſtimo, ſi nonnulla problemata, atq; theoremata, quorũ multa circa inuentionem ſuperficierum proportionalium verſantur, ſcitu non iniucunda, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis proprijs, huic 6. lib. annectam; quippe quæ ex demonſtratis ab Euclide facili negotio deducãtur: Hinc autẽ exordium capiemus.

I.

A' DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, ſimile ſit cuiuis rectilineo dato, ſimiliterque poſitum.

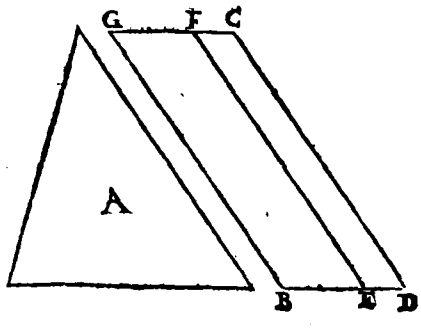


b 25. ſexti.
c 9. ſexti.
d 18. ſexti.
e 31. tertij.
f 31. ſexti.

Sit ex rectilineo A, auferenda tertia pars, quæ ſimilis ſit ſimiliterq; poſitæ rectilineo B, relinquatq; rectilineũ eidem B, ſimile, & ſimiliter poſitũ. b Conſtituatur rectilineũ C D, æquale quidem ipſi A, ſimile verò, & ſimiliter poſitũ ipſi B: ſuperq; vnum eius latus C E, ſemicirculus deſcribatur C F E. c Deinde ablata parte tertia G E, imperata videlicet, ex C E, agatur G F, ad C E, perpendicularis, connectanturq; rectæ C F, F E, d ſuper quas conſtruantur rectilinea F H, F I, ſimilia ſimiliterq; poſita ipſi C D. Dico igitur factum eſſe, quod iubetur. e Cùm enim angulus C F E, rectus ſit, quippe qui in ſemicirculo exiſtat: f erit rectilineũ C D, æquale rectilineis H F, F I, atq; adeò, ſi auferatur rectilineum F I, ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi B, ex rectilineo C D, hoc eſt, ex æquali A, relinquetur rectilineũ H F, ſimile quoq; ipſi B, ſimiliterq; poſitũ. Quòd autẽ rectilineum ablatum F I, ſit tertia pars rectilinei C D, ita oſtendetur.

g 4. ſexti.
h 8. ſexti.
i 19. vel 20. ſexti.

g Quoniam eſt vt recta C G, ad G F, ita recta C F, ad F E; h & triangula C G F, C F E, ſint ſimilia: Habet autẽ C G, ad G E, proportionẽ duplicatam proportionis C G, ad G F, propterea & proportionales ſunt tres rectæ C G, G F, G E, ex corol. propoſ. 8. huius libri. i Item rectilineum H F, ad rectilineum F I, proportionẽ quoq; habet duplicatã proportionis lateris homologorum C F, F E; Erit vt recta C G, ad G E, ita rectilineũ H F, ad rectilineã F I: quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionũ duplicatæ ſunt. Componẽdo igitur erit, vt C E, ad G E, ita duo rectilinea H F, F I, ſimul, hoc eſt, rectilineum C D, quod eſt illis æquale, ad rectilineum F I: Eſt autem C E, ipſius G E, tripla, per conſtructionem. Igitur & rectilineum C D, triplum erit rectilinei F I: Ac propterea hoc illius tertia pars exiſtet. Quod eſt propoſitũ.

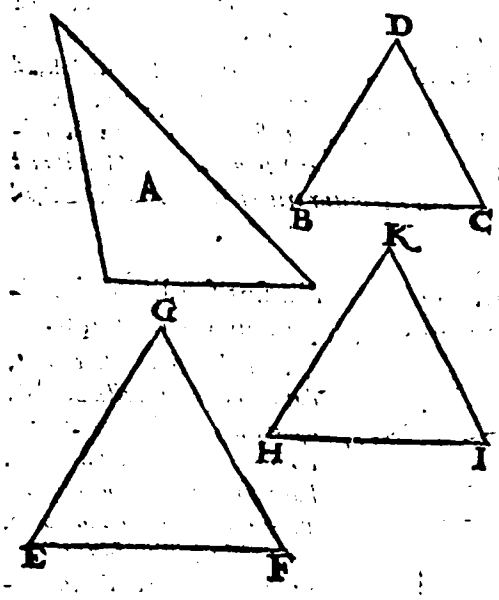


k 45. primi.
l 1. ſexti.

Quod ſi pars imperata, nempe tertia, ſimpliciter ſit auferenda, fiet id breuiſſimè, hac arte: k Rectilineum datũ A, reuocetur ad parallelogrammum G D, æquale; & ex latere B D, auferatur D E, tertia pars imperata & per E, agatur ipſi B G, parallela E F. Dico D F, tertiam eſſe partem ipſius D G, hoc eſt, rectilinei dati A. Cùm enim ſit l vt D E, ad D B, ita D F, ad

D G: Sit

D G: Sit autẽ p constructionẽ D E, ipsius D B, pars tertia; erit & D F, ipsius D G, tertia pars. Quod est propositũ.



II.

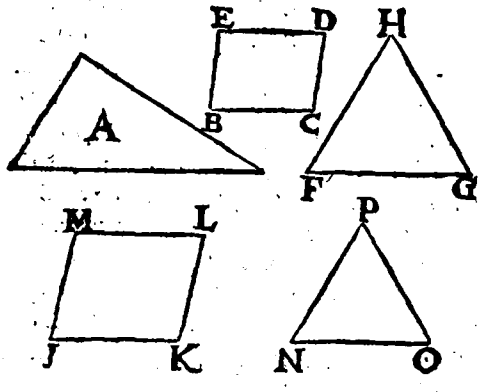
Dvobvs datis rectilineis tertiũ proportionale inuenire.

Sint data duo rectilinea A, & B C D, quibus inueniendum sit tertium proportionale. [a] *Constituatur ipsi A, rectilineum aquale E F G, simile verò similiterq; positum ipsi B C D. Deinde lateribus homologis E F, B C,* [b] *inueniatur tertia linea proportionalis H I;* [c] *super quam constituatur rectilineum H I K, simile similitérque positum ipsis E F G, B C D. Dico H I K, esse tertium proportionale. Cùm enim proportionales sint recta E F, B C, H I;* [d] *erunt & rectilinea E F G, B C D, H I K, ab illis descripta (cùm sint similia, similiterq; posita) proportionalia. Cùm ergo E F G, per constructionem, aquale sit ipsi A; erunt & rectilinea A, B C D, H I K, proportionalia. Quod est propositũ.*

a 25. sexti.
b 11. sexti.
c 18. sexti.
d 22. sexti.

III.

Tribvs datis rectilineis, quartũ proportionale inuenire.

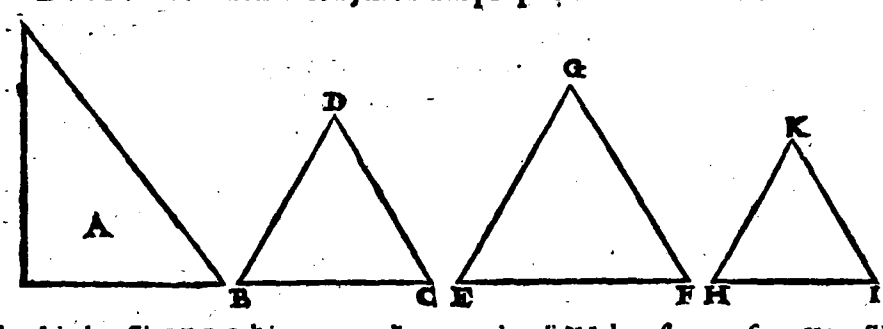


Tria rectilinea data sint A, B C D E, F G H, quibus quartum sit inueniendum proportionale. [e] *Constituatur rectilineum I K L M, aquale quidem ipsi A, simile verò similiterq; positum ipsi B C D E. Tribus deinde rectis I K, B C, F G,* [f] *inuenta quarta proportionali N O;* [g] *constituatur super N O, rectilineum N O P, ipsi F G H, simile similiterq; positum. Dico N O P, rectilineum esse quartum proportionale. Cũ enim quatuor recta I K, B C, F G, N O, sint proportionales;* [h] *erunt & rectilinea similia similerq; posita ab ipsis descripta I L, B D, F G H, N O P, proportionalia. Cùm igitur I L, constructum sit aquale ipsi A; erunt & quatuor rectilinea A, B D, F G H, N O P, proportionalia. Quod est propositum.*

e 25. sexti.
f 12. sexti.
g 18. sexti.
h 22. sexti.

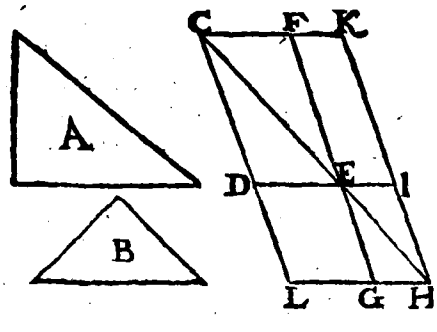
IIII.

Dvobvs datis rectilineis, medium proportionale inuenire.



Sint duo rectilinea A, B C D, quibus medium inueniendum est proportionale. [i] *Constituatur rectilineũ E F G, aquale ipsi A, et simile similiterq; positum ipsi B C D. Duabus deinde rectis E F, B C,* [k] *inuenta media proportionali H I;* [l] *constructur super H I, rectilineum H I K, simile similiterq; positum ipsis E F G, B C D. Dico H I K, medium esse proportionale quæsitum. Cùm enim proportionales sint tres recta E F, H I, B C;* [m] *erũt quoq; rectilinea ab ipsis descripta E F H, H I K, B C D, proportionalia, cùm sint similia similiterq; posita. Cùm ergo E F G, constructum sit, aquale ipsi A; erunt quoq; rectilinea A, H I K, B C D, proportionalia; hoc est, erit vt A, ad H I K, ita H I K, ad B C D: ac proinde H I K, medium proportionale erit inter A, & B C D. Quod est propositum.*

i 25. sexti.
k 13. sexti.
l 18. sexti.
m 22. sexti.



Aliter. Sit rursus inter rectilinea A, & B, perquirendum mediũ proportionale. [n] *Constituatur ipsi A, aquale parallelogrammũ quodcunq; C D E F;* [o] *Ipsi verò B, aquale parallelogrammũ E G H I, simile verò similiterq; positum ipsi C D E F. Connectanturq; hæc parallelogramma ad angulos æquales, vt D E, E I, efficiant vnã lineã rectam, ac propterea p ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. demõstrauimus, vna quoq; linea recta cõponatur ex F E, E G, perficiaturq;*

n 45. primi.
o 29. sexti.

totum parallelogrammum K L. Dico vtrumlibet E K, vel E L, medium esse proportionale inter D F, G I; hoc est, inter A, & B. Cùm enim similia sint, similiterq; posita D F, G I; erit vt D E, ad E F, ita G H, ad H I; hoc est, ita

a 34. primi. *E I, ad E G;* [a] *quòd rectæ E I, E G, rectis G H, H I, æquales sint. Permutando ergo vt D E, ad E I, ita F E, ad E G:*

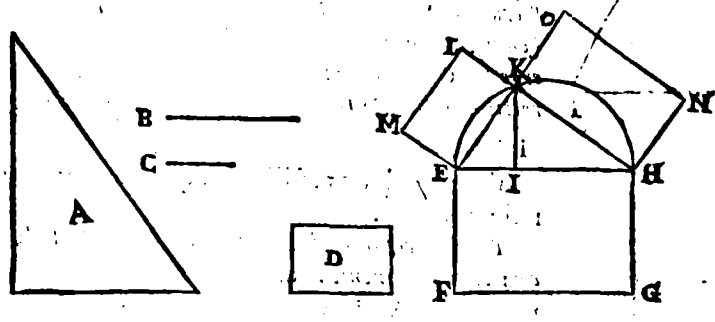
b 1. sexti. [b] *Vt autem D E, ad E I, ita est D F, ad E K; & vt F E, ad E G, ita E K, ad G I. Igitur vt D F, ad E K, ita E K, ad G I; ac proinde E K, medium proportionale erit inter D F, G I, hoc est, inter A, & B. Quod est propositum.*

c 26. sexti. *Quod etiam in hunc modum confirmari potest: Cùm D F, G I, similia sint, similiterq; posita,* [c] *consistent ea circa eandem diametrum. Quare complementa E K, E L, æqualia erunt. Vt autem D F, ad E K, ita est*

d 1. sexti. *E L, ad G I,* [d] *quòd vtraque proportio eadem sit proportioni D E, ad E I. Igitur erit, vt D F, ad E K, ita E K, ad G I. Quod est propositum.*

V.

DATO rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterq; descripta cuicunque rectilineo, habeantq; inter se proportionem propositam quamcunque.



e 25. sexti.

SIT datum rectilineum A, datæq; proportio rectæ B, ad C, oporteat q; constituere duo rectilinea, quæ ipsi A, æqualia sint, habeantq; proportionem, quam B, & C; ac similia similiterq; posita sint rectilineo cuiusdam D. [e] *Constituatur rectilineum E F G H, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi D. Diuisa deinde latere eius E H, in I, secundùm proportionem B, ad C, ex ijs, quæ ad propos. 10. huius lib. demonstrauimus, describatur circa E H, semicirculus E K H, & ex I, ducatur ad E H, perpendicularis I K, connectanturq;*

f 18. sexti. *rectæ E K, H K.* [f] *Describantur iam super E K, K H, rectilinea E K L M, K H N O, ipsi E G, vel ipsi D, similia similiterq; posita; quæ dico æqualia etiam esse ipsi E G, seu ipsi A, habereq; proportionem datam B, ad C.*

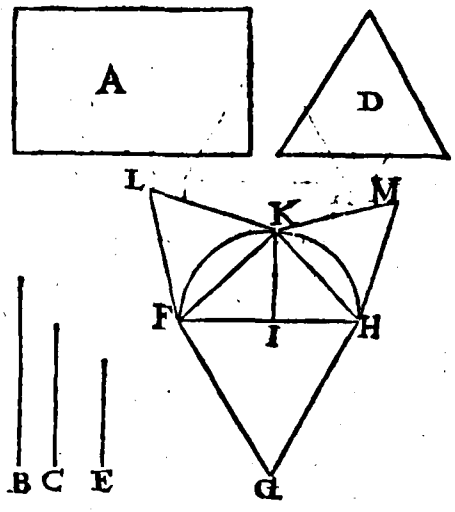
g 31. tertij. h 31. sexti. [g] *Cùm enim angulus E K H, in semicirculo existens rectus sit;* [h] *erunt rectilinea E L, H O, æqualia rectilineo E G, cùm*

i 4. sexti. *sint similia inter se, similiterq; descripta.* [i] *Quoniam verò est, vt E I, ad I K, ita E K, ad K H, cùm triangula E I K, E K H, similia sint: Est autem E I, ad I H, in proportione duplicata proportionis E I, ad I K; quòd tres E I,*

k 19. vel 20 sexti. *I K, I H, sint, ex corollario propos. 8. huius lib. proportionales:* [k] *Item E L, ad H O, in proportione duplicata eius, quam habet latus E K, ad latus homologum K H; erit vt E I, ad I H; hoc est, vt B, ad C, ita E L, ad H O. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo simul æqualia E L, H O, quæ similia sunt, similiterq; posita, dato rectilineo D, habentq; proportionem inter se datam B, ad C. Quod est propositum.*

VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterque descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam.



l 11. sexti. m 25. sexti. n 18. sexti. o 31. tertij. p 31. sexti. q 4. sexti.

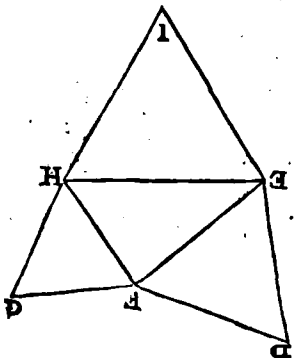
DETVR rectilineum A, & proportio recta B, ad rectam C; oporteat q; constituere duo rectilinea ipsi A, æqualia, & similia ipsi D, proposito, similiterq; posita, quorum latera homologa proportionem habeant, quam B, ad C. [l] *Inuentis ipsis B, C, tertia proportionali E;* [m] *fiat rectilineum F G H, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi D. Diuisoq; latere F H, in I, secundùm proportionem B, ad E, vt ad propos. 10. huius libri ostendimus; describatur circa F H, semicirculus F K H; & ex I, ducatur ad F H, perpendicularis I K, connectanturq; rectæ F K, H K.* [n] *Describantur iam super F K, H K, rectilinea F K L, H K M, ipsi F G H, vel ipsi D, similia similiterque posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi F G H, vel ipsi A, eorumq; latera homologa F K, H K, proportionem habere datam rectæ B, ad rectam C.* [o] *Cùm enim angulus F K H, in semicirculo rectus sit;* [p] *erunt rectilinea F K L, H K M, rectilineo F G H, ideoq; & rectilineo A, æqua-*

lia. [q] *Quoniam verò est, vt F I, ad I K, ita F K, ad H K, ob similitudinem triangulorum F I K, F K H: Est autem F I, ad I H, in proportione duplicata proportionis F I, ad I K; (q tres F I, I K, I H, proportionales sint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum F K, H K. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni F I, ad I H, ex constructione,) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio F K, ad H K, quæ B, ad C; quandoquidem ipsarum duplicatæ proportiones F I, ad I H, & B, ad E, æquales sunt. Constat ergo propositum.*

DVOBVS

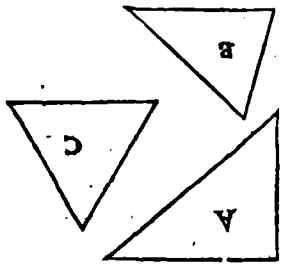
VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuius rectilineo dato.



Duo rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit construendum, simile similiterq; positum ipsi C. [a] *Fiat ipsi A, æquale D E F, simile autem similiterq; positum ipsi C. Item ipsi B, æquale constituatur G F H, simile verò eidem C, similiterq; positum. Deinde rectilinea D E F, G F H, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa E F, F H, constituant angulum E F H, rectum, cui subtendatur recta E H,* [b] *super quam describatur rectilineum, I H E, simile similiterq; positū ipsis D E F, G F H, hoc est, ipsi C.* [c] *Perfectum autem est E H I, æquale esse duobus D E F, G F H; atq; idcirco duobus A, & B. Quod est propositum.*

a 25. sexti.
b 18. sexti.
c 31. sexti.

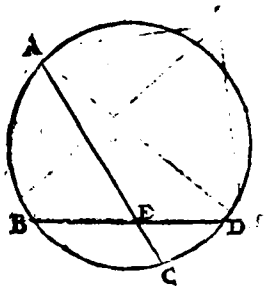


Brevius. Constituatur parallelogrammum æquale duobus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1. docuimus. [d] *Si enim huic parallelogrammo construxerimus æquale rectilineum E H I, quod simile sit, similiterq; positum alteri dato rectilineo C; constitutum erit rectilineum E H I, æquale duobus rectilineis A, B, & simile, similiterq; positum rectilineo C. Quod erat faciendum.*

d 25. sexti.

VIII.

SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secuerint: Erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca.

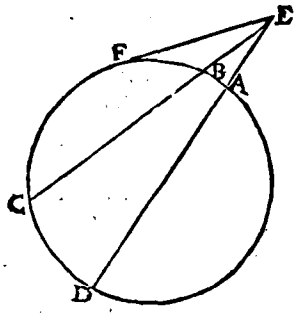


In circulo A B C D, se mutuò secent rectæ A C, B D, in E. Dico segmenta A E, E C, esse reciproca segmentis B E, E D: Hoc est, esse vt A E, ad B E, ita E D, ad E C: Vel vt A E, ad E D, ita B E, ad E C. [e] *Cùm enim rectangulum sub A E, E C, comprehensum æquale sit rectangulo sub B E, E D, contento;* [f] *erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum.*

e 35. tertij.
f 14. sexti.

IX.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quòd si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentum exterius.

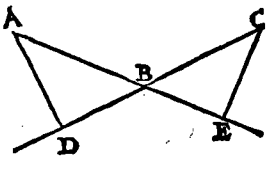


Extra circulum A B C D, sumatur punctum E, à quo cadant rectæ E C, E D, secantes circulum in A, & B. Dico rectas E C, E B, esse reciprocas rectis E D, E A: Hoc est, esse, vt E C, ad E D, ita E A, ad E B: Vel vt E C, ad E A, ita E D, ad E B. Ducta enim E F, tangete circulum in F, & erit rectangulum sub E C, E B, quadrato rectæ E F, æquale: Item rectangulum sub E D, E A, eidem quadrato rectæ E F, æquale. Quare & rectangula sub E C, E B, & sub E D, E A, æqualia erunt: [h] *Ac propterea latera eorum circa angulos æquales reciproca.* [i] *Quoniam autē quadrato rectæ E F, æquale est tam rectangulum sub E C, E B, quàm rectangulum sub E D, E A;* [k] *erunt tam tres rectæ E C, E F, E B, quàm tres E D, E F, E A, proportionales, atque adeò E F, media proportionalis inter quamlibet lineam, quæ circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.*

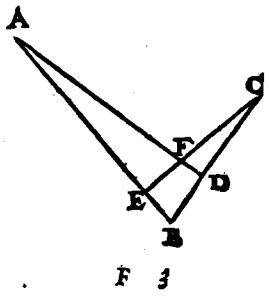
g 36. tertij.
h 14. sexti.
i 36. tertij.
k 17. sexti.

X.

SI duæ rectæ lineæ sese mutuò secuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuò demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & sectionem, altera verò inter sectionem, & prioris lineę assumptę perpendicularem interiicitur, aliis duabus eodem modo inclusis reciprocæ.



Duæ rectæ A B, C B, se mutuò secent in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares; A D, quidem ad C B, at verò C E, ad A B. quæ perpendiculares cadent in A B C B, protractas vltra B, si angulus A B C fuerit obtusus. in ipsas verò introrsum, si idem angulus acutus fuerit, vt figura indicant. Dico rectas A B, B E, (quarum prior interiicitur inter terminum A, & sectionem B: posterior verò inter sectionem B, & perpendicularem C E, quæ nimirum ad ipsam A B, assumptā ducitur) reciprocas esse duabus C B, B D, (quæ



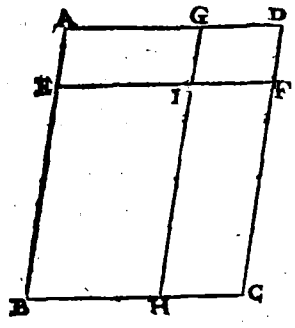
inter ſimiles terminos includuntur) hoc eſt, eſſe vt A B, ad B C, ita B D, ad B E: Vel vt A B, ad B D, ita B C, ad B E. Cùm enim anguli A B D, A D B, trianguli A B D, æquales ſint angulis G B E, C E B, trianguli C B E.

a 15. primi. *(Nam A D B, C E B, recti ſunt;* [a] *& A B D, C B E, ad verticem in priori figura æquales: in poſteriori autem*

b 4. ſexti. *vnus & idem angulus) erunt triangula A B D, C B E, æquiangula.* [b] *Quare erit vt A B, ad B D, ita C B, ad B E: Ac propterea permutando quoq; vt A B, ad B C, ita B D, ad B E. Quod eſt propoſitum.*

Porro eadem ratione ſegmenta perpendicularium A D, C E, in poſteriori figura ſe mutuò ſecantium

c 4. ſexti. *in F, erunt reciproca. Cùm enim triangula A F E, C F D, ſint æquiangula;* [c] *erit vt A F, ad F E, ita C F, ad F D: Et permutando quoq; vt A F, ad C F, ita F E, ad F D. Quod eſt propoſitũ.*



XI.

In parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ ſe mutuò ſecantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

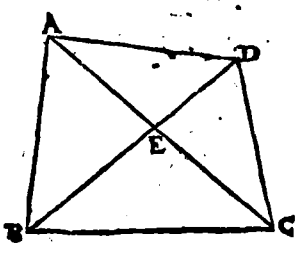
In parallelogrammo A B C D, duæ rectæ E F, G H, lateribus A D, D C, parallelæ ſe mutuò ſecent in I. Dico quatuor parallelogramma E G, G F, B I, I C, eſſe proportionalia. [d] *Cùm enim ſit, vt E I, ad I F, ita E G, ad G F: Item*

d 1. ſexti. *vt E I, ad I F, ita B I, ad I C;* [e] *erit quoq; vt E G, ad G F, ita B I, ad I C. Quod*

e 11. quinti. *eſt propoſitum.*

XII.

Omne quadrilaterum à duabus diametris ſe mutuò ſecantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.



Diuidant diametri A C, B D, ſe mutuò ſecantes in E, quadrilaterum A B C D. Dico quatuor triangula A E D, C E D, A E B, C E B, eſſe proportionalia. [f] *Erit enim vt A E, ad E C, ita triangulum A E D, ad triangulum C E D;* [g] *& triangulum A E B, ad triangulum C E B.* [g] *Quare vt triangulum A E D, ad triangulum C E D, ita triangulum A E B, ad triangulum C E B. Eademq; ratione oſtendes eſſe, vt B E A, ad D E A, ita B E C, ad D E C;* [h] *cùm vtraq; proportio eadem ſit proportioni B E, ad E D. Conſtat ergo propoſitũ.*

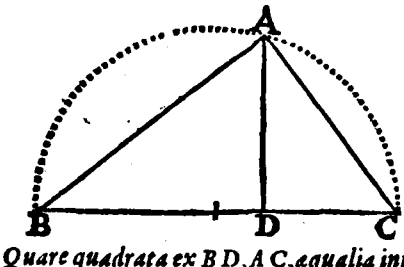
f 1. ſexti.

g 11. quinti.

h 1. ſexti.

XIII.

In triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demiſſa ſecat baſim extrema ac media ratione, tria latera ſunt continuè proportionalia. Et ſi tria latera trianguli rectanguli ſunt continuè proportionalia, perpendicularis ad baſim ex angulo recto demiſſa ſecat baſim extrema ac media ratione.



In rectangulo triãgulo A B C, ex angulo recto A, demiſſa perpendicularis A D, ſecet baſim B C, in D, extrema ac media ratione, ſitq; maius ſegmentum B D; ac proptꝛea ex theoremate 9. ad propoſ. 47. lib. 1. latus A B, latere A C, maius. Dico tria latera B C, B A, A C, eſſe continuè proportionalia. Quoniam enim per hypotheſin eſt vt B C, ad B D ita B D, ad D C; [i] *erit quadratũ ex B D, rectangulo ſub B C, C D, æquale. Rurſus quia ex coroll. propoſ. 8. huius lib. A C, media proportionalis eſt inter B C, C D;* [k] *erit quoque quadratum ex A C, eidem rectangulo ſub B C, C D, æquale.*

i 17. ſexti.

k 17. ſexti.

Quare quadrata ex B D, A C, æqualia inter ſe erunt, ac proinde & rectæ ipſæ æquales erunt. Eſt autem, ex corollario propoſ. 8. huius lib. A B, inter B C, B D, media proportionalis. Igitur eadem A B, media proportionalis erit inter B C, A C: hoc eſt, erit vt B C, ad A B, ita A B, ad A C. Quod eſt propoſitum.

Sint deinde tria latera B C, A B, A C, in triangulo rectangulo A B C, continuè proportionalia: hoc eſt, ſit B C, ad A B, vt A B, ad A C, demittaturq; perpendicularis A D, ad baſim B C. Dico B C, ſectam eſſe in D, extrema ac media ratione. Quoniam enim eſt, vt B C, ad A B, ita A B, ad A C: Eſt autem vt B C, ad A B, ita

l 11. quinti. *quoque A B, ad B D; quòd A B, media proportionalis ſit inter B C, B D, ex coroll. propoſ. 8. huius lib.* [l] *erit vt*

m 9. quinti. *A B, ad A C, ita A B, ad B D:* [m] *ac proinde æquales erunt A C, & B D.* [n] *Vt igitur A C, ad C D, ita erit B D, ad*

n 7. quinti. *C D. Sed vt A C, ad C D, ita eſt B C, ad A C, quod ex coroll. propoſ. 8. huius lib. A C ſit media proportionalis*

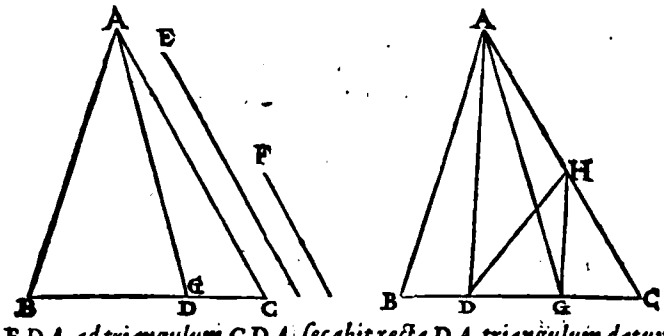
o 11. quinti. *inter B C, & C D.* [o] *Igitur erit quoq; B C, ad A C, hoc eſt, ad B D, vt A C, hoc eſt, vt B D, ad C D: ac propterea B C, in D, ſecta erit extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.*

Iam quòd ſi ſuper datam rectam B C, conſtruendum ſit triangulum rectangulum, cuius tria latera continuè proportionalia ſint, ſecanda erit data recta B C, extrema ac media ratione in D. Deſcripto deinde ſemicirculo B A C, circa eandem datam B C, erigenda erit ad B C, perpendicularis D A, iungendaq; recta B A,

p 31. tertij. *C A. Triangulum enim A B C, rectangulum erit,* [p] *cùm angulus B A C, in ſemicirculo rectus ſit; ac proinde cùm perpendicularis A D, ſecet baſim extrema ac media ratione; tria latera continuè proportionalia erunt, vt proximè demonſtratum eſt.*

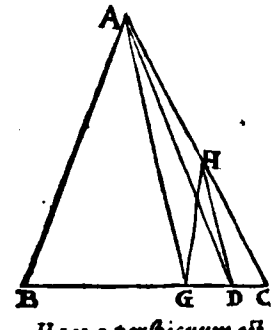
XIIII.

A' DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo ſegmenta, ſecundùm proportionem datam.



SIT triangulũ A B C, oporteatq; à dato puncto D in eius latere B C, lineam rectam ducere, quæ triangulum ſecet in duo ſegmenta ſecundùm proportionem datam E, ad F. Diuidatur B C, in G, ſecundùm proportionem E, ad F, cadatq; primò punctum G, in datum punctum D, vt in prima figura, ducaturq; recta D A. [a] *Quoniam igitur eſt vt B D, ad D C, ita triangulum B D A, ad triangulum C D A, ſecabit recta D A, triangulum datum ſecundùm proportionem datam B G, ad G C, hoc eſt, E, ad F. Quod erat faciendum.* a 1. ſexti.

CADAT deinde punctum G, inter C, & D, vt in ſecunda figura. Ducatur ergo recta D A, cui per G, parallela agatur G H, coniungaturq; recta D H. Dico rectam D H, ſecare triangulum datum ſecundùm proportionem datam, hoc eſt, eſſe trapezium B D H A, ad triangulum C D H, vt E, ad F, ſeu vt B G, ad G C. Ducta enim recta G A; [b] *erunt triangula H G A, G H D, æqualia, cùm ſint ſuper eandem baſin G H, & inter eaſdem parallelas G H, D A. Addito igitur communi triangulo C G H, fient æqualia triangula C G A, C D H:* [c] *Ac proinde triangulum A B C, eandem habebit proportionem ad C G A, & ad C D H.* [d] *Diuidendo igitur, erit vt triangulum B G A, ad triangulum C G A, ita trapezium B D H A, ad triangulum C D H.* [e] *Eſt autem B G A, ad C G A, vt B G, ad G C. Igitur erit & trapezium B D H A, ad triangulum C D H, vt B G, ad G E, hoc eſt, vt E, ad F. Quod eſt propoſitum.* b 37. primi. c 7. quinti. d 17. quinti. e 1. ſexti.

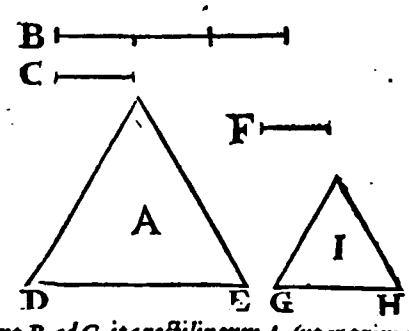


CADAT tertiò punctum G, inter E, & D, ducaturq; recta D A, cui rurſus per G, agatur parallela G H. Dico igitur rurſus rectam ductam D H, ſecare triangulum A B C, ſecundùm proportionem datam E, ad F, hoc eſt, eſſe triangulum E D H, ad trapezium C D H A, vt E, ad F. Ducta enim recta G A; [f] *erunt, vt prius, triangula H G A, G H D, æqualia; additoq; communi B G H, æqualia fient B G A, B D H.* [g] *Quare erit A B C, ad B G A, vt ad B D H.* [h] *Diuidendo ergo erit C G A, ad B G A, ita trapezium C D H A, ad triangulum B D H, & conuertendo, vt B G A, ad C G A, ita B D H, ad trapezium C D H A.* [i] *Eſt autem B G A, ad D G A, vt B G, ad G C. Igitur & B D H, ad trapezium C D H A, erit vt B G, ad G C, hoc eſt, vt E, ad F. Quod eſt propoſitum.* f 37. primi. g 7. quinti. h 17. quinti. i 1. ſexti.

HINC perſpicuum eſt, quonam modo imperata pars ex triangulo ſit auferenda per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam à dato puncto ductam diuidatur triangulum ſecundùm proportionem multiplicem, cuius denominator vnitate minor ſit denominatore partis imperatæ, (vt ſecundùm proportionem triplam, ſi quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, vt manifeſtum eſt. Habebit enim tunc totum triangulum ad ſegmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis eſt denominatori partis propoſitæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis aſſumptæ addatur vnitas, quæ antè deerat.

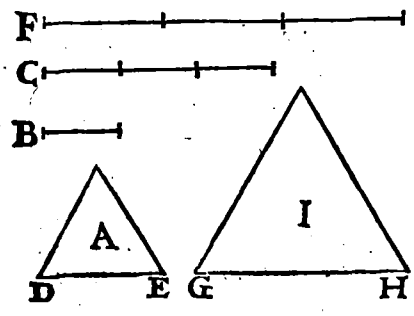
XV.

DATO rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum rectilineum deſcribere, maius, vel minus, ſecundùm proportionem datam.



SIT rectilineum datum A, cui ſimile ſimiliterq; poſitum ſit deſcribendum maius, ſecundùm proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & D E, (ſit autem D E, vnum latus rectilinei dati quodcunq; [k]*) inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus D E, & F,* [l] *inueniatur media proportionalis G H;* [m] *ſuper quam ipſi A, deſcribatur rectilineum I, ſimile, ſimiliterque poſitum. Dico I, maius eſſe, quàm A, ſecundùm proportionem datam B, ad C. Cùm enim proportionales ſint tres rectæ D E, G H, & F, erit per corollarium propoſitionis 19. vel 20. libri huius, vt D E, prima ad F, tertiam, hoc eſt, per conſtructionem, vt B, ad C, ita rectilineum A, ſuper primam ad rectilineum I, ſuper ſecundam, illi ſimile ſimiliterq; poſitum. Quod erat faciendum.* k 12. ſexti. l 13 ſexti. m 18. ſexti.

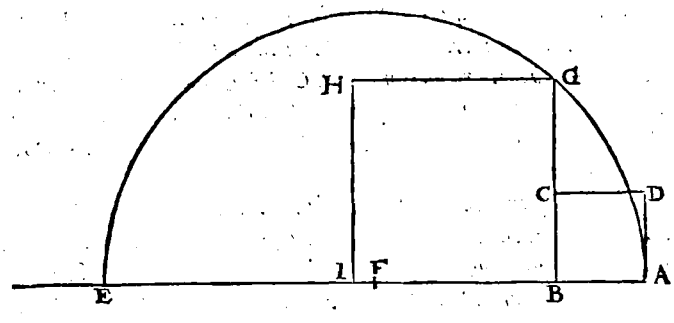
NON ſecus dato rectilineo A, minus rectilineum I, deſcribemus, illi ſimile, ſimiliterque poſitum, ſecun-



dum proportionem datam B, ad C. Veluti in hac figura factum esse cernis. Eadē enim prorsus est constructio, atq; demonstratio.

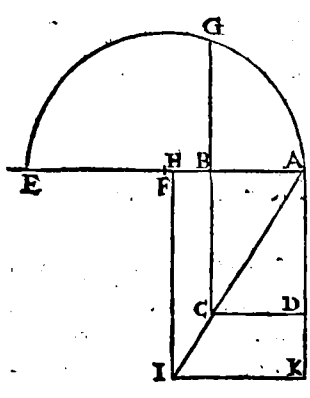
FACILE *igitur ex his quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, &c. Atq; aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet similitudo. Si namq; proportio B, ad C, sumatur vt 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua verò perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterq; descriptum, quod propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.*

NON *videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facilè duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunque oblatū. Ex hac enim construemus quoq; rectilineum simile similiterq; descriptum cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tametsi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, sed eam simpliciter proponit; non multum tamen eius demonstratio à præcedenti differt, vt mox ostendemus.*



SIT igitur quadratum A B C D, quintuplicandum. Producto latere A B, ad partes B, quantumlibet, sumātur quinque partes ipsi A B, æquales, à puncto B, incipiendo, vsq; ad E, vt sit B E, quintupla ipsius A B. Diuisa deinde tota A E, bifariam in F, describatur ex F, ad interuallum F A, vel F E, semicirculus A G F, producaturq; latus B C, ad circunferentiam vsque in G. Dico quadratum B G H I, ex B G descriptū, quintuplum esse quadrati A B C D. Erit enim per corollarium propos. 13. huius libri B G, media proportionalis inter E B, B A. Igitur erit vt E B, prima ad B A, tertiam, ita B H, quadratum secundæ, ad A C, quadratum tertiæ, ex corollario propos. 20. huius libri. Est autem E B, per constructionem, ipsius A B, quintupla. Igitur & quadratū B H, quadrati A C, quintuplum erit. Quod est propositum.

QVOD *si recta B E, sumatur sextupla lateris A B, erit & quadratum rectæ B G, quadrati A B C D, sextuplum: Si autem B E, fuerit tertia pars ipsius A B, erit & quadratum B H, tertia pars quadrati A C. Denique in quacunque proportione sumatur B E, ad A B, eandem habebit quadratum B H, ad quadratum A C.*



2 24. sexti.

SIT rursus rectangulum A B C D, cui inueniendum sit simile similitérque positum, quod duplum sit ipsius. Ex latere A B, producto sumatur B E, dupla ipsius A B. Diuisa deinde tota A E, bifariam in F, & ex F, descripto semicirculo, vt prius, & producta C B, ad G; erit B G, vnum latus rectanguli quæsiti. Quare si abscindatur A H, æqualis ipsi B G, & per H, agatur ipsi B C, parallela H I, occurrens diametro A C, protractæ in I, perficiaturq; parallelogrammum H K; [2] erit H K, ipsi B D, simile similiterq; positum. quod etiam aio duplum esse ipsius B D. Cùm enim proportionales sint tres rectæ E B, B G, B A, ex corollario propos. 13. huius libri; Erit vt prius, sicut E B, prima ad B A, tertiam, ita rectangulum H K, supra A H, secundam (sumpta enim fuit A H, ipsi B G, secundæ æqualis) ad rectangulum B D, supra tertiam A B, quod est simile similiterq; descriptum. Quod est propositum.

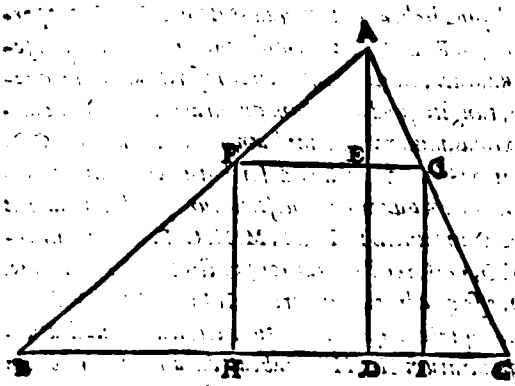
EODEM *modo, si supra A B, constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex B G, illi simile, similiterq; positum describitur, ipsius duplum. Atq; in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex B G, ad rectilineum simile ex A B, quam habere ponetur recta E B, ad rectam B A, ex constructione.*

PERSPICVVM *autem est, hanc praxim vnà cum eius demonstratione à nostra anteà tradita nō differre, nisi quòd hac simul tradit inuentionē lineæ mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas E B, B A, quæ proportionem habent datam, vt statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.*

XVI.

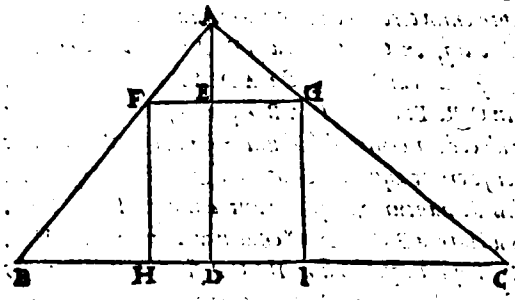
IN dato triangulo quocunque quadratum describere.

SIT

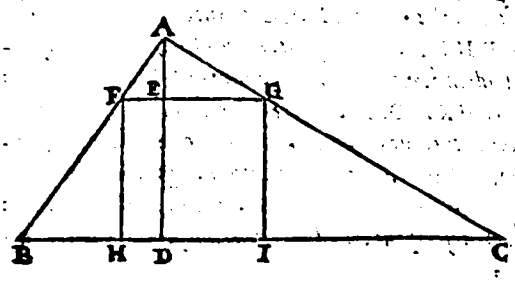


Sit datum triangulum A B C, acutangulum, Ex angulo quocunque A, ad B C, perpendicularis demittatur A D, quæ intra triangulum cadet, ex scholio propoſ. 12. libri 2. Has autem in E, ita ſecetur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius libri docuimus, vt eadem ſit proportio A E, ad E D, quæ A D, ad B C. Deinde per E, agatur F G, ipſi B C, parallela. Poſtremo ex F, & G, ipſi D E, parallelæ ducantur F H, G I. Dico F G I H, rectilineum triangulo A B C, inſcriptum, eſſe quadratum. Cùm enim F G, ipſi B C, ſit parallela; erit vt B D, ad D C, ita F E, ad E G, ex ſcholio propoſit. 4. huius lib. & componendo, vt B C, ad D C, ita F G, ad E G. [a] Sed vt D C, ad A D, ita eſt E G, ad A E; quòd & coroll. propoſ. 4. huius lib. triangula A D C, A E G, ſint ſimilia. [b] Igitur erit ex æquo, vt B C, ad A D, ita F G, ad A E. Quia verò per conſtructionẽ eſt, vt A D, ad B C, ita A E, ad E D; [c] erit rurſus ex æquo, vt B C, ad B C, ita F G, ad E D. Eſt autẽ B C, ipſi B C, æqualis, immò eadẽ. Æqualis igitur eſt & F G, ipſi E D. [d] Quare vtraque F G, ipſi H D, & E D, ipſis F H, G I, æqualium eſt; Erunt quatuor latera F G, G I, I H, H F, æqualia inter ſe. [e] Et quia anguli B D H, F H D, duobus rectis æquales ſunt: Eſt autem E D H, per conſtructionem, rectus; erit & F H D, rectus. Quocirca per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2. demonſtrauimus, & reliqui anguli H F G, F G I, G I H, recti ſunt: ac proinde F I, quadratum eſt. Quod eſt propoſitum.

a 24. ſexti.
b 22. quinti.
c 22. quinti.
d 34. primi.
e 29. primi.



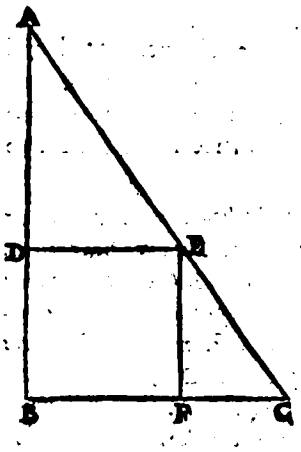
Non ſecus idem problema ſolueremus, ſi datũ triangulum fuerit rectangulum, vel obtuſangulum, dummodo ex angulo recto, vel obtuſo perpendicularem demittamus, vt in poſterioribus duobus triangulis apparet. Ita enim ſemper cadet perpendicularis A D, intra triangulum, ex ſcholio propoſitionis 13. lib. 2.



Quod ſi in triangulo rectangulo quadratum deſcribere libeat, ita vt duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum ſint aliquot diuidemus perpendicularẽ A B, in D, ita vt eadem ſit proportio A D, ad D B, quæ A B, ad B C, & per D, quidem ipſi B C, parallelam ducemus D E; per E, verò ipſi A B, aliam parallelam E F. [f] Quoniam igitur eſt, vt B C, ad A B, ita D E, ad A D; quòd triangula A B C, A D E, ſimilia ſint, per coroll. propoſ. 4. huius libri. Eſt autem per conſtructionem, vt A B, ad B C, ita A D, ad D B, & erit ex æquo, vt B C, ad B C, ita D E, ad D B: Eſt autem B C, ſibi ipſi æqualis, immò eadem. Æqualis igitur eſt & D E, ipſi D B. Quare vt prius, D E F B, quadratum eſt. Quod eſt propoſitum.

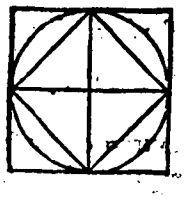
f 4. ſexti.
g 22. quinti.

Verùm hoc problemate Geometrarum multò ingenioſius eſt id, quod ſequitur.



XVII.

Intra datum quadratum, aliud quadratum deſcribere in data proportione maioris inæqualitatis. Oportet autem datam proportionem dupla non eſſe maiorem.



Sit quadratum A B C D, intra quod deſcribẽdum ſit quadratum, ad quod habeat quadratum A B C D, proportionem eandem maioris inæqualitatis, quàm recta E, ad rectam F, quæcunque ea ſit, dummodo maior non ſit, quàm dupla. Nam ſi latera quadrati ſecentur bifariam, punctaq; diuiſionum rectis iungantur lineis, inſcriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finẽ libri 4. demõſtrauimus, idem cum eo centrum habens. Et quia circulus intra quadratum A B C D, deſcriptus eſt quadrato illi inſcripto: circumſcriptus, vt in hac figura perſpicuum eſt, erit quadratum A B C D, illius quadrati inſcripti duplum, ex ſcholio propoſ. 9. lib. 4. Cùm ergo minus quadratum intra quadratum A B C D, deſcribi nequeat, quàm illud, cuius circulus circumſcriptus latera quadrati A B C D, tangit, vt patet: liquidò conſtat, quadratum A B C D, ad nullum quadratum inſcriptum proportionem poſſe habere duplam maiorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quàm dupla; nimirum ſeſquialtera. Inueniatur ex propoſ. 13. huius ſcholij

quadratum, ad quod habeat datum quadratum A B C D, proportionem datam E, ad F. Erit q̃ eius semidiameter maior, quàm semidiameter quadrati, cuius circulus circumscriptus latera quadrati A B C D, tangit; quod nimirum quadrati A B C D, subduplum est, vt diximus, minor verò semidiametro quadrati A B C D. Igitur si ex centro G, quadrati dati describatur circulus aequalis ei, qui circa inuentum quadratum describitur, secabit is latera quadrati A B C D, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ H K, K M, M O, O H, relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico H K, M O, esse quadratum in circulo H I K L M N O P, descriptum, atq; adeò aequale ei, quod inuentum est, ita vt quadratum A B C D, ad quadratum H K M O, habeat datam proportionem E, ad F. Descripto enim circulo circa datum quadratum A B C D, ex centro G, ductiq; ex G, ad latera A D, A B, perpendicularibus G Q, G R, a *secta erunt tam rectæ A D, A B, quàm rectæ H I, O P, bifariam in Q, R. Et quia A D, A B, aequales sunt,* b *aequaliter*

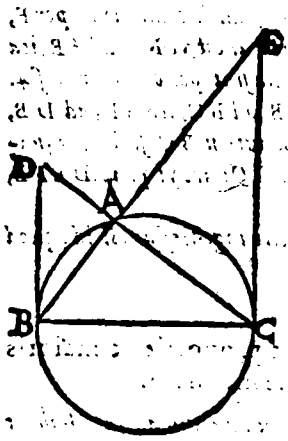
a 3. tertij.
b 14. tertij.
c 14. tertij.

distabunt à centro G, propterea q̃ & H I, O P, aequaliter ab eodem centro distabunt. c *Quare aequales erunt H I, O P, ideoq; & earum semisses Q H, Q I, R O, R P, inter se erunt aequales. Sunt autẽ & semisses Q A, Q D, R A, R B, aequalium laterum aequales. Igitur si illæ ab his demantur, reliquæ erunt aequales H A, D I, P A, O B. Eadem q̃ ratione, si ducantur aliæ perpendiculares ad latera B C, C D, ostendentur aequales N B, M C, L C, K D, & inter se, & illis quatuor H A, D I, P A, O B. Itẽm quia aequales sunt H I, O P, si addantur aequales I D, P A, fient totæ aequales H D, A O: atq; eadem de causa aequales erunt B M, K C, & inter se, & illis duabus H D, A O. Itaq; quia duo latera A O, A H, duobus lateribus D H, D K, aequalia sunt, angulos q̃ continent aequales, nimirum rectos;* d *erunt & bases H K, H O, aequales. Eodem q̃ modo demonstrabuntur K M, M O, aequales & inter se, & duabus H K, H O. Aequilatera ergo est figura H K M O. Dico & rectangulam esse. Cùm enim latera H K, K M, M O, O H, aequalia sint,* e *erunt & quatuor arcus, quos subtendunt, aequales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi ergo sunt O H K, H K M, K M O, M O H,* f *ac proinde quatuor anguli H, K, M, O, in illis semicirculis recti erunt. Igitur H K M O, quadratum est, atque adeò inuento quadrato aequale, cùm idem circulus vtrumque circumscribat. Circulus enim H K M O, descriptus est ad internallum semidiametri circuli, inuento quadrato circumscripti. Quod est propositum.*

d 4. primi.
e 28. tertij.
f 31. tertij.

XVIII.

Si ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemq; punctum circunferentiæ duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus; erit rectangulum comprehensum sub vtralibet secantium, & eius segmento interiore, quadrato diametri æquale.

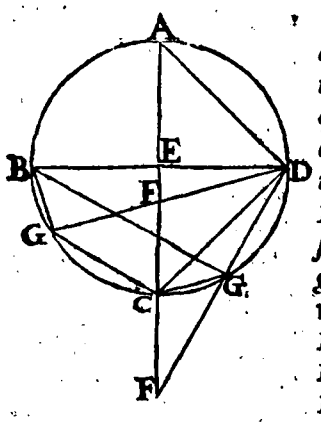


Hæc propositio est Cardani libro 16. de Subtilitate, capite 1. sicut & quæ sequitur. Vtramque autem demonstrauit Ioannes Baptista Benedictus. Sit ergo circulus A B C, cuius diameter B C, ad quam in B, C, excitentur duæ perpendiculares B D, C E, ac per assumptum quodvis punctum A, in circunferentia ex eisdem punctis B C, adductæ rectæ B A, C A, secent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum sub E B, B A, quàm sub D C, C A, quadrato diametri B C, aequale esse. Quoniam enim in triangulo rectangulo B C E, ex angulo recto C, demissa est C A, ad basin B E, perpendicularis; & quòd angulus B A C, in semicirculo rectus sit: erit ex corollario propositionis 8. huius libri B C, media proportionalis inter E B, B A. Quare h *rectangulum sub extremis E B, B A, aequale erit quadrato mediæ B C. Eadem q̃ ratione eidem quadrato aequale erit rectangulum sub D C, C A: propterea quòd B C, media quoq; proportionalis est inter D C, C A, ex eodem corollario propositionis 8. huius libri. Constat ergo id, quod proponitur.*

g 31. tertij.
h 17. sexti.

XIX.

Si in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circunferentiam, & alteram diametrum, siue productam, siue non productam; erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ: quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum verò inter idem punctum extremum, & circunferentiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum descripto.



In circulo A B G D, cuius centrum E, ſecent ſe ad angulos rectos duæ diametri A C, B D, ducaturq; ex puncto D, recta vtcunq; D F, ſecans diametrum A C, in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulum ſub F D, D G, quadrato intra circulum deſcripto eſſe æquale. Ductis enim rectis D C, C G, erunt triangula D C F, D C G, æquiangula inter ſe. Nam angulus C D F, cõmunis eſt, & angulus D C F, angulo D G C, æqualis, [a] *ac proinde & reliquus D F C, reliquo D C G, æqualis. Quòd autem anguli D C F, D G C, æquales ſint, ita oſtendemus. Si punctum quidem F, eſt intra circulum;* [b] *erunt anguli D C F, D G C, inſiſtentes quadrantibus æqualibus A D, D C, æquales: Si verò punctum F, eſt extra circulum, ducta recta A D,* [c] *erunt anguli D A C, D C A, inſiſtentes quadrantibus æquales:* [d] *Sed tam D A C, D G C,* [e] *quàm D C A, D C F, æquales ſunt duobus rectis. Igitur ablatis æqualibus D A C, D C A, reliqui D G C, D C F, æquales quoq; erunt. Quam ob rem, cum triangula D C F, D C G, æquiangula ſint;* [f] *erit vt D F, ad D C, ita D C, ad D G: hoc eſt, tres lineæ D F, D C, D G, continuè proportionales erunt.* [g] *Igitur rectangulum ſub extremis D F, D G, æquale eſt quadrato mediæ D C, hoc eſt quadrato intra circulum deſcripto, cum D C, latus ſit quadrati circulo inſcripti, vt conſtat ex propoſ. 6. lib. 4. Quod eſt propoſitum.*

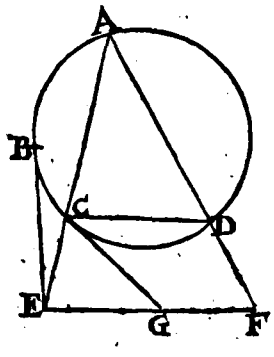
a 32. primi.
b 27. tertij.
c 27. tertij.
d 22. tertij.
e 13. primi.
f 4. ſexti.
g 17. ſexti.

Aliter. Ducta recta B G, [h] *erit angulus B G D, in ſemicirculo rectus; atq; idcirco duo triãgula B G D, D E F, cum habeant angulos rectos B G D, D E F, & angulum B D G, vel E D F, communem,* [i] *æquiangula erunt.* [k] *Igitur erit, vt D F, ad D E, ita D B, ad D G.* [l] *Rectangulum ergo ſub D F, D G, æquale erit rectangulo ſub D B, D E.* [m] *Sed rectangulo ſub D B, D E, æquale eſt quadratã recta A D, hoc eſt, quadratum circulo inſcriptum; propterea quòd ex coroll. propoſ. 8. huius lib. A D, media proportionalis eſt inter D B, D E, vt patet, ſi ducatur recta A B.* [n] *Fiet enim triangulum rectangulum B A D, & ex angulo recto perpendicularis demiſſa erit A E. Igitur & rectangulum ſub D F, D G, eidem quadrato rectæ A D, æquale erit. Quod eſt propoſitum.*

h 31. tertij.
i 32. primi.
k 4. ſexti.
l 16. ſexti.
m 17. ſexti.
n 31. tertij.

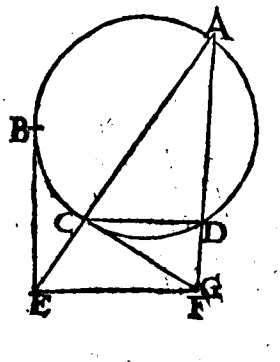
XX.

Dato circulo, & duobus punctis ſiue extrà circulum, ſiue intra, dummodo neutrum ſit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam ſecant, parallela ſit rectæ data duo puncta connectenti.



Hoc problema non minus acutum quàm curioſum in tres propoſitiones Pappus diſtribuit: quod nos in vnam redigentes multò clarius demonſtrabimus. Sit ergo circulus A B C D, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, qua per rectam E F, coniungantur. Si igitur ex E, F, ducenda ſint rectæ ad aliquod punctum concauæ circumferentiæ, & c. ita agemus. Ex E, ducatur recta E B, tangens circulum in B, & duabus E F, E B, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis ſit E G cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando E F, maior eſt, quàm E B. Ducta igitur G C, recta circulum tangente in C, verſus priorem tangentem E B, ducatur ex E, per C, recta ſecans concauam peripheriam in A, iungaturq; recta A F, ſecans circumferentiam in D. Dico ductam rectam C D, ipſi E F, parallelam eſſe. Quoniam enim tres rectæ E F, E B, E G, continuè proportionales ſunt, [o] *erit rectangulum ſub E F, E G, quadrato ex E B, æquale:* [p] *Eſt autem eidem quadrato ex E B, æquale rectangulum ſub E A, E C. Igitur rectangulum ſub E F, E G, rectangulo ſub E A, E C, æquale erit: ac proinde ex ſcholio propoſit. 36. libri 3. per quatuor puncta A, C, G, F, circulus deſcribi poterit.* [q] *Duo ergo anguli C A F, C G F, oppoſiti in quadrilatero A C G F, intra eũ circulum deſcripto æquales ſunt duobus rectis, ideoq; duobus angulis ad G,* [r] *qui duobus etiam rectis æquales ſunt, æquales. Dempto igitur communi C G F, erit reliquus C G E, reliquo A, æqualis:* [s] *Eſt autem & angulus D C G, angulo A, in alterno ſegmento æqualis. Igitur anguli D C G, C G E, inter ſe æquales erũt, atq; ideò, cũ ſint alterni,* [t] *recta C D, E F, parallelæ erunt. Quod eſt propoſitũ.*

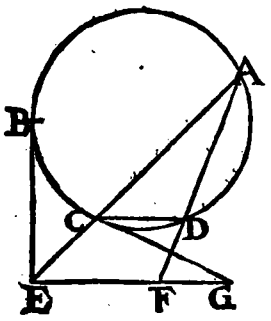
o 17. ſexti.
p 36. tertij.
q 22. tertij.
r 13. primi.
s 32. tertij.
t 27. primi.



Cadat deinde punctum G, in punctum F. quod accidit, quando E F, ipſi E B, æqualis eſt. Ducta igitur rurſus recta G C, circulum tangente in C, verſus priorem tangentem E B, ducatur ex E, per C, recta concauam peripheriam ſecans in A, iungaturq; recta A F, ſecans circunferẽtiam in D. Dico rurſus ductam rectam C D, ipſi E F, eſſe parallelam. Quoniã enim æquales ſunt, E B, E F, [u] *eſtq; rectangulum ſub A E, E C, quadrato ex E B, æquale: erit quoque idem rectangulum quadrato ſub E F, æquale. Quare* [x] *ſi circa triangulum A C F, circulus deſcribatur, cùm eum ſecet recta E A, recta autem E F, eidem applicetur,* [y] *tanget recta E F, eum circulum.* [z] *Angulus ergo E F C,*

u 36. tertij.
x 5. quarti.
y 37. tertij.
z 32. tertij.

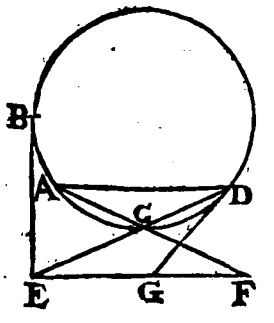
a 32. tertij. angulo A, in alterno ſegmento illius circuli æqualis erit: [a] Eſt autem & angulus F C D, eidem angulo A, in alterno ſegmento circuli A B C D, æqualis. Igitur æquales inter ſe erunt anguli E F C, F C D: qui cùm ſint alterni, b 27. primi. [b] erunt rectæ C D, E F, parallelæ. Quod eſt propoſitum.



c 17. ſexti. d 36. tertij. e 21. tertij. f 32. tertij. g 27. primi.

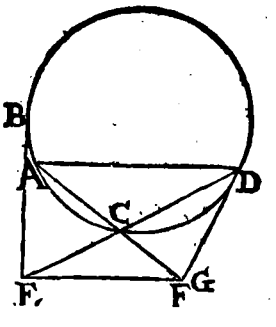
CADAT tertiò punctum G, vltra F. quod contingit, quando E F, minor eſt quàm E B. Facta igitur eadem conſtructione, quoniam tres rectæ E F, E B, E G, continuè proportionales ſunt, [c] erit rectangulum ſub E F, E G, quadrato ex E B, æquale: [d] Eſt autem eidem quadrato ex E B, æquale rectangulum ſub A E, E C. Igitur rectangulum ſub E F, E G, hoc eſt, ſub E G, E F, rectangulo ſub E A, E C, æquale erit: ac proinde ex ſcholio propoſitionis 36. libri 3. per quatuor puncta A, C, F, G, circulus deſcribi poterit, [e] Duo ergo anguli A, G, in eodem ſegmento C A G F, illius circuli, cuius chorda eſſet ducta recta C F, inter ſe æquales erunt: [f] Eſt autem angulus G C D, angulo A, in alterno ſegmento dati circuli A B C D, æqualis. Igitur idem angulus G C D, angulo G, æqualis erit: ac proinde, cùm duo hi anguli ſint alterni, [g] parallelæ erunt C D, E F. Quod eſt propoſitum.

SI verò ex eiſdem punctis datis E, F, ducendæ ſint duæ rectæ ad aliquod punctum conuexæ circunferentiæ, quæ productæ ſecent concauam peripheriam in duobus punctis, ita vt recta per ea tranſiens ſit parallela rectæ punctis E, F, connectenti, hoc modo procedemus. Ducta recta E B, circulum tangente in B, inueniatur duabus rectis E F, E B, tertia proportionalis E G, eadémque primum G, punctum inter E, F. Ducta igitur ex G, recta G D, tangente circulum in D, non tamen verſus priorem tangentem E B, ducatur E D, ſecans circunferentiam in C, puncto, per quod recta ejiciatur ex F, ſecans circunferentiam in A. Dico rectam A D, ductam eſſe rectæ E F, parallelam. Quoniam enim tres rectæ E F, E B, E G, continuè ſunt proportionales, [h] erit rectangulum ſub E F, E G, quadrato ex E B, æquale: [i] Eſt autem & rectangulum ſub E D, E C, eidem quadrato ex E B, æquale. Igitur æqualia inter ſe erunt rectangula ſub E F, E G, & ſub E D, E C: ac proinde ex ſcholio propoſitionis 36. lib. 3. per quatuor puncta C, D, F, G, circulus deſcribi poteſt. [k] Duo ergo anguli C D G, & F, in eodem ſegmento C D F G, illius circuli, cuius chorda eſſet ducta recta C G, inter ſe erunt æquales. [l] Eſt autem angulus C D G, angulo A, in alterno ſegmento dati circuli A B C D, æqualis. Igitur & angulus F, angulo A, alterno æqualis erit, [m] ideóq; parallelæ erunt A D, E F. Quod eſt propoſitum.



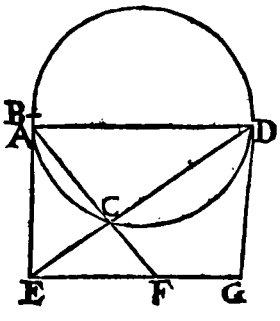
h 17. ſexti. i 36. tertij. k 21. tertij. l 32. tertij. m 27. primi.

CADAT deinde punctum G, in F. Ducta igitur rurſus recta G D, tangente circulum in D, non tamen verſus priorem tangentem E B, ducatur recta E D, ſecans circunferentiam in C, puncto, per quod recta ducta ex F, ſecet circunferentiam in A. Dico ductam rectam A D, rectæ E F, parallelam eſſe. Cùm enim æquales ſint E B, E F, (quòd ſit E F, ad E B, vt E B, ad E F.) erunt earum quadrata æqualia: Eſt autem rectangulum ſub E D, E C, quadrato ex E B, æquale. Igitur & quadrato ex E F. Quia ergo, [n] ſi circa triangulum C D F, circulus deſcribatur, recta E D, eum ſecat, & E F, applicata eſt, [o] tanget E F, eum circulum. [p] Angulus ergo E F C, angulo F D E, in alterno ſegmento eius circuli æqualis erit: [q] Eſt autem angulus F D E, angulo A, in alterno ſegmento circuli A B C D, æqualis. Igitur & angulus E F C, eidem angulo A, alterno æqualis erit. [r] Quare parallelæ erunt A D, E F. Quod eſt propoſitum.



n 5. quarti. o 37. tertij. p 32. tertij. q 32. tertij. r 27. primi.

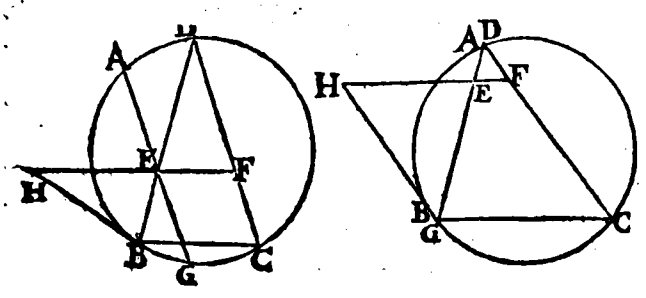
CADAT tertiò punctum G, vltra F. Facta ergo eadem conſtructione, cùm tres rectæ E F, E B, E G, ſint continuè proportionales, [s] erit rectangulum ſub E F, E G, ſiue ſub E G, E F, æquale quadrato ex E B: [t] Eſt autem eidem quadrato æquale rectangulum ſub E D, E C. Igitur rectangulum ſub E G, E F, rectangulo ſub E D, E C, æquale erit: propterea q, ex ſcholio propoſitionis 36. libri 3. circa quatuor puncta C, D, G, F, circulus poteſt deſcribi. [u] Duo ergo anguli E D G, C F G, oppoſiti in quadrilatero C D G F, intra eum circulum deſcripto, æquales erunt duobus rectis, ac proinde æquales duobus angulis ad F, [x] qui etiam duobus ſunt rectis æquales. Dempto ergo communi C F G, reliquus C D G, reliquo C F E, æqualis erit: [y] Eſt autem angulus G D C, angulo A, in alterno ſegmento dati circuli A B C D, æqualis. Igitur & angulus C F E, eidem angulo C A D, alterno æqualis erit: [z] atque idcircò parallelæ erunt A D, E F. Quod eſt propoſitum.



s 17. ſexti. t 36. tertij. u 22. tertij. x 13. primi. y 32. tertij. z 27. primi.

SED ſint iam data puncta E, F, intra circulum A B C D. Ducta recta A G, per E, vtcunque, inueniatur

tribus



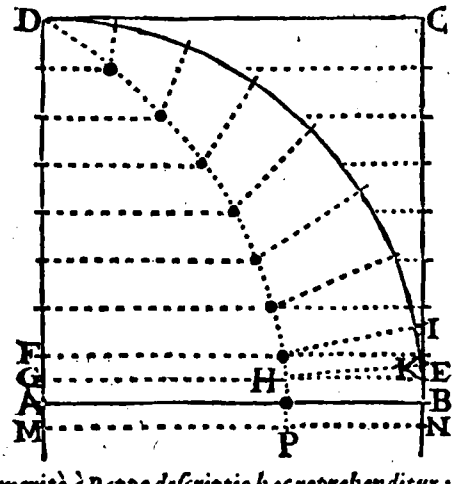
tur tribus rectis E F, E A, E G, quarta proportionalis, cui æqualis sit E H,) cadétque necessariò punctũ H, extra circulũ. [a] Nam cùm rectangulum sub E F, E H, æquale sit rectangulo sub E A, E G; fit vt, si H, dicatur esse in circunferẽtia, describi possit circulus circa quatuor puncta A, F, G, H, ex scholio propos. 35. lib. 3. quod absurdum est, cùm circulus per tria puncta A, G, & H, in circunferentia descriptus transeat vltra F. Non ergo H, est in circunferentia. A fortiori non erit intra circulum: cadit ergo extra.) ducatur q; H B, circulum tangens in B. Ducta enim recta ex B, per E, secante circunferentiam in D, & ex D per F, recta secante circunferẽtiam in C; dico ductã rectam B C, parallelam esse rectæ E F. Quia enim ita est E F, ad E A, vt E G, ad E H; [b] erit rectangulum sub E F, E H, æquale rectangulo sub E A, E G: [c] Est autem rectangulum sub E A, E G, æquale rectangulo sub E D, E B. Igitur & rectangulum sub E F, E H, eidem rectangulo sub E D, E B, æquale erit; ac propterea ex scholio propos. 35. lib. 3. circa quatuor puncta B, H, D, F, circulus poterit describi. [d] Quare duo anguli H B D, & D F H, in eadem segmento D F B H, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta D H, æquales erunt. [e] Est autem angulus H B D, angulo C, in alterno segmento dati circuli A B C D, æqualis. Igitur & angulus D F H, angulo eidem C, æqualis erit, externus interno. [f] Parallelæ ergo sunt rectæ B C, E F. Quod est propositum.

a 16. sexti.
b 16. sexti.
c 35. tertij.
d 21. tertij.
e 32. tertij.
f 28. primi.

QVOD si contingat, tangentem H B, cadere in punctum G, non erit ducenda alia linea B D, sed A G, quæ in principio ducta est, propositum concludet, vt perspicuum est in secunda figura.

DE MIRABILI NATVRA LINEÆ CVIVS-dam inflexæ, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima perficiuntur.

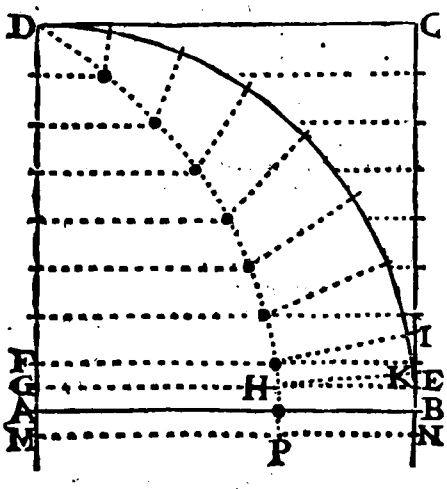
FORTE superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam, vt ait, Dinostratus, & Nicomedes, & nonnulli iuniores excogitârunt ad circuli quadraturam, ideoq; ab officio τετραγωνίζουσα ab eisdem appellata est, à nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quanquam autem prædicti auctores huiusmodi lineam conentur describere per duos motus imaginarios duarũ rectarum, quæ in re principium petunt, vt propterea à Pappo reijciatur, tanquam inutilis, & quæ describi non possit: nos tamen eam sine illis motibus Geometricè describemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse censuimus; propterea quòd beneficio huius lineæ problemata Geometrica scitu periucunda, & quæ ad hunc vsque diem desiderata sunt, summa facilitate conficiuntur. Id quod ad finem libri 4. facturos nos hoc loco recepimus, reyciendo tamen pleniorem Quadraturæ circuli tractationem in librum de mensurationibus magnitudinum. Sic ergo descriptio lineæ Quadratricis fiet.



IN quadrato A B C D, describatur quadrans B D. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam semidiameter A D, æquabiliter ferri intelligatur circa centrum A, q; latus supremum C D, deorsum versus æquabiliter quoque, ita vt quo tempore punctum D, circunferentiam D B, vniformi semper motu percurrit, eodem recta D C, vniformi etiam motu descendens ad latus A B, perueniat, sic tamen, vt perpetuo lateri A B, sit parallela, & cum lateribus A D, B C, angulos rectos efficiat; secabunt se continuè semidiameter in circunferentia D B, circumacta & recta D C, deorsum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem describent, hoc est, per quæ linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa D E. Sed quia duo isti motus vniformes, quorum vnus per circunferentiam D B, fit, & alter per lineas rectas D A, C B, effici nõ possunt, nisi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, meritò à Pappo descriptio hæc reprehenditur: quippe cùm ignota adhuc sit ea proportio, & quæ per hanc lineam inuestiganda proponatur. Quare nos Geometricè eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo: Arcus D B, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumque A D, B C, in totidem æquales partes. Fa cillima diuisio erit, si & arcus D B, & vtrumque latus A D, B C, secetur primùm bifariam, deinde vtraq; se-

missu iterum bifariam, & singula rursum partes iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quò autem plures extiterint diuisiones, eò accuratius Quadratrix linea describetur. Nos ad confusionem vitandam fecimus tam arcum D B, quàm duo latera A D, B C, in octo partes aequales.

Deinde bina puncta laterum A D, B C, aequaliter distantia à latere D C, vel A B, coniungantur lineis rectis occultis, atq; ex centro A, aliae rectae occultae ad singula diuisionum puncta Quadrantis D B, extendantur. Vbi enim hae rectae priores rectas intersecabunt, prima primam, secunda secundam, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita vt non sit sinuosa, sed aequabiliter semper progrediatur, nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa D E, secans semidiametrum A B, in E.



Sed quia punctum E, in latere A B, inueniri Geometricè non potest, cùm ibi omnis sectio rectarum cesset; vt illud sine notabili errore, qui scilicet sub sensum cadat, reperiamus, vtemur hoc artificio. Infimam partem A F, lateris A D, si satis exigua non sit, secabimus bifariam continuè, donec infima particula sit perexigua: Eodemq; modo infimam partem B I, arcus D B, bifariam continuè diuidemus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte A F, factae sunt, vt particula B K, talis pars sit totius arcus D B, qualis pars est A G, totius lateris A D. Particula deinde A G, aequales abscindemus B L, B N, A M, ducemusq; rectas occultas G L, M N. Ducta verò ex A, centro recta occulta A K, quae secet G L, in H, puncto, quod accuratissimè notetur, sumemus ipsi G H, aequalem M P. Si enim Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus aequabili atque vniformi extensione vsque ad P, secabit Quadratrix linea latus A B, in E, puncto, quod quaeritur. Nam propter paruam rectarum G H, A E, M P, inter se distantiam, efficitur, vt fermè sint aequales, licet Geometricè loquendo, recta A E, semper maior sit aliquantò, quantumuis parum ea recta inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi non potest. Id quod etiam in circunferentia circuli contingit. Rectae namque G L, A B, M N, si parum inter se distent, in circulo omnino aequales iudicabuntur, quamuis verè A B, aliquantò maior sit. Itaque si tres illae rectae G H, A E, M P, perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E, in quo Quadratrix linea semidiametrum A B, secat ab eo, quod verè in Quadratrice ibi existit, non differre: dummodo puncta H, P, exquisitè, & summa adhibita diligentia, inuenta sint.

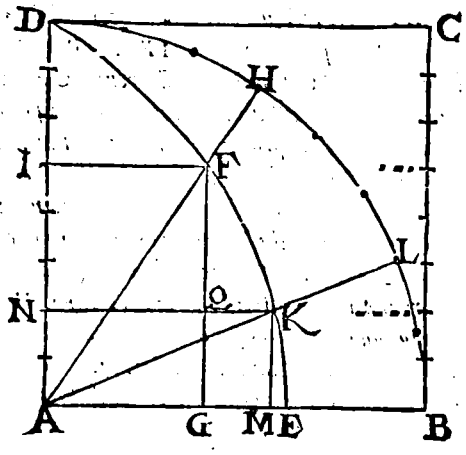
Rectam porrò A D, vocabimus latus Quadratricis, & rectam A E, eiusdem basin, ac denique punctum A, centrum.

Esse autem hanc lineam inflexam D E, à nobis per puncta descriptam Geometricè eandem, quam Dinostratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter A D, circa centrum A, per arcum D B, eodem tempore moueatur vniformi motu, quo latus D C, deorsum fertur motu quoque vniformi; fit vt, quando semidiameter A D, pertransiuit quamcunque partem arcus D B, tunc latus D C, similem partem laterum D A, C B, percurrerit: Aliàs aut duo illi motus non essent vniformes, aut non eodem tempore ad latus A B, tam semidiameter A D, quàm latus D C, peruenirent. Cùm ergo recta ex centro A, per partes arcus D B, emissa, & lineae parallelae per partes laterum D A, C B, ductae, abscindant semper ex arcu D B, & ex lateribus D A, C B, partes similes ex constructione, liquidò constat, puncta lineae inflexae D E, à nobis Geometricè inuentae à punctis, quae à duobus illis motibus reperiuntur, non differre. Haec igitur est descriptio lineae Quadratricis, quae Geometrica appellari potest, quemadmodum & conicarum sectionum descriptiones, quae per puncta etiam fiunt, vt ab Apollonio traditur, Geometricae dicuntur, cùm tamen magis errori sint obnoxiae, quàm nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quae ad earum descriptiones sunt necessariae, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam sectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergaeus persecutus est, vt propterea Magnus Geometra appellatus sit, reijcere velit, tanquã inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum existimo, cùm sectiones conicas ad demonstrationes adhibuerint praestantissimi Geometrae. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vsus est in duarum linearum mediarum proportionalium inter quasuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipse multa praeclarè de eisdem sectionibus conicis demonstrauit: ac denique eiusmodi sectiones insignem vsum habent in re Gnomonica, vt ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur descriptionẽ hanc nostram Quadratricis lineae, vt Geometricam. Adde quòd linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutissimè inuestigat, per puncta etiam describitur, vt in libro de Mensurationibus dicemus. Sed iam lineae Quadratricis vsum nonnullis propositionibus exponamus.

I.

Si ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vsque ad circunferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittantur

tur perpendiculares; & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.



Ex centro A, per puncta F, K, in Quadratrice vtcunque accepta ducãtur rectæ occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittanturq; ad basim A E, perpẽdiculares F G, K M: & ducantur F I, K N, eidem A E, parallelæ. Dico, vt est totus arcus D B, ad arcum H B, ita esse totum latus D A, ad perpendicularem F G, vel ad segmẽtum I A, &c. Quia enim eadem pars est arcus D H, totius arcus D B, quæ pars est recta D I, totius lateris D A, vt ex dẽscriptione lineæ Quadratricis manifestum est, siue ea cogitetur descripta duobus illis motibus proportionalibus Dinostrati, & Nicomedis, siue ea ratione, quam nos præscripsimus; cùm in ea semper arcus D H, tot particulas totius arcus D B, cõplectatur, quot partes totius rectæ D A, recta D I, continet, propterea quòd rectæ A H, I F, se intersecant in puncto F, Quadratricis: Neque hæc similitudo impeditur, etiamsi tã arcus D H, toti arcui D B, quam recta D I, toti lateri D A, sit incommensurabilis, cùm perpetuò Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia sua puncta. Si enim recta D I, nõ est talis pars, siue commensurabilis, siue incommensurabilis, totius lateris D A, qualis pars est arcus D H, totius arcus D B; si cogitetur talis pars minor, quàm D I, vel maior, secabit parallela ex puncto eius extremo ducta rectã A H, vel supra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix describenda est; ac proinde ea non transibit per F. quod est absurdum, & contra hypothesim. Quia, inquam, eadem pars est arcus D H, totius arcus D B, quæ pars est recta D I, totius lateris D A; erit quoq; reliquus arcus H B, eadem pars totius arcus D B, quæ pars est reliqua recta I A, totius lateris D A. Quocirca erit, vt totus arcus D B, ad arcum H B, ita totum latus D A, ad rectam I A, hoc est, ad rectam F G, [a] *quæ ipsi I A, æqualis est, ac proinde & tam diuidendo erit, vt arcus D H, ad arcum H B, ita recta D I, ad rectam I A, vel F G, quàm conuertendo, vt arcus H B, ad arcum D B, ita recta F G, vel I A, ad rectam D A, &c.*

a 34. primi.

Eadem ratione erit, vt arcus D B, ad arcum L B, ita recta D A, ad rectam N A, siue ad K M, [b] *quæ ipsi N A, æqualis est: Et vt arcus D L, ad arcum L B, ita recta D N, ad rectam N A, siue K M: Et vt arcus L B, ad arcum D B, ita recta K M, vel N A, ad rectam D A. Quoniam igitur est, vt L B, ad D B, ita K M, ad D A: Et vt D B, ad H B, ita D A, ad F G; erit ex æquo, vt L B, ad H B, ita K M, ad F G; Et conuertendo, vt H B, ad L B, ita F G, ad K M, hoc est, ita I A, ad N A: Et diuidendo vt H L, ad L B, ita I N, ad N A, vel ita F Q, ad Q G.*

b 34. primi.

Rursvs quia est, vt D H, ad H B, ita D I, ad I A: Et vt H B, ad L B, ita I A, ad N A; erit ex æquo, vt D H, ad L B, ita D I ad N A, siue ad K M. Semper ergo arcus inter semidiametros intercepti perpendicularibus, siue segmentis semidiametri inter parallelas positis proportionales sunt. Quod est propositum.

II.

Datvm arcum circuli in datam proportionem diuidere.

Sit primùm arcus H B, in figura antecedente diuidendus in proportionem datam rectæ O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrum A, recta H A, secante Quadratricem in F, ducatur F I, basi A E, parallela. Deinde recta I A, ita secetur in N, ex scholio propos. 10. huius lib. vt sit I N, ad N A, quemadmodum O, ad P, Ductaq; N K, basi A E, parallela secante Quadratricem in K, emittatur ex centro A, per K, recta secans arcum H B, in L. Dico arcum H B, in L, sectum esse in proportionem datam O, ad P. Quoniam enim, vt propos. 1. ostendimus, vt H L, ad L B, ita est I N, ad N A: Est autem I N, ad N A, ex constructione, vt O, ad P; [c] *erit quoque H L, ad L B, vt O, ad P.*

c 11. quinti.

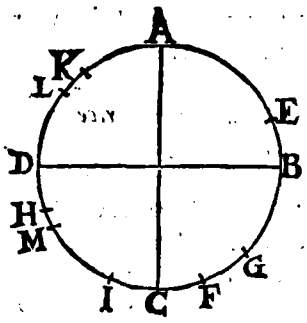
O ——— 3
P ——— 2

R ——— 3
S ——— 5

T ——— 8
V ——— 2

Deinde totus Quadrans D B, secandus sit in proportionem R, ad S. Diuisa semidiametro D A, in I, vt sit D I, ad I A, sicuti R, ad S, ducatur I F, ipsi A E, parallela secans Quadratricem in F. Ducta igitur recta A F H, erit ex propos. 1. D H, ad H B, vt D I, ad I A, hoc est, vt R, ad S.

Tertio sit idem Quadrans D B, secandus in duos arcus, ita vt totus Quadrans ad vnum eorum habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, D A, inueniatur quarta proportionalis, cui æqualis abscindatur A N. Ducta autem N K, ipsi A E, parallela secante Quadratricem in K, ducatur ex A, per K, recta A K L. Dico Quadrantem in L, sectum esse, vt proponitur. Est enim ex propos. 1. D B, ad L B, vt D A, ad N A, hoc est, vt T, ad V.



QVARTO *semicirculus A B C, diuidendus sit in datã proportionem, videlicet in triplam. Secetur vterq; Quadrans A B, B C, secundùm datam proportionem triplam in E, F, & arcui A E, vel B F, aqualis abscindatur arcus E G. Si igitur ex arcu communi A B C, æqualia demantur, nimirum duo arcus A E, B F, simul & arcus A G; reliqua æqualia fient, nimirũ duo arcus E B, F C, simul, & arcus G C. Et quoniam est, vt A E, ad E B, ita B F, ad F C;* [a] *erunt A E, B F, simul ad E B, F C, simul, hoc est, arcus A G, ad arcum G C, vt A E, ad E B; Habet autẽ A E, ad E B, datã proportionẽ triplam. Igitur & arcus A G, ad arcum G C, eandem proportionem datam habebit.*

a 12. quinti.

QVINTO *in eandem proportionem secandus sit arcus A C D, tres Quadrantes continens. Diuisis tribus Quadrantibus A B, B C, C D, in eam proportionem in E, F, H, sumatur arcus E G, ipsi B F, & arcus G I, ipsi C H, æqualis. Si igitur ex communi arcu A C D, demantur æqualia, nimirum tres arcus A E, B F, C H, simul, & arcus A B I; reliqua fient æqualia, nimirum tres arcus E B, F C, H D, simul, & arcus I D. Et quia tres arcus A E, B F, C H, ad tres arcus E B, F C, H D, eandem habent proportionem;* [b] *habebunt omnes tres arcus simul ad omnes tres simul, hoc est, arcus A B I, ad arcum I D, eandem proportionem, quam vnus arcus A E, ad vnum arcum E B, videlicet datam.*

b 12. quinti.

POSTREMO *sit eodem modo diuidendus arcus A C K. Diuisis rursus tribus Quadrantibus, & arcu D K, vt proponitur, in E, F, H, L, sumatur arcus E G, arcui B F, & arcus G I, arcui C H, & arcus I M, arcui D L, æqualis. Si igitur ex communi arcu A C K, æqualia auferãtur, videlicet quatuor arcus A E, B F, C H, D L, simul, & arcus A B M; reliqua æqualia fient, quatuor scilicet arcus E B, F C, H D, L K, simul, & arcus M K. Et qa quatuor arcus A E, B F, C H, D L, ad quatuor arcus E B, F C, H D, L K, eandem proportionem habent;* [c] *habebunt omnes quatuor simul, ad omnes quatuor simul, id est, arcus A B M, ad arcum M K, eandem proportionẽ, quam vnus A E, ad vnum E B, eam videlicet, qua data est. Constat ergo id, quod proponitur.*

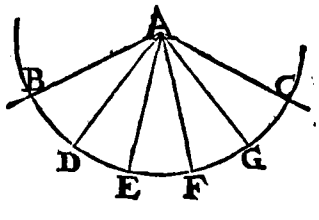
c 12. quinti.

COROLLARIVM.

Ex his facilè quemuis angulum rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partiemur, atq; adeò & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales.

DESCRIPTO *namque arcu ex angulo dato, eoq; arcu diuiso, vt iubetur, si ex angulo ad punctum diuisionis recta ducatur, erit angulus diuisus, vt arcus:* [d] *cùm sit vt arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro.*

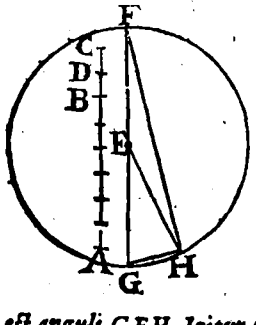
d 33. sexti.



QVOD *si arcus, vel angulus secandus sit in quotuis æquales partes, diuidendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem denominatam à numero, qui vna vnitate minor sit numero partiũ propositarum. Vt si arcus B C, vel angulus B A C, diuidendus sit in quinque partes æquales, secandus erit arcus B C, in G, in proportionem quadruplam. Nam G C, arcus erit quinta pars arcus B C, cui si quatuor æquales abscindantur G F, F E, E D, D B, diuisus erit arcus B C, in quinque partes æquales. Et si ex A, ducantur rectæ A G, A F, A E, A D, sectus quoque erit angulus B A C, in quinque angulos æquales. Quod est propositum.*

III.

ISOSCELES triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.



SIT *data proportio recta A B, ad rectam B C. Diuisa B C, in D, bifariam, & descripto ex centro E, circulo quantocunque F G H, ductaq; in eo diametro F G; secetur ita semicircunferentia F H G, in H, vt eadem sit proportio arcus F H, ad arcum H G, quæ recta A B ad rectam B D: iungantur q; rectæ H E, H G. Dico Isosceli trianguli E G H, vtrumque angulorum æqualium ad basin G H, habere ad reliquum angulum G E H proportionem datam A B, ad B C. Cùm enim sit, vt A B, ad B D, ita arcus F H, ad arcum H G: Et vt arcus F H, ad arcum H G,* [e] *ita angulus F G H, ad angulum G F H;* [f] *erit vt A B, ad B D, ita angulus F G H, ad angulum G F H: Vt autem B D, ad B C, ipsius B D, duplam, ita est angulus G F H, ad angulum G E H,* [g] *qui duplus est anguli G F H. Igitur ex æquo erit vt A B, ad B C, ita angulus E G H, ad angulum G E H. Quod est propositum.*

c 33. sexti.
f 11. quinti.
g 20. tertij.

COROLLARIVM.

ITAQVE si construantur triangula Isoscelia, in quibus anguli æquales ad basim, ad reliquum proportiones habeãt, tum multiplices sesquialteras, tum multiplices ordine, describen-

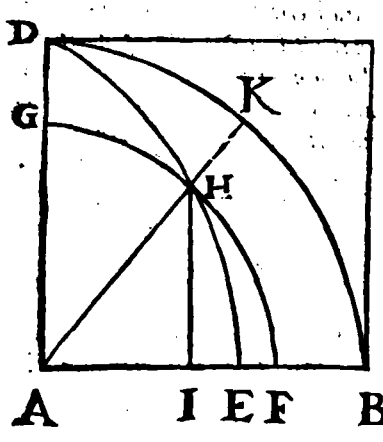
tur

tur per priora omnes figuræ æquilaterę parium laterum: per posteriorem verò figuræ æquilaterę laterum imparium in circulo, vt ad finem lib. 4. ostendimus.

IDEM efficiemus sine huiusmodi triangulis, si totam circunferentiam in tot æquales partes secemus, vt in corollario proximè antecedente docuimus, quot latera angulósve figura inscribendæ habere debet, &c.

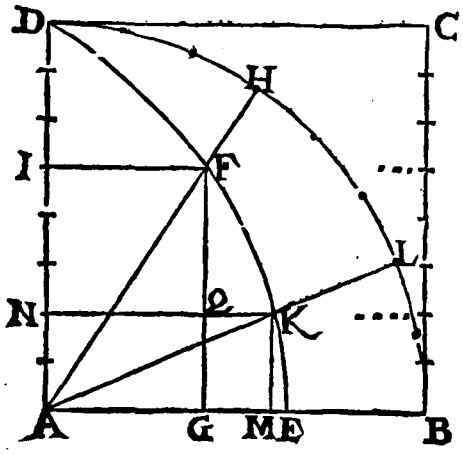
LIII.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis continuè proportionales.



SIT Quadrans, & Quadratrix ex eo descripta, vt suprà. Dico arcum B D, semidiametrum D A, & Quadratricis basin A E, continuè esse proportionales, hoc est, esse B D, ad D A, vt D A, ad A E. Sin minus, sit vt B D, ad D A, ita D A, ad A F, maiorem ipsa A E, minorémve, sitq; primùm A F, maior quàm A E. Descripto ex centro A, quadrante F G, per F, secante Quadratricem in H, ducatur per H, semidiameter A H K, demittatúrque perpendicularis H I. Quoniam igitur ponitur arcus B D, ad rectam D A, vt D A, hoc est, vt A B, ad A F: est q; vt A B, semidiameter ad semidiametrum A F, ita arcus B D, ad arcum F G; (Cùm enim sit ex Pappi demonstrationibus, vt & nos in libro de Mensurationibus ostendemus, diameter ad diametrum, vt circunferentia circuli ad circunferentiam circuli; [a] *erit quoque semidiameter A B, ad semidiametrum A F, vt eadem circunferentia ad eandem circunferentiam;* [b] *ac proinde etiam vt quarta pars circunferentiæ ad quartam partem circunferentiæ, hoc est, vt arcus B D, ad arcum F G,)* [c] *Erit quoque arcus B D, ad rectam D A, vt idem arcus B D, ad arcum F G:* [d] *ac propterea æquales erunt rectæ D A, & arcus F G. Quia verò ex theoremate 1. est, vt arcus B D, ad arcum B K, ita recta D A, ad rectam H I; & vt arcus B D, ad arcum B K, ita arcus F G, ad arcum F H, quòd arcus B D, B K, arcubus F G, F H, similes sint, vt suprà in hoc scholio ostensum est:* [e] *Erit quoque recta D A, ad rectam H I, vt arcus F G, ad arcum F H. Cùm ergo recta D A, ostensa sit arcui F G, æqualis;* [f] *erit quoque recta H I, arcui F H, æqualis. quod est absurdum. Est enim recta H I, minor arcu F H, cùm ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus F H: (Nam recta A F, & secat eam chordam bifariam, ac proinde & arcum; ex scholio propositionis vigesimæ septimæ libri tertij.) chorda autem semper suo arcu minor sit. Non ergo est arcus B D, ad semidiametrum D A, vt D A, ad rectam maiorem basi A E, Quadratricis.*

a 15. quinti.
b 15. quinti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 11. quinti.
f 14. quinti.
g 3. tertij.



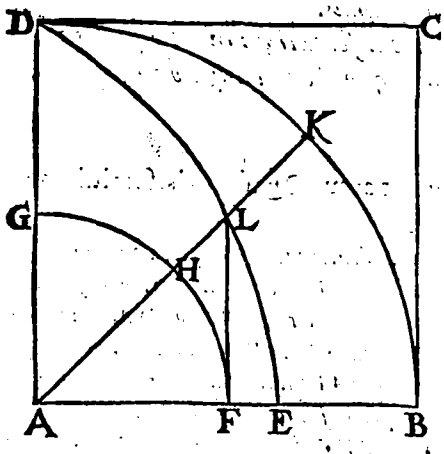
SIT deinde, si fieri potest, A F, minor, quàm A E. Descripto igitur ex centro A, per F, Quadrante F G, erigatur ex F, ad A E, perpendicularis F L, secans Quadratricem in L, puncto, per quod semidiameter ducatur A L K, secàs arcum F G, in H. Ostendemus ergo, vt prius, arcum F G, rectæ D A, æqualem esse: Item, ita esse arcum B D, ad arcum B K, hoc est, arcum F G, ad arcũ F H, vt est recta D A, ad rectam L F. Quare cũ arcus F G, ostensus sit æqualis rectæ D A, erit quoque arcus F H, æqualis rectæ L F. Quod est absurdum. Est enim recta L F, maior arcu F H: Nam si ex L, duceretur versus G, alia recta tangẽs circulum F G, sicut L F, eundem tangit in F, essent hæ tangentes æquales, ex scholio propos. 36. libri 3. arcus q; inter eas interceptus secaretur bifariam in H, propterea quòd ex scholio propos. 37. libri 3. angulus ab eis comprehensus bifariam diuideretur, [h] *ac proinde & angulus in centro A, si ad alterũ punctum contactus recta adiungeretur;* [i] *ideoq; & arcus, quibus insistunt, æquales forent. Igitur cùm ex Archimede ad initium de Sphæra, & Cylindro, duæ illæ tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, etit & earum semissis L F, maior semisse F H, illius arcus. Non est ergo arcus B D, ad semidiametrum D A, vt D A, ad rectam minorem basi A E, Quadratricis: Sed neq; vt D A, ad maiorẽ, vt ostẽsum est. Igitur vt D A, ad ipsam basin A E. Quod est propositũ.*

h 4. vel 8. primi.
i 26. tertij.

COROLLARIVM I.

HINC facilè reperiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius Quadrans est B D, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem.

QVONIAM enim est arcus B D, ad D A, vt D A, ad A E; erit conuertendo quoq; A E, ad D A, vt D A, ad



arcum Quadrantis B D. Si igitur duabus rectis A E, A D, inueniatur tertia proportionalis; [a] erit A D, ad eã tertiam, vt ad arcũ B D, cũ vtraq; proportio sit eadem, qua A E, ad A D; [b] Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis B D, æqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircunferentiæ eiusdem circuli: si verò quadruplicetur, fiet recta toti circunferentiæ æqualis. Quòd si arcui B K, qui minor est Quadrante, inuenienda sit recta æqualis, fiat vt D A, ad perpendicularem L F, ex L, ad A B, demissam, ita tertia illa proportionalis ad aliud, inuentaq; erit quarta hæc recta æqualis arcui B K. Nam cùm sit, ex theor. 1. vt D A, ad perpendicularem L F, ita arcus D B, ad arcum B K; [c] erit quoq; tertia illa proportionalis ad quartam lineam inuentam, vt arcus D B, ad arcum B K: Est autem tertia illa proportionalis æqualis arcui Quadrantis D B. [d] Igitur & quarta linea inuenta æqualis erit arcui B K. Si verò arcui, qui maior sit quadrãte, inuenienda sit recta æqualis, reperienda primùm erit recta æqualis Quadranti, vel semicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta æqualis reliquo arcui, qui minor Quadrante est. Nam duæ hæ rectæ coniunctæ erunt toti arcui proposito æquales.

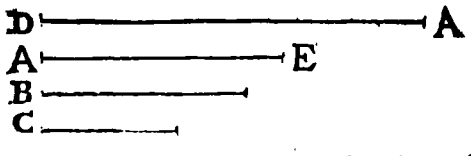
a 11. quinti.
b 9. quinti.
c 11. quinti.
d 14. quinti.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR quoque ex his, si basis Quadratricis A E, statuatur semidiameter alicuius circuli eius latus A D, Quadranti eiusdem circuli esse æqualem, & lineam lateris dupla esse æqualem semicircunferentiæ eiusdem circuli, & lineam quadruplam toti circunferentiæ esse æqualem.

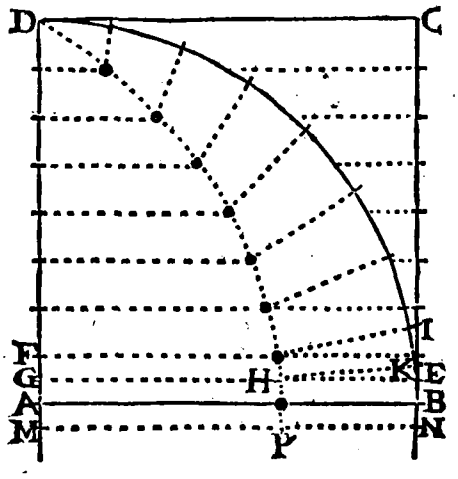
CVM enim, vt suprà ex Pappo diximus, semidiametri semicircunferẽtijs circulorum, atq; adeò & quadrantibus sint proportionales: erit vt D A, ad A E, hoc est, vt tertia illa proportionalis ad D A, ita Quadrans B D, ad Quadrantem semidiametri A E: Est autem tertia illa proportionalis æqualis Quadranti B D, vt ostensum est. [e] Igitur & recta D A, Quadranti semidiametri A E, æqualis erit. Dupla linea ergo ipsius D A, semicircunferentiæ circuli, cuius semidiameter A E; & quadrupla toti circunferentiæ erit æqualis.

e 14. quinti.



EADEM ratione, si duæ rectæ eandem proportionem habeant, quam D A, A E, & minor ponatur semidiameter alicuius circuli, ostendetur maior æqualis Quadranti illius circuli, &c. Sit enim D A, ad A F, vt recta aliqua B, ad rectam C. Erit ergo permutando D A, ad B, vt A E, ad C. Vt autem A E, ad C, ita est Quadrans semidiametri A E, ad Quadrantem semidiametri C, vt suprà ex Pappo dictum est. Igitur erit quoq; D A, ad B, vt quadrans semidiametri A E, ad quadrantem semidiametri C. Cùm ergo D A, æqualis sit, vt ostensum est, quadranti semidiametri A E, [f] erit quoq; B, æqualis quadranti semidiametri C. Quod est propositum.

f 14. quinti.



SED si lubeat per numeros explorare, quamnam proportionem plus minus habeat ex hoc præclaro inuento circunferentia circuli ad eius diametrum, vel (quod idem est) semicircunferentia ad semidiametrum, [g] cùm sit vt circunferentia ad diametrum, ita semicircunferentia ad semidiametrum, efficiemus id hoc modo: Cogitemus Quadrantem D B, in figura, in qua Quadratricem descripsimus, diuisum esse in grædus 90. & singulos gradus in Min. 60. vt totus arcus D B, complectatur 5400. particulas æquales. Si igitur latus D A, concipiamus in totidem æquales particulas diuisum esse, erit parallela ex vltima particula vsque ad Quadratricem educta fermè æqualis basi A E, ob exiguam distantiam illius parallelæ, & basis A E cùm in ea figura parallela quoq; G H, auferens A G, particulam sextamdecimã, qua $\frac{1}{15}$. multò maior est, quàm $\frac{1}{1500}$. vix à base A E, superetur: ita vt sine errore notabili eam parallelam pro base accipere possimus. Quia verò vltima illa particula lateris D A, est sinus arcus Min. 1. & parallela illa sinus complementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. vt constat, si ponatur A G, vltima particula, & arcus B K, vltimum Minutum, ducaturque recta A H. Nam G H, erit sinus anguli G A H, grad. 89. Min. 59. ac proinde A G, sinus anguli A H G, Min 1. posito sinu toto A H, vt in tractatione Sinuum ostendimus. Si igitur sinus totus A H, statuatur 10000000. (Ita enim exquisitius

g 15. quinti.

sitius proportio optata inuenietur, q̃ si sinus totus ponatur tantum 100000. cùm in hoc sinus grad. 89. Min. 59. à sinu toto non differat.) erit A G, 2909. & G H, 9999999. at totũ latus D A, earundem partiũ erit 15708600. vt constat, si 5400. particulæ lateris D A, ducãtur in vnam A G, quam diximus esse 2909. Duplum ergo lateris D A, erit 31417200. Et quoniam ex coroll. 2. huius propos. 4. duplum lateris D A, æquale est semicircunferẽtiæ, cuius semidiameter A E, erit proportio semicircunferentiæ illius ad semidiametrum A E, eadem fere, quæ numeri 31417200 ad 9999999. denominata à $3\frac{14172003}{9999999}$. hoc est, in minimis terminis, à $3\frac{15746067}{11111111}$. quæ proportio minor est, quàm tripla sesquiseptimæ, siue tripla superdecupartiens septuagesimas, maior autem quàm tripla superdecupartiens septuagesimas primas; inter quas duas proportiones vera proportio circunferentiæ ad diametrum consistit, vt ab Archimede demonstratum est.

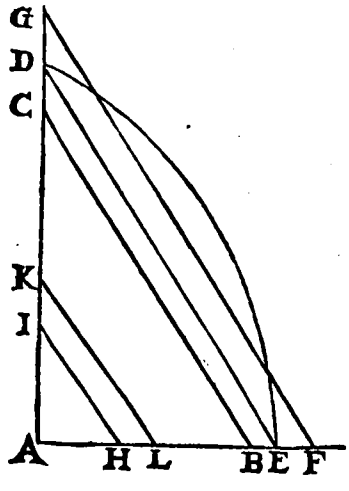
Si aqvæ vt recta linea circunferẽtiæ circuli inueniatur æqualis, satis est punctum E, inuenire, etiamsi tota linea Quadratrix non sit descripta: Vt autem arcus, vel angulus in datam proportionem secetur, nõ indigemus puncto E, vt perspicuum est.

V.

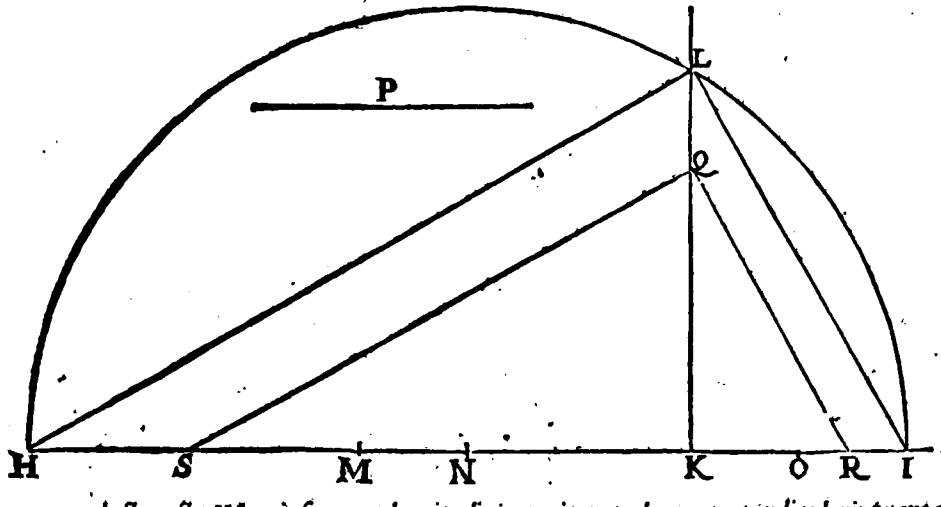
Dato circulo quadratum æquale constituere.

Qvoniam Archimedes demonstrauit circulum quemcunque æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum verò circunferentiæ eiusdem æquale est; atq; hinc nos propos. 4 figurarum Isoperimetrarum in Commentarijs in Sphæram ostendimus, eundem circulum rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semicircunferentia, æqualem esse: si ex coroll. præcedentis propos. inueniatur linea recta æqualis semicircunferentiæ dati circuli, & rectangulo contento sub illa recta, & semidiametro [a] constituatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale. a 14. secũdi.

Invenietvr autem recta æqualis semicircunferentiæ, vel Quadranti, vel toti circunferentiæ, [b] si fiat vt basis Quadratricis descriptæ ad eiusdem latus, ita semidiameter dati circuli ad aliud. Inuenta enim quarta linea æqualis erit Quadranti circuli, vt in coroll. 2. præced. propos. diximus, atq; adeò duplicata efficiet lineam semicircunferentiæ æqualem; quadruplicata autem rectam toti circunferentiæ æqualem exhibebit. b 12. sexti.

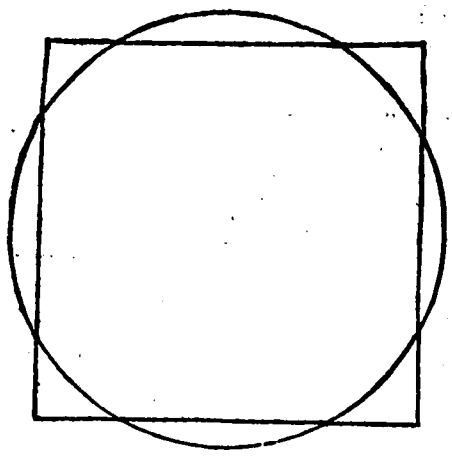


Verum vt expeditius quilibet circulus possit quadrari, construendæ erũt duæ figuræ quadrandis circulis aptissimæ, hoc modo: Constituatur angulus rectus D A F, sitq; A D, æqualis semidiametro Quadrãtis, ex quo Quadratrix descripta est, & A E, basi eiusdem Quadratricis æqualis: Vel ex centro A, noua Quadratrix describatur D E, cuius latus A D, & basis A E. Ducta autem recta D E, constructum erit vnum instrumentum circulis quadrandis aptissimũ. Si enim circuli quadrandi semidiameter æqualis sit rectæ A E, erit recta A D, circunferentiæ Quadrantis eiusdem circuli æqualis, vt ex coroll. 2. antecedentis propos. liquet. Si autem semidiameter minor sit, q̃ A E, abscindemus ei æqualem A B, parallelamq; ipsi D E, agemus B C. Si denique semidiameter sit maior, q̃ A E, abscindemus ei æqualem A F, ex A E, productæ, & per F, ipsi D E, parallelam agemus F G. Erit enim ex coroll. 2. præcedentis propos. recta A C, æqualis circunferentiæ Quadrantis, cuius semidiameter A B: Recta verò A G, circunferentiæ Quadrantis æqualis erit, cuius semidiameter A F: [c] propterea quòd est, vt A E, ad A D, ita tam A B, ad A C, q̃ A F, ad A G. c 2. vel 4. sexti.



Deinde ducta recta H I, cuiuscunque longitudinis, excitetur ad eam perpendicularis quantacunq; K L, paratumq; erit alterum instrumentum quadrandis circulis accommodatum.

Per duo hæc instrumẽta nullo negotio quemcunq; circulum quadrabimus hac ratione: Sit quadrandus



circulus, cuius semidiametro in priori instrumento æqualis sit recta A B, & per B, ipsi D E, parallela agatur F C. In posteriori verò instrumẽto sumantur duæ K M, M H, ipsi A C, æquales, & recta K I, semidiametro A B, æqualis. Diuisa autem tota recta H I, bifariam in N, describatur ex N, ad interuallum N H, vel N I, semicirculus secans perpendicularem K L, in L. Dico quadratum ex K L, circulo dato, cuius semidiameter A B, in priori instrumento, vel K I, in posteriori, æquale esse. Quoniam enim K L, media proportionalis est inter K H, K I, ex scholio propos. 13. huius lib. [a] erit quadratum ex K L, rectangulo sub K H, K I, æquale. Cùm ergo hoc rectangulum circulo dato sit æquale, vt ad initium huius propositionis diximus, quòd K H, sit æqualis semicircunferentiæ, & K I, semidiametro; erit quoq; idem quadratum ex K L, dato circulo, cuius semidiameter A B, vel K I, æquale. Si igitur quadratum rectæ K L, describatur, & ex eius centro ad interuallum A B, in priori instrumento, vel K I, in posteriori circulus describatur, habebitur quadratum æquale circulo, vt in appositæ figuræ apparet.

a 17. sexti.

CAETERVM diuisio rectæ H I, in posteriori instrumento in duas partes æquales facilè sic fiet. Diuisa semidiametro K I, bifariam in O, (hæc enim quia minor est, quàm H I, facilè bifariam secabitur.) accipiatur recta K O, æqualis M N. Nam N, punctum erit medium rectæ H I. Cùm enim æquales sint M N, O I; addita communi N O, erit N I, ipsi M O, æqualis: Est autem M O, ipsi H N, æqualis. (quia enim æquales sunt H M, M K; additis æqualibus M N, K O, totæ æquales fient H N, M O.) Igitur & N I, ipsi H N, æqualis erit.

VI.

DATO quadrato circulum æqualem describere.

SIT datum quadratum, cuius latus P. Huic in posteriori instrumento antecedentis propos. ex perpendiculari K L, abscindatur æqualis K Q. Proposito autem quouis circulo, cuius semidiameter K I, inueniatur per antecedentem propos. ei quadratum æquale, cuius latus K L. Deinde ducta recta L I, agatur ei parallela Q R. Dico circulum, cuius semidiameter K R, æqualem esse quadrato dato, cuius latus K Q, vel P. Inuenta nam q3 per propos. antecedentẽ recta K H, quæ semicircunferentia circuli, cuius semidiameter K I, sit æqualis, ducta q3 recta L H, agatur ei parallela Q S. Quoniam igitur, ob triangulorum similitudinem, est vt H K, ad K L, ita S K, ad K Q; & vt K L, ad K I, ita K Q, ad K R: erit ex æquo, vt H K, ad K I, ita S K, ad K R. Cùm ergo H K, æqualis sit semicircunferentiæ circuli, cuius semidiameter K I, erit quoq; ex coroll. 2. propos. 4. S K, æqualis semicircunferentiæ circuli, cuius semidiameter K R. Quia verò K Q, ex coroll. propos. 8. huius lib. media proportionalis est inter S K, K R; quòd angulus R Q S, rectus sit, [b] quippe cùm eius partes R Q K, S Q K, partibus I L K, H L K, recti anguli H L I, æquales sint: (Nam [c] angulus H L I, rectus est, cùm sit in semicirculo, vt patet ex praxi antecedentis propos. qua K L, media proportionalis inter H K, K I, reperitur.) [d] erit quadratum ex K Q, æquale rectangulo sub S K, K R, hoc est, circulo, cuius semidiameter K R: hoc est, circulus semidiametri K R, æqualis est quadrato lateris K Q, vel P. Quod est propositum.

b 29. primi.
c 31. tertij.
d 17. sexti.

COROLLARIVM.

EX his, quæ demõstrata sunt, construemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem; & contrà, cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem constituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque similis sit. Nam si data figura rectilinea [e] describamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem constituamus, ex propos. 6. erit hic idem circulus data figura rectilineæ æqualis.

e 14. secundi.

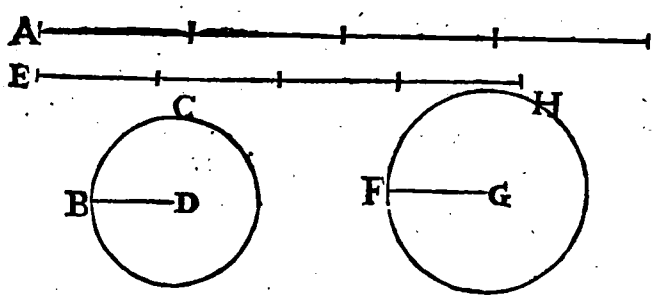
RVRSVS si, per propos. 5. dato circulo quadratum æquale construamus, huic autem quadrato [f] constituamus figuram rectilineam æqualem, & similem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea constituta, dato circulo æqualis. Quod est propositum.

f 25. sexti.

VII.

DATAE rectæ lineæ circunferentiam circuli reperire æqualem.

QVO pacto recta linea reperiatur circunferentiæ dati circuli æqualis, docuimus propositione 5. nunc autem, vt vicißim rectæ datæ lineæ circunferentia circuli æqualis inueniatur, ita agendum erit. Sit data recta A, cui circunferentia æqualis inuenienda est. Descripto quouis circulo B C, ex centro D, inueniatur ei recta æqualis E. quod facilè ita fiet: In priori instrumento propos. 5. sumatur A H, æqualis semidiametro B D, descripti circuli, & per H, agatur ipsi D E, parallela H I. Nam A I, quadruplicata dabit rectam E, circunferentia



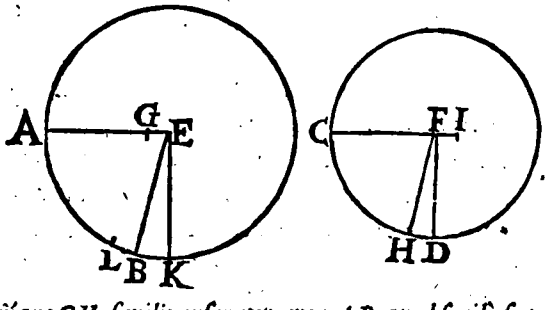
rentia circuli B C, æqualem, vt propositione 5. diximus. Deinde tribus rectis E, A, B D, inueniatur quarta proportionalis F G, atque ex G, ad interuallum G F, circulus describatur F H. Dico eius circunferentiam datæ rectæ A, æqualem esse. Cùm enim sit, vt E, ad A, ita B D, ad F G; hoc est, [a] ita tota diameter circuli B C, ad totam diametrum circuli F H: Sit autem vt diameter ad diametrum, ita circunferentia B C, ad circunferentiam F H, vt Pappus demonstrauit; [b] erit quoq; vt E, ad A, ita circunferentia B C, ad circunferentiam F H. Cùm ergo E, facta sit æqualis circunferentiæ B C; [c] erit & recta A, circunferentiæ F H, æqualis: hoc est, circunferentia circuli F H, inuenta est datæ rectæ A, æqualis. Quod est propositum.

a 15. quinti.
b 11. quinti.
c 14. quinti.

ALITER, & facilius. Quartæ parti rectæ datæ A, accipiatur æqualis A K, in priori instrumento propos. 5. & per K, agatur K L, ipsi D E, parallela. Nam circunferentia circuli, cuius semidiameter A L, æqualis erit datæ rectæ A; propterea quòd eius circunferentiæ quadrans æqualis est rectæ A K, quartæ parti datæ rectæ A, vt propositione 5. declarauimus.

VIII.

DATIS duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum, ex altero arcum æqualem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circunferentia minoris circuli.



SINT duo circuli inæquales A B, C D, quorum centra E, F, & semidiametri A E, C F; sit q; A B, maior, & C D, minor. Datus autem primùm sit in minori circulo arcus C D, cui æqualis abscindendus sit ex maiore. Quoniam circulus A B, circulo C D, maior est, erit & semidiameter A E, semidiametro C F, maior. Abscindatur ergo A G, ipsi C F, æqualis, secetur q; arcus C D, ita in H, ex propos. 2. vt eadem sit proportio arcus C H, ad arcum H D, quæ rectæ A G, ad rectam G E: arcuique C H, similis auferatur arcus A B. quod facilè fiet, si ducta recta F H, angulo C F H, æqualis fiat angulus A E B. Dico arcum A B, dato arcui C D, æqualem esse. Quoniam enim est, vt A G, ad G E, ita arcus C H, ad arcum H D. Et conuertendo, vt E G, ad A G, ita arcus D H, ad arcum C H; erit componendo quoque A E, ad A G, hoc est, ad C F, ipsi A G, æqualem, vt arcus C D, ad arcum C H: Est autem, vt A E, semidiameter ad semidiametrum C F, [d] hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita circunferentia circuli A B, ad circunferentiam circuli C D, vt Pappus demonstrauit, hoc est, ita arcus A B, ad similem arcum C H. [e] Igitur erit quoq; vt arcus C D, ad arcum C H, ita arcus A B, ad eundem arcum C H; ac proinde arcus C D, A B, [f] æquales inter se erunt. Quod est propositum.

d 15. quinti.
e 11. quinti.
f 9. quinti.

DATVS deinde sit in maiore circulo arcus A B, non maior, quàm circunferentia circuli C D, minoris, ex quo arcui A B, æqualis arcus abscindendus est. Quoniam circulus A B, maior est circulo C D, erit & semidiameter A E, semidiametro C F, maior. Producta ergo C F, ad I, vt C I, ipsi A E, sit æqualis; secetur per propositionem 2. arcus A B, in L, vt eadem sit proportio A B, ad B L, quæ C F, ad F I; arcuique B L, sumatur æqualis arcus B K, ac toti arcui A K, similis auferatur C D. quod facilè fiet, si ducta recta E K, angulo A E K, angulus C F D, æqualis fiat. Dico arcum C D, arcui dato A B, æqualem esse. Quoniam enim est, vt C F, ad F I, ita arcus A B, ad arcum B L, id est, ad arcum B K, ipsi B L, æqualem; erit componendo quoque vt C I, ad F I, ita arcus A K, ad arcum B K: Et per conuersionem rationis; vt C I, ad C F, hoc est, vt A E, ad C F, ita arcus A K, ad arcum A B: Est autem, vt semidiameter A E, ad semidiametrum C F, [g] hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita; ex demonstratis à Pappo, circunferentia circuli A B, ad circunferentiam circuli C D, id est, ita arcus A K, ad arcum similem C D. [h] Igitur erit etiam, vt arcus A K, ad arcum A B, ita idem arcus A K, ad arcum C D, propterea quæ arcus A B, C D, [i] æquales erunt inter se. Quod est propositum.

g 15. quinti.
h 11. quinti.
i 9. quinti.

COROLLARIVM I.

Ex his, quæ demonstrata sunt, manifestum est, cuiuis datæ rectæ abscindi posse ex circulo quouis, cuius circunferentia minor non sit, quàm recta data, circunferentiam æqualem, quemadmodũ suprà ostensum est in coroll. propos. 4. data cuilibet circunferẽtiæ inueniri posse

rectam æqualem, hoc modo: Inueniatur per ea, quæ paulò antè in coroll. 1. propoſ. 4. oſtendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & ſi quidem hæc linea inuenta æqualis fuerit rectæ lineæ datæ, erit circunferentia quadrantis datæ rectæ lineæ æqualis.

Si verò illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quàm data recta linea; ſecetur quadrantis circunferentia in duas partes, ex propoſ. 2. ita vt quadrãs ad vnam partem habeat eandem proportionem, quam inuenta recta linea ad lineam rectam datam. Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nam cùm ſit, vt inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum arcum abſciſſum; ſit autem recta inuenta quadranti æ-
a 14. quinti. *qualis,* [a] *erit quoque data linea recta arcui abſciſſo æqualis.*

Si denique recta illa inuenta æqualis quadranti fuerit minor, quàm recta linea data, ſumatur illius dupla, quæ nimirum circunferentia ſemicirculi ſit æqualis. Nam ſi hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circunferentia ſemicirculi eidem datæ rectæ æqualis.

Si autem dupla illa recta linea fuerit maior, quàm data linea recta, ſecetur ſemicirculi circunferentia in duos arcus, ita vt ſemicircunferentia ad vnum eorũ eandem habeat proportionem, quam dupla illa recta linea ad datam rectam. quod quidem facilè fiet, ſi datæ rectæ ex dupla illa linea recta abſcindatur æqualis, & ſemicircunferentia ſecetur per propoſ. 2. vt ſecta eſt recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abſciſſam, hoc eſt, ad datam rectam, ita tota ſemicircunferentia ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ æqualis erit. Cùm enim ſit, dupla illa recta ad rectam datam, ita ſemicircunfe-
b 14. quinti. *rentia ad eum arcum; ſit autem recta illa dupla æqualis ſemicircunferentiæ;* [b] *erit quoq; data recta illi arcui æqualis.*

Si denique dupla illa recta linea fuerit minor, quàm data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli eſt æqualis, vt tota recta compoſita æqualis ſit circunferentiæ trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuentæ. Nam ſi hæc lineæ tripla fuerit datæ rectæ æqualis; erit arcus trium quadrantum eidem datæ rectæ æqualis.

Si verò tripla illa linea recta fuerit maior, quàm recta linea data, ſecetur circunferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propoſ. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectam datam. quod facilè etiam fiet, ſi datæ rectæ ex tripla illa linea recta abſcindatur recta æqualis, & circunferentia trium quadrantum ſecetur, per propoſ. 2. vt recta illa tripla ſecta eſt. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abſciſſam, id eſt, ad datam rectam, ita tota circunferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ lineæ erit æqualis. Quoniam enim eſt, vt tripla illa recta ad rectam datam, ita circunferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum; eſt q;
c 14. quinti. *tripla illa recta circunferentiæ trium quadrantum æqualis;* [c] *erit quoque data linea rectæ æqualis illi arcui abſciſſo.*

Denique ſi tripla illa linea recta fuerit minor, quàm data recta linea, addatur ei rurſus prior linea inuenta quadranti æqualis, vt tota recta compoſita fiat æqualis toti circunferentiæ circuli, & prioris lineæ inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circunferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.

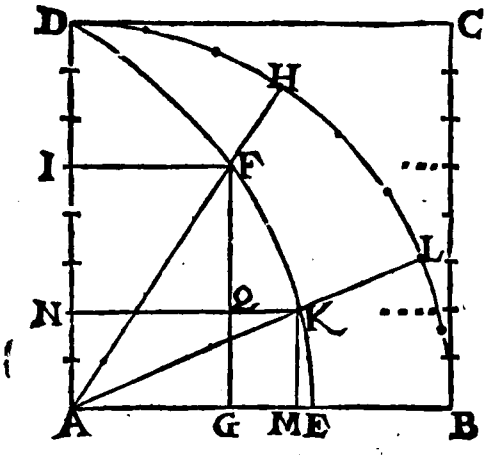
At verò ſi illa linea quadrupla maior fuerit, quàm data recta linea, (minor eſſe non poteſt: alioquin data recta eſſet maior, quàm circunferentia dati circuli. quod eſt contra hypotheſin) ſecetur tota circunferentia in duos arcus, ex propoſ. 2. vt ad vnum eorũ eandem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam. quod facilè etiam fiet, ſi ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circunferentia circuli ſecetur, vt quadrupla illa recta eſt ſecta. Erit namque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem abſciſſam, id eſt, ad datam rectam, ita tota circunferentia circuli ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ erit æqualis. Cùm enim ſit, vt quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ita tota circunferentia ad arcum abſciſſum; ſit autem illa linea quadru-
d 14. quinti. *pla toti circunferentiæ æqualis;* [d] *erit quoq; data recta linea arcui abſciſſo æqualis.*

Aliter, & breuius: Inuenta ex coroll. 1. propoſ. 4. vel ex propoſ. 5. recta æquali circunferentiæ dati circuli, abſcindatur ex ea data recta linea æqualis, & tota circunferentia per propoſ. 2. ſecetur, vt ſecta eſt inuenta illa recta, in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc eſt, ad datam rectam, ita tota circunferentia ad ar-

cum

cum abſciſſum. Cùm ergo tota illa recta ſit æqualis toti circunferentiæ, [a] *erit quoque data recta arcui abſciſſo æqualis. Quod eſt propoſitum.* a 14. quinti.

COROLLARIVM II.



Ex ijs quoque, quæ dicta ſunt, inferri poteſt, tam arcus, quàm angulos rectilineos reperiri incommenſurabiles inter ſe. Sit enim arcus HB, & angulus rectilineus HAB. Dico tam arcum HB, ſecari poſſe in duos arcus inter ſe incommenſurabiles, quàm angulum HAB, in duos angulos incommenſurabiles inter ſe. Deſcripta enim Quadratrice DE, quæ rectam HA, ſecet in F, ducatur per F, baſi AE, parallela FI. Deinde inuentis duabus rectis inter ſe incommenſurabilibus, vt libro 10. docetur, diuidatur recta IA, in N, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. ita vt IN, ad NA, eandem proportionem habeat, quam dua recta inuenta; atque adeò & IN, NA, incommenſurabiles quoque ſint. Ducta autem recta NK, ipſi AE, parallela, quæ Quadratricem ſecet in K, ducatur ex centro A, per K, recta ſecans arcum HB, in L. Dico tam arcus HL, LB, quàm angulos HAL, LAB, inter ſe eſſe incommenſurabiles. Quoniam enim per propoſ. 1. eſt, vt IN, ad NA, ita arcus HL, ad arcum LB: ſunt autem IN, NA, incommenſurabiles; erunt & arcus HL, LB. incommenſurabiles. Cùm ergo ſit quoq; [b] *vt arcus HL, ad arcum LB, ita angulus HAL, ad angulum LAB; erunt etiam anguli HAL, LAB, incommenſurabiles inter ſe. Quod eſt propoſitum.* b 33 ſexti.

FINIS ELEMENTI SEXTI.