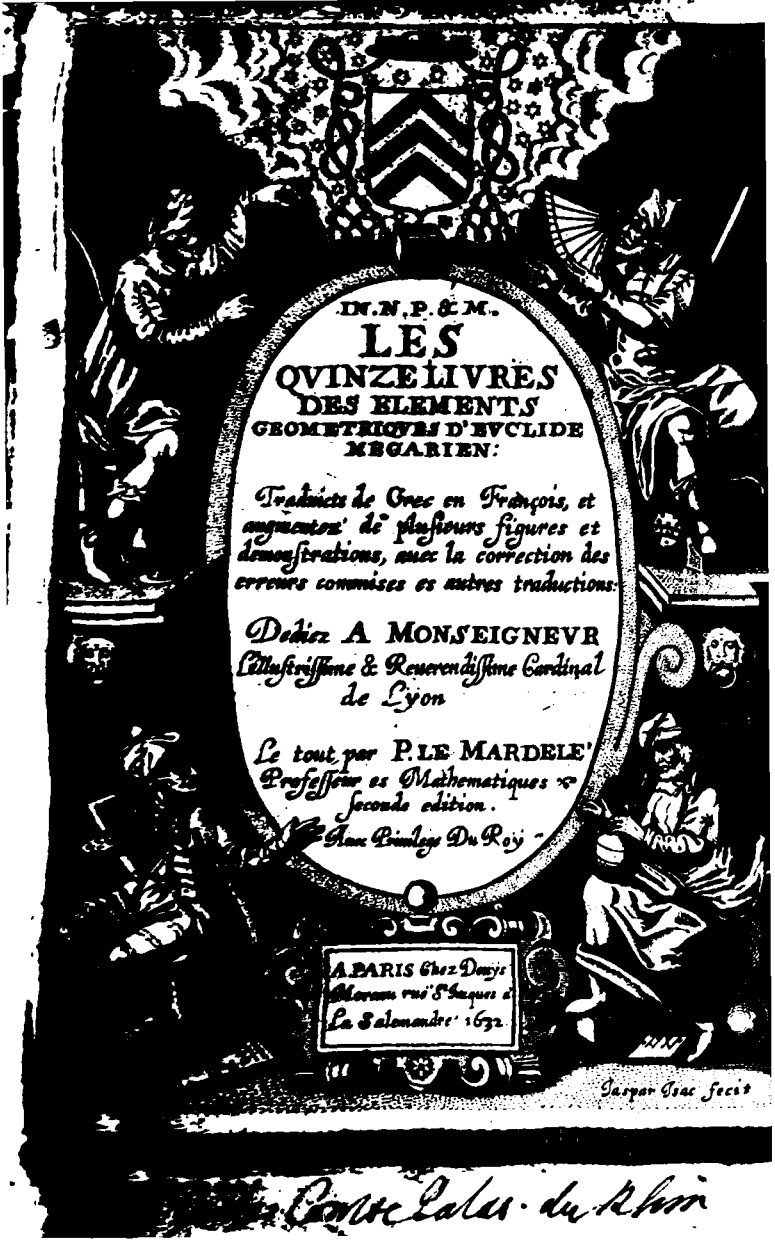
Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres



Comte Lalo du Rhin


Bayerische
Staatsbibliothek
München

A MONSEIGNEVR,

MONSEIGNEVR L'ILLVSTRISSIME ET REVERENDISSIME CARDINAL DE LYON.

MONSEIGNEVR,

Il y a quelques annees qu'ayant traduict ce liure du Grec de l'Autheur & donné au public; Il a eſté fauorablement receu, non ſeulement de tous les hommes Doctes en cette ſcience, mais auſſi de ceux qui deſirent paruenir à la cognoiſſance des Mathematiques

& des autres sciences. C'est pourquoy (MONSEIGNEVR) desirant pour la seconde fois le mettre en lumiere, auec l'augmentation de plusieurs demonstrations & nouuelles figures de mon inuention, pour faciliter les plus difficiles Propositions: afin qu'il soit encore plus fauorablement receu; I'ay pris la hardiesse (MONSEIGNEVR) de vous le presenter; croyant que si vous me faictes la faueur d'approuuer ce mien trauail, tout le monde qui recognoist en toutes vos actions autant d'honneur que de gloire comme leurs compagnes. I'espere qu'il rejaillira sur ce mien ouurage quelque partie de ces belles qualitez, que le public cherit en vostre personne, d'autant qu'il porte vostre Nom sur le front: & ce à cause que l'on ne donne rien aux Grands, qui ne soit digne de leur entretien, ils l'estimeront d'auantage. Et en cette consideration, (MONSEIGNEVR) ie supplie vostre Grandeur, qu'il luy plaise le

regarder d'vn œil fauorable, & vous m'inciterez d'autant plus à trauailler pour le public, & luy donner cet ouurage d'auſsi bon cœur, que ie ſuis & deſire d'eſtre à iamais,

MONSEIGNEVR,

Voſtre tres-humble & tres-obeyſſant ſeruiteur

P. LE MARDELE'.

AV LECTEVR.

AYANT par cy-deuant (amy Lecteur) traduict ce Liure & mis en lumiere, lequel ayant eſté bien receu de tous, & voyant qu'il ne s'en trouuoit plus d'exemplaires : ie me ſuis deliberé pour la ſeconde fois de le donner au public, auec la correction de pluſieurs fautes commiſes, par d'autres qui l'ont mis auparauant en lumiere, & auſſi pluſieurs autres œuures ſous le nom d'vn quidan Copiſte qui en faiſoit trafic, & auec l'augmentation de pluſieurs demonſtrations & nouuelles figures, par le moyen deſquelles les propoſitions plus difficiles ſont renduës faciles, ce que l'experience fera voir à ceux qui le liront auec attention. A Dieu.

IN EVCLIDEM EX GRÆCO IN SERMONEM VERNACVLVM CONVERSVM.

EPIGRAMMA.

TVrpibus Euclidem nauis, mendisque foetentē
Purgatum nobis MARDELE *deproperas.*
Euclidem Græcum feciſti MARDELE, *Gallum,*
Quod Gallo-Græcum, Lam ea tota tua eſt.

PETRVS VALLENS Græcarum Literarum Profeſſor Regius.

DOMINO LE MARDELE EVCLIDIS INTERPRETI VNICO.

HActenus Euclidi bellum indixiſſe videntur
Nec libros doctè expoſuiſſe librū.
Nam tot ſpurcarunt diuina volumina mendis,
Auſi diuinum contaminare virum,
MARDELE opus fuerat qui Mars deleret & aureum
Inſperſum maculis, emacularet opus.

IANVS CÆCILIVS FREY, Doctor Medicus & Philoſophorum Profeſſorum Decanus.

Priuilege du Roy.



OVYS par la grace de Dieu Roy de France & de Nauarre, A nos amez & feaux, les gens tenans nos Cours de Parlement à Paris, Tholoſe, Roüen, Bourdeaux, Dijon, Grenoble & Bretagne, Baillifs, Preuoſts, Seneſchaux deſdits lieux, Lion, Poictiers, Orleans, Tours, Bourges, Angers, Champagne, & à tous nos autres Iuſticiers ou leurs Lieutenans, ſalut. Noſtre bien aymé Denis Moreau, Marchand Libraire en noſtre ville de Paris, nous auroit remonſtré qu'il a recouuert vn liure intitulé; *Les quinze liures des Elements Geometriques d'Euclide, traduits de Grec en François, corrigés & augmentés de pluſieurs demonſtrations & figures, par Pierre le Mardelé Profeſſeur és Mathematiques*, lequel liure il deſireroit mettre en lumiere & faire imprimer, s'il auoit ſur ce nos lettres neceſſaires, humblement requerant icelles. A CES CAVSES auons par ces preſentes permis & accordé, permettons & accordons audit Moreau de faire imprimer par tel Imprimeur que bon luy ſemblera, tant de fois qu'il luy plaira ledit liure que deſſus: & ce pour neuf ans finis & accomplis du iour qu'il aura eſté acheué d'imprimer, en vertu des preſentes. Faiſant tres-expreſſes inhibitions & defenſes à tous Imprimeurs & Libraires de Paris, Lyon, Roüen, & autres villes de noſtre Royaume, & à toutes autres perſonnes de quelque condition & qualité qu'ils ſoient, de l'imprimer ou faire imprimer, en quelque maniere

que ce soit à peine de mille liures d'amende, dont moitié nous appartiendra, & l'autre moitié au suppliant, & aussi de confiscation de ceux qui se trouuerront imprimez sans le consentemẽt dudit Moreau suppliant: mesmes si aucuns Imprimeurs ou Libraires de cettuy nostre Royaume, ou estrangers trafiquans en iceluy, en sont trouuez saisis d'autre impression que de celle qu'aura fait faire ledit Moreau: Voulons qu'il soit procedé contre eux extraordinairement, & soient condamnez en pareille somme & amende que s'ils les auoient imprimez ou faict imprimer. A la charge toutesfois qu'iceluy Moreau mettra deux desdits liures en nostre Bibliotheque publique de ceste ville de Paris, auparauant que de les exposer en vente, suiuant nostre reglement, à peine d'estre descheu du present priuilege. Si vous mandons & à chacun de vous endroit soy, enjoignons que du contenu en ces presentes nos lettres de priuilege & permission, vous faciez & laissiez iouyr & vser plainement & paisiblement ledit suppliant, faisant cesser tous troubles & empeschement au contraire. De ce faire vous donnons pouuoir, authorité & mandement special, & de proceder à l'encontre de ceux qui y contreuiendront par toutes voyes deuës & raisonnables, & par les peines susdictes. Nonobstant oppositions ou appellations quelsconques, pour lesquelles & sans preiudice d'icelles ne voulons estre differé: Et pource que de ces presentes ledit Moreau pourroit auoir affaire en diuers lieux: Nous voulons qu'au Vidimus d'icelles, faict par l'vn de nos amez & feaux Conseillers, Notaires &

Secretaires, foy ſoit adiouſtee comme au preſent original, & auſſi qu'en mettant au commencement ou à la fin dudit liure vn bref ou extraict des preſentes, cela ait force & vertu de ſignifications tout ainſi que ſi l'original eſtoit particulierement ſignifié à chacun : CAR TEL EST NOSTRE PLAISIR Donné à Paris le 7. iour d'Octobre, l'an de grace mil ſix cens trente & vn, & de noſtre regne le vingt-deuxieſme.

Par le Roy en ſon Conſeil,

RENOVARD.

PREFACE.

D'où les diſciplines Mathematiques ont pris leur nom, & de leur diuiſion.

LEs diſciplines Mathématiques leſquelles traictẽt de la quantité, ont prins leur nom de μάθημα, ou μάθησις, qui eſt à dire, diſcipline ou doctrine : Et ſeules entre les autres ont acquis ce nom pour deux raiſons ſelon les bons autheurs. La premiere eſt que les Pythagoriciens & Platoniciens eſtimans que les ames raiſonnables eſtoient en nõbre certain & determiné, & paſſoient de corps en autre (ce que la foy Chreſtienne tient pour faux) teſmoignent que les Mathematiques ont obtenu ce nom, d'autant que par icelles nous acquerons le reſouuenir de la ſcience, dont noſtre ame eſtoit douëe auparauãt (ſelon leur erreur) qu'elle donnaſt forme au corps. Ce que Platon

tasche de prouuer par vn exẽple familier, au dialogue inscrit Menon, où il introduit Socrate interrogeant vn enfant sur quelques questions Geometriques, de la dimension du quarré. A quoy bien qu'il respondit au commencement comme enfãt, neantmoins peu à peu il en vint iusques là, qu'il respondit les mesmes choses que s'il auoit aprins par vn long-temps la Geometrie. La 2. est d'autant (comme veulent les autres) que ces arts seuls gardent la raison & moyen de la science: procedãs tousiours de principes auparauant cogneus, pour demonstrer leurs conclusions, qui est le propre deuoir & office de la doctrine ou discipline, comme enseigne Aristote 1. des Posterieures. Et les Mathematiciens ne prennent iamais rien qui ne soit prouué: mais voulans enseigner quelque chose, si ce qui a esté monstré auparauant en depend, ils le prennent pour concedé; monstrans ce qui n'a esté enseigné: ce que les autres arts & disciplines ne font tousiours, prenant quelquefois pour confirmer leur dire choses non demonstrees. Or les Pythagoriciens suiuis presque de tous les Mathematiciens & Philosophes, ont diuisé toutes les Mathematiques en 4. parties: sçauoir en l'Arithmetique, la Musique, la

Geometrie, & l'Astronomie. Car d'autant que toute *quantité* qui est l'obiect de la Mathematique, est discrete ou continuë, la *discrete* qui contient sous soy les nombres : la continuë qui contient soubs soy toutes les grandeurs : & l'vne & l'autre se pouuant considerer tant selon soy que comparee à vn autre : Il leur a semblé à propos d'instituer les 4. susdites parties qui traitassent des deux especes de quantité, selon les raisons dites. Partant l'Arithmetique traitte de la quantité discrete selon soy, recherchant & expliquant toutes les passions & proprietez des nombres. La Musique traitte aussi de la quantité discrete, ou du nombre comparé à autre chose, sçauoir entant qu'il considere les accords des sons & l'harmonie. La Geometrie dispute de la quantité continuë aussi selon soy, & comme immobile. L'Astronomie finalement considere la mesme quantité *continuë* en tant qu'elle est mobile, comme sont les corps celestes, entant qu'ils tournent par vn mouuement continuel. Or toutes les autres parties qui traictent de la quantité en quelque façon que ce soit, comme sont la Perspectiue, la Geographie & semblables, se peuuẽt rapporter comme à leurs chefs desquels elles depen-

dent, à ces 4. parties ſuſdites, dont la Geometrie & l'Arithmetique ſont appellees pures: mais la Muſique & l'Aſtronomie, mixtes. Les diſciplines Mathematiques ſont auſſi diuiſees en vne autre maniere par Geminus ancien Geometre & autres, comme rapporte Proclus en ſes commentaires ſur le premier liure d'Euclide.

Diuiſion de la Geometrie, & des Elements d'Euclide.

LA Geometrie eſt diuiſee en la cõtemplation des plans, laquelle ſelon le terme general eſt dicte Geometrie, & en la doctrine des ſolides, laquelle proprement & particulierement les Mathematiciens appellent Stereometrie. Car la Geometrie en general ſe propoſe ce but, de conſtituer les plans & les ſolides, & ceux qui ſont ja cõſtituez de les comparer entr'eux ou les diuiſer. Et l'on ne doit s'eſmerueiller, que y ayant trois genres de grandeurs, ſçauoir la ligne, la ſuperficie, & le corps, l'on faict mention ſeulement de la cõtemplation des deux derniers proprement, & non de la ligne & du poinct. D'autant que comme dit Proclus, la Geometrie traicte

principallement des figures lesquelles cõsistent toutes seulement aux plans ou aux solides, car les poincts & les lignes ne constituent aucune figure sans les plans ou solides, & partant n'estoit necessaire d'en traiter à part. Donc Euclide nous voulant laisser vne parfaite cognoissance en ses Elements de la Geometrie; Il traitte aux six premiers liures des plans: Et aux cinq derniers il dispute subtilement des solides, recherchant leurs plus belles proprietez. Mais d'autant que toutes les choses Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers appellez selõ la coustume, corps Platoniques, ne pouuoient estre traictez sans la cognoissance des lignes commensurables & incommensurables, Euclide a adiousté le 10. liure, deuant sa Stereometrie, afin d'auoir tous les documents requis à l'intellige nce & dimension des grandeurs, auquel 10. l. il discourt subtilement de telles lignes. Et voyant derechef que ce traicté des lignes commensurables & incommensurables ne se pouuoit entendre sans la cognoissance des nombres: Deuant le 10. l. il traicte des proprietez & passions d'iceux nombres aux 7. 8. & 9 liures. Parquoy tout ce volume des Elements Geometriques comprins en 15.

liures (dont les treze premiers ſont attribuez à Euclide ſans aucune controuerſe: mais les deux derniers ſont eſtimez par quelques vns eſtre à Hypſicle Alexandrin) pourra eſtre diuiſé en quatre parties, dont la premiere contiendra les ſix premiers liures qui traictent des plans; La ſeconde les trois ſuiuants, laquelle recherche les paſſions & proprietez des nombres; La troiſieſme contenãt le dixieſme liure ſeulement, diſpute des lignes commenſurables & incommenſurables. Et la quatrieſme finalement, ſçauoir les cinq derniers liures, contient la ſcience des ſolides ou corps. La premiere partie eſt diuiſee derechef en trois. Car aux 4. premiers liures eſt traicté des plans abſolument, recherchant leur egalité ou inegalité. Au cinquieſme eſt diſputé des proportions des grandeurs en general. Et au ſixieſme finalement les proportions des figures planes ſont examinees. Mais il ſera auſſi expoſé en ſon lieu, ce que Euclide traicte en chacun de ſes liures.

PREFACE.

Que c'eſt entre les Mathematiciens que Probleme, Theoreme, Propoſition, Lemme.

TOute demõſtration Mathematique eſt diuiſee par les anciens autheurs, en Probléme, & Theoréme. Ils appellent Probleme ceſte demonſtration qui commande & enſeigne à conſtruire quelque choſe. Comme ſi quelqu'vn vouloit demonſtrer, que l'on peut conſtituer vn triãgle equilateral ſur vne ligne droicte, donnee & terminee, telle demonſtration ſera appellee *Probleme*, d'autant qu'elle enſeigne par quel moyen vn triangle equilateral doit eſtre conſtitué ſur vne ligne droicte terminee. Or ce genre de demonſtration eſt appellé Probleme à la ſimilitude *du* Probleme des Dialecticiens. Car comme *en* Dialectique, le Probléme eſt ceſte *queſtion*, de laquelle l'vne & l'autre partie de la *controuerſe* ou contradiction (cõme ils parlent) *eſt* probable, comme eſt ceſte queſtion; Sçauoir ſi le tout eſt diſtingué reellement de ſes parties priſes enſemble. Ainſi auſſi ceſte Propoſition entre les Mathematiciens, par laquelle ils commã-

dent de conſtituer ou conſtruire quelque choſe, dont le contraire peut auſſi eſtre faict, s'appelle Probleme. Comme ſi quelqu'vn ſe propoſe de pouuoir conſtituer vn triangle equilateral ſur vne ligne droicte terminee, il faict vn Probleme : d'autant qu'vn triangle non equilateral, ſçauoir vn Iſoſcele ou Scalene, peut auſſi eſtre conſtitué ſur la meſme ligne. Semblablement quiconque propoſe de couper vn angle rectiligne en deux parties egales, il exhibe vn Probleme, dautant que le meſme angle peut auſſi eſtre diuiſé en parties non egales: Mais toutes fois il y a grande difference entre le Probleme des Dialecticiens, & des Mathematiciens. Car au Probleme de Dialectique, laquelle partie que l'on veut de la contradictiõ eſtant priſe, eſt cõfirmee probablement ſeulement, de ſorte que l'on eſt touſiours en doute laquelle partie d'icelle eſt vraie: Mais au Probleme Mathematique, quelconque partie que quelqu'vn prenne, il la prouuera par vne demonſtration certaine; de ſorte qu'il ne reſtera aucun doute. Car ſi le Geometre ordonne de quelconque point d'vne ligne droicte propoſee, mener vne ligne perpendiculaire, il le fera auec vne raiſon cõſtante & euidente; & faut dire le ſemblable s'il

veut mener vne ligne non perpendiculaire. Or ils appellent Theoréme ceste demonstration, laquelle examine seulement *quelque* passion ou proprieté d'vne ou *plusieurs* quantitez ensemble. Comme si on veut demonstrer qu'en tout triangle, les trois angles sont egaux à deux angles droicts: Ils appelleront telle demonstration, Theoreme, d'autant qu'il ne commande pas ou enseigne de constituer vn triangle ou quelque autre chose: mais il contemple tant seulement ceste passion de quelconque triangle, que les angles d'iceluy soient egaux à deux droits: D'où ceste demonstration est dite Theoreme de la contemplation mesme: & au Theoreme il ne se peut nullement faire que l'vne & l'autre partie de la contradiction soit veritable: Car ayant demonstré, que tous les trois angles de tout triangle sont egaux à deux angles droicts; il ne se peut faire qu'ils soient aussi inegaux à 2. droits: & ainsi des autres. Donc, pour dire en vn mot, ceste question Mathematique, qui enseigne à faire ou construire quelque chose, & dont la partie opposee peut aussi estre faite, s'appelle Probleme. Mais celle là qui enseigne quelque chose où il n'y a

rien à construire, & de laquelle la partie oppose est perpetuellement fausse, est appellee Theoreme. Parquoy si quelqu'vn proposoit en façon de Probleme vouloir constituer vn angle droict, en vn demicercle, il seroit tout à faict digne d'estre mocqué & estimé ignorant en Geometrie; puis que tous les angles au demicercle sont droicts: comme il sera demonstré 31. p. 3. l. Parquoy ceste Proposition doit estre appellee Theoreme & non pas Probleme. Au reste tant le Probleme que le Theoreme, entre les Mathematiciens est dict Proposition, d'autant que l'vn & l'autre nous propose quelque chose, comme appert par les exemples susdits: & touſiours les demonstrations des Problemes se concluent par ces mots: Ce qu'il falloit faire. Mais celles des Theoremes, par ceux cy: Ce qu'il falloit demonstrer.

Or aux demonstrations des Problemes & Theoremes estans requis fort souuent quelques autres Theoremes ou Problemes moins principaux, & qui peuuent estre facilement entendus de ceux qui sont premierement demonstrez; Iceux sont quelquesfois inserez par les Geometres entre les Theoremes & Problemes,

desquels il s'agit principalement, afin qu'ils puissent estre plus briefuement demõstrez, & ils les appellent Lemmes, d'autant qu'ils sont pris seulement pour d'autres demonstrations, & d'iceux n'est instituee vne dispute principale, ainsi que des autres. Donc la demonstration ou construction de ce qui est pris pour la demonstration de quelque Theoreme ou Probleme principal, afin que la demonstration se face plus promptement & briefuement peut estre appellee Lemme.

Que c'est que Principes entre les Mathematiciens.

TOute doctrine & discipline est engendree, comme dit Aristote, d'vne preexistente cognoissance, & demonstrãt ses conclusions par de certains principes prins & concedez : Mais aucune science, selon l'opinion du mesme Aristote & des autres Philosophes, ne demonstrant ses principes : Tousiours les disciplines Mathematiques auront leurs principes, par lesquels, posez & concedez, elles puissent confirmer leurs Problemes & Theoremes.

Or entre les Mathematiciens, il y a de trois genres de principes. Au premier se trouuent toutes les definitions, que quelques-vns auec Aristote appellent suppositions, ou hypotheses, comme veut Proclus: Et par icelles sont expliquez les termes de l'art, afin qu'en traictant la science, ne soyons trompez par l'ambiguité & obscurité des noms, & ne tombions en des paralogismes. Au second genre sont les petitions ou demandes, lesquelles sont tellement claires & manifestes en la science que l'on traicte, qu'elles n'ont besoin d'aucune preuue; mais demandent seulement le consentement de l'auditeur, afin qu'il n'y ait aucune hesitarion ou difficulté en la demonstration. Au troisiesme sont les Axiomes ou maximes, ou communes notions de l'esprit, lesquelles non seulement en la science proposee, mais aussi en toutes les autres, sont tellement manifestes & euidentes, que celuy qui conceura fort bien ces mesmes mots & termes, ne s'en pourra en aucune façon departir, qu'il n'y consente facilement: Lesquels principes Euclide met deuant les demonstrations de ses conclusions, afin que par iceux comme estans bien

entendus de chacun; il puiſſe deduire des Theoremes admirables, leſquels perſonne n'accorderoit auparauant qu'eſtre confirmez par raiſons euidentes & certaines. *Mais* ſuyuons noſtre Autheur.

LIVRE PREMIER,

DES ELEMENTS GEOMETRIQVES D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

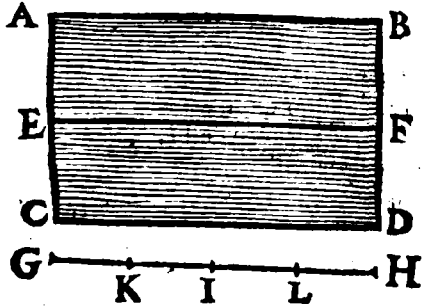
1. Le poinct eſt, ce qui n'a aucune partie.

EVCLIDE nous a faict entendre, par la negation des parties (& ce auec raiſon) que c'eſt en la quantité continuë que le poinct, principe & fondement de ſon ſujet. Car les principes eſtans differens des choſes deſquelles ils ſont principes, & les proprietez & accidens de tels principes eſtans incogneus, on monſtre *en quelque* façon ces principes, niant qu'ils ſoient les choſes dont ils ſont principes, ou qu'ils ayent quelque choſe de commun auec icelles. Vray eſt, que pour faire de ſemblables definitions, ou pluſtoſt deſcriptions, il faut auoir expliqué & faict cognoiſtre les choſes que nous excluons, ainſi qu'a faict Porphyre en ſon Introdu-

ction definiſſant l'accident, ὃ ἔστι γένος ἐστὶ ἔστι διαφορὰ, ἔστι εἶδος. ἔστι ἴδιον, αἰεὶ δὲ ἐστὶ ἐν ὑποκειμένῳ ὑφιστάμενον: Ce qui n'eſt ny genre, ny difference, ny eſpece, ny propre, & eſt touſiours au ſuiet. Mais cela euſt eſté fort eſloigné, & plus propre au Phyſicien qu'au Geometre, d'enſeigner que c'eſt que diuiſible en general. C'eſt pourquoy il l'a obmis, ſe contentant d'en definir apres quelques eſpeces, comme la ligne & la ſur-face, deſquelles il conſidere pluſieurs & diuerſes affections en ſes ſix premiers liures.

Henrion Copiſte, pretendant faire icy entendre que c'eſt que le poinct, dict ainſi. Les Phyſiciens diſent que le poinct eſt le moindre obiect de la veuë, & iceluy peut eſtre deſcrit auec ancre ou autre choſe: mais les Mathematiciens reiettans cette definition, diſent que le poinct eſt vn obiect de l'intellect ſi ſubtil, qu'il ne peut eſtre diuiſé en aucunes parties: d'où il eſt tres-manifeſte qu'il n'entend rien en Philoſophie, & bien peu en Mathematique. Et pour faire cognoiſtre ſon ignorance, il faut entendre que les Mathematiques ſont les premieres ſciences de toutes. C'eſt pourquoy elles ont auſſi retenu le nom de diſciplines ou ſciences, & tant icelles que les autres, ont eſté inuentees par deux principes; ſçauoir, l'admiration & l'experience. Comme par exemple, ceux qui ont premierement appercеu l'eclipſe de la Lune, l'ont admiree, & l'ayans obſeruee pluſieurs fois, ont enfin recogneu la cauſe, & de là en ont faict cette propoſition vniuerſelle, certaine & neceſſaire. *L'eclipſe de la Lune arriue à cauſe de l'interpoſition de la terre entre la Lune & le Soleil.*

Ainſi la Geometrie a eſté inuentee par l'experience & pratique, ſe ſeruant de poincts, lignes & ſuperficies Phyſiques, c'eſt à dire materielles & visibles (car Phyſique, c'eſt à dire materiel) en leurs operations: comme pour exemple, ſi vn Geometre vouloit diuiſer vne ſuperficie (laquelle ſera icy repreſentee par la figure ABCD) en deux egalement, & ayant trouué auec ſes inſtrumẽs qu'icelle a les angles droits, il diuiſeroit les deux coſtez AC, & BD, chacun en deux egalemẽt, par les poincts F & G, & pour faire entẽdre la ſeparation des deux parties, il meneroit vne ligne de F à E, par l'application d'vne ficelle ou corde, laquelle il terminera de deux pierres, baſtõs, ou autres choſes ſemblables, qu'il appellera ſignes, poincts, termes ou bornes: mais en cette ſorte vne ſuperficie ne pourroit eſtre diuiſee preciſement en deux egalement: car l'eſpace occupé ou couuert par vne telle ligne ſi deliee qu'elle peut eſtre, ſeroit partie du tout, comme il appert. Parquoy il ſe faut repreſenter en l'entendement vne diſtance de E à F, qui diuiſe le tout en deux egalement, & qui ne ſoit partie de l'vne ny de l'autre, laquelle diſtance ou ligne imaginaire en quelque façon repreſentee par cette corde, s'appellera ligne Ma-



thematique, c'eſt à dire, purement intellectuelle, & qui hors l'entendement n'a aucune exiſtence reelle en nature, & les extremitez ou termes d'icelle, s'appelleront poincts Mathematiques, auſſi purement intellectuels, & qui ne font aucune partie de la ligne; mais ſont la negation de la production ou eſtenduë d'icelle plus outre, ou bien de l'vne, partie de la ligne ſur l'autre. Comme par exemple, ſi la ligne G H eſt diuiſee en quatre parties, par les poincts K, I, L, le poinct K ſera celuy de la cõionction des deux parties GK, K I, & auſſi de la negation de l'eſtenduë de la partie G K, vers la partie K I, tout ainſi que le poinct G ou H eſt la negation de l'eſtenduë, ou production de la ligne G H plus outre, & ne peut eſtre cogneu que par l'intellect.

Or Ariſtote ne parle en aucun lieu de la definition du poinct, & tant luy que Platon, & les autres Philoſophes parlans du poinct, ils en parlent comme d'vne choſe deſia cogneuë, & perſonne de leur temps n'apprenoit la Philoſophie, qu'il ne ſceuſt auparauant la Geometrie, comme teſmoigne le meſme Platon, par l'inſcription qu'il auoit faict mettre à l'entree de ſon Academie: οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω, c'eſt à dire, que perſonne n'entre ceans pour apprendre la Philoſophie, ignorant la Geometrie: ce qui eſt auſſi manifeſte d'Ariſtote. Car premierement, en la Categorie de la quantité, il prend le poinct comme deſia defiy, en parlant de la quantité cõtinuë. Ἡ δὲ γραμμὴ, συνεχὴς ἐστιν: ἔστι γὰρ κοινὸν ὅρον λαβεῖν, πρὸς ὃν τὰ μόρια αὐτῆς συνάπτει, στιγμὴν. καὶ τῆς ὁπιφανείας, γραμμή. &c.

La ligne (dict-il) est vne quantité cõtinuë, en laquelle on peut prendre vn terme commun, par lequel ses parties sont conioinctes, sçauoir le poinct: & en la superficie la ligne: donc Aristote parle du poinct comme desia defiy, & du poinct Mathematique, tesmoignant que ce n'est pas vne partie, puis qu'il conioint les parties: autrement les parties du continu seroient conioinctes par d'autres parties, ce qui est absurde, & contraire à ce qu'il dict en la Physique parlant du continu, & disant qu'il est faict de parties, & non de choses indiuisibles, ἀδύνατον ἐξ ἀδιαιρέτων εἶναί τι συνεχές, οἷον γραμμὴν ἐκ στιγμῶν, εἴπερ ἡ γραμμὴ μόνον συνεχές, ἡ στιγμὴ δὲ ἀδιαίρετον. Il est impossible, dict-il, qu'aucune quantité continuë soit d'indiuisibles, cõme la ligne de poincts, d'autant que la ligne est vne chose continuë, mais le poinct vne chose indiuisible. D'où il est manifeste que les Philosophes ne parlẽt que du poinct Mathematique, & comme desia defiy par Euclide, ou autres Mathemat. deuant luy.

Dauantage, lès poincts dont se seruent les Mathematiciens en leurs figures sensibles & palpables, pour faire entendre les demonstrations scientifiques, qui sont les mesmes que ceux des Grammairiens, ne sont le moindre obiect de la veuë, & semblablement les termes & bornes dont on se sert en la practique, à cause desquels on a imaginé les poincts & lignes Mathematiques, pour sçauoir sciẽtifiquement ce que l'on desire. Car si cela estoit, il faudroit qu'ils fussent moindres que les atomes que l'on void aux rayons du Soleil, luisant par les fenestres, & partant inutiles en la

practique: & qui plus eſt, le moindre obiect de la veuë ne ſe peut proprement donner, comme nous monſtrerons tres-bien. Il faut donc conclure que les Philoſophes n'ont point defiy ny diuiſé le poinct. Donc les Mathemat. ſe ſont premieremẽt ſeruis de ce poinct phyſique, ou materiel & viſible, s'en ſeruans en leurs operations & practique, lequel eſt le principe reculé ou plus eſloigné de leur ſcience, ſçauoir, *principiũ remotum*, comme diſent les Philoſophes, & ont pris le poinct Mathematique & intellectuel pour principe plus prochain, tout ainſi que l'admiration eſt le principe reculé de l'inuention des ſciences, & l'experience le principe prochain, & perſonne n'a defiy ainſi le poinct que le Copiſte.

L'on appelle auſſi vne choſe bien grande vn poinct, en comparaiſon d'vne autre choſe tres-grande, & qui ſemble quaſi n'eſtre d'aucun eſtime, eu eſgard à la plus grande, comme il appert de Ciceron au ſonge de Scipion, comparant l'Empire Romain au globe de la terre. *Iam verò ipſa terra ita mihi parua viſa eſt, vt me Imperij noſtri, quo quaſi punctum eius attigimus pœniteret.* Or me ſembla pour lors la terre ſi petite, que i'eus honte de noſtre Empire Romain, lequel ne monte comme rien au globe de ladite terre, où eſt comme vn poinct.

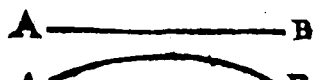
Et Ptolomee au premier liure de ſon Almageſte, dict que la terre eſt comme vn poinct, au reſpect du Firmament, & en telles comparaiſons ils peuuent auoir eſgard au poinct ſenſible, qui n'eſt point que homonymement.

Or que le poinct Mathematique ou intellectuel, ſoit la negation de l'extenſion ou produ-

ction de la ligne, comme nous auons dict, & hors l'intellect n'ait aucune existence reelle en nature; Il est manifeste, selon le mesme Aristote, qui dit, que la ligne est vne quantité continuë; d'autant que l'on y peut prendre vn terme commun, sçauoir le poinct, (c'est à dire conceuoir en son entendement.) Il ne dict donc pas qu'il y ait vn terme commun reellement, mais il dict que l'on y peut conceuoir ou imaginer vn terme commun, comme il appert par son texte cy-deuant allegué: où il dict aussi qu'en la superficie, l'on peut conceuoir vne ligne pour terme commun aux parties d'icelle superficie: & partant, la negation de l'extension de l'vne des parties vers l'autre: Et si quelqu'vn vouloit dire le contraire, ie luy monstreray non seulement par le texte d'Aristote, que cela ne peut estre autrement, mais aussi Geometriquement.

2. La ligne est, vne longueur sans largeur.

La ligne est la premiere espece de quãtité, laquelle a tant seulemẽt vne dimen-



sion, à sçauoir longitude, sans aucune latitude ny profondité, & n'est autre chose que le flux ou coulement du poinct, lequel estant totalement indiuisible, laissera de son mouuement imaginaire quelque vestige en long, exempt de toute latitude. Comme si le poinct A est entendu couler de A à B, le vestige A B, qu'il a fait par son flux ou coulement, sera appellé ligne, puisque l'interualle compris entre les deux poincts A & B, est vrayement

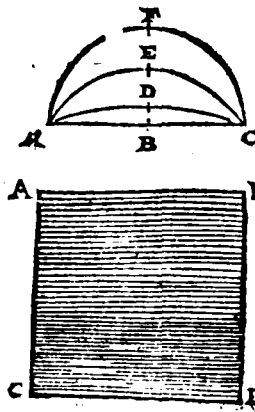
vne longitude, defaillant de toute latitude, dautant que le poinct, par le flux duquel elle est produite, n'a aucune dimension. Quelques-vns disent, que c'est vne quantité qui a vn interualle, car la ligne peut estre diuisee ou couppee en vne seule maniere, à sçauoir selon la longitude.

3. Les extremitez de la ligne, ce sont poincts.

Euclide enseigne icy quels sont les termes ou extremitez de la ligne, disant que la ligne est terminee ou finie de part & d'autre de poincts, non pas que toute ligne ait des termes: car comment pourroit-on assigner des termes à vne ligne infinie? ou trouuer extremité à vne ligne circulaire? Mais il faut entendre que toute ligne finie est terminee de poincts à ses extremitez. Comme la ligne precedente A B est terminee des poincts A & B. Et faut entendre le mesme de toutes autres lignes finies ou terminees.

4. La ligne droicte, est celle qui est egalement estenduë entre ses poincts.

Les Mathematiciens ont de trois sortes de lignes, la droicte, la circulaire, laquelle ils appellent courbe, & la mixte, qui est composée de l'vne & de l'autre. Euclide descrit en ce lieu la droicte, qu'il dit estre celle-là laquelle est egalement estenduë entre ses poincts, c'est à dire, en laquelle



aucun des poincts, de tous ceux qui ſont poſez entre les extremitez, n'eſt plus eſleué ou abbaiſſé: & en vn mot, c'eſt le plus court chemin d'vn poinct à l'autre, ou comme dit Archimede, la plus courte de celles qui ont meſmes extremitez. Icelle nous peut eſtre aucunement exprimee par quelque fil bien delié, & tendu autant qu'il ſe peut faire. Proclus expoſant cette definition dict, qu'vne ligne eſt egallement eſtenduë entre ſes poincts, quand elle occupe vn eſpace ou interualle egal, à celuy qui eſt poſé entre ſes poincts extrémes; comme par exemple, la ligne A B C, ſera dite droicte, d'autant qu'elle occupe autant d'interualle, qu'il y a de diſtance du poinct A au poinct C: mais les lignes A D C, A E C, A F C, ne ſeront droictes, d'autant qu'elles obtiennent plus d'eſpace que la diſtance de A à C. Platon definit ainſi la droicte ligne: La ligne droicte eſt celle de laquelle les parties du milieu ombragent les extremes: comme ſi en la ligne A B C, le poinct B, ou quelqu'autre du milieu auoit la force de cacher, & le poinct A extréme la vertu d'illuminer, le poinct B empeſcheroit touſiours que le poinct extréme C, ne fuſt illuminé de A, ce qui n'arriueroit aux lignes non droictes, comme A D C, A F C, comme il eſt manifeſte.

Euclide ne definit icy les lignes non droictes, qui peuuent toutes eſtre dites obliques, mais il definira la circulaire à la 15. Definition: reiettant les autres qui ne ſont d'aucun vſage en ſes Elements. Et y en a de pluſieurs genres, deſquelles traicte Apollonius, Nicomedes, Archimede, &c. Or comme la ligne eſt produite par le flux continuel du poinct, ainſi la ſuperficie eſt formee

de la ligne se mouuant de trauers, laquelle se definit ainsi.

5. La superficie est, ce qui a tant seulement longueur & largeur.

Apres la ligne, qui est la premiere espece de quantité continuë, & qui a vne seule dimension, il definit la superficie, qui est la seconde espece, & qui a deux dimensions, sçauoir longueur & largeur, sans toutefois aucune profondité. Comme la quantité A B C D, contenuë entre les lignes A B, C D, A C, B D, (en la figure precedente page 8.) considerée selon la longitude A B, ou C D, & selon la latitude A C, ou B D, sãs aucune profondité, est appellee superficie. La latitude extréme de tout corps entẽduë sans aucune solidité no⁹ represẽte icelle. Et cõme dit Procl⁹, les ombres des corps nous la representẽt quasi naïfuemẽt: Si l'on entẽd aussi vne ligne se mouuoir de trauers, elle décrira vne superficie, comme disent les Mathematiciens; Comme si on entend la ligne A B se mouuoir vers la ligne D C, elle descrira la superficie A B C D; Desorte que comme la ligne commence à vn poinct, & finit à vn poinct, aussi la superficie terminee de lignes, commence à vne ligne, & finit à vne ligne. Quelques-vns disent que c'est le terme du corps, d'autres que c'est vne quantité contenuë de deux interualles. Car la superficie peut estre diuisee ou couppee en deux manieres, à sçauoir selon la longitude & latitude.

6. Mais les extremitez de la superficie sont lignes.

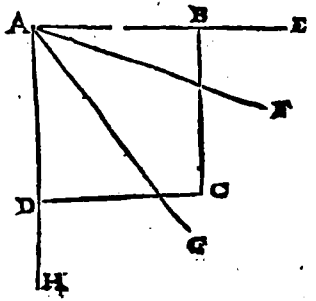
Cette definition ne difere de la superieure, où ont esté definis les termes de la ligne. Car il dict que les extremitez de la superficie sont li-

gnes, tout ainſi que les extremitez des lignes ſont poincts. Comme en la ſuperficie de la derniere figure *ABCD*, les extremitez ſont A B, B D, D C, C A. Et ainſi en toute autre ſuperficie qui a extremitez, faut entendre des lignes aux extremitez, & non en la ſuperficie Spherique, de laquelle vn corps Spherique eſt enclos. Il y a auſſi quelque ſuperficie qui eſt encloſe d'vne ſeule ligne, comme la ſuperficie circulaire, comme il ſera monſtré en la definition du cercle.

7. **Superficie plane, eſt celle qui eſt egalement eſtenduë entre ſes lignes.**

Cette definitiõ a quelque ſympathie auec celle de la ligne droicte. Car la ſuperficie, qui eſt egalement eſtenduë entre ſes lignes, en ſorte que les parties du milieu ne ſont point plus eſleuees ny abbaiſſees que les extrémes, eſt appellee ſuperficie plane, comme ſeroit la ſuperficie de quelque marbre bien poly & vny, auquel toutes les parties ſont diſpoſees, ou colloquees directement: & comme la ligne droicte eſt le plus court chemin d'vn poinct à l'autre, auſſi telle ſuperficie eſt le plus court chemin d'vne ligne à l'autre.

Les autres definiſſent la ſuperficie, diſans que c'eſt celle-là, de laquelle toutes les parties du milieu ombragent les extremes: Ou que c'eſt la plus

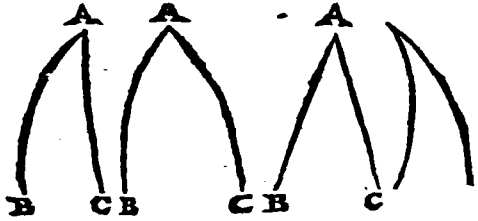


courte ou briefue de toutes celles qui ont meſmes extremitez. Ou celle-là (comme veut Heron ancien Geometre) à toutes les parties de laquelle vne ligne droite peut eſtre accommodee. Cõme par exẽple, la ſuperficie A B C D, doit alors eſtre appellee plane, ſi la ligne A E eſtant entenduë ſe mouuoir à l'entour du poinct A, demeurant fixe, en ſorte qu'elle ſoit comme A E, puis comme A F, & comme A G, & que finallement paruenant du poinct E au poinct H, ne rencontre rien en la ſuperficie de plus eſleué ou abbaiſſé l'vn que l'autre: mais tous les poincts de la ſuperficie ſont touchez de la ligne, ou en quelque maniere raclez. Et telle ſuperficie eſt celle que nous pouuons entendre eſtre deſcrite par le mouuement ou flux d'vne ligne droicte en trauers. Et faut noter que les Mathematiciens ont couſtume d'appeller aſſez ſouuent cette ſuperficie, Plan. De ſorte que quand ils parlent du Plan, il faut entendre par ce mot Plan, la ſuperficie plane. Toutes autres ſuperficies ſont appellees courbes, comme ſont celles des voûtes ou arcades, colonnes, corps Spheriques & autres. Mais la ſuperficie courbe eſt diuiſee en conuexe & concaue: La conuexe eſt comme l'exterieure ſuperficie d'vn globe ou corps Spherique, d'vn cylindre, d'vn cone, &c. La concaue eſt comme la ſuperficie interieure d'vne voûte ou arcade, ou d'vn orbe, &c.

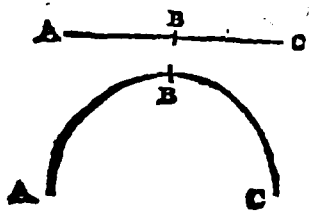
8. Angle-plan, eſt l'inclination de deux lignes, leſquelles ſe touchent l'vne l'autre en vn plan, & ne ſe rencontrent directement.

Euclide nous enſeigne icy que c'eſt qu'Angle-

plan, disant que quand deux lignes se rencontrent l'vne l'autre en vne superficie plane, n'estans constituees *directement*, de tel rencontre ou inclination *l'vne* à l'autre, il se fait vn angle, lequel est *appellé* angle-plan, d'autant qu'il est constitué en *vne superficie* plane, comme l'angle A B C.



Or deux lignes droictes ne se rencontrent directement, quand vne d'icelles estant prolongee de la part où elles se rencontrent, ne tombe sur l'autre, mais la couppe, ou aussitost s'esloigne du poinct d'attouchement: ce qui soit dit à cause de l'angle d'attouchement ou de contingence, qui se fait de l'attouchement de deux cercles, ou d'vne ligne droicte qui touche le cercle, comme il est monstré à la 16. prop. du 3. liure.



Que si deux lignes droictes se touchent l'vne

l'autre eſtans eſtendues directement, ſçauoir, en ſorte que l'vne d'icelles eſtant prolongee, conuienne auec l'autre, il ne ſe fera aucun angle de ce rencontre, attendu qu'il n'y a aucune inclination, mais les deux feront vne ſeule ligne: comme les lignes droictes A B, C B, qui ſe rencontrent directement au poinct B: ſéblablement il ne ſe fera aucun angle au poinct B, par le rencontre des lignes courbes A B, C B, puis que celle que l'on voudra des deux, eſtant prolongee ſelon leur inflection & obliquité tombera ſur l'autre: partant ſeront dites eſtre eſtendues directement ſelon leur rencontre. Il eſt donc neceſſaire que les lignes droictes qui font angle, ſe couppent l'vne l'autre au poinct où eſt fait l'angle, ſi elles ſont prolongees. Mais les lignes courbes, ou bien vne droite & vne courbe, peuuent faire angle, encore qu'elles ne s'entre-couppent, & ſuffit qu'elles s'entre-touchent, enſorte qu'auſſitoſt apres l'attouchement elles s'eſloignent l'vne de l'autre.

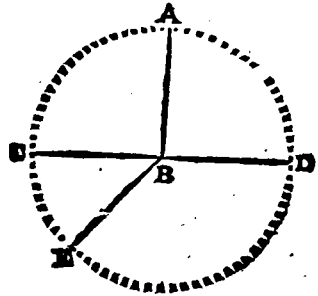
Or la quantité de tout angle conſiſte en la ſeule inclination, & non en la longueur des lignes: car le prolongement des lignes n'augmente point leur inclination, & partant ny la quantité de l'angle.

Il y a encore deux autres genres d'angles: le premier comprend les angles ſolides, conſiderez aux corps ſolides, dont traite Euclide en la Stereometrie. L'autre comprend les Spheriques, conſtituez en la ſuperficie de la Sphere, par les circonferences des plus grands cercles, deſquels traicte Menelaus en ſes Elements Spheriques; mais il s'agit ſeulement icy des angles-plans.

9. Or quand les lignes qui comprennent l'angle ſont droictes, l'angle ſera appellé rectiligne.

Tout angle-plan eſt fait, ou de deux lignes droictes, & eſt appellé angle rectiligne, & de celuy-cy traicte ſeulement icy Euclide: ou de deux lignes courbes, & ſera appellé curuiligne, ou d'vne ligne droicte & d'vne courbe, & ſera appellé mixtiligne, leſquels on peut conſiderer en la figure de la precedente definition aux angles, B A C.

10. Quand vne ligne droicte tombant ſur vne autre ligne droicte, faict les angles de ſuitte, ou d'vne part & d'autre egaux entr'eux, l'vn & l'autre d'iceux angles egaux eſt droict: Et la ligne droicte tombante, eſt dite perpendiculaire à celle-là, ſur laquelle elle tombe.



L'vſage de l'angle droict, de la ligne perpédiculaire & de l'angle obtus & agu, eſt fort frequent en la Geometrie. Euclide definit icy l'angle droict, & aux deux ſuyuantes definitions, l'angle obtus & agu. Or tout angle rectiligne eſt droict, obtus ou agu. Il dict donc que

quand vne ligne droicte tombe ſur vne autre ligne droicte, enſorte qu'elle ne s'incline ou panche point plus d'vn coſté que de l'autre, elle fait les angles de ſuitte egaux, & chacun d'iceux angles eſt appellé angle droit, comme ſi la ligne droite A B, laquelle tombant ſur la droite C D, fait les angles de ſuitte au poinct B, ſçauoir A B C, A B D, egaux entr'eux, chacun d'iceux ſera appellé angle droit, & A B, ſera dite perpendiculaire à C D, ſur laquelle elle tombe. Pareillement C B, ſera dite perpendiculaire à A B, encore que C B faſſe ſeulement vn angle droit auec A B: car ſi A B eſtoit prolongee de la part de B. directement, il ſe feroit vn angle egal à l'autre A B C. Et pour ſçauoir ſi vne ligne panche point plus d'vn coſté que d'autre, ſoit deſcrite vne circonferẽce comme A C E D, du poinct B, à tel interualle qu'on voudra (moyennant que l'interualle pris n'excede les lignes qui conſtituent l'angle) & ſi la partie de la circonference A C, compriſe entre les deux lignes A B, C B eſt egale à la partie de la meſme circonference A D, compriſe entre les lignes A B, D B, cela denote que la ligne A B ne s'incline de coſté ny d'autre, par ce moyen les angles A B C, A B D ſont egaux entr'eux de part & d'autre: Partant, pour conclure qu'vn angle eſt droit, ou que la ligne qui conſtituë l'angle eſt perpendiculaire à vne autre, il eſt neceſſaire, & ſuffit auſſi de monſtrer que l'angle de ſuitte, ou de l'autre coſté, eſt egal. Pareillemẽt, ſi vn angle eſt dit droit, ou que la ligne qui conſtitue iceluy ſoit perpendiculaire à l'autre, on pourra colliger que l'angle de ſuitte luy eſt ſemblablement egal.

Le Copiſte a dit en cette definition, *Les angles ſont*

ſont droicts, au lieu de dire; *l'vn & l'autre d'iceux angles egaux eſt droict*, comme dict Euclide: ὁρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν, & ainſi ſa pretendue traduction n'eſt conforme, ny au Grec d'Euclide, ny à la traduction Latine, d'où il appert que cet ignorant n'entend ny Grec ny Latin, & copie la traduction des autres en changeant les termes.

Ledit Copiſte dit auſſi en la 18. Definition. *Demy cercle, eſt vne figure compriſe du diametre, & moitié de la circonference.* Et Euclide dit. *Le demy cercle eſt vne figure contenue ſous le diametre, & la ligne retranchee, ou priſe par iceluy diametre, de la circonference du cercle*: ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. En la 20. Definition il dit: *Figure rectiligne eſt celle*, &c. au lieu de dire comme Euclide: *Figures rectilignes ſont celles qui ſont contenues ſous des lignes droictes, & deſguiſe ainſi les traductions des autres, afin que les ignorans croyent que c'eſt luy qui traduit: Il change ainſi aux autres Definitions ſuyuantes: ce qu'il ne deuoit faire, ſant afin de n'alterer le texte de l'Autheur, que d'autant que ledict Autheur n'a dict aucun mot qui ne ſoit ſignificatif, c'eſt à dire, qui ne ſerue au ſens & intelligence de ce qu'il propoſe, comme nous monſtrerons.*

11. L'angle obtus, eſt celuy qui eſt plus grand qu'vn droict.

12. Mais l'agu, eſt celuy qui eſt plus petit qu'vn droict.

Quand vne ligne droicte tombant ſur vne autre

ligne droite ne fait les angles de ſuitte, c'eſt à dire, de coſté & d'autre egaux, l'vn ny l'autre n'eſt droict, mais l'vn eſt plus grand qu'vn droict, & l'autre plus petit; & le plus grand eſt appellé angle obtus, & le plus petit angle agu: comme par exemple, ſoit la ligne E B (en la precedente figure, fol. 15.) laquelle tombant ſur CD, fait les deux angles de coſté & d'autre EBC, EBD inegaux, ſçauoir EBD, plus grand, & EBC plus petit, à cauſe que la circonference ED eſt plus grande que la circonference EC: l'angle EBD plus grand ſera dict obtus ou mouſſu, & EBC plus petit ſera agu. De ces definitions l'on peut colliger que l'angle droit n'admet aucune varieté: enſorte que l'vn ſoit plus grand que l'autre ou plus petit, puis que la ligne perpendiculaire qui conſtitue l'angle droit ne s'incline point plus d'vn coſté que d'autre: mais l'angle obtus & l'angle agu peuuent eſtre augmentez ou diminuez en diuerſes manieres, attendu que la ligne droicte qui conſtitue iceux peut s'eſloigner ou approcher diuerſement de celle ſur laquelle elle tombe, comme il eſt manifeſte.

Mais d'autant que pour conſtituer vn angle plan il faut que deux lignes ſe rencontrent, & quelquefois y a pluſieurs angles conſtituez à vn meſme poinct: les Mathematiciens pour euiter confuſion, ont de couſtume d'exprimer chacun angle par trois lettres, deſquelles celle du milieu monſtre le poinct auquel les deux lignes conſtituent l'angle, & les extremes denotent les lignes qui contiennent l'angle. Comme par exemple, l'angle obtus, en la precedente figure, eſt entendu par l'angle EBD, conſtitué au poinct B. & contenu par les deux lignes droictes E B, D B ſe

rencontrant au poinct B, & l'Angle agu est entendu par l'angle *EBC*. Ce qu'il faut noter diligemment, *pour* facilement discerner les angles, desquels il est faict mention aux Demonstrations.

Or quand l'on nous propose vn angle, si nous voulons examiner s'il est droict, obtus ou agu, nous le pourrons sçauoir en prenant le poinct de l'angle pour centre, & descriuant vn cercle à quel internale que ce soit autour d'iceluy : & si l'angle proposé est ouuert selon le quart de la circonference du cercle descrit, il sera droict : si plus que le quart, il sera obtus, & si moins, il sera agu.

13. Terme, est l'extremité de quelque chose.

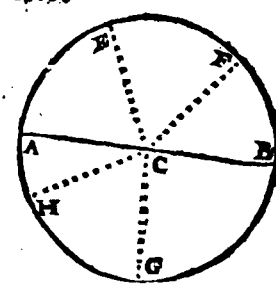
Il y a trois sortes de termes selõ cette definition: car le poinct est le terme ou l'extremité de la ligne, la ligne est le terme de la superficie; & la superficie le terme du corps : mais le corps ne peut rien terminer, d'autant qu'il ne se trouue aucune quantité qui ait plus de trois dimensions. Et toute chose terminee, excede son terme d'vne dimension, comme il est manifesté par les exemples proposez.

14. *Figure* est, ce qui est contenu sous vn terme, ou sous plusieurs termes.

Toute *quantité* terminee ne peut pas estre appellee figuré, autrement la ligne terminee ou finie seroit figure : mais seulement celles qui ont longueur & largeur, cõme sont les superficies terminees, ou longueur, largeur & profondité, comme sont les solides terminez, seront appellez du nom

de figure ; car iceux seulement sont dicts estre contenus de termes : mais la ligne finie est seulement terminee de deux poincts, & non enuironnee. Donc les termes doiuent enclore la quantité appellee figure, & non seulement la terminer : aussi les superficies infinies ou les corps infinis, n'estans enclos d'aucun terme, ne doiuent aucunement estre appellez figures. Les figures contenues d'vn seul terme sont le cercle, l'ellypse, la sphere, spheroide & autres semblables : & les figures encloses de plusieurs termes, sont le triangle, le quarré, le cube, &c.

15. Le cercle, est vne figure plane, contenuë sous vne seule ligne, appellee circonference, à laquelle toutes les lignes droictes menees d'vn seul poinct, de ceux qui sont posez au dedans de la figure, sont egales entr'elles.



Il definit icy le cercle, qui est la plus parfaicte de toutes les figures, nous enseignant que la figure plane, qui est enuironnee d'vne seule ligne, à laquelle ligne, toutes les droites lignes menees d'vn seul poinct de ceux qui sont au dedans de la figure, sont egales entr'elles. Comme si vne superficie ou espace est enclos d'vne seule ligne, sçauoir A, EFBGH, & que d'vn poinct au dedans, comme de C, toutes les lignes droictes menees au terme,

AEFBGH, ſçauoir CA, CE, CF, CB, CG, CH, ſoient egales entr'elles: telle figure plane eſt appellee cercle, & le terme ou ligne enuironnant cette figure, eſt appellé circonference. L'on peut auſſi definir le cercle en cette maniere.

Le cercle eſt vne figure plane, laquelle eſt deſcrite par vne ligne droicte finie, menee à l'entour d'vn des poincts extremes, lequel demeure fixe, iuſqu'à ce qu'elle ſoit retournee derechef au meſme lieu où elle a commencé de mouuoir: comme ſi l'on entend la droite ligne AC, ſe mouuoir à l'entour du poinct C, lequel demeure fixe, inſques à ce qu'elle retourne au meſme poinct A, où elle a cõmencé ſon mouuement, elle deſcrira tout l'eſpace circulaire & le poinct extreme A, deſcrira la circõference, AEFBGH, & le poinct fixe C, eſt celuy-là duquel toutes les lignes droictes menees à la circonference ſont egales entr'elles, d'autant que CA, menee à l'entour, meſure egalement toutes les lignes droictes, qui peuuent eſtre menees de C, à la circonference.

16. Mais ce poinct, eſt appellé centre *du cercle.*

Ce poinct, dit-il, *qui eſt au dedans du cercle, ſçauoir celuy duquel toutes les lignes droictes, menees à la circonference ſont egales entr'elles, eſt appellé le centre du cercle*, comme le poinct C, en la precedente figure: D'où il eſt manifeſte que le pole d'vn cercle en la ſphere, duquel toutes les lignes droictes tombantes à la circonference du cercle, ſont egales, comme dict Theodoſe en ſes *Elements ſpheriques*, ne doit eſtre appellé centre *du cercle:* attendu que ce poinct, qui eſt appellé

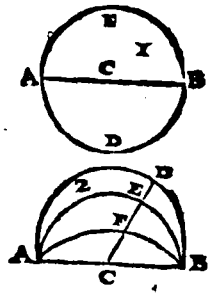
pole du cercle, eſt en la ſuperficie de la ſphere, & non en la ſuperficie du cercle, qui eſt vne condition requiſe, afin qu'vn poinct ſoit dict centre.

17. Le diametre du cercle, eſt vne ligne droicte menee par le centre, & terminee de part & d'autre à la circonference du cercle, laquelle diuiſe le cercle en deux egalement.

Si au cercle on mene vne ligne droicte par le centre, ſe finiſſant à la circonference de part & d'autre, comme la ligne droicte AB, (en la precedente figure) menee par le centre C, & finiſſant en la circonference de part & d'autre, telle ligne eſt appellee le diametre du cercle, & icelle couppe auſſi le cercle par la moitié, puis qu'iceluy diametre paſſe par le milieu, ſçauoir par le centre: & partant couppe auſſi la circonference du cercle en deux parties egales. Ce que toutefois Thales Mileſius (à ce que dict Proclus) a ainſi demonſtré.

Soit entendu ou conceu en l'entendement, que la portion du cercle ADB, ſoit accommodee ou poſee ſur l'autre portion AEB, enſorte que le diametre AB, ſoit commun à l'vne & à l'autre portion: ſi la circonference ADB, conuient totalement auec la circonference AEB, il eſt manifeſte que ces deux portions faites par le diametre, ſont egales entr'elles, attendu que l'vne n'excede l'autre: mais ſi ADB, ne conuient auec AEB, elle tombera au deſſus ou au deſſous.

S'il eſt ainſi, *ſoit menee* là droite *ligne* C D, du centre C, coupant les *circonferences* A D B, AEB, aux poincts D, & E (comme il ſe voit en la ſeconde figure) les deux lignes droictes C D, CE, menees du centre à la circonference d vn meſme cercle, ſeront egalés entr'elles par la definition du cercle, ce qui eſt impoſſible, l'vne eſtant partie de l'autre: donc les circonferences ABD, AED, ſeront egales, ce qu'il falloit demonſtrer.



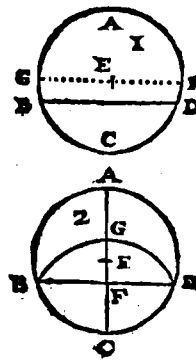
De cette demonſtration il s'enſuit que le diametre couppe non ſeulement la circonference, mais auſſi toute la ſuperficie du cercle en deux egalement: Car puis que les demies circõferences conuiennent entr'elles, comme il eſt monſtré, les ſuperficies contenuës entre le diametre, & l'vne & l'autre circonference conuiendront auſſi entr'elles, puis que l'vne n'excede l'autre, & partant ſeront egales.

18 *Le demy-cercle eſt vne figure contenuë ſous le* diametre, & ſous la ligne retranchee de la circonference du cercle.

Comme par exemple, la figure ADB, au cercle precedent, contenue ſous le diametre AB, & la *circonference* A D B, eſt appellee demy-cercle, d'autant que c'eſt la moitié du cercle, comme nous

auons monſtré en la definition precedente. Semblablement la figure AEB, eſt demy-cercle, & le meſme poinct C, par lequel le diametre eſt diuiſé en deux egalement, eſt le centre au cercle & au demy cercle.

Si vne ligne droicte, comme B D, coupant le cercle en deux portions, ne paſſe par le centre E, elle le couppera en deux portions inegales, comme BAD, BCD, deſquelles BAD, en laquelle eſt le centre, eſt la plus grande. Ce qui ſe peut ainſi demonſtrer.



Soit mené le diametre G F, parallele à B D, ou non, pourueu que BD, GF, ne s'entre-coupent d'autant que GF, eſt le diametre du cercle ABC. Il le couppera en deux egalement, & partant le demy-cercle GAF, ſera egal au demi cercle GCF, mais G CF, eſt plus grand que BCD, le tout que ſa partie, donc GAF egal à GCF, ſera auſſi plus grand que BCD, & partant la portion totale BAD, qui eſt plus grande que GAF, le tout que ſa partie, ſera encor bien plus grande que la portion B C D, ce qui eſtoit propoſé. Ce que l'on peut auſſi demonſtrer comme s'enſuit.

Soit conceu que le diametre AC, ſoit mené par le centre E, perpendiculaire à BD. Donc ſi les por-

tions BAD, BCD, ſont dites egales, & que la portion BCD, ſoit entendue ſe mouuoir à l'entour de la ligne droicte BD, enſorte qu'elle tombe ſur BAD, elles conuiendront entr'elles, & la droicte ligne FC, conuiendra ſur la ligne FA, à cauſe des angles droicts au poinct F, qui ſont egaux entr'eux par la 10. definition, eſtant de ſuitte: donc la droicte ligne FC, qui eſt maintenant la meſme que FA, ſera plus grande que EA, qui n'eſt qu'vne partie de FA. Donc puis que EC, eſt egale à EA, eſtans menees toutes deux du centre E, à la circonference, FC ſera pareillement plus grande que EC, la partie que le tout; ce qui eſt impoſſible. Donc la portion BCD, ne conuiendra ſur la portion BAD, mais tombera au dedans, comme eſt la portion BGD, deſorte que la droicte ligne FG, qui ſera alors la meſme que FC, puiſſe eſtre plus petite que EA, ou EC. Or ſi elle eſtoit dite tomber dehors, comme ſi le cercle eſtoit BCDG, duquel le centre fuſt E, & la portion BCD, tombaſt hors BGD, telle qu'eſt la portion BAD. Derechef FA, qui ſeroit lors la meſme que FC, ſeroit plus grande que EG, c'eſt à dire que EFC, & partant la partie FC, ſeroit derechef plus grande que le tout EC, ce qui eſt abſurde. Donc il eſt manifeſte que la portion BAD, en laquelle eſt le centre E, eſt plus grande que l'autre portion BCD, puis que BCD, eſt egale à BGD, qui eſt partie de la portion BAD: car puis qu'il eſt monſtré que la portion BCD, menee à l'entour de la ligne droicte BD, ne peut conuenir ſur la portion BAD, ny tomber hors icelle, elle tombera tout-lement au dedans, comme BGD.

19. Portion, ſegment ou ſection de cercle eſt vne figure contenuë ſous vne ligne droicte, & partie de la circonference du cercle.

Euclide repete cette definition au troiſieſme liure, parquoy n'en dirons icy autre choſe.

20. Figures rectilignes, ſont celles qui ſont contenues ſoubs des lignes droictes.

Apres la definition du cercle, Euclide voulant faire les deſcriptions de diuerſes figures, il enſeigne auparauant, quelles figures ſont dites rectilignes: car il doit traicter principalement d'icelles aux liures ſuyuans.

Donc toutes les figures planes encloſes de tous coſtez de lignes droites, ſont appellees figures rectilignes. D'où il eſt manifeſte que les figures planes, enuironnees de lignes courbes, ſont appellees curuilignes: mais celles qui ſont circonſcrites en partie de lignes droictes, & en partie de courbes, ſont appellees mixtes. Or diuers genres de figures ſeront maintenant deſcrits par Euclide.

21. Figures trilateres, ſont celles qui ſont contenuës ſous trois lignes droictes.

Quand Euclide dit icy, que les figures rectilignes trilateres, ſont celles qui ſont enuironnees de trois lignes droictes, il nous monſtre clairement, comment il faut definir le triangle: car puis qu'aux figures rectilignes il y a autant d'angles que de coſtez, ou de lignes droictes, deſquelles elles ſont cõſtituees: le triãgle ſera vne figure contenuë ſous

trois lignes *droictes*, duquel les eſpeces ſeront cy-apres declarees.

22. *Les figures quadrilateres, ſont celles qui ſont contenues ſous quatre lignes droictes.*

Semblablement, le quadrangle ou quadrilatere eſt vne figure, contenue de quatre lignes droites; de laquelle les diuerſes eſpeces ſeront incontinent declarees.

23. Les figures multilateres, ou de pluſieurs coſtez, ſont celles qui ſont contenues ſous *plus* de quatre lignes droictes

D'autant que les eſpeces des figures rectilignes ſont innombrables, à cauſe du progrez infiny des nombres. Car trois lignes droictes enuironnans vne figure, cõſtituent la premiere eſpece; ſous laquelle ſont conteuues tous les triangles; quatre lignes droictes conſtituent la ſeconde eſpece, laquelle comprend tous les quadrangles ou quadrilateres: 5. lignes droites compoſent la 3. eſpece, 6. la 4. & ainſi de ſuitte infiniment. Donc, afin qu'Euclide ne ſoit cõtrainct de pourſuyure ceſte infinité, il appelle toutes autres figures rectilignes, circonſcrites de plus de quatre lignes droictes de ce nom general (Multilateres) ſe contentant de la denomination des trilateres & quadrilateres: peut eſtre à cauſe qu'il parle principalement de celles-cy en ſes liures, & que par la cognoiſſance d'icelles l'on entendra facilement la definition des autres, &c.

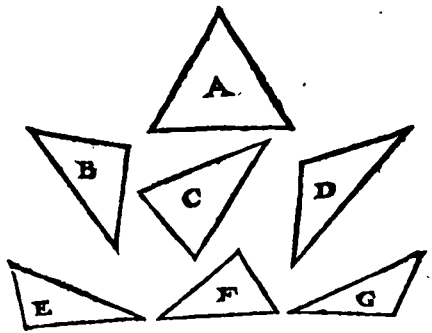
24. Or des figures trilateres, celle qui a

trois costez egaux, s'appelle triangle equilateral.

25. Mais triangle Isoscele, celle qui a deux costez egaux tant seulement.

26. Et Scalene, qui a les trois costez inégaux.

Par ces trois definitions il expose les trois especes de triangles, la premiere & plus simple desquelles est le triangle Equilateral, ou de trois costez égaux, comme est le triangle A. La seconde, est le triangle Isoscele, qui a seulement deux costez egaux, comme les trois B, C, D, & la troisiesme est le Scalene, qui a tous les trois costez inégaux, comme sont les triangles E, F, G: Les Equilateres sont tousiours vniformes, d'autant que leurs angles sont tousiours égaux. Mais les Isoscheles & Scalenes, se diuersifient en infinies manieres, comme l'on peut cognoistre par cette figure.



27. Au surplus des figures trilateres, le triãgle Ortogone ou Rectangle, est celuy-là qui a vn angle droict.

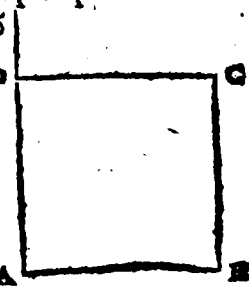
18. L'Amblygone, eſt celuy qui a vn angle obtus *ou mouſſu.*

29. L'*Oxy*gone, eſt celuy qui a tous les trois *angles* agus.

Il a expoſé les triangles, en les conſiderant premierement ſelon leurs coſtez, il le faict maintenant ſelon la conſideration des angles ; & dautant qu'il y a tant ſeulement trois genres diuers d'angles rectilignes, comme nous auons declaré, auſſi y-a-il trois genres de triangles, ſçauoir eſt le Rectangle, qui eſt celuy qui a vn angle droit, lequel peut eſtre Scalene ou Iſoſcele, comme ſont les triangles B & E, (en la precedente figure,) le triangle Amblygone peut eſtre pareillement Iſoſcele, ou Scalene, & non Equilateral, comme ſont D & G, mais tout triangle Oxygone ou Acutangle, peut eſtre equilateral, Iſoſcele ou Scalene, ce que l'on peut conſidererer aux triangles A, C, F.

Il faut icy noter qu'en tout triangle, deux des lignes eſtans priſes pour deux coſtez, le 3. reſtant a couſtume d'eſtre appellé par les Mathemat. la baſe du triangle, ſoit qu'iceluy ſoit le coſté infime du triangle ou nó: de ſorte que chacune des lignes qui encloſt le triangle peut eſtre priſe pour baſe.

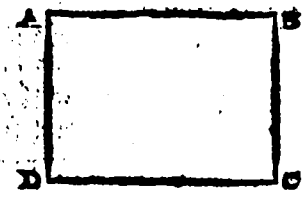
30. *Mais des figures de quatre coſtez, le quarré eſt celuy qui eſt Equilatere & Rectangle ; c'eſt à dire, qui a les quatre coſtez egaux, & les angles droicts.*



Apres les figures Trilateres, il expose les Quadrilateres, en declarant seulemẽt de 5. sortes, les 4. premieres desquelles sont regulieres: mais la derniere & cinquiesme est irreguliere. Donc la premiere figure Quadrilatere est appellee quarré, de laquelle tous les costez sont egaux entr'eux, & tous les angles droicts, comme est la figure ABCD, & partant le quadrangle equilatere, & non rectangle, ou au contraire, rectangle & non equilatere, ne sera appellé quarré.

31. Le quarré long, est vne figure rectangle, mais non equilatere.

La seconde figure quadrilatere, est appellee par les Grecs ἑτερόμηκες, c'est à dire, plus longue d'vne part, qui est celle qui a les quatre angles droicts, mais n'a pas les quatre costez egaux entr'eux, combien que les costez oppoſez soient egaux entr'eux, comme est cette figure ABCD, où les costez AB, DC, oppoſez sont egaux entr'eux, & AD, BC, pareillement.

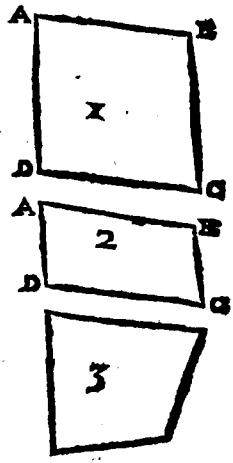


32. Rhombe, est vne figure equilatere, mais n'est pas rectangle.

Cette figure, qui est la 3. entre les quadrilateres, a les 4. costez egaux, mais les quatre angles ne sont droits, combien que les angles oppoſez soient egaux entr'eux, deux à deux, comme en la premiere des trois figures suyuantes, les angles A, & C, sont egaux entr'eux & non droicts, pareillement B, & D.

33. Rhomboide, eſt vne figure, laquelle a les coſtez *oppoſez* egaux, & les angles oppoſez *auſſi* egaux, mais n'eſt pas equilatere ny rectangle.

Cette figure appellee *Rhomboide*, n'a pas les coſtez egaux, ny aucun angle droict, mais a ſeulement les coſtez oppoſez, & les angles oppoſez egaux entr'eux (comme en la figure 2.) les coſtez AD, BC, ſont egaux entr'eux, pareillement AB, DC, & les angles oppoſez A, & C, ſemblablement B, & D, egaux entr'eux. *Donc* ces quatre figures quadrilateres



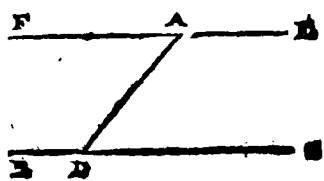
peuuent eſtre dites regulieres, mais toutes les autres quadrilateres ſont irregulieres.

34. Mais outre ces figures, toutes les autres quadrilateres ſont appellees trapezes.

Toutes les autres figures quadrilateres, qui different des ſuſdictes, c'eſt à dire, qui ne ſont ny quarrez ny quarrez longs, ny rhombes ny rhomboides, ſont appellees trapezes, & ſont irregulieres, attendu qu'elles peuuent eſtre de diuerſes manieres, &c. Voyez la figure troiſieſme & derniere.

35. Paralleles, ſont lignes droictes, leſquelles eſtans en vn meſme plan, & pro-

longees infiniment de part & d'autre, ne se rencontrent de costé ny d'autre.



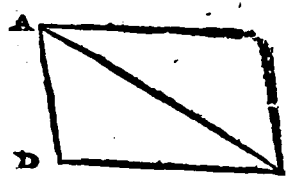
Afin que les droictes lignes soient paralleles ou equidistantes, il ne suffit pas qu'estans prolongees de part & d'autre infiniment, qu'elles ne viennent à vn poinct, ou ne se couppent iamais; mais il est necessaire qu'elles soient aussi en vne mesme superficie plane. Car plusieurs lignes droictes n'estans en vne mesme superficie plane, prolongees à l'infiny, ne s'entre-coupent iamais à vn poinct, & toutefois ne sont dites paralleles, telles que seroient deux lignes posees de trauers, entendues au milieu de l'air, & ne se touchant point; celles-là, dis-ie, ne peuuét iamais se couper. Donc les lignes droictes, lesquelles sont en vne mesme superficie plane, & qui estans prolongees à l'infiny de costé & d'autre, (comme par exemple les lignes F E, B C,) ne s'entre-coupent iamais, seront dites paralleles, ou egalement distantes. Posidonius definit ainsi les paralleles. Paralleles, dit-il, sont celles-là lesquelles ne s'abbaissent ny ne s'esleuent en vn plan, mais ont toutes les perpendiculaires égales, lesquelles sont menees, de tous les poincts pris en l'vne, sur l'autre.

Euclide finit icy les Definitions de son premier liure, mais dautant qu'il est fait mention en icelluy des figures Parallelogrammes, & de leurs complements, nous auons estimé qu'il ne sera inutile d'expliquer les deux Definitions suyuantes, pour

plus

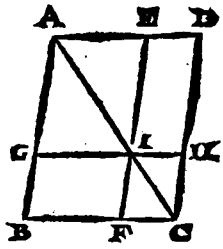
plus facilement entendre les Demonstrations.

36. Parallelogramme, eſt vne figure quadrilatere, de laquelle les coſtez oppoſez ſont paralleles ou equidiſtans.



Comme ſi en la figure ABCD, le coſté AB, eſt parallele au coſté oppoſé CD, & AD, parallele à BC, elle ſera appellee Parallelogramme, c'eſt à dire, figure de lignes paralleles; & y en a de quatre ſortes, ſçauoir le Quarré & quarré long, qui ſont auſſi appellez parallelogrammes rectangles; le Rhombe & le Rhomboide, parallelogrammes non rectangles: d'où l'on peut colliger qu'il y a tant ſeulement de quatre ſortes de parallelogrammes.

37. Mais quand en vn parallelogramme, l'on mene vn diametre, ou diagonale, & deux lignes droictes paralleles aux coſtez, couppantes le diametre à vn meſme poinct, en ſorte que le parallelogramme ſoit diuiſé par celles lignes paralleles, en quatre parallelogrammes; ces deux là, par leſquels le diametre ne paſſe, ſont appellez complements; mais les deux autres, par leſquels le diametre paſſe, ſont dits eſtre à l'entour du diametre.



Soit le parallelogramme ABCD, auquel ayãt mené le diametre AC, & la ligne EF, couppant iceluy au poinct I, & parallele à AB, CD, semblablement HG, couppant iceluy diametre au meſme poinct I, & parallele à AD, BC, il eſt manifeſte que tout le parallelogramme eſt diuiſé en quatre parallelogrammes, deux deſquels, ſçauoir DI, & IB, par leſquels le diametre ne paſſe, ſont appellez par les Geometres, complements, ou ſupplements des parallelogrammes, reſtans EG, FH, qui ſont dits eſtre à l'entour du diametre, d'autant que le diametre paſſe par iceux.

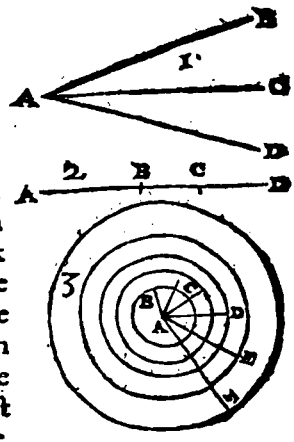
PETITIONS OV DEMANDES.

1. De tout poinct donné, à tout autre poinct donné, mener vne ligne droicte.

2. Prolonger directement vne ligne droicte donnee & terminee, infiniment.

3. De quelconque centre & interualle, deſcrire vn cercle.

Cette premiere demãde sera manifeste, si l'on considere ce qui a esté dit cy-deuãt de la ligne. Car puis que la ligne est vn flux imaginaire du poinct, & par ce moyen la ligne droicte est vn flux procedant du droit chemin, il aduiẽdra, que si l'on entend quelque poinct se mouuoir à vn autre, vne ligne droicte sera menee d'vn poinct à l'autre: ce que demãde Euclide par cette premiere petition. Comme l'on voit icy la ligne droicte A B, menee du poinct A, au poinct B, & du mesme poinct A, la ligne droite A C, menee au poinct C. Item A D, &c.



Que si l'on entend ce poinct se mouuoir encore plus outre directement; la ligne droicte terminee, sera continuee, & cette production se pourra faire infiniment: puis que nous pouuons entendre ce poinct se mouuoir infiniment. Comme si la ligne droicte A B, est continuee au poinct C, puis au poinct D, &c.

Maintenant si nous conceuons en l'entendemẽt, quelconque ligne droicte terminee, appliquee selon vne des extremitez à vn poinct fixe, se mouuoir à l'entour d'iceluy, iusqu'à ce qu'elle retourne où elle a commencé son mouuement, elle aura descrit vn cercle, qui est le requis de la 3. petition; comme l'on peut voir par exemple en ces 5. lignes AB, AC, AD, AE, AF, lesquelles menees à

l'entour du centre A, ont deſcrit des cercles ſelon la quantité ou interualle de chacune.

D'autres adiouſtent cette quatrieſme.

4. Semblablement, quelconque grandeur eſtant donnee, en pouuoir prendre vne autre plus grande ou plus petite.

Car toute quantité continue, peut eſtre augmentee par addition, mais par diuiſion, peut eſtre diminuee infiniment : dont il ne ſe peut donner quantité continue ſi grãde, qu'il ne s'en puiſſe dõner encore vne plus grãde, ny vne ſi petite, qu'il ne s'en puiſſe donner encore vne plus petite. Cecy eſt auſſi veritable aux nombres, par addition. Car chacun nombre peut eſtre augmenté infiniment par l'addition continuelle de l'vnité, combien qu'en la diminution d'iceluy on paruienne à l'vnité indiuiſible.

COMMVNES *ſentences, ou notions.*

1. Les choſes qui ſont egales à vne meſme, ſont auſſi egales entr'elles.

De cette premiere notion, il eſt euident, qu'vne choſe plus grande, ou plus petite qu'vne des egales, ſera auſſi plus grãde ou plus petite que l'autre. Et ſi l'vne des choſes égales eſt plus grande ou plus petite que quelque grandeur, l'autre ſera pareillement plus grande ou plus petite que la meſme grandeur.

2. Et ſi à choſes égales, l'on adiouſte choſes égales, les touts ſont égaux.

3. Et ſi de choſes égales, on retranche choſes égales, les reſtes ſont égaux.

4. Et ſi à choſes inegales on adiouſte choſes égales, les touts ſont inégaux.

Semblablement il eſt manifeſte, que ſi à choſes inégales, l'on adiouſte choſes inégales, à la plus grande, la plus grande, & à la plus petite, la plus petite, que les touts ſont inégaux, celuy là plus grand, & cettuy-cy plus petit.

5. Et ſi de choſes inégales l'on oſte choſes égales, les reſtes ſont inégaux.

Il s'enſuit d'icy, que ſi de choſes inégales on oſte choſes inégales, ſçauoir de la plus grande moins, & de la plus petite plus, les reſtes ſont inégaux: ſçauoir eſt celuy-là plus grand, & celuy-cy plus petit. Or en toutes ces notions, excepté la premiere, par *le mot* de quantitez égales, faut entendre auſſi vne meſme, commune à pluſieurs: Car ſi à choſes égales l'on adiouſte vne choſe commune, les touts ſeront égaux: Et ſi de choſes égales l'on retranche vne choſe commune, les reſtes ſeront auſſi égaux: Et ſi à choſes inégales l'on adiouſte vne meſme choſe commune, ou à vne meſme choſe commune, on adiouſte choſes inégales, les touts ſeront inégaux: Et ſi de choſes inégales l'on retranche vne meſme choſe commune, ou d'vne meſme choſe commune on retranche choſes inégales, les reſtes ſeront inégaux.

6. Et les choſes qui ſont doubles d'vne meſme, ſont auſſi egales entr'elles.

D'où s'enſuit, que ce qui eſt double d'vne des choſes égales, eſt auſſi double de l'autre.

Semblablement, les choſes qui ſont triples, quadruples, quintuples, &c. d'vne meſme choſe ſont égales entr'elles, comme il eſt manifeſte.

7. Et les choſes qui ſont moitiez d'vne meſme, ſont auſſi egales entr'elles.

Au contraire, il s'enſuit que les choſes égales entr'elles, ſont moitiez d'vne meſme. Semblablement, les choſes leſquelles ſont tierces parties, ou quartes ou cinquieſmes, &c. ſont auſſi égales entr'elles,

En ces deux maximes, par vne meſme quantité, on doit auſſi entendre les quantitez égales: Car les choſes doubles, triples, &c. de choſes égales ſont pareillement égales entr'elles. Item, les choſes leſquelles ſont moitiez, ou tierces parties, ou quartes, &c. de choſes égales, ſont auſſi égales entr'elles.

8. Et les choſes qui conuiennent entr'elles, ſont auſſi egales entr'elles.

C'eſt à dire, que deux quantitez, deſquelles l'vne eſtant ſuperpoſée à l'autre, l'vne n'excede l'autre; mais toutes deux conuiennent entr'elles, ſont égales. Comme deux lignes droictes ſeront dites égales entr'elles, quand l'vne eſtant poſee ſur l'autre, celle qui eſt poſee deſſus conuient totalemẽt auec l'autre, de ſorte qu'elle ne l'excede, ny n'eſt excedee d'icelle. De meſme auſſi deux angles rectilignes ſeront égaux entr'eux, quand l'vn eſtant poſé ſur l'autre, celuy qui eſt ſuperpoſé, n'excede point l'autre, & n'eſt excedé d'iceluy; mais les lignes qui conſtituent celuy-là tombent totalement ſur celles qui conſtituent cettuy-cy. Car cela eſtant ainſi, les inclinations des lignes ſont égales, combien

que quelquefois icelles lignes soient inégales entr'elles: mais il faut entendre, que les grandeurs qui conuiennent entr'elles sont égales, selon cela seulement en quoy elles conuiennent. Or la longitude conuient seulement à la longitude: la superficie à la superficie: & l'inclination des lignes, à l'inclination des lignes, &c.

Clauius voulant cõuertir cette maxime, dit ainsi *Et au contraire, les choses qui sont égales entr'elles, conuiennẽt entr'elles, si l'vne est posee sur l'autre.* Ce qui toutefois ne peut estre; car si l'õ décrit vn quarré, & sur le diametre d'iceluy on décrit encor' vn autre quarré, le 1. quarré descrit sera égal à la moitié du dernier, c'est à dire à vn triangle Isoscele, & neantmoins ne pourront pas conuenir, estans posez l'vn sur l'autre. L'on peut faire aussi vn angle curuiligne, égal à vn angle droict, à vn angle obtus, & à vn angle agu, comme a monstré Proclus, lesquels ne conuiendront toutefois pas, estãs superposez chacun au sien. Finalement, l'on peut faire vn triangle rectiligne égal à vn autre triangle rectiligne, lesquels ne conuiendront pas aussi, estans superposez l'vn à l'autre, comme il est manifeste par la 37. & 41. du premier liure. Donc cette maxime ne se pourra conuertir vniuersellement, mais bien ainsi: *Les lignes droittes égales conuiennent entr'elles, estans posees les vnes sur les autres: pareillement les angles rectilignes égaux, comme aussi les superficies planes semblables et égales, &c.*

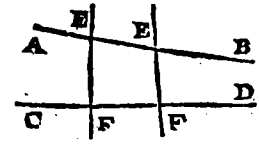
9. Et le tout est plus grand que sa partie.

10. Tous les angles droicts sont égaux entr'eux,

Cet axiome eſt manifeſte par la 10. definition. Pappus enſeigne en ce lieu, que cet axiome ne peut eſtre conuerty : car tout angle égal à vn angle droict n'eſt pas droict, comme nous auons dict à la 8. cõmune ſentence; mais ſeulement, tout angle rectiligne égal à vn angle droict, eſt auſſi droict, Ce que l'on peut prendre pour maxime.

11. Et ſi ſur deux lignes droictes, tombe vne autre ligne droicte, faiſant les angles internes & de meſme part, moindres que deux droicts; icelles deux lignes droictes eſtans prolongees infiniment, ſe couperont l'vne l'autre, de la part où les deux angles ſont moindres que deux droicts.

Comme ſi vne ligne droicte E F, tombant ſur les 2. A B, C D, faict les 2. angles internes B E F, D F E, de meſme part B D, moindres que deux droicts: Euclide dict qu'icelles eſtans prolongees de la part B D, où les angles ſont faicts moindres que deux droicts, que finalement elles ſe couperont à vn poinct. Ce qui eſt manifeſte: car quand les deux angles internes, & de meſme part ſont égaux à deux droicts, les deux lignes ne ſe peuuent couper nulle part, & ſont touſiours égalemẽt

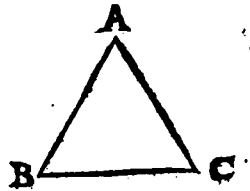


diſtantes l'vne de l'autre, comme il ſera demonſtré à la 28. propoſition de ce liure: parquoy ſi les angles internes de meſme part ſont moindres, il eſt neceſſaire que l'eſpace d'entre les lignes s'eſtreciſſe de plus en plus, & de l'autre part qu'il

s'eſlargiſſe pareillement : Donc icelles lignes enfin s'entrecouperont à vn poinct.

12. Deux lignes droictes ne contiennent pas vn eſpace.

Cet axiome n'a aucune difficulté : car ſi deux lignes font vn angle à vn poinct, elles ſe dilateront touſiours de part & d'autre de plus en plus, eſtans prolongees, comme il eſt manifeſte par cette figure : car ayant mené vne ligne droicte de A à B, du meſme poinct A, l'on ne pourra pas mener vne autre ligne droicte au poinct B par vn autre chemin, en ſorte qu'entre A B, & l'autre, il demeuraſt quelque eſpace enclos : tellement qu'vne autre ligne droicte menee du poinct A, comme A C, fera angle auec AB, deſorte qu'il faudroit mener encore vne autre ligne comme B C, pour enclore vn eſpace : mais vne ligne droicte & vne courbe, ou bien deux lignes courbes, pourront bien contenir ou enclore vn eſpace, comme il eſt manifeſte.



Apres ces Axiomes d'Euclide Clauius, & autres Interpretes, ont encore adiouſté les ſuyuants.

1. Deux lignes droictes n'ont pas vne meſme commune ſection.

2. Deux lignes droictes ſe rencontrans à vn poinct, ſi elles ſont toutes deux prolongees, elles ſe couperont neceſſairement.

Mais le Copiſte, qui a auſſi mis ces deux preten-

dues maximes, n'a pas eu l'esprit non plus que Clauius, de recognoistre qu'Euclide demonstre ce qu'ils disent icy, par apres, parquoy ils n'en doiuent faire des maximes, comme ie luy feray voir, Dieu aydant, à la 13. & 14. proposition de ce liure. Or ce pauure homme est si ignorant, ne sçachant rien que par routine, & non pas de la façon qu'enseigne Aristote, chap: 2. du 1. des Post. Analytiques. Δοκίζαθαι δὲ οἰόμεθα ἕκαστον ἁπλῶς, ἀλλα μὴ τὸν σοφιστικὸν κατόπιν, τὸν κατὰ συμβεβηκὸς, ὅταν τὴν τ' αἰτίαν οἰώμεθα γινώσκειν, δι' ἣν τὸ πρᾶγμα ἐστι, ὅτι ἐκείνου αἰτία ἐστὶ, καὶ μὴ ἐνδέχεται τοῦτ' ἄλλως ἔχειν. Que s'il auoit trouué en rapsodiant que Clauius eust dit que vessies, comme l'on dict, fussent non seulement lanternes, mais figures Mathematiques, il le croiroit.

Ils adiousten encore les six suyuantes.

1. Si à choses égales, on adiouste choses inégales, l'excez des toutes sera égal, ou le mesme que l'excez des adiousteés.

2. Si à choses inégales, on adiouste choses égales, l'excez des toutes sera égal, ou le mesme que l'excez de celles qui estoient au commencement.

3. Si de choses égales, on retranche choses inégales, l'excez des restantes sera égal, ou le mesme que l'excez des retranchees.

4. Si de choses inégales, on oste cho-

ſes égales, l'excez des reſtantes ſera le meſme que l'excez des toutes.

5. Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

6. Si vn tout eſt double d'vn tout, & le retranché du retranché, le reſte ſera double du reſte.

Or ces ſix pretendues maximes ou axiomes ſont auſſi demonſtrees par Euclide cy-apres, comme nous ferons voir Dieu aydant, parquoy puis qu'ils ſe prouuent par cy-apres, ſuyuant ce qu'a demonſtré Euclide, ils ne doiuent eſtre pris pour axiomes: Nous demonſtrerons, apres Euclide, les 5. premiers à la ſeconde propoſition de ce liure, & le 6. à la 5. du 5. liure.

De ce que deſſus on peut colliger auec Proclus & Geminus, cette difference, entre les demandes & les maximes ou axiomes, que puis que les vns & les autres ſont cogneus d'eux-meſmes, & indemonſtrables, que celles-là ſont de la nature des Problémes, d'autant que par icelles on requiert que quelque choſe ſoit faicte: mais ceux-cy reſſemblent les Theorémes, puis que par iceux il n'eſt requis qu'aucune choſe ſoit faicte, mais eſt ſeulement propoſé quelque ſentence tres-cogneuë. Mais la demande ou petition differe du Probléme, en ce que la conſtruction de la demande n'a beſoin d'aucune demonſtration, mais perſonne n'accorde la conſtruction du Probléme ſans demonſtration, d'autant que quelque choſe de difficile eſt propoſé à conſtruire. Semblablement il y a difference entre l'Axiome & le Theoréme: car

celuy-là ne doit estre demonstré, mais celuy-cy ne doit aucunement estre concedé, qu'il ne soit demonstré: car personne ne demandera la preuue ou demonstration de cette proposition. *Les choses lesquelles sont égales à vne mesme, sont pareillement égales entr'elles*: Mais de celle cy chacun desirera la demonstration. *De tout triangle, les trois angles internes sont egaux à deux droicts.* Et faut entendre le mesme des autres axiomes & theorémes, & aussi des demandes & problémes.

Il est certain pareillement, que des demandes ou petitions, les vnes sont plus propres à la Geometrie, comme ces trois qu'Euclide nous a proposez: quelques vnes communes à la Geometrie & à l'Arithmetique, telle qu'est cettuy-cy. *Vne quantité pouuoir estre infiniment augmentee.* Car tant le nombre que la grandeur, peut estre augmentee par addition, en sorte que l'on ne peut iamais trouuer de fin à cette augmentation. L'on dira le mesme des Axiomes ou communes sentences: car le 8. 10. 11. & 12. conuiennent à la Geometrie seulement: mais tous les autres sont appliquez aux demonstrations Geometriques & Arithmetiques. Car tout ainsi comme les grandeurs égales, retranchees des grandeurs égales, laissent grandeurs égales, soit que ces grandeurs soient lignes ou superficies, ou corps: ainsi pareillement les nombres égaux, retranchez de nombres égaux, laissent des nombres égaux: & ayant dict cecy de ces trois genres de principes, venons aux demonstrations, par lesquelles l'on cognoistra plus parfaictement la nature de tous les principes. Car il y a plusieurs principes tels entre les Mathemat. qu'ils ne sont pas facilement entendus,

qu'auparauant l'on n'ait cogneu leur vſage aux demonſtrations: ce que l'experience monſtrera aſſez.

Afin que le cours de la demonſtration ne ſoit interrompu, nous auons cité les principes & propoſitions d Euclide en la marge, auec vne lettre de l'alphabet, laquelle lettre eſt auſſi miſe dans le diſcours là où la propoſition ſe doit citer, laquelle eſt eſcrite en marge apres la meſme lettre: ce que l'on entendra comme s'enſuit.

1. Definit. Premiere definition, & ainſi des autres, comme 4. def. 18. def. &c.
1. Pet. ou. Premiere petitiõ ou premiere demãde.
1. Demande.
1. c. s. ou. Premiere commune ſentence, ou pre-
1. c. n. miere commune notion.
1. Pre. ou. Premiere propoſition du premier li-
1. 1. ure.
1. 2. Premiere propoſition du ſecond liure.
2. 3. Seconde prop. du 3. liure.
9. 6. Neufiéme prop. du 6. liure.
23. 11. Vingt & troiſiéme propoſition de l'vnziéme liure.
12. 14. Douziéme prop. du quatorziéme liure, &c.
Scho. 17. Scholie de la dix-ſeptiéme prop. du 10. liure.
Coroll. Corollaire de la 32. propoſition du 1. li-
32. 1. ure.

Il faut entendre le meſme des autres.

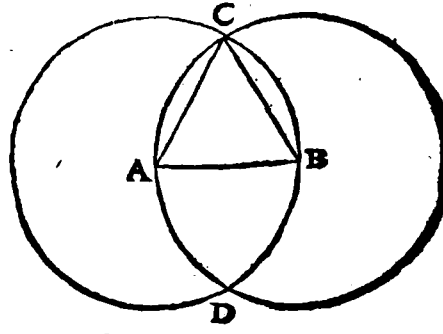
LIVRE PREMIER.

PROBLEME I.

PROPOSITION I.

Sur vne ligne droicte donnee & terminee, descrire vn triangle equilateral.

SOit la ligne droicte donnee A B, sur laquelle il faut descrire vn triangle equilateral. Du poinct A, pris pour centre & de l'interualle de A B, soit descrit le cercle B C D: Derechef, du poinct B, pris pour centre & du mesme interualle B A, soit descrit vn autre cercle A C D, coupant le premier aux poincts C, & D, duquel



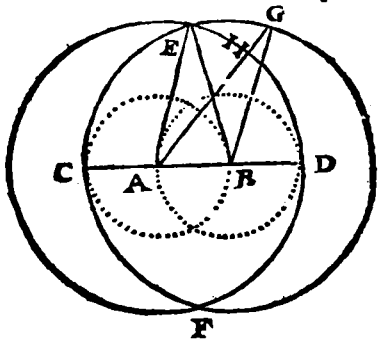
quel'on voudra desquels, sçauoir de C, soient me-

nées les lignes droictes C A, C B. Ie dis que le triangle ABC, *descrit* sur la ligne droicte proposee A B, *est equilateral.*

Car *d'autant* que les lignes droictes AB, & AC, sont *menees* du centre A, à la circonference du cercle *B C D*, [a] A C, sera égale à AB. Derechef, [a] 15. def. d'autant que les lignes droictes BA, BC, sont menees du centre B, à la circonference du cercle ACD, [b] BC, sera egale à BA, mais A C, est aussi [b] 15. def. monstree egale à AB. Donc tant AC, que BC, sera egale à AB, [c] & partant égales entr'elles: Donc le [c] 1. 6. s. triangle ABC, est equilateral. Donc sur vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si quelqu'vn desiroit descrire vn triangle Isoscele, ou vn Scalene sur vne ligne droite proposee, comme a faict Proclus, il le fera en cette maniere. Soit la ligne droite donnee A B, à l'entour de laquelle soient descrits deux cercles comme cy-dessus, puis soit prolongee A B, depart & d'autre directemẽt aux circonferences, comme aux poincts C & D, & du poinct A, comme centre, à l'internalle A D, soit descrit vn cercle E D F; Semblablement du poinct B, & de l'internalle B C, soit descrit le cercle C E F,



coupant le cercle EDF, aux poincts E, & F, & duquel qu'on voudra d'iceux comme de E, soient menees les lignes droites E A, EB. Ie dis que le triangle AEB, descrit sur la ligne AB, est Isoscele.

a 15. def. b 15. def. Car d'autant que A E, est egale à A D, [a] estans menees du centre, et AD, est double de AB, [b] estans BA, BD, egales entr'elles, AE, sera aussi double de AB. Derechef, d'autant que BE, est egale à BC, & c 15. def. BC, double de BA, puis que AB, AC, sont [c] egales entr'elles, BE, sera aussi double de AB: donc puis que tant AE, que DB, est double de la mesme AB, d 6. c. s. [d] icelles AE, BE. seront egales entr'elles, & chacune plus grande que AB, donc le triangle AEB, est Isoscele.

Mais maintenãt si du poinct A, on mene la droicte ligne AG, autre que AE, ou AD, à la circonference EGF, coupant la circonference E H D, au poinct H, & du poinct G, au poinct B, l'on mene la droite ligne GB, le triangle AGB, descrit sur la ligne AB, sera Scalene. Car d'autant que AH, est e 15. d. egale à AD, & BG, egale à [e] BC: Mais tãt AD, que BC, a esté monstree double de AB: donc tant AH, que BG, sera aussi double de AB, & partant chacune plus grande que AB. Or la toute AG, [f] est plus f 9. c. s. grande que AH, elle sera donc aussi plus grande que BG, egale à AH: donc le triangle ABG, est Scalene, duquel le plus grand costé est AG, le moyen est BG, & le plus petit est AB.

SCHOLIE.

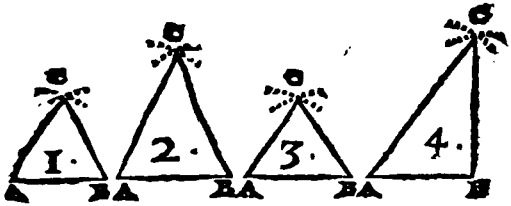
Il faut noter que quand on trouuera ce mot, ligne, posé simplement, ou deux lettres, comme AB, ou autres, faut entendre vne ligne droite; & ce mot angle,

gle, ou trois lettres posees simplement, sans autre explication, faut entendre angle rectiligne, & la lettre du milieu denote tousiours l'angle dont est question, &c.

PRACTIQVE.

Pour descrire sur vne ligne proposee vn triangle equilateral, Isoscele, ou Scalene, l'on le fera en cette maniere.

Pour descrire vn triãgle equilateral sur la ligne AB, des centres A, & B, et de l'interualle AB, faut descrire deux arcs s'entre-coupans au poinct C, & mener les deux lignes droites CA, & CB, comme en la figure premiere.



Pour le triangle Isoscele, il faut prẽdre les poincts A, & B, mais l'interualle plus grand que AB, ou plus petit, et descrire deux arcs se coupãs au poinct C, & mener les lignes AC, CB, comme l'on voit en la figure 2. & 3.

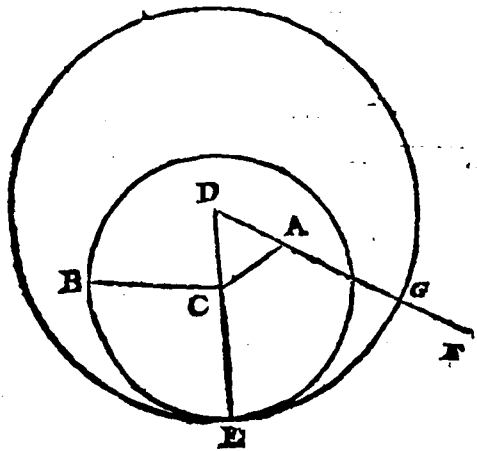
Pour le Scalene, faut prendre B, pour centre, & l'interualle plus grand que BA, et descrire l'arc C, puis prendre A, pour centre, & l'interualle plus grand que le premier, & descrire vn autre arc qui coupe le premier au mesme poinct C, et tirer les lignes CA, CB, comme en la figure 4.

PROBLEME 2. PROPOSIT. 2.

A vn poinct donné, poſer vne ligne droicte, égale à vne ligne droicte donnee.

Soit le poinct donné A, & la ligne droicte donnee B C, il faut poſer vne ligne droicte au poinct A, égale à BC, c'eſt à dire du poinct A, mener vne ligne droicte égale à B C.

De l'vne ou l'autre extremité B & C, de la ligne propoſee BC, ſçauoir de C, pris pour centre, & de
a 3. p. l'interualle BC, [a] ſoit deſcrit le cercle BE, puis du poinct donné A, ſoit menee la ligne droicte A C



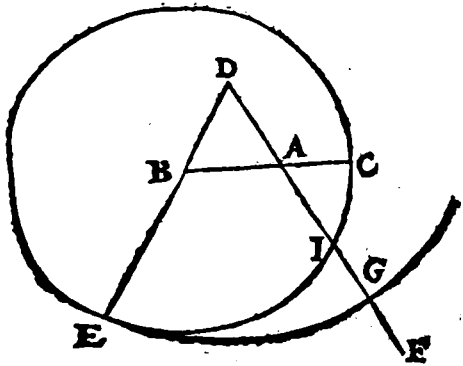
b 1. p. ſur laquelle AC, ſoit [b] deſcrit le triãgle equilateral A C D, & ſoit prolongé le coſté D C, iuſques à la circonference au poinct E, & le coſté

DA, tant qu'il ſera beſoin, comme en F, & du centre D, & de l'interualle D E, ſoit deſcrit le cercle EG, coupant la ligne EF, au poinct G. Ie dis que la ligne AG, qui eſt menee du poinct donné A, eſt égale à la ligne droicte donnee BC.

Car les lignes [c] DE, DG, ſont égales, eſtans menees du centre D, à la circonference EG, & [d] DA, DC, auſſi égales, eſtans les coſtez d'vn triangle equilateral, leſquelles eſtans retranchees des toutes DG, DE [e] reſtera AG égale à CE: mais CB, eſt auſſi égale à CE, eſtans menees du centre C, à la circonferenee BE: donc puis que tant AG, que CB, eſt égale à CE, AG, ſera auſſi [f] égale à CB. Donc du poinct donné A, nous auons mené vne ligne droicte, égale à la ligne droicte donnee BC, ce qu'il falloit faire.

c 15. d.
d 1. p.
e 3. a. ſi
f 1. a. ſi

Mais ſi le poinct donné A, eſtoit en la ligne donnee BC, comme il appert par cette derniere figure, ayant fait la meſme conſtruction qu'auparauant; on conclura tout de meſme que AG, menee



du poinct A, est égale à la ligne droicte donnée BC, &c.

COROLLAIRE.

Par cette proposition, s'ensuit premierement, que si à choses égales, on adiouste choses inégales, l'excez des toutes sera égal, ou le mesme que l'excez des adiouſtees: car puis que AG, BE, sont monstrees égales, si à AG. on adiouste GF, icelle FG, sera l'excez de AF, BE: donc si à DA, & DB, qui sont aussi monstrees égales, on adiouste AF, BE, inégales, FG, sera aussi l'excez des toutes, DF, DE.

2. Et si à choses inégales, on adiouste choses égales, l'excez des toutes sera égal, ou le mesme que l'excez de celles qui estoient au commencement: car AG, BE, estans monstrees égales, AF, BE, seront inégales, & GF, sera l'excez, auſquelles AF, BE, si on adiouste DA, DB, qui sont monstrees égales, GF, sera encore l'excez des toutes DF, DE, comme il appert par ce qui est demonstré.

3. Et si de choses égales, on retranche choses inégales, l'excez des restantes sera égal, ou le mesme que l'excez des retranchees: car si de DE, DG, qui sont monstrees égales, on retranche GI, EB, inégales (car AG, BE, sont aussi monstrees égales) AI, sera l'excez entre les retranchees BE, IG, qui est le mesme d'entre DB, DI, puis que DA, DB, sont aussi égales.

4. Et si de choses inégales, on retranche choses égales, l'excez des restantes sera le mesme que l'excez des toutes. Car si de DF, DE, qui sont inégales (DG, DE, estans monstrees égales) GF, sera l'excez, & si on retranche DA, DB, qui sont éga-

1. p. 1.

les, restera AF, BE, inégales. & puis que A G, B E, sont monstrees égales, GF, sera aussi l'excez des restantes AF, BE.

5. Nous monstrerons encore icy, que le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble: car puis que toutes les parties DA, AG, GF, de la grandeur DF, prises ensemble, constituent le tout AF, ce qui est proposé est manifeste. Ce que Euclide a dit aussi à la 9. commune sentence (*Implicite*): car puis que le tout (comme dict Euclide) est plus grand que sa partie, il ne peut estre plus grand que de la partie ou parties, par lesquelles il excede la partie proposee: comme par exemple, le tout DF, estant plus grand que sa partie DA, il n'est plus grand que de la partie AF, ou des parties AG, GF: mais la partie proposee DA, auec l'excez AG GF, fõt le tout DF: dõc par la 9. cõmune sentence il est égal à toutes ses parties prises ensemble; Donc quand Euclide dit, que le tout est plus grand que sa partie, n'est autre chose à dire, que toutes les parties prises ensemble qui font le tout, sont plus grandes qu'vne d'icelles.

Clauius, & autres Interpretes d'Euclide, ont faict des communes sentences ou maximes, de ce que nous venons de demonstrer en suitte de cette seconde proposition, que nous auons mises cy-deuant pag. 41. lesquelles (à ce que dit Clauius) ne sont moins necessaires que ceux d'Euclide, en quoy ledict Clauius se trompe fort, & monstre bien qu'il n'a point entendu Euclide comme vn homme docte le doit entendre, puis que toutes ces pretendues maximes sont demonstrees, comme nous auons desia dict, & comme nous monstrerõs encore cy-apres par Euclide, & partant ne doi-

uent estre tenuës pour maximes, comme enseigne fort bien Aristote liu. 1. des Poste. Analytiques. πᾶσα διδασκαλία ἢ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ, ἐκ προυπαρχούσης γίνεται γνώσεως, &c.

Il ne faut donc pas que Clauius & autres pensent, qu'Euclide se soit tant oublié, que d'auoir obmis quelque chose, qui soit necessaire pour demonstrer tout ce qu'il propose, & ce qui se peut proposer & demonstrer.

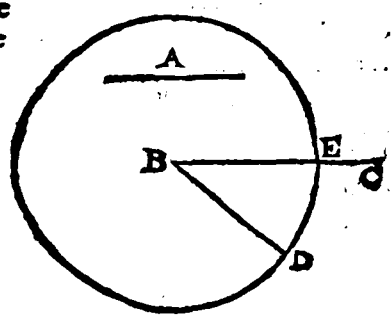
PROBLEME 3. PROPO. 3.

De deux lignes droictes inégales données, oster de la plus grande, vne ligne droicte égale à la plus petite.

Soient deux lignes droictes inégales proposees A, & B C. la plus grande desquelles soit B C: Il faut retrancher de la plus grande B C, vne ligne droicte égale à la plus petite A: soit posee au poinct B, ou C, la ligne droicte * B D, égale à A, & du poinct B, pris pour centre, & de l'interualle B D, soit descrit le cercle D E, coupant B C, au poinct E. Ie dis que B E, est ostee égale à A.

* 2. Premier.

Car puis que B, eſt le centre du cercle D E, la ligne droicte BE, [b] ſera égale à B D, mais A, eſt égale à B D, par la conſtruction, donc B E, ſera égale à A, [c] chacune eſtant égale à B D : donc de deux lignes droictes inégales nous auons, &c. Ce qu'il falloit faire.



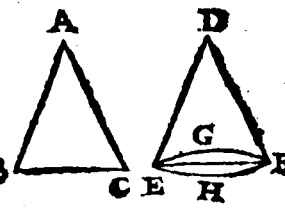
b 15. def.

c 1. com. ſ.

THEOREME 1. PROPO. 4.

Si deux triangles ont deux coſtez égaux à deux coſtez, chacun au ſien, & l'angle contenu d'iceux coſtez égaux, égal à l'angle : Ils auront la baſe égale à la baſe, & le triangle ſera égal au triangle, & les autres angles ſouſtendans iceux coſtez égaux, égaux aux autres angles, chacun au ſien.

Soient les deux triangles A B C, D E F, ayans deux coſtez, ſçauoir A B, A C, égaux aux deux coſtez D E, D F, chacun au ſien, ſçauoir A B, égal à D E, & A C, égal à D F, &



l'angle A, égal à l'angle D, (lesquels sont contenus d'iceux costez égaux) ie dis que la base BC, sera égale à la base EF.

Car si l'on entend le triangle ABC, estre posé sur le triangle DEF, le poinct A, posé sur le poinct D, & la ligne droicte AB, sur DE, [d] le poinct B, conuiendra sur le poinct E, puis que AB, est égale à DE: & puis que l'angle A, est égal à l'angle D, la ligne AC, tóbera sur DF, & le poinct C, conuiendra sur [e] le poinct F, puis que AC, est égale à DF: mais le poinct B, conuient au poinct E: dõc la base BC, conuiendra sur la base EF, & partant égales: car le poinct B, tombant sur le poinct E, & le poinct C, sur le poinct F, si la base BC, ne tomboit sur EF, elle passeroit par au dessus comme EGF, ou au dessous comme EHF: ce qui est impossible, attendu que deux lignes [g] droictes n'enclost point d'espace: donc BC, conuiendra sur EF, & partant égales, & tout le triangle ABC, égal à tout le triangle DEF, & les autres angles B, & C, égaux aux autres angles E, & F, chacun au sien, sçauoir B, à E, & C, à F, puis qu'ils conuiennent entr'eux, & que le triangle conuient sur le triangle. Donc si deux triangles ont deux costez égaux à deux costez, &c. ce qu'il falloit demonstrer.

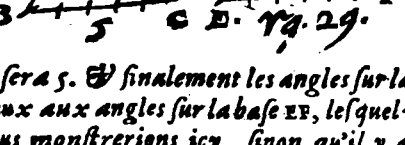
d 8. com. f.
e 8. com. f.
f 8. com. f.
g 12. cõ. f.

SCHOLIE.

Euclide met fort à propos deux conditions en ce Theoreme. La premiere est, que deux costez d'vn triangle soient égaux aux deux costez de l'autre, chacun au sien. La seconde, que l'angle contenu des deux costez de l'vn, soit égal à l'angle de l'autre, contenu des deux costez égaux, aux deux

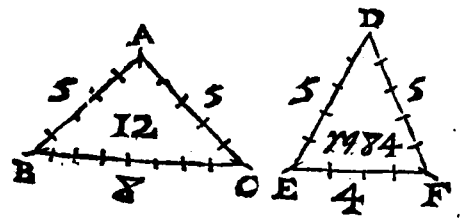
ostez du premier. Car l'vne de ces conditions defaillant, ny les bases ny les autres angles ne pourront iamais estre égaux, comme demonstre Proclus sur ceste proposition: car encore que les triangles puissent quelquefois estre égaux, la derniere condition defaillant, comme l'on pent demonstrer par apres: toute-fois cela aduient assez rarement.

Car soient les angles A, & D, des triangles ABC, & DEF, egaux, sçauoir droits, & les deux costez egaux aux deux costez, non chacun au sien, mais les deux ensemble AB, AC, egaux aux deux ensemble DE, DF. Et soit AB, 3. AC. 4. qui feront estans adioustez, 7. mais DE, soit 2. & DF, 5. qui assemblez sont aussi 7. Ce qu'estant ainsi la base BC, sera 5. & la base EF, par. 29. laquelle est plus grande que 5. mais moindre que 6. Semblablement l'aire ou plan du triangle ABC, sera 6. et l'aire du triangle DEF, sera 5. & finalement les angles sur la base BC, inegaux aux angles sur la base EF, lesquelles choses nous monstrerions icy, sinon qu'il y a plusieurs choses à ce requises, qui n'ont encore esté demonstrees.



Derechef, soient les costez AB, AC, du triangle ABC, egaux aux deux costez DE, DF, du triangle DEF, chacun au sien, & soit vn chacun d'iceux de 5. & que les angles A, & D, contenus d'iceux costez soient inegaux, & soit A, plus grand que D, lesquelles choses estans ainsi, la base BC, sera plus grande que la base EF, comme il sera demonstré en

la 24. Propoſition de ce liure. Que ſi nous poſons la baſe BC, 8. *& la baſe* EF, 4. *l'aire du triangle* ABC, *ſera* 12. *mais l'aire du triangle* DEF, *ſera* 1/4. *q. de ce nombre* 84. *laquelle eſt plus grande que* 9. *mais*

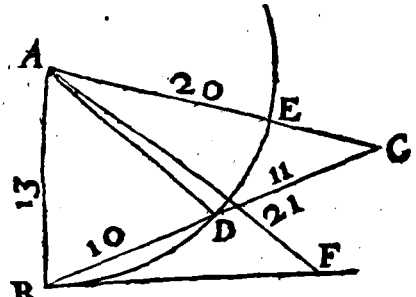


plus petite que 10. *ce qui eſt cogneu entre les Geometres. Donc afin que de deux triangles, les baſes, & les angles, & les triangles meſmes, ſoient egaux entr'eux, il eſt neceſſaire que l'vn et l'autre coſté de l'vn ſoit egal à l'vn & l'autre coſté de l'autre, & pareillement que les angles contenus d'iceux coſtez ſoient auſſi egaux, comme a fort bien dict Euclide.*

Le Copiſte, apres auoir copié ce que nous venons de dire au Scholie de cette 4. Propoſition, & ailleurs cy-deuant (ſelon ſa couſtume) pour faire paroiſtre d'auantage ſon ignorance & beſtiſe, il adiouſte ce qui s'enſuit.

Et afin (dict il) *qu'on n'eſtime pas que cette inegalité aduienne, à raiſon de ce que tous les* 4. *coſtez des triangles ſont egaux, & rendre tant plus manifeſte la neceſſité de la ſeconde condition de ce Theoreme. Soit vn triangle* ABC, *duquel le coſté* AB, *ſoit moindre que le coſté* AC, *& auſſi que la baſe* BC, *& du centre* A, *& de l'interualle du petit coſté* AB, *ſoit deſcrit vn cercle* BDE, *qui coupera tant le plus grand coſté* AC, *que la baſe* BC

car autrement il passeroit, ou par le poinct C, ou au delà d'iceluy. Ce



qui est absurde, veu que toutes les lignes droictes tirees du centre à la circonference doiuent estre egales, par la 15. Definit. Qu'il coupe donc BC, en D, & soit tiree la ligne AD, par la 15. Definit. AB, est egale à AD, & AC, commune aux deux triangles ABC, ADC: & partant les deux costez AB, AC, du triangle ABC, sont egaux aux deux costez AD, AC, du triangle ADC, chacun au sien. Mais l'angle DAC, contenu d'iceux costez AD, AC, n'est que partie de l'angle BAC, contenu des costez egaux à ceux-là: & partant, la base DC, ne sera que partie de la base BC, & pareillement le triangle ADC, partie du triangle ABC. Ce qui est aussi manifeste, par l'application des nombres aux lignes, etc.

Voila la belle demonstration du Copiste Henrion: mais voyons combien ce pauure homme commet icy de fautes.

Premierement il dict, qu'y ayant vn triangle comme ABC, duquel le costé AB, soit moindre que le costé AC, & aussi que la base BC; & que du centre A, & de l'interualle AB, qu'on describe vn cercle, il coupera la base BC, autrement il passeroit par le poinct C, ou au delà. Ce qui est manifestement

faux, comme nous auons demonstré à la 16. Proposition du 3. liure, & comme il appert par cette figure, où la circonference BE, qui coupe le costé BC, comme il dict au poinct D, ne coupe pas le costé BF, du triangle ABF, qui a aussi les deux costez AF, BF, chacun plus grand que AB: donc la circonference BE, descrite du centre A, & de l'interualle AB, ne coupera le costé du triangle comme il dict, mais par accident seulement: c'est à dire, en tant que l'angle ABC, soit agu. Dauantage, il faict encore icy des erreurs manifestes; car il prend vne partie de l'angle BAC, sçauoir DAC, & vne partie de la base BC, sçauoir DC, & enfin vne partie de tout le triangle ABC, sçauoir le triangle ADC, pour monstrer que chacun est moindre que son tout, c'est à dire, qu'apres tout cela il pretend conclure Geometriquement, que 2. triangles ayans deux costez egaux à 2. costez chacun au sié, & l'angle plus grãd que l'angle, la base sera plus grande que la base, & le triangle que le triangle, qui est vne petition du principe la plus vicieuse de toutes les 5. sortes, dont Aristote faict mention au 8. liure de ses Topiques chap. 13. & au 2. des Prieures Analytiques chap. 7. voulant monstrer qu'vne chose est moindre qu'vne plus grande, prenant vne partie de la plus grande, & disant qu'elle est moindre que son tout.

Il faict icy de mesme que celuy qui prendroit vn flambeau ardant pour voir le soleil; encore qu'il pense demonstrer autre chose que ce qu'il dict; sçauoir qu'ayans deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle plus grand que l'angle, la base sera plus grande que la base. Mais qu'il apprenne qu'Euclide mesme ne l'a pas

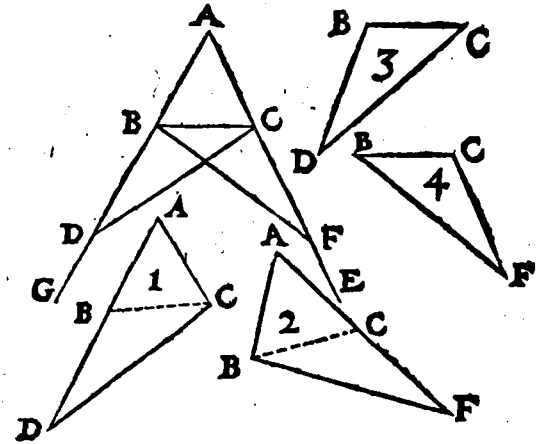
demonſtrer, qu'il n'ait demonſtré 23. Propoſitions, & le demonſtre à la 24. & qu'il ſe meſle ſeulement de faire imprimer & vendre, ce que ſon Traducteur luy traduict, collige & met par ordre; & non pas de faire rien de luy-meſme. Il faict paroiſtre encore ſon aſnerie, en voulant monſtrer par les nombres qu'vne partie de ce triangle eſt moindre que ſon tout, & vne partie de la baſe auſſi moindre que ſon tout: & qui lira attentiuement ſon Onologie, trouuera encore pluſieurs erreurs que ie paſſe ſous ſilence, afin d'euiter prolixité. Car il faudroit faire vn volume entier, qui voudroit remarquer toutes les fautes qu'il commet en ſes Onologies.

Ie diray neantmoins encore icy, que ledict Copiſte a obmis ces mots d'Euclide, à la fin du texte de cette 4. Propo. *Souſtendans iceux coſtez égaux*: ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι: mais c'eſt qu'il eſtoit ainſi en ſa copie; car s'il traduiſoit luy-meſme du Latin, comme il dict, il auroit trouué: *ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur*, & par ainſi l'auroit traduict.

THEOREME 2. PROPO. 5.

Des triangles Iſoſceles, les angles qui ſont à la baſe ſont égaux entr'eux: & les lignes droictes égales eſtans prolongees, les angles, qui ſont ſous la baſe, ſeront égaux entr'eux.

Soit le triangle Iſocele ABC, ayant le coſté AB, égal au coſté AC. Ie dis que les angles ABC, & ACB, ſur la baſe BC, ſont égaux entr'eux: ſemblement que ſi l'on prolonge les coſtez égaux AB, AC, directemẽt aux poincts G, & E, les angles CBG,



BCE, ſous la baſe BC, ſont auſſi égaux entr'eux. En la ligne AG, ſoit pris le poinct contingent D, & de la plus grande AE, prolongee infiniment ſoit retrãchee AF, égale à DA, puis ſoient menees les lignes droictes DC, & FB.

h 3. premier.

Pour entendre plus facilement la demonſtration de cette propoſition, il faut concevoir en cette figure DAF, *quatre triangles, comme s'ils eſtoient ſeparez l'vn de l'autre, ſçauoir* BAF, *&* CAD, *&* DBC, *&* BCF, *comme ſont les triangles marquez par* 1. 2. 3. *et* 4. *Car* 1 *&* 2. *eſtans appliquez l'vn ſur l'autre, ſçauoir le poinct* A, *du triangle* 1. *ſur le poinct* A, *du triangle* 2. *&* *la ligne* AB, *de l'vn ſur la ligne* AD, *de l'autre, feront la figure* DAF. *Semblablement le triangle* 3. *appliqué ſur le triangle* 4. *ſçauoir la ligne* BC, *de l'vn, ſur* BC, *de l'autre, feront la figure* DBCF: *cela eſtant bien entendu, la demonſtration ſera facile, comme s'enſuit.*

D'autant que le coſté AB, eſt égal au coſté AC, par l'hypotheſe, & AD, egal à AF, par la

construction, les deux costez CA, AD, du triangle CAD, seront égaux aux deux costez BA, AF, du triangle *BA F*, chacun au sien, & l'angle A, contenu d'iceux costez, commun, [i] la base B F, sera *égale* à la base C D, & les autres angles égaux aux autres angles, chacun au sien: sçauoir, ABF, egal à A C D, & l'angle D, egal à l'angle F. Et d'autant que la toute AD, est monstree egale à AF, s'il'on oste d'icelles les egales A B, A C, [k] le reste B D, sera egal au reste C F: mais D C, est monstree egale à F B. Donc les deux costez B D, D C, sont egaux aux deux CF, FB, chacun au sien, & l'angle D, monstré egal à l'angle F, lesquels sont contenus d'iceux costez, & la base BC, commune, [l] tout le triangle D B C, sera egal à tout le triangle FCB, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien: sçauoir, l'angle DBC, egal à l'angle F C B, & l'angle D C B, egal à l'angle FBC: mais les angles A B F, & A C D, sont monstrez egaux aux premiers triangles ABF, A CD: donc si l'on retranche d'iceux les angles egaux D C B, & F B C, les angles [m] A B C, ACB, qui resteront sur la base B C, seront egaux entr'eux: & les angles DBC, & FCB, sous la base B C, sont aussi demonstrez egaux entr'eux. Donc les angles sur la base & sous la base, sont egaux entr'eux. Partant des triangles Isosceles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

i 4. *prem.*

k 3. *conf.*

l 4. *prem.*

m 3. *com. sens.*

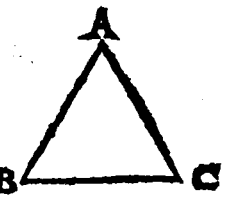
SCHOLIE.

Il est manifeste que le mesme aduiendra aux triangles Equilateraux, encore qu'Euclide semble auoir entendu sa proposition, des triangles Isosceles seulement. Car les deux costez A B, A C, *estans egaux entr'eux, au triangle* A B C, *soit que le* 3. B C, *soit egal à chacun d'iceux, comme il aduient au triangle Equilatere, ou inegal, comme au triangle*

Isoscele : l'on monstrera par la susdite demonstration, que tant les angles sur la base, que sous la base, sont egaux entr'eux.

COROLLAIRE.

De cette 5. Proposition il s'ensuit pareillement que tout triangle equilateral est equiangle, c'est à dire, que les trois angles de quelconque triangle equilateral, sont egaux entr'eux. Car soit le triangle equilateral ABC: D'autant que les deux costez A B, A C, sont egaux, [n] les deux angles B & C, sur la base B C, seront egaux. Semblablement, d'autant que les deux costez A B, B C, sont egaux, les deux angles A, & C, sur la base A C, seront egaux: partant, tous les trois angles A, B, & C, seront egaux, ce qu'il falloit demonstrer.



n 5. Premier.

THEOREME 3. PROPO. 6.

Si deux angles d'vn triangle sont égaux entr'eux, les costez soustendans iceux angles égaux, seront aussi égaux entr'eux.

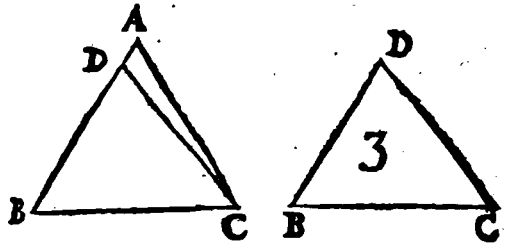
Soit le triangle A B C, ayant l'angle B, egal à l'angle A C B. Ie dis que le costé A B, opposé à l'angle A C B, est egal au costé A C, opposé à l'angle B.

Car s'il est inegal, l'vn d'iceux sera plus grand: soit donc A B, plus grand, s'il est possible, & soit retranchee [o] D B, egale à A C, & menee D C:

o 3. Prem.

D'autant

D'autant que DB, est egale à AC, & BC, commune, les deux costez DB, BC, du triangle DBC,



seront egaux aux deux costez AC, CB, du triangle ACB, chacun au sien, & l'angle B, est egal à l'angle ACB, par l'hypothese, [2] la base AB, sera egale à la base DC, & tout le triangle DBC, egal à tout le triangle ACB, la partie egale à son tout, cè qui est absurde : partant AB, ne sera inegal à AC. Donc si deux angles d'vn triangle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [2] p 4. Premier

Il faut entendre icy deux triangles appliquez l'vn sur l'autre, comme par exemple : si le triangle DBC, *marqué par* 3. *estoit posé sur le triangle* ABC.

COROLLAIRE.

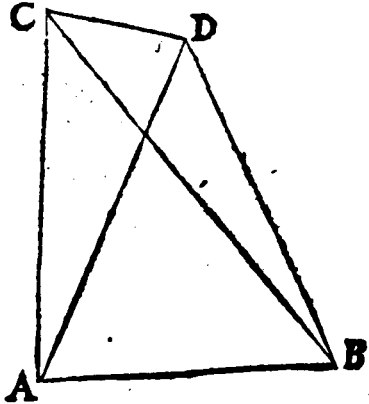
Il s'ensuit de cette proposition que tout triangle equiangle, c'est à dire, duquel tous les angles sont egaux entr'eux, est equilateral. Car puis qu'il a esté demonstré, que d'autant que les angles B, & C, sont egaux ; les costez soustendans AB, AC, sont aussi egaux : on conclura de mesme, que puis que A, & B, sont egaux, les costez soustendans AC, CB, seront aussi egaux, & ainsi des deux au-

tres, &c. Donc les trois costez seront egaux: & partant le triangle est equilateral.

THEOREME 4. PROP. 7.

Si deux lignes droictes menees des extremitez d'vne mesme ligne droicte, se rencontrent à vn poinct, l'on ne pourra mener des mesmes extremitez à vn autre poinct, & de mesme part, deux autres lignes droictes égales aux premieres, chacune a la sienne.

Soit la ligne droicte A B, des extremitez de laquelle A, & B, soient menees deux lignes droictes, à quelconque poinct C, sçauoir A C, B C: Ie dis que des mesmes extremitez A, & B, l'ō ne peut mener de mesme part & à vn autre poinct, deux autres lignes droictes egales aux premieres A C, B C, chacune à la sienne.

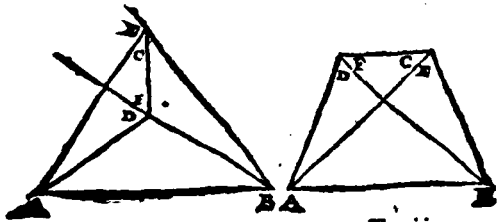


Il est tres-certain que du poinct A, vers C, à vn autre poinct, comme D, l'on peut mener vne ligne

egale à AC, mais la ligne menee de B, au mesme poinct D, ne sera egale à BC. Pareillement de B, on peut mener vne ligne egale à BC, de mesme part, à quelqu'autre poinct: mais la ligne menee de A, au mesme poinct, ne sera egale à AC. q 2. I.

Soit donc menee q AD, egale à AC, de mesme part, & soit coniointe BD: ie dis que BD, ne peut estre egalle à BC: car ayant mené CD, la figure ACD, sera vn triangle Isoscele, AC, AD, estans egales par la construction: r donc l'angle ACD, sera egal à CDA, sur la base CD; mais l'angle BCD, est moindre que ACD, la partie que son tout s. Il sera donc aussi moindre que CDA, qui est monstré egal à ACD, & partant, encore bien moindre que le tout CDB: mais si la ligne BD, estoit aussi egale à la ligne BC, le triangle BCD, seroit encore Isoscele: & partant t l'angle BCD, seroit egal à l'angle CDB, sur la base CD, mais BCD, est monstré bien plus petit que CDB, il seroit donc egal & bien plus petit, ce qui est impossible: Donc BD, ne sera egale à BC: ce qu'il falloit demonstrer. r 5. I. s 9. 6. s.

Et si du poinct B, l'on menoit vne ligne egale à BC, à vn autre poinct que C, & de mesme part, l'on monstrera, par le mesme discours que la ligne menee du poinct A, au mesme poinct, ne sera egale à AC. t 5. I.



Nous auons adiouſté cette premiere demonſtration, à cauſe qu'elle eſt plus facile que toutes les autres.

Autrement, s'il eſt poſſible, des extremitez A, & B ſoient menees AD, BD, à vn autre poinct D, vers C, egales aux premieres AC, BC, chacune à la ſienne, ſçauoir AD, egale à AC, ayant meſme extremité A, & BD, egale à BC, ayant meſme extremité B, & ſoit coniointe DC: & ſi le poinct D, eſt dans le triangle (comme en la 1. figure) ſoient prolongees BC, BD, directement, de la part de E, & F, tant qu'il ſera expedient.

D'autant que la ligne BD, eſt poſee egale à BC, l'angle F, ſeul, ſera egal à CE, pris pour vn ſeul angle, [v] puis qu'ils ſont tous deux ſous la baſe DC, du triangle BDC, en la 1. figure, ou deſſus en la 2. figure. Mais tout l'angle EC, eſt plus grand que [x] l'angle C, tout ſeul, [x] le tout que ſa partie: donc l'angle F, ſera auſſi plus grand que l'angle C. Derechef, puis que la ligne AC, eſt poſee egale à la ligne AD, l'angle C, ſeul ſera egal à F, & D, pris pour vn ſeul angle [y] puis qu'iceux angles C, & F, D, ſont ſur la baſe DC, du triangle ADC: mais nous auons monſtré que l'angle F, eſt plus grand que l'angle C: donc le meſme angle F, ſera auſſi plus grand que l'angle F, D, la partie que ſon tout, ce qui eſt impoſſible. Donc ſur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

v 5. 1.

x 9. c. 5.

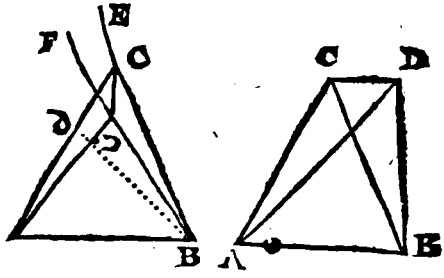
y 5. 1.

Les autres Interpretes demonſtrent autrement cette Propoſition, comme s'enſuit.

Soit faicte la meſme conſtruction de la precedente figure: puis que AD, eſt poſee egale à AC; [z] les deux angles ADC, ACD, ſur la baſe DC, du triangle ADC, ſeront egaux entr'eux: mais l'angle

z 5. 1.

ADC, est plus grand que l'ãgle FDC le tout que sa partie, donc



l'angle ACD egal à ADC, sera aussi plus grand que FDC: & partant l'ãgle total ECD, qui est plus grãd que ACD, sera encor biẽ plus grand que FDC. Derechef, d'autant que la ligne BD, est posee egale à BC, [a] les deux angles ECD, FDC, sous la base DC, du triangle BCD, seront egaux entr'eux: mais l'angle ECD, a esté demonstré bien plus grand que FDC; il sera donc egal & bien plus grand, ce qui est *impossible*. [a] 5.e.f.

Finalement, d'autant que AD, AC, sont posees egales (soit veue la derniere figure, où le poinct D, est hors le triangle) les deux angles [b] ACD, ADC, sur la base CD, du triangle ACD, sont egaux entr'eux: mais l'angle ACD, est plus grand que BCD, [c] le tout que sa partie: donc ADC, sera aussi *plus* grand que BCD, & partant l'angle BDC, qui est *plus* grand que ADC, sera encore bien plus grand que BCD, Derechef, puis que BC, BD, sont posees egales, les deux angles BCD, BDC, sur [d] la base CD, du triangle BCD, seront egaux entr'eux, mais nous auons monstré que l'angle BDC, est bien plus grand que l'angle BCD, il sera donc egal à iceluy, & bien plus grand; ce qui est impossible. *Mais* si l'on dict que le poinct D, est en vne [b] 5. 1. [c] 9.e. 5. [d] 5. 1.

des lignes AC, BC, comme au poinct D, en la ligne AC, (où est tiree la ligne BD, denotee par poincts) cela estant, il s'ensuyura, comme dit est, que la partie AD, sera egale à son tout AC, ce qui est aussi impossible. Donc sur vne mesme ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

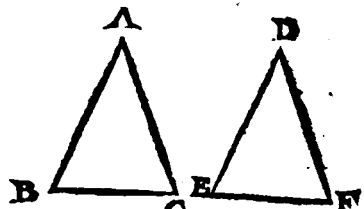
D'icy il s'ensuit qu'ayant mené deux lignes des extremitez d'vne ligne droite à vn mesme poinct, comme, AC, & BC, si des mesmes extremitez l'on en mene deux autres egales aux deux premieres, chacune à la sienne; de mesme part, elles se rencontreront au mesme poinct, estans inclinees l'vne à l'autre, comme il est manifeste par les figures precedentes.

THEOREME 5. PROP. 8.

Si deux triangles ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien; & qu'ils ayent la base égale à la base, ils auront aussi l'angle contenu d'iceux costez egaux, égal à l'angle.

Soient les deux triangles ABC, DEF, ayans les deux costez AB, AC, egaux aux deux DE, DF, chacun au sien, sçauoir AB, egal à DE, & AC, egal à DF, & la base BC, egale à la base EF. Ie dis que l'angle A, est egal à l'angle D, lesquels angles sont contenus d'iceux costez egaux.

Car si l'on entend que le triangle ABC, soit posé sur le triangle DEF, sçauoir le poinct B, sur



le poinct E, & la base BC, sur la base EF, le poinct C, conuiendra au poinct F, [e] puis que BC, EF, sont egales, & les deux lignes droictes BA, & CA, conuiendront sur les deux ED, FD, estans egales à [f] icelles chacune à la sienne, & le poinct A, sur le poinct D, & partant l'angle A, sera egal à l'angle D. Autrement elles se rencontreroient à vn autre poinct, ce qui est impossible [g] puis que si deux lignes droictes menees des extremitez d'vne autre ligne droicte, se rencontrent à vn poinct, &c. Donc A, sera egal à D. Donc si 2. triangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

e 8. *com. s.*

f 8. *com. s.*

g 7. *Prem.*

COROLLAIRE.

L'on peut colliger de cette Proposition, que les autres angles sont aussi egaux aux autres angles chacun au sien, & tout le triangle, à tout le triangle. Car puis que l'angle A, est monstré egal à l'angle D, les costez AB, AC, estans egaux à DE, DF, chacun au sien, il s'ensuit [h] que le triangle est egal au triangle, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien.

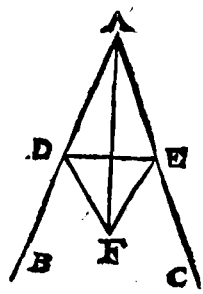
h 4. *Prem.*

PROBLEME 4. PROPO. 9.

Couper vn angle rectiligne donné

en deux également.

Soit l'angle rectiligne donné BAC, qu'il faut diuiſer en deux egalement, c'eſt à dire, en deux angles egaux. Soit pris le poinct contingent D, en la ligne AB, & de la plus grande AC, prolongee infiniment [i] ſoit retranchee AE, egale à AD, & menee DE, [k] ſur laquelle ſoit deſcrit le triangle equilateral DFE, & menee AF. Ie dis que l'angle BAC, eſt diuiſé en deux angles egaux. Car d'autant que EA, a eſté priſe egale à AD, & AF, eſt commune, les deux coſtez DA, AF, ſont egaux aux deux EA, AF, chacun au ſien, & la baſe DF, egale à la baſe EF, eſtans les coſtez d'vn triangle equilateral, [l] l'angle DAF, ſera egal à l'angle EAF: & partant l'angle BAC, ſera diuiſé en deux egalement. Donc l'angle rectiligne, &c. Ce qu'il falloit faire.



i 2. Prem.

k 1. Prem.

l 8. Prem.

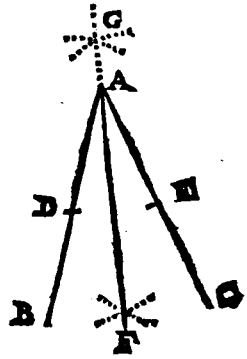
PRACTIQVE.

La practique de cette Propoſition ſe peut faire ainſi. Soit l'ãgle BAC, *à diuiſer en deux egalement: du poinct* A, *comme centre à quelconque interualle, ſoient coupees* AD, AE, *egales, puis des points* D, *&* E, *cõme centres, du meſme interualle ou moindre, ou plus grand, comme il ſera plus expedient, ſoient deſcrits deux arcs s'entre-coupans au poinct* F, *au*

dessous du poinct A, *vers* B, *&* C, *ou au dessus vers* G, *puis soit menee la droite ligne* AF, *ou* GAF, *laquelle diuisera l'angle* BAC, *en deux egalement. Voyez la suyuante figure.*

SCHOLIE.

Il appert par ce que dessus, que l'on peut diuiser tout angle rectiligne en 4. 8. 16. 32. *ou* 64. *parties egales, & ainsi de suitte, procedant par augmentation double. Car apres que l'on a diuisé vn angle rectiligne en deux angles egaux, faut derechef diuiser chacun d'iceux en* 2. *egalement, & l'on aura quatre angles egaux, & faire ainsi de suitte.*

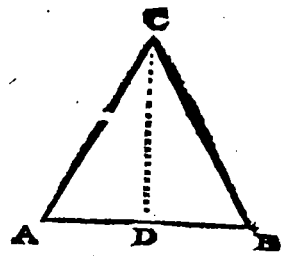


PROBLEME 5. PROP. 10.

Couper vne ligne droicte donnee & terminee, en deux parties egales.

Soit la ligne droite donnee & terminee AB, qu'il faut diuiser en deux egalement.

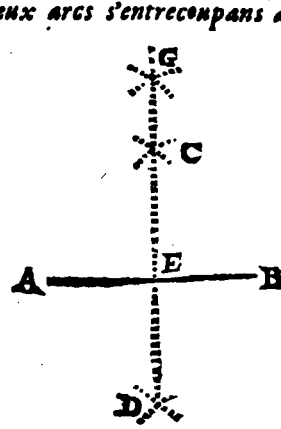
Sur icelle AD, soit [m] descrit le triangle equi- [m] 1. prem. lateral ABC, puis soit diuisé l'angle [n] ACB, en [n] 9. prem. deux egalement, par la ligne droicte CD, Ie *dis* que AB, est diuisee en deux egalement au *poinct* D.



Car d'autant que AC, est egale à CB, (car elles sont les costez d'vn triangle equilateral,) & CD, est cõmune, les deux costez AC, CD, sont egaux aux deux BC, CD, chacun au sien, & l'angle ACD, egal à l'angle BCD, par la constru-
4. Prem. ction, la base AD,° sera egale à la base BD: partant AB, sera diuisee en deux egalement. Ce qu'il falloit faire.

PRACTIQVE.

Pour diuiser AB, *en deux egalement, des poincts* A, *&* B, *comme centres, en ouurant le compas, ensorte que l'ouuerture excede la moitié de la ligne* AB, *soient descrits deux arcs s'entrecoupans au poinct* C, *au dessus de la ligne: semblablement des mesmes centres & à mesme interualle, soient descrits deux autres arcs au dessous de* AB, *s'entre-coupans au poinct* D, *& soit menee la droicte ligne* CD, *elle coupera* AB, *en deux egalement au poinct* E:



Ou bien apres auoir descrit deux arcs s'entre-cou-

pans au poinct C, des centres A & B, des mesmes centres, & à plus grãde interualle que le premier, soiẽt decrits deux autres arcs au dessus de C, s'entre-coupans au poinct G, & soit menee la droicte ligne GCE, elle coupera AB, au mesme poinct E.

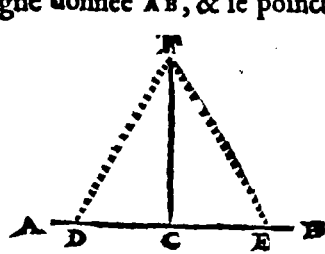
SCHOLIE.

Il est manifeste qu'en la mesme maniere l'on peut diuiser la ligne droicte AB, en quatre parties, puis en huict, & ainsi consequemment, comme nous auons dict en la Proposition precedente, de la diuision de l'angle.

PROBLEME 6. PROPOSIT. 11.

Sur vne ligne droicte donnee, & d'vn poinct donné en icelle, mener vne ligne droicte, à angles droicts.

Soit la droicte ligne donnee AB, & le poinct donné en icelle C, il faut du point C, mener vne ligne droicte & à angles droicts, à la ligne donnee AB.



En la partie AC, soit pris le poinct contingent D, puis soit posee ou prise FCE, egale à CD, puis sur DE, soit descrit le triangle equilateral DFE, & soit menee CF. Ie dis qu'icelle est à angles droicts à la ligne AB.

p 2. *ou* 3. *premier.*

q 1. *prem.*

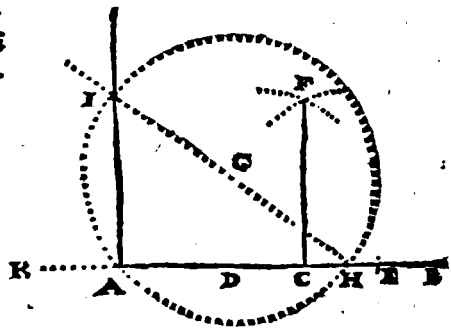
Car d'autant que C D, eſt egale à C E, & C F, commune, les triangles D C F, & E C F, auront les deux coſtez D C, C F, egaux aux deux coſtez E C, C F, chacun au ſien, & les baſes D F, E F, egales, 18. prem. eſtans les coſtez d'vn triangle equilateral, ' les angles au poinct C, ſeront egaux: donc l'vn & l'au- ſ 10. def. treſera droict, ' partant C F, ſera à angles droicts à A B. Donc ſur vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Clauius dit, qu'ayant pris le poinct D, en la ligne AC, il faut retrancher CE, egale à C D, par la 3. Prop. du 1. ce qui ne ſe pourra pas touſiours faire, attendu que la reſtante CB, peut eſtre moindre que la ligne C D, priſe, ou que le poinct donné C, peut eſtre le meſme qu'vn de ceux de l'extremité A, ou B, mais Theon, faict mieux ainſi; ἐπὶ μὲν τῆς α κ, τυχὸν σημεῖον, τὸ δ' ᾗ κείσθω τῇ κ δ ἴση ἡ κ ε ᾗ σωιεσταται ἐπὶ τῆς δ ε περιφερείας ἰσόπλευρον τὸ φ δ ε καὶ ἐπεζεύχθω ἡ φ κ, &c. *C'eſt à dire, ſoit pris le poinct contingent, ou à l'aduenture D, en la li-* 2. 1. *gne CA, & ſoit poſee ' CE, egale à CD, & ſur DE, ſoit conſtitué le triangle equilateral FDE, & conioint FC, &c. Or quand Theon dit, ſoit poſee C E, egale à C D, faut entendre, ſoit priſe egale, ou prolongee, s'il eſt beſoin, etc. Et Henrion dit, du poinct C, ſoient priſes les deux lignes egales C D, C E, par la troiſieſme Propoſition, ce qui ne ſe pourra pas auſſi touſiours faire, pour les raiſons ſuſdites.*

La practique de cette Propoſition ſe fera com-

me s'ensuit : si sur la ligne AI, on veut mener vne ligne à angles droicts: du poinct



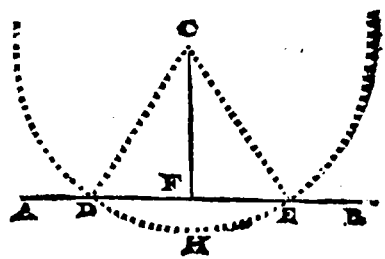
C, en icelle soient prises de part & d'autre parties egales CE, CD, & des poincts D, et E, comme centres, soient descrits deux arcs s'entre-couppans au poinct F, à telle interualle que l'on voudra, pourueu qu'il excede DC, ou EC, puis soit menee CF, icelle sera à angles droits à AB.

Mais si le poinct donné est à l'extremité A, soit pris le poinct G, hors la ligne, en sorte toutefois que le cercle descrit du poinct G, comme centre & de l'interualle GA, puisse couper la ligne dõnee à quelque poinct, comme H, & soit descrit la circonference IAH, du centre G, et de l'interualle GA, coupant AB, au poinct H, & du poinct H, par G, soit menée la ligne HGI, coupant la circonference au poinct I, puis soit menee la droite ligne AI, icelle sera à angles doits, comme il sera demonstré à la 31. Prop. du 3. lin. Et encore que A, ne fust le poinct de l'extremité (ce qui aduiendroit, si la ligne estoit prolongee comme à K,) en la mesme maniere l'on meneroit AI, à angles droicts.

PROBLEME 7. PROP. 11.

Sur vne ligne droicte donnee & infinie, d'vn poinct donné, lequel n'eſt en icelle; mener vne ligne perpendiculaire.

Soit la ligne droicte donnee AB, & le poinct donné C, hors icelle; duquel il faut mener vne ligne droicte, perpendiculaire ſur AB, Soit pris de l'autre part de AB le poinct contingent H. Et du poinct C, comme centre, & à l'interualle CH, ſoit



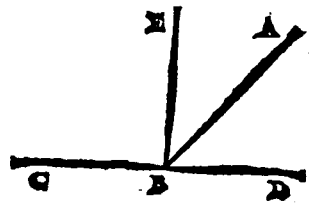
deſcrit le cercle DE, coupant AB, aux poincts D, & E, puis ſoit [y] 10. 1. diuiſee DE, en deux egalement au poinct F, & ſoit menee CF, & CD, CE, Ie dis que CF, eſt perpendiculaire à AB.

Car d'autant que DF, eſt egale à EF, par la conſtruction, & FC, commune, les deux coſtez DF, FC du triangle DFC, ſont egaux aux deux coſtez EF, FC, du triangle EFC, chacun au ſien, & la baſe CD, egale à la baſe CE, eſtans toutes deux menees du centre C, à la circonference, [x] 11. 8. les angles de part & d'autre au poinct F, ſeront egaux, [y] 10. *def.* & partant l'vn & l'autre droict. Donc CF, eſt menee perpendiculaire à AB. Ce qu'il falloit faire.

THEOREME 6. PROPO. 13.

Quand vne ligne droicte tombant sur vne ligne droicte, faict angles, ou elle fera deux angles droicts, ou égaux à deux droicts.

Que la ligne droicte AB, tombant sur CD, faſſe deux angles ABD, ABC. Ie dis qu'iceux ſont droits ou egaux à deux droicts.



Car ſi l'Angle ABD, eſt egal à ABC, [z] ils ſeront tous deux droicts, s'il eſt inegal, [a] ſoit menee B E, à angles droicts à CD, donc EBD, & EBC, ſeront droicts. Or d'autant que les deux angles DBA, & ABE, ſont [b] egaux au droict EBD, toutes les parties priſes enſemble à leur tout, [c] ſi on adiouſte le commun, EBC, les trois DBA, ABE, & EBC, ſeront egaux aux deux droicts, DBE, & EBC. Derechef, d'autant que l'angle ABC, eſt egal aux deux ABE, EBC, le tout à toutes ſes parties priſes enſemble. Si on adiouſte le commun DBA, les deux angles DBA, & ABC, ſeront egaux aux trois DBA, ABE, & EBC: mais ces trois ont eſté monſtrez egaux à deux droicts: donc DBA, & ABC, ſeront auſſi egaux à deux droicts. Donc, quand vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

z 10. def.
a 11. 1.
b 9. cõ. ſ.
c 2. com. ſ.

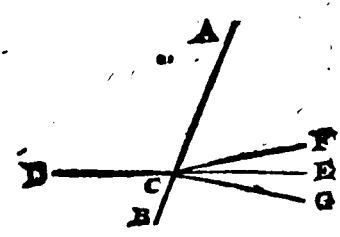
SCHOLIE.

Cette Proposition semble dependre de quelque commune notion de l'esprit. Car de ce que l'Angle ABC, excede l'angle droit EBC, le reste ABD, est excedé d'autant par l'angle droit EBD. Car comme en celuy-là l'excez est l'angle ABE, ainsi en celuy-cy le defaut est le mesme angle ABE, parquoy l'on pourra conclure de là, qu'ils sont egaux à deux droicts, attendu que l'excez de l'vn, est le defaut de l'autre.

THEOREME 7. PROP. 14.

Si à quelque ligne droite, & à vn poinct en icelle, sont menees deux lignes droictes, non de mesme part, faisant les angles de part & d'autre egaux à deux droicts: icelles lignes droictes se rencontreront directement l'vne l'autre.

Soit la droicte ligne AB, & le poinct en icelle C, auquel soient menees les droictes lignes DC, EC, de part & d'autre de AB, faisant les angles DCA, & ACE, egaux à deux droicts. Ie dis que DC, & EC, se rencontrét directement, c'est à dire, que DCE, est vne ligne droicte: autrement DC, estant prolongee vers E, tomberoit



tomberoit au dessus de CE, ou au dessous : qu'elle tombe donc premierement au dessus, s'il est possible, comme au poinct F, en sorte que DCF, soit ligne droicte.

D'autant que la droicte ligne AC, tombant sur la droicte DCF, fait les deux angles DCA, & ACF, [d] iceux seront droicts ou egaux à deux droits: mais les deux DCA, & ACE, sont egaux à deux droicts par l'hypothese, & tous [e] les angles droicts sont egaux entr'eux : donc les deux angles DCA, & ACF, sont egaux aux deux angles DCA, & ACE, ostant donc le commun DCA, [f] restera ACF, egal à ACE, la partie à son tout [g] ce qui est impossible. La mesme absurdité arriuera si l'on veut dire que DC, estant prolongee, tombe au dessous de CE, comme au poinct G : Partant DC, & EC, se rencontreront directement. Donc si à quelque ligne, &c, Ce qu'il falloit demonstrer.

d 13. Prem.
e 10. com. s.
f 3. e. s.
g 9. com. s.

SCHOLIE.

Cette Proposition est la conuerse de la precedente, où il a esté monstré que si DCE, est ligne droite, les angles ACD, ACE, sont egaux à deux droits: En celle-cy il est monstré que si les angles susdits sont egaux à deux droits, que les deux lignes droites DC, EC, font vne seule ligne droite.

COROLLAIRE 1.

Il s'ensuit de cette Proposition, que deux lignes droictes se rencontrans indirectement, n'ont pas vn mesme commun segment, c'est à dire vne mesme partie commune, comme à FC, & EC, qui se rencontrent indirectement au poinct C, la ligne

DC, ne pourra pas estre commune à CE, CF, c'est à dire, que DC, CE, faisans vne ligne droicte, DE, CF, ne feront pas aussi vne ligne droicte; car autrement si tant DCE, que DCF, estoit vne ligne droicte, comme nous venons de demonstrer, l'Angle ACF, seroit egal à l'angle ACE, la partie au tout, ce qui est impossible.

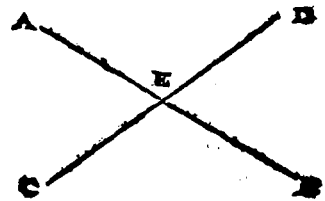
COROLLAIRE II.

Il s'ensuit encore que deux lignes droictes se rencontrans indirectemét à vn poinct, si elles sont toutes deux prolongees, elles s'entre-couperont necessairement estans prolongees de la mesme part où elles se rencontrent: comme si les lignes EC, FC, qui se rencontrent au poinct C, sont prolongees, à sçauoir EC, directement elle tombera au poinct D, comme il est mõstré; mais si FC, est aussi prolongee de la part de C, elle coupera la ligne EC, prolongee à D, c'est à dire, tombera au dessous de CD: car autrement FC, tomberoit sur CD, & partant EC, FC, auroient vn mesme commun segment, ce qui est monstré impossible: & si on vouloit dire que FC, prolongee tombast au dessus de CD, il s'ensuyuroit encore la mesme absurdité que cy-deuant: sçauoir que la partie seroit egale à son tout; ce qui est impossible. Et ce que nous venns de monstrer icy, sont les deux prem. pretẽdues maximes, des huict, que Clauius & autres auoient adiousstees à celles d'Euclide; cinq desquelles nous auons demonstrees à la seconde Proposition, & l'autre qui reste est demonstree à la 5. du 5. liure. Voila donc comment ils ont voulu prendre pour Notions anticipees, ce qui Eu-

clide demonſtre par apres. En noſtre premiere Edition nous auions remarqué ſeulement quelques-vnes des fautes commiſes par le Copiſte, tant à cette Propoſition qu'ailleurs cy-apres, leſquelles il a corrigees en ſa 3. Edition des ſix premiers liures, comme nous luy auons monſtré: parquoy nous ne les repeterons icy.

THEOREME 8. PROPO. 15.

Si deux lignes droictes ſe coupent l'vne l'autre, elles feront les angles oppoſez, au ſommet egaux entr'eux.



Soient les 2. lignes droictes AB, CD, s'entrecoupantes au poinct E: Ie dis qu'elles font les angles au ſommet egaux entr'eux, à ſçauoir l'angle AED, egal à l'angle CEB, & AEC, egal à BED.

Dautant que DE, tombe ſur AB, les deux angles AED, DEB, [h] ſeront egaux à deux droicts. Derechef, d'autant que BE, tombe ſur CD, les deux angles CEB, BED, par la meſme raiſon ſeront egaux à deux droicts, & tous les angles droits ſont egaux entr'eux: donc les deux AED, DEB, ſeront egaux aux deux CEB, BED: donc ſi l'on oſte l'angle commun DEB, [k] reſtera l'angle AED, egal à CEB. Semblablemẽt l'on monſtrera que l'angle AEC, eſt egal à l'angle DEB. Donc, ſi deux lignes droites ſe coupent, &c. Ce qu'il falloit demõſtrer.

h 13. Prem.

i 10. def.

k 3. ax.

COROLLAIRE 1.

Euclide collige de la demonſtration de ce Theoréme, (ſelon la ſentence de Proclus) que deux lignes droictes ſe coupans l'vne l'autre font 4. angles egaux à 4. droits: car il a eſté demonſtré que tant les deux angles AED, DEB, que les 2. AEC, CEB, ſont egaux à deux droits par la 13. Donc les angles conſtituez au poinct E, vaudront deux fois deux droicts: partant egaux à quatre droits.

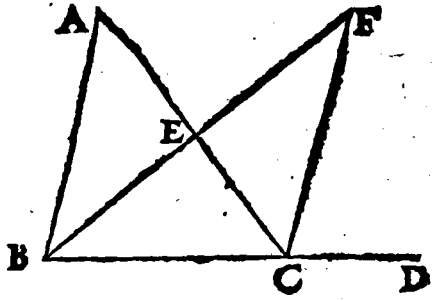
COROLLAIRE 2.

Par la meſme raiſon nous colligerons que tous les angles conſtituez à vn meſme poinct, ſont tant ſeulement egaux à quatre angles droits. Car ſi du poinct E, en la precedente figure, l'on mene tant de lignes droictes que l'on voudra, les quatre angles conſtituez au poinct E, ſeront diuiſez en plu-
1 *Cor.* 3. 1. ſieurs parties, leſquelles ſont egales[1] à leurs touts, priſes enſemble. Donc ces 4. eſtans egaux à quatre droits, par le 1. Corollaire, toutes leurs parties priſes enſemble ſeront pareillement egales à quatre droits. D'où il eſt manifeſte que tout eſpace conſtitué en vn plan à l'entour de quelque poinct, vaut quatre angles droits, comme il eſt manifeſte; d'autant que tous les angles qui peuuent eſtre conſtituez à l'entour de ce poinct, ſont egaux à quatre droicts. Semblablement, il eſt manifeſte que tant de lignes que l'on voudra, s'entre-coupantes, feront les angles au poinct de la ſection, egaux à quatre droicts.

THEOREME 9. PROP. 16.

De *tout* triangle, vn costé estant prolongé, l'angle exterieur est plus grand que chacun des interieurs & opposez.

Au triangle A B C, le costé B C, soit prolongé au poinct D. Ie dis que l'angle exterieur A C D, est plus grand que chacun des interieurs & opposez, sçauoir est, pl^o grand que C A B, & semblablement plus grand que C B A.



Car soit coupé le costé A C, en deux [m] egalement au poinct E, & par E, soit menee B E F, & soit faite [n] E F, egale à E B, & iointe F C.

m 10. *Prem.*

n 2. *Prem.*

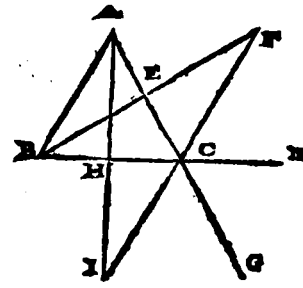
D'autant que A E, est egale à E C, & E F, à E B, par la construction, les deux costez A E, E B, du triangle A E B, seront egaux aux deux F E, E C, du triangle F E C, chacun au sien, & les angles au sommet E, contenus d'iceux costez [o] sont egaux, la base A B, sera egale à la base [p] F C, & tout le triangle à tout le triangle, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien, cõtenus d'iceux costés egaux, sçauoir B C F, egal à B A B, Mais le tout [q] A C B, q 9. c. s.

o 15. *prem.*

p 4. *prem.*

est plus grand que E C F, il sera donc aussi plus grand que son egal EAB. Semblablement, ayant coupé BC en deux egalement au point H, comme en la derniere figure, & mené AHI, en sorte que HI, soit egale à HA, & joint c I, & prolongé le costé AC, au point G, l'on monstrera que l'angle exterieur BCG, est plus grand que l'interieur, & opposé ABC; & partant ACD, qui est[r] egal à BCG, sera aussi plus grand que ABC. Donc de tout triangle vn costé, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

r 15. p.

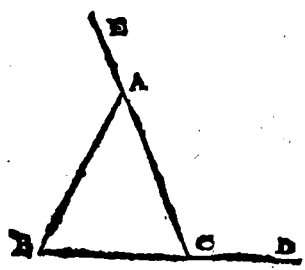


Le Copiste dict en cette Proposition : *l'Angle exterieur est plus grand que l'vn ou l'autre des opposez interieurs* : au lieu de dire comme Euclide ; *l'Angle exterieur est plus grand que chacun des interieurs & opposez* : ἑκάτερος τῶν ἐντὸς ἢ ἀπεναντίον, μείζων ἐστί. Donc Euclide vse de ce mot ἑκάτερος, qui signifie l'vn & l'autre, ou chacun des deux, & non pas de ce mot ὁποτερουοῦν, qui signifie l'vn ou l'autre, ou lequel que l'on voudra. Car Euclide n'entend pas que l'angle exterieur soit plus grand seulement que l'vn ou l'autre, ou lequel que l'on voudra des interieurs & opposez : mais plus grand que l'vn, & aussi plus grand que l'autre, chacun pris à part : & disant qu'il est plus

grand que l'vn ou l'autre, l'on peut dire qu'eſtãt pl⁹ grãd que l'vn, il ne ſera pas dõc auſſi plus grãd que l'autre. Ie diray encore icy qu'Euclide n'a point fait mention d'angle exterieur en ce liure, iuſques à cette 16. Propoſition, & neantmoins ledit Copiſte met ainſi la fin de la 5. Propo. *Les angles exterieurs ſous la baſe ſont egaux*: Et Euclide dict; εἰ ἐπὶ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Les angles ſous la baſe ſeront egaux entr'eux: donc au lieu de ce mot, entr'eux, le Copiſte met, exterieurs, ce qui n'eſt aucunement à propos, ny conforme au texte Grec ny Latin: car ce mot (exterieur) eſt relatif à (interieur) dont il n'eſt icy faict mention, attendu que ces angles ſous la baſe, dont eſt queſtion, ſont dits abſolument egaux entr'eux, ſans les referer à aucun autre.

THEOREME 10. PROP. 17.

De tout triangle, deux angles ſont plus petits que deux droicts, de quelque façon qu'ils ſoient pris.



Soit le triangle ABC: *Ie dis*, que deux des angles d'iceluy, ſont plus petits que deux droits, de quelque façon qu'ils ſoient pris.

Car premierement le coſté BC, eſtant prolongé au poinct D, l'on

monſtrera que les deux angles B, & ACB, ſont moindres que deux droicts.

D'autant que l'angle exterieur ACD, eſt plus grand que [s] l'oppoſé interieur B. Si l'on adiouſte le commun angle ACB, [t] les deux ACD, & ACB, ſeront plus grands que B, & ACB: mais ACB, & ACD ſont egaux [v] à deux droicts: donc B, & ACB, ſont plus petits que deux droits. Semblablement, le coſté CA, eſtant prolongé au poinct E, l'on monſtrera que CAB, & ABE, ſont plus petits que deux droicts, &c. Donc de tout triangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[s] 16. p. 4. f.

[v] 13. p.

DE PROCLVS.

Il eſt manifeſté de ce Theoréme, que l'on ne peut mener d'vn meſme poinct plus d'vne ligne droite perpendiculaire, ſur vne meſme ligne droite. Car ſi faire ſe peut ſoient menees du poinct A, à la ligne BC, deux perpendiculaires AB, AC, les deux angles internes B, & C, du triangle ABC, ſeront egaux à deux droits, l'vn & l'autre eſtant droit, ce qui eſt abſurde. [x] *Car nous auons monſtré que deux angles de tout triangle, de quelque façon qu'ils ſoient pris, ſont moindres que deux droits. Donc l'on ne pourra mener plus d'vne ligne perpendiculaire, &c. Ce qui eſtoit propoſé. Voyez le petit triangle de la figure ſuyuante.*

[x] 17. pre.

COROLLAIRE 1.

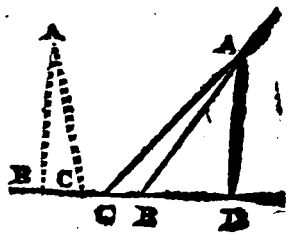
De ces demonſtrations, il s'enſuit auſſi que tout triangle qui a vn angle droit ou obtus, a les autres agus. Car puis qu'il eſt monſtré que deux

quelconques angles de tout triangle, ſont moindres que deux *droicts* : il eſt neceſſaire que ſi vn angle eſt *droict ou* obtus, qu'vn chacun des autres ſoit agu, *autrement* deux angles d'vn triangle ſeroient *droicts* ou plus grands que deux droicts.

COROLLAIRE 2.

Il s'enſuit auſſi de cette Propoſition, que ſi vne ligne droicte fait deux angles inegaux, auec vne autre ligne droite, l'vn obtus & l'autre agu, que la ligne perpendiculaire tiree de quelconque poinct d'icelle ſur cet autre, tombera de la part de l'angle agu.

Que AB, faſſe auec CD, deux angles inegaux, ſçauoir ABD, agu & ABC, obtus, & de quelconque poinct A, ſoit menee AD, perpendiculaire à CB. Ie dis que AD, tombera de la part de l'angle agu ABD : *autrement* qu'elle tombe, s'il eſt poſſible, de la part de l'angle obtus ABC, & ſoit AC. Donc les deux angles, ſçauoir l'obtus ABC, & le *droict* ACB, au *triangle* ABC, ſeront *plus grands* que deux droits, ce qui eſt abſurde, attendu qu'ils ſont moindres que deux droicts, donc la perpendiculaire tiree du poinct A, ſur AB, ne tombera de la part de l'angle obtus. Partant elle tombera de la part de l'angle agu.



y 17. *prem.*

COROLLAIRE 3.

Semblablement, il eſt manifeſte de cette Propo-

sition que tous les angles d'vn triangle equilateral, & les deux angles sur la baſe d'vn triangle Iſoſcele ſont agus : car puis [z] que deux quelconques angles du triãgle equilateral, & les 2. deſſus de la baſe du triangle Iſoſcele ſont egaux entr'eux : & tant [a] ces deux-là que ces deux-cy, ſont moindres que deux droicts, chacun d'iceux ſera moindre qu'vn droict, c'eſt à dire agu. Car ſi vn eſtoit droit ou obtus, les deux ſeroient egaux à deux droicts, ou plus grands que deux droits.

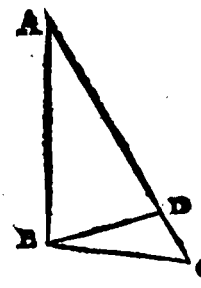
z 5. prem.

a 17. prem.

THEOREME 11. PROP. 18.

De tout triangle, le plus grand coſté ſouſtient le plus grand angle.

Soit le triangle ABC, ayant le coſté AC, plus grand que le coſté AB. Ie dis que l'angle ABC, eſt plus grand que l'angle ACB. Car puis que AC, eſt plus grand que AB, ſoit retranchee, [b] AD, egale à AB, & ſoit ioincte BD. D'autant que AB, AD, ſont egaux, les [c] deux angles ABD, ADB, ſeront egaux: mais l'externe ADB, eſt plus grand [d] que l'interne, & oppoſé C, donc ſon egal ABD, ſera auſſi plus grand que C: & partant le tout ABC, encore bien plus grand que l'angle C. Par meſme raiſon l'on monſtrera que l'angle C, eſt plus grand que l'angle A. Donc de tout triangle le plus, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



b 3. prem

c 5. 1.

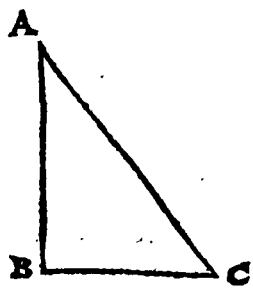
d 16. 2.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cette Proposition, que les trois angles d'vn triangle Scalene sont inegaux. Car soit le triangle Scalene, duquel le plus grand costé soit AC, le plus petit soit BC, & le moyen AB, (soit veuë la figure de la Propo. suyuante.) Ie dis que tous les angles d'iceluy sont inegaux: car puis que le costé AC, est posé plus grand que le costé AB, par cette Propo. l'angle B, sera plus grand que l'angle C, par la mesme raison l'angle C, sera plus grand que l'angle A, d'autant que le costé AB, est posé plus grand que le costé BC. Donc les trois angles sont inegaux, B, le plus grand, C, le moyen, & A, le plus petit.

THEOREME 12. PROP. 19.

De tout triangle, le plus grand angle est soustenu du plus grand costé.



Soit le triangle ABC, ayant l'angle B, plus grand que l'angle C. Ie dis que le costé AC, qui soustient l'angle B, est plus grand que AB, qui soustient l'angle C. Car s'il n'est plus grand, il sera egal ou plus petit: si egal, l'angle B, [e] sera egal à l'angle C, ce qui est absurde: car B, est posé plus grand. Si le costé AC, est dit estre plus petit

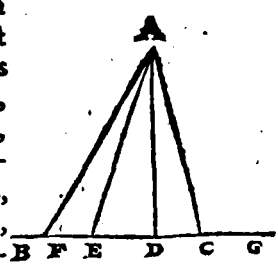
e 5. prem.

que AB, l'angle B, soustenu du plus petit costé AC, sera plus petit que l'ãgle C, soustenu f du plus grãd
f18. prem. costé AB, ce qui est plᵉ absurde: car l'ãgle B, est plus grãd que l'angle C. par l'hypothese. Dõc le costé AC, sera plus grand que AB. Semblablement, l'on monstrera que le costé AC, est plus grand que le costé BC, posant l'angle B, plus grand que l'angle A. Donc de tout triangle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De cette Proposition il s'ensuit, que de toutes les droictes lignes menees d'vn mesme poinct sur vne ligne droicte, celle qui est perpendiculaire est la plus petite.

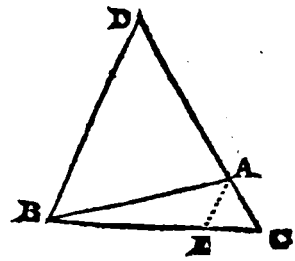
Car soient menees du poinct A, sur BC, les lignes droictes AD, AE, AF, AC, desquelles AD, soit perpendiculaire à BC. Ie dis qu'icelle est la plus petite: car puis qu'au triangle ADE, les deux angles ADE,
g17. prem. & AED, sont g moindres que deux droits, & ADE, est droict, AED, sera moin-



dre qu'vn droict, c'est à dire agu: partant
h19. 1. h AE, sera plus grande que AD. En la mesme maniere l'on demonstrera que chacune des autres est plus grande que AD. Donc la perpendiculaire AD, sera la plus petite.

THEOREME 13. PROPO. 20.

De tout *triangle*, deux costez sont plus grands *que* l'autre, en quelque façon qu'ils *soient pris.*



Soit le triangle ABC. Ie dis que deux costez d'iceluy sont plus grands que l'autre, en quelque façon qu'ils soient pris, sçauoir B A, & A C, pris ensemble sont plus grands que B C : semblablement A C, C B, plus grands que A B : Finalement A B, B C, plus grands que A C.

Soit prolongé le costé C A, vers D, en sorte que A D, [i] soit posee egale à A B, & soit menee B D. D'autant que les deux costez A D, A B, sont faicts egaux, les deux angles [k] sur la base B D, sçauoir D, & A B D, seront egaux : mais l'angle C B D, [l] est plus grand que A B D, il sera donc aussi plus grand que D : partant au triangle C B D, le costé C D, opposé au plus [m] grand angle C B D, sera plus grand que le costé B C, opposé au plus petit angle D : mais le costé C D, est egal aux deux A B, A C, (car puis que A D, est egal à A B, si l'on adiouste le commun [n] A C, le total C A D, sera egal à A C, A B,) : donc les deux costez A C, A B, ensemble, seront plus grands que l'autre costé B C. Semblablement l'on demonstrera que

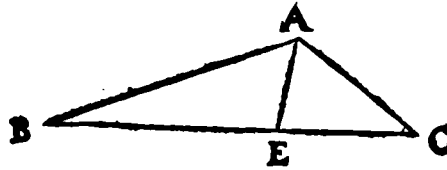
i 2. prem.
k 5. prem.
l 9. c. 5.
m 19. pre.
n 2. c. 5.

deux autres costez, tels que l'on voudra, sont plus grands que l'autre. Donc de tout triangle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

AVTREMENT.

Nous demonstrerons ce Theoréme sans prolonger aucun costé, en cette sorte.

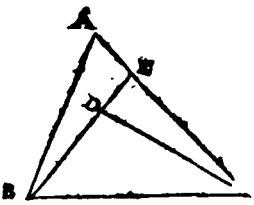
Soit diuisé l'angle° BAC, en deux egalement, par la ligne AE: d'autant que le costé CE, du triangle AEC, est prolongé vers B, l'angle externe ° 9. I. ° 16. I. p AEB, sera plus grand que l'interne, & opposé EAC, il sera donc aussi plus grand que son egal BAE. Donc au triangle ABE, le costé AB, opposé au plus grand angle AEB, sera ¶ plus grand que le ¶ 19. I. costé BE, opposé au plus petit angle EAB. Semblablement, l'on monstrera que le costé AC, est r 16. I. plus grand que EC, d'autant que l'angle r CEA, est plus grand que EAB, c'est à dire que EAC, son egal, &c. Partant les deux AB, AC, seront plus grands que BC, & ainsi des autres, diuisant chacun des autres angles en deux egalement.



THEOREME 14. PROP. 21.

Si sur l'vn des costez d'vn triangle, & des extremitez d'iceluy, sont menees

deux lignes droictes au dedans, se rencontrans à vn poinct; icelles seront plus petites que les deux autres costés du triangle: *mais* elles contiendront vn plus grand *angle*.



Au triangle A B C, sur les extremitez B, & C, du costé B C, soient constituees les deux lignes droictes BD, C D, se rencontrant au poinct D. Ie dis que BD, CD, ensemble, sont plus petites que les costez BA, C A, ensemble; mais l'angle BDC, est plus grand que l'angle BAC.

Car soit prolongee BD, au poinct E, du costé AC: d'autant qu'au triangle B A E, les deux costez BA, AE, [s] sont plus grands que l'autre BE, si l'on adiouste le commun CE, [t] les costez BA, AC, seront plus grands que BE, EC. [s] 20. 1 [t] 4. c. f.

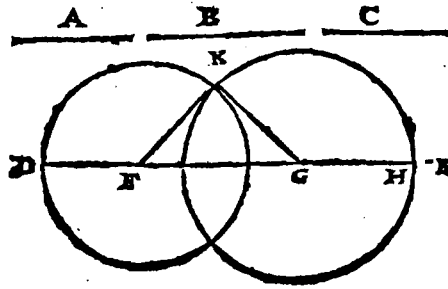
Derechef, d'autant qu'au triangle CED, les deux costez CE, ED, sont [u] plus grands que l'autre CD, si l'on adiouste le commun DB, les deux CE, EB, seront [x] plus grands que CD, DB: mais BA, AC, ont esté monstrez plus grands que BE, EC,: donc BA, AC, seront encore plus grands que BD, CD: ce qui estoit premierement proposé. [u] 20. 1. [x] 4. c. f.

Secondement, d'autant que l'angle externe BDC, est [y] plus grand que l'interne DEC, & le mesme DEC, est plus grand que BAC, pour la mesme cause, à plus forte raison l'angle BDC, sera plus grand que l'angle BAC: ce qui estoit secondement [y] 16. 1.

proposé. Donc si sur l'vn des costez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBLEME 8. PROP. 22.

De trois lignes droictes egales à trois lignes droictes donnees, constituer vn triangle: mais il faut que deux, de quelque façon qu'elles soient prises, soient plus grandes que l'autre; d'autant que de tout triangle, deux costez, de quelque façon qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre.



Soient les trois lignes droictes donnees A, B, C, deux desquelles, prises de quelque façon que l'on voudra, soient plus grandes que l'autre; il faut constituer vn triangle qui ait les trois costez egaux aux trois lignes droictes A, B, C.

Soit prise quelque ligne droite D E, prolongee
* 3. 1. infiniment vers E, & d'icelle soit prise D F, egale à [2] A, & F G, egale à B, finalement G H, egale à C, & du poinct F, comme centre à l'interualle F D, soit

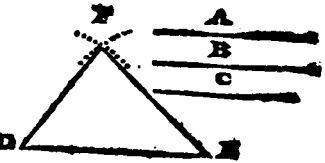
soit descrit le cercle DK: Derechef, du centre G, & de l'interualle GH, soit descrit le cercle HK, & soient menees F K, & G K. Ie dis que le triangle FGK, est fait de trois lignes egales aux trois lignes donnees A, B, C.

Car d'autant que le poinct F, est le centre du cercle DK, la ligne FK, sera egale à FD : mais A, est egale à FD, par la construction: donc F K, & A seront egales entr'elles. Derechef, d'autant que G, est le centre du cercle H K, la ligne G K, sera egale à GH, par la mesme raison : mais la ligne C, est egale à G H, par la construction: donc G K, & C, seront egales, & FG, est prise egale à B: donc les trois lignes droictes KF, FG, GK, sont egales aux trois lignes droictes donnees, A, B, C, &c. Ce qu'il falloit faire.

[a] 15. 1.

[b] 1. comm. s.

PRACTIQVE.



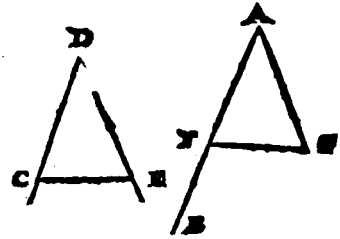
Soit prise D E, egale à quelqu'vne des lignes A, B, C, sçauoir à B, que nous voulons estre la base; puis du poinct E, & à l'internalle de A, soit descrit l'arc F. Semblablement du poinct D, & à l'internalle de C, soit descrit vn autre arc, qui coupe le premier au poinct F, & soient menees les lignes droites, DF, EF, le triangle DFE, sera constitué, duquel les trois costez seront egaux aux trois lignes donnees A, B, C.

PROBLEME 9. PROPOSIT. 23.

A vne ligne droicte donnee, & à vn

poinct donné en icelle, constituer vn angle rectiligne, egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la droicte ligne donnee A B, & le poinct A, donné en icelle; & l'angle rectiligne donné C DE, il faut à la



ligne A B, & au poinct A, en icelle constituer vn angle rectiligne egal, à l'angle rectiligne donné.

Soient pris les poincts contingens C & E, en l'vne & l'autre ligne DC DE; & soit menee C E: puis de trois lignes droictes egales aux trois D C, C E, E D, [c] soit constitué le triangle A FG, de sorte que A F, soit posee egale à DC, A G, à DE, & F G, à C E. D'autant donc que les deux costez A F, AG, du triangle AFG, sont egaux aux deux D C, DE, du triangle DCE, chacun au sien, & la base FG, egale à la base CE; l'angle FAG, sera [d] egal à l'angle C D E. Donc à la ligne donnee A B, & au poinct donné en icelle A, nous auons constitué vn angle rectiligne, egal à l'angle rectiligne donné CDE. Ce qu'il falloit faire.

c 22. 1.

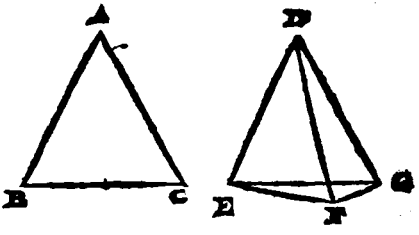
d 8. 1.

THEOREME 15. PROP. 24.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle contenu d'iceux costez egaux, plus grand que l'angle: ils auront la base

plus grande que la baſe.

Soient les deux triangles ABC, DEF, ayans les deux coſtez AB, AC, egaux aux deux DE, DF, chacun au ſien, ſçauoir AB,



egal à DE, & AC, à DF: mais l'angle A, plus grand que l'angle EDF. Ie dis que la baſe B C, ſera plus grande que la baſe EF. Car puis que l'angle A, eſt plus grand que EDF, à la ligne ED, & au poinct D, en icelle, ſoit conſtitué l'angle [e] EDG, egal à l'angle A, & ſoit priſe DG, egale à vne des deux AC, ou DF, & ſoient menees EG, & FG: D'autant donc que les triangles ABC, EDG, ont les deux coſtez AB, AC, egaux aux deux DE, DG, chacun au ſien, & l'angle A, egal à l'angle EDG, contenu d'iceux coſtez egaux, [f] la baſe BC, ſera egale à la baſe EG. Derechef, d'autant que BG, eſt egale à DF, le triangle DGF, eſt Iſoſcele: & partant [g] les deux angles DGF, DFG, ſur la baſe ſeront egaux: mais l'angle DGF, [h] eſt plus grand que l'angle EGF,: donc DFG, ſon egal, ſera auſſi plus grand que EGF, & partant le tout EFG, encore plus grãd que EFG. Dõc au triãgle EFG, le coſté EG, qui ſouſtient le plus grand angle EFG, ſera plus grand que EF, qui ſouſtient le plus petit EGF; mais BC, eſt monſtree egale à EG; donc BC, ſera auſſi plus grande que EF.

e 23. 1.

f 5. 1.

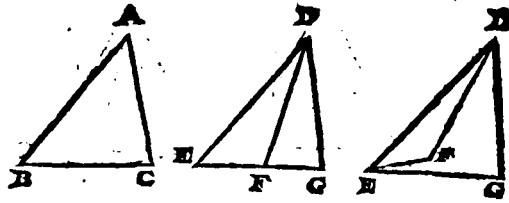
g 9. c. 5.

h 19. 1.

Secondement, que la baſe, EG, tombe ſur EF, [i] elle ſera egale à la baſe BC, comme auparauant,

i 4. 1.

Mais EG, est plus grande que FE, le tout que sa
k 9.8.f. partie : donc BC, [k] sera aussi plus grande que EF.

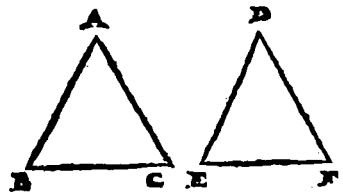


Finalement, que EG, tombe au dessous de EF: d'autant que les deux costez DG, EG, [l] sont plus
l 21. 1. grands que les deux DF, FE, & DF, est faict egal à DG, [m] ostant DG, DF, egales, demeurera EF, plus
m 3.com.f. petite EG, ou BC, que nous auons monstree egale à EG. Donc si deux triangles, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOREME 16. PROP. 25.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien; & qu'ils ayent la base plus grande que la base, ils auront l'angle contenu d'icelles lignes droictes egales, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC, DEF, ayans les deux costez AB, AC, egaux aux deux DE, DF, chacun au sien:



mais la base BC, plus grande que la base EF. Ie dis

que l'angle A, ſera plus grand que l'angle D.

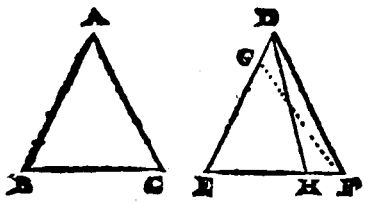
Car ſi A, n'eſtoit plus grand, il ſeroit ou egal, ou plus petit. Si egal, les coſtez A B, A C, eſtans egaux aux deux DE, DF, chacun au ſien[n] la baſe BC, ſeroit egale à EF, ce qui eſt abſurde, car BC, eſt poſee plus grande. Si plus petit, AB, AC, eſtans egaux à DE, DF, chacun au ſien, BC, ſeroit[o] plus petite que EF, ce qui eſt plus abſurde, car elle eſt plus grande par l'hypotheſe. Donc puis qu'il ne peut eſtre egal ny plus petit, il ſera plus grand. Donc ſi deux triangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

n 4. 1.

o 24. 1.

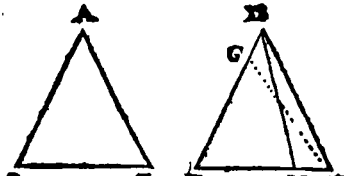
THEOREME 17. PROP. 26.

Si deux triangles ont deux angles egaux à deux angles, chacun au ſien, & vn coſté egal à vn coſté; ſçauoir eſt, ou celuy qui eſt adjacent à iceux angles egaux, ou bien celuy qui ſouſtiẽt vn d'iceux angles egaux, ils auront les autres coſtez egaux aux autres coſtez, chacun au ſien, & l'autre angle egal à l'autre angle.



Soient les deux triangles ABC, DEF, ayans les deux angles B, & C, egaux aux deux angles E, & DFE, chacun au ſié, ſçauoir B, egal à E, & C, egal à DFE: & ſoit premierement le coſté BC, adjacent aux angles B, & C,

egal à EF, adjacent aux angles F, & DFE. Ie dis que les autres costez AB, AC, sont egaux aux autres costez DE, DF, chacun au sien : sçauoir AB, à DE, & AC, à DF, lesquels soustendent les angles egaux, & que l'autre angle, sçauoir, A, est egal à l'autre angle D.



Car si AB, n'est egal à DE, l'vn d'iceux sera plus grand ; soit donc DE, plus grand, s'il est possible, duquel soit retranché GE, p egal à AB, & soit menee GF. D'autant que les deux costez AB, BC, du triangle ABC, sont egaux aux deux GE, EF, du triangle GEF, chacun au sien, & l'angle B, egal à l'angle E, par l'hypothese, la base q GF, sera egale à la base AC, & tout le triangle GEF, egal à tout le triangle ABC, & l'angle GFE, egal à l'angle C: mais l'angle DFE, est egal à l'angle C, par l'hypothese ; donc l'angle GFE, sera pareillement egal à l'angle DFE, la partie à son tout, ce qui est absurde : donc le costé AB, n'est pas inegal à DE. Donc puis que les deux costez AB, BC, sont egaux aux deux DE, EF, chacun au sien, & les angles B, & E, egaux contenus d'iceux costez, la base r AC, sera egale à la base DF, & les autres angles A, & D, egaux: ce qui estoit proposé.

p 3. I.

q 4. prem.

r 4. I.

Secondement, soient les costez AB, DE, egaux, soustendans les angles egaux C, & DFE. Ie dis derechef que les autres costez AC, CB, sont egaux aux autres costez DF, FE, chacun au sien BC, à EF,

& AC, à DF, & l'autre angle A, egal à l'autre angle D. Car ſi BC, n'eſt egal à EF, ſoit l'vn d'iceux ſçauoir EF, *plus* grand, duquel ſoit pris EH, egale à BC, & menee DH. 3. *Prem.*

D'autant donc que les deux coſtez AB, BC ſont egaux aux deux DE, EH, & les angles B, & E, contenus d'iceux, ſont poſez egaux, la baſe eſt egale à la baſe, & l'angle DHE, egal à l'angle C, mais l'angle DFE, eſt poſé egal à l'angle C. Donc l'angle DHE, ſera egal au meſme angle DFE, l'externe à ſon interne & oppoſé; ce qui eſt abſurde: donc BC, n'eſt inegal à EF. Donc par la 4. Prop. de ce liure, l'on colligera comme auparauant, que les deux autres coſtez ſont egaux aux deux autres, & l'autre angle egal à l'autre angle. Donc ſi deux triangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. 4. 1. 16. 1.

COROLLAIRE.

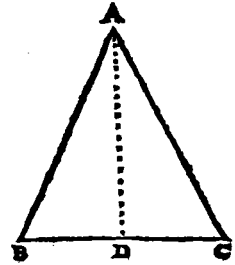
Il eſt facile à colliger de cette Propoſition, que tout le triangle eſt auſſi egal à tout le triangle: car en conſequence que les deux coſtez AB, BC, ſont egaux aux deux DE, EF, chacun au ſien contenant iceux angles egaux, tout le triangle eſt auſſi egal à tout le triangle. Ce qu'auions deſia demonſtré.

En ſuitte de cette Propoſition nous monſtrerons les deux Theorémes ſuyuans, dont le premier eſt tel.

Au triangle Equilateral, ou Iſoſcele, la ligne droicte menee de l'angle contenu des deux coſtez egaux, & diuiſant l'angle ou la baſe en deux parties egales, icelle ligne eſt perpendiculaire à la baſe: & ſi elle diuiſe l'angle en deux parties egales,

elle coupera pareillement la baſe en deux egalement. Mais ſi elle coupe la baſe en deux parties egales, elle diuiſera ſemblablement l'angle en deux parties egales, & au contraire, la ligne menee perpendiculaire à la baſe, diuiſe, & la baſe & l'angle en deux parties egales.

Soit le triangle ABC, duquel les deux coſtez, AB, AC, ſoient egaux, & que l'angle A, ſoit premierement diuiſé en deux egalement, par la ligne droite AD, ie dis qu'icelle AD, eſt perpendiculaire à la baſe BC, *& qu'elle coupe la baſe* BC, *en deux egalement: car puis que AB, eſt egale à* AC, *& à* AD, *commune, les deux coſtez* BA, AD, *ſeront egaux aux deux* CA, AD, *& l'angle* BAD, *egal à l'angle* CAD, x *la baſe* BD, *ſera egale à la baſe* CD, *& les angles au*



x 4. I.

poinct D, egaux, & partant droits.

Secondement, que AD, diuiſe la baſe BC, en deux parties egales. Ie dis que AD, *eſt perpendiculaire à* CB, *& qu'elle diuiſe l'angle* BAC, *en deux angles egaux: car puis que* BD, *eſt egale à* CD, *& AD, commune, les deux coſtez* BD, DA, *ſeront egaux aux deux* CD, DA, *& la baſe* AB, *eſt egale à la baſe* AC, *par l'hypotheſe, les angles au poinct* D, y *ſeront egaux, & partant droits, & z les angles au poinct A, auſſi egaux.*

y 8. I.
z Coroll. 8. I.

Tiercement, ſoit AD, *perpendiculaire à* BC. *Ie dis que la baſe* BC, *& l'angle* A, *ſont diuiſez en deux egalement: car les angles* B *&* C, *ſur la baſe* BC,

ſont egaux, & les deux angles au poinct D, *egaux, puis que* AD, *eſt perpendiculaire : Donc puis que les deux angles* B *&* D, *du triangle* ABD, *ſont egaux aux deux* D *&* C, *du triangle* ADC, *chacun au ſien, le coſté* AD, *oppoſé aux angles egaux* B, *&* C, *commun, les* [a] *autres coſtez* BD, CD, *ſeront egaux, & les autres angles au poinct* A, *egaux. Ce qu'il falloit demonſtrer.* a 26. 1.

L'AVTRE THEOREME EST TEL.

Le triangle, auquel vne ligne droicte menee perpendiculairement d'vn des angles ſur la baſe, diuiſe la baſe ou l'angle en deux egalement, a les deux coſtez contenans ledit angle, egaux : & ſi la baſe eſt diuiſee en deux parties egales, l'angle ſera ſemblablement diuiſé en deux parties egales: mais ſi l'angle eſt diuiſé en deux parties egales, la baſe ſera pareillement diuiſee en deux parties egales.

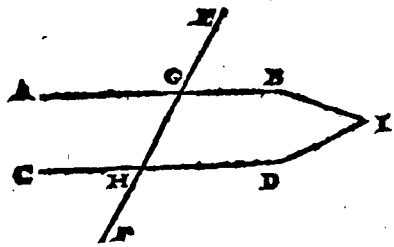
Au ſuſdit triangle ABC, *ſoit* AD, *perpendiculaire à* BC, *& qu'elle diuiſe premierement la baſe* BC, *en deux egalement. Ie dis que les coſtez* AB, AC, *ſont egaux, & les angles au poinct* A, *egaux : car d'autant que les deux coſtez* BD, DA, *ſont egaux aux deux* CD, DA, *et contiennent angles egaux, ſçauoir droits : les baſes* [b] AB, AC, *ſeront egales : et les angles au poinct* A, *egaux : ce qui eſtoit premierement propoſé.* b 4. Prem.

Secondement, que la perpendiculaire AD, *coupe l'angle* A, *en deux egalement. Ie dis que les coſtez* AB, AC, *ſont egaux, &* BD, CD, *auſſi egales: car puis que les deux angles* D *&* A, *du triangle* ABD, *ſont egaux aux* [illegible] D *&* A, *du triangle* ACD, *&* *le*

b 26. I. *coſté* A D, *adjacent à iceux, eſt commun* : b *les coſtez* AB, AC, *& les coſtez* BD, CD, *ſeront pareillement egaux. Ce qui eſtoit ſecondement propoſé.*

THEOREME 18. PROP. 27.

Si vne ligne droicte tombant ſur deux autres lignes droictes, faict les angles alternes egaux entr'eux: icelles lignes droictes ſeront paralleles entr'elles.



Que la ligne droicte E F, tombant ſur les deux lignes droictes A B, C D, faſſe les angles alternes AGH, GHD, egaux entr'eux. Ie dis que AB, CD, ſont paralleles.

Car ſi elles ne ſont paralleles, eſtans prolongees infiniment de part & d'autre, elles ſe rencontreront de la part de AC, ou de BD, autrement elles ſeront paralleles, ſelon la definition des paralleles: qu'elles ſe rencontrent donc, s'il eſt poſſible, de la part de BD, comme au poinct I: par ainſi GIH, ſera vn triangle, duquel d l'angle externe A G H, ſera plus grand que l'interne & oppoſé G H D, ce qui eſt abſurde: car A G H, eſt egal à G H D, par l'hypotheſe: Donc AB, CD ne ſe rencontreront, & c partant ſeront paralleles. Semblalement, l'on demonſtrera qu'elles ne ſe peuuent rencontrer de

c 16. I.

d 35. *def.*

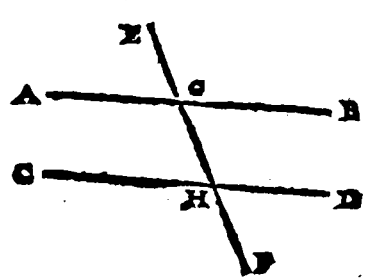
la part de A C. Donc si vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 19. PROPO. 28.

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes, faict l'angle externe egal à l'interne & oppose & de mesme part; ou les internes, & de mesme part, egaux à deux droicts: icelles lignes droictes seront paralleles entr'elles.

Que la ligne droicte E F, tombant sur les lignes droictes A B, C D, fasse premierement l'angle externe A G E, egal à son interne & oppose, de mesme part G H C. Ie dis que A B, C D, sont paralleles entr'elles.

Car d'autant que l'angle G H C, est egal à l'angle E G A, par l'hypothese, & que l'angle B G H, [f] est egal au mesme angle E G A, estans tous deux opposez au sommet G, les deux B G H, & G H C, lesquels sont alternes & opposez, [g] seront aussi egaux entr'eux; partant [g] A B, C D, seront paralleles entr'elles. [f] 15. p. [g] 1. c. f. [h] 27. prem.



Secondement, que E F, tombant sur A B, C D, fasse les angles internes, & de mes-

me part ſçauoir AGH, & CHG, egaux à deux droicts: Ie dis que AB, CD, ſont auſſi paralleles: car puis que AGE, AGH, ſont[h] egaux à deux droicts, & que les internes AGH, & CHG, ſont poſez egaux à 2. droits, les angles AGE, AGH, ſeront egaux aux deux AGH, CHG: oſtans donc le commun AGH, demeurera AGE, externe, egal[i] à ſon interne & oppoſé de meſme part, GHC: donc AB, CD, ſeront paralleles, par la premiere partie de cette Propoſition: partant ſi vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

h 13. *prem.*

i 3. 6. *f.*

THEOREME 20. PROP. 29.

Si vne ligne droicte, tombe ſur deux lignes droictes paralleles; elle fera les angles alternes egaux entr'eux, & l'externe egal à ſon interne & oppoſé, & de meſme part; & les deux internes & de meſme part, egaux à deux droicts.

Que la ligne droicte EF, tombe ſur les deux paralleles AB, CD, (voyez la figure ſuyuante) Ie dis premierement que les angles alternes AGH, DHG, ſont egaux entr'eux.

Car s'ils ne ſont egaux, ſoit l'vn d'iceux, ſçauoir AGH, plus grand. D'autant donc que l'angle AGH, eſt plus grand que l'angle DHG, ſi l'on adiouſte le commun BGH, [i] les deux AGH, BHG, ſeront plus grands que les deux BGH, DGH, mais les deux AGH, BGH, [k] ſont egaux à deux droicts; donc BGH, DHG, ſeront plus petits que deux droicts; partant AB, CD, ne ſeront

i 4 *com. f.*

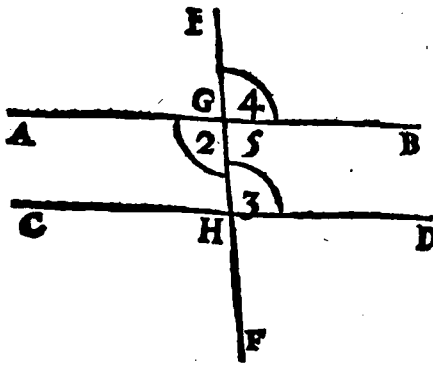
k 13. 1.

paralleles, [l] ce qui eſt abſurde : car elles ſont poſees paralleles ; Donc l'angle A G H, n'eſt plus grand que D H G, partant egal. S'il eſtoit dict eſtre *plus petit*, il en arriueroit la meſme abſurdité. [l] 11. com. ſc.

Secondement: Ie dis que l'angle externe E G B, eſt egal à ſon interne & oppoſé de meſme part, G H D. Car d'autant que l'angle G H D, eſt monſtré egal à l'angle A G H, & que l'angle E G B, [m] eſt egal au meſme angle A G H, les angles E G B, & G H D, [n] ſeront egaux entr'eux ; ainſi l'on monſtrera que E G A, eſt egal à G H C. [m] 15. Pre. [n] 1. 6. ſ.

Tiercement : Ie dis, que les deux angles internes & de meſme part B G H, G H D, ſont egaux à deux droicts.

Car puis que l'angle externe E G B, eſt monſtré egal à G H D, ſi on adiouſte le commun B G H, [o] les [o] 3. 6. ſ.



deux angles B G H, G H D, ſeront egaux aux deux E G B, B G H, [p] mais E G B, B G H, ſont egaux à deux droicts : donc B G H, G H D, ſeront auſſi egaux à deux droicts : par meſme raiſon les deux A G H, [p] 13. p.

GHC, seront monstrez egaux à deux droicts: donc si vne ligne droicte tombe, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Autrement soient AB, & CD, paralleles: Ie dis que les angles alternes marquez par 2. & 3. sont egaux entr'eux: car s'il n'est ainsi, l'vn d'iceux seroit plus grand: soit donc 2. plus grand, s'il est possible: parquoy adioustant l'angle 5. les
13. I. deux 5. & 3. seront moindres que 5. & 2. mais 5. & 2. vallent deux droicts: donc 5. & 3. seront moindres que deux droicts: partant AB, CD, ne seront paralleles, ce qui est contre l'hypothese: donc 2. est egal à 3.

Secondement, l'angle externe 4. est egal à l'interne & oppose de mesme part 3. car 4. est egal à
15. I. 2. & 3. est monstré egal à 2. Donc 4. sera egal à 3.
1. com. s. l'externe à l'interne.

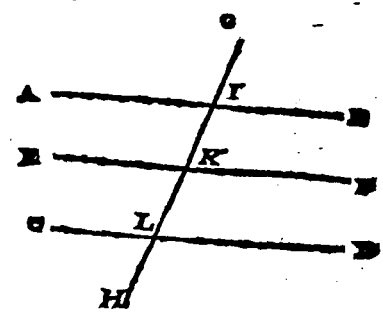
Finalement, les deux internes de mesme part, 5. & 3. sont egaux à deux droicts: car puis que 4. est monstré egal à 3. si on adiouste 5. à chacun, les
13. I. deux 3. & 5. seront egaux aux deux 4. & 5. mais 4. & 5. sont egaux à deux droicts: donc 5. & 3. seront aussi egaux à deux droicts. Ce qu'il falloit demonstrer.

Il faut entendre que les characteres posez aux angles, ne sont pris pour nombres: mais seulement pour denoter les angles au lieu de trois lettres, & ainsi l'on pourroit faire beaucoup de demonstrations plus briefues, posant vn charactere pour chacun angle, & non trois lettres de l'alphabet, là où il sera plus commode.

THEOREME 21. PROPO. 30.

Les lignes *droictes*, paralleles à vne meſme ligne droicte, ſont auſſi paralleles entr'elles.

Que chacune des lignes droictes AB, CD, ſoit parallele à la droicte EF. Ie dis qu'elles ſont paralleles entr'elles.



Car ſoit menee GH, coupant icelles aux poincts I, K, L. D'autant que la droicte ligne GH, tombe ſur les paralleles AB, EF, l'angle AIK, ſera egal [q] à l'alterne FKI. Derechef, d'autant que GH, tombe ſur les paralleles CD, EF, l'angle DLK, ſera egal à l'angle IKF, l'interne à l'externe, ou l'externe à l'interne & oppoſé de meſme part: mais AIK, eſt egal au meſme IKF: dõc AIK, [r] & DLK, [r] ſeront egaux entr'eux, leſquels eſtans alternes, [t] des lignes AB, CD, ſeront paralleles entr'elles. Donc les lignes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[q] 29. 1.
[r] 11. *com.*
[t] 27. 1.

SCHOLIE.

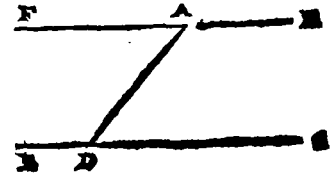
Que ſi quelqu'vn dit que AI, BI, ſont paralleles à EF, & toutefois ne ſont paralleles entr'elles. Il faut reſpondre que AI, & BI ne ſont pas deux li-

gnes, mais seulement les deux parties d'vne mesme ligne. Car il faut entendre que toutes paralleles se prolongent infiniment: mais il appert que AI, rencontre BI, estant prolongee.

PROBLEME 10. PROPOSIT. 31.

D'vn poinct donné mener vne ligne droicte, parallele à vne ligne droicte donnee.

Soit le poinct donné A, duquel il faut mener vne ligne droicte, parallele à la ligne droicte donnee BC. Soit pris le poinct contingent D, en ligne dõnee BC, & soit menee AD, faisant vn



angle quelconque ADC, auec BC, au poinct
I 23. I. A. de la ligne droicte donnee AD, soit constitué l'angle rectiligne FAD, egal à l'angle rectiligne donné ADC, & soit prolongee directement FA, vers E. D'autant que les deux anxles alternes FAD,
II 27. I. CDA, sont egaux par la construction, la ligne AF, sera parallele à BC, & menée du poinct donné A. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

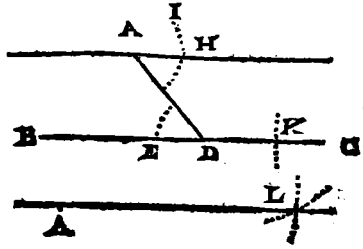
Or le poinct doit estre assigné en tel lieu que la ligne droite proposee estant prolongee directement, ne rencontre iceluy. Ce que l'on peut colliger manifestement de la construction du mesme Probléme.

Car

Car du poinct donné, il faut mener vne ligne faisant quelque angle auec icelle ligne donnee; ce qui ne se pourroit faire, si le poinct estoit posé directement auec icelle.

PRACTIQVE.

La practique de cette Proposition se pourra faire facilement en cette maniere. Soit le poinct A, duquel il faut mener vne ligne parallele à B C. Soit menee A D, faisant angle auec B C, puis des



poincts A & D, comme centres & de mesme interualle, soient descrits les arcs E F, G I, (desorte toutefois que l'interualle n'excede D A, ny D B,) & soit pris G H, egal à E F, & menee A H, elle x *sera parallele à B C.* x 27. 1.

Autrement, en la ligne B C, soit pris le poinct contingent K, & du poinct A, comme centre, & à l'interualle B K, soit descrit l'arc L, puis du poinct K, comme centre, et de l'interualle A B, soit coupé iceluy arc, par vn autre arc, au poinct L, & soit menee la ligne droicte A L, icelle sera parallele à B C. G, et I, manquent en la figure.

THEOREME 22. PROP. 32.

De tout triangle, l'vn des costez estant *prolongé*, l'angle externe est egal aux

deux internes & opposez ; & les trois angles internes de tout triangle, sont egaux à deux droicts.

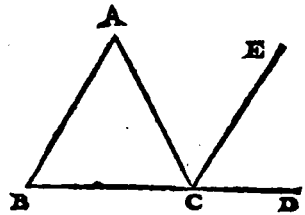
Soit le triangle A B C, duquel vn des costez, sçauoir B C, soit prolongé au poinct D. Ie dis premierement que l'angle externe A C D, est egal aux deux internes & opposez A & B : car du poinct C, soit menee [y] C E, parallele à B A.

y. 31. prem.

D'autant que A C, tombe sur les paralleles A B, C E, les angles alternes [z] A, & A C E, sont egaux : derechef d'autant que B D, tombe sur les paralleles A B, C E, les angles B, & E C D, seront [a] egaux, l'externe à l'interne, & opposé de mesme part : partant les deux A C E, E C D, c'est à dire, le tout A C D, sera egal aux deux A, & B, l'externe, aux deux internes & opposez : ce qui estoit proposé.

z 29. pre.

a. 29. pre.



Secondement, ie dis que les trois angles internes du mesme triangle A B C, sçauoir A, B, & A C B, sont egaux à deux droicts.

Car d'autant que A, & B, sont egaux à l'angle A C D, comme nous auons monstré, si l'on adiouste l'angle commun A C B, les trois [b] A, B, & A C B, seront egaux aux deux A C B, & A C D, mais les deux A C B, A C D, sont egaux à deux [c] droicts : donc les trois A, B, &, A C B, sont egaux à deux droicts : donc de tout triangle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

b 2. c. s.

c 13. prem.

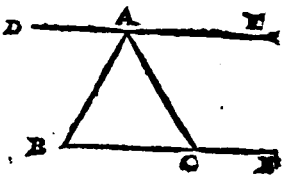
SCHOLIE.

Puis qu'il a esté demonstré par la 16. Proposition, que l'angle externe de tout triangle est plus grand que chacun des internes & opposez; & icy est monstré que le mesme externe est egal aux deux internes & opposez ensemble: il est manifeste que, lequel que l'on voudra des deux internes & opposez, est excedé de l'angle externe, de la quantité de l'autre angle interne & opposé. Comme au triangle precedent, l'angle A, interne & opposé, est excedé par l'externe ACD, de la quantité de l'autre angle interne et opposé B, & l'angle interne B, est excedé de l'externe ACD, de la quantité de l'angle A, d'autant que l'angle ACD, externe, a esté monstré egal aux deux A & B. Derechef, d'autant qu'il est demonstré par la 17. Prop. que deux angles de quelconque triangle, en quelque façon qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits: et icy que tous les trois sont egaux à deux droits, il est manifeste que deux des angles defaillent de deux droits, de la quantité de l'autre angle du triangle. Comme au mesme triangle, les deux angles A, & B, defaillent de deux droits de la quantité de l'angle ACB.

Or les premiers de tous ceux qui ont monstré que tout triangle auoit les trois angles egaux à deux droits, comme rapporte Eudemus, ont esté les Pythagoriciens, comme s'ensuit. Soit le triangle ABC, & par le poinct A, soit [d] menee la ligne DE, parallele à BC. d 31. prop.

D'autant que les angles alternes DAB, & ABC, sont egaux, si l'on adiouste les angles egaux

EAC, & ACB, (car ceux-cy sont aussi alternes,) les deux angles f2. c. f. *DAB, EAC, seront egaux aux deux ABC, ACB.*



Donc si l'on adiouste l'angle commun BAC, les trois angles g 2. c. f. *DAB, BAC, CAE,* [g] *seront egaux aux trois angles ABC, BAC, & BCA: mais les trois* h 13. 1. *DAB, BAC, CAE,* [h] *sont egaux à deux droicts. Donc les trois internes du triangle ABC, sont aussi egaux à deux droicts. Ce qui est proposé.*

De cecy nous conclurons facilement, si le costé BC, est prolongé à F, que l'angle externe ACF, est egal aux deux internes et opposez ABC, BAC. Car d'autant que les trois angles ABC, BAC, ACB, sont egaux à deux droits, comme nous auons monstré. i 13. 1. *Mais les* [i] *deux ACB, ACF, sont aussi egaux à deux droits: donc ces trois là sont egaux à ces deux-cy; donc en ostant le commun* ACB, *demeurera l'angle* k 3. c. f. [k] *externe* ACF, *egal aux internes & opposez* B, *et* BAC.

La premiere partie de la Proposition d'Euclide pourra aussi estre facilement conuertie. Sçauoir est que si d'vn angle d'vn triangle l'on mene vne ligne droite, desorte que l'angle externe soit egal aux deux internes & opposez, icelle ligne droite, & le costé du triangle, se rencontreront directement. Car du poinct C, soit menee CD, & que l'angle ACD, *soit egal aux deux internes* B, *&* A. *Ie dis que* BC, CD, *se rencontrent directement.*

Car puis que l'angle ACD, *est egal aux deux,* B, *et*

A, ſi l'on adiouſte le commun ACB, les deux angles [l] ACB, & ACD, ſeront egaux aux trois A, B, & ACB, mais ces trois là ſont [m] egaux à deux droicts: donc ces deux-cy ACB, ACD, ſeront auſſi egaux à deux droicts: [n] partant BC, CD, ſeront conſtituees directement. l 2. c. ſ. m 32. 1. n 14. 1.

Sçauoir combien vallent d'angles droicts, tous les angles de quelconque figure rectiligne.

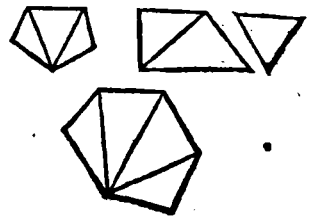
De cette 32. Propoſit. nous colligerons en deux manieres, à combien d'angles droits ſont egaux, tous les angles internes, de chaque figure rectiligne. La premiere maniere ſera telle que s'enſuit.

Tous les angles, de quelque figure rectiligne que ce ſoit, ſont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle eſt en nombre entre les figures rectilignes.

C'eſt à dire, que tous les angles de la premiere figure, qui eſt le triangle, ſont egaux à deux fois vn droit: c'eſt à dire à deux droits, comme il eſt demonſtré. [o] *Mais les angles de la ſeconde figure rectiligne, qui eſt la figure de quatre coſtez, ſont egaux à deux fois deux droits, c'eſt à dire, à quatre droits. Les angles de la troiſieſme figure rectiligne, qui eſt le Pentagone ſont egaux à trois fois deux droicts, c'eſt à dire à ſix droits: & ainſi de ſuitte.* o 32. 1.

Or vne figure rectiligne tient tel ordre entre les figures rectilignes, que denote le nombre de ſes coſtez ou de ſes angles, apres en auoir retranché deux: d'autant que deux lignes droites n'encloſt point de ſuperficie, & partant ne conſtituent point de figure, parquoy il faut à tout le moins trois lignes

droites, pour constituer vne figure rectiligne, desquelles sera fait le triãgle, qui a trois costez & autant d'angles, desquels deux estans ostez, restera vn. Ainsi la figure de 20. costez ou 20. angles, sera la 18. entre les figures rectilignes: car deux estans ostés de 20. reste 18. & faut entendre le mesme des autres figures. Partant la figure contenuë de 20. costez, puis qu'elle est la 18. aura 20. angles egaux à 36. angles droits: sçauoir est à deux fois 18. droits, comme nous auons dit premierement. Semblablement, tous les 10. angles de la figure rectiligne cõtenue de 10. costez, seront egaux à 16. droits, puis qu'vne telle figure est la 8. entre les figures rectilignes. Or cecy sera ainsi demonstré. Toute figure rectiligne peut estre diuisee en autant de triangles, qu'elle est en nombre entre les figures rectilignes, ou qu'elle a d'angles ou de costez, deux estans ostez.

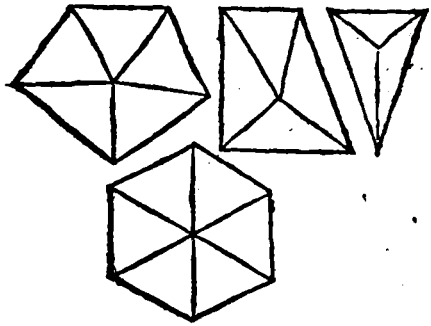


Car de chacun angle d'icelle l'on peut mener des lignes droites à tous les angles opposez, mais aux deux angles prochains l'on n'en peut pas mener. Parquoy la figure sera diuisee en autant de triangles, qu'icelle a d'angles, deux estans ostez. Ainsi, l'on voit que le triangle ne peut estre diuisé en autres triangles; mais la figure quadrilatere peut estre diuisee en deux triangles, le Pentagone ou figure de cinq costez, peut estre diuisee en trois, l'Exagone en 4. &c. Donc puis que les angles de ces triangles, constituent tous les angles de la figure

rectiligne proposée, & que tous les angles de quelconque triangle sont egaux à deux droits; il est euident que tous les angles de quelque figure rectiligne que ce soit, sont egaux à deux fois autant de droits qu'il y a de triãgles en icelle, c'est à dire, quãtiesme elle est entre les figures rectilignes. Ce qui se voit manifestement aux figures proposées.

La seconde maniere, par laquelle l'on peut sçauoir la valeur des angles de quelconque figure rectiligne, est telle.

Tous les angles d'vne figure rectiligne, quelconque elle soit, sont egaux à deux fois autant de droicts, quatre estans ostez, qu'elle a de costez, ou d'angles.



C'est à dire, que les angles de quelconque triangle sont egaux à trois fois deux droits, quatre estans ostez, c'est à sçauoir à deux droits.

Ainsi les angles de la figure contenue de 20. costez, seront egaux à 20. fois deux droits, 4. estans ostez: c'est à dire à 36. angles droits, &c. Et la de-

monſtration en eſt telle. Si de quelconque poinct pris en la figure, l'on mene des lignes droites à tous les angles, l'on conſtituera autant de triangles que ladite figure a de coſtez ou d'angles: puis donc que les
p 32. 1. *angles de quelconque triangle p ſont egaux à deux droicts, tous les angles d'iceux triangles ſeront egaux à deux fois autant d'angles droits, que la figure a de coſtez.*

Mais les angles des meſmes triangles, leſquels ſont conſtituez à l'entour du poinct pris au dedans de la figure, n'appartiennent pas aux angles de la figure rectiligne propoſee, comme il appert. Parquoy ſi ces angles là ſont oſtez, les autres angles des triangles, conſtituans les angles de la figure propoſee, ſeront pareillement egaux à deux fois autant de droits, ceux qui ſont conſtituez autour du poinct pris au dedans de la figure eſtans oſtez, que la figure a d'angles ou de coſtez.

Or tous ces angles là, conſtituez à l'entour de ce poinct pris en la figure, en quelque nombre qu'ils ſoient, ſont egaux à 4. droits tant ſeulement, comme nous auons colligé de la 15. Propo. Partant tous les angles de quelconque figure rectiligne, ſont egaux à deux fois autant de droits, 4. eſtans oſtez, qu'icelle figure contient d'angles ou de coſtez. Ce qui eſt propoſé.

Or de cette maniere ainſi demonſtree, il eſt manifeſte que ſi chacun des coſtez, de quelconque figure rectiligne, eſt prolongé d'ordre, vers meſme part, tous les angles externes ſont egaux



à quatre droits. Car vn chacun externe auec son interne de suitte, q sont egaux à deux droits : & partant tous les internes ensemble, auec tous les externes, sont egaux à deux fois autant de droits, que la figure a d'angles ou de costez. Or les internes seulement sont egaux à deux fois, autant de droicts moins 4. comme nous auons monstré. Donc si l'on oste les internes, les exernes demeureront tant seulement egaux à 4. droits, lesquels defaillent des angles internes, afin que les internes & externes ensemble, soient egaux à deux fois autant de droits, qu'il y a de costez à contenir la figure. POUR EXEMPLE: *En tout triangle les angles internes & externes ensemble, sont egaux à 6. angles droits.*

q 13 Prem.

Car puis que les internes sont egaux r à 2. droits, les externes seront seulemẽt egaux à quatre droits. Au quadrilatere, ou figure de quatre costez, les angles externes & internes ensemble, sont egaux à huict droits. Donc, d'autant que les internes seulement sont egaux à quatre droits, comme nous auons monstré, les seuls externes seront aussi eganx à quatre droits.

r 32. Prem.

Au pentagone ou quinqu'angle, c'est à dire, en la figure de cinq costez, ou de cinq angles, les angles internes & externes ensemble, sont egaux à 10. droits. Mais d'autant que les internes sont egaux à 6. droits, comme nous auons demonstré, les angles externes demeureront egaux à quatre droits tant seulement. Toutes lesquelles choses se peuuent voir par les figures cy appoſees. Et faut entendre le meſme en toutes les autres figures.

COROLLAIRE I.

De cette 32. Proposition l'on peut colliger, que les trois angles de quelconque triangle pris ensemble, sont egaux aux trois angles pris ensemble de quelconque autre triangle : d'autant que tant les trois de l'vn, que les trois de l'autre [s] sont egaux à deux angles droicts. Donc si deux angles d'vn triangle sont egaux à deux angles d'vn autre triangle, le troisiéme de l'vn sera aussi egal au 3. de l'autre.

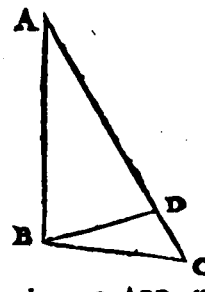
[s] 32. 1.

SCHOLIE.

Clauius adiouste icy, & Henrion apres luy. Et iceux triangles seront equiangles. *Ce qui n'est pas touſiours vray ; car au triangle* ABC, *soit menee la ligne droite* BD, *diuisant le triangle, comment que ce soit, en deux* ABD, BDC : *d'autant que l'angle externe* BDA, [t] *est egal aux deux internes & opposez,* C, *&* CBD, *si on adiouste le commun* ABD, [v] *les deux angles* ABD, ADB, *du triangle* ADB, *seront egaux aux deux* ABC, *et* ACB, *du triangle* ACB, *& l'angle* A, *est cõmun à tous les deux triangles ; et toutefois ces deux triangles* ABC, ABD, *ne sont equiangles, combien que deux angles de l'vn, soient egaux à deux angles de l'autre, & le troisiéme au troisiéme ; puis que chacun des angles de l'vn, n'est egal à chacun des angles de l'autre. Et faudroit qu'il y eust ainsi.*

[t] 32. 1.

[v] 2. com. s.



Donc ſi deux angles d'vn triangle, ſont egaux à deux angles d'vn autre triangle, chacun au ſien, l'autre angle de celuy-là ſera egal à l'autre angle de cettuy-cy, & iceux triangles ſeront equiangles.

COROLLAIRE 2.

Il eſt auſſi euident, qu'en tout triangle Iſoſcele, duquel l'angle contenu des coſtez egaux eſt droit, qu'vn chacun des autres qui ſont ſur la baſe, eſt demy-droit. Car ces deux enſemble conſtituent vn droict : [x] puis que les trois ſont egaux à deux droicts, & que le troiſieſme eſt poſé droict : partant, puis que les deux reſtans ſont egaux entr'eux, vn chacun d'iceux ſera demy-droict. Mais ſi l'angle contenu des coſtez egaux eſt obtus, vn chacun des autres ſera moindre que demy-droict : & les deux enſemble moindres qu'vn droict, ſi finalement l'angle ſuſdict eſt agu, vn chacun des autres ſera plus grand que demy-droict : d'autant que les deux enſemble ſont plus grands qu'vn droict, &c. x 32. 1.

COROLLAIRE 3.

Il eſt pareillement manifeſte, que chacun angle du triangle equilateral, eſt les deux tiers d'vn droit, ou le tiers de deux droicts. Car les deux angles droicts, [y] auſquels ſont egaux les trois angles d'vn triangle equilateral. eſtans diuiſez en trois angles, conſtituent chacun angle, de deux tiers d'vn droict. y 32. 1.

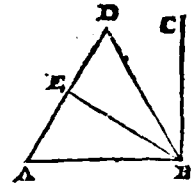
COROLLAIRE 4.

Il eſt auſſi euident, que ſi l'on mene vne ligne

perpendiculaire, d'vn des angles du triangle equilateral, ſur le coſté oppoſé, l'on conſtituera deux triangles Scalenes, vn chacun deſquels aura vn angle droit, adiacent à la perpendiculaire, vn autre ſera les deux tiers d'vn droict, ſçauoir celuy qui eſt auſſi angle, du triangle equilateral : finalement l'autre ſera le tiers d'vn droict.

SCHOLIE.

Du troiſieſme Corollaire on trouuera vne methode, par laquelle l'angle droit peut eſtre diuiſé en trois angles egaux. Car ſoit fait l'angle droit ABC, et



z 11. prem. 2 Coroll. *ſur AB, ſoit* [z] *conſtitué vn triangle equilateral : &*

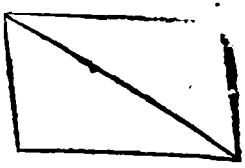
1. 32. 1. *d'autant* [a] *que l'angle* ABD, *fait les deux tiers de l'angle droict ABC, l'angle CBD, ſera la tierce partie du meſme angle droit. Donc,*

b 9. 1. *ſi l'on diuiſe l'angle* [b] *ABD, en deux egalement, par la ligne BE, chacun des 2. angles ABE, & EBD, ſera pareillement la tierce partie d'vn droict : partant, l'angle droit* ABC, *eſt diuiſé en trois angles egaux. Ce qui eſt propoſé.*

THEOREME 23. PROP. 33.

Les lignes droictes, leſquelles conioignent deux lignes droictes egales & paralleles & de meſme part : icelles ſont pareillement egales & paralleles.

Soient A B, CD, egales & paralleles, & que les lignes droictes A D, B C, conioignent icelles de meſme part A D, & B C. Ie dis que les lignes A D, & B C, ſont auſſi egales & paralleles.



Car ſoit menee A C, d'autant que A C, tombe ſur les paralleles A B, D C, [c] les angles B A C, D C A, alternes, ſeront egaux entr'eux. Et d'autant que A B, eſt egale à D C, par l'hypotheſe, & A C, commune, les deux coſtez B A; A C, du triangle B A C, ſont egaux aux deux D C, C A, du triangle D C A, chacun au ſien, & l'angle B A C, egal à l'angle D C A, contenus d'iceux coſtez egaux, la baſe [d] A D, ſera egale à la baſe B C, & tout le triangle A B C, à tout le triangle D C A, & les autres angles aux autres angles, chacun au ſien, ſçauoir D, egal à B, & D A C, egal à B C A, leſquels eſtans alternes [e] les lignes A D, B C, ſeront paralleles: mais elles ſont auſſi monſtrees egales: elles ſeront donc egales & paralleles. Donc les lignes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

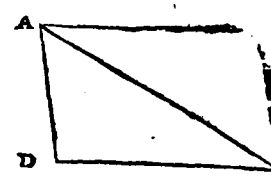
c 29. 1.

d 4. 1.

e 27. 1.

THEOREME 24. PROP. 34.

Les coſtez & les angles oppoſez des figures ou eſpaces parallelogrammes, ſont egaux entr'eux : & le diametre coupe iceux parallelogrammes en deux egalement.



Soit le Parallelogramme A B C D, auquel soit mené le diametre A C. Ie dis que les costez opposez A B, D C, & A D, B C, sont egaux entr'eux: pareillement, que les angles opposez B A D, B C D, & B, & D, sont aussi egaux entr'eux, & que le diametre A C, diuise ledit Parallelogramme en deux egalement, c'est à dire en deux triangles egaux.

Car puis que A B, D C, sont paralleles, & que A C, tombe sur icelles, [g] les angles alternes B A C, D C A, sont egaux entr'eux. Derechef, puis que A D, B C, sont paralleles, les angles alternes B C A, D A C, sont aussi egaux: donc puis que les deux angles B A C, B C A, du triangle A B C, sont egaux, aux deux D A C, D C A, du triangle A D C, chacun au sien, & le costé adjacent à iceux angles egaux, cómun à tous les deux triangles, [h] les deux costez A D, D C, serõt egaux aux deux autres A B, B C, chacun au sien: sçauoir A B. egal à son opposé D C, & A D, egal à B C, opposé, & l'angle B egal à l'angle D: Et d'autant que les deux angles au poinct A, sont monstrez egaux aux deux, au poinct C, l'angle total A, sera egal à son opposé total C: Donc les costez & les angles opposez sont egaux entr'eux.

g 29. 1.

h 26. 1.

Mais d'autant qu'aux triangles A B C, A D C, les deux costez A B, B C, sont egaux aux deux C D, D A, chacun au sien, & les angles D, & B, contenus d'iceux costez sont egaux, comme il a esté monstré: [i] tout le triangle A B C, sera egal à tout le triangle A D C; Partant le diametre diuise

i 4. 1.

le Parallelogramme en deux egalement. Donc les costez & les angles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE. I.

De cette Proposition l'on peut premierement colliger, que toute figure quadrilatere, qui a les costez opposez egaux, est Parallelogramme: car les deux costez AD, DC, estans egaux à AB, BC, chacun au sien, & la base AC, commune, les angles D, & B, seront egaux, & les deux autres aussi egaux aux deux autres, chacun au sien: ainsi tous les angles alternes, qui sont aux poincts A, & C, seront egaux entr'eux. Donc la figure sera Parallelogramme, tous les costez estans paralleles. 8. 1. 4. 1.

COROLLAIRE 2.

Il s'ensuit aussi, que toute figure quadrilatere qui a les angles opposez egaux, est Parallelogramme, comme en la mesme figure precedente, les angles opposez estans egaux, sçauoir A, à C, & B, à D: & par ce qui est monstré à la 32. Propo. les quatre estans egaux à 4. droicts, les deux B, & B C D, seront egaux à deux droicts, semblablement, B, & BAD, seront aussi egaux à deux droicts: Donc tant AB. CD, que AD, BC, seront paralleles: & partant la figure proposee est Parallelogramme, & en arriueroit de mesme si tous les angles estoient droits. 28. 1.

Nous dirons aussi, qu'encore que la Diagonale diuise tout Parallelogramme en deux triangles egaux, il ne s'ensuit pas que toute figure de 4. costez, qui se diuise en deux triangles egaux par la Diagonale, soit Parallelogramme, comme il est 8. 1.

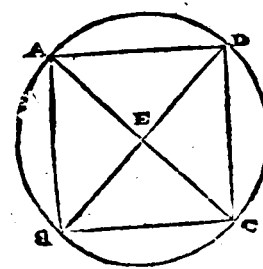
facile à entendre, en menant du poinct A, vers B, vne ligne egale à C B, & du poinct C, vne ligne egale à AB, de mesme part, lesquelles se rencontreront à vn autre poinct, comme il est manifeste par ce qui est demonstré auparauant: de quoy nous n'auons mis de figure à cause de la facilité, &c.

COROLLAIRE 3.

Il s'ensuit aussi, qu'au quarté long & Rhomboide (car il n'y a que 4. sortes de Parallelogrammes, comme nous auons dict) la Diagonale coupe les angles inegalement, à cause de l'inegalité des costez en chacun triangle : Voyez la figure de la page 126.

18.& 19. 1.

Mais au quarré & au Rhombe, ladicte Diagonale coupe les angles en deux egalement, d'autant que les deux costez de l'vn des triangles sont aussi egaux aux deux costez de l'autre, chacun au sien, & l'angle contenu d'iceux egal à l'angle, & comme il appert par ce quarré A B CD, auquel les Diagonales AC, BD, sont aussi egales, & se coupent en deux egalemẽt au poinct E, à cause de l'egalité de tous les angles qui sont aux poincts A, B, C, D, & au poinct E.



4. 1.

6.& 8. 1.

Mais si la figure ABC D, estoit Rhombe, deux angles opposez seroient obtus, & les deux autres agus : parquoy les Diagonales seront inegales, & neantmoins

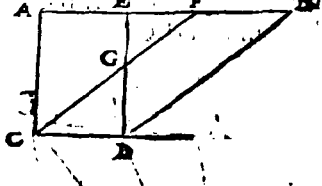
24. 1.

neantmoins se couperont chacune en deux egalement, comme il est facile à entendre de ce que nous auons demonstré, & aussi au quarré long & Rhomboide; & toute figure de 4. costez, en laquelle les Diagonales se coupent en deux egalement, est parallelogramme. Toutes lesquelles choses sont si faciles à demonstrer, entendant les Propositions cy deuant demonstrees, qu'il n'estoit besoin d'en faire mention. 4. 1. 26. 1. 15. & 1.

THEOREME 25. PROP. 35.

Les parallelogrammes constituez sur vne mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient les parallelogrammes ACDE, FCDB, constituez sur mesme base CD: & entre mesmes paralleles AB, CD. Ie dis qu'ils sont egaux entr'eux.



Car d'autant que ACDE, est parallelogramme, [a] AE, est egale à CD: par mesme raison FB, est egale à CD: [b] partant AE, FB, sont egales entr'elles: donc si on adiouste la commune EF, [c] la toute AF, sera egale à la toute EB: [d] mais AC, est aussi egale à ED. Donc les deux costez FA, AC, du triangle FAC, sont egaux aux deux BE, ED, du triangle BED, chacun au sien; & les angles A, & E, contenus d'iceux costez, [e] sont egaux, l'externe à l'interne, ou au contraire: donc la base [f] FC, sera egale à la base BD, & tout le triangle

a 34. 1. b 1. c. f. c 2. c. f. d 34. 1. e 29. Pre. f 4. prem.

FAC, à tout le triangle BED, desquels si on oste le commun triangle EGF, [g] le trapeze AEGC, restera egal au trapeze BFGD, ausquels trapezes, si on adiouste derechef le commun triangle CDG, [h] tout le parallelogramme ACDE, sera egal à tout le parallelogramme BDCF: Donc les parallelogrammes constituez sur mesme base, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

g 3. com. f.

h 2. 6. f.

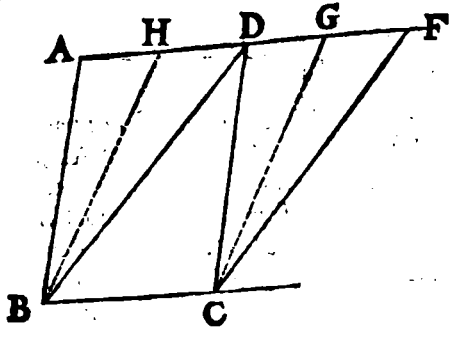
Mais si les parallelogrammes constituez sur mesme base BC, estoient ABCD, & DBCF, comme en cette derniere figure, tant le costé AD, que DF, seroit egal à BC, comme auparauant, & AB, à DC, & l'angle FDC, externe à l'interne & opposé A: parquoy les deux costez FD, DC, estans egaux à DA, AB, chacun au sien, & l'angle FDC, egal à l'angle A, tout le triangle FDC, sera egal au triangle DAB: Donc si on adiouste à chacun le commun triangle BCD, le parallelogramme ABCD, sera egal au parallelogramme DBCF.

34. 1.

29. 1.

4. 1.

2. 6. f.

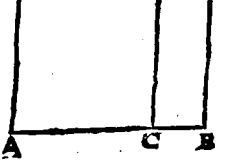


Et finalement, si les parallelogrammes constituez sur la base BC, estoient ABCD, & HBCG,

tant AD, que HG, seroit encore egale à BC: & partant egales entr'elles: donc ostant la commune HD, resteroit DG, egale à AH, & comme auparauant le triangle GDC, sera egal au triangle HAB: Donc si à chacun d'iceux l'on adiouste le commun trapeze HBCD, tout le parallelogramme ABCD, sera egal à tout le parallelogramme HBCG. Ce qu'il falloit demonstrer. 34. 1. 3. com. s. 2. 6. s.

SCHOLIE.

Il faut icy entendre, que quand Euclide dit, que les parallelogrammes constituez sur mesme base, & entre mesmes paralleles sont egaux, qu'ils doiuent estre tellement constituez sur ladite base, qu'iceux parallelogrãmes pris ensẽble, ne puissent faire vn seul parallelogramme, c'est à dire, que la base commune, sur laquelle ils sont constituez, doit estre l'vne des paralleles entre lesquelles ils sont constituez, ou en l'vne d'icelles. Autrement cette Proposition ne seroit vniuerselle, comme il appert par cette figure parallelogramme ABFE, où la ligne CD, estant parallele à AE, BF, les parallelogrammes AD, DB, seroiẽt sur mesme base CD, & entre mémes paralleles AB, EF, & si la base commune CD, ne coupoit pas chacun des costez AB, EF, en deux egalement, comme en cette figure, les parallelogrammes AD, DB, seroient inegaux, & si en deux egalement ils seroient egaux.



Or le Copiste dit, que les parallelogrammes AB, DB, *sont constituez sur mesme base* CD, *& entre mes-*

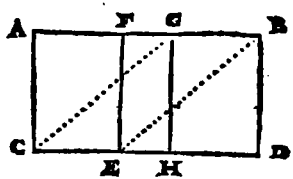
mes paralleles AB, EF; *& toutefois il eſt euident qu'ils ne ſont pas egaux. Ce qui aduient (dit-il) à cauſe de ce que leur baſe commune* CD, *n'eſt pas en l'vne ny l'autre des paralleles* AB, EF. *Mais cet ignorant n'a pas bien entendu ce qu'il a copié, ny ce qu'il veut dire: car l'inegalité de ces deux parallelogrammes* AD, DB, *n'aduient pas (comme il dit) de ce que la baſe commune* CD, *n'eſt pas en l'vne des paralleles ſuſdites: mais bien de ce que* CD, *ne diuiſe pas le total parallelogramme* AF, *en deux egalement, comme nous auons monſtré.*

Il faut donc entendre que leſdits parallelogrammes doiuent eſtre tellement conſtituez ſur meſme baſe, & entre meſmes paralleles, qu'ils ne puiſſent faire vn ſeul parallelogramme, comme font les deux AD, DB, *qui ſont le parallelogramme* AF.

THEOREME 26. PROP. 36.

Les parallelogrammes conſtituez ſur baſes egales, & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr'eux.

Soient les parallelogrammes ACEF, & BGHD, conſtituez ſur baſes egales CE, HD, & entre meſmes paralleles AB, CD. Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.



Car ſoient menees les lignes droictes CG, EB:

34. I. D'autant que GB, eſt egale à HD, & CE, eſt

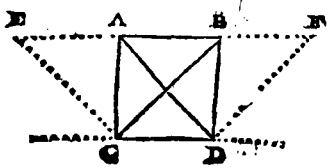
posee egale à la meſme H D, les deux[k] G B, & CE, ſeront egales entr'elles, leſquelles eſtans paralleles par l'hypotheſe, les lignes CG,EB,qui les conioignent[l] ſeront auſſi egales & paralleles, & BGCE,ſera parallelogramme. Partant, le parallelogramme A C E F, ſera egal au parallelogramme GCEB,[m] eſtant ſur meſme baſe CE, & entre meſmes paralleles. Par les meſmes raiſons le parallelogramme GHDB,ſera egal au meſme parallelogramme GCEB, eſtant ſur meſme baſe G B, & *entre* meſmes paralleles. Donc les parallelogrammes ACEF, & DBGH,[n] ſont egaux entr'eux;partant les parallelogrammes conſtituez,&c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

k 1.com.ſ.
l 33. 1.
m 35.1.
n 1. c.ſ.

THEOREME 27. PROP. 37.

Les *triangles* conſtituez ſur meſme baſe,& *entre meſmes* paralleles, ſont egaux entr'eux.

Soient les triangles ACD,BCD,conſtituez ſur meſme baſe CD,& entre meſmes paralleles AB, CD.Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.



Soit menee CE, parallele à D A, o & D F,parallele à CB,rencontrant AB,prolongee de part & d'autre aux poincts E, & F, les figures ADCE,BCDF,ſeront parallelogrãmes, leſquels eſtans conſtituez ſur meſme baſe CD, & entre meſmes paralleles,ſeront egaux[p] entr'eux;mais les diametres A C,B D,

o 31. 1.
p 35. 1.

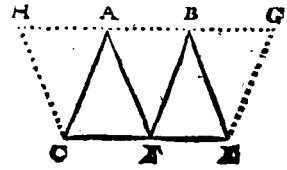
q 34. 1. les diuiſent [q] en deux egalement. Donc leurs moitiez, qui ſont les triangles propoſez A C D,
17. com. f. B C D, [r] ſeront auſſi egaux entr'eux. Donc les triangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 28. PROP. 38.

Les triangles conſtituez ſur baſes egales, & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr'eux.

Soient les triangles A C F, B E F, conſtituez ſur baſes egales C F, F E, & entre meſmes paralleles A B, C E. Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.

Car ſoient menees
f 31. 1. C H, E G, [f] paralleles à F A, F B, rencontrant A B, prolongee de part & d'autre aux poincts H, & G, A F C H, &



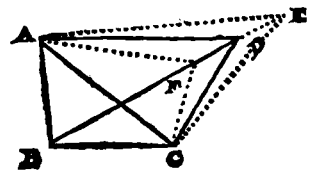
t 36. 1. B F E G, ſeront parallelogrammes, [t] & egaux entr'eux, deſquels les triangles propoſez A C F,
u 34. 2. B F E, [u] ſont les moitiez : partant ces deux triangles
x 7. c. f. [x] ſeront auſſi egaux entr'eux. Donc les triangles conſtituez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 29. PROP. 39.

Les triangles egaux conſtituez ſur meſme baſe, & de meſme part, ſont auſſi entre meſmes paralleles.

Sur la baſe B C, & de meſme part A D, ſoient conſtituez deux triangles egaux A B C, D B C. Ie dis

qu'ils sõt aussi entre mesmes paralleles, c'est à dire, que la ligne droicte, menee de A, à D, est parallele à BC.



Car si AD, n'estoit parallele à BC, l'on en pourroit mener du poinct A, vne parallele à icelle BC, qui passeroit au dessus de AD, ou au dessous: Soit donc menee [y] AF, parallele à BC, si AD, ne luy est parallele, & soit conioincte CF. y 31. pre.

D'autant que AF, BC, sont paralleles, le triangle, FBC, sera egal au triangle [z] ABC, mais le triangle DCB, est egal au mesme triangle ABC, par l'hypothese: donc les triangles [a] FBC, & DCB, seront egaux entr'eux, la partie & le tout: ce qui est absurde. z 37. pre. a1. c.s.

Si l'on dict que la ligne parallele à BC, menee du poinct A, vers D, passera au dessus de AD, il en arriuera la mesme absurdité: donc AD, est parallele à BC. Partant les triangles egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

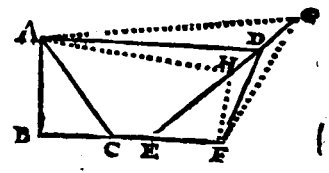
THEOREME 30. PROP. 40.

Les triangles egaux, constituez sur bases egales, & de mesme part, sont aussi entre mesmes paralleles.

Sur les bases egales BC, EF, & de mesme part A, D, soient constituez les triangles egaux ABC, DEF. Ie dis qu'ils sont entre mesmes paralleles, c'est à dire, que la ligne menee du poinct A à D,

est parallele à BF.

Car autrement on pourroit mener vne ligne parallele à B F, du poinct A, laquelle



tomberoit au dessous de AD, ou au dessus.

b 31. 1. Soit donc menee A G, parallele à [b] BF, s'il est possible, & soit conjointe G F. D'autant que les

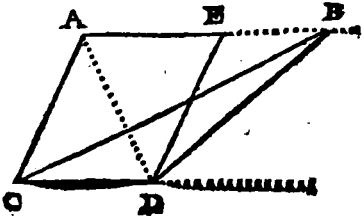
31. 1. lignes AG, BF, sont paralleles, le triagle GEF, sera egal au triangle ABC, mais le triangle D F E, est egal au mesme triangle A B C, par l'hypothese:

c 1. c. f. Donc les triangles DFE, [c] & G E F, seront egaux entr'eux, la partie & le tout, ce qui est absurde. Si la parallele est dicte passer au dessous de A D, il en arriuera la mesme absurdité. Donc AD, est parallele à BF: partant les triangles egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 31. PROP. 41.

Si vn parallelogramme a mesme base qu'vn triangle, & est entre mesmes paralleles que le triangle, le parallelogramme sera double du triangle.

Entre les paralleles A B, C D, & sur la base C D, soit constitué le parallelogramme ACDE, &



le triangle B C D. Ie dis que le parallelogramme eſt double du triangle B C D.

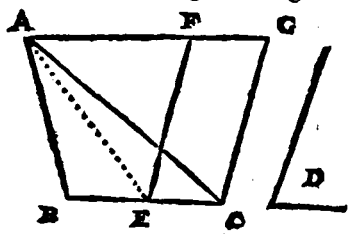
Car ayant mené le diametre A D, le triangle A C D, [d] ſera egal au triangle B C D mais le parallelogramme A C D E, eſt double du triangle A C D, d'autant [e] que les triangles A C D, A E D, ſont egaux: donc le meſme parallelogramme A C D E, eſt auſſi double du triangle B C D. d 37. 1. e 34. 1.

PROBLEME 11. PROPO. 42.

Conſtituer vn parallelogramme egal à vn triangle donné, en vn angle rectiligne donné.

C'eſt à dire, qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le triangle donné A B C, & l'angle rectiligne donné D, il faut conſtituer vn parallelogramme egal au triãgle donné A B C, en vn angle egal à l'angle D, c'eſt à dire, qui ait vn angle egal à l'angle D.



Soit diuiſé vn des coſtez du triangle, lequel qu'on voudra, ſçauoir B C, en deux [f] egalement au poinct E, & ſoit coniointe A E, & ſoit faict l'angle C E F, egal à l'angle donné D, puis ſoit menee [g] A F, parallele à B C, rencontrant E F, au poinct F: ſoit auſſi du poinct C, menee C G, parallele à E F, rencontrant f 10. 1. g 31. 1.

AF, prolongee au poinct G, & l'on aura constitué le parallelogramme FECG, en l'angle CEF, qui est egal à l'angle donné D, lequel parallelogramme, ie dis estre egal au triangle donné ABC.

h 38. 1. D'autant que les triangles ABE, AEC, sont egaux[h] estans constituez sur bases egales BE, EC, & entre mesmes paralleles AF, BC, le triangle total ABC, sera double du triangle AEC. Mais

i 41. 1. le parallelogramme FECG, est[i] aussi double du

k 6. c.f. mesme triangle AEC; donc le triangle ABC,[k] & le parallelogramme FC, seront egaux entr'eux, & le parallelogramme FC, a l'angle CEF, egal à l'angle donné D, par la construction. Partant, nous auons constitué vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

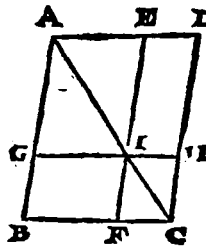
SCHOLIE.

La practique, tant de cette Proposition que de la suyuante, est facile à entendre par la construction d'icelles.

THEOREME 32. PROP. 43.

De tout parallelogramme, les complemens des parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, sont egaux entr'eux.

Au parallelogramme ABCD, soient les parallelogrammes GE, FH, à l'entour du diametre AC, & les complements DI, IB, comme nous auons dict à la 37. Definition. Ie dis qu'iceux complements sont egaux entr'eux.



Car puis que les triangles A B C, & A D C, [l] ſont egaux entr'eux (car le diametre AC, diuiſe le parallelogramme en deux egalement) & que les deux triangles A G I, AEI, ſõt auſſi egaux entr'eux par la meſme raiſon, ſi ces deux derniers ſont retranchez des deux premiers [m] les trapezes GBFCI, EDHCI, demeureront egaux entr'eux; mais les triangles FIC, & HIC, [n] ſont auſſi egaux entr'eux, donc s'ils ſont oſtez d'iceux trapezes, les complements [o] D I, & I B, demeureront egaux. Donc en tout parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

l 34. 1.

m 3. c.ſ.

n 34. 1.

o 3. c.ſ.

SCHOLIE.

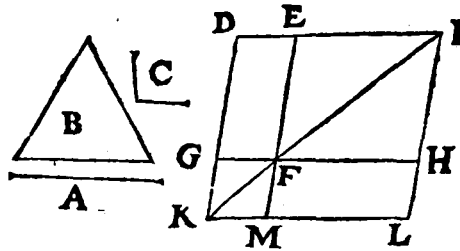
Henrion a copié cette Propoſition d'vn autre qui l'a ainſi traduite. En tout parallelogramme, les ſupplements des parallelogrammes qui ſont ſur le diametre ſont egaux entr'eux. Mais s'il ſçauoit lire le texte d'Euclide et l'entendre, il auroit bien peu voir qu'il y a ainſi: παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. *C'eſt à dire, De tout parallelogramme, les complemens des parallelogrammes, qui ſont à l'entour du diametre, ſont egaux entr'eux. D'où il eſt facile à voir qu'il faut traduire ces mots:* περὶ τὴν διάμετρον *à* l'entour du diametre, *& non pas*

sur le diametre, *comme dit Henrion, puis que selon Euclide, vne figure est dite estre sur vne ligne, quand icelle ligne est vn des costez de ladite figure. Or ledit Henrion deuoit au moins voir le Latin de Clauius ou autres, où il y a*, circa diametrum, *& prendre vn Dictionnaire pour voir la signification, s'il ne la pouuoit entendre.*

PROBLEME 12. PROPOSIT. 44.

Sur vne ligne droicte donnee, appliquer vn parallelogramme egal à vn triangle donné, en vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne droicte donnee A, & le triangle B, & l'angle rectiligne donné C, il faut appliquer vn parallelogramme à la ligne donnee A, egal au



triangle donné B, en vn angle egal à l'angle C, c'est à dire, qui ait vn angle egal à l'angle donné C.

Soit constitué le parallelogramme D E F G,
p 42. 1. egal au triangle donné B, ayant l'angle G F E,

egal à C, puis ſoit prolongee GF, au poinct H; en ſorte que FH, ſoit egale à A, & par H, ſoit menee HI, [q] parallele à FE, rencontrant DE, prolongee au poinct I: par apres ſoit mené le diametre IF, par le poinct F, rencontrant DG, prolongee à K, & par K, ſoit menee KL, [r] parallele à GH, rencontrant IH, prolongee à L, & ſoit prolongee EF, au poinct M. Ie dis que le parallelogramme LMFH, eſt le requis: car il a le coſté FH, egal à la ligne donnee A, par la conſtruction & l'angle HFM, [ſ] eſt egal à l'angle EFG, lequel eſt faict egal à l'angle C: donc HFM, ſera auſſi egal à C: & finalement le parallelogramme FL, eſt egal au parallelogramme GE, le complement, au complement, lequel GE, eſt faict egal au triangle B. Donc FL, ſera auſſi egal à B: Donc à vne ligne droicte donnee, &c. Ce qu'il falloit faire.

[q] 31. pro.

[r] 31. 1.

[ſ] 15. 1.

Si le faquin Copiſte, ou autre beſte Arcadienne de ſa ſorte, comme ſon Traducteur (car ils ſont deux aſſociés, ſçauoir vn quidan, qui traduit ce qui ne l'eſt pas, collige & rapſodie ce qui eſt traduit, & baille le tout à copier à Henrion, pour faire imprimer & vendre.

Hos breuitas ſenſus fecit coniungere binos.) Veut dire qu'Euclide a deſcrit le parallelogramme ſur la ligne propoſee, & non ſur vne egale. Ie luy reſponds qu'il n'entend pas Euclide: car ſelon Euclide, conſtituer vne figure ſur vne ligne donnee, ou ſur vne egale, cela eſt indifferent, comme l'on peut colliger de la ſuyuante Propoſition, & de pluſieurs autres cy-apres, comme de la 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. du ſecond & autres, par leſquelles il eſt manifeſte que quand vne figure eſt dite eſtre deſcrite ſur vne ligne propoſee, n'eſt autre choſe à

dire, sinon que ladite figure ait le costé, sur lequel elle est dite estre descrite, d'vne certaine longueur ou interualle, determiné par ladicte ligne proposee, comme il appert par les Propositions alleguees. Mais reuenons à nostre Proposition, laquelle suffit pour monstrer leur bestise & asnerie; Voicy donc ce que dit Euclide: παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, sur vne ligne droicte donnee, constituer vn parallelogramme egal à vn triangle donné, en vn angle rectiligne donné. C'est à dire, selon la longueur ou quantité de la ligne proposee · car παρὰ auec l'accusatif, veut dire *ad*, qui signifie entre autres significations, selon, comme il appert de Ciceron, *ad meum sensum*, selon mon aduis, ou selon qu'il me semble: & Seneque, *ad naturam viuere*, selon nature, &c.

Donc si Euclide n'entend pas selon la longueur ou quantité d'vne ligne droicte proposee; comme ie l'interprete, il a failly tout le premier, comme i'ay desia monstré, & comme il appert icy par son texte, où il dict qu'il faut constituer le parallelogramme en vn angle rectiligne donné, & ne le fait pas, mais il le fait en vn angle egal au proposé ou donné. Il ne faict donc qu'vne partie de ce qu'il propose, & le tout se peut faire en faisãt la l. proposee, l'vne de celles qui contiennent l'angle. C'est donc par accident que le parallelogramme est icy construit sur la mesme ligne proposee, & ie l'ay faict sur vne egale, pour monstrer que cela est indifferent, & que c'est faire la mesme chose; & pour

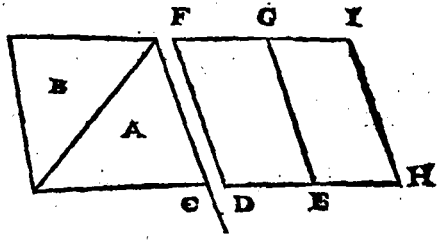
le faire comme ils veulent dire, il n'y a qu'à prendre la ligne FH, en nostre figure pour la ligne proposee, & la prolonger à G, en sorte que FG, soit egale à la moitié de l'vn des costez du triangle, & faire GE, egal à B, ayant l'angle GFE, egal au donné, & faire au reste comme il est dict auparauant. 41. I.

Il est dõc facile à voir, que ces deux ignorãs calõniateurs sont tous deux venus d'Arcadie, *Arcades ambo*: mais toutefois *non cantare pares, nec respondere parati*: mais bien plustost, *rudere parati*, comme font les asnes de leur sorte, lesquels ne pouuans respondre categoriquement, ont recours aux iniures & calomnies, ce que ie n'admire, croyant que le Traducteur a encore la ceruelle aussi mal disposee, qu'il auoit quand il iettoit son argent par la fenestre en la ruë; & n'y a personne, s'il n'est despourueu d'entendement, qui ne voye bien que leurs resueries procedent d'vne pure ignorance, disant qu'il appert ainsi de Commandin: dequoy ie fais tout autant d'estat, que s'il n'auoit rien dict.

PROBLEME 13. PROP. 45.

Constituer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, en vn angle rectiligne donné.

Soit le rectiligne donné AB, diuisé en deux triangles, & l'angle rectiligne donné C, il faut constituer vn parallelogramme egal au rectiligne donné AB, qui ait vn angle egal à l'angle rectiligne donné C.



t 42. 1. Soit faict le parallelogramme DG, [t] egal au triangle A, ayant l'angle FDE, egal à l'angle rectiligne donné C, puis à la ligne GE, soit appliqué le
u 44. 1. parallelogramme EI, egal [u] au triangle B, ayant l'angle GEH, egal à l'angle C, & l'on aura faict ce qui est requis.

x 1. com. s. Car d'autant que chacun des angles FDE, & GEH, est faict egal à l'angle C, [x] ils seront egaux
y 2. c. f. entr'eux. Donc si l'on adiouste l'angle GED, [y] les deux GED, GEH, seront egaux aux deux
29. 1. GED, FDE. mais FDE, GED, sont egaux à deux droicts: donc GED, GEH, seront aussi egaux à
z 14. pre. deux droicts [z] partant DEH, sera vne ligne droicte. Par les mesmes raisons l'on prouuera que que FG, GI, sont vne ligne droicte. Or puisque chacune des lignes DF, HI, est egale & parallele
a 34. 1. [a] à EG, elles sereront egales & paralleles entr'elles, & les lignes droictes FI, DH, qui les conioignent
b 30. 1. [b] seront aussi egales & paralleles: partant DI. sera parallelogramme, faict des deux DG, FI, egaux aux deux triangles A, B. Donc le parallelogramme DI, est egal au rectiligne AB, ayant l'angle D, egal à l'angle rectiligne donné C. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

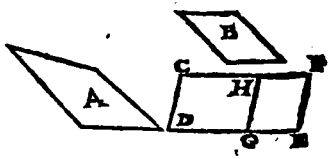
Semblablement, s'il y auoit plusieurs rectilignes donnez, l'on constituera vn parallelogramme egal à iceux, les ayans reduits en triangles, & ayant constitué autant de parallelogrammes egaux à iceux triangles, chacun au sien, par la 44. Proposition, comme nous auons fait en ce Probléme. Car puisque tous ces parallelogrammes font vn seul parallelogramme, comme il est icy demonstré, l'on aura constitué vn parallelogramme, egal à tous les rectilignes proposez.

Or la practique de ce Probléme peut estre entendue de celle de la precedente Proposition, plusieurs fois repetee.

Nous rapporterons icy vn Probléme de Pelletier fort vtile, qui est tel.

Deux figures rectilignes estans proposees, trouuer l'excez de la plus grande par dessus la plus petite. C'est à dire, la difference entre les deux.

Soient les rectilignes donnez A, & B, & soit A, le plus grand, il faut sçauoir de combien le rectiligne A, excede le moindre B. Soit fait le parallelogrãme C D E F, en quelconque



angle D, [c] *egal au rectiligne A, & sur la ligne C D, soit fait le parallelogramme C D G H, ayãt le*

[c] 34. 1.

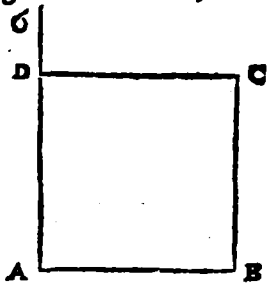
meſme angle D, egal au plus petit rectiligne B.

D'autant que le parallelogramme CDEF, excede le parallelogramme CDGH, du parallelogramme GF, la figure A, excedera pareillement la figure B, du meſme parallelogramme GF. Ce qui eſt propoſé.

PROBLEME 14. PROP. 46.

D'vne ligne droicte donnee, deſcrire vn quarré.

Soit la droicte ligne donnee AB, de laquelle il faut deſcrire vn quarré, du poinct A, ſoit menee la
d 11. prem. droicte ligne AG, d à angles droicts à AB, & ſoit poſee AD, egale à AB, & du poinct D, ſoit
e 31. prem. menee e DC, parallele à AB: ſemblablement ſoit menee BC, parallele à AD, rencontrant DC, au poinct C, la figure ABCD, ſera parallelogramme: & partant le coſté
f 34. 1. f DC, egal à AB, & AD egal à BC: mais AD, eſt poſee egale à AB,
g 1. e. f. donc BC, g ſera auſſi egale à AB: partant ABCD, ſera equilatere. Ie dis qu'il eſt auſſi rectangle.



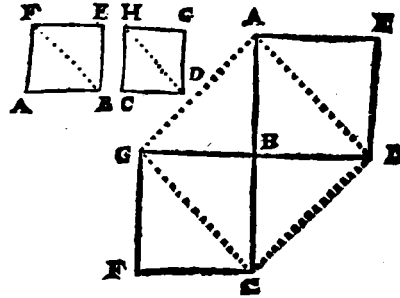
h 28. 1. Car d'autant que AD, BC, ſont paralleles, h les angles A, & B, ſont egaux à deux droicts: mais A, eſt faict droict. Donc B, ſera auſſi droit, & les deux
i 34. 1. oppoſez D, & C, i ſont egaux à iceux, & partant droicts. Donc le parallelogramme AC, eſt re-

ſtangle & equilatere, & partant ſera quarré. Donc d'vne ligne droicte donnee, nous auons deſcrit vn quarré. Ce qu'il falloit faire.

THEOREME DE PROCLVS.

Les quarrez de lignes egales ſont egaux entr'eux: & des quarrez egaux, les lignes ſont egales.

Soient premierement les lignes droictes A B, C D, egales Ie dis que les quarrez d'icelles A B E F, C D G H, ſont ſemblablement egaux entr'eux: Car ayant mené les diametres B F, D H, les deux coſtez BA, A F, du triangle BAF, ſõt egaux aux deux DC, CH, du triangle DCH, chacun au ſien, puis



que par la definition du quarré AF, CH, ſont egales à AB, CD: mais les angles A, & C, ſont egaux, ſçauoir droicts. [k] Donc les triangles BAF, DCH, ſeront egaux: leſquels eſtans les moitiez des quarrez, les quarrez totals ſeront auſſi egaux. Ce qui eſt propoſé. k 4. 1.

Soient derechef les quarrez ABDE, B C F G, egaux. Ie dis pareillement que les lignes d'iceux A B, B C, ſont egales. Car ſoient conioincts iceux

quarrez à l'angle B, de ſorte que les droictes lignes AB, BC ſoient conſtituees directement; d autant que les angles A B G, ABD, ſont droicts, les lignes droictes GB, B D, [l] ſeront auſſi conſtituees directement. Et ſoient menez les diametres AD, CG, & ſoient conioinctes les lignes droictes A G, CD.

l 14. 1.

D'autant donc que les quarrez ABDE, BCFG, ſont egaux, les triangles ABD, BCG, leurs moitiez ſeront auſſi egaux: adiouſtant donc le commun triangle B CD, tout le triangle ACD, ſera egal à tout le triangle GDC. Partant, puis que les triangles ACD, GDC, ſont conſtituez ſur meſme baſe CD, & de meſme part: [m] ils ſeront auſſi entre meſmes paralleles: donc AG, CD, ſont paralleles.

m 39. 1.

Et d'autant qu'au quarré BCFG, le coſté B C, eſt egal à CF, & CG, eſt commun, les deux coſtez BC, CG, ſeront egaux aux deux F C, C G, chacun au ſien, & la baſe F G, du triangle F C G, egale à la baſe GB, du triangle BCG: car ce ſont les coſtez du quarré, donc [n] l'angle F C G, ſera egal à l angle BCG: & partant chacun ſera demy-droict: car le total FCB, eſt droict, ſelon le meſme diſcours les deux angles BAD, EAD, ſeront chacun demy droicts, & les deux ADB, ADE, auſſi demy-droict: & partant les deux alternes DAC GCA, ſeront egaux entr'eux, chacun eſtant demy-droict. Donc AD, C G, [o] ſeront paralleles, & A G C D, ſera parallelogramme: [p] & partant les lignes droictes AD, C G, ſeront egales. D'autant donc qu'aux triangles ABD, BCG, les coſtez AD, C G, ſont egaux, & les angles auſquels ces coſtez ſont adjacents, ſont auſſi egaux entr'eux

n 8. 1.

o 27. 1.

p 34. 1.

eſtans demy-droicts, comme nous venons de monſtrer: q les deux autres coſtez AB, BD, ſeront egaux aux deux autres coſtez GB, BC, chacun au ſien. Ce qui eſt propoſé. q 26. 1.

SCHOLIE.

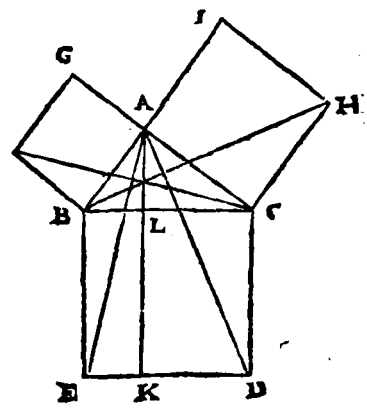
Cecy ſe peut demonſtrer plus briefuement, ſi l'on entend que l'vn des quarrez ſoit poſé ſur l'autre: car ſi les lignes ſont egales, l'vne eſtant poſee ſur l'autre, elles conuiendront entr'elles. Et dautant que les angles ſont auſſi egaux, ſçauoir droits, ils conuiendront ſemblablement entr'eux, & partant tout le quarré conuiendra ſur tout le quarré. Mais ſi les quarrez ſont egaux, ils conuiendront entr'eux, à cauſe de l'egalité des angles. Donc les lignes conuiendront auſſi, autrement l'vn des quarrez ſeroit plus grãd que l'autre. Or la practique de ce Probleme 46. eſt fort facile. Car ſi à l'vne des extremitez de la ligne donnee, comme au poinct A, l'on mene AD, à angles droits, & egale à la meſme ligne droite donnee AB, & des poincts B, et D, comme centres, & à l'interualle AB, l'on deſcrit deux arcs qui s'entre-coupent au poinct C, & que l'on mene les lignes droites BC, DC, l'on aura deſcrit vn quarré. Car puiſque ABCD, ſelon la conſtruction, eſt vne figure equilatere, c'eſt à dire, de coſtez egaux: & partant a les coſtez oppoſez egaux, elle ſera parallelogrãme (comme l'on peut colliger des Definitions des figures quadrilateres) & ayant l'angle A, droit par la conſtruction, t l'angle B, ſera auſſi droit, & leurs oppoſez f D, et C, droicts, &c. t 29. 1. f 34. 1.

THEOREME 33. PROP. 47.

Aux triangles rectangles, le quarré du costé qui soustient l'angle droict, est egal aux quarrez des costez qui contiennent le mesme angle droict.

Soit le triangle A B C, qui ait l'angle B A C, droict, & des trois costez A B, B C, C A, soient
t 46. 1. t descrits les trois quarrez B D, C I, & A F. Ie dis que le quarré B D, descrit du costé B C, qui soustient l'angle droict A, est egal aux deux quarrez C I, & A F, descrits des costez, qui contiennent ledict angle droict.

v 31. 1. Soit menee A K, v parallele à B E, ou à C D, coupant B C, au poinct L, & soient iointes les droictes lignes A D, A E, C F, B H: d'autant que les angles B A C, B A G, sont droicts,
x 14. Pre x GA. A C, feront vne seule ligne droicte par mesme raison B A, A I, feront aussi vne ligne droicte. Derechef, d'autant que les angles A B F, C B E, sont



egaux eſtans droicts, ſi l'on adiouſte l'angle commun ABC, le tout ABE, ſera [y] egal au tout CBF: ſemblablement, le tout ACD, ſera egal au tout BCH: D'autant donc que les deux coſtez AB, BE, du triangle ABE, ſont egaux aux deux CB, BF, du triangle CBF, chacun au ſien, comme il appert par la Definition des quarrez, & les angles ABE, CBF, contenus d'iceux coſtez, ſont mõſtrez egaux, [z] iceux triangles ABE, CBF, ſeront egaux: mais le parallelogramme AF, eſt [a] double du triangle CBF, eſtant ſur meſme baſe, & entre meſmes paralleles. Il ſera donc auſſi double du triangle ABC, & le parallalelogrãme BK, eſt double du meſme triangle ABC, eſtant ſur meſme baſe, & entre meſmes paralleles: partant le parallelogramme BK. ſera egal au quarré AF.

y 2. com. ſ.

z 4. 1.

a 41. 1.

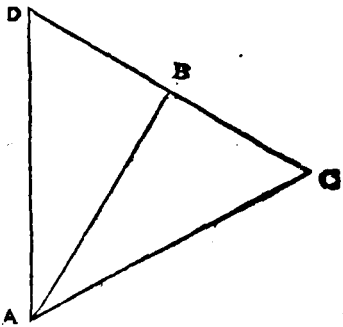
Par meſme diſcours on monſtrera que le parallelogramme LD, eſt egal au quarré CI. Donc le quarré EC, ſera egal aux deux quarrés AF, CI. Donc aux triangles rectangles &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 34. PROPO. 48.

Si le quarré deſcrit d'vn des coſtez d'vn triangle, eſt egal aux quarrez des deux autres coſtez d'iceluy; l'angle contenu ſous les deux autres coſtez du triangle eſt droict.

Au triangle ABC, le quarré du coſté AC, ſoit egal aux quarrez des coſtés AB, BC. Ie dis que l'angle ABC, eſt droict.

Soit menee BD, egale à BC, & à angles droicts à AB, & soit ioincte AD : Puis que ABD, est droit, le quarré de AD, est egal aux deux quarrez de AB, BD:



b 11. 1.

c 47. 1.

mais le quarré de BD, est egal au quarré de BC, puis que les lignes BD, BC, sont faictes egales, parquoy le quarré de AD, sera egal aux quarrez de BA, BC. Donc puis que le quarré de AC, est egal aux mesmes quarrez BA, BC, iceux quarrez de AC, & AD, seront egaux: & partant les lignes AD, AC, egales. D'autant donc qu'aux triangles ABD, ABC, les deux costez BD, BA, sont egaux aux deux BA, BC, chacun au sien, & les bases AC, AD, egales, les angles au poinct B, contenus d'iceux costez, seront egaux entr'eux; mais ABD, est faict droict; Donc ABC, sera aussi droict: partant le quarré, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

d 1. c. f.

e 8. 1.

Fin du premier Liure.

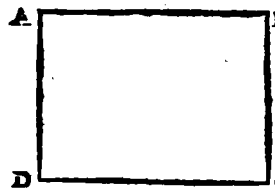
LIVRE SECOND DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. Tout parallelogramme rectangle, eſt dit eſtre contenu ſous deux lignes droictes, qui contiennent l'angle droict.

EVCLIDE traicte en ce ſecond liure, des puiſſances des lignes droictes, recherchant la quantité des quarrez des parties de toute ligne droicte diuiſee, & des parallelogrammes rectangles, contenus ſous les parties de la meſme ligne diuiſee, tant comparez entr'eux qu'auec le quarré de la toute, &c. Et pour cette cauſe il explique premierement icy, par ces deux Definitions, deux choſes qui ſont neceſſaires pour bien entendre ce qui doit eſtre demonſtré cy-apres.

En la premiere il declare ſous quelles lignes eſt dict eſtre contenu le parallelogramme rectangle, & que c'eſt à dire, vn parallelogramme eſtre contenu ſous deux lignes droictes. Ce que pour plus facilement entendre, il faut premierement ſçauoir que tout parallelogramme rectangle eſt celuy qui a tous les angles droits. & y en a de deux ſortes, ſçauoir le quarré, & quarré plus long d'vne part, ou quarré long: car en iceux tous les angles ſont droicts, comme nous auons dict aux Definitions. Et en tout parallelogramme ſi vn ſeul angle eſt donné droict, les trois autres ſeront neceſſairement droicts. Pour exemple, au parallelogramme ABCD, ſoit l'angle A, droict Ie dis que les trois autres B, C, D ſont auſſi droicts, car puis que AB, DC: ſont paralleles, [f] les 2. angles internes A, & B, ſont egaux à deux droits: mais A, eſt droict par l'hypotheſe; donc B ſera droict auſſi. Mais [g] d'autant que chacun eſt egal à ſon oppoſé comme l'angle A, à l'angle C, & l'angle B, à l'angle D, les angles D, & C, ſeront droicts auſſi.

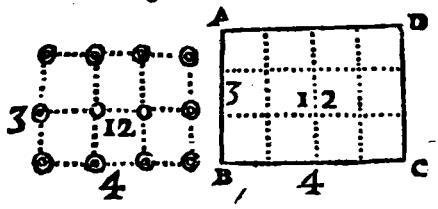


f 29. 1.

g 34. 1.

Donc Euclide dict, que tout parallelogramme rectangle eſt dict eſtre contenu ſous deux lignes droictes, qui contiennent vn angle droict, comme le parallelogramme rectangle ABCD, eſt dict eſtre contenu ſous AB, AD, ou ſous AD, DC, ou finalement ſous AB, BC, d'autant que chaque deux de ces lignes ainſi priſes, expriment la grandeur ou eſpace de tout le parallelogramme, ſçauoir vne, comme AB, ou DC, ſa longitude,

& l'autre ; comme AD, ou BC, ſa latitude. Donc eſtans exprimees deux lignes au parallelogramme rectangle, qui contiennent l'angle droict, on conçoit incontinent toute la quantité d'iceluy, & on entend auſſi ſa longitude & latitude. Il aduient auſſi que par le mouuement imaginaire d'vne des lignes ſelon l'autre, eſt conſtitué tout ce parallelogramme. Car ſi on conçoit en l'entendement, que la droicte ligne AB, ſe meut de trauers ſelon AD, en ſorte qu'elle conſtituë touſiours vn angle droict auec AD ; iuſques à ce que le poinct A, ſoit paruenu au poinct D, & le poinct B, au poinct C, tout le parallelogramme ADCB, ſera deſcrit : le meſme aduindra ſi AD, eſt poſee ſe mouuoir de trauers ſelon AB. Donc à bon droict vn parallelogramme rectangle eſt dict eſtre contenu ſous deux telles lignes droictes.



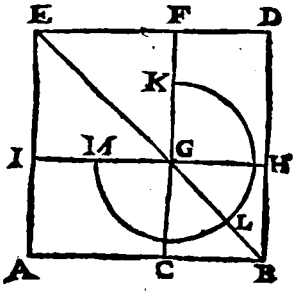
Or cecy a auſſi grande affinité & conuenance auec la multiplication d'vn nombre par vn autre. Car tout ainſi que de la multiplicatiõ de 3. par 4. eſt produit 12. qui eſt conſtitué en forme de parallelogramme, d'où il eſt dit eſtre contenu ſous 3. & 4. Ainſi le parallelogramme ABCD, contenu ſous les deux lignes droictes AB, BC, deſquelles celle là ſoit 3. palmes ou autres meſures, & celle-cy 4. contient 12. palmes quarrees, qui eſt fait du paſſage ou mouuement imaginaire de la ligne AB, de 3. palmes, en la ligne, ou ſelon la ligne BC, de 4. palmes,

comme repreſente la figure : Ce qui eſt cogneu aux Arithmeticiens & aux Geometres, & eſt demonſtré par Regiomontanus au liure 1. des triangles, Propoſition 16. D'où vient que quelques-vns diſent que le parallelogramme rectangle eſt conſtitué ou faict du produit de deux lignes qui ſont autour de l'angle droict, l'vne par l'autre : comme le precedent parallelogramme eſt produit de la ligne AB, en BC, ou (ce qui eſt le meſme) de la ligne BC, en AB : car le meſme parallelogramme eſt produit, ſoit que la plus petite ligne ſoit appliquee à la plus grande, ou la plus grande à la plus petite ; ſemblablement auſſi on produit vn meſme nombre, ſoit que le moindre ſoit multiplié par le plus grand, ou le plus grand par le moindre, comme il eſt demonſtré par Euclide liure 7. Prop. 16. car 12. eſt auſſi bien produit de 3. en 4. que de 4. en 3.

Le Lecteur ſera icy aduerty, qu'en ce ſecond liure & autres ſuyuans le parallelogramme rectangle eſt appellé par Euclide rectangle ſimplement: ce que les autres Geometres obſeruent auſſi, en ſorte que par le nom de rectangle, il faudra touſiours entendre parallelogramme rectangle. Derechef, afin que ces meſmes lettres ne ſoient tant de fois repetees, les Geometres ont de couſtume d'exprimer le parallelogramme, tant rectangle que non rectangle, par deux lettres ſeulement, ſçauoir celles qui ſont oppoſees diametralement: comme pour denoter le parallelogramme cy-appoſé, on dira le parallelogramme A C, ou bien B D.

2. De tout eſpace parallelogramme, l'vn, & lequel qu'on voudra des parallelogrammes, deſcrits à l'entour du diametre d'iceluy, auec les deux complements, ſoit appellé Gnomon.

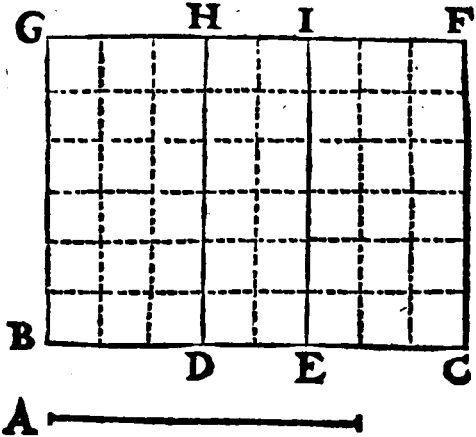
Au parallelogramme A B D E, ſoit rectangle, ou non, ſçauoir lequel ſoit diuiſé en quatre parallelogrammes comme nous auons monſtré en la 37 Definition du premier liure. deſquels C H, I F, ſont dicts eſtre à l'entour du diametre & les deux autres A G, G D, ſont dicts complements, la figure compoſee duquel qu'on voudra des parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre comme de C H, auec les deux complements A G, G D, telle qu'eſt la figure M L K, eſt appellee Gnomon: par la meſme raiſon la figure H D E I C G. compoſee du parallelogramme I F, qui eſt à l'entour du diametre, & des deux cõplemens A G, G D, ſera appellee Gnomon.



THEOREME 1. PROPO. 1.

S'il y a deux lignes droictes, & que l'vne d'icelles ſoit coupee en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu ſous icelles deux lignes droictes, eſt egal aux rectangles contenus ſous la non coupee, & ſous chacune des parties de la coupee.

Soient deux lignes droictes A, & BC, desquelles B C, soit coupee en tant de parties, que l'on voudra BD, DE, EC. Ie dis que le rectangle compris sous A, & B C, est egal à tous les rectangles ensemble compris sous la ligne A, non diuisee, & sous chacun des segmens de la diuisee, sçauoir sous A. & BD, sous A, & DE, & sous A, & EC.



Soit le rectangle BF, compris sous A, & BC, c'est à dire, que BG, soit posee egale à A, ce que l'on fera ainsi. Soient menees BG, & GF, [h] à angles droicts à la ligne droicte B C, & chacune posee egale à A, & soit conionte la ligne droicte G F, BG, & C F, seront [i] paralleles, à cause des angles droicts B, & C, & aussi egales entr'elles [k] puis que chacune est posee egale à A: donc les lignes droictes GF, BC, qui les conioignent [l] seront aussi egales & paralleles, partant BF, sera rectangle,

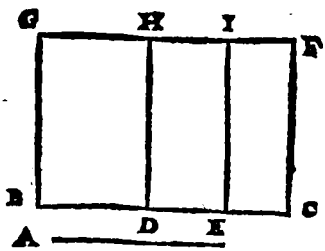
h 11. prem.
i 28. Pre.
k 1. c. f.
l 33. prem.

& contenu sous BC, & A, c'est à dire BG, son egale, selon la premiere Definition de ce liure. Puis par les poincts D, & E, soient menees DH, EI, [m] paralleles à BG, & partant paralleles [n] entr'elles. Et puisque par la mesme construction, BH, & BI, sont parallelogrammes, les lignes droictes DH, EI, [o] seront egales à BG, c'est à dire à A. Puis donc que BG, est egale à A, le rectangle BH, sera cõtenu sous la nõ coupee A, & le segmẽt BD, & le rectangle DI, contenu sous A, & le segment DE, pareillement EF, sera contenu sous A, & le segment EC O. puis que toutes ces parties là prises ensemble sont egales à leur tout BF, il est euident que le rectangle comp. des 2. sera egal aux rectangles comp. de A, & chacun des segments de BC. Donc s'il y a deux lignes. Ce qu'il falloit demonstrer.

[m] 31. 1.
[n] 30. 1.
[o] 34. 1.

SCHOLIE.

Nous auons diuisé ces figures en parties egales, pour faciliter les Demonstrations, & aussi pour les accommoder aux nombres. Ce qui est tres-manifeste par cette figure, en l'appliquant aux nombres, où la ligne BG, egale à A, soit 6. pieds ou autres mesures, & la ligne BC, soit 8. telles parties par la 1. Definit. de ce liure le rectangle BF, sera 48. pieds de superficie, ou autres mesures, & par la mesme raison le rectãgle BH, sera 18, DI, sera 12. & EF, aussi, 18.

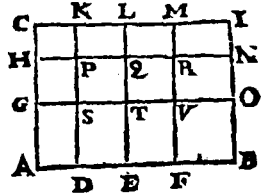


lesquels trois rectangles ensemble font aussi 48. toutes les parties prises ensemble estans egales à leur tout.

Federic Commandin demonstre icy les deux Theorémes suyuans.

1. S'il y a deux lignes droictes, & que toutes deux soient coupees en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu sous icelles deux lignes droictes, est egal aux rectangles contenus sous chacune partie de l'vne, appliquee à chacune partie de l'autre.

Soient les deux lignes droictes AC, AB, contenans l'angle droict A, lesquelles soient coupees selon les parties AD, DE, EF, FB, AG, GH, HC. Ie dis



que le rectangle contenu sous AB, AC, est egal aux rectangles ensemble contenus sous AD, AG, AD, GH, AD, HC, DE, AG, DE, GH, DE, HC, EF, AG, EF, GH, EF, HC, FB, AG, FB, GH, FB, HC: Soit accomply le rectangle ABIC, & soient menees DK, EL, FM, P paralleles à AC, ou BI, semblablement soient menees HN, GO, paralleles à AB, ou CI, lesquelles coupent les premieres aux poincts P, Q, R, S, T, V.

P 31. 1.

D'autant donc que le rectangle AS, est contenu sous AD, AG, & GP, sous AD, GH, & HK, sous

sous AD, HC, (puisque GS, HP, sont egales à la mesme AD,) semblablement les rectangles DT, SQ, PL, sont contenus sous DE, AG. DE, GH, DE, HC, (d'autant que DS, SP, PK, sont egales aux mesmes AG, GH, HC, & ST, & PQ, egales à DE,) & par mesme raison EV, TR, QM, sont contenus sous EF, AG, EF, GH: EF, HC, & aussi les rectangles FO, VN, RI, sont contenus sous FB, AG, FB, GH, FB, HC: il est manifeste que le rectangle contenu sous AB, AC, est egal aux rectangles contenus sous chacune des parties de l'vne, appliquee à chacune des parties de l'autre. Ce qui est proposé. q 34. 1. r 34. 1.

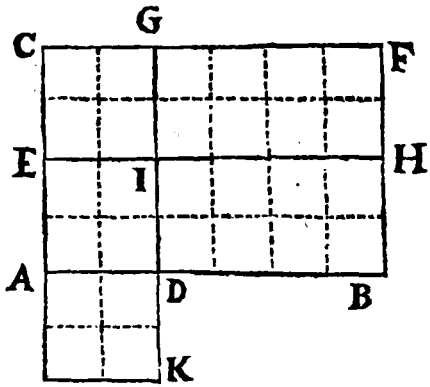
SECOND PROBLEME DE COMMANDIN.

S'il y a deux lignes droictes, lesquelles soient coupees comme l'on voudra, le rectangle contenu sous les toutes, auec le rectangle contenu sous vne partie de l'vne & vne partie de l'autre, est egal aux rectangles contenus sous les toutes, & lesdictes parties reciproquement, auecque le rectangle contenu des autres parties.

Soient deux lignes droites AB, AC, contenans l'angle droit A, lesquelles soient coupees comme l'on voudra aux poincts D, & E, & soit acheué le rectangle AF, & par le poinct D, soit menee DG, parallele à AC, ou BF. & par le poinct E, soit menee EH, parallele à AB, ou CF, coupãt DG, au

poinct I. & ſoit prolongee GD, à K, en ſorte que DK, ſoit egale à EC, & ſoit acheué le rectangle AK, qui ſera egal à EG Ie dis que le rectangle contenu ſous AB, AC, ſçauoir AF, auec le rectangle contenu ſous les parties AD, EC, qui eſt EG, ou AK, ſon egal, eſt egal aux rectangles contenus ſous AB, EC, ſçauoir EF, & AC, AD, ſçauoir AG, auec le rectangle contenu ſous DB, AE, c'eſt à dire DH.

Car puis que AK, eſt egal à EG, le rectangle EK, ſera egal à AG: parquoy les deux rectangles,



ſçauoir AF, contenu ſous AB, AC, & AK (c'eſt à dire ſon egal EG, contenu ſous AD, EC,) ſont egaux aux rectangles EF, AG, DH, contenus ſous AB, EC; AC, AD, & DB, AE. Ce qui eſt propoſé.

Aux nombres ces meſmes Problémes ſont auſſi manifeſtes. Car ſoient propoſez ces deux nombres 10. & 8. le premier deſquels ſoit diuiſé en trois parties, 2. 3. 5. & le dernier en 3. & 5. il eſt

manifeſte que 80. nombre produit de *10.* par *8.* eſt egal aux ſix nombres *6. 9. 10. 15. 15. 25* qui ſont produits de chacune des parties 2. 3. 5. multipliees par chacune des parties 3. 5. leſquels adiouſtez enſemble *font 80.* comme vouloit le premier Theoréme.

Derechef, ſi 2. nombres, comme 4. & 6. ſont diuiſez comme l'on voudra, ſçauoir le premier en 1. & 2. mais le dernier en 2. & 4. Il eſt ſemblablement manifeſte que 24. nombre produict de 4. *multiplié* par 6. auec 4. nombre produit de 2. par 2. ſçauoir 28. qui ſont les rectangles AF, AK, appliquez aux nombres, ſont egaux à EF, AG, DH, qui ſont auſſi 28. ap pliquez aux nombres, comme il appert en la figure.

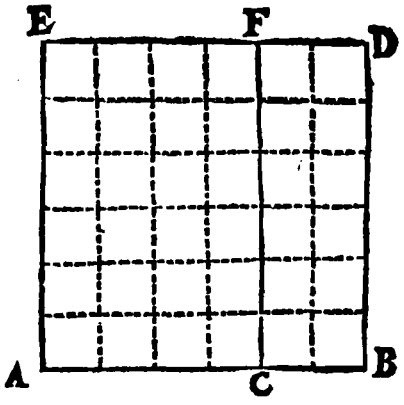
THEOREME 2. PROP. 2.

Si vne ligne droicte eſt coupee comme l'on voudra, les rectangles contenus ſous la toute & chacune des parties, ſont egaux au quarré de la toute.

Soit la ligne droite donnee AB, diuiſee comme l'on voudra au poinct C. Ie dis que les rectangles contenus ſous la toute AB, & les parties AC, CB, enſemble ſont egaux au quarré de AB.

Car ſoit deſcrit [s] AD, quarré de la ligne totale AB, & par C, ſoit [t] menee CF, parallele à AE, ou BD, elle ſera [u] egale à AE, c'eſt à dire à AB, à laquelle AE, eſt egale, par la definition du quarré. D'autant donc que AE, eſt egale à AB, le rectangle AF, ſera contenu ſous la toute AB, & le [s] 46. 1. [t] 31. 1. [u] 34. 1.

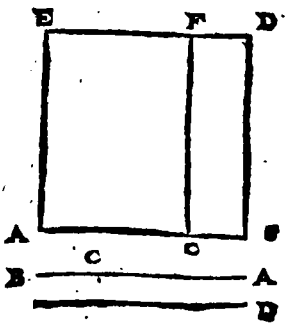
segment AC. Semblablemét, d'autant que CF, est egale à AB, le rectangle CD, est contenu sous la toute AB, & l'autre segment



CB. Donc puisque les rectangles CD, AF sont egaux au quarré AD, il est manifeste que les rectangles contenus sous la toute AB, & chacun des segments AC, CB, sont egaux au quarré de la toute AB. Donc si vne ligne est coupee, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

AVTREMENT.

Soit prise D, egale à AE: D'autant que AB, est diuisee par C, le rectangle contenu sous la non coupee D, & la coupee AB, *(qui est le quarré de la toute AB,) sera egal aux deux rectangles compris sous la non coupee D, (c'est à dire*



ſous AB, egale à D,) & vn chacun des ſegments AC, & B. Ce qui eſt propoſé.

SCHOLIE.

Combien qu'Euclide propoſe ce ſecond Theoréme d'vne ligne droite diuiſee comme l'on voudra, en deux ſeulement; neantmoins ſi la ligne eſt diuiſee en tant de parties que l'on voudra, l'on monſtrera en la meſme maniere que tous les rectangles enſemble, contenus de la toute, & de chacun des ſegmens, ſont egaux au quarré de la toute, comme il eſt euident par les figures precedentes.

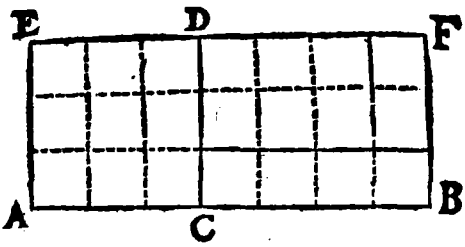
Cecy ſe peut voir auſſi par les nombres, en diuiſant 6. en 4. & 2. ou plus, comme il appert par la figure, l'appliquant aux nombres AF, ſera 24. & CD, 12. ſelon la premiere Definition, leſquels ſont 36. & autant eſt AD, q. de 6.

THEOREME 3. PROP. 3.

Si vne ligne droicte eſt coupee comme l'on voudra, le rectangle contenu ſous la toute & vne des parties, eſt egal au rectangle contenu ſous icelles parties, & au quarré de la partie premierement priſe.

Soit la ligne droite AB, coupee comme l'on voudra, ſçauoir par le poinct C. Ie dis que le rectangle contenu ſous la toute AB, & vne des parties, ſçauoir AC, (ſoit que AC, ſoit la plus grande ou la plus petite) eſt egal au rectangle contenu ſous les parties AC, CB, & au quarré de la ſuſdite

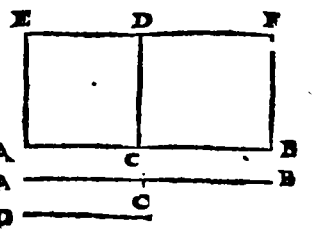
partie AC. Car ſoit deſcrit AD, quarré, de la par-
x 31. 1. tie AC, & par le poinct B, ſoit menee BF, x paral-
lele à AE, rencontrant ED, prolongee à F.



D'autant donc que la ligne droite AE, eſt egale au ſegment AC, par la definition du quarré. Le rectangle AF, ſera contenu ſous la toute AB, & la partie AC. Derechef, d'autant que CD, eſt egale à CA, par la meſme raiſon; le rectangle CF, ſera contenu ſous les parties AC, CB. Donc puis que le rectangle AF, eſt egal au quarré AD & au rectangle CF: il eſt manifeſte que le rectangle contenu ſous la toute AB, & le ſegment AC, eſt egal au rectangle contenu ſous les parties AC, CB, & au quarré de AC, premierement priſe. Donc ſi vne ligne droite eſt, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

AVTREMENT.

Soit priſe D, egale à la partie AC. *D'autant que la droite ligne* AB, *eſt diuiſee au poinct* C, *le rectangle compris ſous* D, *&* AB, *c'eſt*



à dire, ſous AB, AC: *car* D, *eſt egale à* AC, *eſt egal au rectangle contenu ſous* D, *et* CB, *c'eſt à dire, ſous* AC, CB, *& au rectangle contenu ſous* D, *&* AC, *c'eſt à dire, au quarré du ſegment* AC. *Ce qui eſt propoſé.* 7 I. 2.

SCHOLIE.

Pour accommoder ce Theoréme aux nombres, ſoit A B, 7. *diuiſee en* 4. *&* 3. *Ie dis que le nombre* 21. *produict de* 3. *par* 7. *eſt egal à* 12. *produict des deux ſegments* 4. *et* 3. *multipliez l'vn par l'autre, & au nombre* 9. *quarré de la premiere partie* 3. *ce que l'operation meſme demonſtre. Semblablement* 28. *produit de* 7. *multiplié par* 4. *eſt egal à* 12. *produit de* 4. *en* 3. *& au nombre* 16. *qui eſt le quarré du* 4. *nombre premierement dit, ou pris, comme l'on void en la figure.*

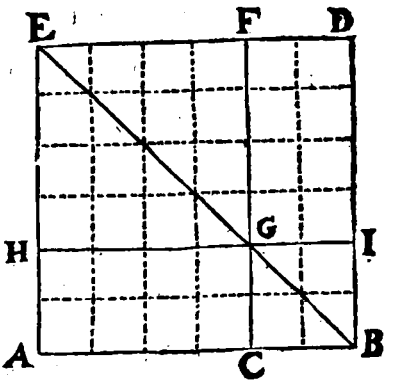
THEOREME 4. PROP. 4.

Si vne ligne droicte eſt coupee comme l'on voudra; le quarré de la toute eſt egal aux quarrez des parties, & à deux fois le rectangle contenu ſous icelles parties.

La ligne droicte AB, ſoit diuiſee comme l'on voudra au poinct C. Ie dis que le quarré de la toute AB, eſt egal aux quarrez des parties AC, CB, & à deux fois le rectangle contenu ſous AC, CB.

Soit deſcrit le quarré de la ligne AB, ſçauoir AD. & ayant mené le diametre BE, ſoit menee par le poinct C, la ligne droite CF, parallele à AE, ou BD, coupant le diametre au poinct G, & par ice-

luy poinct G, ſoit menee IGH, parallele à AB, ou à DE, & le quarré de AB, ſera diuiſé en quatre parallelogrammes.

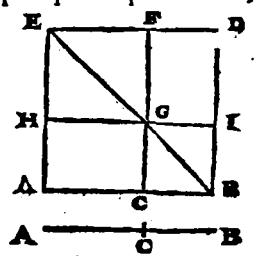


D'autant qu'au triangle ABE, les deux coſtez AB, AE ſont egaux, les deux angles ABE, AEB, [z] ſur la baſe EB, ſont egaux, mais l'angle A, eſt droict au quarré, & les trois angles A, AEB, & ABE, [a] ſont egaux à deux droits: & partant les deux ABE, AEB, chacun demy-droit, eſtans egaux entr'eux: & d'autant que HI, AB, ſont paralleles, l'angle externe GHE, [b] ſera egal à ſon interne & oppoſé A, & partant droit: mais les trois angles du triangle [c] EGH, ſont egaux à deux droits, & GEH, eſt monſtré eſtre demy-droit, & EHG, droit: donc l'autre HGE, ſera auſſi demy-droit, donc au triangle EGH, les deux angles GEH, EGH, ſeront egaux, eſtans chacun demy-droit partant les deux coſtez HE, [d] HG, ſeront egaux: mais les deux coſtez EF, FG, oppoſez [e] ſont egaux à iceux, chacun au ſien: donc le parallelogramme HF, ſera quarré, ayant tous les coſtez egaux, & les angles droits: car vn des angles, ſçauoir EHG: eſtant droit, tous les quatre ſeront droits, comme il eſt

z 5. 1.
a 32. 1.
b 29. 1.
c 32. 1.
d 6. 1.
e 34. 1.

monſtré à la premiere Definition de ce liure. L'on monſtrera par les meſmes raiſons que CI, eſt quarré: partant FH, & CI, [f] ſont les quarrez des parties AC, CB, puis que HG, eſt egale à AC. f 34. 1.

Les rectangles AG, GD, ſeront pareillement contenus ſous les ſegments AC, CB: d'autant que CG, GI, ſont egales à CB, à cauſe du quarré CI, & FG, eſt egale à GH, à cauſe du quarré FH, c'eſt à dire [g] à AC. Partant, puiſque le quarré AD, eſt egal aux deux quarrez HF, & CI, & aux deux rectangles AG, GD, il eſt manifeſte que AD, quarré de la toute AB, eſt egal aux quarrez des parties AC, CD, & a deux fois le rectangle contenu des meſmes parties AC, CB: Done ſi vne ligne droite, &c, Ce qu'il falloit demonſtrer. g 34. pre.



AVTREMENT.

D'autant que la ligne droite AB *eſt diuiſee par le poinct* C, [h] *le quarré de la toute* AB, *eſt egal aux rectangles contenus ſous la toute* AB, *& chacune des parties* AC, CB: *mais le rectangle contenu ſous* AB, AC, [i] *eſt egal au rectangle contenu ſous* AC, CB, *& au quarré de la partie* AC. *ſemblablement, le rectangle contenu ſous* AB, CB, *eſt egal au rectangle ſous* CB, AC, *& au quarré de* CB. *Donc le quarré* AB, *eſt auſſi egal aux quarrez de* AC, CB, *et aux rectangles contenus ſous* AC, CB, *& ſous* CB, AC. *Ce qui eſt propoſé.* h 2. *ſect.* i 3. *ſect.*

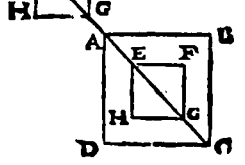
COROLLAIRE. 1.

Par ces demonſtrations il eſt manifeſte, que les parallelogrammes deſcrits à l'entour du diametre du quarré, ſont quarrez.

Cela eſt apparent par la premiere demonſtration de ce Theoréme, où il eſt demonſtré que les rectangles C I, F H, qui ſont à l'entour du diametre B E, ſont quarrez : car en tous autres quarrez ce ſera la meſme demonſtration.

Ce Corollaire toutefois ſe doit entendre des parallelogrammes, qui ſont à l'entour du diametre du quarré, & qui ont quelque angle commun auec le quarré total ; comme ſont les parallelogrammes C I, F H. Car celuy-là a l'angle ABD. commun auec le quarré, & cettuy-cy l'angle A E D.

Il eſt auſſi veritable de quelconques parallelogrammes, qui ſont à l'entour du diametre du quarré, meſme eſtant prolongé, encore qu'ils n'ayent aucun angle commun auec le quarré, pourueu que leurs coſtez ſoient paralleles aux coſtez du quarré.



Car à l'entour du diametre AC, du quarré B D, ſoit le parallelogramme FH, ſoit qu'il ſoit dedans le quarré, ou qu'il ſoit dehors, lequel toutefois ait les coſtez paralleles aux coſtez du quarré. Ie dis que F H, eſt quarré.

k 29. 1. Car puis que AB, EF, ſont paralleles, k les an-

gles BAC, FEG, seront egaux, l'externe à l'interne, & par mesme raison les angles BCA, FGE, seront aussi egaux: mais les angles BAC, BCA, sont demy droicts, comme il a desia esté demonstré. Donc les angles FEG, FGE, seront aussi demy-droicts, [l] & partant les costez EF, FG, opposez à iceux seront egaux [m] & l'angle F, sera droict: Donc puisque les costez EF, FG, [n] sont egaux à leurs opposez GH, HE, le parallelogramme FH, sera equilateral: mais il est aussi rectangle, comme nous auons monstré à la premiere Definition de ce liure, d'autant que l'vn des angles F, est demonstré droict. Donc FH, sera quarré. Ce qui est proposé.

[l] 16. 1. [m] 32. 1. [n] 34. 1.

COROLLAIRE 2.

Il s'ensuit aussi de la demonstration de cette proposition que le diametre de quelconque quarré, diuise les angles d'iceluy en deux egalement. Car il a esté demonstré que les angles AEB, DEB, sont demy-droicts. Ce qui est aussi demonstré par la 34. & 8. Proposition du 1. liure.

SCHOLIE.

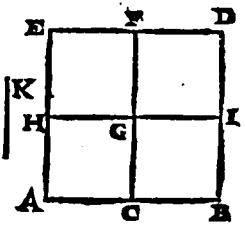
Ce Theorême quatrieſme ſera auſſi monſtré par les nombres: cõme il eſt euidẽt par la figure cy-deſſus appliquee aux nombres. Soit la ligne AB, *de* 6. *pieds, diuiſee en* AC, CB, 4. *&* 2. *le quarré de* AB, *ſera* 36. *pieds de ſuperficie, & les quarrez de* AC, *&* CB, *ſçauoir* HF, *&* CI, *ſeront* 16. *&* 4. *& les* 2. *rectangles ſous* AC, CB, *qui ſont* AG, GD, *ſont chacun* 8. *toutes leſquelles parties enſemble font* 36. *ſçauoir eſt autant que le quarré de la ligne* AB, *qui eſt* ABDE, *comme il eſt manifeſte.*

Par ce quatrieſme Theoréme, il ſera facile de demonſtrer cet autre.

Si vne ligne droicte eſt double d'vne ligne droicte, le quarré deſcrit de celle-là, eſt quadruple du quarré deſcrit de celle-cy. Et ſi vn quarré eſt quadruple d'vn quarré, le coſté de celuy-là ſera double du coſté de cettuy-cy.

Soit premierement la ligne A B, double de la ligne K. Ie dis que le quarré de la droicte ligne A B, eſt quadruple du quarré de la droicte ligne K.

Car ayant diuiſé AB, en 2. egalement au poinct C, ſi l'on faict la conſtruction comme en ce quatrieſme Theoréme, il y aura quatre parallelogrammes AG, CI, IF, FH, leſquels ſeront quarrez & egaux entr'eux, puis que to' leurs coſtez ſont egaux, & les angles droicts, comme il eſt facile à demonſtrer par la 34. Propoſition du liure 1. Partant, puiſque



le quarré A D, eſt egal aux quatre quarrez A G, CI, IF, FH, le quarré de la ligne AB, ſera quadruple du quarré de la ligne AC, c'eſt à dire de la ligne K, qui eſt egale à A C: car tant l'vne que l'autre eſt moitié de la ligne AB.

AVTREMENT.

Le quarré de la ligne AB, *eſt egal aux quarrez de* AC, CB, *& a deux fois le rectangle contenu ſous* AC, CB. *Dõc puis que les quarrez de* AC, CB, *ſont egaux; le rectangle contenu ſous les egales* : AC, CB, *ſera pareillement quarré, & partant egal au quarré de* AC: *il eſt manifeſte que le quarré de* AB, *eſt quadruple du quarré de* AC, *puis qu'il eſt egal à quatre quarrez, vn chacun deſquels eſt egal au quarré de* AC. 4. ſec.

Secondement, ſoit le quarré de la ligne droicte AB, *quadruple du quarré de la ligne droite K. Ie dis que le coſté* AB, *eſt double du coſté K. Car ayant diuiſé* AB, *en deux egalement au poinct* C, *de ſorte que* AB, *ſoit double de* AC, *le quarré de* AB, *ſera quadruple du quarré de* AC, *cõme il a eſté déja mõſtré. Mais il eſt quadruple du quarré de K, par l'hypotheſe. Donc le quarré de K, & de* AC, *ſont egaux: & partant la ligne K, & la ligne* AC, *ſeront egales: mais* AB, *eſt double de* AC, *par la conſtruction. Elle ſera donc auſſi double de K.*

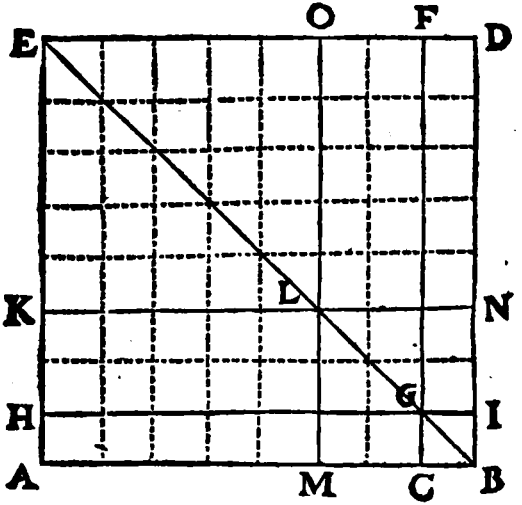
De cette propoſition l'on peut colliger par quel moyen on trouuera vn nombre quarré, lequel auec quel nombre propoſé que l'on voudra impair, faſſe vn nombre quarré.

Pour exemple, voulant trouuer vn nombre q. lequel auec 15. faſſe auſſi vn nombre q. Il faut oſter 1. de 15. reſte 14. Donc la moitié eſt 7. & le quarré eſt 49. lequel auec 15. nombre propoſé, fait 64. nombre auſſi quarré.

L'on fera de meſme, oſtant 1. de tout autre nombre propoſé impair, & prenant la moitié du reſte,

& adiouſtant le 9. de cette moitié au nombre propoſé. Ce qui ſera ainſi demonſtré.

Soit le quarré AD, *dont le Gnomon* HBFG, *ſoit* 15. *le q.* CI, 1. *ſon coſté* CB, *ou* CG, *ſera auſſi* 1. *& tant* AG, *que* GD, *ſera* 7. *parquoy* AC, *ou* GH, *ſera* 7. *Dont le q.* HF, *ſera* 49. *nombre q. lequel auec ledit Gnomon* 15. *fait le q.* AD, *de* 64. *nombre q. Donc la racine quarree eſt* 8.



Semblablement, ſi l'on veut trouuer vn nombre q. duquel vn nombre propoſé impair eſtant oſté, reſte auſſi vn nombre q. Il faut oſter 1. *du nombre propoſé, & à la moitié du reſte adiouſter* 1. *& l'on aura la racine du nombre q. requis. Comme ſi de* 15. *l'on oſte* 1. *& que l'on adiouſte* 1. *à* 7. *moitié du reſte, l'on aura* 8. *Donc le q. eſt* 64. *duquel oſtant* 15. *nombre propoſé, reſte* 49. *nombre q.*

Clauius n'a pas oublié à mettre cecy en ſuitte de cette 4. Prop. (ſelon qu'il a de couſtume de n'oublier rien de ce qu'il trouue de fait) mais il a oublié à l'entendre, diſant à la fin de ſon diſcours ; Regula nihilominus vera eſt, quicũque numerus datus ſit: *La regle eſt neantmoins vraye, quel que ſoit le nombre donné. Ce qui eſt faux : car ſi le nombre propoſé eſtoit pair, comme 16. ayant oſté 1. ſelon la regle, le reſte ſeroit 15. Donc la moitié eſt 7. et ½ c. eſt à dire, 7 ½ & ſon q. eſt 56. & ¼ lequel auecque 16. nombre propoſé, faict 72. & ¼ qui n'eſt pas nombre q. comme il eſt manifeſte de ce qui eſt demonſtré. Car le Gnomon H B F G eſtant poſé de 16. la racine du q. requiſe repreſentee en noſtre figure par la ligne* AB, *ſeroit plus de 8. & moins que 9. Il faut donc que le nombre propoſé ſoit impair, autrement cette regle n'aura lieu.*

Clauius ſe trompe encore en diſant (pour faire le meſme) que ſi du nombre propoſé l'on oſte quelconque nombre quarré que l'on voudra ; (ſçauoir de ceux qui ſe trouuẽt audit nõbre propoſé: car l'õ n'en pourroit oſter d'autre) & que l'on diuiſe la moitié du reſte par la racine du 4 oſté, l'on aura le coſté du 4. requis: Comme ſi le nombre propoſé eſtoit 39. repreſenté en la figure par le Gnomon K B O L, duquel ayant oſté M N, 9. nombre q. Dont la racine eſt 3. pour M L, ou MB, reſte les 2. rect. A L, L D, 30. Dont la moitié eſt AL, *15. lequel diuiſé par la racine 3. qui eſt l'autre coſté M L, on aura l'autre coſté K L, 5. pour la racine du 4. k O, 25. lequel auec le nombre propoſé 39. fait 64. nombre 4. Mais cela n'arriue que par accident. Car ſi le nombre propoſé eſt impair, il faut que le nombre q. ſouſtrait ſoit impair, afin que le reſte ſe puiſſe diuiſer en 2. egalement, &*

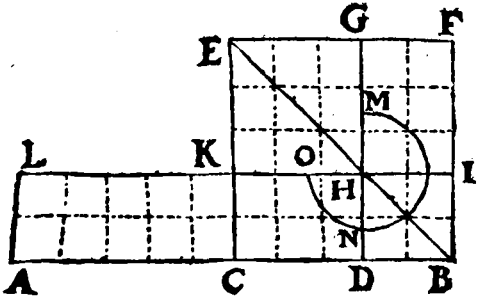
que la moitié ſoit diuiſible par la racine du q. oſté, comme il appert par noſtredit exemple 39. en la figure cy-deſſus. Sẽblablement, ſi de 51. l'on oſte 9. nõbre q. reſte 42. dõt la moitié eſt 21. lequel diuiſé par 3. R. de 9. dõne 7. dont le q. eſt 49. qui auec 51. fait 100. nombre q. Mais ſi dudit nombre 51. l'on oſte 16. nombre q. le reſte 35. ne ſe pourra diuiſer en 2. egalement, parquoy on n'en peut pas oſter tel q. que l'on veut de ceux qui y ſont compris, & ſi l'on en oſtoit le nombre q. 25. la moitié du reſte ſeroit 13. qui n'eſt pas diuiſible par 5. racine du nombre q. oſté 25. & ſi cela n'arriuera pas en tous nombres impairs, comme ſi de 17. on oſte 9. nombre q. impair, reſtera 8. Donc la moitié eſt 4. indiuiſible par 3. racine de 9. &c. Et ſi le nombre propoſé eſt pair, comme 18. cela n'arriuera pas auſſi: car de 18. ſoit oſté 4. nombre q. reſtera 14. dont la moitié eſt indiuiſible par 2. racine de 4. & ſi on en oſte 9. nombre q. il en viendra de meſme. Semblablement de ce nombre 26. ſi on oſte les qq. 4. 9. ou 16. reſtera touſiours vn nombre impair: & partant leur moitié indiuiſible par chaque racine des qq. oſtez, en ce nombre 16. cela arriue: car oſtant le q. 4. reſte 12. dont la moitié eſt 6. lequel diuiſé par 2. racine de 4. donne 3. Dont le quarré eſt 9. lequel auec 16. nombre propoſé faict 25. nombre quarré. C'eſt donc par accident que cela ſe faict aux nombres pairs et impairs; & voila comment Clauius n'a entendu ce qu'il a dict icy.

THEOREME

THEOREME 5. PROP. 5.

Si vne *ligne* droicte est coupee en deux parties egales, & en deux parties inegales, le *rectangle* contenu des parties inegales de la toute, auec le quarré de la partie du milieu, est egal au quarré de la moitié de la toute.

La ligne droite AB, soit diuisee au poinct C, en 2. parties egales, & en 2 parties inegales au poinct D. Ie dis que le rectangle contenu sous AD, & DB, parties inegales de la toute AB, auec le quarré de la partie du milieu CD, est egal au quarré de CB, moitié de la toute AB.



Car soit descrit CF, quarré[o] de CB, & soit [o] 46. 1.
mené le diametre BE. & par le poinct D, soit menee[p] DG, parallele à BF, ou CE, coupant le dia- [p] 31. 1.
metre au poinct H, & par le poinct H soit menee *IK, parallelle* à AB, & du poinct A, menee AL,

parallele à CE, rencontrant IK, prolongee au poinct L, les parallelogrammes KG, DI, à l'entour du diametre BE, seront q quarrez: & partant DH, egale à DB & KH, à CD; donc le rectangle AH, sera contenu sous AD, DB, & kG, sera le quarré de CD, lequel AH, auec KG, est egal au quarré CF. Car d'autant[r] que les complements CH, & HF, sont egaux, si l'on adiouste le commun quarré DI, le parallelogramme DF, sera egal au parallelogramme CI. Mais le parallelogramme AK, est[f] egal au parallelogrãme CI, estans constituez sur bases egales AC, & CB, entre mesmes paralleles AB, LI: donc Ak, sera egal à DF, ausquels si l'on adionste CH, commun, le Gnomon MNO, sera egal au rectangle AH, parquoy puisque le Gnomon MNO, & le quarré KG, sont egaux au quarré CF, le rectangle AH, auec le quarré kG, sera egal au mesme quarré CF. Donc si vne ligne droicte est coupee, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

q *Coroll.* 1. 4. 2.

r 43. 1.

f 36. 1.

SCHOLIE.

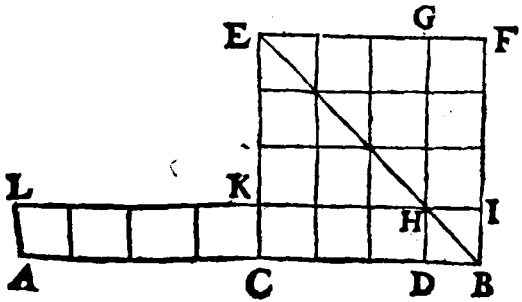
Autrement, ce Theoreme sera demonstré auec Maurolycus, en la mesme maniere qu'il est aussi monstré aux nombres, par le Moyne Barlaam, ce que nous ferons aussi auec le mesme Maurolycus, iusques à l'vnziesme Proposition exclusiuement.

t 4. *sec.* *D'autant que le quarré de CB, est egal[t] aux quarrez de CD, & de DB, et à deux fois le rectangle contenu sous DB, CD: mais le rectangle contenu sous DB, CB,* v 3. *sec.* *est egal au rectangle contenu sous DB, CD, & au q. de DB; le q. de CB, sera egal à l'autre q.*

de CD, auec l'autre rectangle contenu sous DB, CD, & au rectãgle cõtenu sous DB, CB, ou sous DB, AC. Mais le rectangle contenu sous DB, & la toute AD, [x] est egale aux rectangles contenus sous DB, AC, & sous DB, CD. Donc le q. de CB, sera egal au q. de CD, auec le rectangle contenu sous DB, AD, c'est à dire, le rectangle contenu sous AD, DB, auec le q. de CD, sera egal au q. de CB. Ce qu'il falloit demonstrer. [x] XI. sec.

Le mesme est aussi manifeste en l'appliquant aux nomb. Soit la ligne AB, 10. tant AC, que CB, sera 5. & soit CD, 3. AD, sera 8. & DB, 2. partant le rectangle AH, sera 16. & le q. KG, 9. & le Gnomon aussi 16. lequel auec le q. KG, est 25. qui est le q. CF, & autant vaut le rectangle AH, auec le q. KG: comme il est manifeste.

Par cette 5. Proposition l'on peut aussi trouuer vn nombre quarré, lequel auec quel nombre impair que l'on voudra, sera vn nombre q. ce que l'on fera



en adiouſtant 1. au nombre proposé, et prenant la moitié du tout, & oſtant 1. de icelle moitié, l'on aura

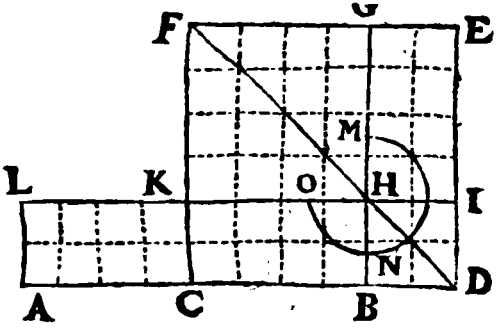
le coſté du q. requis, comme ſi le nombre donné eſt 7. auec 1. ce ſont 8. dont la moitié eſt 4. duquel nombre eſtant 1. le reſte ſera 3. duquel le q. eſt 9. lequel auec le nombre propoſé 7. faict vn nombre quarré, ſçauoir 16. ce qui ſera ainſi demonſtré. Soit AH, 7. auec DJ, 1. ce ſont 8. dont la moitié CJ, eſt 4. duquel eſtant DJ, 1. reſtera CD, 3. dont le q. eſt 9. pour le q. KG, qui auec le rect. AH, ou le gnomon nombre propoſé, fait vn nombre quarré. Comme il eſt demonſtré.

THEOREME 6. PROP. 6.

Si vne ligne droicte eſt coupee en deux parties egales, & qu on luy adiouſte quelque ligne droicte directement, le rectangle contenu ſous la toute auec l'adiouſtee, & l'adiouſtee, auec le quarré de la moitié, eſt egal au quarré deſcrit de la ligne compoſee de la moitié, & de l'aiouſtee comme d'vne.

La ligne droicte AB, ſoit diuiſee par C, en deux egalement, & ſoit adiouſtee directement à icelle la droicte ligne B D. Ie dis que le rectangle contenu ſous la toute compoſee de AB, B D; ſçauoir AD, & l'adiouſtee BD, auec le quarré de la moitié CB, eſt egal au q. de la ligne C D, compoſee de la moitié CB, & de l'adiouſtee B D.

Sur CD ſoit deſcrit le quarré CE, & ayant mené le diametre DF, par B, ſoit menee B G, parallele à DE, ou CF, coupant le diametre au poinct H, & par H, ſoit menee IK, parallele à CD, & par A, ſoit



menee AL, parallele à CF, rencontrant IK, prolongee au poinct L. Donc BI, & KG, seront quarrez, & DI, sera egale à BD, & KH, est egale à CB: parquoy le rectangle AI, sera conteau sous AD, DB, & KG, sera le quarré de CB, lesquels rectangle AI, & quarré KG, sont egaux au quarré CE. Car d'autant que le parallelogramme AK, est egal au parallelogramme CH, puisque les bases AC, CB, sont egales: & le parallelogramme HE, est egal au mesme CH, le complement au complement, AK, & HE, seront egaux entr'eux: Donc leur adiouſtãt le commun CI, le Gnomon MNO, sera egal au rect. AI: partant puisque le Gnomon MNO, auec le quarré KG, est egal au quarré CE, le rectangle AI, auec le quarré KG, sera aussi egal au quarré CE. Donc si vne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. *Coroll.* 1. 4 2. y 34. 1. z 36. 1.

Ce qui est aussi facile à entendre par nostre figure, où les rectangles AK, HE, sont chacun 8. parties egales, à chacun desquels si on adiouste le rectangle CI, 12. le rectangle AI, vaudra autant que

le Gnomon, ſçauoir 18. Dont AI, auec KG, ſera egal à CE, q. comme il appert.

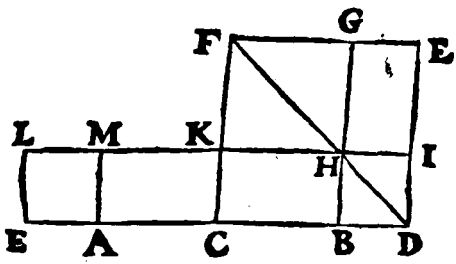
SCHOLIE.

24. I. ſec. *Autrement, d'autant que le [a] quarré de CD, eſt egal aux quarrez de CB, BD, & à deux fois le rectangle contenu ſous DB, CB, c'eſt à dire aux quarrez de CB, BD, & aux rectangles contenus ſous DB, CB, et ſous DB, AC, (prenant vne fois AC, pour CB, qui luy eſt egale.) Mais le rectangle contenu*

b1. ſec. *ſous DB, & la toute AD, [b] eſt egal aux rectangles ſous DB, AC; DB, CB, & ſous DB, DB, (qui eſt le quarré de DB.) Donc le q. de CD, eſt egal à l'autre q. de CB, auec le rectangle contenu ſous DB, AD: c'eſt à dire le rectangle contenu ſous AD, DB, auec le q. de CB, eſt egal au q. de CD. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

Si l'on conſidere attentiuement, l'on trouuera que cette 6. Prop. ſe peut demonſtrer facilement par la precedente 5. Car ſoit la ligne droite AB, coupee en deux egalement au poinct C; & à icelle ſoit adiouſtee BD, directement. Ie dis que le rectangle contenu ſous la toute AD, compoſee de AB, & BD, & l'adiouſtee BD, auec le quarré de la moitié CB, eſt egal au quarré de CD, compoſee de la moitié & de l'adiouſtee.

Car ſoit adiouſtee à AD, la droite ligne AE, de l'autre part, egale à BD: la toute ED, ſera coupee au poinct C, egalement, & au poinct B, inegalement: & d'autant que EA, AC, ſont egales à DB, BC, pareillement la droicte ligne EB, ſera egale à la droicte AD, puiſque EA, eſt faite egale à DB, & AB, eſt commune à toutes les deux. Donc le rectangle



contenu ſous les parties inegales EB, BD, *auec le q. de la ſection d'entre-deux* CB, *c'eſt à dire le rectangle contenu ſous* AD, BD, *auec le q. de la moitié* CB, *ſera egal au q. de la moitié* CD. *C'eſt à dire, au q. de* CD, *compoſé de* CB, *moitié de la donnee* AB, *& de l'adiouſtee* BD. *Ce qui eſt propoſé.*

Pour appliquer ce Theoreme aux nombres, ſoit diuiſé 8. *en* 2. *egalement, ſçauoir en* 4. *& 4. & ſoit adiouſté* 2. *l'on peut voir comme le nombre* 10. *produit de tout le nombre compoſé* 10, *multiplié par l'adiouſté* 2. *auec* 16. *q. de la moitié* 4. *eſt egal à* 36. *q. de* 6. *compoſé de la moitié* 4. *& de l'adiouſté* 2. *Ce qui ſe peut auſſi entendre par nos figures.*

De ce Theoreme l'on collige auſſi vne tres-belle proprieté de la proportionalité Arithmetique, laquelle conſiſte touſiours en vn meſme excez des quantitez proportionelles. Car puiſque AD, *excede* CD, *de la grandeur* AC, *c'eſt à dire de* CB; *et* CD, *excede* BD, *de la meſme quantité* BC. *les trois lignes,* AD, CD, BD, *auront la proportionalité Arithmetique, d'autant que la premiere* AD, *excede la* 2. CD, *du meſme excez que la* 2. CD, *excede la* 3. BD. *Parquoy puis qu'il eſt demonſtré que le rectangle conte-*

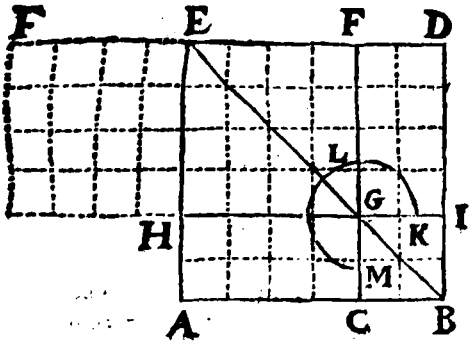
nu ſous les extremes AD, BD, *auec le q. de l'excez* CB, *eſt egal au q. de la moyenne* CD, *l'on collige manifeſtement qu'en toute proportionalité Arithmetique de 3. lignes, le rectangle contenu ſous les extremes, auec le q. de l'excez, eſt egal au q. de la moyenne. Car 3. lignes proportionnelles, ſelon l'Arithmetique, ſe pourront touſiours conioindre, en ſorte qu'elles feront vne ligne qui ſe pourra diuiſer en 2. egalement, laquelle ſoit egale à l'excez entre la 1. & la 3. & de la 3. Comme il appert, ſi les 3. lignes droites ſont donnees* AD, CD, BD. *Car ſi de la premiere* AD, *l'on oſte* DC, *egale à la moyenne, & de cette moyenne DC, l'on oſte la 3. DB, la ligne AB, (qui eſt l'excez entre la 1. & la 3.) ſera coupee en deux egalement au poinct C, & à icelle adiouſtee la 3. BD. Car puiſque* BC. *eſt l'excez entre la moyenne* CD, *et la 3.* BD, *qui doit eſtre egale à icelle* AC, *ſçauoir à l'excez entre la 1.* AD, *et la moyenne* CD, *à cauſe de la proportionalité Arithmetique* AB, *ſera neceſſairement coupee en 2. parties egales par le poinct* C, *& y a meſme raiſon des autres; laquelle choſe ſe voit aux nombres qui ont vn meſme excez: car en ces nombres 4. 7. 10. qui ont meſme excez 3. le nombre 40. produit des extremes 4. & 10. auec 9. quarré de l'excez, eſt egal à 49. nombre q. produit du moyen nombre 7.*

Par cette 6. Prop. l'on trouuera vn nombre q. auec lequel quelconque nombre impair propoſé eſtant adiouſté, ſera pareillement vn nombre q. l'operation ſe fera en la meſme maniere qu'en la 4. Propoſition, &c.

THEOREME 7. PROP. 7.

Si vne *ligne* droicte eſt coupee comme l'on *voudra*, les deux quarrez enſemble, *ſçauoir celuy* de la toute, & celuy de l'vn des ſegments, ſont egaux à deux fois le rectangle contenu ſous la toute & ledict ſegment, & au quarré de l'autre ſegment.

Soit la ligne droicte AB, coupee comme l'on voudra au poinct C. Ie dis que le quarré de la toute AB, & le q. du ſegment AC, enſéble, ſont egaux à deux fois le rectãgle, contenu ſous la toute AB, & ledict ſegment AC: & au quarré de l'autre ſegment C B. Soit deſcrit le quarré de la ligne A B, ſçauoir le quarré AD, & ayant mené le diametre BE, par C, ſoit menee CF, parallele à AE, ou BD, coupant le diametre au poinct G, par lequel ſoit menée HI, parallele à AB, par le 1. Coroll. de la 4. Propo. CI, HF, ſeront quarrez. Et [c] d'autant que [c] 34. 1.



GH, eſt egale à AC, la figure HF, ſera le quarré du ſegment AC. Derechef, d'autant que AE eſt egale à AB, le rectangle AF ſera contenu ſous la toute AB, & le ſegment AC. Par la meſme raiſon le rectangle HD, ſera contenu ſous les meſmes AB, AC, d'autant que DE, & FH, ſont egales à AB, AC, à cauſe des quarrez AD, HF.

D'autant donc que le quarré AD, eſt egal aux rectangles AF, FI, c'eſt à dire au Gnomon KLM, & au quarré CI: ſi l'on adiouſte le quarré commun HF, les quarrez AD, HF, ſeront egaux aux rectangles AF, DH, (chacun deſquels eſt contenu ſous la toute AB, & le ſegment AC,) & à CI, quarré de l'autre ſegment CB. Donc ſi vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. Ce qui eſt auſſi manifeſte appliqué aux nombres: car AB, eſtant coupee en 6. parties, AC, ſera 4. & CB, 2. & AF, ſera 24. & GD, auec HF, auſſi 24. & CI, 4. leſquelles parties enſemble font 52 parties egales, & les deux quarrez AD, HF, font auſſi 52. Telles parties, &c.

SCHOLIE.

d 4. ſec. *Autrement, d'autant que le quarré de* AB, [d] *eſt egal aux quarrez de* AC, CB, *& a deux fois le rectangle cõtenu ſous* AC, CB, *ſi l'on adiouſte le q. commun de* AC, *ſçauoir* HF, *les quarrez de* AB, AC, *ſeront egaux au quarré de* AC, *deux fois, & au q. de* CB, *& a deux fois le rectangle contenu ſous* AC, CB. *Mais le rectangle contenu ſous* AB, AC, [c] *eſt egal au rectangle contenu ſous* AC, CB, *& au q. de* AC: *& partant deux fois le rectangle contenu ſous* AB, AC, *eſt egal à deux fois le rectangle contenu ſous* AC, CB, *& à deux fois le q. de* AC: *donc les quarrez de* AB, AC, *ſont egaux à l'autre q. de* CB, *& à deux fois le re-*

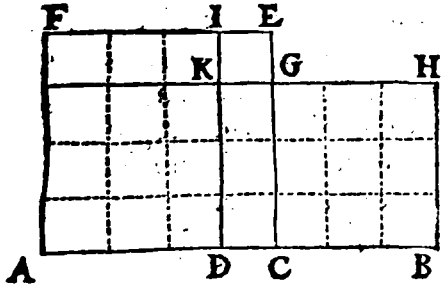
c 3. ſec.

Et angle contenu sous A B, A C. *Ce qu'il falloit demonstrer.*

Nous adiousterons icy le Theoréme suyuant de Federic Commandin.

Si vne ligne droicte est coupee en parties inegales, les quarrez d'icelles parties sont egaux au rectangle, contenu deux fois sous lesdictes parties, & au quarré de la ligne, par laquelle la plus grande partie excede la plus petite.

Soit la ligne droicte A B, coupee en parties inegales A C, C B, & soit A C, la plus grande partie, & soit prise A D, egale à la moindre partie C B: ainsi D C, soit l'excez, par lequel la partie A C, excede la partie C B. Ie dis que les quarrez des parties A C, C B, sont egaux à deux fois, le rectangle contenu sous A C, C B, & au quarré de la ligne D C.



Car soient constituez les quarrez A E C H, & soit menee D I, parallele à C E, & prolongee H G,

au poinct K: D'autant que AD, eſt egale à CB, ſi l'on adiouſte la commune DC, la toute AC, c'eſt à dire CE, ſera egale à la toute DB: mais CG, eſt auſſi egale à CB, d'autant que CH, eſt vn quarré: Donc la reſtante GE, ſera egale à la reſtante D C: & partant puis que IE, eſt auſſi egale à DC, GE, & IE, ſeront egales, & par ainſi EK, ſera le quarré deſcrit de l'excez DC. Mais d'autant que les rectangles AI, D H, ſont contenus ſous les parties AC, CB, (car AC, eſt egale tant à l'vne qu'à l'autre AF, DB, & CB, egale tant à l'vne qu'à l'autre AD, BH,) il eſt manifeſte que les quarrez AE, & CH, deſcrits des parties AC, CB, ſont egaux aux rectangles AI, DH, qui ſont contenus ſous les parties A C, CB, & à IG, quarré de l'excez D C. Ce qui eſt propoſé. *Ce qui eſt encore manifeſte aux nombres par la figure.*

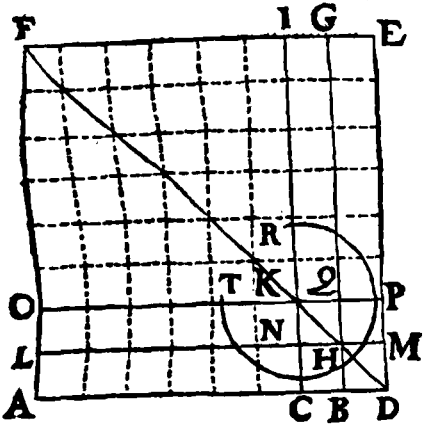
THEOREME 8. PROPO. 8.

Si vne ligne droicte eſt coupee comme l'on voudra, quatre fois le rectangle, contenu ſous la toute & vn des ſegments, auec le quarré de l'autre ſegment, eſt egal au quarré deſcrit de la toute & dudict ſegment, comme d'vne.

Soit AB, diuiſee comme l'on voudra, au poinct C. Ie dis que quatre fois le rectangle contenu ſous la toute AB, & le ſegment CB, auec le quarré de l'autre ſegment AC, eſt egal au quarré de la ligne compoſee de la toute A B, & dudict ſegment CB, comme d'vne.

Car ſoit prolongee A B, vers D, & ſoit poſee

BD, egale à BC, & sur la toute AD, soit descrit le quarré AE, & ayant mené le diametre DF, soient menees CI, BG, paralleles à DE, coupant le diametre aux poincts H, & K, par lesquels soient menees LM, OP, paralleles à AD, lesquelles coupent les premieres paralleles aux poincts N, & Q.



Premierement, les parallelogrammes OI, NQ, BM, LG, CP, qui sont à l'entour du diametre DF, seront quarrez par le 1. Corollaire de la quatrieſme Propoſition : & d autant [f] que OK, est egale à AC ; OI, sera le quarré du segment AC. Derechef puisque NH, est egale [g] à CB ; NQ sera le quarré du segment CB : & partant egal au quarré BM, puisque CB, & BD, sont egales. Partant chacune des lignes BH, HQ est egale au segment CB ; & par ainsi les deux rectangles AH, LQ, seront compris sous la toute AB, & le segment CB, [h] puisque LH, est egale à AB. Par mes-

[f] 34. 1.

[g] 34. 1.

[h] 34. 1.

me raiſon NG, HE, ſeront compris ſous AB, & CB, puiſque les lignes droictes NH, HM, ſont egales à CB, & BD; & GH, HM egales à FL: c'eſt à dire, à LH, ou AB, ſon egale. Et d'autant que les quarrez NQ, BM, ſont egaux, ſi l'on adiouſte le commun rectangle KG BM, & KG, enſemble ſeront egaux au rectangle NG. Parquoy les cinq rectangles AH LQ, HE, BM, & KG, qui conſtituent le Gnomon RHT, ſont egaux à quatre fois le rectangle contenu ſous la toute AB, & le ſegment CB. Or puiſque le Gnomon RST, & le quarré OI, ſont egaux au quarré AE: quatre fois le rectangle contenu ſous la toute AB, & le ſegment CB, auec le quarré de l'autre ſegment AC, eſt egal au quarré de la ligne AD, compoſee de AB, & dudict ſegment, CB. Donc ſi vne ligne droicte eſt coupee comme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. Ce qui s'entendra auſſi par noſtre figure, diuiſee en parties egales.

SCHOLIE.

Autrement, d'autant que le quarré de AD, 4. *ſec.* [1] *eſt egal aux quarrez de AB, BD, & à deux fois le rectangle contenu ſous AB, BD, c'eſt à dire aux quarrez AB, BC, qui ſont LG, BN, auec deux fois le rectangle contenu ſous AB, BC: mais les quarrez* 7. *ſec.* [k] *de AB, BC, ſont egaux à 2. fois le rectangle contenu ſous AB, BC, & au q. de AC: le q. de AD, ſera egal à quatre fois le rectangle contenu ſous AB, BC, & au quarré de AC. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

Maintenant ſoit diuiſé le nombre 10. *comme l'on voudra, en* 6. *& 4. le nombre* 240. *qui eſt fait*

du tout 10. *multiplié par la partie* 6. *quatre fois, auec le nombre* 16. *q. de l'autre partie* 4. *c'eſt à dire* 256. *eſt egal au nombre q. de* 16. *qui eſt compoſé du nombre donné* 10. *& de ladite partie* 6. *comme il eſt manifeſte. En la meſme maniere le nombre* 160. *qui eſt fait du tout* 10,4. *fois multiplié par la partie* 4. *auec* 36. *q. de l'autre partie* 6. *c'eſt à dire* 196. *eſt egal au q. du nombre* 14. *compoſé de* 10. *& 4. comme il eſt euident.*

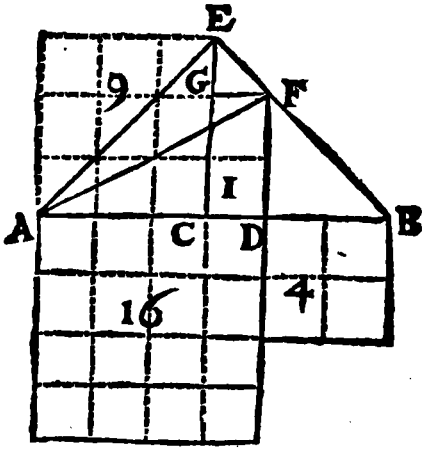
Par cette Propoſition l'on peut trouuer vn nombre q. auec lequel vn nombre propoſé, fera auſſi vn nombre q. Pour ce faire, il faut prendre le quart du nombre propoſé (car il faut qu'iceluy nombre propoſé ſe puiſſe diuiſer en quatre parties egales) & en oſter 1. *& le q. du reſte auec le nombre propoſé, fera vn nombre q. comme il appert par la figure cy-deſſus, où le Gnomon THR, eſt* 28. *Donc le quart eſt* 7. *pour le rect. AH, duquel oſtant CI,* 1. *reſtera LC,* 6. *& AC, ou OK, auſſi* 6. *Dont le quarré OF, eſt* 36. *lequel auecque* 28. *faict* 64. *nombre quarré.*

Au contraire, pour trouuer vn nombre q. duquel le nombre propoſé eſtant ſouſtrait, reſte pareillement vn nombre q. Il faut adiouſter 1. *au quart du nombre propoſé, & l'on aura la racine du nombre quarré requis. Comme ſi au quart du nombre propoſé* 28. *qui eſt le rectangle AH,* 7. *l'on adiouſte BM,* 1. *l'on aura AD,* 8. *Dont le quarré AE, eſt* 64. *duquel ayant oſté* 28. *ſçauoir le Gnomon THR, reſtera OI,* 36. *auſſi nombre quarré.*

THEOREME 9. PROP. 9.

Si vne ligne droicte eſt coupee en deux parties egales, & en deux parties inegales; les quarrez des ſegments inegaux de la toute, ſont doubles du quarré de la moitié, & du quarré de la ſection du milieu.

Soit coupee la droicte ligne AB, en deux egalement au poinct C, & en deux inegalement au poinct D. Ie dis que les quarrez des ſegments inegaux AD, DB, enſemble, ſont doubles des quarrez enſemble, qui ſont faicts de la moitié AC, & de la ſection du milieu CD.



Du poinct C, ſoit menee CE, à angles droicts à AB, & poſee egale à AC, & ſoient conioinctes AE, EB; & de D, ſoit auſſi menee DF, à angles droicts

droicts à AB, coupant EB, au poinct F, par lequel soit menee FG, parallele à AB, coupant CE, au poinct G; & finalement soit iointe AF. D'autant qu'au triangle ACE, les deux costez AC, CE, sont egaux, les deux angles CAE, CEA, seront egaux: mais ACE, est droict; Donc les deux [l] autres vaudront vn droict: & partant l'angle AEC, sera demy droict. Par la mesme raison l'angle BEC, sera monstré demy-droict, & par consequent le tout AEB, sera droict. Derechef, d'autant qu'au triangle FGE, l'angle EGF, [m] est egal au droict ECB, l'externe à l'interne; les deux autres [n] seront egaux à vn droict: mais il est demonstré que l'angle FEG, est demy-droict: Donc EFG, sera aussi demy-droict, & partant tous deux egaux; [o] donc les costez EG, GF, seront egaux entr'eux. En la mesme maniere l'on monstrera que les deux lignes FD, & DB, sont egales entr'elles. l 5. 1. l 32. 1. m 29. 1. n 32. 1. o 6. 1.

Or d'autant qu'au triangle ACE, l'angle C, est droict, le [p] quarré du costé AE, sera egal aux deux quarrez de AC, CE, lesquels sont egaux entr'eux, estans les lignes AC, CE, egales: donc le quarré de AE, sera double du quarré de AC. Derechef, d'autant qu'au triangle EGF, l'angle G, est droict, & les deux costez GE, GF, egaux, [q] le quarré de EF, sera double du quarré de GF, c'est à dire, du quarré de CD, qui est [r] egale à GF. Donc les 2. quarrez de AE, & EF, sont doubles des deux quarrez de AC, & CD: mais iceux quarrez de AE, & EF, [s] sont egaux au quarré de AF. Donc le quarré de AF, sera double des deux quarrez de AC, CD: & le q. de AF, est egal aux deux quarrez de AD, DF. Donc les deux quarrez de AD, DF, sont doubles des deux quarrez AC, CD; mais le quarré p 47. 1. q 47. 1. r 34. 1. s 47. 1.

de DF, est egal au quarré de DB : car icelles lignes sont monstrees egales. Pareillement donc les quarrez des segments AD, DB, seront aussi doubles des quarrez de AC, & CD, moitié de la ligne AB : & de la section du milieu. Donc si vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer : ce que l'on entendra encore facilement par cette figure.

SCHOLIE.

Autrement, d'autant que le quarré de la ligne AD, *est* t *egal aux deux quarrez de* AC, CD, *& à deux fois le rectangle contenu sous* AC, CD : *si l'on adiouste le commun q. de* DB, *les deux quarrez de* AD, *& de* DB, *seront egaux aux 3. quarrez de* AC, CD, *& de* DB, *& à deux fois le rectangle contenu sous* AC, CD, *ou sous* BC, CD : *mais les quarrez de* BC, *ou* AC, *& de* CD, *sont* v *egaux au quarré de* DB, *& à deux fois le rectangle contenu sous* BC, CD. *Donc les quarrez de* AB, DB, *sont egaux, à deux fois les quarrez de* AC, CD : *& partant doubles d'iceux. Ce qu'il falloit demonstrer.*

t 4. sec.

v 7. sec.

Commandin demonstre cette Proposition autrement, en cette maniere.

Dautant que AC, est egale à CB, & CB, excede CD, de DB ; AC, excedera pareillement la mesme CD, de DB. Partant, comme il a esté demonstré à la septiesme Proposition de ce liure, les quarrez de AC, CD, sont egaux à deux fois le rectangle contenu sous AC, CD, & au quarré de DB : parquoy les quarrez de AC, CD, & deux fois le rectangle contenu sous AC, CD, auec le quarré de DB, sont doubles des quarrez de AC, CD : mais le quarré de AD, est x egal aux quar-

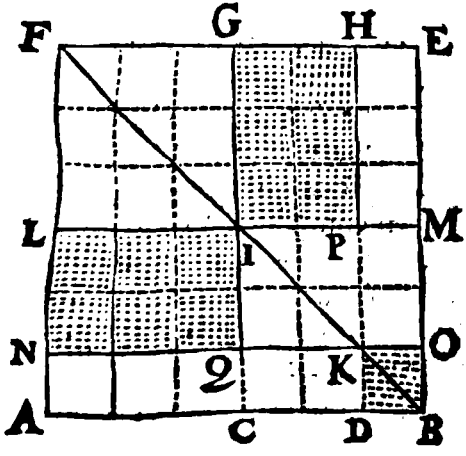
x 4. sec.

rez de AC, CD, & à deux fois le rectangle contenu sous AC, CD. Donc les quarrez de AD, DB, sont doubles des quarrez de AC, CD.

Derechef, soit le nombre 10. diuisé egalement en 5. & 5. & inegalement en 7. & 3. la moyenne section sera 2. comme il est dict en la 5. Proposition. Les quarrez des parties inegales 7. & 3. qui sont 49. & 9. sont doubles de 25. & 4. quarrez de la moitié & de la moyenne section; comme il est manifeste.

Nous pourrons aussi demonstrer cette 9. Proposition par la construction comme les precedentes, en cette maniere.

Soit AE, quarré de AB, diuisee à C, egalement, 46. 1



& à D inegalement, & soit mené BF, diametre, & *CG, DH*, paralleles à BE, AF, & par I, & K, soient 31. 1.

Coroll.1. menees NO, LM, paralleles à AB: ou FE, LG, QP,
4. 2. NH, DO, CM, seront qq. & partant AI, IE, aussi
4. 1. quarrez; parquoy LG, sera le q. de AC, moitié, &
34. 1. QP, q. de CD, partie du milieu, & NH, DO, quarrez des parties inegales AD, DB, qui sont doubles de LG, QP, quarrez, c'est à dire, que NI,
36. 1. IH, DO, ensemble, sont egaux à LG, QP: car NI, QM, sont egaux, donc NI, sera egal à QP, q. & à KM, rect. Parquoy adioustant DO: NI, DO, seront egaux à QP, DM, c'est à dire, à QP, PE, en-
56. 1. semble, (car DM, PE, sont egaux, BM, estant egale à BC, & ME, à MI, ou BC.) Dõc si on adiouste IK; NI, DO, IH, seront egaux à IE, QP, c'est à dire, à LG, QP, (puisque LG, IE, sont egaux:) Donc NH, DO, quarrez des parties inegales seront doubles de LG, QP, quarrez de la moitié, & de la partie du milieu.

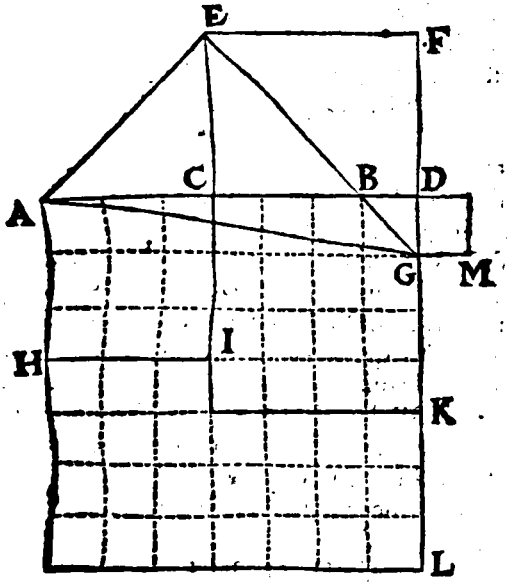
THEOREME 10. PROPO. 10.

Si vne ligne droicte est coupee en deux parties egales, & qu'on luy adiouste directement quelque ligne droicte, les deux quarrez ensemble de la toute auec l'adioustee, & de l'aioustee sont doubles, du quarré descrit de la moitié, & du quarré de la ligne composee de la moitié, & de l'adioustee comme d'vne.

Soit coupee AB, en deux egalement au poinct C, & soit adioustee directement à icelle BD. Ie dis que les deux quarrez de AD, & de DB, ensemble, sont doubles des quarrez ensemble, qui

ſont deſcrits de A C, & C D.

Car ſoit menee C E, à angles droicts à la ligne AB, & poſee egale à la moitié A C, & ſoient conioinctes les droictes lignes AE, EB, & par D, ſoit menee *F D G*, parallele à C E, rencontrant E B, prolongee au poinct G, & par E, ſoit menee E F, parallele à C D, rencõtrant D F, au poinct F, & ſoit con-



ioincte la l. droite A G: l'on monſtrera maintenant que l'angle A E B, eſt droict comme en la precedente Propoſition, & C E B, demy-droict: & partant ſon alterne E G F, pareillement demy-droict: mais l'angle F, eſt droict eſtant oppoſé au droict C, au parallelogramme C F. Donc l'au-

y 29. 1.
z 34. 1.
a 32. 1.

tre FEG, sera aussi demy droict, & partant egal à
b 6. 1. EGF, parquoy EF, [b] FG, opposees aux angles FEG, EGF, sont pareillement egales. Par le mesme discours on monstrera que BD, DG, sont egales, d'autant que l'angle BDG, est droict, & BGD, demy-droict, &c.

c 47. 1. Dautant donc que le quarré de AE, [c] est egal aux quarrez egaux des lignes droictes egales AC, CE, iceluy quarré de AE, sera double du quarré de AC. Derechef, d'autant que le quarré de EG,
d 47. 1. [d] est egal aux quarrez egaux des lignes droictes egales EF, FG, iceluy quarré de EG, sera pareille-
e 34. 1. ment double du quarré EF, ou de CD, son egale: car [e] CD, est egale à EF: donc les deux quarrez de AE, EG, sont doubles des quarrez de AC, CD.

f 47. 1. Mais le quarré de AG, est egal aux [f] quarrez de AE, EG, & partant double des quarrez de AC, CD, & les quarrez de AD, DG, sont egaux au quarré de AG. Donc les quarrez de AD, DG, sont doubles des quarrez descrits de AC, CD. Donc puis que le quarré de DG, est egal au quarré de son egale BD. les quarrez de AD, DB, seront pareillement doubles des quarrez descrits de AC, CD. Partant, si vne ligne droicte est coupee en deux egalement, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

g 4. sec. *Autrement, dautant que le quarré de* AD, [g] *est egal aux quarrez de* AC, CD, *& à deux fois le rectangle contenu sous* AC. CD, *ou sous* BC, CD: *si l'on adiouste le commun quarré de* BD, *les deux quarrez* AD, *& de* BD, *seront egaux aux trois quarrez de* AC, CD, BD, *& à deux fois le rectangle contenu sous* BC, CD.

h 7. sec. [h] *Mais les quarrez de* CD, *&* BC,

c'eſt à dire les quarrez de AC, CD, *ſont egaux au q. de* BD, *& à deux fois le rectangle contenu ſous* BC, CD. *Donc les quarrez de* AD, BD, *ſont egaux aux quarrez de* AC, CD, *deux fois; & partant, les quarrez de* AD, BD, *ſont doubles des quarrez* AC, CD. *Ce qu'il falloit demonſtrer.*

Commandin demonſtre cecy autrement: D'autant que AC, *eſt egale à* CB. *&* CD, *excede* CB, *de* BD, *la meſme* CD, *excedera pareillement* AC, *du meſme excez* BD: *partant, comme il a eſté monſtré à la 7. Prop. de ce liure, les quarrez de* AC, CD, *ſont egaux à deux fois le rectangle contenu ſous* AC, CD, *et au quarré de* BD: *& pour cette cauſe les quarrez* AC, CD, *& deux fois le rectan. cõtenu ſous* AC. CD, *auec le quarré de* BD, *ſont doubles des quarrez de* AC, CD: *mais le q. de* AD, *eſt egal aux quarrez de* AC, CD, *& à deux fois le rectangle contenu ſous* AC, CD. *Donc les quarrez de* AD, *& de* BD, *ſont doubles des quarrez, de* AC, CD.

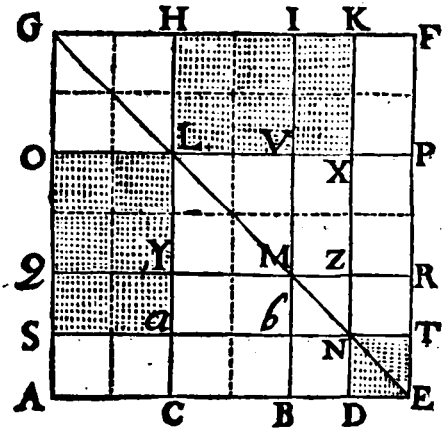
i 4. ſec.

Le nombre 10. ſoit diuiſé en deux parties egales 5. & 5. auquel ſoit adiouſté quelconque nombre 3. de ſorte que tout le nombre compoſé ſoit 13. Dont les nombres quarrez 169. & 9. des nombres 13. & 3. ſont doubles des nombres quarrez 25. et 64. qui ſont produits de ces nombres 5. & 8. Comme il eſt manifeſte.

Cette 10. *Propoſition ſe monſtre auſſi par la conſtruction, comme la 9. comme s'enſuit.*

Ayant prolongé AD, au poinct E, en ſorte que DE, ſoit egale à BD, adiouſtee, & ayant deſcrit le quarré AF, de la toute AE, & mené le diametre EG, ſoient menees par les poincts C, B, D, les li-

gnes droictes CH, BI, DK, paralleles à AG, EF, coupantes le diametre EG, aux poincts LMN, par lesquels soient menees OP, QR, ST, paralleles aux costez AE, GF, coupant les premieres aux poincts V, X, Y, a, b.



k *Corell.* 1.4.2. l 34.1.

D'autant que tous les rectangles qui sont à l'entour du diametre [k] GE, sont quarrez [l] & SN, est egale à AD, & OL, à AC, & aN, à CD, le rectangle Sk, sera le quarré de AD, & DT, sera le quarré de DE, ou de BD, & OH, a X, quarrez de AC, CD. Ie dis que les quarrez Sk, DT, ensemble, sont doubles des quarrez OH, a X, ensemble.

Car d'autant que les quarrez Sk, DT, excedent les quarrez OH, a X, du quarré DT, & des rectâg. SL, Lk, qui sont egaux aux quarrez OH, a X, comme il sera maintenant demonstré; il appert manifestement que les quarrez Sk, DT, sont doubles des quarrez OH, a X, puis que ceux-cy sont

contenus deux fois en ceux-là. Or que ces trois rectangles DT, SL, Lk, soient egaux aux quarrez OH, a X, il sera ainsi demonstré. Le rectangle QL, m est egal au quarré OH, à cause que les lignes QO, OG, sont egales n d'autant que QO, est egale a YL; & YL, egale à OG, à cause des quarrez egaux YV, OH, des costez egaux OL, LV. Semblablement SY, est o egal à a M, & LI, à YV, & Vk, à VZ, & DT, à bZ. Donc les cinq rectangles QL, SY, LI, Vx DT, c'est à dire les trois rectangles DT, SL, Lk, sont egaux aux cinq rectangles OH, a M, YV, VZ, bZ, c'est à dire aux deux quarrez OH, a X. Ce qui est proposé.

m 36. 1.
n 34. 1.
o 34. 1.

PROBLEME 1. PROP. 11.

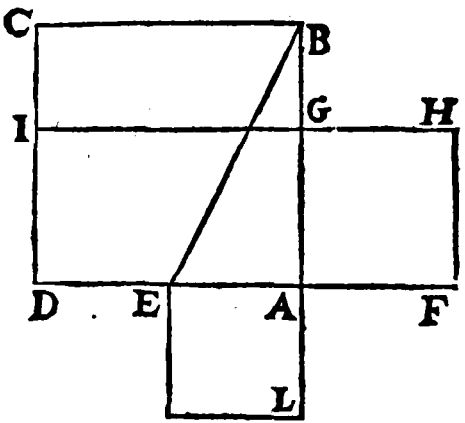
Couper vne ligne droicte donnee de telle sorte, que le rectangle contenu sous la toute & vn des segments, soit egal au quarré de l'autre segment.

Soit la ligne droicte AB, qu'il faut couper en sorte que le rectangle contenu sous la toute AB, & vn des segments, sçauoir le moindre, soit egal au quarré de l'autre segment, sçauoir le plus grand.

Soit descrit le quarré AC, de la ligne droicte AB, & ayant diuisé le costé DA, en deux egalement au poinct E, soit menee EB, & soit prolongee DA, au poinct F, desorte qus EF, soit posee egale à EB, & de AB, soit retranchee AG, egale à AF: car AB, est plus grande que AF, p puisque EA, AB, sont plus grandes que EB, ou EF, son

p 2. 1.

egale: oſtant donc la partie commune EA, reſtera AB, plus grande que AF. Ie dis que AB, eſt coupee au poinct G, en ſorte que le rectangle contenu ſous AB, BG, eſt egal au quarré de AG: de ſorte que BG, eſt le plus petit, & AG, le plus grand.



Car ſoit deſcrit AH, quarré de AG, & prolongé le coſté HG, vers I, en ſorte que HI, coupee DC, au poinct I, laquelle [9] ſera parallele à FD, & BC: partant CG, & DH, ſeront parallelogrammes rectangles, & CG, ſera contenu ſous la toute AB, & le ſegment BG, car CB, eſt egale à AB, lequel rect. eſt egal au quarré GF, de l'autre ſegment AG.

9 34. 1.

Car d'autant que DA, eſtant coupee en deux egalement à E, à laquelle l'on a adiouſté AF, [16. ſec.] le rectangle contenu ſous DF, FA; c'eſt à dire, le rectangle DH, (car FH, eſt egale à FA,) auec le quarré de la moitié AE, eſt egal au quarré de EF, c'eſt à dire au quarré de EB, qui eſt egale à EF:

mais le quarré de E B, eſt egal aux quarrez de BA, & AB. Parquoy le rectangle DH, auec le quarré de AB, ſera auſſi egal aux quarrez de AE, AB: oſtant donc le commun quarré de AB, reſtera le rectãgle DH, egal au quarré de AB, qui eſt le quarré AC. Donc ſi l'on oſte le commun rectangle DG, reſtera le rectangle GC, egal au quarré GF. Ce qui eſt propoſé. Nous auons donc coupé, &c. Ce qu'il falloit faire. ſ 47. 1.

SCHOLIE.

Ce Probléme ne peut en aucune maniere eſtre demõſtré par les nombres. Car aucun nombre ne peut eſtre diuiſé de telle ſorte en deux, que le nombre produit du tout multiplié par vne des parties, ſoit egal au nombre quarré de la partie reſtante, comme il ſera demonſtré à la 14. Propoſition du 9. liure, où les 10. Theorémes precedents de ce liure ſeront demonſtrez par les nombres.

La practique de cette Propoſition n'eſt difficile: car par le poinct A, où ſe doit terminer le plus grand ſegment de la ligne donnee AB, ayant mené AD, à angles droits, egale à AB, & coupé icelle AD, en deux egalement; ſi à l'interualle EB, l'on coupe BA, prolongee en F, AF, ſera egale au plus grand ſegment AG. comme il a eſté demonſtré.

Le Copiſte dict icy. *Quant aux nombres, ils ne ſe peuuent accommoder à ce Probleme, ſinon qu'on y employe les nombres irrationaux.* Mais ie ne ſçay d'où cette beſte Arcadienne copie ce qu'il dit; attendu qu'il n'y a point de nombres irrationaux, puiſque la raiſon irrationelle eſt celle qui eſt entre

les quantitez incommenſurables, c'eſt à dire, qui ne ſont meſurees par aucune commune meſure; & cette raiſon irrationelle ne peut eſtre exprimee par les nombres, & n'a lieu en la quantité diſcrete, d'autant que tous les nombres ſont commẽſurables, à raiſon de l'vnité, comme il appert par les Definitions du 7. liure: mais il ſera plus à propos de parler des quantitez irrationelles par cy-apres. Que le Copiſte apprenne donc que l'irrationalité ne ſe trouue qu'en la quantité continuë, & non aux nombres, parquoy il n'y a point de nombres irrationaux, comme il ſera monſtré ailleurs plus amplement.

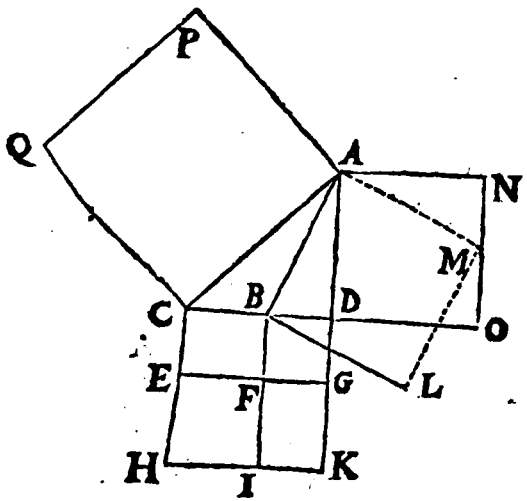
THEOREME 11. PROP. 12.

Aux triangles amblygones, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle obtus, eſt plus grand que les quarrez des coſtez qui contiennent l'angle obtus, de deux fois le rectangle contenu ſous l'vn des coſtez qui ſont à l'entour de l'angle obtus; ſçauoir celuy, ſur lequel eſtant prolongé, tombe la perpendiculaire, & la ligne priſe au dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

Soit le triangle ABC, ayant l'angle ABC, obtus, & du poinct A, ſur le coſté CB, prolongé de la part de l'angle obtus[c] ſoit menee la perpendiculaire AD. Ie dis que le quarré du coſté AC, oppoſé à l'angle obtus eſt plus grand que les quarrez des coſtez AB, BC, qui contiennent l'angle ob-

[c] 12. 1.

sus, de deux fois le rectangle contenu sous CB, BD. C'est à dire, le quarré du costé AC, est egal aux deux quarrez des costez AB, BC, & à deux fois le rectangle contenu sous CB, BD.



Car puisque CD, est diuisée comment que ce soit par B, [v] le q. de CD, sçauoir CK, est egal aux deux quarrez de CB, BD, & à deux fois le rectangle contenu sous CB, BD: adiouſtant donc le commun quarré de AD, sçauoir DN, les deux quarrez de CD, & DA, seront egaux aux trois quarrez des lignes CB, BD, DA, & à deux fois le rectangle contenu sous CB, BD: mais le quarré de AC, [x] est egal aux deux quarrez de CD, DA. Iceluy quarré de AC, sera donc auſſi egal aux trois quarrez de CB, BD, DA, & à deux fois le rectangle contenu sous CB, BD. Donc puis que le quar-

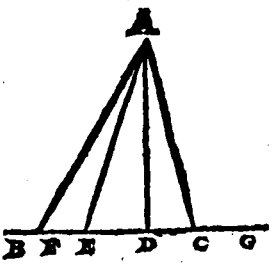
v 4. *sec.*

x 47. *1.*

y 47. 1. ré de BA, est egal aux deux quarrez de BD, DA: le quarré de AC, sera egal aux quarrez de CB, BA, & à deux fois le rectangle contenu sous CB, BD. Ce qui est proposé: donc aux triangles amblygones, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Euclide demonstre en ce lieu, de combien le quarré du costé opposé à l'angle obtus, au triangle amblygone, est plus grand que les quarrez des deux autres costez: en la suyuante 13. Proposition, il monstrera de combien le quarré du costé opposé à l'angle agu, est moindre que les quarrez des deux autres costez.



Or que la perpendiculaire menee du poinct A, *tombe sur le costé* BC, *prolongé de la part de l'angle obtus; nous le demonstrerons en bref. Soit au triangle* AFE, *l'angle obtus* AEF, *& le costé* EF, *prolongé de la part de* FE. *Je dis que la perpendiculaire menee du poinct* A, *tombé hors le triangle sur le costé* FC, *prolongé comme est* AD.

Car si elle tomboit dans le triangle l'angle droict qu'elle feroit auec l'angle obtus AEF, *seroient plus grands que* 2. *droits, & si elle tomboit hors le triangle vers* B, *il en arriueroit la mesme absurdité.*

SCHOLIE.

Il entend a mis en ce Theoréme, de la quantité de deux fois le rectangle compris du coſté contenant l'angle obtus, &c. *Mais s'il entendoit le texte d'Euclide, il trouueroit ainſi*: ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσα ἡ κάθετος πίπτει, ὑπὸ τῆς ἀπὸ λαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς κάθετου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. *C'eſt à dire, aux triangles amblygones, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle obtus eſt plus grand que les quarrez des coſtez, qui contiennent l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu ſoubs l'vn des coſtez qui ſont à l'entour de l'angle obtus, ſçauoir celuy ſur lequel eſtant prolongé tombe la perpendiculaire, & la ligne priſe au dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus: il eſt donc manifeſte qu'il faut traduire*, ὑποτέ μιας τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, &c. Sous l'vn des coſtez qui ſont autour de l'angle obtus, ou qui contiennent l'angle obtus, & *non* du coſté contenant l'angle obtus, *comme il dict*; *attendu auſſi qu'vn coſté ne contient pas vn angle*, &c.

En la 5. Propoſition de ce liure, où il y a: Le rectangle contenu ſous les parties inegales de la

toute, *il a laissé ce mot* τῆς ὅλης *de la toute, ce qu'il ne deuoit faire, tant par ce qu'il est au texte d'Euclide, que d'autant (comme il est demonstré) que le rectangle sous* AD, DB, *parties inegales de la toute* AB, *auec le q. de la partie du milieu, est egal au quarré de la moitié de la toute, & non pas le rectangle sous* AC, CD, *qui sont aussi parties inegales. Voyez la figure de la cinquiesme Proposition.*

Ledit Copiste, ou plustost son Traducteur, à la 7. Proposition de ce liure, a obmis ces mots: (τὰ συναμφότερα τετράγωνα, *&c.*) *les deux quarrez ensemble, & a mis ainsi:* Le quarré de la toute, & le quarré de l'vne des parties, sont egaux à deux fois le rectangle, & au quarré, &c. *Mais c'est les deux ensemble, aux trois ensemble; ce qu'il n'a pas obserué, & ce qu'il a copié d'ailleurs, où il est ainsi traduict, & ne pourra dire qu'il a traduict selon le Latin: car il y a,* Vtraque simul quadrata, &c. *D'où il appert que son Collecteur & Rapsodieur ne prend pas la peine de voir ny Grec ny Latin, mais collige ce qu'il trouue de tout traduict, tel qu'il est: & le Copiste voyant qu'il y a plus de profit à le faire imprimer & vendre, qu'à estre Secretaire de S. Innocent, ne s'y espargne en rien:*

Iceluy Copiste a encore obmis ces mesmes mots, en la dixiesme Proposition de ce liure: τὰ συναμφότερα τετράγωνα, *qui sont expressement au Grec & au Latin: neantmoins il est excusable, puis qu'il a faict comme en sa copie.*

THEOREME

THEOREME 12. PROP. 13.

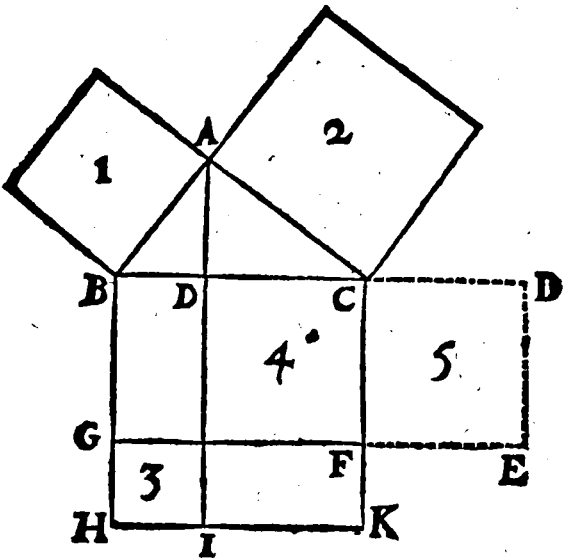
Aux triangles oxygones, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle agu, eſt moindre que les quarrez des coſtez qui contiennent l'angle agu, de deux fois le rectangle contenu ſous l'vn des coſtez qui ſont autour de l'angle agu, ſçauoir celuy ſur lequel tombe la perpendiculaire, & la ligne priſe au dedans, entre la perpendiculaire & l'angle agu.

Soit le triangle oxygone A B C, & de l'angle A, ſoit menee la perpẽdiculaire AD, tõbant ſur le coſté BC. Ie dis que le quarré du coſté AB, oppoſé à l'angle agu ACB, eſt moindre que les quarrez des coſtez A C, C B, qui ſont autour de l'angle agu C, de deux fois le rectangle contenu ſous BC, CD, c'eſt à dire, le quarré du coſté A B, auec deux fois le rectangle contenu ſous B C, CD, eſt egal aux deux quarrez des coſtez AC, CB.

Car puiſque la droicte ligne B C, eſt diuiſee comment que ce ſoit au poinct D, les quarrez de BC, & de CD, ſont egaux à deux fois le rectãgle contenu ſous BC, CD, & au quarré de B D. Adiouſtant donc le commun quarré de DA, les trois quarrez de BC, CD, DA, ſeront egaux à deux fois le rectangle contenu ſous BC, C D, & aux 2. quarrez de BD, DA : mais le quarré de CA, eſt egal aux deux quarrez de C D, D A. Donc les deux quarrez de BC, CA, ſont egaux à deux fois le rectangle contenu ſous BC, C D, & aux deux

y 7. ſec.

z 47. 1.



quarrez de BD,D A. Donc puis que le quarré de AB, eſt egal aux deux quarrez de B D, D A : les deux quarrez de B C, C A, ſeront egaux à deux fois le rectangle contenu ſous B C, C D, & au quarré de AB, ce qui eſt propoſé.

En la meſme maniere l'on demonſtrera que les quarrez de AB, BC, ſont egaux à deux fois le rectangle contenu ſous CB, BD, & au quarré de A C, c'eſt à dire, que le quarré du coſté AC, eſt plus petit que les quarrez des coſtez AB, BC, de deux fois le rectangle contenu ſous C B, B D. Donc aux triangles oxygones, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Des trois Propositions, sçauoir la 47. du liure 1. & de la 12. & 13. de cettuy-cy, nous cognoissons quel est le quarré de quelconque costé d'vn triangle, comparé auec les quarrez des deux autres costez, sçauoir, s'il est egal à iceux, ou plus grand ou plus petit, & de combien il est plus grand ou plus petit, entant que l'angle opposé à iceluy, sera droit, obtus, ou agu.

Or combien qu'Euclide propose ce Theoréme, seulement des triangles oxygones, sçauoir, qui ont tous les angles agus: le mesme toutefois est aussi veritable des triangles rectangles & amblygones, comme il appert par la demonstration & figure precedente. Car necessairement les deux autres angles de ces triangles sont agus, comme il se peut colliger manifestement de la 17. ou 32. prop. du 1. liure. Il faut seulement obseruer cecy, qu'aux triangles rectangles & amblygones, la perpendiculaire se doit mener de l'angle droit ou obtus: mais aux oxygones, duquel que l'on veut, indifferemment. Partant, ce faisant la perpendiculaire tombera tousiours dedans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demonstration; ce qui sera facilement ainsi demonstré.



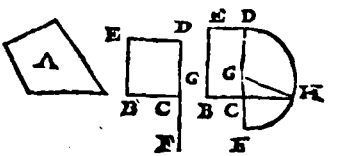
Au triangle ABC, soient les deux angles ABC, ACB, agus, & l'angle BAC, soit droit, ou obtus, ou agu. Ie dis que la perpendiculaire menee du poinct A, tombera dans le triangle. Car si elle

tomboit dehors ſur C B, prolongee de la part de B,
a 16. 1. *comme eſt A E, au triangle A BE, l'angle a externe A B C, agu, ſeroit plus grand que l'interne & oppoſé A E B, qui ſeroit droict, ce qui eſt abſurde. Mais ſi elle tõboit dehors outre BC, prolongee de la part de C, comme eſt la droite ligne A F, il s'en enſuyuroit la meſme abſurdité, comme il eſt manifeſte.*

PROBLEME 2. PROP. 14.

Conſtituer vn quarré, egal à vn rectiligne donné.

Soit le rectiligne dõné A, auquel il faut conſti-
g 45. 1. tuer vn quarré egal. Soit b conſtitué le parallelogramme rectangle BCDE, egal au rectiligne A, duquel vn des coſtez, comme DC, ſoit prolongé à F, & ſoit faicte CF, egale à CB. Et ſoit diuiſee DF, en deux egalement au poinct G, lequel ſera meſme que le poinct C, ou non : que s'il tombe ſur le poinct C, la droicte ligne BC, (puis qu'elle eſt faite egale à CF,) ſera egale à CD. Partant, le rectangle BD, ſera quarré, puiſ c que les coſtez BE, ED, ſont egaux aux oppoſez BC, CD : l'on aura donc le requis. Mais ſi le poinct G, ne tombe ſur le poinct C, du poinct G, comme centre, & de l'interualle G F, ou G D, ſoit deſcrit le demy-cercle FHD, & ſoit prolongee B C, iuſques au poinct de la circonference H, ſoit auſſi menee G H. Ie dis maintenant que le quarré de la droicte ligne CH,



c 34. 1.

eſt egal au rectiligne A. Car d'autant que DF, eſt diuiſee en deux egalement à G, & inegalement à C, le rectangle contenu ſous DC, CF, ſçauoir le rectangle *BD*, [d] auec le quarré de GC, eſt egal au quarré *de GF, ou* de GH, ſon egale: mais le quarré de *GH*, eſt [e] egal aux deux quarrez GC, CH: *Donc* le rectangle BD, auec le quarré de GC, eſt egal aux deux quarrez de GC, CH. Donc ſi l'on oſte le commun quarré de GC, demeurera le rectangle *BD*, c'eſt à dire le rectiligne A, egal au q. de CH. Donc nous auons conſtitué vn quarré egal à vn rectiligne donné. Ce qu'il falloit faire.

d 5. *ſec.*

e 34. *pre.*

Fin du ſecond Liure.

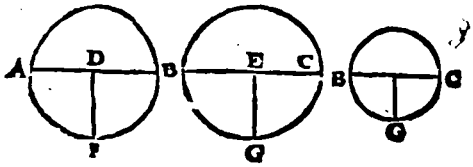
LIVRE TROISIESME DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. Cercles egaux, ſont ceux deſquels les diametres ſont egaux; ou deſquels les lignes droictes menees des centres aux circonferences, ſont egales.

D'AVTANT qu'Euclide demonſtre en ce troiſieſme liure, diuerſes proprietez des cercles; il explique auparauant quelques termes, dont l'vſage ſera frequent en iceluy. Il enſeigne donc premierement, que ces cercles là ſont egaux, deſquels les diametres ou demy diametres ſont egaux. Car puiſque le cercle eſt deſcrit de la reuolution du demy diametre, à l'entour d'vne de ſes extremitez fixe & immobile, comme il eſt dict au pre-

mier liure: il eſt manifeſte que ces cercles là ſont egaux, deſquels les demy diametres, ou les lignes droictes menees des centres aux circonfe-



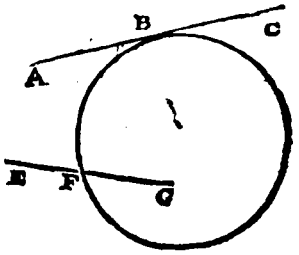
rences ſont egales: ou deſquels les diametres entiers ſont egaux: comme ſi les diametres AB, BC, ſont egaux, ou les droictes lignes DF, EG, menees des centres D, & E les cercles AFB, BGC, ſeront egaux: au cõtraire, ſi les cercles ſont egaux, les diametres, ou lignes droictes, menees des centres aux circonferences, ſeront egales.

Il appert de cecy, que les cercles deſquels les diametres, ou les lignes droictes, menees des centres aux circonferences ſont inegales, ſont inegaux: & partant, celuy duquel le diametre eſt plus grand, eſt auſſi plus grand: & au contraire des cercles inegaux, les diametres ſont inegaux.

2. *Vne ligne droicte, eſt dicte toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, ſi elle eſt prolongee, ne le coupe point.*

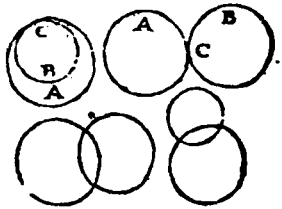
Comme AB, ſera dite toucher le cercle, ſi elle le touche tellement à B, qu'eſtant prolongee vers C, ne le coupe point. Mais d'autant que EF, atteint tellement le meſme cercle au poinct

F, qu'eſtant prolongee au poinct G, le coupe & tombe au dedans, elle ne ſera dite toucher le cercle, mais le couper.



3. Les cercles ſont dicts ſe toucher l'vn l'autre, leſquels en ſe touchans l'vn l'autre, ne ſe coupent point.

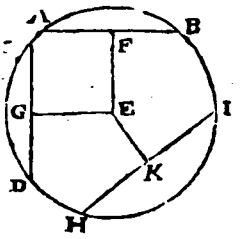
Semblablement, les deux cercles AC, BC, ſont dicts ſe toucher à C, s'ils ſe touchent tellement, qu'ils ne ſe coupent point, ſoit que l'vn ſoit dedans l'autre, ou dehors. Que ſi deux cercles s'attaignent autrement, ils ſeront dicts ſe couper.



4. Au cercle, les lignes droictes ſont dites eſtre egalement diſtantes du centre, quand les perpendiculaires, qui ſont menees du centre ſur icelles, ſont egales. Mais celle-là eſt dite eſtre plus eſloignee du centre, ſur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

Comme les deux lignes droictes AB, CD, au

cercle ABCD, seront dites estre egalement distantes du centre, si les perpendiculaires EF, EG, sont egales: mais la ligne CD, sera dite estre plus esloignee du centre E, que la ligne HI, si la perpendiculaire EG, est plus grande que la perpendiculaire EK.

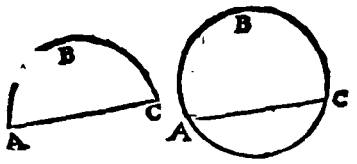


5. Segment, ou section de cercle, est vne figure compriſe ſous vne ligne droite, & la circonference du cercle.

Si au cercle ABCD, on mene vne droicte ligne AC, comment que ce ſoit, tant la figure ABC, contenuë ſous la droicte ligne AC, & la circonference ABC, que la figure ADC, contenuë ſous la meſme AC, & la circõference ADC, ſera dite ſegment, ou ſection de cercle. D'où on peut colliger qu'il y a trois ſortes de ſegments, ſçauoir le demy-cercle, quand la ligne droicte, qui auec la circonference, conſtituë le ſegment, paſſe par le centre; le ſegment plus grand que le demy cercle, quand le centre du cercle eſt au dedans d'iceluy, comme ABC: & le plus petit ſegment, quand la figure dite ſegment, eſt moindre que le demy-cercle, comme ADC. La ligne droicte AC, s'appelle auſſi, chorde, & la circonference ABC, ou ADC, arc. *Voyez la figure cy-apres.*

6. L'angle du segment ou de la section, est celuy qui est compris sous vne ligne droicte, & la circonference du cercle.

Euclide definit maintenant trois genres d'angles, qui sont considerez aux cercles. En premier lieu, l'angle du segment, comme est l'angle mixte BA C, ou BC A, contenu sous la ligne droicte A C, & la circonferẽce A B C; que si le segment est vn demy-cercle,

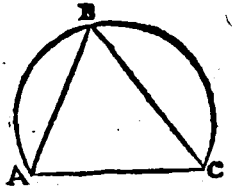


il sera appellé angle du demy cercle, si le segment est plus grand, il sera appellé angle du grand segment: si plus petit que le demy-cercle, l'angle sera dict, angle du petit segment.

7. Mais vn angle est au segment ou en la section, lors que l'on prend quelque poinct en la circonference du segment, & d'iceluy sont menees deux lignes droictes, sur les extremitez de la ligne droicte, laquelle est la base du segment, & c'est celuy-là, dis-je, qui est contenu sous icelles lignes droictes menees.

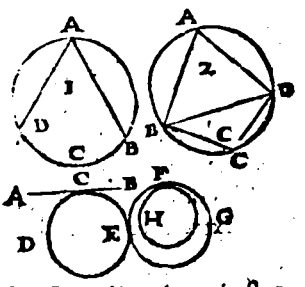
Soit vn segment de cercle A B C, la base duquel soit la droicte ligne A C, & d'vn poinct

quelconque B, pris en la circonference, soient menees deux lignes droictes A B B C, aux poincts A. & C. qui sont les extremitez de la base A C, l'angle rectiligne A B C, contenu d icelles, est dict estre au segment.



8. *Mais* quand les lignes droictes qui contiennent l'angle prennent ou embrassent quelque circonference, l'angle est dit s'appuyer sur icelle.

Comme l'angle D A B, cõtenu des deux lignes droictes A B, A D, qui embrassent la circonference B C D, sera dict estre ou s'appuyer sur icelle, & ne differe du precedent, que de voix seulement; car si l'on mene vne ligne droicte de B, à D, pour base, il sera dict estre au segment, selon la precedente definition, & par celle-cy, s'appuyer sur la circonference B C D, toutefois se rapportent à diuerses choses: car l'angle au segment, se refere au segment auquel il est; & l'angle appuyé sur la circonference, se rapporte à la circonference qui est la base d'iceluy. Donc si l'on prend quelque segment du cercle B C D, au cercle A B C D, l'angle qui est en

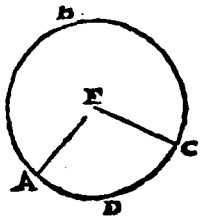


ce segment ne sera le mesme, que celuy qui insiste ou est appuyé sur la circonference d'iceluy. Car l'angle qui est en iceluy sera BCD: mais l'angle qui insiste ou est appuyé sur la circonference d'iceluy, sera l'angle BAD, qui luy est beaucoup different.

Outre ces trois sortes d'angles susdicts, les Geometres considerent aussi vn angle de contingéce, qui est contenu d'vne ligne droicte touchant le cercle, & de la circonference du cercle, ou de deux circonferences se touchans l'vne l'autre, au dehors ou au dedans. Comme par exemple, si la droite ligne AB, touche le cercle CED, au poinct C, l'angle mixte ACD, ou BCE, sera dit angle de contingence, ou d'attouchement. Semblablement, l'angle curuiligne GFH, ou EFH, faict des circonferences des cercles se touchans, sera dict angle de contingence, ou d'attouchement.

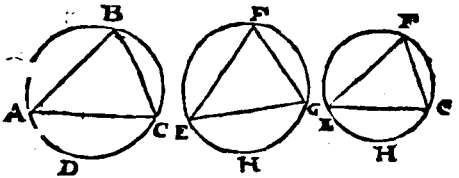
9. Secteur du cercle est vne figure, contenuë sous deux lignes droictes, qui constituent vn angle au centre, & la circonference comprise entre icelles lignes.

Comme la figure ABCD, contenuë sous les lignes droictes A E, E C, qui font angle au centre E, & sous la circonference ADC, comprise entre A, & C, extremitez d'icelles lignes, est appellé secteur du cercle.



10. Semblables ſegments ou ſections de cercles, ſont celles, qui reçoiuent angles egaux; ou eſquelles les angles ſont egaux entr'eux.

Comme ſi aux cercles ABCD, EFGH, les angles rectilignes B, & F, aux ſections ABC, EFG, ſont egaux, icelles ſections qui reçoiuent iceux angles egaux, ou eſquelles ſõt iceux angles egaux, ſeront dites ſemblables ſections, & les circonferences ABC, EFG, pareillement ſeront ſemblables, c'eſt à dire, que la ſection ABC, ſera telle



partie de tout le cercle ABCD, que la ſection EFG, eſt partie du cercle EFGH, & la circonference ABC, ſera auſſi meſme partie de toute la circonference ABCD, que la circonference EFG, l'eſt de toute la circonference EFGH.

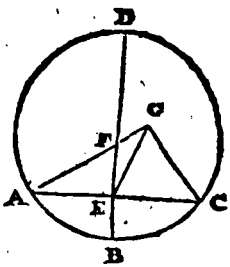
Par meſme raiſon, les arcs ou circonferences, auſquelles inſiſtent ou ſont appuyez angles egaux, ſont auſſi ſemblables, comme ſont les arcs ou circonferences ADC, EHG, ſur leſquelles ſont appuyez les angles egaux B, & F.

De ces choſes l'on peut colliger que ſemblables ſections d'vn meſme cercle, ou de cercles egaux, ſont auſſi egales entr'elles, eſtans meſmes parties d'vne meſme choſe, ou de choſes egales,

PROBLEME 1. PROPOSIT. 8.

Vn cercle eſtant donné, trouuer le centre.

Soit le cercle donné A B C D, duquel il faut
f 10. 1. trouuer le centre. Soit menee vne ligne quelconque en iceluy AC, [f] laquelle ſoit diuiſee en deux egalement au poinct E & par E, ſoit menee BD, à angles droicts, ſe terminant de part & d'autre en la circonference aux poincts B & D: & ſoit diuiſee en deux egalement au poinct F. Ie dis que F, eſt le centre du cercle propoſé.



Car en icelle aucun autre poinct ne peut eſtre le centre, attendu que tout autre poinct la diuiſe inegalement. Dõc ſi F, n'eſt le centre du cercle, ſoit le poinct G, le centre, hors icelle BD, duquel ſoient menees les lignes droictes G A, G E, G C.

D'autant qu'au triangle AEG, les deux coſtez
g 8. 1. AE, EG, ſont egaux aux deux CE, EG, du triangle CEG; & la baſe AG, egale à la baſe CG: (car elles ſont dites eſtre menees du centre) [g] les angles A E G, C E G, ſeront egaux, & partant droicts: mais l'angle AEF, eſt droict par la conſtruction: donc les droicts AEF, AEG, ſont egaux, la partie & le tout, ce qui eſt abſurde Donc G, n'eſt le centre du cercle; ny par meſme raiſon tout autre poinct hors la ligne D B, donc F, ſera le centre.

Partant nous auons trouué le centre du cercle donné. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cette Proposition il est euident, que si au cercle vne ligne droicte est coupee en deux egalement, & à angles droicts, par vne autre ligne droicte, le centre du cercle sera en icelle coupante, pourueu qu'elle se termine de part & d'autre en la circonference, ou à tout le moins qu'elle ne soit moindre que le demy-diametre du cercle, ou que la coupee passe par le centre: attendu qu'il est demonstré que le centre du cercle ABCD, ne peut estre ailleurs qu'au poinct F, de la ligne BD, laquelle coupe AC, en deux egalement, & à angles droicts.

THEOREME 1. PROP. 2.

Si en la circonference du cercle l'on prend deux poincts, tels qu'on voudra; la ligne droicte conioincte à iceux poincts, tombera dedans le cercle.

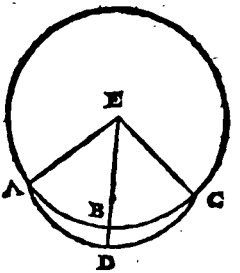
Soit le cercle ABC, en la circonference duquel soient pris deux poincts tels que l'on voudra, A, & B. Iedis que la ligne droicte menee de A, à B, tombe dans le cercle, en sorte qu'elle le coupera.

Car si elle ne tombe au dedans, qu'elle tombe au dehors, s'il est possible, telle qu'est la ligne droicte ADC, comme veut l'aduersaire, & ayant trouué le centre E, d'iceluy, soient menees les

h 1. 3.

droictes lignes E A, E C, & E D, à quelconque poinct D, de la ligne A D C : en sorte qu'elle coupe la circonference du cercle A B C, au poinct B.

D'autant que les deux costez E A, E C, du triangle E A C, duquel la ligne A D C, est posee pour base, sont egaux, (estans menez du centre) [i] les angles E A D, E C D, seront egaux : mais l'angle externe [k] E D A, est plus grand



i 5. 1.
k 16. 1.

que son interne & oppose E C D, puis que le costé C D, est prolongé au poinct A. Donc le mesme angle E D A, sera aussi plus grand que l'angle E A D, qui est egal à E C D. Partant E A, opposee au plus grand angle E D A, [l] sera plus grande que E D, opposee au plus petit E A D. Donc E B, egale à E A, seroit aussi plus grande que E D, la partie que le tout : ce qui est absurde. Donc la ligne droicte menee de A, à B, ne tombera hors le cercle, mais au dedans. Semblablement nous monstrerons qu'elle ne tombera sur la circonference. Donc si au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

l 19. 1.

COROLLAIRE.

De la demonstration de cette deuxiesme Proposition, il est manifeste que la ligne droite qui touche le cercle, en sorte qu'elle ne le coupe point, qu'elle le touche seulement à vn poinct. Car si elle le touchoit à deux poincts [m] la partie de

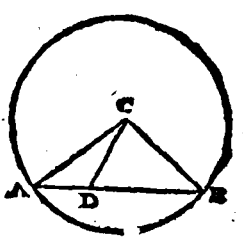
m 2. 3.

de la ligne d'entre iceux poincts tomberoit dans le cercle, & partant le couperoit: ce qui eſt contre l'hypotheſe.

SCHOLIE.

Le Copiſte, reiettant cette commune demonſtration d'Euclide, tant en la premiere que ſeconde Edition, a pris au lieu, ce Scholie de Clauius, par lequel Scholie ledit Clauius eſtime monſtrer cette Propoſition affirmatiuement; & ledict Henrion Copiſte, l'a encore continué en la 3. Edition de ſon liure, comme s'enſuit.

En la circonference du cercle AB, dont le centre eſt C, ſoient pris deux poincts tels qu'on voudra, A, & B. Ie dis que la ligne droicte AB, menee d'vn poinct à l'autre, tombe dans le cercle.



Car ſoit pris en icelle ligne droicte AB, quelconque poinct D, entre ſes extremitez A, & B: puis du centre C, ſoient menees les lignes droictes CA, CD, CB: d'autant que les deux coſtez AC, CB, du triangle ACB, ſont egaux, les angles BAC, ABC, ſeront egaux: mais l'angle externe ADC, eſt plus grand que l'interne ABC. Donc le meſme ADC, ſera plus grand que l'angle BAC: & partant le coſté AC, ſera plus grand que le coſté CD: parquoy, puis que CA, eſt tiree du centre iuſques à la circonference, la ligne droicte CD, ne paruiendra pas iuſques à icelle circonference: & par conſequent le poinct D, tombe dans le cer-

5. 1.

16. 1.

19. 1.

cle, le meſme ſera demonſtré de tout autre poinct. Donc la ligne droicte AB, tombe dans le cercle.

Voila la belle demonſtration que le Copiſte, ou pluſtoſt ſon Traducteur, a priſe de Clauius : mais Clauius commet icy vn vice, & luy par conſequent, lequel Ariſtote appelle petition de principe, en prenant ce qu'il veut prouuer pour cogneu, & partant ne demonſtre rien : d'autant qu'il mene la ligne droicte AB, dans le cercle, & par le moyen d'icelle ligne droicte AB, menee dans le cercle, il eſtime demonſtrer qu'elle y tombe: car voila comme il argumente. L'angle ADC, qui eſt externe, à cauſe que la ligne droicte CD, tombe ſur AB, qui eſt menee dedans le cercle du poinct A, au poinct B, pour faire le triangle CBA, ſera plus grand
5. 1. que CBA : & partant auſſi plus grand que BAC,
19. 1. qui eſt monſtré egal à CBA: donc AC, qui eſt menee du centre C, iuſques à la circonference, ſera plus grande que CD, qui ne paruient pas iuſques à la circonference, n'ayant eſté menee que iuſques à la ligne AB qui tombe dans le cercle. Donc ladicte ligne droicte AB, tombera dans le cercle. Et qui conſiderera attentiuement cette demonſtration, la trouuera ainſi, puis qu'il mene vne ligne droicte dedans vn cercle, & puis monſtre qu'elle y eſt : & par ainſi ne monſtre rien. L'exemple que donne Ariſtote de telles petitions de principe, ſe peut reduire en tel ſyllogiſme.

Toutes & quantes fois que les angles alternes ſont egaux, les lignes ſont paralleles.

Toutes & quantes-fois que les lignes ſont paralleles, les angles alternes ſont egaux.

Donc, toutes & quantes-fois que les lignes ſont

paralleles, les lignes sont paralleles.

Clauius, & le Copiſte apres luy, argumentent tout auſſi bien en cette pretenduë demonſtration.

La ligne droicte AB, que nous menons dedans le cercle, tombe dans le cercle.

La ligne droicte CA, qui vient du centre C, iuſques à la circonference A, eſt monſtree plus grande que CD, à cauſe qu'elle ne vient que iuſques à la ligne AB, qui tombe dans le cercle.

Donc la ligne droicte AB, tombe dans le cercle.

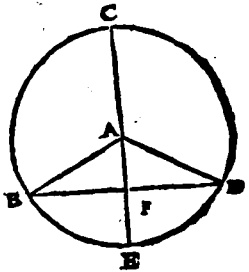
Mais telles fautes doiuent eſtre attribuees au Traducteur, & non au Copiſte, qui eſtant vn homme ignorant, & ſans auoir eſtudié aux lettres humaines, ſeroit excuſable en quelque façon, s'il auoit faict cecy luy-meſme, n'ayant failly qu'apres Clauius, qui eſtoit vn homme docte. Mais qui voudroit remarquer toutes les fautes commiſes aux Onologies, imprimees ſous le nom de Henrion, il faudroit en faire vn volume entier. Icy nous n'en remarquerons que quelques-vnes, pour aduertir le Lecteur d'y prendre garde.

THEOREME 2. PROP. 3.

Si dans le cercle quelque ligne droicte paſſant par le centre, coupe quelque autre ligne droicte, qui ne paſſe point par le centre, en deux egalement, elle la coupera auſſi à angles droicts. Et ſi elle la coupe à angles droicts, elle la coupera auſſi en deux egalement.

Soit le cercle BCDE, & soit la ligne EC, passant par le centre A, laquelle coupe la ligne droicte BD, qui ne passe point par le centre, en deux egalement, au poinct F. Ie dis que la ligne CE, est à angles droicts à la ligne BD.

Car ayant mené les deux lignes AB, AD, les deux costez AF, FB, du triangle AFB, sont egaux aux deux costez AF, FD, du triangle AFD: & les
n 8. 1. bases AB, AD, sont egales. [n] Donc les angles
o 10. def. AFB, AFD, seront egaux: [o] c'est à dire droicts, ce qui estoit premierement proposé.



Soit maintenant ce, à angles droicts à BD. Ie dis que BD, est coupee en deux egalemẽt au poinct F, par la ligne droicte CE. Car les deux lignes AB,
p 5. 2. AD, estans egales, [p] les deux angles ABD, ADB, seront egaux sur la base BD, du triangle Isoscele ABD. D'autant donc que les deux angles AFB, ABF, du triangle ABF, sont egaux aux deux AFD, ADF, du triangle ADF, & que les costez AB, AD, oppose aux angles droicts au poinct F, sont semblablement
q 26. 1. egaux: [q] les costez FD, FB, seront egaux: ce qui estoit secondement proposé. Donc si au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Cette deuxiesme partie se pouuoit ainsi demon-
r 47. 1. strer: soit AF, à angles droicts à BD, [r] le quarré de AB, sera egal aux deux quarrez de AF, FB: semblablement, le quarré de AD, sera egal aux deux quarrez de AF, FD: mais les quarrez de AB,

AD, sont egaux, puis qu'icelles lignes sont egales. Donc les quarrez de AF, FB, seront egaux aux quarrez de AF, FD, parquoy ostant le quarré commun de AF, les quarrez de FB, FD, demeureront egaux: & partant leurs costez FD, FB, seront egaux.

COROLLAIRE.

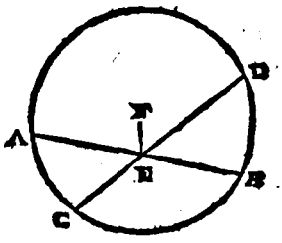
D'icy s'ensuit qu'en tout triangle Isoscele ou Equilateral, que la ligne qui coupera la base en deux egalement, sera perpendiculaire à la base: pourueu qu'elle soit menee de l'angle opposé à la base, sur la base; (ce qu'a oublié Clauius), autrement la conclusion seroit nulle: car vne ligne en coupera bien vn' autre en deux egalement, & ne sera toutefois à angles droicts à icelle coupee: & au contraire la ligne perpendiculaire à la base, menee de l'angle opposé, la coupera en deux egalement. Car de ce que au triangle BAD, AF, coupe BD, en deux egalement, il a esté demonstré que les angles au poinct F, sont droicts. Et de ce que les angles au poinct F, sont droicts, il a esté monstré que AF, coupe BD, en deux egalement.

THEOREME 3. PROPO. 4.

Si au cercle deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre, n'estans point menees par le centre, elles ne se couperont point l'vne l'autre en deux egalement.

Au cercle ABCD, soient menees les deux lignes droictes AB, CD, ne passans point par le

centre, & se coupant l'vne l'autre au poinct E. Ie dis qu'il ne se peut faire qu'elles se coupent l'vne l'autre en deux egalement. Car si l'vne d'icelles passe par le centre, il est manifeste qu'elle ne sera pas coupee en deux egalement: car elle peut estre seulement diuisee au centre en deux egalement, par lequel centre l'autre est posee, ne

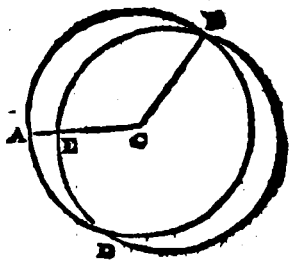


passer: mais si l'vne ny l'autre ne passe point par le centre: encore que l'vne d'icelles puisse estre quelquefois coupee en deux egalement par l'autre; l'autre toutefois ne sera coupee en deux egalement.

Car qu'elles se coupent, s'il est possible, en 2. egalement l'vne l'autre, en sorte que AE, soit
[1] 1. 3. egale à EB. & CE, à ED: [1] & ayant trouué le centre F, d'iceluy soit menee FE, au poinct E, où
[2] 3. du 3. elles se coupent. D'autant que FE, passant par le centre, coupe AB, [2] ne passant par le centre, en deux egalement à E, elle la coupera à angles droicts: Donc l'angle FEB, sera droict: par mesme raison elle coupera aussi CD, à angles droits. Donc l'angle FED, sera aussi droict; & partant egal à l'angle FEB, la partie au tout, ce qui est impossible: elles ne se couperont donc l'vne l'autre en deux egalement. Donc si au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 4. PROP. 5.

Si deux cercles se coupent l'vn l'autre, ils n'auront pas mesme centre.



Que les deux cercles A B D, E B D, se coupent l'vn l'autre aux poincts B, & D. Ie dis qu'ils n'auront pas mesme centre.

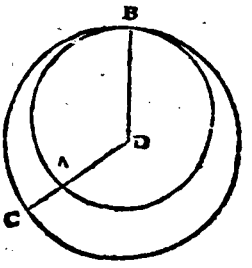
Autrement, s'ils ont mesme centre, soit C, centre de tous les deux, si faire se peut, & soit iointe C B, au poinct de la section, & soit menee C E A, coupant les circonferences aux poincts E, & A.

D'autant que C, est le centre du cercle A B D, la ligne C A, sera egale à C B. Derechef, d'autant que C, est le centre du cercle B E D, la ligne C E, sera egale à C B: mais C A, a esté monstree egale à C B: " donc C A, & C E, seront egales, la partie & le tout, ce qui est impossible: partant C, n'est pas le centre des deux cercles. Donc si deux cercles se coupent, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. 15. def. " 1. c. s.

THEOREME 5. PROP. 6.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre, au dedans, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles AB, CB, se touchans l'vn l'autre au dedans, au poinct B. Ie dis qu'ils n'ont pas mesme centre.



Car s'il est possible, soit D, le centre de tous les deux, & soit coioincte la ligne droicte DB, & soit menee comme l'on voudra la ligne DAC, coupant les circonferences aux poincts A, & C. D'autant que D, est le centre du cercle BC, la ligne DC, sera egale à DB. Derechef, d'autant que D, est aussi le centre du cercle AB, la ligne DA, sera egale à DB: mais DC, est aussi demonstrée egale à DB: donc DA, & DC, seront egales, la partie & le tout, ce qui est impossible. Donc le poinct D, n'est pas le centre de tous les deux cercles AB, & CB: partant, si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dedans, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

xi. ef.

SCHOLIE.

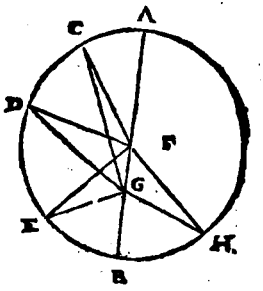
Euclide propose ce Theorème, seulement des cercles qui se touchent au dedans: d'autant qu'il est tres-manifeste, que les cercles qui se touchent au dehors, ne peuuent auoir vn mesme centre, attendu que l'vn est au dehors de l'autre.

THEOREME 6. PROP. 7.

Si au diametre du cercle l'on prend quelque poinct, lequel ne soit point le centre

du cercle; & de ce poinct à la circonference tombent quelques lignes droictes, la plus grande sera celle-la en laquelle est le centre; *mais la plus petite sera celle qui reste. Des autres, tousiours la plus proche de celle qui passe par le cẽtre, est plus grãde que celle qui en est plus esloignee; & de ce mesme poinct tomberont seulement deux lignes droictes egales, à la circonference de part & d'autre, de la plus petite.*

Au diametre AB, du cercle ACDEB, duquel le centre est F, soit pris quelconque poinct outre le centre, lequel soit G, & d'iceluy tombent tant de lignes droictes que l'on voudra à la circonference du cercle, sçauoir GC, GD, GE. *Ie dis que GA,* en laquelle est le centre, est la plus grande de toutes celles qui sont menees d'iceluy poinct G, à la circonference, & que la plus petite est la restante GB, laquelle parfaict le diametre: en apres que



GC, plus proche de GA, laquelle passe par le centre, est plus grande que GD, qui est plus esloignee de la mesme GA, & par mesme raison que GD, est plus grande que GE, & ainsi des autres: & finalement du poinct G, l'on peut mener seulement de part & d'autre de la plus petite, deux lignes

droictes egales entr'elles à la circonference.

Car soient menees du centre F, aux poincts C, D, E, les droictes lignes FC, FD, FE. D'autant que les deux costez GF, FC, du triangle GFC, y20. 1. [1] sont plus grands que l'autre GC; mais GF, FC, sont egales à GF, FA, c'est à dire à la tout GA, icelle GA, sera aussi plus grande que GC, & par mesme raison plus grande que GD, & ainsi des autres. Donc GA, sera la plus grande de toutes celles qui tombent du poinct G, à la circonference.

z10. 1. Secondement, d'autant qu'au triangle EFG, le costé EF, [2] est plus petit que les deux EG, GF: mais EF, est egale à FB: donc FB, sera moindre que les deux FG, GE. Donc la partie commune FG, estant ostee, demeurera encore GB, plus petite que GE. Et par mesme raison GB, sera monstree plus petite que chacune des autres GD, & GC: partant GB, est la plus petite de toutes celles qui sont menees du poinct G, à la circonference.

Tiercement, d'autant que les deux costez GF FC, du triangle GFC, sont egaux aux deux GF, FD, du triangle GFD, & l'angle GFC, est plus a24. 1. grand que l'angle GFD, le tout que sa partie, [3] la base GC. sera plus grande que la base GD, par mesme raison GC, sera plus grande que GE: semblablement GD, sera aussi plus grãde que GE. Donc la ligne plus proche de celle qui passe par le centre, est plus grande que celle qui en est plus esloignee.

Finalement, soit faict l'angle BFH, de l'autre part de la ligne FB, egal à l'angle BFE, & soit menee la droicte ligne GH. D'autant que les deux

costez EF, FG, du triangle EFG, sont egaux aux deux costez HF, FG, du triangle HFG, chacun au sien, & que les angles EFG, HFG, contenus d'iceux costez, sont egaux par la construction, [b] les droictes lignes GE, GH, de part & d'autre de la moindre ligne GB, seront egales entr'elles. Or que nulle autre puisse estre egale à chacune d'icelles, il est manifeste. Car si du poinct G, l'on en mene vne autre de la part de H; elle tombera au dessous de H. & partant plus petite que GH, estant plus esloignee de celle qui passe par le cẽtre, comme il a esté demonstré: & partãt aussi plus petite que GE, egale à GH. Si elle passe au dessus de GH, elle sera plus grande pour la mesme raison. Donc l'on peut mener deux lignes droictes egales entr'elles seulement de part & d'autre de la plus petite. Partant si au diametre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. b 4. 1.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit que de tout poinct pris au cercle, on ne peut mener que deux lignes droictes à la circonference, egales entr'elles, d'autant que par tout poinct pris dans le cercle, l'on peut mener vn diametre.

SCHOLIE.

Henrion Copiste, dict, tant à la fin de cette Proposition que de la suyuante. Et deux lignes droictes, tant seulement venans d'iceluy poinct, de part & d'autre du diametre sont egales. *Ce qui n'est pas vray, car l'on peut mener plusieurs lignes droites egales d'iceluy poinct de part & d'autre: mais il*

deuoit mettre comme il y a dedans Euclide: δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης. *Mais deux lignes droictes egales tãt seulement, tombent ou peuuent estre menees de ce poinct au cercle, de part & d'autre de la plus petite,* au cercle, *c'est à dire à la circonference: car Euclide prend icy,* κύκλος, *pour* περιφέρεια, *ce qui appert aussi, tant par la 9. Proposition cy-apres, qu'autres:* ἐὰν κύκλου λαφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι τὸ λαφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. *Si au cercle on prend quelque poinct au dedans, & d'iceluy poinct tombent ou sont menees plus de deux lignes droites egales au cercle, c'est à dire à la circonference: le poinct pris est le centre du cercle. Il deuoit donc adiouster,* au cercle, ou à la circonference, *& ne s'asseurer pas à la traduction Françoise, desia faite, laquelle il a prise.*

Il reprend le sieur Donnot en cette Proposition, par ce que ledit Donnot dit, Qu'vne ligne coupe le centre & commet la mesme faute en la 13. Proposition de ce liure, à la fin de la Demonstration, disant. Il faudroit que la ligne droicte, menee par les deux centres E, & K, coupast les deux poincts d'attouchement, &c.

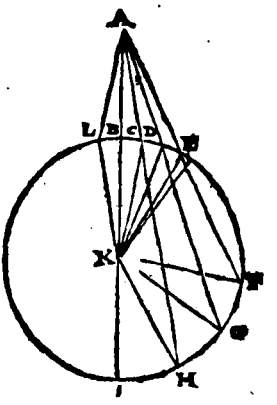
THEOREME 7. PROPO. 8.

Si hors le cercle l'on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct l'on mene quel-

ques lignes droictes au cercle, l'vne desquelles passe par le centre, & les autres où l'on voudra; de toutes les lignes droictes qui tombent en la circonference concaue; la plus grande est celle qui passe par le centre; mais des autres, tousiours la plus proche de celle qui passe par le centre, sera plus grande que celle qui en est plus esloignee: mais de celles qui tombent à la circonference conuexe, la plus petite est celle qui est posee entre le poinct & le diametre. Et des autres, celle-là laquelle est plus proche de la plus petite, est tousiours moindre, que celle qui en est plus esloignee: & de ce poinct seront menees tant seulement deux lignes droictes, egales entr'elles au cercle, de part & d'autre de la plus petite.

Du poinct A, pris hors le cercle BCDE, duquel le centre est K, soient menees des lignes droictes coupans le cercle, desquelles AI, passe par le centre; mais les autres AH, AG, AF, comme l'on voudra. Ie dis que la plus grande de toutes celles qui tombent en la circonference concaue, est AI, qui passe par le centre: en apres que AH, qui est plus proche de AI, qui passe par le centre, est plus grãde que AG, qui est plꝰ esloignee d'icelle AI; & par mesme raison AG, est plus grande que AF. Et au contraire, que la droicte ligne AB, comprise entre le diametre & le poinct A, est la plus petite de

toutes celles qui ſont hors le cercle: & que AC, laquelle eſt plus proche de la plus petite AB, eſt moindre que AD, plus eſloignee d'icelle AB, & par meſme raiſon AD, eſt moindre que AE. Finalement, du poinct A de part & d'autre de la plus petite AB, l'on peut mener ſeulement



deux lignes droictes, egales entr'elles au cercle.

Car du centre K, ſoient menees les lignes droictes KC, KD, KE, KF, KG KH. D'autant que les deux coſtez AK, KH, du triangle AKH, [c] ſont plus grands que AH: mais AK, KH, ſont egales à AK, KI, c'eſt à dire à la toute AKI: la droicte ligne AI, ſera auſſi plus grande que AH. Par meſme raiſon AI, ſera auſſi plus grande que chacune des autres AG, AF. Donc AI, eſt la plus grande de toutes celles qui ſont menees du poinct A, dans le cercle.

c 20. 1.

Secondement, d'autant que les coſtez AK, KH, du triangle AKH, ſont egaux aux deux AK, KG, du triangle AKG, & que l'angle total AKH, eſt plus grand que l'angle AKG, ſa partie; [d] la baſe AH, ſera plus grande que la baſe AG. Par meſme raiſon AH, ſera plus grande que AF: ſemblablement AG, ſera plus grande que AF; partant la ligne plus proche de celle qui paſſe par le centre, eſt plus grande que la plus eſloignee.

d. 24. 1.

Tiercement, d'autant qu'au triangle A C K, la ligne droicte AK, [e] est plus petite que les deux autres AC, CK: si l'on retranche les egales B K, C K: demeurera encore A B, moindre que A C: par raison semblable A B, sera moindre que A D, & moindre aussi que AE, Parquoy AB, est la plus petite de toutes les lignes tirees du poinct A, hors le cercle à la circonference conuexe. e 20. 1.

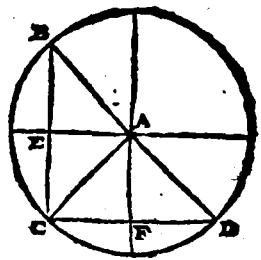
4. D'autant que dans le triangle A D K, tombent les deux lignes droictes A C, C K, venant des extremitez du costé AK, [f] icelles A C, CK, seront moindres que AD, D K. Donc ayant osté les egales CK, DK, restera encore AC, moindre que AD, & pareillement AC, sera moindre que AE; & AD, aussi moindre que A E. Donc la ligne plus proche de la moindre ligne AB, est plus petite que la plus esloignee. f 21. 1.

En dernier lieu, soit faict l'angle AKL, egal à l'angle AKC, & soit menee AL. D'autant que les deux costez AK, K C, du triangle AKC, sont egaux aux deux AK, K L, du triangle AKL; mais les angles AKC, AKL, contenus d'iceux costez, sont egaux: [g] les lignes droictes A C, AL, de part & d'autre de la plus petite AB, seront egales entr'elles. Et aucune autre tiree du poinct A, à ladicte circonference, ne sera egale à aucune d'icelles: car elle tomberoit au dessous de A L, vers B: & partant plus petite que AL, c'est à dire que A C, egale à A L, ou de l'autre part de A L: & partant, plus grande, comme nous auons demonstré. Donc l'on ne pourra mener que deux lignes droictes egales seulement à la circõference de part & d'autre de la moindre AB. Donc si l'on prend quelque poinct hors le cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. g 4. 1.

THEOREME 8. PROP. 9.

Si au dedans du cercle l'on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct tombent plus de deux lignes droictes egales, à la circonference : le poinct pris eſt le centre du cercle.

Soit le cercle BCD, au dedans duquel ſoit pris le poinct A, & du poinct A, à la circonference BCD, tombent plus de deux lignes droictes egales entr'elles AB, AC, AD. Ie dis que le poinct A, eſt le centre du cercle.



Car ſoient conioinctes les lignes droictes BC, CD, leſquelles ſoient coupees en deux egalement, par les poincts E, & F, & par le poinct A, ſoient menees les droictes lignes AE, AF, & prolongees de part & d'autre en la circonference. D'autant donc que EB, eſt egale à EC, & EA, commune, les deux coſtez AE, EB, du triangle AEB, ſont egaux aux deux AE, EC, du triangle AEC, & la baſe AB, eſt egale à la baſe AC, par l'hypotheſe, [h] l'angle AEB, ſera egal à l'angle AEC; [i] & partant l'vn & l'autre droict. Par meſme raiſon l'on monſtrera que les angles au poinct F, ſont droicts. Partant, puis que les droictes lignes AE, AF, diuiſent les droictes BC, CD, en deux egalement & à angles droicts

h 8. 1.
i 10. def.

droicts en chacune d'icelles coupantes AE, AF, sera le centre du [k] cercle, estans prolongees à la circonference; Donc le poinct A, par lequel elles s'entre-coupent, sera le centre du cercle, ne pouuant estre ailleurs qu'au poinct commun où elles s'entre-coupent, estant en l'vne & en l'autre. Donc si dedans le cercle l'on prend, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

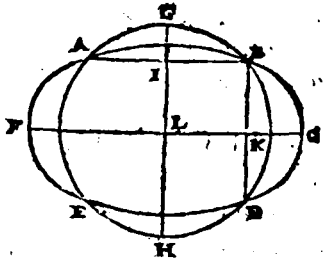
[k] Coroll. 1.3.

THEOREME 9. PROP. 10.

Vn cercle ne coupe pas vn cercle, à plus de deux poincts.

Que le cercle ABCDEF, coupe le cercle AGBDHE, en plus de deux poincts, s'il est possible A, B, & D, & ayant conioint les lignes droictes AB, BD, soient diuisees icelles en deux egalement aux poincts I, & K, & par iceux poincts soient [l] menees IL, KL, à angles droicts aux lignes AB, BD, & soient prolongees de part & d'autre à la circonference.

[l] 11. 1.



D'autant que les droites lignes IL, & KL, coupent les droictes lignes AB, BD, en deux egalement, & à angles droicts, au cercle AGBDHE, l'vne & l'autre passera [m] par le centre d'iceluy; partant le poinct L, par lequel elles se coupent, sera le centre dudit cercle. En la mesme maniere nous de-

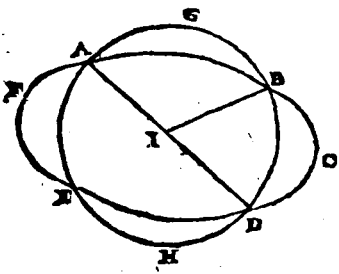
[m] Coroll. 1.3.

monſtrerons que le poinct L, eſt le centre du cercle A B C D E F. Donc deux cercles ſe coupans l'vn l'autre aùront meſme centre : [a] Ce qui eſt impoſſible. Donc vn cercle, &c.

[a] 5. 3.

AVTREMENT.

Que les meſmes cercles ſe coupent, ſi faire ſe peut, à plus de deux poincts A, B, & D, et ſoit trouué I. *centre du cercle A G B, D H E, duquel ſoient menees* I *A, I B, I D, leſquelles ſeront egales entr'elles par la definition du cercle.*



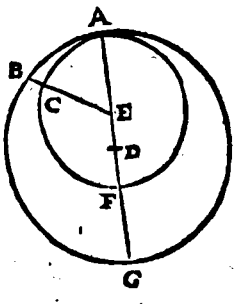
D'autant donc qu'au cercle A B C D E F, l'on a prin le poinct I, *duquel tombent plus de deux lignes droites egales, à la circonference, iceluy poinct* I, *ſera le centre du cercle A B C D E F : mais le meſme poinct I, eſtoit auſſi le centre de A G B D H E. Donc deux cercles ſe coupans l'vn l'autre auront vn meſme centre.* [b] *Ce qui eſt abſurde.*

[a] 9. 3.

[b] 5. 3.

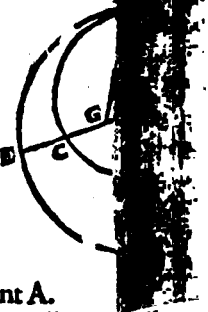
THEOREME 10. PROP. 11.

Si deux cercles ſe touchent l'vn l'autre au dedans, & que l'on prenne les centres d'iceux, la ligne droite conioignant iceux centres, eſtant prolongee, tombera à l'attouchement des cercles.



Que les deux cercles ABG, ACF, se touchent l'vn l'autre au dedans au poinct A, & soit trouué le centre du cercle ABG, lequel soit D, & le centre de ACF, lequel soit E. Ie dis que la ligne droicte menee de D, à E, & prolongee, tombera au poinct de l'attouchement A. q 1. 3.

Autrement elle tombera de part ou d'autre du poinct de l'attouchement A: qu'elle tombe donc s'il est possible, ailleurs, comme à B, coupant les circonferences es poincts C, & B, & soit prolongee directement BED, qui est dicte estre ligne droite, de l'autre part à la circonference au poinct G: par ainsi BEDG, sera le diametre du cercle ABG, & du poinct E, au poinct de l'attouchement A, soit menee EA. D'autant donc qu'au diametre GEB, du cercle ABG, l'on a pris le poinct E, outre le centre D, la ligne EB, sera la plus petite de toutes celles qui sont menees du poinct E, à la circonference du cercle ABG, & partant plus petite que EA: mais EC, est egale à EA, puisque EC, EA, sont menees du centre E, du cercle ACF, à la circonference AC, donc EB, sera aussi plus petite que EC, le tout que sa partie: Donc DE, prolongee, ne pourra tomber ailleurs qu'au poinct d'attouchement A, comme est la ligne DEA. Partant si deux cercles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. 17. 3.



Que le cercle ABC, touche le cercle ADE, au dedans au poinct A, & ſoit F, le centre du cercle ABC, & G, cétre de ADE, [f] lequel ſera different de l'autre. Ie dis que la ligne droicte qui paſſe par G, & F, prolongee, tombera à l'attouchement A.

[f] 6. 3.

Car ſi elle n'y tombe, qu'elle coupe l'vn & l'autre cercle aux poincts D, B, C, E, & du poinct d'attouchement A, ſoient menees aux centres G, & F, les droictes lignes AF, AG. D'autant donc qu'au triangle AFG, les deux coſtez GF, FA, ſont plus grands que le coſté GA, mais GA, eſt egale à GD, (d'autant que G, eſt poſé le centre du cercle AED,) GF, FA, ſeront plus grandes que GD, ayant donc oſté la commune GF; FA, demeurera plus grande que FD, Donc puis que FA, eſt egale à FB, (puis que F, eſt poſé le centre du cercle ABC,) FB, ſera auſſi plus grande que FD, le tout que ſa partie, ce qui eſt abſurde.

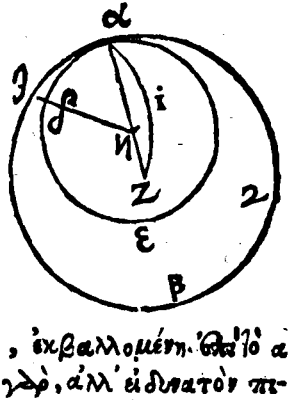
Que ſi quelqu'vn veut dire que F, eſt le centre du cercle ADE, & G, le centre du cercle ABC, l'on argumétera en cette maniere. Au triangle AFG, les deux coſtez FG, GA, ſont plus grands que le coſté FA: mais FA, eſt egale à FE, (puis que F, eſt poſé le centre du cercle ADE,) donc FG, GA, ſont plus grandes que FE: oſtant donc la commune

FG, demeurera GA, plus grande que GE : donc puis que GA, est egale à GC, (d'autant que G, est posé le centre du cercle ABC,) la ligne GC, sera pareillement plus grande que GE, la partie que le tout, ce qui est absurde. Donc, &c.

SCHOLIE.

Aucun des Interpretes d'Euclide que i'aye veu, n'a encore entendu cette demonstration, n'entendant pas celle de Theon, comme l'on peut voir par leurs demonstrations, & mesme par celle que Clauius pretend faire apres les autres, en laquelle il conclud vne absurdité, d'où il ne peut inferer, sinon, que les poincts qu'il a pris pour centres, ne sont point les vrais centres : car d'vne absurdité demonstree, on ne peut tirer, sinon, que le fondement d'où elle a esté deduite est faux : & Clauius ayant supposé deux poincts pour centres, ne l'estans point, & les vrais centres ne luy ayans pas esté niez, il conclud vne absurdité, que la partie est plus grãde que le tout : d'où il s'ensuit que les poincts qu'il a pris pour vrais centres, ne le sont pas : mais il ne s'ensuit point que la ligne menee par les centres des deux cercles qui se touchent au dedans à vn poinct, estant prolongee tombera au poinct de l'attouchement. Ce qu'il falloit demonstrer.

Mais voyons comme faict Theon, & faisons vne figure qui respõde à son discours, encore que personne n'en ait fait.



Δύο γὰρ κύκλοι οἱ αβγ, αδε, ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς, κατὰ τὸ α σημεῖον· καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν αβγ, κύκλου κέντρον, τὸ ζ, τοῦ δὲ αδε, τὸ η: λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ η ἐπὶ τὸ ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὸ α σημεῖον πεσεῖται. μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ὡς ἡ ζηδθ· καὶ ἐπιζεύχθωσαι αἱ αι, ζα, αη.

Ἐπεὶ οὖν αἱ αη, ηζ τῆς ζι αὐτῇ τῇ ζθ (ἴση γὰρ ἡ ζι τῇ ζθ, ἀπὸ κέντρου γὰρ ἄμφω) μείζονες εἰσι, λοιπὴ ἄρα ἡ αη λοιπῆς τῆς ηθ μείζων ἐστίν· ἴση δὲ ἡ αη τῇ ηδ· καὶ ἡ ηδ ἄρα τῆς ηθ μείζων ἐστὶν ἡ ἐλάττων, τῆς μείζονος, ὅπερ, ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὸ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς χωρὶς τὸ α συναφῆς πεσεῖται ἐπὶ αὐτῷ ἄρα. ἐὰν ἄρα δύο κτλ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Que les deux cercles αβγ, αδε se touchent l'vn l'autre au dedans au poinct α, & soit pris le centre du cercle αβγ, sçauoir ζ, & η, celuy de αδε. Ie dis que la ligne droicte menee de η, à ζ, & prolongee tombera au poinct d'attouchement α, s'il n'est ainsi, qu'elle tombe, s'il est possible, comme est ζηδθ, & soient conioinctes αι, ζα, αη. D'autant donc que αη, ηζ. sont plus grandes que αι ζα, c'est à dire que ζθ, (car ζι, est egale à ζθ, car elles

ſont toutes deux menees du centre,) ſi on oſte la commune ζν, la reſtante να ſera plus grande que la reſtante νθ: mais να, eſt egale à νδ, donc νδ, ſera plus grande que νθ, la plus petite que la plus grande, c'eſt à dire la partie que le tout, ce qui eſt impoſſible. Donc la ligne droicte menee de ζ, à ν, & prolongee ne paſſera par autre poinct que celuy d'attouchement, elle tombera donc à iceluy. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Pour vne plus grande facilité, ie mettray icy la conſtruction de cette Propoſition, telle qu'elle doit eſtre entenduë.

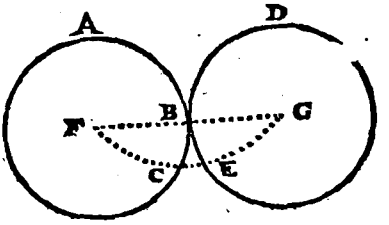
Soient les deux cercles αβγ, αδε, ſe touchans au dedans au poinct α, & ſoit pris ζ, centre du cercle αβγ, & ν, centre de αδε. Ie dis que la ligne menee de ζ, à ν, & prolongee tombera au poinct α, c'eſt à dire, ſi du poinct ν, à α, on mene la droicte ligne να, les deux lignes ζν, να, feront vne ſeule ligne droicte, autrement elles feront angle au poinct ν, de part ou d'autre, ſoit de la part de ι, s'il eſt poſſible, & ſoit la ligne αιζ, entenduë droicte, comme en la ſeconde Propoſition de ce liure: partant ζν, prolongee tombera de l'autre part de l'angle αιζ, comme eſt ζνδθ, qu'il faut conceuoir comme vne ligne droicte. *Et c'eſt ainſi que l'entend Theon. Sa demonſtration eſt facile, entendant cecy.* 11. 3.

THEOREME 11. PROP. 12.

Si deux cercles ſe touchent l'vn l'autre au dehors, la ligne droicte menee

d'vn centre à l'autre, passera par l'attouchement.

Soient deux cercles ABC, DBE, se touchans au dehors au poinct B, & le centre de A B C, soit F, & celuy de DBE, soit G. Ie dis que la ligne droicte menee de F, à G, passe par le poinct d'attouchement B.



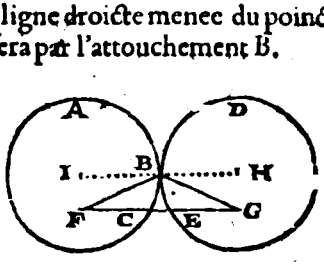
Car soit menee la droicte ligne FB, & la droicte GB, toutes deux au poinct d'attouchement B, les deux font vne seule ligne droicte: partant la ligne droicte menee de F, à G, passe par B. Car s'il n'est ainsi, elles feront angle de part ou d'autre au poinct B; qu'elles facent donc angle vers CE, s'il est possible, & soit menee de F, à G, vne droicte ligne FCEG, coupant les circonferences aux poincts C, & E. D'autant donc que les 2. costez BF, BG, du triangle BFG, (car FB, GB, sont posez faire angle au poinct B, & FCEG, est vne ligne droicte, comme accorde l'aduersaire) sont [v] plus grands que l'autre costé FCEB: mais FC, est egale à FB, & GE, [x] egale à GB, estans menees des centres, donc FC, & GE, qui ne sont qu'vne partie de la toute FCEG, seront aussi plus grandes qu'icelle FCEG, la partie que le tout, (puis que FCEG, contient encore CE, outre FC, GE,) ce qui est impossible. Donc si deux cercles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

v 20. I.

x 15. def. 1.

Mais voyons la demonſtration des autres, leſquels ſont comme en la precedente, ce que eſt dict de celle-là, ſe doit entendre de celle-cy.

Soient les deux cercles ABC, DBE, ſe touchans l'vn l'autre au dehors au poinct B. Et ſoit pris F, le centre du cercle ABC, & G, le centre du cercle DBE. Ie dis que la ligne droicte menee du poinct F, au poinct G, paſſera par l'attouchement B.



Car ſi elle n'y paſſe, qu'elle paſſe par les poincts C, & E, coupant les circonferences des cercles; & ſoient menees des centres F, & G, au poinct d'attouchement B, les droictes lignes FB, GB.

D'autant qu'au triangle FBG, les deux coſtez BG, BF, ſont plus grands que le coſté FG: mais BF, eſt egale à FC, (puis que F, eſt poſé le centre du cercle ABC,) & GB, eſt egale à GE; (d'autãt que G, eſt poſé le centre du cercle DBE,) donc les droictes lignes FC, GE, ſeront auſſi plus grandes que la droicte FG, la partie que le tout; (car la toute FG, contient encore la partie moyenne CE, outre les deux FC, GE,) ce qui eſt abſurde: partant ſi deux cercles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

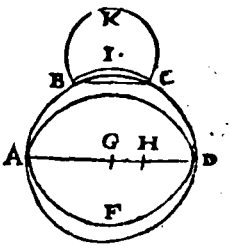
THEOREME 12. PROP. 13.

Vn cercle ne touche point vn cercle à

plus d'vn poinct, ſoit qu'il le touche au dedans ou au dehors.

Que les deux cercles A B C D, A D F, ſe touchent au dedans, s'il eſt poſſible, à plus d'vn poinct, ſçauoir, au poinct A, & D, & ſoient pris les cẽtres d'iceux cercles G, & H, [y] leſquels ſeront diuers: donc la ligne menee par les [z] centres G, & H, prolongee de part & d'autre tombera au poinct de l'attouchement A, & D, cõme A G H D. Et d'autãt que G, eſt le cẽtre du cercle ABCD, la ligne AG, ſera egale à GD, donc A G, ſera plus grande que H D, eſtant egale à G D, plus grande, partant A H, ſera encore bien plus grande que HD. Derechef, d'autant que H, eſt le centre du cercle AFD, la ligne A H, ſera egale à H D: mais elle a eſté demonſtree beaucoup plus grande, ce qui eſt impoſſible. Donc vn cercle n'en touche pas vn autre à plus d'vn poinct, au dedans.

y 6. 3.
z. 11. 3.

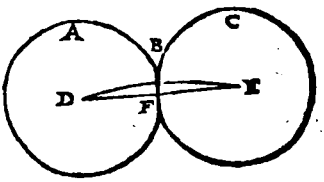


Ie dis auſſi qu'il ne le touche au dehors. Car, s'il eſt poſſible, que le cercle BCK, touche le cercle ABCD, au dehors à plus d'vn poinct, ſçauoir B, & ga, & que l'on mene la droicte ligne B C, elle tombera dans l'vn des cercles: & partant hors l'autre, ce qui eſt contre la meſme 2. Propoſition de ce liure. Donc vn cercle n'en touche pas vn autre au dehors à plus d'vn poinct. Ce qu'il falloit demonſtrer.

2. 3.

Clauius demonſtre ainſi cette derniere partie.

Que les cercles AB, CB, ſe touchent à plus d'vn poinct au dehors, proche le poinct F, & du centre D, au centre E, ſoit menee la droicte ligne DE, laquelle paſſera par [a] le poinct d'attouchement F. Donc s'ils ſe touchent auſſi à vn autre poinct que F, qu'ils ſe touchent à B. Donc ayant mené les droictes lignes DB, EB, icelles DB, EB, ſeront



a 12. 3.

egales à DF, EF, c'eſt à dire & DE: [b] mais elles ſont plus grandes, ce qui eſt abſurde. Donc les cercles ne ſe touchent pas au dehors à plus d'vn poinct.

b 20. 1.

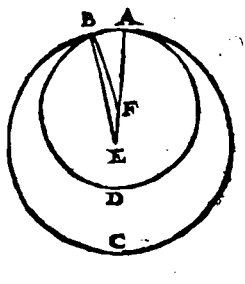
SCHOLIE.

Clauius ſe trompe fort icy, diſant que DB, EB, ſeront plus grandes que DE, par la 20. du 1. voulant dire que DBE, eſt vn triangle, ce qui ne peut eſtre, car ayant poſé que les cercles ſe touchent aux poincts B, & F, il faut accorder par neceſſité, que DBE, DFE, ſont toutes deux lignes droictes. Donc s'il euſt dit en ſa concluſion, que ſi deux cercles ſe touchoient au dehors à plus d'vn poinct, il s'enſuyuroit que deux lignes droictes encloroient vn eſpace [c] ce qui eſt impoſſible, il euſt bien conclu.

c 12. c. ſ.

SCHOLIE DE CLAVIVS.

Si l'on considere bien la demonstration d'Euclide, par laquelle il a prouué, qu'vn cercle ne touche pas vn cercle à plus d'vn poinct; icelle semble principalement conclure, qu'vn cercle ne touche vn cercle à deux ou plusieurs poincts, lesquels soient fort distans, & non pas qu'vn mesme attouchement ne puisse auoir plusieurs poincts. Encore que le mesme puisse estre facilement demonstré presque par le mesme discours. Or afin que cecy demeure totalement confirmé, sçauoir, qu'vn cercle ne peut toucher vn cercle, à plus d'vn poinct; nous monstrerons briefuement qu'à vn mesme attouchement n'y peut auoir plus d'vn poinct.



Car, que le cercle ABC, touche le cercle ABD, proche le poinct A, & par les centres E, & F, [d] lesquels seront diuers, soit menee la droicte ligne EF, laquelle estant prolõgee [e] tombera neceſſairement au poinct d'attouchement, comme au poinct A. Ie dis que ces cercles se touchent tant seulement au poinct A: car s'ils se tou-

d 6. I.

e 11. I.

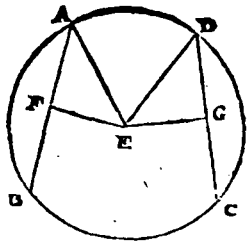
chent aussi à vn autre poinct, comme à B, ayant mené du poinct B, aux centres E, & F, les droictes lignes BE, BF; les lignes EF, FB, seront plus grandes que EB: mais EB, est egale à EA, puis que l'vne & l'autre est menee du centre E: donc EF, FB, seront aussi plus grandes que EA: parquoy ayant osté la commune EF, demeurera FB, plus grande que FA, ce qui est absurde: attendu que FB, FA, sont menees de mesme centre F, à la circonference, & partant sont egales selon la definition du cercle: donc les cercles ABC, ABD, se toucheront l'vn l'autre seulement au poinct A, & non ailleurs.

Ainsi le demonstre Clauius, mais voyons s'il se trompe point, & en quoy.

Clauius dit, si les deux cercles se touchent aussi au poinct B, qu'ayant mené du poinct B, aux centres F, & E, les droites lignes BF, BE, les lignes BF, FE, seront plus grandes que BE, pretendant constituer vn triangle, ce qui est impossible: car posant que f 11. 3. *les cercles se touchent au poinct B, les lignes EF, FB, menees par les centres E, F, font vne seule ligne droite, et partant toute autre ligne menee de E, à B, sera courbe: mais il deuoit dire pour sa conclusion, que les lignes droites EFB, EFA, auroient vn commun segment, ce qui est impossible: ou bien ayant achevé le diametre, c'est à dire prolongé AE, iusqu'à C, monstrer qu'il s'ensuyuroit, que le demy-cercle ou la circonference BC, seroit egale à ABC, la partie au tout: ce qui est impossible.*

THEOREME 13. PROP. 14.

Au cercle, les lignes droictes egales, ſont egalement diſtantes du centre. & celles qui ſont egalement diſtantes du centre, ſont egales entr'elles.



Au cercle ABCD, duquel le centre eſt E ſoiēt les deux lignes droictes egales AB, DC. Ie dis qu'elles ſont egalement diſtantes du centre E.

Car du centre E, ſoient menees EF, EG, perpendiculaires à AB, & CD, & ſoient conioinctes EA, ED: les lignes EF, EG, couperont [g] AB, & CD, en deux egalement, leſquelles eſtans poſees egales, leurs moitiez AF, DG, ſeront auſſi egales.

g 3. 3.

D'autant que les quarrez des lignes egales EA, ED, ſont egaux: & [h] que le quarré de EA, eſt egal aux quarrez de AF, FE, ſemblablement le q. de ED, egal aux quarrez de DG, & GE: les quarrez de AF, FE, ſeront pareillemēt egaux aux quarrez de DG, GE: donc ayant oſté les quarrez egaux des lignes droictes egales AF, DG les quarrez de FE, GE, demeureront egaux: donc EF, EG, ſeront egales. Partant [i] AB, CD, ſeront egalement diſtantes du centre E.

h 47. 1.

i 4. d. 3.

Derechef, ſoient AB, CD, egalement diſtantes du centre E. Ie dis qu'elles ſont egales entr'elles:

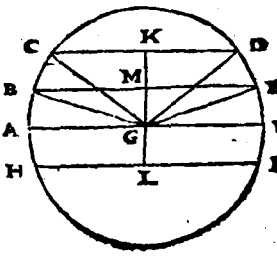
car demeurant ainsi la construction, nous monstrerons que EF, EG, [k] sont egales, & qu'elles diuisent [l] AB, CD, en deux egalement, & les quarrez des lignes droictes egales EA, ED, sont egaux entr'eux: mais le quarré de AE, [m] est egal aux deux quarrez de AF, FE, & celuy de ED, aussi egal aux deux de DG, GE: donc les quarrez de AF, FE, sont egaux aux quarrez de DG, GE: ayant donc osté les quarrez egaux des egales EF, EG, demeureront les quarrez de AF, DG, egaux: & partant les lignes AF, DG, egales, donc leurs doubles AB, CD, aussi egales: donc au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[k] 4. d. 3.
[l] 3. 3.
[m] 47. 1.

THEOREME 14. PROP. 15.

Au cercle, la plus grande ligne est le diametre; mais, des autres, tousiours celle qui est plus proche du centre, est plus grande que celle qui en est plus esloignee.

Au cercle ABCD, duquel le centre est G, soit le diametre AF: & la ligne droicte plus proche du centre HI, la plus esloignee CD. Ie dis que la plus grande de toutes est le diametre AF, & HI, plus grande que CD.



Car soient menees du centre G, les per-

pendiculaires GK, GL, à CD, HI, & d'autant que CD, est plus esloignee du centre que HI, la perpendiculaire GK, sera plus grande [a] que GL. Soit donc retranchee de gk, la ligne GM, egale à GL, & par M, soit menee BME, perpendiculaire à gk: & soient conioinctes les droictes lignes GB, GC, GD, GE.

a 4. d. 3.

D'autant que les perpendiculaires GM, GL, sont egales, BE, HI, seront egalement distantes du centre: & partant egales entr'elles. Derechef, d'autant que GB, GE, sont [b] plus grandes que BE, mais sont egales au diametre AF: le diametre AF, sera aussi plus grand que BE. Par mesme raison l'on monstrera que AF, est la plus grande de toutes les autres lignes.

b 20. 1.

Finalement, d'autant que les costez GB, GE, du triangle BGE, sont egaux aux costez GC, GD, du triangle CGD, & l'angle BGE, est plus grand que l'angle CGD, [c] la base BE, sera plus grande que la base CD. Et partant HI, qui a esté monstree egale à BE, sera pareillement plus grande que CD. Donc au cercle, le diametre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

c 24. 1.

THEOREME 15. PROP. 16.

La ligne droicte menee de l'extremité du diametre du cercle, à angles droicts à iceluy diametre, tombera hors le cercle, & en l'espace compris entre icelle ligne droicte & la circonference, ne tombera pas d'autre ligne droicte; & l'angle du demy-cercle est plus grand que tout angle rectiligne agu; mais le reste est plus petit.

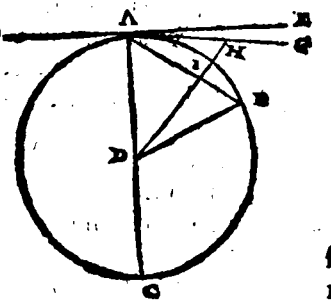
Soit

Soit le cercle ABC, duquel le centre est D, & le diametre AB; de l'extremité duquel soit menee vne droicte ligne à angles droicts à iceluy. Ie dis qu'elle tombera hors le cercle; car s'il n'est ainsi, s'il est possible, qu'elle tombe au dedans comme est AB, & soit menee DB: [q] les angles DAB, DBA, seront egaux: mais DAB, est droict, donc DBA, sera droict aussi, ce qui est absurde, [r] puis que les deux angles d'vn triangle sont moindres que deux droicts: semblablement nous monstrerons qu'elle ne tombera aussi sur la circonference. Donc au dehors, laquelle soit AE.

q 5. 1.

r 17. 1.

Ie dis maintenant qu'entre AE, & la circonference BA, ne peut pas tomber vne autre ligne droicte menee du poinct A. Car que AG, y tombe, s'il est possible, par ainsi l'angle DAG, sera agu, & sur [t] AG, soit menee DH, perpendiculaire à AG, coupant la circonference à I: DH, ne tombera que de la part de l'angle agu DAG. [s] D'autant qu'au triangle DAH, [t] les deux angles DHA, DAH, sont moindres que deux droicts, & DHA, est droit par la construction, DAH, sera moindre qu'vn droict: & partant DA, c'est à dire DI, egale à icelle, [u] sera plus grande que DH, la partie que le tout, ce qui est impossible. Donc aucune ligne droicte ne tombera entre la circonference AB, & la droicte ligne perpendiculaire AB,



s Coroll. 17. 1.

t 17. 1.

u 19. 1.

mais coupera le cercle.

Ie dis finalement, que l'angle du demy-cercle contenu du diametre AC, & de la circonference BA, est plus grand que tout angle rectiligne agu, & le reste qui est l'angle de contingence contenu de la droicte ligne AE, & de la circonference AB, est plus petit que tout angle rectiligne agu. Car puis qu'il est monstré que toute ligne droite tiree du poinct A, au dessous de la perpendiculaire AE, tombe dans le cercle, elle fera necessairement auec la ligne AC, vn angle rectiligne agu moindre que l'angle du demy cercle: mais auec AE, constituera vn angle rectiligne agu, plus grand que l'angle de contingence, attendu que celuy-là est vne partie de l'angle du demy-cercle: mais cettuy-cy quelque tout, au respect de l'angle de contingence: ce qui est manifeste, estant menee la droite ligne AB, comment que ce soit, au dessous de AE. Car puis qu'icelle AB, tombe dans le cercle, comme il est demonstré, l'angle rectiligne agu CAB, est moindre que l'angle du demy-cercle, contenu sous le diametre AC, & la circonference ABC, puis que celuy-là est partie de cettuy cy. Mais l'angle de contingence contenu sous la tangente AE, & la circonference ABC, est moindre que l'angle rectiligne BAE, puis qu'il est partie d'iceluy. Donc l'angle du demy cercle est plus grand que tout angle rectiligne agu, & le reste, angle de contingence, moindre. Donc, la ligne menee de l'extremité, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Le Copiste a mal entendu la demonstration de cette Proposition, en disant ainsi. De l'extremité A, soit menee la perpendiculaire AE, par la 11. du

I. Ie dis (dict-il) que la ligne AE, tombe hors le cercle : il est icy ayse à voir qu'il ne sçait ce qu'il veut dire, car puis qu'il a mené la ligne perpendiculaire AE, hors le cercle par la 11. du 1. il n'a plus besoin de prouuer qu'elle tombe hors le cercle, mais il deuoit faire ainsi sa demonstration. *Ie dis que la ligne droite menee de l'extremité du diametre AC, à angles droits à iceluy, tombe hors le cercle, autrement qu'elle tõbe au dedans, cõme* AB, *&c.* comme dict Theon: ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, μὴ γὰρ ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ἐντός, ὡς ἡ ΑΓ, &c. Mais ie croy plustost qu'il estoit yure lors, & ne sçauoit ce qu'il faisoit, qui a esté la cause qu'il a mal copié : car au texte mesme de cette Propositiõ il a mis ainsi. *Si à l'extremité du diametre d'vn cercle, on leue vne ligne perpẽdiculaire, elle tombera dedans le cercle* au lieu de dire, elle tombera hors le cercle : car il y a ainsi au texte de l'Autheur, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, c'est à dire ; elle tombera hors le cercle.

COROLLAIRE.

Il est d'icy manifeste, que la ligne droite tiree de l'extremité du diametre, à angles droicts, touche le cercle : car il est demonstré qu'elle tombe dehors le cercle : parquoy elle atteint le cercle à ce poinct extreme du diametre seulement. Comme si du poinct A, en la circonference du cercle ABC, il falloit mener vne ligne qui touchast le cercle *au poinct* A, nous menerons vne ligne droicte de A, *au centre* D, & à icelle nous menerons A E, à

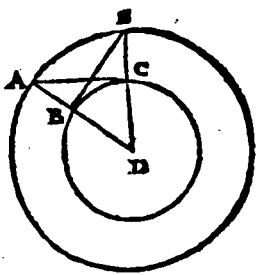
angles droicts, & icelle touchera le cercle au poinct A, comme il eſt demonſtré.

PROBLEME 7. PROP. 17.

D'vn poinct donné mener vne ligne droicte, qui touche vn cercle donné.

Soit le poinct donné A, & le cercle donné B C, il faut mener vne ligne droicte du poinct A, qui touche le cercle B C.

Soit trouué le centre D, & ioincte la ligne droicte AD, laquelle coupe le cercle au poinct B, & du centre D, & de l'interualle D A, ſoit deſcrit le cercle AE, & du poinct B, ſoit menee BE, à angles droits à AD, coupant le cerce AE, au poinct E: & finalement ſoit menee DE, coupant le cercle B C, au pomct C, & ſoit iointe CA. Ie dis que AC, touche le cercle donné au poinct C.



Car puis que les deux coſtez BD, DE, du triangle BDE, ſont egaux aux deux CD, DA, du triangle CDA, chacun au ſien, comme il appert par la definition du cercle, & l'angle D, contenu d'iceux coſtez eſt commun, les[x] baſes BE, CA, & les angles DBE DCA, ſeront egaux; mais DBE, eſt droit par la conſtruction: donc DCA, ſera droit auſſi. Donc puis que CA, eſt menee de l'extremité C, du demy diametre DC, à angles droits, elle[y] touchera le cercle. Donc du poinct donné A, l'on a me-

x 4. 1.

y *Coroll.* 16. 3.

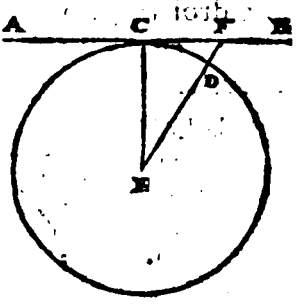
lé AC, touchant le cercle BC, au poinct C. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La practique de cette Proposition se peut colliger de la mesme demonstration. Mais nous l'enseignerons plus facilement à la 31. Proposition de ce liure.

THEOREME 16. PROP. 18.

Si quelque ligne droicte touche vn cercle, & du centre à l'attouchement l'on conioinct quelque ligne droicte, la ligne conioincte sera perpendiculaire à la touchante.



Que la droicte ligne AB, touche le cercle CD, au poinct C, duquel soit trouué le centre E, & d'icelluy soit menee la droicte ligne EC, au poinct d'attouchement C. Ie dis que EC, est perpendiculaire à AB.

Car si elle ne l'est, soit menee EF, perpendiculaire à AB, coupant la circonference au poinct D. D'autant qu'au triangle CEF, [2] les deux angles ECF, EFC, sont moindres que deux droicts, & EFC, est droict par la construction, ECF, sera *moindre* qu'vn droict. Partant [3] EC, c'est à dire [2] 17. 1. [3] 18. 1.

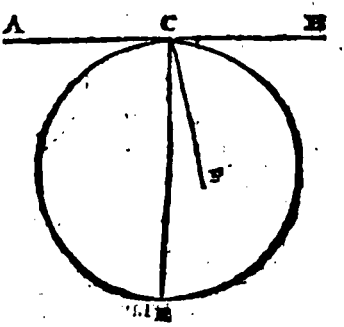
ED, ſon egale ſera plus grande que EF, la partie que le tout, ce qui eſt impoſſible. Donc EC, eſt perpendiculaire à AB. Partant ſi vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

AVTREMENT.

Si EC, n'eſt perpendiculaire à AB, l'vn des angles au poinct C, ſera obtus, & l'autre agu. Soit ECB, agu, lequel eſtant plus grand que l'angle du demy-cercle ECD, l'angle du demy-cercle ſera
b 16. 3. *plus petit que quelque angle rectiligne agu:* [b] *Ce qui eſt abſurde.*

THEOREME 17. PROP. 19.

Si quelque ligne droicte touche vn cercle, & de l'attouchement l'on mene vne ligne droicte, à angles droicts à la touchante, en icelle menee ſera le centre du cercle.



Que la droicte ligne AB, touche le cercle CE, au poinct C, & du poinct C, ſoit menee CE, à angles droicts à AB. Ie dis qu'en CE, eſt le centre du cercle.

Car s'il eſt hors icelle, qu'il ſoit au poinct F, s'il eſt poſſible, duquel
c 18. 1. ſoit menee la droicte ligne FC, [c] laquelle ſera per-

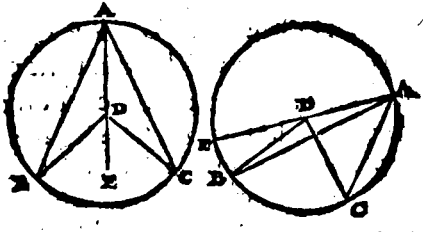
pendiculaire à A B. Partant l'angle droict F C B, sera egal à l'angle droict E C B, la partie au tout: ce qui est impossible. Donc le centre du cercle ne sera hors la ligne C E. Donc si une &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 18. PROP. 20.

Au cercle, l'angle qui est au centre, est double de l'angle qui est à la circonference, quand ils ont pour leur base vne mesme circonference.

Soit le cercle A B C, au centre duquel D, soit constitué l'angle B D C, & A B C, à la circonference ayans vne mesme circonference B C, pour base. Ie dis que l'angle B D C, est double de B A C.

Car soit conioincte A D, & prolongee à E: dautant que les deux lignes D A, D B, sont egales D A B, D B A, [d] seront egaux: mais l'angle externe E D E, est egal [e] aux deux internes D A B, D B A, & partant double de chacun d'iceux, comme de D A B, Semblablement, nous monstrerons que C D E, est double de l'angle D A C: parquoy le tout B D C, sera double du tout B A C. Ce qui est proposé.



[d] 5. 1.
[e] 32. 1.

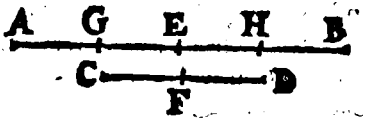
Derechef, que l'angle C A B, n'encloë point E D B, & soit iointe A D, & prolongee à E. Dautant que les deux costez D A, D C, sont egaux [i] les deux an- [i] 5. 1.

k 32. 1. gles DAC, DCA, ſeront egaux : mais l'angle externe CDE, eſt egal k à iceux, donc il ſera double de DAC : mais l'angle EDB, au centre eſt double de EAB, cõme il eſt demonſtré, donc le reſte BDC, ſera double du reſte BAC. Car quant le tout eſt double du tout, & le retranché du retranché, le reſte ſera double du reſte. Comme s'enſuit.

LEMME.

Soit AB, *toute double de* CD, *toute* AE, *retranchée double de* CF, *retr. le reſte* EB, *ſera double du reſte* FD *Car puiſque* AE, *eſt double de* CD, *eſtant diuiſee en 2. egalement*

10. 1. *à E. tant* AE, *que* EB, *ſera egale à* CD, *Donc* AE, *eſtant auſſi*



double de CF; *CD, egale à* AE, *ſera auſſi double de* CF, *& partant de ſon autre moitié* FD, *Donc le reſte* EB, *egale à* CD, *ſera auſſi double du reſte* FD, *Ce qu'il falloit dem. &c.*

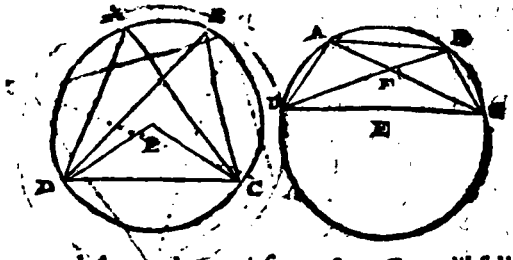
THEOREME 19. PROP. 21.

Au cercle, les angles qui ſont en vn meſme ſegment, ſont egaux entr'eux.

Soit le cercle ABCD, & au ſegment CBAD, ſoient les deux angles DAC, CBD, Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.

Car ſoit le centre E, duquel ſoient ioinctes les lignes ED, EC. D'autant que l'angle DEC, eſt
m 10.3. conſtitué au centre m il ſera double de DAC, à la circonference : car ils ont meſme circonference DC, pour baſe : par meſme raiſon il ſera double de l'angle CBD. Donc chacun des 2. A, & B, ſera

moitié de DEC, & partant egaux entr'eux. Donc



au cercle les angles qui sont, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Semblablement on demonstrera que DAC, CBD, en la moindre section DABC, sont egaux entr'eux. Car ayant mené AB, en la 2. fig. ADB, BCA, en la plus grande section dont la base est AC, seront egaux, comme il est monstré & les angles au sommet BFC, & 15. 1. *AFD, sont egaux, donc DAC, CBD, en la moindre* Cor. *section dont la base est DC, sont aussi egaux. Ce qui* 32. 1. *estoit proposé.*

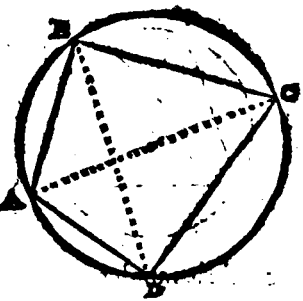
THEOREME 20. PROP. 22.

Les angles opposez des figures de quatre cpstez, inscrites au cercle, sont egaux à deux droicts.

Soit le cercle ABCD, auquel soit inscrite la figure quadrilatere AC. Ie dis que les deux angles opposez BAD, BCD, sont egaux à 2. droicts.

Car soient conioinctes les deux Diagonales AC, BD: d'autant que les deux angles ACD, ABD, sont en vn mesme segment ABCD, ils seront egaux entr'eux, par mesme raison les deux angles

BCA, BDA, au segment BCDA, seront aussi egaux entr'eux, donc l'angle total BCD, sera egal aux deux angles ABD, ADB: donc ayant adiousté l'angle commun BAD, les deux BCD, BAD, seront egaux aux trois angles BDA, DBA & BAD, du triangle ABD: mais les trois angles du triangle ABD, [p] sont egaux à deux droicts, donc les deux angles oppoſez BAD, BCD ſeront auſſi egaux à deux droicts. Semblablement, l'on monſtrera que les deux angles oppoſez aux poincts D, & B, ſont egaux à deux droits. Donc les angles oppoſez des figures, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



p. 32. 1.

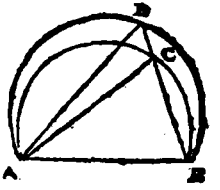
PROBLEME 21. PROPO. 23.

Sur vne meſme ligne droicte, l'on ne pourra conſtituer deux ſegments de cercles ſemblables & inegaux, & de meſme part.

Car, s'il eſt poſſible, ſoient conſtituez deux ſegmẽts de cercles, ſemblables & inegaux, ſur la l. AB, & de meſme part ACB, ADB, iceux ſegments ſe coupperont ſeulement aux poincts A, & B, [q] puis qu'vn cercle ne coupe vn autre cercle à plus de deux poincts. Donc la circonference d'vn des ſegments ſera hors la circonference de l'autre. Soit

q 10. 3.

donc menee la ligne droicte BCD, coupant les circonferences aux poincts C, & D, & soiét iointes AD, AC: d'autant que les segments ACB, ADB, sont posez semblables, par la 10. definition de ce liure, l'angle



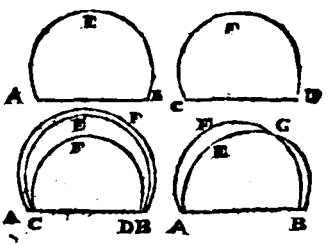
ACB, sera egal à l'angle ADB, ce qui est absurde: car l'exterue ACB, est plus grãd que l'interne ADB. Ils ne sont donc pas segments semblables: donc sur vne mesme ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [16. 1.]

THEOREME 22. PROPO. 24.

Semblables segments de cercles, constituez sur lignes droictes egales, sont egaux entr'eux.

Sur les lignes droictes egales AB, CD, soient constituees les sections de cercles semblables AEB, CFD. Ie dis que qu'elles sont egales entr'elles.

Car les lignes AB, CD, estans egales conuiendront entr'elles, si on entend qu'elles soient posees l'vne sur l'autre, sçauoir AB, sur CD, & le segment AEB, conuiendra sur le segment CFD: autrement le segment AEB, tombera

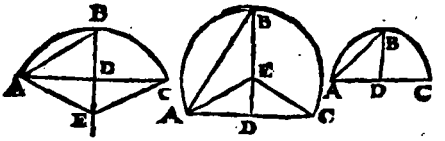


au dehors du segment CFD, ou au dedans, ou

partie dehors & partie dedans, & partant ſur vne meſme ligne droicte ſeront conſtituez ſemblables
[s] 23. 3. ſegments de cercles & inegaux [s] ce qui eſt abſurde: que s'il tomboit en partie au dehors & partie au dedans, ils ſe couperoient à plus de deux poincts, comme à B, & G, ce qui eſt impoſſible: car vn cercle ne coupe vn cercle à plus de deux poincts: donc ils conuiendront, & partant ſeront egaux entr'eux. Donc ſur lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBLEME 3. PROP. 25.

Le ſegment d'vn cercle eſtant donné, deſcrire le cercle, duquel il eſt le ſegment.



Soit le ſegment du cercle A B C, duquel il faut deſcrire le cercle dont il eſt le ſegment, ſoit iointe A C, & diuiſee en deux egalement au poinct D, par lequel ſoit menee D B, à angles droicts à A C, & iointe A B, l'angle D B A, ſera plus grand que l'angle D A B, ou egal, ou plus petit.

Premierement, ſoit plus grand (ce qui aduiendra quand le ſegment ſera moindre que le demy-
[t] Coroll. 1. 3. cercle) car alors B D, prolongee, paſſera [t] par le centre qui eſt hors le ſegment, puis qu'il eſt plus
[u] 7. 3. petit, [u] & D A, ſera plus grande, que D B: car D B, eſt
[x] 18. 1. le reſte du diametre: partant [x] D B A, ſera plus grand

que DAB) soit faict l'angle BAE, egal à DBA, & que la droicte ligne AE, coupe BD, prolongee à E. Ie dis que E, est le centre du cercle duquel ABC, est le segment.

Car ayant mené EC, les deux costez AD, DE, du triangle ADE, seront egaux aux deux CD, DE, du triangle CDE, & les angles contenus d'iceux sont droicts, ˣ partant AE, EC, egales: mais EA, ʸ est aussi egale à EB, ᶻ puisque les angles EAB, EBA, sont egaux: donc les trois EA, EB, EC, sont egales. ᵃ Donc F, sera le centre du cercle ABC, puis que d'iceluy poinct, tombent plus de deux lignes droictes egales, à la circonference.

ˣ 4. 1. ʸ 6. 1. ᶻ 6. 1. ᵃ 9. 3.

Secondement, soient les angles DBA, DAB, egaux, ᵇ DA, sera egale DB: mais DC, est aussi egale à DB, estant AC, diuisee en deux egalement au poinct D, toutes les trois DC, DB, DA, seront egales: ᶜ partant D, sera le centre du cercle, & le segment proposé sera demy-cercle.

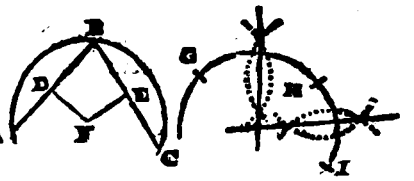
ᵇ 6. 1. ᶜ 9. 3.

Finalement, si l'angle DBA, est plus petit que DAB. soit fait l'angle BAE, egal à ABE, & soit iointe EC. Ie dis que E, est le centre du cercle: car l'on monstrera par les mesmes raisons cy dessus, que les trois lignes EA, EB EC, sont egales: & partant aussi le segment proposé excedera le demy-cercle. DONC vn segment de cercle estant donné: nous auons descrit le cercle, duquel il est le segment. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Autrement, ayant pris trois poincts à l'aduenture au segment donné A, B, C, soient menees deux

lignes AB, BC, *& diuiſees en* [d] *deux egalemẽt à* D, *&* E,



[d] 10. 1.

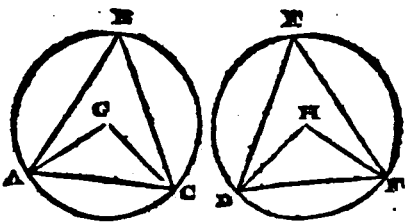
[e] 11. 1. *puis menees les lignes* DF; EF, [e] *à angles droicts, leſquelles ſe rencontreront, comme à* F, (*car ſi on menoit vne ligne droicte de* D, *à* E, DEF, EDF, *ſeroient plus petits que deux droicts*) *donc* [f] F, *ſera le centre du cercle, & cẽ la meſme maniere l'on fera paſſer vne circonference par trois poincts donnez, non en droicte ligne.*

[f] Coroll. 1. 3.

THEOREME 23. PROP. 26.

Aux cercles egaux, les angles egaux ſont appuyez ſur circonferences egales, ſoit qu'ils y ſoient appuyez, eſtans conſtituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient les cercles egaux ABC, DEF, aux centres deſquels G, H, ſoient conſtituez les angles DHF, AGC, egaux: item, que les angles B, & E, ſoient conſtituez aux circonferences auſſi egaux. Ie dis que les circonferences AC, DF, ſur leſquelles ils ſont appuyez, ſont egales.



Car soient ioinctes les lignes droictes AC, DF, d'autant que les deux costez GA, GC, du triangle AGC, sont egaux aux deux HD, HF, du triangle DHF, à cause de l'egalité des cercles, & les angles *G*, & *H*, egaux par l'hypothese, ᵍ les baſes AC, DF, seront egales : mais les angles B, & E, constituez aux circonferences, sont egaux par l'hypothese, & appuyez sur les mesmes baſes, donc les segments ABC, DEF, seront ʰ semblables, & partant egaux : lesquels estans soustraicts des cercles egaux, demeureront les segments, AC, DF, egaux, & partant les circonferences AC, DF, egales. Ce qu'il falloit demonstrer.

g 4. 1.

h 24. 3.

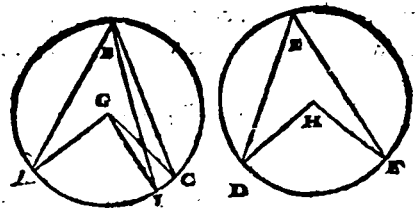
SCHOLIE.

En cette Proposition & aux trois suyuantes, ce qui est dict des cercles egaux, doit aussi estre entendu d'vn mesme cercle ; car ce sera la mesme demonstration.

THEOREME 24. PROP. 27.

Aux cercles egaux, les angles appuyez sur circonferences egales, sont egaux entr'eux ; soit qu'ils y soient appuyez estans constituez aux centres, ou bien estans constituez aux circonferences.

Aux cercles egaux ABC, DEF, desquels les centres sont G & H, soient premierement constituez les angles AGC, DHF, aux centres ayans pour baſes les circonferences egales AC, DF. Ie dis qu'ils sont egaux entr'eux.



Car s'ils ne ſont egaux, ſoit l'angle G, le plus grand, & ſoit faict l'angle AGI, egal à l'angle
126. 3. DHF, donc la circonference AI, ſera egale à la circonference DF; mais la circonference AC, eſt egale à la circonference DF, par l'hypotheſe; partant AI, & AC, ſeront egales entr'elles, la partie au tout, ce qui eſt impoſſible. Donc les angles AGC, DHF, ſont egaux.

Secondement, ſoient conſtituez les angles B, & E, aux circonferences, ayans circonferences egales AC, DF, pour baſes: par les meſmes raiſons on monſtrera qu'ils ſont egaux entr'eux. Ce qu'il falloit demonſtrer.

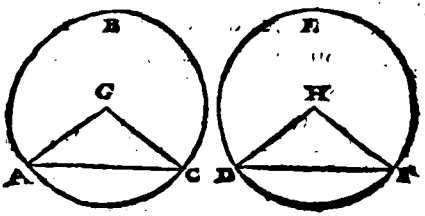
THEOREME 25. PROPO. 28.

Aux cercles egaux, les lignes droictes egales, oſtent circonferences egales, ſçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.

Aux cercles egaux ABC, DEF, ſoient les lignes droictes egales AC, DF. Ie dis que la plus grande circonference ABC, eſt egale à la plus grande DEF, & la moindre AC, egale à la moindre DF.

Car

Car soient pris les centres G, & H, & soient ioinctes les droictes lignes AG, GC, DH, HF,



Les deux costez GA, GC, du triangle AGC, sont egaux aux deux HD, HF, du triangle DHF, & les bases AC, DF, sont egales par l'hypothese; partant les [k] angles G, & H, sont egaux: [l] Donc les circonferences AG, DF, sur lesquelles ils sont appuyez seront egales, lesquelles estans ostees des cercles egaux, demeureront les circonferences ABC, DEF, aussi egales: donc aux cercles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[k] 8. 1.
[l] 26. 3.

THEOREME 26. PROP. 29.

Aux cercles egaux, les circonferences egales, soustendent lignes droictes egales.

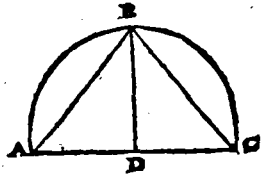
Soient les cercles egaux ABC, DEF, ausquels soient prises les circonferences ABC, DEF, egales, & soient iointes les droictes lignes AC, DF. Ie dis qu'icelles lignes droictes qui les soustendent sont egales. *Voyez la figure precedente.*

Car soient pris les centres G, & H, & soient conioinctes les droictes lignes AG, GC, DH, HF. D'autant que les deux costez AG, GC, du

triangle AGC, ſont egaux aux deux DH, HF, du
m 27. 1. triangle DH,F, [m] & les angles G, & H, egaux,
puis qu'ils ſont appuyez ſur egales circonferences,
n 4. 1. [n] les baſes qui ſont les droictes lignes AC, DF,
ſont egales. Donc aux cercles egaux, &c. Ce qu'il
falloit demonſtrer.

PROBLEME 4. PROP. 30.

Couper en deux egalement vne circonference donnee,



Soit la circonference donnee ABC, laquelle il faut couper en deux parties egales: ſoit ioincte la ligne droicte AC, laquelle
o 10. 1. ſoit diuiſee en deux parties egales, [o] par le poinct
p 11. 1. D, par lequel ſoit menee la droite l. DB, à [p] angles droicts à AC, & ſoient ioinctes les lignes droictes AB, CB, elle ſera coupee en deux egalement par le poinct B.

Car puis que AD, CD, ſont egales, & DB, commune, les deux coſtez AD, DB, du triangle ADB, ſeront egaux aux deux CD, DB, du triangle CDB, & les angles au poinct D, ſont egaux,
q 4. 1. ſçauoir droicts [q] les baſes AB, CB, ſont egales,
r 28. 3. & [r] partant les circonferences AB, CB, auſſi egales: nous auons donc coupé vne circonference en deux egalement. Ce qu'il falloit faire.

THEOREME 27. PROP. 31.

Au cercle, l'angle qui eſt au demy-cercle eſt droict: mais celuy qui eſt au plus grand ſegment eſt plus petit qu'vn droict; & celuy qui eſt au plus petit ſegment, eſt plus grand qu'vn droict. Et dauantage, l'angle du plus grand ſegment, eſt plus grand qu'vn droict: mais l'angle du plus petit ſegment, eſt plus petit qu'vn droict.

Soit le cercle ABC, & le diametre d'iceluy AC, & le centre D, & ſoient ioinctes les droictes liges AB, CB; item BE, EC. Ie dis premierement que l'angle ABC, au demy-cercle eſt droict.

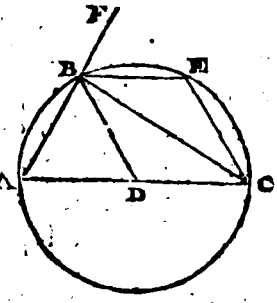
Car ſoit menee BD, au centre D, & prolõgee AB, directement vers F. D'autant que DA, DB, ſont egales, les angles [f] DAB, DBA, ſeront egaux entr'eux: par meſme raiſon les deux angles DBC, DCB, ſeront auſſi egaux: car DB, DC, ſont auſſi egales entr'elles: partant les deux DBA, DBC, c'eſt à dire le total ABC, eſt egal aux deux BAC, BCA: mais l'angle externe CBF, [t] eſt egal aux deux meſmes angles internes & oppoſez BAC, BCA. Donc les deux angles ABC, CBF, ſeront egaux entr'eux, & partant droicts, donc l'angle ABC, au demy-cercle eſt droict; ce qui eſt premierement propoſé.

[f] 5. 1.

[t] 32. 1.

Ie dis ſecondement, que l'angle BAC, au plus grand ſegment BAC, eſt plus petit qu'vn droict. Car d'autant qu'au triangle ABC, les deux angles

ABC, BAC, ſont plus petits que deux droicts, & ABC, eſt demonſtré droict : l'angle BAC, ſera plus petit qu'vn droict. Ce qui eſt ſecondement propoſé.



Tiercement, ie dis que l'angle BEC, au plus petit ſegment BEC, eſt plus grand qu'vn droict. Car d'autant qu'au quadrilatere ABEC, deſcrit au cercle, les deux angles oppoſez E, & A, ſont egaux à deux droicts, & l'angle BAC, eſt monſtré plus petit qu'vn droict, l'autre BEC, ſera plus grand qu'vn droict. Ce qui eſtoit tiercement propoſé.

X 22. 3.

Quartement, ie dis que l'angle du plus grand ſegment BAC, qui eſt l'angle ABC, contenu de la circonference AB, & de la ligne droicte BC, eſt plus grand qu'vn droict. Car puis que l'angle droict ABC, eſt contenu des lignes droictes AB, BC, eſt vne partie d'iceluy, le tout ABC, contenu de la circonference AB, & de la ligne droicte BC, ſera plus grand qu'vn droict. Ce qui eſtoit quartement propoſé.

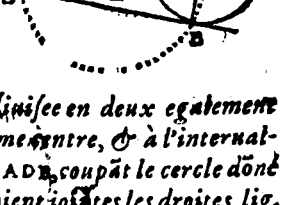
Finalement, ie dis que l'angle du plus petit ſegment qui eſt l'angle CBE, contenu de la ligne droicte CB, & de la circonference BEC, eſt plus petit qu'vn droict : car iceluy eſt plus petit que l'angle droict FBC, la partie que le tout, ce qui eſtoit finalement propoſé. Donc au cercle, l'angle qui eſt au demy-cercle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

D'icy eſt manifeſte, que l'angle d'vn triangle qui eſt egal aux deux autres, eſt droit: d'autant que l'angle contigu à iceluy (qui eſt fait hors le triangle, le coſté eſtant prolongé) eſt egal aux meſmes. Ce qui appert de la premiere demonſtration: ou d'autant qu'il eſt la moitié des trois angles du triangle, leſquels vallent deux droicts.

SCHOLIE.

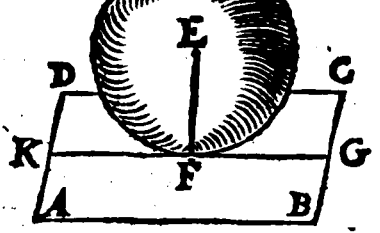
De la premiere demonſtration de cette Propoſition, nous colligerons facilement comment l'on pourra mener deux lignes d'vn poinct hors vn cercle donné, qui toucheront iceluy cercle de part & d'autre. Soit donc le cercle donné AB, *& hors iceluy le poinct D, duquel ie veux mener vne l. qui touche le cercle à deux poincts de part & d'autre. Soit trouué le centre C, & du poinct D, au centre C, ſoit menée la ligne droicte DC, & diuiſee en deux egalement au poinct E, & de* E *comme centre, & à l'internalle* EC, *ſoit deſcrit le cercle* ADB, *coupãt le cercle dõné aux poincts* A, *&* B, *& ſoient iointes les droites lig.* DA, DB. *Ie dis que l'vne & l'autre touchera le cercle aux poincts A, & B: car ayant menés les droites lig. AC, & BC, l'vn & l'autre angle* A, *&* B, *ſera droit au demy-cercle: Donc par le Corollaire de la 16. Prop. de ce liure* DA, *&* DB, *toucheront le cercle aux poincts* A, *&* B.



x 33. I.

De ce qui a esté demonstré cy-deuant à la 6. & autres Propositions des lignes qui touchent le cercle à vn poinct seulement ; nous monstrerons qu'vn corps parfaictement spherique, touchera vn plan, aussi parfaictement à plany, & aussi parfaict, qu'il se peut donner en la nature, reellement, & non à vn poinct seulement, comme veulent dire la plus part des Philosophes, & comme veut demonstrer Theodoze à la 3. Prop. de son 1. liu. des Spheriques.

Car soit vn plan tel qu'il est requis, icy representé par la figure ABCD, & soit GK, qui le diuise en deux egalement ou non : soit aussi le corps spherique sur iceluy plan representé par HIF, dont le centre soit E, duquel soit menee la perpendiculaire EF, au poinct F, de la ligne GK, laquelle GF, sera le demy-diametre du globe : maintenant si l'on conçoit en l'entendement que le demy-diametre EF, face vne entiere reuolution autour de son centre E, iceluy poinct E, demeurant fixe, ledict demy-diametre EF, descrira vn plan circulaire, cõme HFI, lequel selõ Euclide & tous les Geometres, diuisera ledit corps spherique en deux egalemẽt, & ne sera aucune partie d'iceluy corps spherique. Mais comme nous auons de-



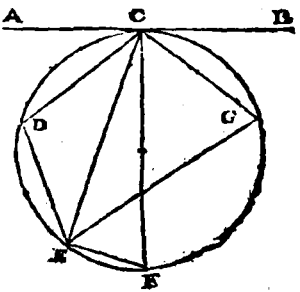
monſtré, le cercle H F I, touchera la ligne G K, à vn poinct ſeulement, comme à F, laquelle n'eſt auſſi aucune partie, ny du corps aplany ny de ſa ſuperficie, *ſelon Euclide*. Il s'enſuit donc que les moitiez de la ſphere, c'eſt à dire la ſphere meſme, touchera les deux parties du plan c'eſt à dire le *plan*, autrement, que le cercle H I F, ne touche la ligne G K, c'eſt à dire, ſelon quelque partie de ſa ſuperficie: autrement la ſphere ne pourroit iamais paruenir iuſques au plan, ce qui eſt abſurde. Et qu'ainſi ne ſoit, poſons que le corps ſpherique & materiel ſoit peſant, pour exemple, de 10000. liures ou plus, lequel tombant embas, rencontre le plan A B C D, iceluy plan l'arreſtera, & empeſchera de tomber plus bas, autrement la ſphere par ſa peſanteur feroit deſcendre le plan, ce qui ne ſe peut faire ſans vn attouchement reel: ou bien ſi nous poſons que le plan ſoit vn corps de fort peu deſpaiſſeur ou profondité, & d'vne matiere fragile, comme de verre ou cryſtal, & ſouſtenu ſur les 4. angles A B C D, ſans appuy ſous le milieu, le corps ſperique de telle peſanteur le rencontrant, le romproit infalliblement, n'eſtant ſuffiſant ledict plan de reſiſter à vne telle peſanteur, ce qui ne ſe peut imaginer pouuoir eſtre faict, ſans l'attouchement reel de la matiere de l'vn & de l'autre. Donc vn corps ſpherique, ſi parfaict qu'il puiſſe eſtre, ne touchera pas vn plan auſſi parfaictement plan, à vn poinct ſeulement: mais reellement & ſelon vne partie, encore bien qu'elle ſemblaſt inſenſible: car autrement l'attouchement de la ligne & du cercle, ſeroit le meſme que de la ſuperficie ſpherique & du plan, d'où il s'enſuyuroit que la ligne *ſeroit* partie de la ſuperficie, ce qui eſt contre

Euclide & Aristote. Et pour ce qui est de la proposition de Theodoze, qui la considerera auec attention, trouuera qu'il ne conclud autre chose, sinõ que le cercle qui coupe la sphere touche la l. qui coupe le plan à vn poinct seulement: mais la superficie spherique touche la superficie plane selon quelque partie.

THEOREME 28. PROP. 32.

Si quelque ligne droicte touche vn cercle, & de l'attouchement l'on mene quelque ligne droicte au cercle, le coupant, les angles qu'elle faict auec la touchante seront egaux aux angles qui sont aux segments alternes.

Que la ligne droicte AB, touche le cercle CDE, au poinct C, duquel soit menee la ligne droicte CE, coupant le cercle en deux segments CDE, CGFE, ausquels soient constituez les angles D, & G. Ie dis que l'angle ACE, est egal à l'angle G, qui est au segment alterne CGEF, & l'angle BCE, est egal à l'angle D, qui est aussi au segment alterne CDE.



Car soit menee la ligne CF, par le centre, & soit ioincte EF, la ligne CF, sera perpendiculaire à AB, & l'angle CEF,

y 18. 1.

ſera droict; & partant les deux reſtans EFC, ECF, ſeront egaux à vn droict, comme à l'angle droict ACF: donc ſi l'on oſte le commun ECF, demeurera l'angle ACE, egal à l'angle EFC, lequel eſt egal à l'angle G, d'autant qu'ils ſont en vn meſme ſegment: donc l'angle ACE, ſera auſſi egal à l'angle G. 31. 3.

Et d'autant qu'au quadrilatere DEGC, inſcrit au cercle, les deux angles oppoſez D, & G, ſont egaux[z] à deux droicts, & les deux ACE, BCE, ſont auſſi egaux à deux droicts, ſi l'on oſte les deux egaux ACE, CGE, demeurera l'angle BCE, egal à l'angle D, au ſegment alterne CDE. Donc ſi vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [z] 21. 3.

Si la coupante paſſe par le centre A, la propoſition eſt manifeſte. 18, & 31. 3

PROBLEME 5. PROPOSIT. 33.

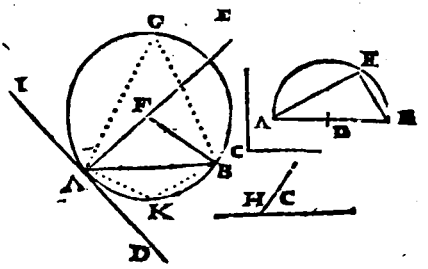
Sur vne ligne droicte donnee, deſcrire vn ſegment de cercle, lequel reçoiue vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la droicte ligne donnee AB, & l'angle donné C, lequel ſoit premierement droict: il faut deſcrire vn ſegment de cercle, auquel l'angle conſtitué, ſoit egal à l'angle donné C.

Soit diuiſee la droicte ligne AB, en 2. egalemẽt par le poinct D, & du poinct D, comme centre, & à l'interualle DA, ſoit deſcrit le demi-cercle, auquel ſoit faict l'angle AEB, lequel eſt droict, & partant egal à l'angle droict donné C. 31. 3.

Soit ſecondement l'angle donne C, agu, au

poinct A, de la ligne donnee AB, soit fait l'angle DAB, egal à l'angle agu C, & du poinct A, soit menee AE, à angles droicts à AD, laquelle tombera au dessus de AB : puis soit



6. 1. faict l'angle ABF, egal à l'angle FAB. & que BF, coupe la droicte ligne AE, au poinct F : les lignes FA, FB, seront egales Partant si du centre F, à l'interualle FA, l'on descrit le cercle AG, il passera par le poinct B. Ie dis donc que l'angle qui sera faict au segment AGB, descrit sur la ligne AB, sera egal à l'angle C. Soit donc fait l'angle AGB, audict segment : d'autant que AE, passe par le centre, & de l'extremité A, est menee AD, à angles droicts à icelle, DA,[a] touchera le cercle au poinct A. C'est pourquoy l'angle DAB, c'est à dire l'angle donné C, sera egal à l'angle G, au segment alterne AGB.

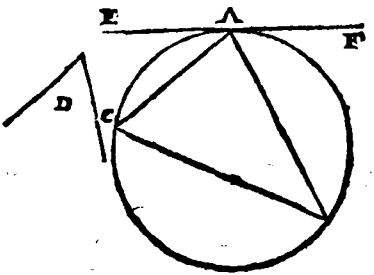
a Coroll. 16. 3.

Tiercement, soit l'angle donné H, obtus. Soit faict derechef l'angle IAB, egal à l'angle H, & du poinct A, soit menee AE, à angles droicts à AI, laquelle tombera au dessus de AB : soit faict le reste comme deuant, l'on aura descrit sur la ligne AB, le segment AKB, auquel l'angle K, est egal à l'angle obtus donné H. Car l'angle IAB, c'est à dire l'angle donné H, est egal à l'angle K, au segment alterne AKB : car c'est la mesme demonstration. Donc sur vne ligne droicte donnee, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 6. PROPOSIT. 34.

D'vn cercle donné, retrancher vn segment, qui reçoiue vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC, duquel il faut retrancher vn segment, auquel l'angle constitué soit egal à l'angle donné D. Soit menee la droicte ligne EF, touchant le cercle au poinct A. Puis soit faict l'angle FAB, egal à l'angle donné D, & soient menees les droites lign. AC, BC. Ie dis que l'angle ACB, au segment osté ACB, est egal à l'angle donné D. 17. 3.



Car l'angle FAB, qui est fait egal à l'angle donné D, est [b] egal à l'angle C, au segment alterne ACB: donc iceluy angle C, sera pareillement egal à D. Nous auons donc osté du cercle donné le segment ACB, &c. Ce qu'il falloit faire. b 32. 3.

THEOREME 29. PROP. 35.

Si au cercle deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre, le rectangle contenu sous les deux parties de l'vne, est egal au

rectangle contenu ſous les deux parties de l'autre.

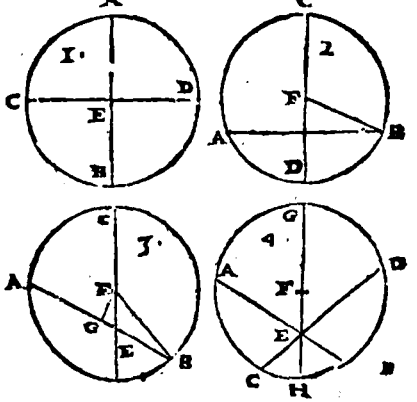
Au cercle ABC, que les deux lignes AB, CD, ſe coupent au poinct E. Ie dis que le rectangle contenu ſous AE, EB, eſt egal au rectangle contenu ſous CE. ED.

Soit premierement le poinct de l'interſection E, le centre du cercle, comme en la premiere figure, les 4. ſegments ſeront egaux, chacun eſtant le demy-diametre du cercle : donc il eſt manifeſte que le rectangle contenu ſous les deux parties de l'vne, eſt egal au rectangle contenu ſous les deux parties de l'autre.

Secondement, que CD, ſeulement paſſe par le centre F, coupant AB, en deux egalement au
c 3. 3. poinct E: [c] & partant à angles droicts, & ſoit coniointe la droicte ligne BF. D'autant que CD, eſt diuiſee en deux egalement au centre F, & inegalement au poinct E, le rectangle contenu ſous les
d 5. 1. ſegments inegaux CE, ED, [d] auec le quarré de la moyenne ſection FE, eſt egal au quarré de la moi-
e 47. 1. tié FD, c'eſt à dire de FB : mais le quarré de [e] FB, eſt egal aux deux quarrez de FE, EB : donc le rectangle contenu ſous CE, ED, auec le quarré de FE, ſera auſſi egal aux deux qq. de FE, EB : partant ſi l'on oſte le commun quarré de FE, demeurera le rectangle contenu ſous CE, ED, egal au quarré de EB, c'eſt à dire au rectangle ſous AE, EB: car puis qu'elles ſont egales, le rectangle contenu ſous les deux eſt quarré, ſelon la premiere definition du ſecond liure. *Voyez la deuxieſme figure.*

Tiercement, que CD, paſſant par le centre F,

coupe AB, en deux inegalement au poinct E, & soit diuisee icelle AB, en deux egalemẽt au poinct G, & soient menees GF, & FB; FG [f] sera perpendiculaire à AB. D'autant donc que CD, est diuisee en deux egalement à F, & inegalement à E, le rectangle contenu sous CE, ED, auec le quarré de la moyenne section FE, sera egal au quarré de la moitié FD, c'est à dire, au quarré de FB, son egale: mais le quarré de FB, [g] est egal aux deux quarrez FG, GB: donc le rectangle contenu sous CE, ED, auec le quarré de FE, est aussi egal aux deux quarrez de FG, GB, & le quarré de FE, [h] est egal aussi aux deux quarrez de FG, GE, partant le rectangle sous CE, ED, auec les deux quarrez de FG, GE, est egal aux deux quarrez FG, GB: ostant donc le quarré commun FG, restera le rectangle contenu sous CE, ED, auec le quarré de GE, egal au q. de GB: mais le rectangle contenu sous AE, EB, auec le q. de GE, est aussi egal au q. de GB, puis que AB, est diuisée en deux egalemẽt au poinct G, & inegalement au poinct E. Donc le rectangle contenu sous CE, ED, auec le q. de GE, est egal au



f 3. 3.

5. 2.

g 47. 1.

h 47. 1.

rectangle sous AE,EB,auec le mesme q. de GE. Estant donc le quarré commun de GE, demeurera le rectangle contenu sous CE, ED, egal au rectangle contenu sous AE,EB. Ce qui est proposé. *Voyez la 3. figure.*

Quartement, que AB, ny CD, se coupans au poinct E, ne passent par le centre, & soit mené le diametre GH, par le poinct E, (comme en la 4. figure) l'on monstrera comme auparauant, que le rectangle contenu sous AE,EB, est egal au rectangle sous GE,EH, & le rectangle sous CE,ED, aussi egal au rectangle sous GE,EH: & partant egaux entr'eux, soit qu'vne d'icelles AB, CD, soit coupee en deux egalement ou non. Donc si au cercle deux lignes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 30. PROP. 36.

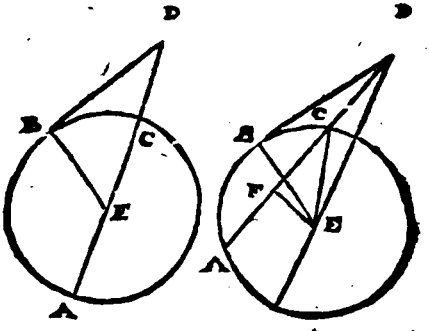
Si l'on prend quelque poinct hors le cercle, & d'iceluy tombent deux lignes droictes au cercle, l'vne desquelles coupe le cercle, & l'autre le touche; le rectangle contenu sous toute la coupante, & sa partie de dehors prise entre le poinct & la circonference conuexe, est egal au quarré de la touchante.

Hors le cercle ABC, soit pris le poinct D, & d'iceluy soit menee DA, par le poinct C, coupant
1 17. 3. le cercle, & DB, le[1] touchant au poinct B. Ie dis que le rectangle contenu sous la toute AD, & sa partie DC, est egal au q. de DB.

Que DA, passe premierement par le centre E,

& ſoit ioincte la droicte ligne EB, [k] laquelle ſera perpendiculaire à DB. D'autant que CA, eſt diuiſee en 2. egalemẽt à E, & à icelle eſt adiouſtee DD, le rectangle contenu ſous AD, DC, [l] auec le q. de EC, c'eſt à dire de EB, ſon egale, eſt egal au q. de ED: mais le q. de ED, [m] eſt egal aux deux quarrez de DB, & BE, donc le rectangle contenu ſous AD, DC, auec le q. de BE, ſera auſſi egal aux deux quarrez de DB, BE: donc, oſtant le q. commun de EB, reſtera le rectangle ſous AD, DC, egal au q. de DB, touchante. Ce qui eſt propoſé.

k 18. 3.
l 6. 2.
m 47. 1.



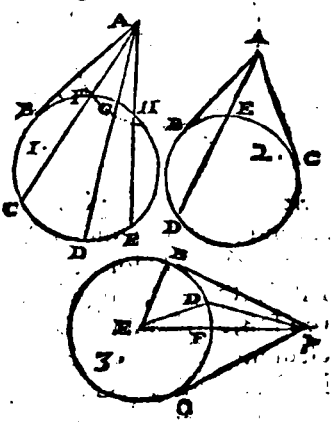
Secondement, que DA, coupante, ne paſſe par le centre E, & ſoit diuiſee AC, en deux egalement au poinct F, & ſoient iointes les droites lignes EB, EF, EC, ED, la ligne EB, ſera perpendiculaire à DB, & EF, à AC. D'autant donc que AC, [n] eſt diuiſee en deux egalement au poinct F, & à icelle eſt adiouſtee DC, le rectangle contenu ſous AD, DC, auec le q. de FC, eſt egal au q. de FD. Donc adiouſtant le commun q. de EF, le rectangle contenu ſous AD, DC, auec les deux quarrez de CF, FE, eſt egal aux deux quarrez de DF, FE:

n 6. 2.

o 47. 1. mais le q. de EC, c'est à dire de EB, son egale, o est egal aux deux quarrez de CF, FE : donc le rectangle sous AD, DC, auec le q. EB, est egal aux deux quarrez de DF, FE, & le q. de DE, est aussi egal aux deux quarrez de DF, FE: partant le rectangle sous AD, DC, auec le q. BE, sera egal au q. de DE, le-
p 47. 1. quel est egal p aux deux quarrez de DB, BE: donc le rectangle sous AD, DC, auec le q. de BE, est egal aux deux quarrez de DB, BE : ostant donc le commun q. de BE, demeurera le rectangle sous AD, DC, egal au quarré DB. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE. 1.

De cette Propo. il est manifeste, que si de quelconque poinct pris hors le cercle, l'on mene plusieurs lignes droictes coupans le cercle : les rectangles compris sous chacune des toutes & sa partie exterieure, sont egaux entr'eux. Car si du poinct A, (en la premiere figure) l'on mene AC, AD, AE, coupant le cercle, & AB, le touchãt, le rectangle sous
q 36. 3. AC, AF, sera q egal au q. de AB,



Semblablement le rectangle sous AD, AG, & le rectangle sous AE, AH, & partant egaux entr'eux.

COROL-

COROLLAIRE. 2.

Il eſt auſſi manifeſte que deux lignes droictes menees d'vn meſme poinct, touchant le cercle, ſont egales entr'elles. Comme ſoient les deux A B, A C, qui touchent le cercle aux poincts B, & C, (en la 2. figure.) Ie dis qu'elles ſont egales entr'elles. Car ſoit menee A D, coupant le cercle au poinct E: tant le quarré de AB, que le quarré de AC, [r] ſera egal au rectangle contenu ſous AD, AE: & partant egaux entr'eux, & donc les lignes AB, AC, pareillement egales entr'elles. [r] 36. 3.

COROLLAIRE 3.

Semblablement il eſt manifeſte, que d'vn poinct pris hors le cercle, l'on peut mener ſeulemẽt deux lignes droictes qui touchent le cercle: car ſi outre les deux AB, AC, l'on en peut mener vne troiſieſme AD, touchant le meſme cercle, ayant mené les droictes lignes E B, E D, du centre E, [f] les angles A B E, A D E, ſeront droicts, & partant egaux entr'eux, ce qui eſt abſurde: car ſi on mene la droicte ligne A E, [t] l'angle A D E, ſera plus grand que l'angle A B E. [f] 18. 3. [t] 21. 1.

COROLLAIRE 4.

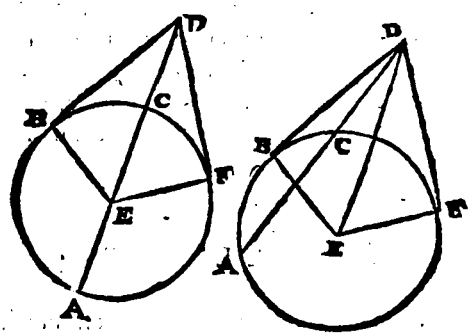
Il eſt finalement euident, que ſi deux lignes droites egales ſont menees de quelcõque poinct, hors le cercle à la circonference conuexe, & que l'vne d'icelles touche le cercle, l'autre le touchera pareillement, &c.

THEOREME 31. PROP. 37.

Si hors le cercle l'on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct tombent au cercle deux lignes droictes, vne desquelles coupe le cercle, & l'autre l'atteint. Et que le rectangle contenu sous la toute coupante, & sa partie de dehors, prise entre le poinct & la circonference conuexe, soit egal au quarré de l'atteignante, icelle atteignante touchera le cercle.

Hors le cercle ABC, soit pris le poinct D, duquel soit menee DA, par le poinct C, coupãt le cerc. DB, l'atteignãt au poinct B: & soit le rectangle cõtenu sous AD, DC, egal au q. de DB. Ie dis que DB, touche le cercle au poinct B. Car soit [v] menee AF, touchant le cercle, & soit trouué le centre E, & soient iointes EB, EF: & si DA, ne passe par le centre E, soit iointe aussi DE: l'angle [x] DFE, sera droit. Et d'autant que DF, touche le cercle, [y] le q. d'icelle sera egal au rectangle contenu sous DA, DC:

v 17. 3.



x 18. 1.
y 36. 3.

mais le quarré de DB, eſt egal au meſme rectangle ſous DA, DC, par l'hypotheſe. Donc les quarrez de DB, DF, ſeront egaux entr'eux, & DB, & DF, auſſi egales. [a] Mais EB, EF, ſont egales: donc les deux coſtez *DB, BE*, du triangle DBE, ſont egaux aux deux *DF, FE*, du triangle DFE, chacun au ſien, & la baſe DE, commune, & les angles B, & F, ſeront egaux, mais DFE, eſt droit; donc DBE, ſera auſſi droit: donc par le Corollaire de la 16. Propoſition de ce liure, DB, touchera le cercle. Ce qui eſt propoſé. Donc ſi l'on prend quelque poinct, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 15. def.

Fin du troiſieſme Liure.

LIVRE QVATRIESME
DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

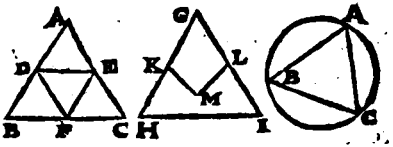
DEFINITIONS.

1. Vne figure rectiligne eſt dicte eſtre inſcrite en vne figure rectiligne, quand chacun des angles de la figure inſcrite, touche chacun coſté de celle en laquelle elle eſt inſcrite.

EVCLIDE traictant en ce quatrieſme liure de diuerſes inſcriptions de figures aux cercles, & des deſcriptions des meſmes figures à l'entour du cercle. Item, des inſcriptions du cercle aux meſmes figures, & des deſcriptions du cercle à l'entour d'icelles, il expoſe en peu de Definitions, que c'eſt à dire vne figure eſtre inſcrite en vne figure, ou eſtre deſcrite à l'entour, commençant aux figures re-

ctilignes. Comme pour exemple, si chacun des angles D, E, F, du triangle interne D E F, touche chacun des costez du triangle A B C, externe, le triangle D E F, sera dit estre inscrit au triangle A B C. Mais d'autant que l'angle M, du triangle K L M, (soit menée vne ligne droicte de K, à L) ne touche le costé H I, du triangle G H I, le triagle K L M, ne sera dit estre inscrit en l'autre, encore qu'il soit tout au dedans, & que deux des angles de l'vn, touchent deux costez de l'autre.

2. Semblablement, vne figure est dicte estre descrite à l'entour d'vne figure, quād chacun costé de la circonscrite, touche chacun angle, de celle, à l'entour de laquelle elle est descrite.

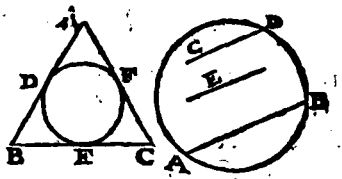


Au contraire, le triagle ABC, sera dit estre descrit à l'entour du triangle D E F, d'autant que chacun des costez de celuy-là touche chacun des angles de cettuy-cy; mais le triangle G H I, ne sera dit estre descrit à l'entour du triangle K L M, puis que le costé H I, ne touche l'angle M. Il faut entendre le mesme des inscriptions & circonscriptions des autres figures rectilignes, &c. Et les figures rectilignes sont proprement dites estre inscrites ou circonscrites, quand le nombre des costez est egal, & le nombre des angles egal, combien qu'il ne soit du tout necessaire, &c.

3. Vne figure rectiligne eſt dicte eſtre inſcrite en vn cercle, quand vn chacun angle de l'inſcrite, touche la circonference du cercle.

Comme, ſi les angles A, B, C, du triãgle ABC, touchent la circonference du cercle ABC, ledict triangle ſera dit eſtre inſcrit au cercle. Et ſi quelqu'vn des angles ne touchoit la circonference, le triangle ne ſeroit dit eſtre inſcrit au cercle.

4. Mais vne figure rectiligne eſt dicte eſtre deſcrite à l'entour du cercle, lors que chacun coſté de la circonſcrite, touche la circonference du cercle.



Pour exemple, ſi les coſtez du triãgle ABC, touchent la circonference du cercle DEF, le triangle ſera dict eſtre deſcrit à l'entour du cercle.

5. Semblablement, le cercle eſt dict eſtre inſcrit en vne figure rectil. lors que la circonference du cercle, touche chacun coſté de la figure en laquelle il eſt inſcrit.

6. Mais vn cercle eſt dict eſtre deſcrit à l'entour d'vne figure, quand la circonference du cercle, touche chacun angle

de la figure, à l'entour de laquelle il eſt deſcrit.

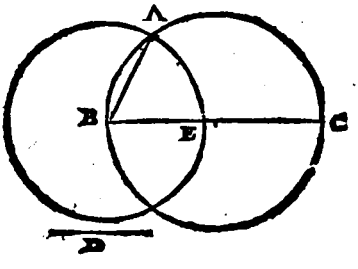
Pareillement le cercle DEF, (en la figure de la 4. Definit.) ſera dict eſtre inſcrit au triangle ABC, mais le cercle ABD, en la figure de la 2. Definit. ſera dit eſtre deſcrit à l'entour du triangle ABC: & faut entendre ainſi des autres figures rectilignes qui ſont dites eſtre inſcrites au cercle, ou deſcrites à l'entour, ou auſquelles le cercle eſt dit eſtre inſcrit, ou deſcrit à l'entour.

7. Vne ligne droicte eſt dite eſtre accommodee ou adaptee au cercle, quand les extremitez d'icelle, ſont en la circonference du cercle.

PROBLEME 1. PROPO. 1.

1. Au cercle donné, accommoder vne ligne droicte, egale à vne ligne droicte donnee, laquelle ne ſoit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle ABC, auquel il faut accommoder vne ligne droite egale à la donnee D, laquelle n'excede le diametre du cercle donné. D'autãt que



b 15. 3. b le diametre eſt la plus grande de toutes les lignes accommodees au cercle.

Soit mené le diametre BC : ſi D, eſt egale à B C, l'on aura accommodé la ligne droite B C, au cercle, egale à la donnee D. Mais ſi D eſt moindre c 3. 1. que le diametre BC, ſoit retranchee c B E, egale à D, & de B, comme centre à l'interualle BE, ſoit deſcrit le cercle AE, coupant AB, au poinct A, & ſoit menee BA, icelle ſera accommodee au cercle d 15. def. ABC, egale à D. Car BA, d eſt egale à B E, & D, auſſi egale à BE, par la cõſtruction : partãt BA, & D, ſeront egales entr'elles, & les extremitez de B A, ſont en la circonference, eſtant menee de l'extremité du diametre au poinct de la ſection des deux cercles. Donc nous auons accommodé au cercle vne ligne droite, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 2. PROP. 2.

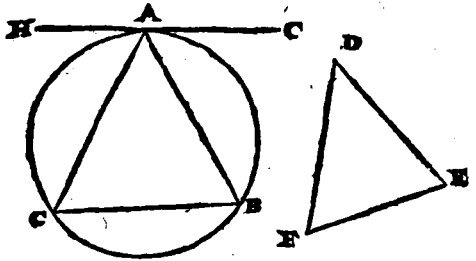
Dedans vn cercle donné, inſcrire vn triangle equiangle, à vn triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, auquel il faut inſcrire vn triangle equiangle, au triangle donné D F E.

f 17. 3. Soit menee H G, touchant le cercle au poinct A, & ſoit fait l'angle GAB, egal à l'angle F, e & l'angle HAC, egal à l'angle E, menant les droictes lignes A B, A C, iuſques à la circonference aux poincts B, & C, & ſoit iointe la droicte ligne CB. Ie dis que le triangle ABC, inſcrit au cercle donné, eſt equiangle au triangle DEF.

f 32. 3. Car f puis que HG, touche le cercle, & AB,

le coupe, l'angle GAB, qui eſt fait egal à l'angle F, ſera egal à l angle C, au ſegment alterne : donc les



angles C, & F, ſeront egaux entr'eux. Semblablement, d'autant que l'angle H A C, qui eſt egal à l'angle E, par la conſtruction, [g] eſt egal à l'angle B, au ſegment alterne, les angles B, & E, ſeront egaux : donc puis que les deux angles B, & C, du triangle ABC, ſont egaux aux deux E, & F, du triangle DEF, les deux autres [h] A, & D, ſeront pareillement egaux entr'eux : donc le triangle ABC, eſt equiangle au triangle DEF. donc en vn cercle donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

g 32. 3.

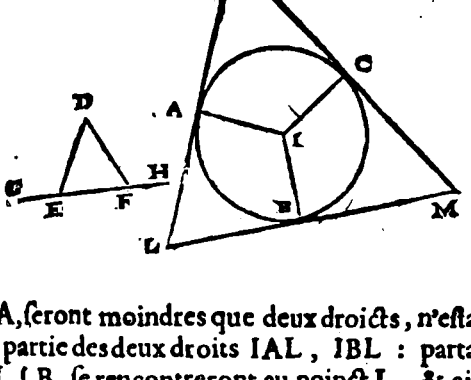
h 32. 1.

PROBLEME 3. PROP. 3.

A l'entour d'vn cercle donné, deſcrire vn triangle equiangle, à vn triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, à l'entour duquel il faut deſcrire vn triangle, equiangle au triangle donné DEF. Ayant prolongé le coſté EF, de part & d'autre aux poincts G, & H, ſoit pris le centre I, & ſoit menée I A, au poinct contingent A, &

au poinct I, d'icelle ſoit faict l'angle AIB, egal à l'angle DEG, & BIC, egal à DFH, & des extremitez A, B, & C, ſoient menees à angles droicts les droictes lignes KL, LM, MK, leſquelles ſe rencontreront aux poincts K, L, M: d'autant que ſi on ioinct vne droicte ligne de A, à B, les deux angles LAB,



LBA, ſeront moindres que deux droicts, n'eſtans
i 11. d. 1. que partie des deux droits IAL, IBL: partant
[i] AL, LB, ſe rencontreront au poinct L, & ainſi des autres: donc le triangle LKM, eſt deſcrit à
k Coroll. 16. 3. l'entour du cercle ABC, & eſt equiangle au triangle donné DEF: [k] car tous les coſtez touchent le cercle aux poincts A, B, C. Et d'autant que tous les angles du quadrilatere AIBL, ſont egaux à quatre droicts, comme il eſt monſtré à la 32. Prop. du 1. liu. & les deux aux poincts A, & B, ſont droits,
l 13. 1. les deux AIB, ALB, demeureront egaux à deux droits: & partant egaux aux deux DEG, DEF, qui [l] ſont auſſi egaux à deux droits: donc ſi on oſte les egaux AIB, DEG, demeurera ALB, egal à DEF: ainſi l'angle M, ſera monſtré egal à l'angle
32. 1. DFE. Donc le troiſieſme angle K, ſera egal au

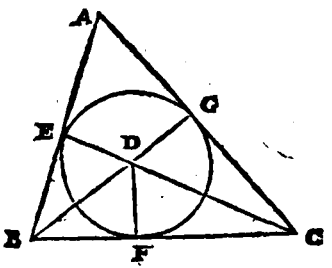
troisiesme D. Partant le triangle K L M, sera equiangle au triangle DEF. Donc à l'entour d'vn cercle, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 4. PROP. 4.

Dans vn triangle donné, inscrire vn cercle.

Soit le triangle donné ABC, dans lequel il faut inscrire vn cercle.

Soient[m] diuisez les deux angles B, & C, chacun en deux egalement, par les droites lignes B D, CD, se rencontrans au poinct D, & d'iceluy soient menees les perpendiculaires DG, DE, DF, sur les trois costez AB, B C, CA. D'autant que les deux angles DBF, DFB, du triangle DFB, sont egaux aux deux DBE, DEB, du triangle DEB, chacun au sien, & le costé DB, commun: [n] les deux costez DE, DF, seront egaux. Par mesme raison les costez DF, DG, seront egaux aux triangles DCF, DCG. Donc les trois lignes DG, DF, DE, seront egales entr'elles, & le cercle descrit du poinct D, comme centre à l'interualle D E, passera par les autres poincts G, & F, & [o] touchera les costez du triangle aux poincts E, F, G, puis que les costez sont à angles droicts aux semy-diametres D E, D F,



m 9. I.

12. I.

n 26. I.

o Coroll. 16. 3.

DG. Donc au triangle donné, nous auons inscrit vn cercle. Ce qu'il falloit faire.

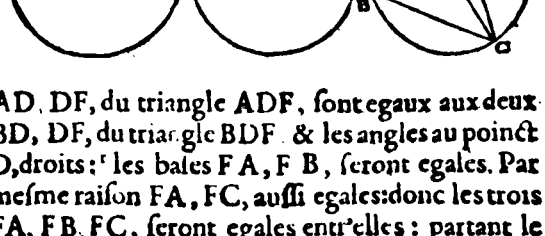
PROBLEME 5. PROPO. 5.

A l'entour d'vn triangle donné, descrire vn cercle.

Soit le triangle donné ABC, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

p 10. 1. Soient [p] diuisez les deux costez AB, AC, en

q 11. 1. deux egalement aux poincts D, & E, desquels soiét menees DF. EF, [q] à angles droits à iceux costez, & se rencontrans au poinct F, (car si on menoit vne ligne droite de D, à E, les deux angles FDE, FED, seroient moindres que deux droits) & le poinct F, sera dans le triangle, ou au costé, ou dehors. Soiét iointes FA, FB, FC: d'autant que les deux costez



AD, DF, du triangle ADF, sont egaux aux deux

r 4. 1. BD, DF, du triangle BDF & les angles au poinct D, droits: [r] les bases FA, FB, seront egales. Par mesme raison FA, FC, aussi egales: donc les trois FA, FB, FC, seront egales entr'elles: partant le cercle descrit du poinct F, comme centre, à l'interualle de FA, passera aussi par les deux autres poincts B, & C. Donc à l'entour du triangle

donné nous auons descrit vn cercle. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE

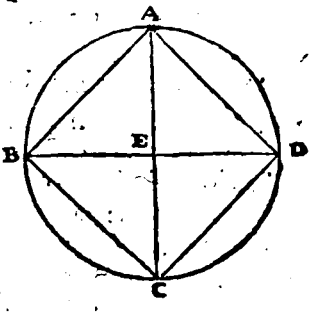
Il est manifeste de cette demonstration, que si le centre tombe au dedans du triangle, [f] que tous les angles sont agus, estans au plus grand segment du cercle: mais s il tombe au costé, l'angle [t] opposé à iceluy costé, sera droict au demy-cercle. Finalement, s il tombe hors le triangle, l'angle opposé [u] sera obtus, estant au plus petit segment du cercle.

[f] 31. 1.
[t] 31. 1.
[u] 31. 1.

Au contraire, si le triangle est oxygone, le centre tombera en iceluy: si rectangle, il tombera au costé qui soustient l'angle droict: & si amblygone, il tombera dehors.

PROBLEME 6. PROP. 6.

Dans vn cercle donné, inscrire vn quarré.



Soit le cercle donné ABC, duquel le centre est E, auquel il faut inscrire vn quarré. Soiét menez deux diametres AC, BD, qui se coupent à angles droicts au centre E, & soient iointes les droites lignes AB, BC, CD, DA. Ie dis que ABCD, est le q. inscrit au cercle donné.

Car d'autant que les deux costez EA, EB, du triangle AEB, sont egaux aux deux EA, ED, du triangle EAD, estans tous menez du centre, & les angles contenus d'iceux estans droits [x] les bases AB, AD, seront egales. & par mesme raison BC, CD, egales, & semblablement CD, DA, & DA, AB. Donc ABCD, sera vn quarré, ayant tous les costez egaux, & tous les angles A, B, C, D, droits, [y] chacun estant au demy-cercle : donc en vn cercle, &c. Ce qu'il falloit faire.

x 4. 1.

y 31. 1.

AVTREMENT.

D'autant que les quatre angles au poinct E, sont egaux estans droits, les quatre arcs ausquels ils insistent [z] seront egaux ; & partant les quatre droites lignes [a] soustendantes seront egales : donc tous les costez du quadrilatere ABCD, sont egaux entr'eux, et tous les angles sont droits, chacun estant [b] au demy-cercle. Donc ABCD, sera vn quarré.

z 26. 3.

a 29. 3.

b 31. 3.

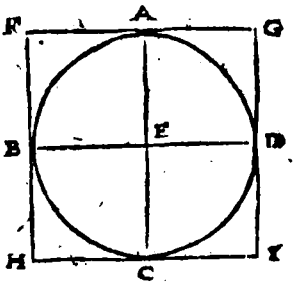
PROBLEME 7. PROPO. 7.

A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn quarré.

Soit le cercle donné ABC, dont le centre est E, à l'entour duquel il faut descrire vn quarré.

Soient menez deux diametres se coupans à angles droicts au centre E, & par les poincts A, B, C, D, soient menees les lignes droites FG, FH, HI, IG, à angles droicts aux diametres, lesquelles se rencontreront aux poincts F, H, I, G : d'autant

que si on mene vne ligne droite de B, à A, les deux angles FBA, FAB, seront moindres que deux droits, & ainsi des autres.



Ie dis que FGIH, est vn q. descrit à l'entour du cercle donné. Car puis que les deux angles AEB, FBE, sont droits, FH, & AC, [c] seront paralleles: semblament GI, & AC; donc FH, [d] & GI, seront paralleles, & par les mesmes raisons FG, HI, aussi paralleles.

[c] 28. 1.
[d] 30. 1.

Or d'autant que ACHF, est parallelogramme, [e] les costez oppoſez AC, FH, seront egaux, & les angles oppoſez C, & F, egaux, mais ECH, est droit, donc AFH, sera droit: par mesme raison les angles H, I, G, seront monstrez droits, & les costez HI, IG, GF, egaux aux diametres AC, BD: & partant egaux entr'eux, donc FHIG, aura les quatre costez egaux, & les quatre angles droicts, partant sera quarré, duquel tous les [f] costez touchent le cercle. Donc à l'enrour d'vn cercle donné, nous auons descrit vn quarré. Ce qu'il falloit faire.

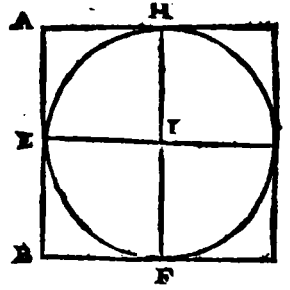
[e] 34. 1.
[f] *Coroll.* 16. 3.

PROBLEME 8. PROP. 8.

Dans vn quarré donné, inscrire vn cercle.

Soit le quarré donné A B C D, auquel il faut in*scrire* vn cercle. Ayant diuisé les costez en deux

egalement aux poincts E, F, C, H, ſoient menees les droites lignes EG, FH, ſe coupant au poinct I, [g] Or d'autant que AD, BC, ſont egales & paralle-



g 34. 1.

les, leurs moitiez AH, BF, ſerõt egales & paralleles: & partant AB, ſera egale & parallele à FH. Semblablement CD, ſera egale & parallele à la meſme FH. Pareillement AD, BC, ſeront egales & paralleles à EG. Donc AI, IB, CI, ID ſeront parallelogrãmes, & partant les lignes IE, IF, IG, IH, ſeront egales à AH, EB, DH, AE: mais celles-cy ſont egales entr'elles, eſtans les moitiez des egales AD, AB, &c. Donc IE, IF, IG IH, ſont egales, partant le cercle deſcrit du poinct I, comme centre & à l'interualle de IE, paſſera auſſi par les poincts F, G, H, & [h] touchera tous les coſtez, puis que les angles aux poincts E, F, G, H, ſont droicts, & ſera inſcrit au quarré AC. Donc en vn quarré donné, nous auons inſcrit vn cercle. Ce qu'il falloit faire.

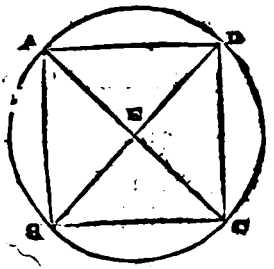
h *Coroll.* 16. 3. 29. 1.

PROBLEME 9. PROP. 9.

A l'entour d'vn quarré donné, deſcrire vn cercle.

Soit le quarré donné ABCD, à l'entour duquel il faut deſcrire vn cercle : Soient menez les deux diametres

diametres AC, BD, se coupans au poinct E. D'autant que les costez AB, AD, du triangle ABD, sont egaux, [i] les angles ABD, ADB, seront egaux: mais l'angle BAD, est droict au quarré: [k] donc ABD, ADB,

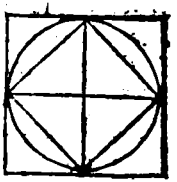


i 5. 1.

k 32. 1.

seront demy-droicts. Semblalement nous monstrerons que tous les autres angles, qui sont aux poincts A, B, C, D, sont demy droicts, & partant egaux entr'eux. Donc puis que les angles EAD, EDA, sont egaux entr'eux, les lignes EA, ED, seront egales, & par mesme raison EA, EB, seront egales, & aussi EB, EC, semblablement EC, ED. Partant le cercle descrit du centre E, à l'interualle EA, passera par les autres poincts B, C, D. Donc à l'entour d'vn quarré donné nous auons descrit vn cercle. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.



Mais si à vn cercle donné l'on circonscrit vn autre quarré, le quarré circonscrit sera double du q. inscrit. Car d'autant que le costé du q. circonscrit est egal au diametre du cercle, comme il est euident par la 7. Proposit. de ce liure: c'est à dire, au diametre du q. inscrit; mais le quarré du diametre est double du quarré duquel il est diametre, comme nous auons monstré en la quarante-

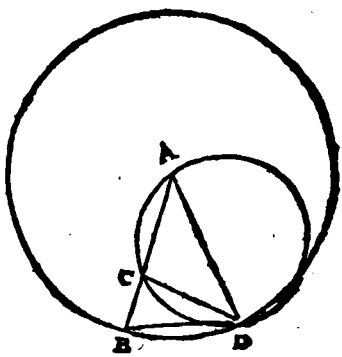
septiesme Proposition du premier liure. Donc ce qui est proposé est veritable.

PROBLEME 10. PROPOSIT. 10.

Constituer vn triangle Isoscele, qui ait vn chacun des angles qui sont à la base, double de l'autre.

Soit prise vne ligne quelconque AB, laquelle soit diuisee au poinct C, en sorte que le rectangle
[1] II. 2. contenu sous [1] AB, BC, soit egal au quarré de AC. Puis du centre A, & de l'interualle AB, soit descrit
[m] I. 4. vn cercle [m] auquel soit accommodee la droite ligne BD, egale à AC, & soit ioincte AD. Ie dis que le triangle ABD, est Isoscele & à vn chacun des angles ABD, ADB, double de l'autre angle A.

[n] 5. 4. Car ayant mené CD, soit [n] descrit à l'entour du triangle ACD, le cercle DCA. D'autant que le rectangle contenu sous AB, BC, est egal au quarré de CA, c'est à dire de BD, son egale, &.



[o] 37. 3. AB, coupe le cercle [o] ACD, la ligne BD, le touchera au poinct D. Partant l'angle BDC, sera
[p] 32. 3. [p] egal à l'angle A, au segment alterne CAD, ad-

ioustant l'angle commun CDA, l'angle total ADB, sera egal aux deux CAD, CDA, mais l'angle externe DCB, est [q] egal aux mesmes angles A, & ADC. Donc l'angle BCD, est egal à ADB, c'est à dire à [r] ABD, qui luy est egal : partant [t] CD, DB, seront egales; mais BD, est egale à AC, par la construction : donc CD, sera egale à CA, & [t] partant les deux angles CAD, CDA, seront egaux : donc l'angle ADB, qui est monstré egal aux deux CAD, CDA, sera double de l'angle A, & partant l'angle ABD, sera aussi double du mesme angle A. Nous auons donc constitué vn triangle, &c. Ce qu'il falloit faire.

q 32. 1.
r 5. 1.
t 6. 1.
t 5. 1.

COROLLAIRE.

Or d'autant que les trois [v] angles du triangle ABD, sont egaux à deux droicts, c'est à dire à cinq cinquiesmes de deux droicts : il est manifeste que l'angle A, est la cinquiesme partie de deux droits, & chacun des deux D, & B, en est 1. cinquiesmes parties. Semblablement A, est les 2. cinquiesmes d'vn droict : & lequel que l'on voudra B, ou D, est les 4. cinquiesmes : [x] d'autant que tous les trois sont egaux à deux droicts, c'est à dire à 10. cinquiesmes parties d'vn droict.

v 32. 1.
x 32. 1.

PROBLEME 11. PROP. 11.

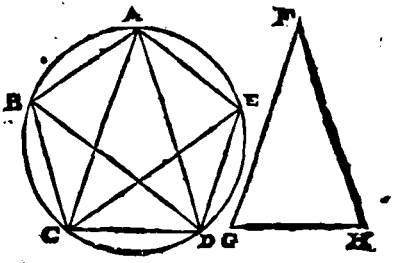
En vn cercle donné, inscrire vn Pentagone equilateral & equiangle.

Soit le cercle donné ABCD, auquel il faut inscrire vn Pentagone equilateral & equiangle. [y] 10. 4.

Soit construit le triangle Isoscele FGH, qui ait chacun des angles G, & H, double de l'angle F, & au cercle ABCD, soit inscrit le triangle ACD, equiangle au triangle FGH, & l'vn & l'autre des angles ACD, ADC, soit diuisé en deux egalement par les lignes DB, CE: & soient iointes les lignes droictes AB, BC, CD, DE, EA. Ie dis que le Pentagone ABCDE, inscrit au cercle, est equilateral & equiangle.

2. 4. 1.

10. 1.



Car d'autant qu'vn chacun des angles ACD, ADC, est double de l'angle CAD, estans diuisez chacun en deux egalement, les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, seront egaux: partant les arcs AB, BC, CD, DE, EA: sur lesquels iceux angles sont soustenus sõtegaux: donc les droictes lignes AB, BC, CD, DE, EA, qui les soustendent, seront egales: partãt le Pentagone ABCD, est equilateral. Derechef, d'autant que les arcs AB, ED, sont egaux, si l'on adiouste le cõmun BCD, le tout ABCD, sera egal au tout EDCB: donc les angles AED, BAE, appuyez sur iceux seront egaux: en la mesme maniere vn chacun des autres angles seront egaux. Car ils sont appuyez sur arcs egaux, vn chacun desquels est composé de trois arcs egaux. Donc le Pentagone est equiangle, lequel estant monstré aussi equilatere, nous aurons inscrit au cer-

b 26. 1.

c 29. 1.

d 29. 1.

cle vn Pentagone equiangle & equilatere. Ce qu'il falloit faire.

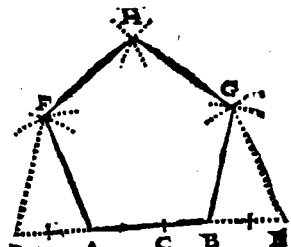
COROLLAIRE.

D'icy il s'enſuit, que l'angle du Pentagone equilateral & equiangle, eſt les 3. cinquieſmes de deux droicts, ou les $\frac{6}{5}$ d'vn droict. [e] Car puis que les trois angles BAC, CAD, DAE, ſont egaux, eſtans appuyez ſur les arcs egaux BC, CD, DE: mais CAD, eſt $\frac{1}{5}$ partie de deux droicts, ou $\frac{2}{5}$ d'vn droict: le tout BAE, ſera les $\frac{3}{5}$ de deux droits, ou $\frac{6}{5}$ d'vn droict. e 27. 3.

SCHOLIE.

Si l'on veut deſcrire vn Pentagone equilateral & equiangle, ſur vne ligne droite propoſee, l'on le fera facilement en cette façon.

Soit la ligne droicte propoſee AB, laquelle ſoit [f] diuiſee à C, en ſorte que le rectangle ſous AB, BC, ſoit egal au quarré de AC, & ſoit prolongee AB, de part & d'autre aux poincts D, & E, en ſorte que AD, BE, ſoient egaux au plus grand ſegment AC, & à l'interualle de AB, des deux poincts A, & D, ſoient deſcrits deux arcs ſe coupans au poinct F: ſemblablement des poincts B, & E, & de meſme interualle ſoient deſcrits deux autres arcs ſe coupans au poinct G. Finalement des poincts F, G, & au meſme enterualle ſoiens deſcrits deux autres f 11. 1.



arcs se diuisans au poinct H, & soient ioinctes les droites lignes: AF, FH, HG, GB. Ie dis que le Pentagone AFHGB, descrit sur la ligne AB, est equilateral & equiangle, &c.

PROBLEME 12. PROP. 12.

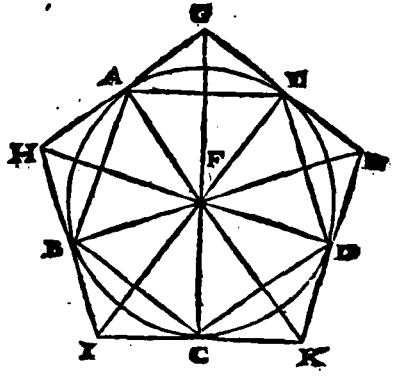
A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn Pentagone equilateral & equiangle.

Soit le cercle donné ABCD, à l'entour duquel il faut descrire vn Pentagone equilateral & equiangle.

Soit [g] inscrit en iceluy vn Pentagone equilateral & equiangle ABCDE, & soit pris le centre F, & soient menees les droites lignes FA, FB, FC, FD, FE, par l'extremité desquelles soient menees GH, HI, IK, KL, LG, à angles droicts à icelles, & se rencontrans aux poincts G, H, I, K, L. Car puis que les angles GAE, GEA, sont moindres que 2. droicts, estans partie des 2. droits FAG, FEG, [h] les lignes AG, EG, se rencontreront au poinct G, & les autres de mesme.

[g] 11. 4.

[h] 11. e. f.



Et d'autant qu'elles [i] touchent le cercle, le Pentagone GHIKL, sera descrit à l'entour du cercle,

[i] Coroll. 16. 3.

lequel ie dis estre equilateral & equiangle.

Car ayant mené les droictes lignes, FG, FH, FI, FK, FL, les deux quarrez de FA, AH, [k] seront egaux au quarré de FH, & semblablement les quarrez de FB BH, seront egaux au mesme quarré FH: partant les deux quarrez de FA, AH, seront egaux aux deux de FB, BH: ostant donc les quarrez egaux des egales FA, FB, les quarrez de AH & BH, demeureront egaux, donc les lignes AH, BH, seront egales. Et d'autant que les deux costez AF, FH, du triangle AFH, sont egaux à BF, FH, du triangle BFH, chacun au sien, & la base AH, egale à la base BH, comme il est monstré [l] l'angle AFH, sera egal à l'angle BFH: donc les [m] angles AHF, BHF, aussi egaux. Donc [m] l'angle AFB, est double de l'angle BFH, & l'angle AHB, double de l'angle BHF.

k 47. 1.

l 8. 1.

m 4. 1.

Par le mesme discours, nous monstrerons que l'angle BFC, est double de l'angle BFI, & l'angle BIC, double de l'angle BIF. Puis donc [n] que les angles AFB, BFC, sont egaux, estans appuyez sur circonferences egales AB, BC, [o] estans soustenduës des lignes droictes egales, AB, BC, leurs moitiez BFH, BFI, seront egales. Partant, puis que les deux angles BFH, HBF, du triangle BFH, sont egaux aux deux BFI, IBF, du triangle IFB, & le costé BF, adiacent à iceux commun, [p] les costez BH, BI, seront egaux, & les angles BHF, BIF, egaux: donc la ligne FH, est double de la ligne HB.

n 27. 3.

o 28. 3.

p 26. 1.

Par la mesme raison nous monstrerons que GH, est double de HA. Mais HB, HA, sont monstrees egales: donc les doubles d'icelles, sçauoir HI, HG, seront egales. Semblablement nous monstrerons que les droictes lignes IK, KL, LG, sont

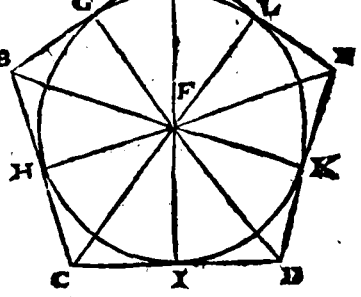
egales à chacune des lignes droictes H I, H G: donc le Pentagone GHIKL, eſt equilateral.

Derechef, d'autant qu'il eſt monſtré que les angles BHF, BIF, ſont egaux, & qu'ils ſont moitiez des angles BHA, BIC: leurs doubles BHA, BIC, ſeront egaux. Par la meſme raiſon les angles IKL, KLG, LGH, ſeront egaux à chacun des angles BHA, BIC: donc le Pentagone GHIKL, eſt equiangle. Partant eſtant monſtré equilateral, l'on aura deſcrit à l'entour du cercle vn Pentagone equilateral & equiangle. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 13. PROP. 13.

En vn Pentagone donné, lequel eſt equilateral & equiangle, inſcrire vn cercle.

Soit le Pentagone donné ABCDE, equilateral & equiangle, auquel il faut inſcrire vn cercle.



Soient diuiſez deux des angles d'iceluy BAE, ABC, en deux egalement par les droictes lignes AF, BF, leſquelles ſe rencontreront au poinct F. Puis que les

9. 1.

11. c.ſ.

deux angles FAB, FBA, ſont moindres que deux

droicts, eſtans moitiez des deux A, & B, qui ſont moindres que quatre droits, comme il eſt demonſtré à la 32. 1. Puis ſoient menees les droites lignes FC, FD, FE: d'autant que les 2. coſtez AB, BF, du triangle ABF, ſont egaux à CB, BF, du triangle CBF, chacun au ſien, & ABF, CBF, cõtenus d'iceux; egaux par la conſtruction: les[r] baſes AF, CF, & les angles BAF, BCF, ſont egaux. Et puis que les angles du Pentagone A, & C, ſont poſez egaux, & BAF, eſt moitié de BAE, par la conſtruction, l'angle BCF, ſera moitié de BCD: donc BCD, eſt diuiſé en deux egalement: par meſme raiſon nous monſtrerons que les deux autres D, & E, ſont diuiſez en deux egalement: maintenant du poinct F, [s] ſoient menees les perpendiculaires FG, FH, FI, FK, FL, ſur les coſtez du Pentagone. D'autant que les deux angles FGA, FAG, du triangle FAG, ſont egaux aux deux FLA, FAL, du triangle FAL, & le coſté AF, oppoſé à vn des angles egaux commun, FG, FL, ſeront egales.

r 4. 1.

s 12. 1.

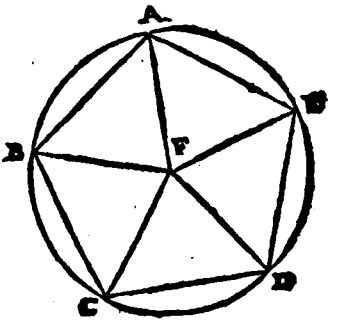
26. 1.

Semblablement, l'on monſtrera que les autres perpẽdiculair. FH, FI, FK ſont egales à chacune de celles-là: donc le cercle deſcrit du centre F, à l'interualle FG, paſſera pareillement par tous les poincts H, I, K, L: & d'autant que les coſtez du Pentagone[t] touchent iceluy, puis qu'ils ſont angles droicts auec les ſemy-diametres FG, FH, &c. L'on aura inſcrit vn cercle au Pentagone donné. Ce qu'il falloit faire.

t *Coroll.* 16. 1.

PROBLEME 14. PROPO. 14.

A l'entour d'vn Pentagone donné, lequel eſt equilateral & equiangle, deſcrire vn cercle.



Soit le pentagone donné ABCDE, equilateral & equiangle, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle. Ayant diuisé les angles BAE, ABC, en [a] 2. egalement par les lig. droictes AI, BF, lesquelles se rencontreront au poinct F, au dedans du pentagone, comme il a esté demonstré en la precedente proposition, & ayant conioinct les droictes lignes FC, FD, FE, nous monstrerons, comme au precedent Probleme, que les autres angles C, D, & E sont diuisez en deux egalement: Donc tous les demy angles seront egaux entr'eux, puis que les angles totals sont egaux.

[a] 9. 1.

D'autant donc qu'au triangle AFB, les deux angles FAB, FBA, sont egaux: [b] les lignes FA, FB, seront egales. Par mesme raison les autres FC, FD, FE, seront egales à chacune d'icelles. Partant le cercle descrit du centre F, à l'interualle de FA, passera aussi par les poincts B, C, D, E. Donc à l'entour d'vn pentagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

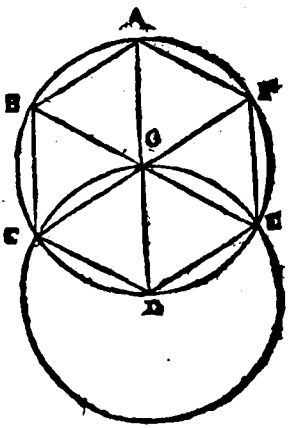
[b] 6. 1.

PROBLEME 15. PROPOSIT. 15.

En vn cercle donné, inscrire vn Hexagone equilateral & equiangle.

Soit le cercle donné ABCDEF, auquel il faut inscrire vn Hexagone equilateral & equiangle.

Ayant pris le centre G, & mené le diametre A D, soit descrit le cercle CGE, du poinct D, comme centre, & de l'interualle D G, lequel coupe le cercle donné aux poincts C, & E, desquels soiēt menees les droictes lignes C F, EB, par le centre G, & soient conioinctes les lignes droictes A B, BC, CD, DE, EF, FA, l'on aura inscrit l'Hexagone ABCDEF, au cercle donné, lequel ie dis estre equiangle & equilateral.



Car par la definition du cercle, les trois lignes GC, CD, DG, seront egales entr'elles, & le triangle CDG, sera equilateral, partant les trois [y] angles d'iceluy seront egaux entr'eux, lesquels [z] estās egaux à deux droicts, lequel qu'on voudra d'iceux, comme CGD, sera le tiers de deux droicts : par mesme raison l'ãgle DG E, sera la 3. par. de 2. droits: mais les angles CGD, DGE, E GF, [a] sont egaux à deux droicts : donc l'autre angle EGF, sera aussi la tierce partie de deux droicts. Donc les trois angles CGD, DGE, EGF, sont egaux entr'eux, ausquels les angles CGB, BGA, & AGF, estans [b] egaux au sommet, les six angles au centre G, seront egaux entr'eux. [c] Parquoy les circonferences sur lesquelles ils s'appuyent, sont egales, [d] & partant les droictes lignes AB, BC, CD, DE, EF, FA, egales:

y 5. 1.

z 32. 1.

a 13. 1.

b 15. 1.

c 26. 3.

d 29. 3.

parquoy l'Hexagone A B C D E F, ſera equilateral.

Derechef, d'autant que la circonference B C, eſt egale à A F, ſi l'on adiouſte la commune C D E F, les circonferences B C D E F, & A F E D C, ſeront egales. [e] Donc les angles A B C, B A F, appuyez ſur icelles ſeront egaux. Nous monſtrerons ſemblablement que les autres angles de l'Hexagone C, D, E, F, ſont egaux à chacun d'iceux A, & B, par ce que chacun d'iceux eſt appuyé ſur vn arc compoſé de quatre circonferences egales. Donc l'Hexagone eſt auſſi equiangle: donc en vn cercle donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

e 27. 3.

COROLLAIRE.

De cette propoſition il eſt manifeſte que le demy-diametre du cercle eſt egal au coſté de l'Hexagone inſcrit en iceluy. Car D G, demy-diametre, eſt egal à D C, coſté de l'Hexagone, par la definition du cercle.

PROBLEME 16. PROP. 16.

En vn cercle donné, inſcrire vn Quindecagone equilateral & equiangle.

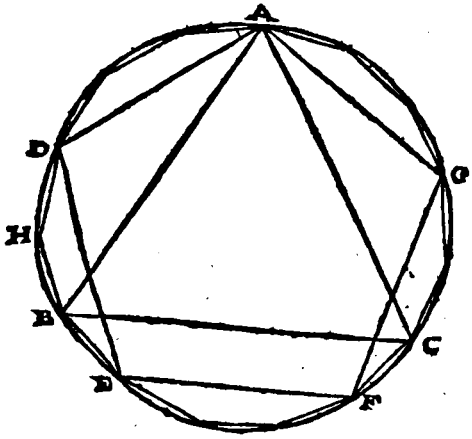
Soit le cercle A B C, auquel il faut inſcrire vn Quindecagone equilateral & equiangle. Soit inſcrit en iceluy le triangle equilateral A B C, [f] les trois arcs A B, B C, C A, ſeront egaux, à cauſe des trois coſtez, ou des trois angles egaux A, B, C.

f 26. ou 28. 3.

Derechef, ſoit [g] inſcrit au meſme cercle vn

g 11. 4.

Pentagone equilateral & equiangle ADEFG, ayant vn des angles appliqué au poinct A, [h] les cinq arcs AD, DE, EF, FG, GA, seront egaux. h 28. 3



Et puis que la circonference du cercle doit estre diuisee en quinze parties egales : l'arc AB, en contiendra cinq, & l'arc AD, trois, estant l'arc AB, la tierce partie de toute la circonference, & AD, la cinquiesme partie : partant le reste DB, en contiendra deux parties. [i] Donc ayant diuisé l'arc DB, en deux egalement au poinct H, BH, sera la quinziesme partie de toute la circonference ; donc menant la droicte BH, elle soustiendra la quinziesme partie de toute la circonference : [k] partant si l'on accommode au cercle quatorze autres lignes droictes egales à BA, l'on aura inscrit au cercle vn Quindecagone equilateral, [l] lequel est aussi equiangle, puis que chacun des angles sont appuyez sur arcs egaux, chacun desquels est composé de 15. arcs egaux, comme il est manifeste. Donc i 30. 3. k 1. 4. l 27. 3.

en vn cercle donné, nous auons inſcrit vn Quindecagone. Ce qu'il falloit faire.

Semblablement, ſuyuant ce qui eſt dict cy-deuant du Pentagone à la 12 13. & 14. Propoſitions, nous deſcrirons à l'entour du cercle donné vn Quindecagone equilateral & equiangle. Pareillement, au Quindecagone equilateral & equiangle nous inſcrirons vn cercle : & finalement, à l'entour du Quindecagone nous deſcrirons vn cercle.

SCHOLIE.

Nous remarquerons icy que en toutes les propoſitions de ce quatrieſme liure, où Euclide a dict (inſcrire) le Copiſte a mis (deſcrire) qui eſt tout le contraire. Car par ce verbe (inſcrire) Euclide entend conſtituer vne figure dedans vne autre, comme il monſtre par les Definitions du meſme quatrieſme liure, & comme il eſt auſſi manifeſte par les propoſitions. Car premierement, en la quatrieſme Propoſition il dict ainſi: ἐις τὸ δοθὲν τρίγωνον, κύκλον ἐγγράψαι, *en vn triangle donné inſcrire vn cercle, & de meſme en la 6. 8. 11. 13. & 16. Propoſit. Mais pour dire (deſcrire) il vſe de cet autre verbe* περιγράψαι, *c'eſt à dire eſcrire à l'entour, comme il appert par les autres propoſitions. Neantmoins cet ignorant Copiſte ne pouuant dire autre choſe que ce qu'il trouue en ſa copie, commet cette faute en la 4. 6. 8. 11. 13. & 16. propoſit. de ce liure. Je diray encore icy qu'en la vingt-huictieſme propoſition du troſieſme liure; ledict Copiſte a mis ainſi:* Aux cercles egaux,

les lignes droictes egales prennent circonferences egales ; *Et Euclide dict* : Oſtent, ou retranchent circonferences egales : αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας ἀφαιροῦσι περιφερείας. *Or quand Euclide dit icy*, Oſtent circonferences egales, *il entend de deux lignes egales, chacune deſquelles diuiſe ſon cercle en deux portions, dont la plus grande eſt egale à la plus grande, et la moindre à la moindre ; mais s'il diſoit*, prennent circonferences egales, *comme il dit en la huictieſme Definition du meſme troiſieſme liure* : ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι, τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφερείας, &c. *c'eſt à dire. Mais quand les lignes qui comprennent l'angle*, prennent quelque circonference, &c. *Il entend de deux lignes menees de quelque poinct de la circonference, ou autre, iuſques à la circonference, & entre les extremitez deſquelles ſe trouue partie de la circonference du cercle, d'où il appert qu'Euclide ne veut pas dire vne meſme choſe par ces deux verbes,* ἀπολαμβάνω, & ἀφαιρέω, *le premier ſignifiant*, Intercipio, *& le dernier*, Aufero. *Mais le Traducteur du Copiſte ne prenant garde à tout cela, prend tout ce qu'il trouue de traduit, & le baille au Copiſte pour le faire imprimer ; & à grand peine l'on pourra trouuer vne ſeule demonſtration en tout ce qu'ils font, où il n'y ait faute.*

Fin du quatrieſme Liure.

LIVRE CINQVIESME

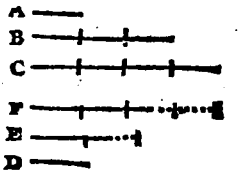
DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. Vne grandeur eſt partie d'vne autre grandeur, la plus petite de la plus grande, lors que la plus petite meſure la plus grande.

EVCLIDE a traicté aux quatre liures precedens, de la quantité continuë conſiderée abſolument : Mais aux deux ſuyuans il diſpute de la meſme quantité, non abſolument ; mais en tant que l'vne ſe refere à l'autre, c'eſt à dire, qu'en tant qu'elle eſt comparée auec vn' autre, elle a quelque raiſon. En ce cinquieſme liure, il enſeigne les proportions des quantitez continuees en general, ne les referant à aucune eſpece de quantité, comme à vne ligne, ſuperficie,

ſuperficie, ou à quelque corps. Mais au ſixieſme il monſtre ſpecialement, quelle raiſon ont les lignes entr'elles, les angles, les circonferences des cercles, les triangles & autres figures planes. Et pour donc garder ſa methode, il definit premierement les termes, dont il ſera beſoin aux Demonſtrations.



Il dict donc qu'vne grandeur plus petite, laquelle meſure quelque autre grãdeur plus grande, eſt appellee partie d'icelle. Comme pour exemple, d'autant que la grandeur A, priſe 3. fois, meſure la grandeur B; A, ſera dicte partie de B, & priſe 4. fois meſure C; la grandeur A, ſera dite auſſi partie de C. Mais d'autant que D, ne meſure E, ny F; car priſe 2. fois elle excede E, & priſe trois fois elle defaut à F, & priſe quatre fois elle excede icelle; D, ne ſera dicte partie des grandeurs E, & F.

Or entre les Mathematiciens, il y a de deux ſortes de partie: l'vne qui meſure ſon tout, de ſorte qu'eſtant repetee quelque nombre de fois, elle conſtituë ſon tout: comme 4. conferé auec 12. 16. 20. & eſt dicte, partie aliquote. L'autre ne meſure ſon tout: car priſe quelque nombre de fois elle l'excede, ou defaut à iceluy, comme 4. conferé auec 6. 7. 9. 18. 30. & eſt dicte partie aliquante.

Euclide definit donc icy ſeulement la partie aliquote, tant à cauſe qu'elle meſure ſeulement ſon tout: (car la partie aliquante n'eſt dicte meſurer ſon tout,) que d'autant, comme il appert

au septiesme liure, la partie aliquante aux nombres, n'est pas appellee partie par Euclide, mais parties. Car 4. n'est pas partie de 6. mais en est les deux tierces parties, &c.

2. Vne grandeur, est multiple d'vne autre plus petite, quand la plus grande est mesuree de la plus petite.

Comme en l'exemple precedent, tant la grandeur B, que C, est multiple de la grandeur A, d'autant que la grandeur A, mesure tant l'vne que l'autre B, & C: mais ny la grandeur E, ny F, ne doit estre dicte multiple de la grandeur D; d'autant que D, ne mesure ny l'vne ny l'autre. Donc, partie, se refere à multiple, & multiple à partie: desorte qu'vne moindre quantité, en mesurant vne plus grande, est dicte partie de la plus grande. Mais la plus grande, qui est mesuree de la plus petite, est dicte multiple de la plus petite.

Il est donc assez manifeste, que la partie cy deuant definie, est celle qui mesure exactement son tout, sans qu'il reste rien.

Or quand deux moindres grandeurs en mesurent deux autres plus grandes egalement, c'est à dire, que si vne des moindres est contenuë autant de fois exactement en vne des plus grandes, que l'autre moindre est contenuë de fois en l'autre plus grande; ces deux grandeurs plus grandes seront dictes equimultiples des deux moindres. Et en faut dire de mesme, si plusieurs moindres grandeurs mesurent egalement plusieurs autres grandeurs plus grandes.

3. Raiſon, eſt vne habitude de deux grandeurs de meſme genre, comparees l'vne à l'autre, ſelon la quantité.

Quand deux quantitez de meſme genre, comme deux nombres, deux lignes, deux ſuperficies, deux ſolides, &c. ſont comparez entr'eux, ſelon la quantité, c'eſt à dire, ſelon que l'vne eſt plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale: telle comparaiſon, ou mutuelle habitude, eſt appellee raiſon, ou (comme veulent d'autres) proportion. Parquoy ſi on compare vne ligne auec vne ſuperficie, ou vn nombre auec vne ligne, cette comparaiſon ne ſera appellee raiſon, d'autant que, ny la ligne & la ſuperficie, ny le nombre & la ligne ne ſont quantitez de meſme genre.

Semblablement, ſi on confere vne ligne auec vne autre ligne, ou vne ſuperficie auec vne ſuperficie, ſelon la qualité, c'eſt à dire, ſelon que l'vne eſt blanche & l'autre noire, ou que l'vne eſt chaude & l'autre froide, &c. Combien que toutes deux ſoient de meſme genre, telle comparaiſon toutefois, ne ſera dite, raiſon ou proportion, puis qu'elle n'eſt faicte ſelon la quantité.

Or combien que la raiſon ou proportion ſe trouue proprement entre les ſeules quantitez, toutefois les choſes leſquelles reçoiuent en quelque maniere la nature de la quantité, comme les temps, les ſons, les voix, les lieux, les mouuemens, les poids & les puiſſances, ſont pareillement dites auoir raiſon, ſi l'on conſidere leur habitude ſelon la quantité. Comme quand nous diſons qu'vn temps eſt plus grand qu'vn autre, ou

moindre, ou que deux temps ſont egaux, &c. Cette habitude ſera appellee proportion ou raiſon: car alors les temps ſont conſiderez, ſelon la maniere de quelques quantitez.

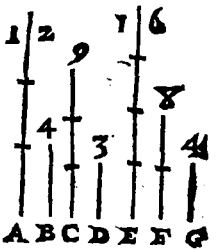
Au reſte, en toute proportion, la quantité qui ſe refere à vne autre, eſt dite par Euclide & autres Geometres, antecedent de la raiſon. Mais celle-là, à laquelle vne autre ſe refere, eſt dicte conſequent de la raiſon. Comme pour exemple, en la raiſon d'vne ligne de ſix palmes, à vne ligne de 3. palmes, la ligne de 6. ſera dicte antecedent de la raiſon, & la ligne de 3. conſequent: & au contraire, ſi on compare la ligne de 3. à la ligne de 6. la ligne de 3. ſera dicte antecedent, & celle de 6. conſequent: autrement la quantité que l'on poſe la premiere s'appelle antecedent, & la ſeconde conſequent.

4. Proportion eſt vne ſimilitude de raiſons.

Ce que i'appelle en ce lieu proportion, les Grecs l'appellent ἀναλογία, analogie, & pluſieurs Latins proportionalité. Tout ainſi donc que l'habitude de deux quantitez entr'elles eſt dicte raiſon; ainſi la comparaiſon de deux, ou pluſieurs raiſons entr'elles, s'appelle proportion. Comme ſi la raiſon de la quantité A, à la quantité B, eſt ſemblable à la raiſon de C, à D, l'habitude d'entre ſes raiſons, ſera appellee proportion. En la meſme maniere, ſi la raiſon de E, à F, eſt ſemblable à celle de F, à G, cette ſimilitude ſera appellee proportion.

Or il y a pluſieurs ſortes de proportion, ou ha-

bitude de raiſons (& nous appellerons, l'habitude de deux quantitez, raiſon: mais l'habitude des raiſons proportion,) deſcrites par les Autheurs, principalement par Boëſius & Iordanus, deſquelles celles-cy ont eſté plus en vſage entre les anciens, ſçauoir la proportion Arithmetique, Geometrique, Muſique, ou Armonique. Mais Euclide traicte ſeulement de la proportion Geòmetrique en ce liure: & y en a de deux ſortes, l'vne continuë, en laquelle les quantitez entre-moyennes ſont priſes 2. fois, en ſorte qu'il ne ſe fait aucune interruption de raiſons, mais chaque quantité entre-moyenne eſt conſequent, de la quantité precedente, & antecedente de la ſuyuante. Comme ſi on dict, qu'il y a meſme raiſon de E, à F, que de F, à G, cette proportion s'appellera cõtinuë. Mais l'autre, ſera dite diſcontinuë ou non continuë, en laquelle chacune des quantitez entre moyennes, eſt priſe vne fois ſeulement, en ſorte qu'il ſe faict interruption de raiſons, & aucune quantité n'eſt antecedent & conſequent; mais antecedent ſeulement, ou conſequent. Comme ſi on dict, qu'il y a meſme raiſon de A, à B, que de C, à D, cette proportion ſera appellee diſcontinuë, ou non continuë.



De la diuiſion de la raiſon.

Euclide diuiſe la raiſon en rationelle & irrationelle. La rationelle eſt celle là, laquelle peut eſtre exprimee par les nombres, comme la raiſon d'vne *Rationelle*

ligne de 20. pieds, à vne ligne de 10. pieds: car cette raiſon eſt monſtree par ces deux nombres 20. & 10. L'irrationelle eſt celle là, laquelle ne peut eſtre exprimee par les nombres, comme eſt la raiſon du diametre d'vn quarré au coſté du meſme quarré: car cette raiſon ne peut eſtre trouuee aux nombres, comme demonſtre Euclide liure 10.

Irrationelle.

D'aucuns diſent, que la raiſon rationelle eſt celle qui eſt entre deux quelconques quantitez commenſurables, mais l'irrationelle eſt celle qui eſt entre deux quantitez incommenſurables. Or les quantitez ſont dictes commenſurables, leſquelles ont vne commune partie aliquote, ou ſont meſurees par vne meſme commune meſure, comme vne ligne de 20. pieds, & vne ligne de 8. car vne ligne de 4. pieds, eſt partie aliquote de toutes les deux: Semblablement, vne ligne de deux pieds eſt partie aliquote d'icelles: & partant, tant quatre que deux meſurera tant la ligne de 20. que la ligne de huict.

Commenſurables quantitez.

Mais les quantitez incommenſurables, ſont celles qui n'ont aucune partie aliquote, ou aucune commune meſure qui les puiſſe meſurer, comme eſt le diametre d'vn quarré, & le coſté d'iceluy quarré. Car combien que chacune de ces lignes ait infinies parties aliquotes, comme la moitié, le tiers & autres parties: toutefois aucune partie aliquote de l'vne, ſi petite qu'elle ſoit, ne peut pas meſurer l'autre, comme demonſtre Euclide liure 10. prop. derniere: auquel liure ſont monſtrees pluſieurs autres lignes incommenſurables, outre ces deux. Partant la ſeule raiſon rationelle ſe trouue aux nombres: mais tant la rationelle que l'irrationelle ſe trouue en la quantité continuë.

Incommenſurab.

La raiſon eſt auſſi diuiſee, en raiſon d'egalité, & d'inegalité. La raiſon d'egalité, eſt celle qui eſt entre deux quantitez egales, comparees entre elles. Comme entre 20. & 20. entre 100. & 100. entre vne ligne de 12. pieds, & vne ligne de 12. pieds: mais la raiſon d'inegalité eſt celle qui eſt entre deux quantitez inegales, comparees entr'elles, comme entre 20. & 10. entre 8. & 40. entre vne ligne de 6. pieds, & vne de 2. &c. *Raiſon d'egalité.*

Or ces deux genres de raiſon ont cela de commun auec les premieres, que toute raiſon d'egalité eſt neceſſairement rationelle, & non au contraire. Semblablement, toute raiſon irrationelle eſt neceſſairement raiſon d'inegalité, & non au contraire, &c.

Derechef, la raiſon d'inegalité (car nous auons laiſſé la raiſon d'egalité, attendu qu'elle ne ſe peut ſubdiuiſer, puis que toutes quantitez egales, ſoient grandes ou petites, ont touſiours meſme raiſon d'egalité) eſt ſubdiuiſee en raiſon d'inegalité maieure, & d'inegalité mineure. *Raiſon d'inegal.*

La raiſon d'inegalité maieure, eſt quand la plus grande quantité eſt comparee à la plus petite, comme la raiſon de 20. à 10. Item la ligne de 8. pieds, à la ligne de 6. pieds, &c. La raiſon d'inegalité mineure, eſt quand la moindre quantité eſt comparee à la plus grande, comme la raiſon de 10. à 20. Item, de la ligne de 6. pieds, à la ligne de 8. pieds, &c. Or cette raiſon n'eſt en vain & ſuperfluë, comme pluſieurs doutent: car il n'y a pas meſme raiſon de 4. à 2. que de 2. à 4. mais different beaucoup entr'elles, leur vſage eſtant beaucoup diuers, cõme il eſt manifeſte à ceux qui ſont aucunement verſez en la Geometrie & en l'Algebre. *Inegalité maieure.* *Mineure.*

Ce sont icy les generales diuisions de la raison, entant qu'elle contient toutes les raisons, sans nulle excepter. Or maintenant nous subdiuiserons tant la raison de maieure inegalité, que de mineure inegalité, entant qu'elles comprennent seulement les raisons rationelles, d'autant que nous deuons parler au 10. liure des quantitez qui ont raison irrationelle.

Donc la raison rationelle d'inegalité maieure, est diuisee en cinq genres, sçauoir en la raison multiple, superparticuliere, superpartiente, multiple superparticuliere, & multiple superpartiente. Semblablement, la raison de mineure inegalité est diuisee selon les mesmes genres, pourueu qu'à chacun terme de la raison l'on mette deuant cette proposition (*Sub*) c'est à dire sous, comme en la raison submultiple, ou sous multiple, sous-super-particuliere, sous-superpartiente, sous-multiple super-particuliere, sous-multiple superpartiente

Or de ces cinq genres ou especes, les trois premiers sont simples, mais les deux derniers sont composez de ces trois premiers, comme il est manifeste.

De la raison multiple.

Raison multiple est vne habitude d'vne plus grande quantité à vne plus petite, quand la plus grande contient la plus petite, certain nombre de fois precisemẽt, cõme 2. fois, 3. fois, 10. fois 100. fois De sorte que la plus petite, mesure la plus grande, comme est la raison de ce nombre 20. au nombre 4. car 20. contient quatre cinq fois. Item, la raison d'vne ligne de 30. pieds, à vne lig. de 5. pieds &c.

Or celle cy contient sous soy infinis genres: car, si la plus grande quantité de la raison multiple, contient la moindre deux fois seulement, elle sera appellee raison double: si trois fois, elle sera dicte *triple*, si dix fois, decuple, si cent fois, centuple, &c.

De ces choses, nous definirons facilement toutes les especes de raison multiple: Car la raison octuple ne sera rien autre chose, qu'vne habitude d'vne plus grande quantité à vne moindre, quand la plus grande cõtient la moindre huict fois. En la mesme maniere on definira les autres raisons multiples, comme la raison quintuple, telle qu'est 40. à 8. de laquelle raison la plus grande quantité contient la moindre cinq fois. Item, la raison d'vne ligne de 10. pieds, à vne ligne de cinq pieds, est celle en laquelle la plus grande quantité contient la moindre deux fois, & ainsi des autres.

De la raison super-particuliere.

La raison super-particuliere est vne habitude d'vne plus grande quantité à vne moindre, quand la plus grande contient la plus petite vne fois seulement, & en outre vne partie aliquote d'icelle moindre, sçauoir la moitié, le tiers ou le quart, &c. Comme est la raison de 3. à 2. car 3. contient 2. vne fois, & en outre l'vnité qui est moitié de 2. Ainsi pareillement vne ligne de 12. pieds a raison super-particuliere à vne ligne de 9. pieds: car la premiere ligne 12. contient la derniere 9. vne fois, & en outre vne ligne de 3. pieds, qui est la 3. partie de 9. pieds.

Cette raison se diuise pareillement en infinis

genres: car ſi cette partie aliquote contenuë en la plus grande quantité, eſt moitié de la moindre quantité, la raiſon conſtituee ſera appellee ſeſquialtere, ſi c'eſt la tierce partie, elle ſera appellee ſeſquitierce: ſi la 4. ſeſquiquarte; & ſi la miliéme, ſeſquimiliéme.

Donc par ce meſme terme les definitions de toutes les raiſons ſuper-particulieres ſeront faciles: comme la raiſon ſeſqui-huictiéme, ou ſeſqui-octaue, eſt quand la plus grande quantité, contient la moindre vne fois, & en outre la huictiéme partie de la moindre, comme eſt la raiſon de 9. à 8. Item de 45. à 40. & faut entendre de meſme des autres.

De la raiſon ſuper-partiente.

La raiſon ſuperpartiente eſt l'habitude d'vne plus grande quantité à vne plus petite, quand la plus grande contient la plus petite vne fois ſeulement, & en outre, quelques parties aliquotes d'icelle moindre, leſquelles priſes enſemble, ne font pas vne partie aliquote, comme eſt la proportion de 8. à 5. car 8. contient 5. vne fois, & de plus, trois vnitez, chacune deſquelles eſt partie aliquote, ſçauoir la 5. partie de ce nombre 5. mais ce nombre de 3. compoſé de ces trois vnitez, n'eſt pas partie aliquote de 5.

I'ay dict, que ces parties aliquotes ne doiuent conſtituer vne partie aliquote, à cauſe de pluſieurs raiſons, qui du commencement ſemblent eſtre ſuperpartientes, leſquelles toutefois ſont ſuperparticulieres, comme eſt la raiſon entre 10. & 8. Car combien que le nombre 10. contienne 8. vne fois, & de plus deux vnitez, chacune deſquelles eſt la

8. partie de 8. toutefois d'autant que le nombre de deux composé de ces deux vnitez, est la 4. partie de 8. ceste raison ne doit estre appellee superpartiente, mais superparticuliere, sçauoir sesquiquarte: partant, afin que deux quantitez soient dictes auoir raison superpartiente, il est necessaire que la plus-grande quantité contienne la moindre vne fois, & plusieurs parties aliquotes d'icelle moindre, lesquelles prises ensemble ne doiuent constituer vne partie aliquote; ce qu'aucuns ne considerans, confondent beaucoup les genres des raisons entr'eux.

De la raison multiple superparticuliere.

La raison multiple superparticuliere, est l'habitude d'vne plus grande quantité à vne plus petite, quand la plus grande contient la plus petite certain nombre de fois, comme 2. 3. 4. &c. & en outre vne partie aliquote de la moindre, comme est la raison de 9. à 4. Car 9. contient 4. deux fois, & en outre: (en quoy elle conuient auec la multiple, comme auec la double,) contient l'vnité, qui est la 4. partie du moindre nombre (& en cela ceste raison est semblable à la superparticuliere, sçauoir à la sesquiquarte,) de sorte que ceste raison sera dicte à bon droict, estre composee de la multiple & de la superparticuliere.

Or cette raison, tout ainsi que la multiple, est diuisee en plusieurs genres, comme en double superparticuliere, triple superparticuliere, &c. entant que la plus grande quantité contient la moindre deux fois, ou 3. fois, & en outre, vne partie aliquote de la moindre quantité.

Derechef, vn chacun de ces genres eſt ſubdiuiſé en pluſieurs, eu eſgard à la raiſon ſuperparticuliere : car, pour exemple, la raiſon triple ſuperparticuliere, contient ſous ſoy la triple ſeſquialtere, (ſçauoir quand la plus grande quantité contient trois fois la moindre : & outre la moitié d'icelle moindre,) la triple ſeſquitierce, la triple ſeſquiquarte, & ainſi des autres.

De la raiſon multiple ſuperpartiente.

Finalement, la raiſon multiple ſuperpartiente, eſt l'habitude d'vne plus grande quantité à vne moindre, quand la plus grande contient la moindre, certain nombre de fois, & en outre quelques parties aliquotes de la moindre, leſquelles priſes enſemble ne font pas vne partie aliquote : comme eſt la raiſon de 11. à 3. I'ay dict, ne faiſant pas vne partie aliquote, pour la raiſon alleguee, en la raiſon ſuperpartiente. Car ſi icelles parties aliquotes faiſoient vne partie aliquote, elle ne ſeroit pas raiſon multiple ſuperpartiente, mais multiple ſuperparticuliere.

Comme la raiſon de 20. à 6. ne doit eſtre dicte multiple-ſuperpartiẽte ſixiémes, combien que 20. contienne 6. trois fois & deux ſixieſmes, d'autant que deux ſixieſmes font vne 3. partie. Parquoy elle ſera appellee raiſon triple-ſeſquitierce.

Or cette raiſon eſt diuiſee, premierement eu eſgard à la raiſon multiple. Comme en multiple double ſuperpartiente, triple ſuperpartiente, &c.

En apres, chacune d'icelles, eu egard au nombre des parties, contient ſoubs ſoy infinis gen-

res: comme sous la triple-superpartiente, est contenuë la triple-superbipartiente, la triple-supertripartiente, &c.

Finalement, chacune d'icelles, en consideration de la denomination des parties aliquotes, est encore diuisee en infinis genres: comme la triple supertripartiéte est diuisee en triple subpertripartiente quatriesmes, en triple supertripartiente cinquiémes, &c. De toutes lesquelles, les definitions & les exemples seront faciles, par ce qui a esté dict, &c.

Des raisons rationelles, de moindre inegalité.

Tout ce qui a esté dict iusques icy, des 5. genres des raisons rationelles de plus grande inegalité, doit pareillement estre entendu des 5. genres correspondans de moindre inegalité, apposant neantmoins touſiours ceste prepoſition (*ſub*) c'est à dire, sous, comme il a esté dict.

Car si aux exemples cy-deuant proposez, on confere les moindres quantitez auec les plus grandes, l'on aura des raisons de moindre inegalité correspondantes. Car tout ainsi que la raison de 100. à 1. est centuple, ainsi la raison de 1. à 100. est subcentuple, ou sous-centuple, & comme la raison de 11. à 3. est triple-superbipartiente tierces, ainsi la raison de 3. à 11. est subtriple, & superbipartiente tierces, & ainsi des autres.

Des denominateurs, des raisons rationelles.

D'autant que l'vsage des denominateurs des raisons rationelles, cy-dessus exposees, n'est pas peuvtile: il ne sera hors de propos d'enseigner icy, par

quels nombres elles ſont denommees. Le denominateur de quelconque raiſon, eſt le nombre, qui exprime diſtinctement & apertement, l'habitude d'vne quantité à l'autre: comme le denominateur de la raiſon octuple eſt 8. pour ce que ce nombre 8. monſtre que la plus grande quantité de la raiſon octuple, contient le moindre 8 fois. Semblablement, le denominateur de la raiſon ſeſquiquinte eſt $\frac{5}{4}$ d'autant que ce nombre ſignifie que la plus grande quantité de la raiſon ſeſquiquinte, contient la moindre vne fois, & la 5. partie d'icelle moindre; & faut entendre de meſme des denominateurs des autres raiſons.

C'eſt pourquoy (comme i'eſtime) Euclide au 6. liure, & pluſieurs autres Mathematiciens, appellent le denominateur de quelcõque raiſon, la quantité d'icelle: car le denom. (cõme nous auons dit) monſtre, combien grande eſt vne quantité, au reſpect d'vne autre, ſçauoir de celle, auec laquelle elle eſt conferee, comme il appert par les exemples propoſez.

Or de ces choſes, que nous auons dictes, l'on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raiſon. Car le denominateur de la raiſon multiple, quelconque elle ſoit, eſt vn nombre entier, qui contient autant d'vnitez, que la plus grande quantité de la raiſon contient de fois la moindre: comme pour exemple, le denominateur de la raiſon double, eſt deux, de la raiſon octuple, eſt 8. centuple eſt 100. &c. Mais les denominateurs des raiſons ſubmultiples, correſpondantes aux multiples, ſont parties aliquotes, denommees des denominateurs des raiſons multiples, auſquelles correſpondent les denommees.

Comme le denominateur de la raiſon ſous-double eſt $\frac{1}{2}$. ſubquintuple eſt $\frac{1}{5}$. ſubcentuple eſt $\frac{1}{100}$. &c. & ainſi nous trouuerons les denominateurs des autres raiſons ſubmultiples. Partant, le denominateur de quelconque raiſon ſubmultiple eſt vn nombre rompu, ou vne fraction, de laquelle le numerateur eſt touſiours l'vnité : mais le denominateur eſt vn nombre denommant la raiſon multiple correſpondante, comme il appert par ces exemples. Donc il ne ſera difficile de trouuer le denominateur de quelconque raiſon multiple, ou ſubmultiple, entendant bien ce qui eſt dict: d'autant que la prolation meſme, demonſtre le denominateur de la raiſon, comme il eſt manifeſte, par les exemples propoſez.

Le denominateur de quelconque raiſon ſuperparticuliere, eſt l'vnité, auec celle partie aliquote, que la plus grande quantité, doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raiſon ſeſquialtere eſt $1.\frac{1}{2}$. ſeſquihuictieſme eſt $1.\frac{1}{8}$. ſeſquicentieſme eſt $1.\frac{1}{100}$. &c. & ne ſera difficile de trouuer le denominateur de quelconque raiſon ſuperparticuliere, puis que la prolation meſme de la raiſon, exprime le denominateur par ſa partie aliquote, comme il eſt euident par les exemples propoſez.

Mais les denominateurs des raiſons ſubſuperparticulieres, correſpondantes, ſont fractions, deſquelles les numerateurs ſont plus petits que les denominateurs d'icelles, de l'vnité ſeulement, chacun au ſien, comme le denominateur de la raiſon ſubſeſquialtere eſt $\frac{2}{3}$. ſubſequihuictéme eſt $\frac{8}{9}$. ſubſequicentiéme eſt $\frac{100}{101}$. &c. Or on trouuera le denominateur de quelconque raiſon ſuper-

particuliere, si pour le numerateur de la fraction, on prend le denominateur de la partie aliquote exprimée en la raison, & pour le denominateur de la mesme fraction, l'on prend vn nombre plus grand de l'vnité. Comme le denominateur de la raison subsesquidixiéme est $\frac{10}{11}$. puis que le numerateur de ceste fraction est le nombre denommant la partie dixiéme, sçauoir 10. mais le denominateur de la mesme fraction, excede le numerateur del'vnité; le denominateur de la raison subsesquiseptiéme est $\frac{7}{8}$. celuy de la raison subsesquiquinte, est $\frac{5}{6}$. &c.

Pareillement, nous trouuerons le denominateur de quelconque raison subsuperparticuliere, si nous reduisons le denominateur de la raison superparticuliere correspondante en vne fraction; de laquelle fraction le numerateur excedera touſiours le denominateur, de l'vnité, lequel est aussi denominateur de la partie aliquote, dont est faict mention en la raison proposee, puis nous transposons les termes de cette fraction: en sorte que le numerateur soit faict denominateur, & le denominateur numerateur: nous aurons le denominateur de la raison subsuperparticuliere proposee, comme si on propose la raison subsequiseptiéme: d'autant que le denominateur de la raison sesquiseptiéme qui luy est correspondante, est $\frac{8}{7}$. qui se reduict en ceste fraction $\frac{7}{8}$. de laquelle le numerateur est plus grand que le denominateur de la partie aliquote de l'vnité: parquoy si nous transposons cette fraction en ceste maniere $\frac{7}{8}$, nous dirons que le denominateur de la raison subsesquiseptiéme est 7. &c.

Le denominateur de quelconque raison superpartiente,

partiente, est l'vnité auec les parties aliquotes, ne faisant vne partie aliquote, lesquelles la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raison supertripartiente septiémes est $1\frac{1}{7}$. supertripartiente 20. est $1\frac{1}{20}$. &c. Et est facile à trouuer, d'autant que la prolation mesme de la raison monstre le propre denominateur, comme il appert par les exemples cy dessus.

Mais le denominateur de quelcõque raison subsuperpartiente, est vne fraction de laquelle le numerateur est moindre que le denominateur, d'autant d'vnitez, que la plus grande quantité de la raison proposee, contient de parties aliquotes outre la moindre. Comme le denominateur de la raiõ subsupertripartiente septiémes est $\frac{2}{7}$. de la subsupertripartiente vingtiémes est $\frac{5}{13}$. &c. Or le denominateur de quelconque raison subsuperpartiente sera trouué, si pour le denominateur de la fraction, on prend le denominateur des parties aliquotes, contenuës en la raison proposee, auquel si on adiouste le nombre des mesmes parties, on aura le denominateur d'icelle fraction.

Comme le denominateur de la raison subsuperquatripartiente vnziémes est $\frac{4}{11}$, d'autant que le denominateur de cette fraction, est le denommant les parties vnziémes, sçauoir 11. auquel est adiousté 4. le nombre des quatre parties aliquotes, afin de faire 15. denominateur de la mesme fraction.

Mais le denominateur de la raison subsupertripartiente cinquiémes est ceste fraction $\frac{3}{8}$: car le numerateur d'icelle est le nombre denommant les

parties cinquiémes, ſçauoir 5. mais le denominateur de la meſme fraction 8, eſt faict du numerateur 5. & de 3. nombre des trois parties aliquotes : Et ainſi des autres denominateurs que l'on trouuera auſſi en ceſte maniere.

Soit reduict le denominateur de la raiſon ſuperpartiente correſpondante en vne fraction, de laquelle le numerateur excedera le denominateur, qui denomme auſſi les parties aliquotes exprimees, d'autant d'vnitez qu'il y a de parties aliquotes.

Car les nombres de cette fraction eſtans tranſpoſez, en ſorte que le numerateur ſoit faict denominateur, & le denominateur numerateur : l'on aura le denominateur de la raiſon propoſee ſubſuperpartiente. Comme le denominateur de la raiſon ſubſupertripartiente cinquiémes eſt $\frac{5}{8}$. pour ce que le denominateur de la raiſon ſupertripartiente cinquiémes eſt $1\frac{5}{8}$. qui eſt reduict en ceſte fraction $\frac{8}{5}$. laquelle faict $\frac{5}{8}$. en tranſpoſant les nombres, & faut faire de meſme pour trouuer les denominateurs des autres raiſons, &c.

Le denominateur de quelconque raiſon multiple ſuperparticuliere, eſt vn nombre entier, denommant la raiſon multiple propoſee, auec la partie aliquote, que la plus grande quantité doit contenir, outre la moindre : comme le denominateur de la raiſon triple ſeſquiſeptiéme eſt $3\frac{1}{7}$. la quintuple ſeſquineufiéme, eſt $5\frac{1}{9}$. &c. & eſt tres-facile d'exprimer le denominateur de quelconque raiſon multiple ſuperparticuliere : d'autant que la prolation de la raiſon monſtre diſtinctement, & le denominateur de la raiſon multiple, & la partie aliquote, comme l'on peut voir

par les exemples proposez. Or le denominateur de quelconque raison submultiple superparticuliere est vne fraction, de laquelle le numerateur est vn nombre denommant des parties aliquotes en la raison. Comme le denominateur de la raison subtriple sesquiseptiéme, est $\frac{7}{3}$. la subquintuple sesquiseptiéme est $\frac{7}{5}$, &c.

Or ce denominateur sera trouué, si pour le numerateur de la fraction, on prend le denominateur de la partie aliquote, lequel estant multiplié par le denominateur de la raison multiple, si l'on adiouste l'vnité au produict, l'on aura le denominateur de la mesme fraction.

Comme pour exemple, le denominateur de la raison subquadruple sesquisexte est $\frac{6}{4}$. d'autant que le numerateur 6. denomme les parties sixiémes, & iceluy multiplié par 4. denominteur de la raison quadruple, & ayant adiousté au produict 24. l'vnité, afin que le denominateur de la mesme fraction soit faict 25. &c. Autrement, l'on trouuera le mesme denominateur, si l'on reduict en vne fraction, le denominateur de la raison multiple superparticuliere correspondante, comme nous auons dict cy-dessus.

Comme si l'on propose la raison subquadruple sesquisexte: d'autant que le denominateur de la raison quadruple sesquisexte correspondante est $4\frac{1}{6}$ laquelle sera reduicte à $\frac{25}{6}$. dont si on change l'ordre des termes d'icelle fraction, on aura $\frac{6}{25}$. pour le denominateur de la raison subquadruple sesquisixiéme: & ainsi des autres.

Les denominateurs de quelconque raison multiple superpartiente, est vn nombre entier denommant la raison multiple exprimee en icelle,

auec les parties aliquotes, que doit cõtenir la plus grande quantité par dessus la moindre, lesquelles par. aliquotes ne constituent vne partie aliquote. Comme le denominateur de la raison triple superquinpartiente huictiéme est $3\frac{3}{8}$. de la quadruple superbipartiente cinquiéme est $4\frac{4}{5}$.

Et pour trouuer les denominateurs il n'y a aucune difficulté, puis qu'ils sont exprimez distinctement & apertement en chaque raison proposee, multiple superpartiente, sçauoir tant le denominateur de la raison multiple, cõtenus en icelle, que les parties aliquotes, comme il est manifeste par les exemples proposez. Mais le denominateur de quelconque raison submultiple superpartiente, est vne fraction de laquelle le numerateur est vn nombre, denommant les parties aliquotes d'icelle raison.

Comme le denominateur de la raison subtriple superquintupartiente huictiémes, est $\frac{8}{3}$. subquadruple superbipartiente cinquiémes, est $\frac{5}{4}$. Or le denominateur de ces raisons submultiples superpartientes sera trouué, si pour le numerateur de la fraction, on prend le denominateur des parties aliquotes, lequel estant multiplié par le denominateur de la raison multiple, & ayant adiousté au produict, le nombre des parties aliquotes, l'on obtiendra le denominateur de la mesme fraction.

Comme le denominateur de la raison subdouble superoctupartiente treiziémes, est $\frac{13}{14}$. par ce que le numerateur de cette fraction 13. denomme les parties treiziémes, lequel multiplié par 2. denominateur de la raison double, & au nombre produict 26. on adiouste le nombre des 8. par-

dies, on fera 34. denominateur de la meſme fraction, &c.

Autrement, l'on trouuera le meſme denominateur, reduiſant le denominateur de la raiſon correſpondante, en vne fraction, & tranſpoſant les termes, comme nous auons deſia dict cy-deuant.

Comme pour exemple, ſoit propoſée la raiſon, ſubquintuple, ſupertripartiente dixiémes, pour trouuer le denominateur d'icelle, l'on reduira en vne fraction, le denominateur de la raiſon correſpondante quintuple ſupertripartiente dixiémes, qui eſt $5\frac{1}{1}$.. & l'on aura cette fraction $\frac{5.1}{1.1}$. & en permutant les termes, c'eſt à dire poſant 10. au lieu de 53. & 53. au lieu de 10. l'on aura $\frac{10}{53}$. pour le denominateur de la raiſon ſubquintuple, ſuſupertripartiente dixiémes, & ainſi des autres.

Finalement, le denominateur de la raiſon d'egalité eſt touſiours l'vnité, d'autant qu'en cette raiſon, les quãtitez doiuent eſtre egales entr'elles: & partant l'vne doit contenir l'autre vne fois, & non plus: ce que ſignifie l'vnité.

5. Les grandeurs ſont dictes auoir raiſon l'vne à l'autre, leſquelles eſtans multipliees, ſe peuuent exceder l'vne l'autre.

D'autant qu'Euclide, en la troiſiéme definition a appellé l'habitude de deux grandeurs de meſme genre, raiſon, il enſeigne maintenant en ceſte 5. definition, quelle choſe eſt requiſe, afin que deux quãtitez de meſme genre, ſoient dictes auoir

raiſon entr'elles, diſant que les grandeurs ſont dictes auoir raiſon entr'elles, deſquelles, laquelle que l'on voudra eſtant multipliee, peut eſtre augmentee de telle ſorte qu'elle excede l'autre, comme le diametre & le coſté d'vn meſme quarré, ſeront dicts auoir raiſon, combien qu'elle ſoit irrationelle, laquelle ne ſe peut exprimer par aucun nombre, d'autant que le coſté multiplié par 2. ou pris 2. fois, excede le diametre. Car puis que les deux coſtez du quarré auec le diametre conſtituent vn triangle Iſoſcele, * les 2. coſtez du q. ſeront plus grands que le diametre d'iceluy. * 20. I.

Ainſi pareillemnt la circonference du cercle, & le diametre d'iceluy auront raiſon, (combien qu'elle ne ſoit encore cogneuë) d'autant que le diametre multiplié par 4. ou pris 4. fois, excede la circonference, puis que toute circonference de cercle, comme il eſt demonſtré par Archimede, contient tant ſeulement trois fois le diametre du meſme cercle, & de plus vne particule, peu moindre que la ſeptiéme partie du diametre.

En la meſme maniere, pluſieurs figures curuilignes auront raiſon auec des figures rectilignes, comme a monſtré Proclus ſur le premier d'Euclide. Or, comme diſent quelques Interpretes, toutes les lignes ny tous les angles plans n'ont pas raiſon entr'eux, ſelon ceſte definition: car vne ligne finie, diſent-ils, n'a aucune raiſon à vne ligne infinie, puis qu'en quelque maniere qu'elle ſoit multipliee, elle ne peut exceder la ligne infinie, ny vn angle reſtiligne n'a raiſon à vn angle de contingence. Car l'angle de contingence ne peut exceder vn angle rectiligne. 16. 3.

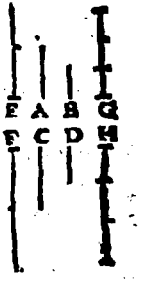
6. Les grandeurs sont dictes estre en mesme raison, la premiere à la seconde, & la troisiesme à la quatriesme, quand les equimultiples de la premiere & de la troisiesme, aux equimultiples de la seconde & de la quatriesme, par quelque multiplication que ce soit, ou defaillent ensemble, ou ensemble sont egaux, ou excedent ensemble vn chacun à vn chacun, si l'on prend ceux-là qui s'entrerespondent.

Euclide monstre en ce lieu, quelles conditions sont requises aux magnitudes, pour estre dictes auoir mesme raison, ce que pour exposer, il est contrainct de se seruir des equimultiples d'icelles, afin qu'il comprenne toutes les raisons des grandeurs, tant rationelles que irrationelles.

Soient donc quatre grandeurs A, premiere, B, seconde, C, troisiesme, D, quatriesme, & soient prises les equimultiples quelconques de la premiere A, & de la troisiesme C, sçauoir E, equimultiple de A, & F, de C. Item, soient prises autres quelconques equimultiples, de la seconde B, & de la 4. D, sçauoir G, equimultiple de B, & H, de D, soit que ces deux dernieres soient autant multiples de la 2. & de la 4. que les deux premieres le sont de la premiere & de la troisiesme ou non.

Que si maintenant l'on confere entr'elles les

grãdeurs qui ont eſté priſes equimultiples, ſçauoir celles qui s'entre-reſpondent, comme la multiple de la premiere, & la multiple de la ſeconde, qui ſont E, & G. Item, la multiple de la tierce, & la multiple de la quatrieſme entr'elles, ſçauoir F, & H, & s'il ſe trouue touſiours qu'elles ont vn tel rapport l'vne à l'autre, que ſi E, multiple de la premiere grandeur, A, eſt moindre que G. multiple de la ſeconde grandeur B, que F, multiple de la troiſieſme grandeur C, ſoit auſſi moindre que H, multiple de la 4. grandeur D: ou ſi E, eſt egale à G, auſſi F, ſoit egale à H: ou finalemẽt, ſi



E, eſt plus grãde que G, auſſi F, ſoit plus grande que H, ce qui eſt defaillir enſemble l'vn & l'autre, de l'vn & de l'autre, ou eſtre egaux enſemble, ou exceder enſemble: de ſorte qu'en aucun genre de multiples le contraire ne ſe puiſſe trouuer; c'eſt à dire, que E, ne ſoit iamais moindre que o, que F, ne ſoit auſſi moindre que H, & que iamais E, ne ſoit egale à G, ſi F, n'eſt auſſi egale à H, & finalement que E, ne ſoit iamais plus grande que G, que F, ne ſoit auſſi plus grande que H.

Si donc on trouue que les equimultiples pris en quelque façon que ce ſoit, ſe rapportent perpetuellement entr'eux, comme dict eſt, l'on dira qu'il y a meſme raiſon de la premiere grandeur A, à la ſeconde B, que de la troiſieſme grandeur C, à la quatrieſme D: Que ſi on trouuoit quelques fois, meſme en vn ſeul genre des multiples, que le multiple E, defaut du multiple de G, mais le

multiple F, ne defaut de H, ou que E, eſt egal à G, & F, n'eſt egal à H: ou finalement E, excede G, & F, n'excede H, combien qu'en infinis autres façons de multiples; la ſuſdite condition ſe trouue en aucune façon, les grandeurs propoſees ne ſeront dictes auoir meſme raiſon entr'elles: mais diuerſes, comme il ſera manifeſte de la huictieſme definition.

Au contraire, s'il y a meſme raiſon de la premiere à la ſeconde, comme de la troiſieſme à la quatrieſme, il s'enſuyura que les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme, ſeront toutes deux egales, aux equimultiples de la ſeconde & de la quatrieſme, ou toutes deux moindres, ou toutes deux plus grandes en quelconque multiplication que ce ſoit.
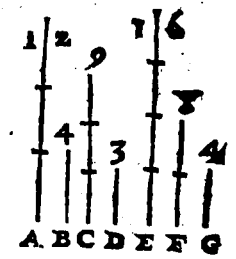
Et s'il n'y auoit meſme raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la troiſiéme à la quatriéme, auſſi les equimultiples de la premiere & troiſiéme n'excederont enſemble les equimultiples de la ſeconde & quatrieſme, ou ne ſeront egales ou plus petites, &c.

Or il faut noter icy, que ceſte definition ſe doit auſſi prendre de trois grandeurs, pourueu que la ſeconde ſoit priſe deux fois, afin d'en auoir quatre, &c.

7. Les grandeurs qui ont meſme raiſon, ſoient appellees analogues, ou proportionnelles.

Comme ſi des grandeurs A, B, C, D, il y a meſme raiſon de A, à B, que de C, à D, icelles gran-

deurs A,B,C,D, ſeront dictes proportionnelles: ſemblablement, s'il y a meſme raiſon de E, à F, que de F, à G, les grandeurs E,F,G, ſeront dites proportionnelles. Or il y a quelques magnitudes proportionnelles continuellement: entre leſquelles ſe trouue la proportion continuë, comme ſont les grandeurs E,F,G: mais quelques vnes ſont proportionnelles non continuellement, mais ſeparément, comme ſont les grandeurs A,B,C,D: car en ceux-cy, y a interruption de raiſons, mais en ceux-là non, comme il eſt dict en la quatrieſme definition.



8. Mais quand des equimultiples, le multiple de la premiere grandeur excedera celuy de la ſeconde; mais le multiple de la troiſieſme grandeur, n'excedera pas celuy de la quatrieſme; alors la premiere grandeur ſera dicte auoir plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme.

Euclide declare en ceſte definition, quelle condition doiuent auoir quatre grandeurs, afin que la premiere ſoit dicte auoir plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme, diſant que ſi on prend les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme: ſemblablement autres

equimultiples de la seconde & de la quatrieſme, & qu'il ſe trouue quelques-fois (bien que non pas touſjours) que le multiple de la premiere grandeur ſoit plus grand que le multiple de la ſeconde: mais le multiple de la troiſieſme, n'eſt pas plus grand que le multiple de la quatriéme; mais moindre ou egal, l'on dira qu'il y aura plus grande raiſon de la premiere grandeur à la ſeconde, que de la troiſiéme à la quatriéme, comme il eſt manifeſte en l'exemple propoſé, auquel l'on a pris



les doubles de la premiere grandeur A, & de la troiſiéme C, ſçauoir E, & F; mais de la ſeconde B, & de la 4. D, l'on a pris les triples G, & H. Et d'autant que E, multiple de la premiere, eſt plus grand que G, multiple de la 2. mais F, multiple de la 3. n'eſt pas plus grand que H, multiple de la 4. mais moindre, l'on dira qu'il y aura plus grande raiſon de A, premiere grandeur à B, 2. que de C, 3. à D, quatriéme.

Or il n'eſt pas neceſſaire, afin que de quatre grandeurs, la 1. ſoit dicte auoir plus grande raiſon à la 2. que la 3. à la 4. que les equimultiples, ſelon quelconque multiplication, ayent telle habitude que le multiple de la 1. excede le multiple de la 2. mais que le multiple de la 3. n'excede le multiple de la 4. Mais c'eſt aſſez que ſelon quelque multiplication ils ayent telle habitude: car il ſe peut faire quelquefois que tant le multiple de la 1. eſt plus grand que le multiple de la 2. que le multiple de la 3. de celuy de la 4. Semblablement, que

comme le multiple de la 1. eſt moindre que le multiple de la 2. que celuy de la 3. eſt auſſi moindre que celuy de la 4. Toutesfois, d'autant que cela n'aduient pas en toute multiplication ; mais quelquefois le multiple de la 1. excede celuy de la 2. mais le multiple de la 3. eſt moindre ou egal au multiple de la 4. pour ceſte cauſe, la 1. grandeur ſera dicte auoir plus grande raiſon à la 2. que la 3. à la 4. & non meſme comme l'on void en l'exemple propoſé, où 3. a plus grande raiſon à 2. que 4. à 3.

15. 9. 12. 3. 2. 10. 18. 14.
20. 12. 16. 4. 3. 15. 12. 21.

Donc, afin que quatre grandeurs ſoient dictes proportionnelles, il eſt neceſſaire que les equimultiples d'icelles, priſes ſelon quelconque multiplication, defaillent enſemble, ſoient egales enſemble, ou excedent enſemble, comme il a eſté expoſé en la 6. definition.

Mais afin que la premiere ſoit dicte auoir plus grande raiſon à la 2. que la 3. à la 4. Il ſuffit que ſelon quelque multiplication, le multiple de la 1. excede le multiple de la 2 mais celuy de la 3. n'excede celuy de la 4. encore que ſelon infinies autres multiplications, les equimultiples de la 1. & de la 3. excedent enſemble les equimultiples de la 2. & de la 4. &c.

Mais ſi au contraire le multiple de la 1. grandeur, defaut du multiple de la 2. le multiple de la 3. ne defaut du multiple de la 4. : la 1. grandeur ſera dicte auoir moindre raiſon à la 2. que la 3. à la 4. : combien que ſelon pluſieurs autres multiplications, les equimultiples de la 1. & de la 3. defaillent enſemble des equimultiples de la 2. &

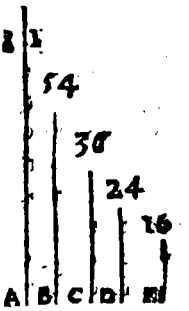
de la 4. comme l'on voit aux mesmes nombres de l'exemple proposé, la raison de 2. à 3. sera moindre que de 3. à 4. &c.

9. La proportion ne peut estre constituee en moins de trois termes.

D'autant que toute Analogie, qui est dite proportion, est vne similitude de raisons, & qu'en toute raison il y a le terme antecedent, & le terme consequent; il est necessaire qu'en toute proportion, il y ait à tout le moins deux termes antecedens, & deux consequens. Partant, si la proportion n'est continuë, seront requis, à tout le moins quatre termes ou grandeurs: mais si la proportion est continuë, il y aura du moins trois termes, d'autant que celuy du milieu est pris deux fois, puis qu'il est consequent d'vne raison, & antecedent de l'autre: & c'est icy le moindre nombre des termes de la proportion. Car en deux termes quelconques se trouue seulement raison, & non proportion.

10. Quand il y a trois grandeurs proportionnelles, la premiere à la troisiesme, est dicte auoir la raison doublee de la premiere à la seconde: mais quand quatre grandeurs sont proportionnelles, la premiere a la quatriesme, est dicte auoir la raison triplee, de la premiere à la seconde, & touſiours de mesme ordre, vne de plus, iusqu'à ce que la proportion soit accomplie.

Comme si les grandeurs A, B, C, D, E, sont continuellement proportionnelles, de sorte qu'il y ait mesme raison de A à B, que de B à C, & de C à D, & D à E. La raison de la premiere grandeur A, à la 3. grandeur C, sera dicte doublee de la raison que la premiere grandeur A, a la seconde grandeur B, d'autant qu'entre A, & C, y a deux raisons, lesquelles sont egales à la raison de A à B, à sçauoir la raison de A à B, & de B à C. De sorte que la raison de A à B, doublee, c'est à dire mise deux fois d'ordre : mais la raison de la premiere grandeur A, à la 4. D, est dicte triplee de la raison, que la premiere grandeur A, a à la 2. grandeur B, d'autant qu'entre A, & D, sont trois raisons, qui sont egales à la raison de A à B, à sçauoir la raison de A à B, de B à C, & de C à D, tellement que la raison de A à D, enclot ou comprend en quelque façon, la raison de A à B, triplee, c'est à dire posee trois fois d'ordre. Ainsi pareillement la raison de A à E, sera dicte quadruplee de la raison de A à B, d'autant que quatre raisons se trouuent entre A & F, qui sont egales à la raison de A à B, &c.

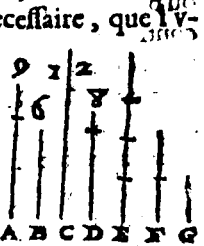


Que si au contraire, y a mesme raison de E à D, que de D à C, & de C à B, que de B à A ; la raison de E à C, sera dicte doublee de la raison de E à D : mais la raison de E à B, sera dicte triplee de la raison de E à D : ainsi pareillement la raison de E à A, sera dicte quadruplee de la raison de E à D, &c.

11. Les grandeurs sont dictes Homologues, ou de semblable raison, les antecedentes aux antecedentes, & les consequentes aux consequentes.

Il a definy auparauant que la proportion est vne similitude de raisons, il enseigne maintenant que non seulement en quelque proportion les raisons sont dictes semblables, mais aussi les termes mesmes, ou quantitez, sont dictes semblables ou homologues, disant que les grandeurs antecedentes sont appellees homologues, ou semblables entr'elles en raison: & de mesmes les consequentes entr'elles: afin d'entendre en plusieurs demonstrations, quels costez des figures, comparez entr'eux, doiuent estre les antecedents des raisons, & quels les consequents, comme il sera declaré au 6. liure.

S'il y a donc mesme raison de A à B, que de C à D, la quantité A, sera dicte semblable à la quantité de C, & B, semblable à D: car, à cause de la similitude des raisons, il est necessaire, que l'vne & l'autre grandeur antecedente, soit egale à l'vne & l'autre consequente, ou de mesme façon, plus grande ou plus petite, autrement l'vne & l'autre antecedente n'auroit mesme raison à l'vne & l'autre consequente. En voicy l'exemple.



Aux magnitudes proposées, ausquelles les antecedentes sont en mesme façon plus grandes que les consequentes, à sçauoir la moitié plus gran-

des : En voicy vn autre exemple.

Aux magnitudes continuellement proportionnelles E, F, G, ou tant E & F, ſont homologues que F, & G, comme il eſt manifeſte, & pour ceſte cauſe, Euclide en la ſixiéme & huictiéme Definition, commande de prendre les equimultiples de la 1. & 3. grandeur, c'eſt à dire des antecedentes: ſemblablement de prendre autres equimultiples de la 2. & 4. grandeurs: à ſçauoir des conſequentes, car elles ſont ſemblables aux magnitudes proportionelles, comme il eſt manifeſte par ceſte Definition: mais aux grandeurs non proportionelles, ſont diſſemblables.

12. La raiſon alterne, eſt prendre l'antecedent, comparé à l'antecedent, & le conſequent au conſequent.

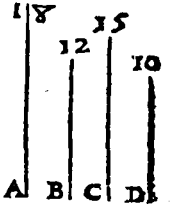
Il explique icy quelques façons d'argumenter aux proportions, dont l'vſage eſt fort frequent entre les Geometres, leſquelles façons d'argumenter ſont 6. en nombre: La 1. eſt dite raiſon alterne, ou permutee: la 2. eſt dite inuerſe, ou raiſon au contraire: la 3. compoſition de raiſon ou proportion conioincte: la 4. diuiſion de raiſon ou proportion diſioincte, ou ſeparee: la 5. conuerſion de raiſon, ou proportion renuerſee: finalement, la 6. eſt appellee raiſon d'egalité, ou egale proportion.

Donc raiſon alterne ou permutee eſt, dict-il, quand quatre grandeurs proportionelles eſtans propoſees, l'on infere qu'il y a meſme raiſon de l'antecedent de la premiere raiſon, à l'antecedent de la derniere, que du conſequent de la premiere,

au

au conſequent de la derniere : comme ſi nous poſons qu'il y ait meſme raiſon de A à B, que de C à D: & partant nous concluons, qu'il y a meſme raiſon de A à C, que de B, à D, nous ſommes dicts argumenter en raiſon permutee.

Les Autheurs Grecs vſent en cette argumentation preſque de ceſte façon de parler : comme A, eſt à B, ainſi C, eſt à D: donc en permutant, ou au contraire, A, ſera à C, comme B, à D. Or nous demonſtrerons la verité de ceſte illation à la 16. Propoſition de ce liure. Et en ceſte façon d'argumenter, il eſt neceſſaire que toutes les quatre grandeurs ſoient de meſme genre, afin qu'il puiſſe y auoir raiſon entre icelles, priſes deux à deux, comme l'on voudra : car ce n'eſt pas bien argumenter de dire, comme la ligne A, eſt à la ligne B, ainſi le nombre C, au nombre D : donc en permutant, comme la ligne A, au nombre C, ainſi la ligne B, au nombre D : attendu qu'il n'y a aucune proportion d'vne ligne à vn nombre: & au contraire, comme il eſt manifeſte de la cinquieſme Definition.



Mais aux autres façons d'argumenter ſuyuantes, les premieres grandeurs peuuent eſtre d'vn gente de quantité, & les dernieres d'vn autre, comme il ſera manifeſte par les demonſtrations de ce cinquieſme liure.

13. Raiſon inuerſe ou tranſpoſee, eſt prendre le conſequent comme antecedent, pour le comparer à l'antecedent, comme ſi c'eſtoit le conſequent.

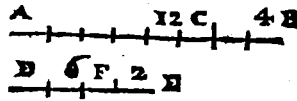
Comme ſi d'autant que A, eſt à B, comme C, eſt à D, nous inferons que B, eſt à A, comme D, eſt à C, (voyez la figure precedente,) nous ſerons dits argumenter par raiſon inuerſe. En ceſte maniere d'argumenter les Autheurs parlent quaſi en ceſte façon comme A, eſt à B, ainſi C, eſt à D, donc en changeant, ou au contraire B, ſera à A, comme D à C: laquelle maniere d'argumenter ſera demonſtree eſtre veritable au Corollaire de la quatrieſme Propoſition de ce liure.

Finalement, les deux premieres grandeurs peuuent eſtre d'vn genre, & les dernieres d'vn autre: car l'on pourra fort bien inferer, comme la ligne A, eſt à la ligne B: ainſi le triangle ou le nombre C, eſt au triangle, ou au nombre D. Donc en changeant, comme la ligne B, eſt à la ligne A, ainſi le triangle ou le nombre D, eſt au triangle, ou au nombre C, comme il ſera euident par le Corollaire de la 4. Propoſition.

14. Compoſition de raiſon, eſt quand l'on prend l'antecedent auec le conſequent, comme vn, pour le comparer au meſme conſequent.

Comme s'il y a meſme raiſon de AC, à CE, que de DF, à FE, & de là on collige qu'il y a meſme

raiſon de la toute A B, à ſçauoir de l'antecedent auec le conſequent; à C B, conſequent, que de la toute D E (ſçauoir l'antecedent auec le conſequent) à F E, conſequent. Cette façon d'argumenter ſera appellee compoſition de raiſon, d'autant que de l'antecedent, & du conſequent eſt compoſé vn autre nouueau antecedent.



Or les Autheurs Grecs vſent de ceſte façon de parler en ceſte argumentation, Comme A C, eſt à C B, ainſi D F, à F E: donc en compoſant comme A B, ſera à C B, ainſi D E, à F E, ceſte maniere d'argumenter ſera demonſtree à la 18. Propoſition de ce liure.

L'on peut adiouſter deux autres moyens d'argumenter à celuy-cy. Le premier peut eſtre dict, compoſition de raiſon conuerſe; à ſçauoir lors qu'on prend l'antecedent & conſequent comme vn, pour le comparer à l'antecedent: comme ſi d'autãt que A C, eſt à C B, ainſi D F, à F E, nous inferons, donc comme A B, compoſée de l'antecedent & du conſequent, eſt à l'antecedent A C, ainſi D E, compoſee de l'antecedent & du conſequent eſt à l'antecedent D F: lequel moyen d'argumenter nous monſtrerons eſtre vallable à la 18. Propoſition de ce liure, en laquelle nous pourrons vſer de ceſte maniere de parler; donc par compoſition de raiſon conuerſe.

L'autre maniere d'argumenter peut eſtre dicte compoſition de raiſon contraire, laquelle ſe faict lors que l'on compare vne meſme grandeur antecedente, à l'antecedente, & à la conſequente

comme à vne seule; comme si A C, est à C B, ainsi D F, est à F E, & nous inferons par composition de raison contraire: donc comme A C, antecedente, est à la toute A B, composee de l'antecedente & de la consequente: ainsi D F, antecedente, sera à D E, composee de l'antecedente & de la consequente. Et nous demonstrerons ceste maniere d'argumenter vallable à la 18. Prop. de ce liure.

15. Diuision de raison, est lors qu'on prend l'excez, par lequel l'antecedent surpasse le consequent, pour le comparer au mesme consequent.

Comme si l'on dict, qu'il y ait mesme raison de la toute A B, à C B, que de la toute D E, à F E, (voyez la precedéte figure): donc il y aura mesme raison de A C, excez par lequel l'antecedent surpasse le consequent à C B, consequent, que de D F, excez par lequel l'antecedent surpasse le consequent à F E, consequent.

Or en cette diuision de raison, les Autheurs parlent ainsi: donc en diuisant, &c. Mais ceste illation sera demonstree à la 17. Proposition de ce liure.

Or à ce moyen d'argumenter, l'on y en peut adiouster deux autres, le premier desquels nous pouuons appeller diuision de raison conuerse, à sçauoir quand le consequent est comparé à l'excez, par lequel l'antecedent surpasse le consequét. Comme si A B, est à C B, ainsi D E, est à F E, & nous concluons par diuision de raison conuerse, donc comme C B, consequent, sera à A C, excez

par lequel l'antecedent surpasse le consequent, ainsi FE, consequent, sera à DF, excez par lequel l'antecedent surpasse le consequent : mais nous demonstrerons la certitude de ceste maniere d'argumenter à la dix-septiesme Proposition de ce liure.

Or il est manifeste, qu'afin que l'vne & l'autre de ces façons d'argumenter ait lieu, sçauoir celle-cy, & celle d'Euclide, que l'antecedent doit estre plus grand que le consequent, autrement la diuision ne se pourroit faire.

L'autre moyen d'agumenter, se peut appeller diuision de raison contraire, qui se faict quand l'antecedent est comparé auec l'excez, par lequel le consequent surpasse l'antecedent, comme quand nous disons: comme AC, est à AB, ainsi DF, est à DE: donc par diuision de raison contraire AC, antecedent, sera pareillement à CB, excez par lequel le consequent surpasse l'antecedent, comme DF, antecedent est à FE, excez par lequel le consequent surpasse l'antecedent: laquelle maniere d'argumenter nous demonstrerons aussi en la 17. Prop. de ce liure.

Finalement, il est manifeste, qu'en cette diuision de raison contraire, que le consequent doit estre plus grand que l'antecedent, afin que l'on puisse prendre l'excez, par lequel le consequent, surpasse l'antecedent.

16. Conuersion de raison, est prendre l'antecedent, pour le comparer à l'excez, par lequel l'antecedent surpasse le mesme consequent.

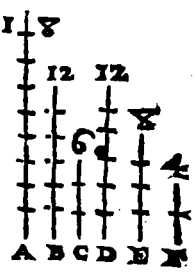
Comme si nous disons en cette maniere : comme toute la grandeur AB, est à CB, ainsi la toute DE, est à FE, donc aussi, la mesme AB, sera à AC, excez par lequel l'antecedét surpasse le cõsequent, comme DE, est à DF : nous serons dicts argumenter par conuersion de raison : dont les Autheurs parlent presque en cette maniere. Donc par conuersion de raison, &c. mais ce moyen d'argumenter sera confirmé au Corollaire de la 19. Prop. de ce liure. Voyez la figure precedente.

Il est aussi euident, qu'en ce moyen d'argumenter par conuersion de raison, que l'antecedent doit exceder le consequent, afin que l'excez par lequel l'antecedent surpasse le consequent, puisse estre pris.

17. Raison egale ou de l'egalité, est quand il y a plusieurs grandeurs, & d'autres egales à icelles en multitude, qui soient prises deux à deux, & en mesme raison : quand comme aux premieres grandeurs, la premiere est à la derniere des mesmes ; ainsi aux secondes grandeurs, la premiere est à la derniere des mesmes. Autrement, c'est prendre les extremes par la soustraction des moyennes.

Soient plusieurs grandeurs A, B, C, d'vne part, & autant de l'autre, D, E, F, lesquelles soient prises de deux en deux, en mesme raison, c'est à dire, comme A, est à B, ainsi D, est à E, & comme B, est

à C, ainſi E, eſt à F. Si donc pour cette cauſe l'on infere qu'il y a meſme raiſon de A, premiere des premieres grandeurs à C, derniere des meſmes, que de D, premiere des ſecondes grandeurs à F, derniere des meſmes, cette façon d'argumenter ſera appellee raiſon egale, ou raiſon d'egalité, à ſçauoir, en laquelle les grandeurs extremes ayans ſouſtrait les moyennes, ſont dites auoir vne meſme raiſon entr'elles, comme il eſt exprimé en l'autre Definition.

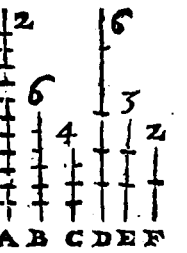


Mais d'autant qu'il eſt permis d'argumenter aux proportions en deux manieres, par l'egalité; à ſçauoir en l'vne, quand nous prenons les grandeurs de deux en deux, en meſme raiſon, en procedant d'ordre, & en l'autre quand l'ordre eſt changé. Euclide explique aux deux Definitions ſuyuantes, que c'eſt que proportion ordonnee, & proportion perturbee ou troublee.

18. Proportion ordonnee eſt, lors que, comme l'antecedent eſt au conſequent, ainſi l'antecedent eſt au conſequent; & comme le conſequent eſt à quelqu'autre, ainſi le conſequent eſt auſſi à quelqu'autre.

Comme ſi A, eſt à B, ainſi D, eſt à E: & derechef, comme B, conſequent eſt à quelqu'autre, ſçauoir à C, ainſi E, conſequent, eſt à quelqu'autre, comme à F. Telle façon d'argumenter ſera

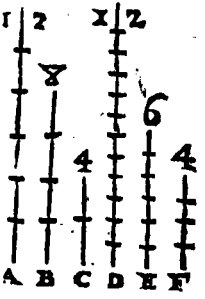
appellee ordonnee: & d'autant qu'on garde vn meſme ordre, tant aux premieres grandeurs qu'aux ſecondes, puis que de part & d'autre, l'on compare premierement la premiere auec la ſeconde, & puis apres la ſeconde auec la tierce. Donc quand en la maniere d'argumenter par egalité, la proportion ordonnee eſt gardee, il eſt demonſtré en la Propoſition 22. de ce liure, que ce moyen d'argumenter eſt bon.



19. Proportion perturbee eſt, lors que trois grandeurs ſont poſees d'vne part & d'autres, egales en multitude à icelles, & comme aux premieres grandeurs, l'antecedent eſt au conſequent, ainſi aux ſecondes grandeurs, l'antecedent eſt au conſequent: mais comme aux premieres grandeurs, le conſequent eſt à quelqu'autre, ainſi aux ſecondes grandeurs quelqu'autre eſt à l'antecedent.

C'eſt à dire, quand 3. grandeurs ſont poſees d'vne part, & autant d'vne autre, la premiere des premieres, eſt à la ſeconde des meſmes, comme la ſeconde des ſecondes, à la troiſieſme des meſmes, & comme la ſeconde des premieres eſt à le troiſieſme des meſmes, ainſi la premiere des ſecondes, eſt à la ſeconde des meſmes.

Comme s'il y a meſme raiſon de A à B, que de E à F, puis apres aux premieres grandeurs, comme B, conſequent eſt à quelqu'autre, ſçauoir à C: ainſi aux ſecondes grandeurs quelqu'autre, à ſçauoir D, eſt à E, antecedent. Et cette façon d'argumenter ſera appellee proportion perturbee, d'autant qu'on n'obſerue pas meſme ordre aux proportions des magnitudes, d'autant qu'aux premieres grandeurs, la premiere eſt comparee auec la ſeconde: mais aux ſecondes grandeurs, la ſeconde eſt comparee auec la tierce: & derechef aux premieres grandeurs, la ſeconde eſt comparee à la tierce, mais aux ſecondes, la premiere eſt comparee auec la ſeconde. Donc quand en la maniere d'argumenter par l'egalité, l'on obſerue la proportion troublee, il eſt demonſtré que cette argumentation eſt bonne, en la 23. Propoſition de ce liure.



Finalement, tant la proportion troublee, qu'ordonnee, infere touſiours par egalité, qu'il y a meſme proportion des extremes, bien que l'on poſe plus de trois grandeurs, comme il ſera manifeſte de la 22. & 23. Prop. de ce liure.

SCHOLIE.

Auparauãt que de paſſer outre, ie diray icy que pluſieurs croyent (comme i'ay peu entendre d'eux-meſmes) qu'Euclide s'eſt trompé icy en quelques endroits, & ſpecialement en donnant la 6. & 8.

Definit. entant (disent-ils) qu'elle paroist aussi obscure, ou plus, que la chose definie. Car disant, qu'il y a mesme raison de la premiere grandeur à la 2. que de la 3. à la 4. si les equimultiples de la 1. & de la 3. sont tous deux plus grãds, ou tous deux egaux, ou tous deux moindres, que les equimultiples de la 2. & de la 4. en quelque multiplication que ce soit, estans pris comme ils s'entre-respondent. *Cela est plus obscur, que si l'on disoit:* Quand les mesmes parties de la 1. & 3. &c. C'est à dire, qu'il deuoit ainsi la faire entendre.

Les grandeurs sont dites auoir mesme raison, la 1. à la 2. & la 3. à la 4. si mesmes parties de la 1. & 3. sont toutes deux plus grandes, ou toutes deux egales, ou toutes deux moindres, que mesmes parties de la 2. & de la 4. chacune à la sienne. Comme pour exemple, que A, premiere, aura mesme raison à B, 2. que C, 3. à D, 4. si en prenant les moitiez de A, & de C, premiere et 3. ou autres telles mesmes parties que l'on voudra; & semblablement en prenant telles mesmes parties que l'on voudra de B, & D, 2. & 4. Il se trouue que les parties de la 1. & 3. soient toutes deux plus grandes, que celles de la 2. & de la 4 ou toutes deux egales, ou toutes deux moindres chacune à la sienne, & que cela est plus sensible & plus cogneu; car en montant par la multiplication, cela s'esloigne plus des sens, par lesquels la cognoissance des choses est communiquee à nostre intellect, ce qui est contre le bon vsage du raisonnement.



Mais si ceux qui le cõdamnent font reflection sur

cette remarque, ils trouueront qu'il ne pouuoit definir, la meſme raiſon (*laquelle conuient auſſi aux nombres*) *auec plus d'addreſſe : car il euſt peu proceder par la voye de la diuiſion, auſſi bien que par la voye de la multiplication ; mais cela euſt apporté de l'obſcurciſſement à cette Definition, par ce qu'il arriue vn inconuenient en la diuiſion des nombres, qui eſt, qu'elle ne ſe peut practiquer à l'infiny, ſans eſtre reduite au terme de l'vnité, qui ne ſe peut plus partager.*

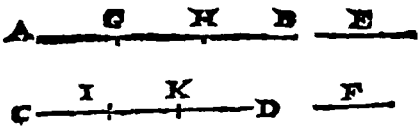
Et Euclide voulant parler, de la meſme raiſon, *qui eſt commune, tant en la quantité continuë que diſioincte, il ne pouuoit proceder auec plus de dexterité, qu'en ſe ſeruant de la multiplication qui conuient à l'vne & à l'autre de ces quantitez. C'eſt pourquoy il a tres-bien remarqué, que ce genre de quantité eſtant impropre ou analogue, au regard de la continuë & de la diſioincte; ces quantitez, par le droit d'analogie, conuiennent en quelque choſe auec leur ſuperieur ou genre, & en partie qu'ils en different, en meſme façon que les Philoſophes recognoiſſent que ce ſuperieur*, Moitié, *comme moitié de* 10. *ſçauoir* 5. *& moitié de* 12. *ſçauoir* 6. *eſt vn terme analogue, par ce que* 6. *&* 5. *conuiennent en partie en ce terme de* moitié, *& diſconuiennent, en ce que la moitié de l'vn eſt nombre pair, & la moité de l'autre eſt nombre impair.*

C'eſt donc la cauſe pourquoy Euclide s'eſt ſeruy de la multiplication, & non pas afin de comprendre toutes les raiſons tant rationelles qu'irrationelles, comme dict Clauius, & quelques autres Interpretes, puis que par la diuiſion, la raiſon irrationelle y peut auſſi bien eſtre compriſe que la rationelle. Car pour exemple, ſi l'on ſuppoſe deux

quarrez inegaux, le coſté du moindre aura meſme raiſon à ſon diametre, que le coſté du plus grand au ſien: & ce d'autant que les moitiez ou autres parties telles que l'on voudra des coſtez, ſe trouueront toutes deux plus grandes, toutes deux egales, ou toutes deux moindres, que meſmes parties que l'on voudra des diametres, chacune à la ſienne, auſſi bien que les multiples, en quoy Clauius & autres apres luy ſe ſont trompez, croyans que c'eſt la raiſon pourquoy Euclide s'eſt ſeruy des equimultiples, plutoſt que des meſmes parties.

THEOREME 1. PROP. 1.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, egales en multitude à d'autres grandeurs, & equimultiples d'icelles, chacune de la ſienne; comme l'vne des grandeurs ſera multiple d'vne; ainſi les toutes ſeront multiples des toutes.



Soient tant de grandeurs qué l'on voudra A B, C D, equimultiples, d'autant d'autres grandeurs E, F: Ie dis que les grandeurs AB, CD, enſemble, ſont autant multiples de E & F, enſemble, que AB, toute ſeule eſt multiple de E, toute ſeule, ou C D, de F.

Car puis que A B, C D, ſont equimultiples de

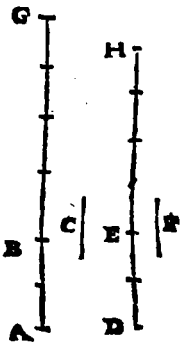
E, F, si AB, est diuisee selon les grandeurs AG, GH, HB, egales chacune à E, & CD, pareillement, selon CI, IK, KD, egales chacune à F. Or chacune poutra estre diuisee en parties totalement egales à E, & F, puis que AB, CD, sont equimultiples de E, F, & partant E, sera contenuë exactement autant de fois en AB, que F, en CD, comme il appert par la seconde definition de ce liure : les grandeurs AG, GH, HB, seront autant en nombre que CI, IK, KD: Mais d'autant que AG, & E, sont egales entr'elles, si l'on leur adiouste les egales CI, & F, AG, & CI, ensemble, seront egales à E & F, ensemble. Semblablement GH, & IK, ensemble, seront egales à E, & F, ensemble, & aussi HB, & KD, aux mesmes E & F, donc autant de fois que E est contenuë en AB, ou F, en CD, autant de fois E & F, ensemble, seront contenues en AB, CD, ensemble: partant comme AB, est multiple de E, ainsi AB, CD, ensemble, seront multiples de E & F, ensemble, par la seconde Definition de ce liure. Donc s'il y a tant de grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. 2. 6. s.

THEOREME 2. PROP. 2.

Si la premiere est autant multiple de la seconde, que la troisiesme l'est de la quatriesme, & que la cinquiesme soit aussi autant multiple de la seconde, que la sixiesme l'est de la quatriesme, la composee de la premiere & de la cinquiesme, sera autant multiple de la seconde,

que la composee de la troisiesme, & de la sixiesme l'est de la quatriesme.

Soit la premiere grandeur AB, autant multiple de la seconde C, que DE, troisiesme, l'est de F, quatriesme. Derechef, soit BG, cinquiesme, autant multiple de C, seconde, que EH, sixiesme, l'est de F, quatriesme. Ie dis que AG, composee de la premiere AB, & de la cinquiesme BG, est autant multiple de C, deuxiesme, que DH, composee de la troisiesme DE, & de la 6. EH, est multiple de F, 4.

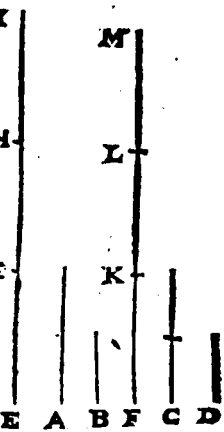


Car puis que AB, & DE, sont equimultiples de C, & de F, il y aura en AB, autant de grandeurs egales à C, qu'il y a en DE, d'egales à F. Semblablemẽt il y aura en BG, autant de grãdeurs egales à C, qu'il y en a en EH, d'egales à F. Si donc l'on adiouste à egales multitudes AB, DE, egales multitudes BG, EH, toutes les multitudes AG, DH, seront egales en nombre: partant C, sera contenu autant de fois en AG, que F, est contenu en DH. Donc AG, (composee de la premiere & cinquiesme) sera autant multiple de C, deuxiesme, que DH, (composee de la troisiesme & sixiesme) l'est de F, quatriesme. Donc si la premiere est autant multiple de la seconde, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 3. PROP. 3.

Si la premiere eſt autant multiple de la ſeconde, comme la troiſieſme l'eſt de la quatrieſme, & l'on prend les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme, en raiſon egale, la grandeur priſe multiple de la premiere, ſera auſſi autant multiple de la ſeconde, que la grandeur priſe multiple de la troiſieſme, le ſera de la quatrieſme.

Soit la premiere grandeur A, autant multiple de B, 2. que C, 3. l'eſt de D, 4. & que l'on prenne E & F, equimultiples de la 1. & de la 3. A, & C: ie dis qu'en raiſon egale E, ſera autant multiple de B, ſeconde, que l'eſt F, de D, quatrieſme : Car puiſque E & F, ſont equimultiples de A & C: ſi l'on diuiſe E, en grandeurs egales à A, comme en EG, GH, HI. Item, F, en grandeurs egales à C, comme en FK, KL, LM: il y aura en E, autant de parties egales à A, qu'il y en a en F. d'egales à D: D autant donc que EG, eſt egale à A, & FK, egale à C: mais A & C, ſont equimultiples de B & D, par l'hypotheſe; EG, & FK, ſeront auſſi



equimultiples des meſmes B & D: ſemblablement GH, KL, & HI, LM, ſeront equimultiples des meſmes B & D: D'autant donc que EG, premiere grandeur, eſt autant multiple de la 2. B, que FK, tierce, eſt multiple de la 4. D. Item, GH, cinquieſme eſt autant multiple de B, 2. que KL, 6. eſt multiple de la 4. D; EH, compoſee de la 1. & de la 5. ſera autant multiple de la 2. B, que FL, compoſee de la 3. & de 6. eſt multiple de la 4. D. Detechef, d'autant que EH, premiere, eſt autant multiple de B, 2. que FL, 3. l'eſt de D, 4. comme nous venons de demonſtrer: mais HI, 5. eſt autant multiple de la 2. B, que LM, 6. l'eſt de D, 4. EI, cõpoſee de la 1. & de 5. ſera autant multiple de la 2. B, que FM, cõpoſee de la 3. & de la 6. l'eſt de D, 4. & ainſi des autres, s'il y a plus de parties en E & F. Si donc la premiere eſt autant multiple de la ſeconde, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

2. 5.

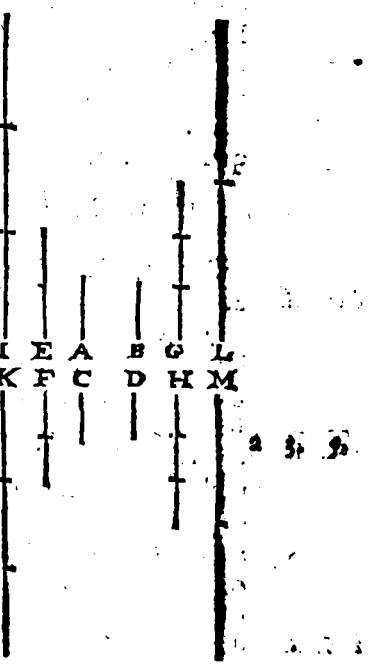
2. 5.

THEOREME 4. PROP. 4.

Si la premiere a meſme raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme, auſſi les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme auront meſme raiſon aux equimultiples de la 2. & de la quatrieſme, ſelon quelque multiplication que ce ſoit, ſi elles ſont priſes ainſi qu'elles s'entre-reſpondent.

Soit la raiſon de A, premiere à B, ſeconde, meſme que celle de C, troiſieſme, à D, quatrieſme: & ſoient priſes E, & F, equimultiples de A, 1. & C, 3.

C, 3. Item, G H, equimultiples de B, 2. & D, 4. selon quelque multiplication que ce soit, que E & F, soient autant multiples de A, & C, que G, & H, le sont de B & D, ou non. Ie dis qu'il y a mesme raison de F, multiple de A, premiere, à G, multiple de B, 2. comme de F, multiple de C, 3. à H, multiple de D, 4.



Car si on constituë derechef E, premiere grandeur, & G, 2. F, 3. & H, 4. & que l'on prenne I & K, quelcõques equimultiples de E & F, 1. & 3. Item, L & M, quelconques equimultiples de G, 2. & H, 4. D'autant que E, 1. est autant multiple de A, 2. que F, 3. l'est de C, 4. & que l'on a pris I & K, equimultiples de E & F, 1. & 3. en raison egale [a] I & K, seront aussi equimultiples de A & C, 2. & 4. Par mesme raison L & M, sont equimultiples de B & D, & d'autant que A, est à B, cõme C à D, & que l'on a pris I & K, equimultiples de A & C, 1. & 3. & L & M, aussi equimultiples de B, 2. & D, 4. [b] si I, multiple de la 1. A, defaut de L, multiple de la 2. B, aussi K, multiple de la 3. C, defaudra de M, multiple de la 4. D: si I, est egale à L, aussi K, sera egale à M: & finalement, si I, excede L, aussi K, excedera M, selon quelconque multi-

b 6. def.

plication qu'elles ſoient priſes. Partant, puis que I & K, ſont equimultiples de E 1. & F, 3. Item, L & M, equimultiples de G, 2. & H, 4. & qu'il eſt demonſtré que ſi I, multiple de E, 1. eſt moindre que L, multiple de G, 2. que K, multiple de F, 3. eſt moindre que M, multiple de H, 4. & ſi I, eſt egale à L, K eſt egale à M, & ſi I, eſt plus grande que L, K eſt plus grande que M, & que cela aduient en
c 6. d. quelque multiplication que ce ſoit, [c] il y aura meſme raiſon de E 1. à G 2. que de F 3. à H 4. donc ſi la 1. a meſme raiſon à la 2. que la 3. à la 4. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

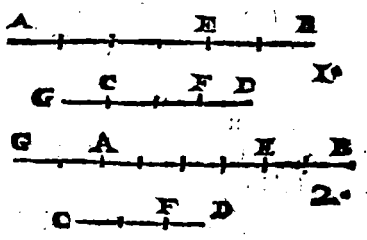
Par cette demõſtration, eſt manifeſte la preuue
d 13. d. de la raiſõ inuerſe expliquee par Euclide, [d] qui eſt, que ſi 4. grandeurs ſont proportionnelles, qu'elles le ſeront auſſi priſes à rebours, ou au contraire: c'eſt à ſçauoir ſi A eſt à B, comme C à D, en raiſon inuerſe, comme B ſera à A, ainſi à C D. Car puis
e 6. d. que cõme A eſt à B, ainſi C, eſt à D: [e] E & F, equimultiples de A & C, 1. & 3. ſeront toutes deux plus grandes, egales ou moindres que G & H, equimultiples de B & D, 2. & 4. en quelque multiplication que ce ſoit. Donc au contraire, G & H, ſeront toutes deux plus petites, egales ou plus grandes que E & F: [f] partant, il y aura meſme raiſon de B à A, que de D à C.
f 6. d.

THEOREME 5. PROP. 5.

Si vne grandeur eſt autant multiple d'vne grandeur, que la retranchee l'eſt

de la retranchee : auſſi le reſte ſera autant multiple du reſte, comme la toute l'eſt de la toute.

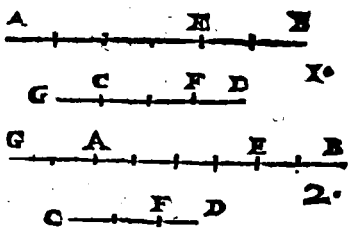
Soit la toute A B, autant multiple de la toute CD, comme la retranchee AE, l'eſt de la retranchee CF. Ie dis que la reſtante EB, eſt autant multiple de la reſtante F D, que la toute AB, l'eſt de la toute C D: car ſoit priſe CG, de laquelle E B,



ſoit autant multiple que AE, l'eſt de CF, ou la toute AB, de la toute CD: d'autant que AE, EB, ſont equimultiples de CF, GC, [g] la toute AB, ſera autant multiple de la toute G F; comme AE, l'eſt de CF: c'eſt à dire les toutes des toutes comme vne ſeule d'vne ſeule: mais AB, eſt poſee autãt multiple de CD, que AE, de CF: donc AB, ſera autant multiple de GF, que de CD: [h] partant GF, CD, ſont egales: donc oſtant la commune CF, demeurera DF, egale à GC: donc EB, ſera autant multiple de FD, que de CG: mais EB, eſt autant multiple de CG, par l'hypotheſe, que AE, l'eſt de CF, c'eſt à dire, que la toute AB, de la toute CD. Partant le reſte EB, ſera autant multiple du reſte FD, que la toute AB, de la toute CD: Ce qui eſt propoſé. g 1. 5. h 6. 5.

Autrement, ſoit la toute AB, autant multiple de la toute CD, que la retranchee AE, de la re-

tranchee CF. Ie dis que le reſte EB, eſt autant multiple du reſte FD, que la toute AB, de la toute C D:



Car ayant pris GA, autant multiple de FD, comme AE, l'eſt de CF, ou la toute AB, de la toute CD: d'autant que AE, GA, ſont equimultiples de CF, FD, [i] la toute GE, ſera autant multiple de la toute CD, comme AE, de CF: mais AB, eſt pareillement auſſi autant multiple de CD, que AE, de CF, par l'hypotheſe. Donc GE, & AB, ſont equimultiples de CD: [k] & partant egales entr'elles. oſtant donc la commune AE, reſteront GA, EB, egales, & partant equimultiples de FD, puiſque GA, eſt priſe autant multiple de FD, que AE, de CF, ou la toute AB, de la toute CD: Donc le reſte EB, ſera autant multiple du reſte FD, que la toute AB, de la toute CD; ce qui eſt propoſé. Donc ſi vne grandeur eſt autant multiple, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

i 17. 5.

k 6. c. 5.

SCHOLIE.

Nous remarquerons icy, que quand Euclide demonſtre en cette 5. Propoſition, que ſi vne grandeur eſt autant multiple d'vne grandeur que la retrãchee de la retrãchee, le reſte eſt autant multiple du reſte, comme la toute l'eſt de la toute, &c. Il demonſtre par ce moyen la meſme choſe de toutes les

especes contenues sous ce gẽre de, Multiple, *comme nous enseigne Arist. au commencemẽt de ses Categ.* Ὅταν ἕτερον καθ' ἑτέρου κατηγορῆται, ὡς καθ' ὑποκειμένου. ὅσα κατὰ τοῦ κατηγορουμένου λέγεται, τοσαῦτα καὶ κατὰ τοῦ ὑποκειμένου ῥηθήσεται.

Quand vne chose est dite d'vne autre, comme de son suiect, tout ce qui peut estre dit de ladite chose, sera pareillement dite de son suiect; comme pour exemple, ce mot Homme, *est dit de* Iean & Pierre, *& de tous les indiuidus de cet' espece, ausquels & le nom & la definition d'homme, appartient: donc, selon ledit Aristote, tout ce qui pourra estre dit de l'homme, sera pareillement dit de Iean, Pierre, & de tous les indiuidus contenus sous cet' espece: par la mesme regle d'Aristote, ce mot* multiple, *est dit de double, triple, quadruple, quintuple, &c. qui sont les especes contennes sous ce genre de* multiple, *donc tout ce qui sera dit de* multiple, *pourra aussi estre dit de double, triple, quadruple, quintuple, &c. D'où il s'ensuit fort bien, que quand Euclide a demonstré que si vne grandeur est autant multiple d'vne grandeur, que la retranchee de la retranchee; le reste est aussi autant multiple du reste, &c.*

Il a pareillement demonstré, que si toute vne grandeur est double, triple, ou quadruple, (qui sont especes de multiple) de toute vne grandeur, & la retranchee, double, triple, ou quadruple de la retranchee, le reste est aussi double, triple, ou quadruple du reste, &c. En quoy Clauius s'est lourdement trompé à la fin des Definitions du premier liure, où il a pris pour notion anticipee, ce qu'Euclide

demonſtre icy, diſant. Si vn tout eſt double d'vn tout, & le retranché double du retranché, le reſte ſera auſſi double du reſte, *ne recognoiſſant que ce qui eſt demonſtré icy de* multiple, *il eſt auſſi demonſtré de double, triple & quadruple, & de tous les autres, contenus ſous ce genre* multiple. *Donc il eſt manifeſte que Clauius s'eſt trop licẽtié, de prendre tant cecy, dont nous parlons, que ſes autres pretendues notions anticipees, qu'il a tirees de ſa forge, toutes leſquelles ſont demonſtrees par apres par Euclide, comme nous auons fait voir cy-deuãt.*

THEOREME 6. PROP. 6.

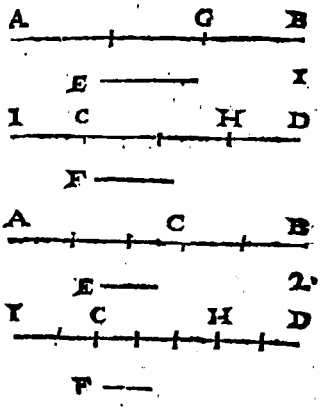
Si deux grandeurs ſont equimultiples de deux autres grandeurs, & d'icelles on retranche quelques equimultiples des meſmes grandeurs, ou les reſtes ſeront egaux aux meſmes, ou equimultiples d'icelles.

Soient les grandeurs AB, CD, equimultiples de E & F, & les retranchees AG, CH, equimultiples des meſmes E, & F. Ie dis que les reſtes GB, HD, ſont egales à E, & F, ou equimultiples d'icelles.

Car ſoit premierement GB, egale à E, ie dis que HD, ſera egale à F: Soit poſee CI, egale à F; d'autant que AG, premiere, eſt autant multiple de E, 2. que CH, 3. l'eſt de F, 4. & que GB, 5. eſt egale à E, & IC, 6. egale à F. 4. AB, compoſée de la 1. & de la 5. ſera autant multiple de E, 2. que IH, compoſee de la 3. & 6. l'eſt de F, 4. mais CD, eſt autant

1. 2. 5.

multiple de F, par l'hypotheſe, que AB, l'eſt de E: donc HI, & CD, ſont equimultiples de F: [m] partant egales entr'elles: donc oſtant la commune CH, demeureront CI, & HD, egales. Or puiſque CI, eſt poſee egale à F, HD, ſera pareillement egale à F: ce qui eſt propoſé. Semblablement, nous demonſtrerons que ſi GB, eſt multiple de E, que HD, ſera autant multiple de F, en poſant IC, autant multiple de F, que GB, l'eſt de E, &c.



m 6. e. ſ.

Autrement: d'autant que AB, CD, ſont equimultiples de E, & F, il y aura en AB, autant de grandeurs egales à E, qu'en CD: d'egales à F: Derechef, d'autant que AG, CH, ſont equimultiples des meſmes E, F, [n] il y aura apareillement en AG, autant de grandeurs egales à E, qu'il y en a en CH, d'egales à F.

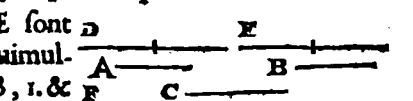
n 1. & 2. def.

Si donc d'egales multitudes AB, CD, l'on oſte egales multitudes AG, CH, demeurerõt les multitudes GB, HD, egales. Donc GB, contiendra autant de fois E, que HD, contiendra F, ſi vne fois ſeulement GB, HD, ſeront egales à E, F, ſi plus d'vne fois equimultiples. Ce qui eſtoit propoſé.

THEOREME 7. PROPO. 7.

Les grandeurs egales ont meſme raiſon à vne meſme grandeur, & vne meſme grandeur a meſme raiſon aux egales.

Soient deux grandeurs egales entr'-elles A & B, & ſoit quelconque tierce grandeur C. Ie dis que A & B, ont meſme raiſon à C, & ſemblablement que C, a meſme raiſon à A & B : Car ſoient priſes D & E, equimultiples des egales A, B ° icelles D, E, ſeront egales entr'elles. Derechef, ſoit priſe F, multiple quelconque de C: D'autant donc que D & E ſont egales. & equimultiples de A, B, 1. & 3. l'vne & l'autre



ſera plus petite que F, ou egale, ou plus grande, ſelon quelconque multiplication qu'elles ſoient priſes.

¶ 6. d. ſ.

Donc, puis que D & E. equimultiples de la 1. A, & de la 3. B, ſont toutes deux plus grandes que F, multiple de la 2. & de la 4. (car C, eſt poſée comme pour deux grandeurs) ou egales, ou moindres ; P il y aura meſme raiſon de A, 1. à C, 2. que de B 3. à C 4.

P 6. d. ſ.

En la meſme maniere nous demonſtrerons que F, eſt moindre que chacune des grandeurs D, E, ou egale, ou plus grande. Donc puis que F, multiple de la 1. & de la 3. C, eſt plus petite que chacune D & E, equimultiples de la 2. & 4. A & B, ou egale, ou plus grande, il y aura pareillement

meſme raiſon de la 1. C, à la 2. A, que de la 3. C, à la 4. B. Ce qui eſt propoſé.

L'on pouuoit monſtrer ceſte 2. partie plus briefuement par la raiſon inuerſe: car ayant deſia eſté demonſtré qu'il y a meſme raiſon de A à C; que de B à C, en changeant, il y aura meſme raiſon de C à A, que de C à B. Donc les grandeurs egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. Coroll. 4. 5.

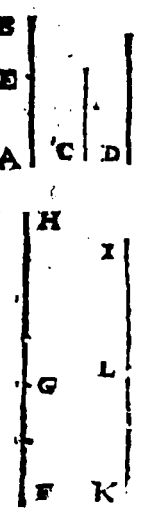
THEOREME 8. PROP. 8.

Des grandeurs inegales, la plus grande a plus grande raiſon, à vne meſme grandeur que la plus petite. Et vne meſme grandeur a plus grande raiſon à la plus petite grandeur qu'à la plus grande.

Soient les grandeurs inegales: AB, plus grandes & C, plus petite, & ſoit vne 3. grandeur quelconque D. Ie dis que AB, a plus grande raiſon à D, que C, à la meſme D: & au contraire, que D, a plus grande raiſon à C, que à AB: Car de la plus grande AB, ſoit retranchee AE, egale à C, & ſoit poſee AB, 1. grandeur C, 3. & D 2. & 4. puis ſoiét priſes HG, & GF, equimultiples de AE, & EB, en ſorte que GH, multiple de AE, ſoit plus grande que D, & FG, multiple de EB, ne ſoit moindre que la meſme D: mais auſſi plus grande.

Or d'autant que HG, GF, ſont equimultiples de AE, EB, la toute HF, ſera autant multiple de la toute AB, que GH, l'eſt de AE, c'eſt à dire de C, egale à AE. Pareillement, ſoit priſe IK, multiple 12. 5.

de D, 2. & 4. en sorte qu'elle soit plus grande H G : mais moindre que la toute H F. Ce qui sera facile ; car puis que D, est moindre que F G, & aussi que GH, il ne faudra qu'adiouster D seulemẽt, tant de fois que son produict I K, excede H G, par ce moyen I K, sera moindre que la toute H F, & plus grande que GH : car ayant retranché K L, egale à D, elle sera moindre que F G, (F G, estant prise plus grãde que D) & le reste L I, moindre que G H, ou egale, (estant icelle G H, posee plus grande que D) & D, adioustee tant de fois seulement, que son produict I K, excede G H, excede G H. Donc I K, sera plus grande que GH, & moindre que la toute H F. Partant, puis que F H, H G, sont equimultiples de A B, premiere, & C, 3. & I K, multiple de D, posee pour 2. & 4. mais F H, multiple de la 1. est plus grande que I K, multiple de la 2. & H G, multiple de la 3. n'est plus grande que I K, multiple de la 4. mais moindre par l'hypothese (car I K, multiple de D, est prise plus grande que H G, (s'il y aura plus grande raison de A B, 1. à D, 2. que de C, 3. à D, 4.



Secondement, d'autant que I K, multiple de D, 1. (soit prise D, pour 1. & 3. & C, 2 & A B, 4.) est plus grande que H G, multiple de C, 2 mais I K, multiple de D, 3. n'est plus grande que I H, multiple de A B, 4. mais moindre ; F H, estant plus grande que I K, comme il est monstré, il y aura plus grande raison de D, 1. à C, 2. que de D, 3. à A B,

f8. d.

4 ce qui eſtoit propoſé. Donc les grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 9. PROP. 9.

Les grandeurs qui ont meſme raiſon à vne meſme grandeur, ſont egales entr'elles: Et celles-là auſquelles vne meſme grandeur a meſme raiſon, ſont auſſi egales entr'elles.

Premierement, que A & B, ayent meſme raiſon à C. Ie dis qu'elles ſont egales entr'elles.

Autrement, elles ſeroient inegales, tellement que l'vne ſeroit plus grande. Soit donc A, plus grande, & B moindre, s'il eſt poſſible: donc[t] il y aura plus grande raiſon de A, plus grande à C, que de B, plus petite à la meſme C, ce qui eſt contre l'hypotheſe: donc A & B, ne ſont inegales, mais egales. t 8. 5.

Secondement, que C, ait meſme raiſon à A, que à B. Ie dis derechef que A B ſont egles entr'elles: car ſi l'vne eſtoit plus grande, ſçauoir A & B, moindre; C[u] auroit plus grande raiſon à B, plus petite qu'à A plus grande, ce qui eſt contre l'hypotheſe: donc A ne ſera plus grande que B, ains egale. Donc les grandeurs qui ont, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. u 8. 5.



THEOREME 10. PROPOSIT. 10.

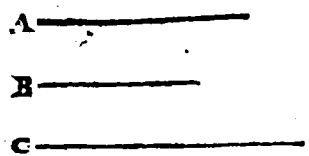
Des grandeurs qui ont raiſon à vne meſme grandeur, celle-là qui a plus grande raiſon, eſt la plus grande, mais celle-là, à laquelle vne meſme grandeur a plus grande raiſon, eſt la plus petite,

Premierement, que A ait plus grande raiſon à C, que B à la meſme C. Ie dis que A eſt plus grande que B: car ſi A eſtoit egale à B, icelles [c] A & B, auroient meſme raiſon à C. Et ſi A eſtoit plus petite que B, [d] la plus grande B, auroit plus grande raiſon à C, que la plus petite A, ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc A n'eſt egale à B, ny plus petite, mais plus grande.

c 7. 5.

d 8. 5.

Secondement, que C, ait plus grande raiſon à B qu'à A. Ie dis que B eſt moindre que A; car B ne



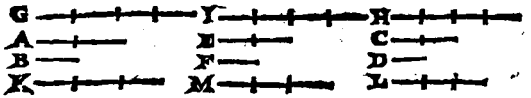
c 7. 5. 8. 5. ſera egale à A [c] autrement C auroit meſme raiſon à A & B, ce qui eſt contre l'hypotheſe: B ne ſera auſſi plus grande que A, d'autant que C auroit plus grãde raiſon à la moindre A qu'à B plus grande: ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc B eſt moindre que A, ce qui eſt propoſé. Partant des grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME II. PROP. II.

Les *raiſons* qui ſont de meſme, à vne *meſme* raiſon, ſont auſſi de meſme entr'elles.

Soit la raiſon de A à B, comme celle de E à F, & comme E à F, ainſi C à D. Ie dis que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D.

Car ſoient priſes les equimultiples quelconques de toutes les antecedentes A, E, C, leſquelles ſoient G, I, H : ſemblablement ſoient priſes



K, M, L, equimultiples quelconques des conſequentes B, F, D: D'autant que A 1. eſt à B 2. comme E 3. à F 4. [f] ſi G multiple de A 1. defaut de k multiple de B 2. I, multiple de E 3. defaudra auſſi de M, multiple de F 4. & ſi G eſt egale à k, I ſera egale à M; & ſi G eſt plus grande que K, I ſera plus grande que M. [g] Mais (comme il ſera demonſtré en la meſme maniere) ſi I eſt moindre que M, ou egale, ou plus grande, pareillement H ſera moindre que L, ou egale, ou plus grande, d'autant que par l'hypotheſe il y a meſme raiſon de E 1. à F 2. que de C 3. à D 4. Parquoy ſi G multiple de A 1. eſt plus petite que k, multiple de B 2. H multiple de C 3. ſera plus petite que L, multiple

[f] 6. d. 5.

[g] 6. d. 5.

de D 4. & ſi G eſt egale ou plus grande que K, auſſi H ſera egale ou plus grande que L, & ſera demonſtré qu'il en aduiendra de meſme, en quelconques autres equimultiples: [x] partant il y aura meſme raiſon de A premiere, à B 2. que de C 3. à D 4. Donc les raiſons qui ſont de meſme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

x 6. d. 5.

SCHOLIE.

En la meſme maniere, les raiſons qui ſont de meſme à d'autres, ſont auſſi de meſme entr'elles, comme ſi A eſt à B, comme C à D, & que E ſoit à F, comme A eſt à B, & G à H, comme C à D, pareillement, comme E ſera à F, ainſi G à H.

Car d'autant que les raiſons de E à F, & C à D, ſont de meſme à la raiſon de A à B, [y] *comme E, ſera à F, ainſi C à D: derechef, d'autant que les raiſons de E à F, & G à H, ſont de meſme à la raiſon de C, à D,* [z] *pareillemnt comme E ſera à F, ainſi G à H.*

y 11. 5.

z 11. 5.

A, 3. B, 2. C, 6. D, 4.
E, 9. F. 6. G, 12. H, 8.

Derechef, ſi les raiſons de A à B, C à D, & de E à F, ſont de meſme entr'elles: & que comme A eſt à B, ainſi G eſt à H, & comme C à D, ainſi I à K, & comme E à à F, ainſi L à M, les raiſons de G à H, I à K, & L à M, ſeront pareillement de meſme entr'elles: car comme nous venons de demonſtrer en ces dernieres raiſons, comme G eſt à H, ainſi I eſt à K.

A, 3. B, 2. C, 6. D. 4. E, 9. F, 6.
G, 12. H, 8. I, 18. K, 12. L, 30. M, 20.

D'autant que ces proportions ſont ſemblables aux raiſons de A & B, & de C à D, en la meſme maniere comme F ſera à K; ainſi L ſera à M, d'autant que les raiſons de I à K, & L, à M, ſont de meſmes raiſons de G, à D, & E à F, leſquelles ſont egales: ſemblablement, comme G à H, ainſi L à M, puiſque ces raiſons ſont de meſme aux raiſons de A à B, & E à F, leſquelles ſont poſées egales: & eſt la meſme raiſon de pluſieurs.

THEOREME 12. PROP. 12.

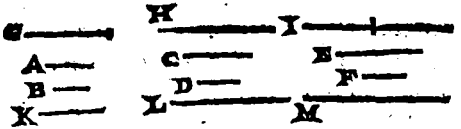
Si tant de grandeurs que l'on voudra ſont proportionelles, comme l'vne des antecedentes ſera à l'vne des conſequentes; ainſi toutes les antecedentes ſeront à toutes les conſequentes.

Ce qui a eſté demonſtré en la premiere Propoſition, de la proportion multiple: il eſt icy demonſtré de tout genre de proportion, & meſme de l'irrationelle.

Soient donc tant de grandeurs que l'on voudra A, B, C, D, E, F, proportionelles, c'eſt à dire, ſoit A à B, comme C à D, & comme G à D, ainſi E à F. Ie dis que comme vne des antecedentes eſt à vne des conſequentes, ſçauoir comme A à B, ainſi toutes les antecedentes enſemble A, C, E, ſont à toutes les conſequentes enſemble BDF.

Car ſoient priſes G, H, I, equimultiples des antecedentes A, C, B, & K, L, M, equimultiples des conſequentes B, D, F, [a] les toutes G, H, I, [a] 1. 5.

enſemble, ſeront autant multiples des toutes A, CE, enſemble qu'vne ſeule l'eſt d'vne ſeule: ſçauoir comme G de A: & les toutes KLM, enſem-



ble, ſeront autãt multiples des toutes B, D, F, enſemble qu'vne ſeule l'eſt d'vne ſeule, ſçauoir comme K de B: mais d'autant que par l'hypotheſe, il y a meſme raiſon de A 1. à B 2. que de C 3. à D 4. & comme vn autre E 3. à F 4. il aduiendra que ſi G multiple de A 1. defaut de K, multiple de B 2. pareillement, H multiple de C 3. defaudra de L multiple de D 4. & I de M: Et ſi G eſt egale à K, ou plus grande, pareillement H ſera egale à L, & I à M, ou plus grande: & partant ſi G, eſt plus petite ou egale, ou plus grande que K, les toutes G, H, I, enſemble, ſeront plus petites que les toutes K, L, M, enſemble, ou egales ou plus grandes. Parquoy comme A 1. eſt à B 2. ainſi A, C, E, 3. ſera à B, D, F, 4. donc s'il y a tant de grandeurs proportionelles que l'on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſter.

6. d. 5.

b 6. d. 5.

THEOREME 13. PROP. 13.

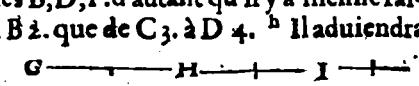
Si la premiere a meſme raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme; Mais la troiſieſme a plus grande raiſon à la quatrieſme, que la cinquieſme à la ſixieſme: auſſi la premiere aura plus

grande

grande raiſon à la ſeconde, que la cinquieſme à la ſixieſme.

Soit la raiſon de A 1. à B 2. comme C 3. à D 4. Mais ſoit la raiſon de C 3. à D 4. plus grande que celle de E 5. à F 6. Ie dis que la raiſon de A 1. à B 2. eſt plus grande que celle de E 5. à F 6.

Car ſoient priſes G, H, I, equimultiples des antecedentes A, C, E; & K, L, M, equimultiples des conſequentes B, D, F: d'autant qu'il y a meſme raiſon de A 1. à B 2. que de C 3. à D 4. [h] Il aduiendra que ſi G multiple de A 1. excede K, multiple de B 2. que H, multiple de C 3. excedera L, multiple de D 4. &c. Mais quād H excede L, [i] il n'eſt neceſſaire que I excede M, mais ſera quelquefois egale ou plus petite: d'autant qu'il y a plus grande raiſon de C 1. à D 2. que de E 3. à F 4. Donc ſi G excede K, neceſſairement I n'excedera M: [k] il y aura donc plus grande raiſon de A 1. à B 2. que de E 5. à F 6. Partant, ſi la premiere a meſme raiſon à la 2. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



h 6. d. 5.

i 8. d. 5.

k 8. d. 5.

SCHOLIE.

Mais ſi la raiſon de C 3. à D 4. eſt moindre que celle de E 5. à F 6. Il y aura pareillement moindre raiſon de A 1. à B 2. que de E 5. à F 6. car ſi la raiſon de C à D, eſt moindre que celle de E à F, c'eſt à dire, la raiſon de E 1. à F 2. eſt plus grāde que celle de

18.d. 5. C 3. à D 4. [l] il aduiendra que ſi I excede M, il ne ſera neceſſaire que H excede L, mais quelquefois ſera plus petite ou egale: [m] mais ſi H defaut de L, ou luy eſt egale, auſſi G defaudra de K, ou luy ſera egale: d'autant que la raiſon de C 1. eſt poſee à D 2. meſme que de A 3. à B 4. partant ſi I excede M, ne-

m 8. d. 5. ceſſairement G n'excedera K, [n] & par ainſi il y aura plus grande raiſon de E 1. à F 2. que de A 3. à B 4. c'eſt à dire, la raiſon de A à B, eſt moindre que celle de E à F, ce qui eſt propoſé.

En la meſme maniere, ſi la 1. a plus grande raiſon à la ſeconde, que la 3. à la 4. & que la 3. ait plus grande raiſon à la 4. que la 5. à la 6. pareillement, la 1. aura plus grande raiſon à la ſeconde, que la 5. à la 6.

Mais ſi la 1. a moindre raiſon à la 2. que la 3. à la 4. mais que la 3. ait moindre raiſon à la 4. que la 5. à la 6. pareillement la 1. aura beaucoup moindre raiſon à la 2. que la 5. à la 6.

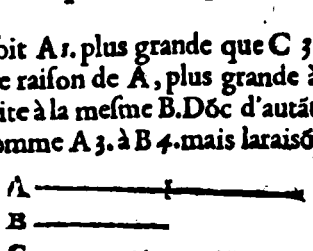
THEOREME 14. PROPO. 14.

Si la premiere a meſme raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme, & que la premiere ſoit plus grande que la troiſieſme, la ſeconde ſera auſſi plus grande que la quatrieſme: Et ſi la premiere eſt egale à la troiſieſme, auſſi la ſeconde ſera egale à la quatrieſme; & ſi plus petite, plus petite.

Soit A 1. grandeur, à B 2. comme C 3. à D 4. Ie dis que ſi A 1. eſt plus grande que C 3. que B 2. ſe-

ra auſſi plus grande que D 4. Et que ſi A 1. eſt egale à C 3. que B 2. ſera egale à D 4. Finalement, ſi A 1. eſt plus petite que C 3. que B 2. ſera plus petite que D 4.

Premierement, ſoit A 1. plus grande que C 3. [o] il y aura plus grande raiſon de A, plus grande à B, que de C, plus petite à la meſme B. Dõc d'autãt que C 1. eſt à D 2. comme A 3. à B 4. mais la raiſõ de A 3. à B 4. eſt plus grande que la raiſon de C 5. à B 6. comme nous auons monſtré, [p] il y aura donc plus grande raiſon de C 1. à B 2. que de C 5. à B 6. partant D ſera plus petite que B: donc B ſera plus grãde que D : ce qui eſtoit propoſé.



o 8. 5. p 13. 5.

Secondement, ſoit A egale à C, [q] il y aura meſme raiſon de A à B, que de C à B: d'autant donc que les raiſons de C à D, & de C à B, ſont de meſme à la raiſon de A à à B, [r] les raiſons de C à D, & de C à B, ſeront de meſme entr'elles : partant B & D ſeront egales. Ce qui eſt propoſé.

q 7. 5. r 11. 5.

Finalement, ſoit A plus petite que C, [t] il y aura plus grande raiſon de la plus grande C à B, que de la plus petite A à la meſme B : D'autant donc que C 1. eſt à D 2. comme A 3. à B 4. Mais la raiſon de A 3. à B 4. eſt plus petite que celle de C 5. à B 6. [t] Il y aura pareillement moindre raiſon de C 1. à D 2. que de C 5. à B 6. partant, B ſera plus petite que

t 8. 5. t 13. 5.

v 10. 5. D. Ce qui eſt propoſé: v donc ſi la 1. a meſme raiſon à la 2. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Que ſi la 2. eſt plus grande egale, ou moindre que la 4. pareillement ſelon la meſme raiſon, la 1. ſera plus grande, egale ou moindre que la 3. Car ſoit premierement B plus grande que D, comme en la 1. figure. Je dis que A eſt plus grande que C: car puis que B eſt plus grande que D, x *il y aura plus grande raiſon de C à D, que de C à B. Donc d'autãt que A 1. eſt à B 2. comme C 3. eſt à D 4. Mais la raiſon de C 3. à D 4. eſt monſtree plus grande que celle de C 5. à B 6.* y *pareillement la raiſon de A 1. à B 2. ſera plus grande que celle de C 5. à B 6.* z *Partant A ſera plus grande que C. Ce qui eſt propoſé.*

x 8. 5.

y 13. 5.

z 10. 5.

Secondement, ſoit B egale à D (comme en la 2. figure.) Ie dis que A eſt egale à C: car puis que B eſt egale à D, a *C ſera à B, comme à D: mais A eſt pareillement à B, comme C à D. Donc comme A ſera à B, ainſi C ſera à B: & partant A ſera egale à C. Ce qui eſt propoſé.*

a 11. 5.

Tiercement, ſoit B moindre que D, comme en la 3. figure. Ie dis que A eſt moindre que C; car puis que B eſt moindre que D, b *il y aura moindre raiſon de C à D, que C à B: D'autant dõc que A 1. eſt à B 2. ainſi C 3. eſt à D 4. Mais la raiſon de C 3. à D 4. eſt monſtree moindre que celle de C 5. à B 6.* c *Pareillement la raiſon de A 1. à B 2. ſera moindre que celle de C cinquieſme, à B 6.* d *Donc C ſera plus grande que A: & partant A plus petite que C. Ce qui eſt propoſé.*

b 8. 5.

c 13. 5.

d 10. 5.

Cette demonſtration ſe peut faire plus briefue : ſi B eſt plus grande que D, & A ſoit dite non plus grande que C, mais moindre ou egale, ° B ſera pareillement plus petite que D, ou egale, ce qui eſt contre l'hypotheſe, & eſt la meſme raiſon en tout autre cas. °14. 5.

Ou ainſi : Si A eſt à B, comme C à D, en changeant B, ſera à A, comme D à C. Donc ſi B eſt plus grande ou egale, ou moindre que D. Pareillement A ſera plus grande, ou moindre ou egale à C. f 14. 5.

Or Euclide n'a pas demonſtré, ſi la 1. eſt plus grãde ou egale, ou moindre, que la 2. que la 3. ſera plus grande, ou egale, ou moindre que la 4. (duquel moyen d'argumenter vſent toutefois pluſieurs Geometres, tant des anciens que des modernes.) D'autant que cela eſt manifeſte, à cauſe de la ſimilitude des raiſons.

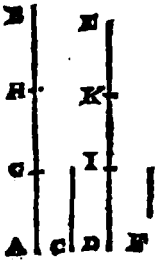
De là s'enſuit, que ſi l'vne & l'autre eſt raiſon de plus grande inegalité, que l'vne & l'autre grandeur antecedente, c'eſt à dire, la 1. & la 3. ſera plus grande que l'vne & l'autre grandeur conſequente, c'eſt à dire, la 2. & la 4. Mais ſi l'vne & l'autre eſt raiſon de moindre inegalité, l'vne & l'autre grandeur antecedente ſera plus petite que l'vne & l'autre conſequente, & ſi d'egalité, ſera egale.

Pour exemple; ſi comme A eſt à B, ainſi C à D, l'vne & l'autre raiſon ſera de plus grande inegalité ou d'egalité, ou de moindre inegalité. Partant ſi A 1. eſt plus grande que B 2. C 3. ſera plus grande que D 4. & ſi egale, egale: & ſi moindre, moindre. Ce qui eſt propoſé.

THEOREME 15. PROP. 15.

Les parties ſont entr'elles, comme ſont leurs equimultiples entr'elles, ſi elles ſont priſes comme elles s'entre-reſpondent.

Soient AB, & DE, equimultiples des grandeurs C & F. Ie dis que comme C eſt à F, ainſi AB, eſt DE : Car puis que AB, eſt autant multiple de C, que DE, l'eſt de F, la grandeur C, ſera autant de fois contenuë en AB, que F eſt contenuë de fois en DE.



Soit donc diuiſee AB, ſelon les parties AG, GH, HB, chacune egale à C, & DE, ſelon les parties DI, IK, KE, chacune egale à F. Et d'autant que AG, & C, ſont egales, & DI, & F, auſſi egales, [g] AG, ſera à DI, comme C, ſera à F, par meſme raiſon GH, ſera à IK, & HB, à KE, comme C à F : Et partant AG, GH, HB, auront meſme raiſon à DI, Ik, kE. Parquoy, comme AG, ſera à DI, c'eſt à dire, comme C à F, [h] ainſi AB, ſera à DE, à ſçauoir toutes les antecedentes enſemble AG, GH, HB à toutes les conſequentes enſemble DI, Ik, kE: Ce qui eſt propoſé. Donc les parties entr'elles ſont, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

g 7. 5.

h 12. 5.

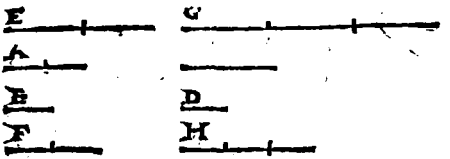
SCHOLIE.

Henrion, qui a copié le liure du Sieur Donnot, n'ayant point trouué ces mots traduicts, (λαμβάνεται κατ' ἄλλα) *c'eſt à dire, eſtans priſes comme elles s'entre-reſpondent, les a laiſſez, ſe contentant de mettre ce qu'il a trouué traduict: ce qu'il ne deuoit faire neantmoins, s'il l'euſt peu entendre, puis qu'Euclide ne les a obmis, comme il appert par ſon texte:* τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, λαμβανόμενα κατάλληλα? *C'eſt à dire, les parties ou grandeurs, ont meſme raiſon que leurs equimultiples, ſi elles ſont priſes comme elles s'entre-reſpondent. Or cecy defaillant, eſtans priſes comme, etc. l'on pourroit inferer que, comme AB, eſt à DE, ainſi F, ſeroit à C; ou comme C à F, ainſi DE, à AB: ce qui eſt manifeſtement faux, &c. Ce que ledict Copiſte a toutefois corrigé à ſa derniere Edition 1630. mais il n'a pas corrigé ſes autres fautes, qui ne luy auoient eſté notées, comme en eſtant incapable, d'autant qu'il ne copie que les œuures d'autruy, & les faict imprimer en ſon nom pour les vendre.*

THEOREME 16. PROP. 16.

Si quatre grandeurs ſont proportionelles; elles ſeront auſsi alternatiuement proportionelles.

Car ſoit A, à B, comme C eſt à D. Ie dis qu'alternatiuement, ou en permutant, A ſera à C, comme B à D.



Soient prises E & F, equimultiples de A & B, 1. & 2. Item, G & H, equimultiples de C 3. & D 4. E sera à F, comme A est à B : [i] Puis que E, F, sont equimultiples de A, & par la mesme raison G sera à H, comme C à D.

i 15. 5.

Or puis que les raisons de E à F, & C à D, sont de mesme à la raison de A à B : [k] elles seront de mesme entr'elles. Derechef, d'autant que les raisons de E à F, & G à H, sont de mesme à la raison de C à D : [l] elles seront aussi de mesme entre elles: c'est à dire, comme E 1. sera à F 2. ainsi G 3. à H 4. [m] Partant si E 1. est plus grande que G troisiesme, F seconde sera plus grande que H 4. & si E est egale ou plus petite que G, aussi F sera egale ou plus petite que H, en quelconque multiplication que soient prises E, F, & GH. [n] Donc A 1. sera à C 2, comme B 3. à D 4. puis que E, F, equimultiples de la 1. & 3. A & B, sont toutes 2. plus grandes que G & H, equimultiples de la 2. & 4. C, D, ou toutes 2. egales, ou toutes 2. plus petites, &c. Ce qui est proposé. Partant si quatre grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

k 11. 5.

l 11. 5.

m 14. 5.

n 6. d. 5.

SCHOLIE.

Or cette demonstration a lieu seulement, quand les 4. grandeurs sont de mesme genre. Car si A, B, estoient d'vn genre, & les 2. autres C, D, d'vn au-

tre; Pareillement les multiples E, F, seroient d'vn genre: sçauoir, de celuy de A, B: et les multiples G, H, d'vn autre: sçauoir de celuy de C, D. Partant, E ne pourroit estre dite plus grande que G, ou egale, ou moindre: parquoy l'on ne concluroit rien de la 6. definition de ce liure. Donc la raison premiere pourra seulement auoir lieu, quand les 4. grandeurs seront de mesme genre.

THEOREME 17. PROP. 17.

Si les grandeurs composees sont proportionelles, aussi estans diuisees elles seront proportionelles.

Soient les grandeurs composees A B, C B, & D E, F E, proportionelles, c'est à dire, soit A B, à C B, comme D E, à F E. Ie dis qu'icelles estans diuisees, seront aussi proportionelles, c'est à dire, comme A C, sera à C B, ainsi D F, à F E.

Car soient prises les equimultiples de A C, C B, D F, F E, de mesme ordre, à sçauoir G H, H I, K L, L M. ° Et G I, sera autant multiple de A B, comme G H, l'est de A C: c'est à dire, comme k L, est multiple de D F: ᵖ ainsi k M, est pareillement multiple de D E. Donc G I, K M, sont equimultiples de A B, D E. Derechef, soient prises I N, M O, equimultiples de C B, F E: D'autãt que H I, 1. est autant multiple de C B, 2. que L M, 3. de F E, 4. Item, I N, 5. autant multiple de C B, 2. que M O, 6. l'est de F E, 4. H N, composee de la 1. & 5 sera autant multiple de la 2. C B, que L O, composee de la 3. & 6. l'est de F E, 4. Partant, puis que A B, 1. est à C B, 2. comme

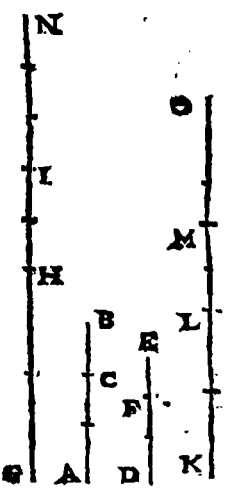
° 1. 5.

ᵖ 1. 5.

DE,3.à FE,4. & que l'on a pris les equimultiples de la 1.& de la 3. AB, DE : ſçavoir GI,kM,ſemblablement de la 2. & 4.CB,FE, les equimultiples HN,LO. q Il arriuera que ſi GI, multiple de la 1. AB, defaut de HN,multiple de la 2. CB,auſſi k M, multiple de la 3. DE, defaudra de LO,multiple de la 4. FE ; & ſi egale,egale: & ſi plus grande, plus grande. Que ſi tant GI:defaut de HN, que kM, de LO, ayant oſté les communes HI,LM,pareillement GH,defaudra de IN, & k L, de MO, & ſi GI,eſt egale à HN, & kM, à LO, ayant oſté les communes HI,LM;GH, ſera egale à IN,& kL, à MO : Et ſi finalement GI, excede HN,& kM,LO,oſtant les communes HI, LM, GH, excedera pareillement IN &,kL,MO ; Partant, puis que GH,KL,ont eſté priſes equimultiples de AC, 1.& de DF,3. ſemblablement IN, MO, equimultiples de CB, 2. & FE,4. Et il eſt monſtré en quelconque multiplication que les equimultiples ſoient priſes,que les equimultiples de la 1.& 3.defaillent enſemble des equimultiples de la 2.& 4.ou enſemble ſont egales,ou excedent: r Comme AC,1.à CB. 2.DF 3.ſera à FE, 4.Ce qui eſt propoſé.Donc ſi les grandeurs compoſees,&c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

q 6. d. 5.

r 6. d. 5.



SCHOLIE.

De ces choſes nous demonſtrerons facilement ce moyen d'argumenter, lequel nous auons appellé Diuiſion de raiſon conuerſe, à la 15. Definition: C'eſt à dire, ſi comme AB, eſt à CB, ainſi DE, à FE, que pareillement comme CB, ſera à AC, ainſi FE, ſera à DF: ce qui eſt euident. Car d'autant que comme AB, *eſt à* CB, *ainſi* DE, *ſera à* FE. *Donc en changeant comme* CB, *ſera à* AC, *ainſi* FE, *ſera à* DF. *Ce qui eſt propoſé: Voyez la figure cy-apres, en la page 396.* 17. 5.

L'on demonſtrera auſſi facilement ce moyen d'argumẽter, qu'à la 15. Definition nous auons appellé contraire Diuiſion de raiſon; & auquel la grandeur antecedente eſt plus petite que la conſequente, & non plus grande, comme en la diuiſion de raiſon qu'Euclide a definy, comme celle que nous auons prochainement demonſtré.

Car ſoit comme AC, *à* AB, *ainſi* DF, *à* DE. *Ie dis que par contraire diuiſion de raiſon, que* AC, *ſera pareillement à* CB, *comme* DF, *eſt à* FE. *Car d'autant que comme* AC, *eſt à* AB, *ainſi* DF, *eſt à* DE. *Ie dis pareillement, que par diuiſion de raiſon contraire, comme* AC, *eſt à* CB, *ainſi* DF, *eſt à* FE. *Car d'autant que comme* AC, *eſt à* AB, *ainſi* DF, *à* DE, *en changeãt cõme* AB, *ſera à* AC, *ainſi* DE *ſera à* DF. *Dõc en diuiſant cõme* CB, *ſera à* AC, *ainſi* FE, *ſera à* DF: *Et partant, en changeant derechef, comme* AC, *ſera à* CB, *ainſi* DF *ſera à* FE. *Ce qui eſt propoſé.* 17. 5.

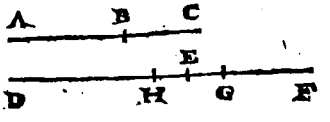
THEOREME 18. PROP. 18.

Si les grandeurs diuiſees ſont proportionelles, eſtans compoſees, elles ſeront auſsi proportionelles.

Soient les grandeurs diuiſees AB, BC; DE, EF, proportionelles; c'eſt à dire, comme AB, eſt à BC: ainſi DE, ſoit à EF. Ie dis, qu'eſtans compoſees, elles ſont proportionelles, c'eſt à dire, que comme AC, eſt à BC: ainſi DF, eſt à EF.

Car ſi AC n'eſt pas à BC, comme DF eſt à EF, DF, aura meſme raiſon à quelque autre grandeur moindre que EF, ou plus grande que la meſme EF, que AC à BC.

Premierement, que DF ait meſme raiſon à GF, moindre que EF: que AC, à BC, s'il ſe peut faire.



17. 5. D'autãt que cõme AC, à BC, ainſi de DF à GF; en diuiſant comme AB, eſt à BC: ainſi DG ſera à GF: Mais comme AB, à BC, ainſi DE, à EF, par

11. 5. l'hypotheſe. Donc comme DG 1. à GF 2. ainſi DE 3. à EF 4. Et puis que DG 1. eſt plus grande que DE 3. Pareillement GF 2. ſera plus grande que EF 4. la partie que ſon tout: Ce qui eſt impoſſible

Secondement, que DF, ait meſme raiſon à HF, plus grande que EF, s'il ſe peut faire, que AC, à

BC. D'autant que AC eſt à BC, comme DF à HF, en diuiſant comme AB ſera à BC: ainſi DH à HF. Mais comme AB, à BC, ainſi eſt DE, à EF, par l'hypotheſe. Donc comme DH premiere, à HF 2. *ainſi* DE 3. à EF 4. Et puis DH 1. eſt plus petite que DE 3. pareillement HF 2. ſera moindre que EF 4. le tout que ſa partie, ce qui eſt abſurde. Donc DF, n'aura pas meſme raiſon à GE, moindre que EF, ou à HF, plus grande que AC, à BC. Donc DF, ſera à EF, comme AC, à BC: Ce qui eſt propoſé; partant ſi les grandeurs diuiſees, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. 17. 5. 11. 5.

SCHOLIE.

De cette demonſtration, nous demonſtrerons ces deux moyens d'argumenter, que nous auons deſcrits à la 14. Definit. Nous auons appellé le premier, compoſition de raiſon conuerſe, qui eſt tel. Soit comme AC, *à* CB, *ainſi* DF, *à* FE. *Je dis, par compoſition de raiſon conuerſe, que comme* AB, *eſt à* AC, *ainſi* DE, *eſt à* DF.

Car d'autant que comme AC, *eſt à* CB, *ainſi* DF, *à* EF, *en chãgeant, comme* BC, *ſera à* CA, *ainſi* FE, *ſera à* DF. *Donc en compoſant, comme* AB, *ſera à* CA: *ainſi* DE, *ſera à* DF. *Ce qui eſt propoſé.* 18. 5.



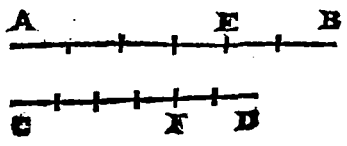
Le moyen d'argumenter, que nous auons appellé compoſition de raiſon contraire, eſt tel. Soit derechef comme AC, *à* CB, *ainſi* DF, *à* FE. *Je dis par compoſition de raiſon contraire, que comme* AC, *eſt à* AB,

ainsi DF, *à* DE. *Car d'autãt que comme* AC, *est à* CE, *ainsi* DF, *à* FE, *en changeant, comme* BC, *à* AC, *ainsi* EF, *à* DF. *Donc en composant, comme* AB, *à* AC, *ainsi* DE, *à* DF. *Et partant, en changeant derechef, comme* AC, *à* AB, *ainsi* DF, *à* DE. *Ce qui est proposé.*

THEOREME 19. PROP. 19.

Si comme le tout est au tout, ainsi le retranché au retranché; aussi le reste sera au reste, comme le tout au tout.

Soit la toute AB, à la toute CD, comme la retranchee AE, à la retranchee CF. Ie dis que le reste EB, sera au reste FD, comme la toute AB, est à la toute CD.



Car puisque AB, est à CD, comme AE, à
16. 5. CF, en changeant, AB sera à AE, comme CD, à CF: Donc en diuisant, EB sera à AE, comme FD, à CF. Partant, en permu-
17. 5. tant derechef, EB sera à FD, comme AE à CF: c'est à dire, comme la toute AB, à la toute CD. Puisque AB, est posee à CD, comme AE, à CF: Donc si comme le tout, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE

D'icy sera demonstré le moyen d'argumenter és proportions, qui est pris de la conuersion de raison, selon la 16. definition.

Car ſoit comme AB, à CB, ainſi DE, à FE. Ie dis que par conuerſion de raiſon, comme AB eſt à AC: ainſi DE, à DF: Car puis que comme AB, eſt à CB, ainſi DE, eſt à FE, en diuiſant AC, ſera à CB, comme DF, à FE. Donc en changeant, comme CB, à AC, ainſi FE, à DF: Et partant, en compoſant, comme AB, ſera à AC, ainſi DE, à DF. Ce qui eſt propoſé. ſig. Scho. *18.* 17. 5.

THEOREME 20. PROP. 20.

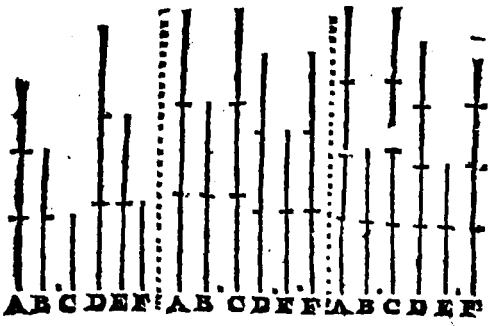
S'il y a trois grandeurs, & d'autres egales à icelles en nombre, leſquelles ſoient priſes de deux en deux, & en meſme raiſon: Et qu'en raiſon egale, la premiere ſoit plus grande que la troiſieſme, auſsi la quatrieſme ſera plus grande que la ſixieſme: Et ſi egale, egale; Et ſi plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F Et ſoit A à B, comme D à E, & B à C, comme E à F. Et premierement A, 1. ſoit plus grande que C, 3. Ie dis que D, 4. ſera plus grande que F, *6.* 8. 5.

Car puis que A, eſt plus grãde que C: il y aura plus grande raiſon de A à B, que de C à B. Mais comme A à B, ainſi D à E. Il y aura donc plus grande raiſon de D à E, que de C à B. Mais comme C à B, ainſi F à E (car puis que comme B à C, ainſi E à F, en changeant comme C ſera à B, ainſi F ſera à E.) Il y a pareillement donc plus grande 13. 5.

raison de D, à E, que de F à E. Partant D, sera plus grande que F : Ce qui est proposé.

10. 5.



Secondement, soit A egale à C. Ie dis que D sera egale à F. Car puis que A est egale à C, comme A sera à B, ainsi C à B. Mais comme A est à B, ainsi D est à E. Donc D sera à E, comme C à B, mais comme C est B, ainsi F à E, (par raison inuerse comme auparauant:) Partant D sera pareillement à E, comme F à E; Donc D & F seront egales. Ce qui est proposé.

7. 5.

11. 5.

9. 5.

Tiercement, soit A moindre que C. Ie dis que D est moindre que F: Car puis que A est moindre que C, il y aura moindre raison de A à B, que de C à B : mais comme A à B, ainsi D à E. Il y aura donc moindre raison de D à E, que de C à B. Mais par raison inuerse, comme deuant, comme C est à B, ainsi F est à E. Donc il y a moindre raison de D à E, que de F, à E. Partant D sera moindre que F. Ce qui est proposé. Donc s'il y a trois grandeurs, &c.

8. 5.

15. 5.

10. 5.

THEOREME

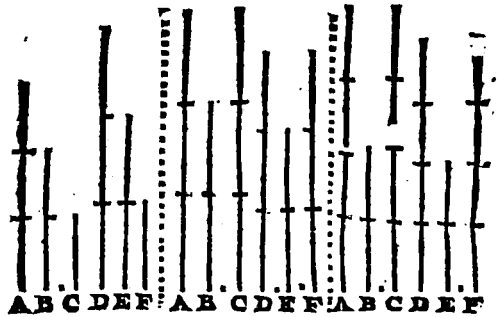
THEOREME 21. PROP. 21.

S'il y a trois grandeurs, & d'autres egales à icelles en nombre, lesquelles soient prises deux à deux, & en mesme raison; & que leur proportion soit troublee, ou sans ordre. Mais qu'en raison egale, la premiere soit plus grande que la troisiéme; la quatriéme sera aussi plus grande que la sixiesme; & si egale, egale; & si plus petite, plus petite.

Soient trois grádeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, lesquelles soient prises de deux en deux, & en mesme raison, & soit leur proportion troublee, ou sans ordre, c'est à dire: Soit comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E: Mais soit premierement A premiere, plus grande que C; Ie dis que D 4. sera aussi plus grande que F, sixiesme.

Car puis que A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B, que de C à B, mais comme A est à B, ainsi E est à F. Il y a pareillement donc plus grande raison de E à F, que de C à B: mais d'autant que comme B est à C, ainsi D est à E, par raison inuerse, comme C à B, ainsi E à D: Parquoy il y aura aussi plus grande raison de E à F, que de E à D; & partant D sera plus grande que F. Ce qui est proposé. 8. 5. 13. 5. 10. 5.

Secondement, soit A egale à C. Ie dis que D sera egale à F; Car puis que A est egale à C, com- 7. 5.



me A ſera à B, ainſi C ſera à B, mais comme A eſt à B, ainſi E eſt à F : Donc, comme C eſt à
11. 5. B, ainſi E ſera a F: Mais par raiſon inuerſe, comme C eſt à B, ainſi E eſt à D comme auparauant.
9. 5. Donc comme E ſera à F, ainſi E ſera à D : & partant D ſera egale à F. Ce qui eſt propoſé.

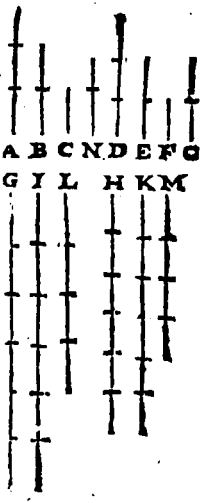
Finalement, ſoit A moindre que C. Ie dis que
8 5. D ſera moindre que F: Car puis que A eſt moindre que C, il y aura moindre raiſon de A à B, que de C à B. Mais comme A eſt à B, ainſi E eſt à F. Il y a donc moindre raiſon de E à F, que de C à B. Mais d'autant que comme auparauant,
10. 5. par raiſon inuerſe, cõme C eſt à B, ainſi E eſt à D, il y aura moindre raiſon de E à F, que de E à D: Parquoy D ſera moindre que F: Ce qui eſt propoſé. Si donc trois grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 22. PROP. 22.

S'il y a tant de grandeurs que l'on voudra, & d'autres egales à icelles en nombre, leſquelles ſoient priſes de deux en

deux, & en meſme raiſon: Icelles en raiſon egale, ſeront proportionelles.

Soient premierement trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, & ſoit A à B, comme D à E, & B à C, comme E à F. Ie dis qu'en raiſon egale, A eſt à C, comme D eſt à F.



Car ſoient priſes G, H, equimultiples de A, D, & I, K, equimultiples de B, E, & L, M de C, F: Et puis que A 1. eſt à B 2. comme D 3. eſt à E 4. Pareillement G, multiple de A 1. ſera à I, multiple de B 2. comme H, multiple de D 3. à K, multiple de E 4. Par meſme raiſon, puis que B 1. eſt à C 2. cõme E 3. à F 4. I, multiple de B 1. ſera à L, multiple de C 2. comme K multiple de E 3. ſera à M, multiple de F 4. D'autant donc qu'il y a trois grãdeurs G, I, L, & autres trois H, K, M, leſquelles ſont priſes de deux en deux, & en meſme raiſon. Il aduiendra que ſi G 1. excede L 3 que H 4 excedera M 6. & ſi egale, egale: & ſi plus petite, plus petite. Parquoy puis que G, H, equimultiples de la 1. A, & de D 3. ou defaillent enſemble de L, M, equimultiples de C 2. & de F 4. ou enſemble ſont egales, ou enſemble excedent en quelconque multiplication que ſoient priſes ces equimultiples: A 1. ſera à C 2. comme D 3. eſt à F 4. Ce qui eſt propoſé.

4. 5.

4. 5.

20. 5.

6. d. 5.

Derechef, ſoient plus de trois grandeurs, en ſorte que C ſoit auſſi à N, comme F à O. Ie dis d'auantage, que comme A ſera à N, ainſi D ſera à O: Car puis qu'il eſt deſia monſtré en trois grandeurs que A eſt à C, comme D à F: mais C eſt poſé à N, comme F à O, il y aura trois grandeurs à A, C, N, & autres trois D, F, O, leſquelles ſont priſes de deux en deux en meſme raiſon. Donc en raiſon egale demonſtree en trois grandeurs: derechef, comme A ſera à N, ainſi D à O. Semblablement, l'on monſtrera le meſme en cinq grandeurs, par quatre, comme il a eſté demonſtré en quatre par trois, & ainſi de pluſieurs. Partant s'il y a tant de grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous n'obmettrons icy vn Theoreme, lequel eſt fort vſité entre les anciens Mathematiciens, qui eſt tel.

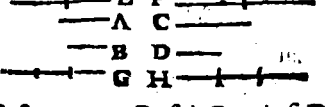
Si la premiere, a meſme raiſon à la ſeconde que la troiſieſme à la quatrieſme; les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme, auront auſſi meſme raiſon à la ſecõde & à la quatrieſme. Semblablement les equimultiples de la ſeconde & de la quatrieſme, auront auſſi meſme raiſon à la premiere & à la troiſieſme. Et au contraire, la ſeconde & la quatrieſme auront meſme raiſon aux equimultiples de la premiere & de la troiſieſme: pareillement auſſi la premiere & la troiſieſme auront meſme

raiſon aux equimultiples de la ſeconde & de la quatrieſme.

Soit A 1. à B 2, comme C 3. à D 4. & ſoient priſes E, F, equimultiples de A, C: Et G, H, equimultiples de B, D. Ie dis que E eſt à B, comme F à D. Pareillement, que G eſt à A, comme H à C, & au contraire: que B eſt à E, comme D à F: ſemblablement, que A eſt à G, comme C à H.

Car, d'autant que E eſt à A, comme F à C, par la conſtruction, puis que E, F, ſont equimultiples de A, C: & A eſt à B, comme C à D, par l'hypotheſe, en raiſon egale, comme E eſt à B, ainſi F ſera à D. 22. 5.
Derechef, puis que G eſt à B, comme H à D: d'autant que de part & d'autre y a meſme proportion multiple, par la conſtruction: & comme B eſt à A, ainſi D à C: Car puis que A eſt poſee à B, comme C à D, en raiſon inuerſe, comme B ſera à A: ainſi D à C, en raiſon egale G ſera à A, comme 22. 5.
H à C.

Secondement, d'autant que comme B eſt à A, ainſi D à C, par raiſon inuerſe, & comme A à E, ainſi C à F: Puis que par la conſtruction y a meſme proportion ſous-multiple de part & d'autre, en 22. 5.
raiſon egale, comme B ſera à E, ainſi D à F. Derechef, puiſque A eſt poſé à B, comme C à D, & comme B eſt à G, ainſi D eſt à H: d'autant que par la conſtruction en l'vn & en l'autre, y a meſme raiſon ſous-multiple, en raiſon egale, comme A à G, ainſi C à H. Ce qui eſt 22. 5.
propoſé.



D'où eſt manifeſte vn moyen d'argumenter, du-

quel se seruent le plus souuent les Geometres: specialement Archimedes, Apollonius Pergeus, Theon & autres, à sçauoir, comme A est à B, ainsi C à D. Donc, comme E double, où triple, ou quadruple, &c. de A est à C: ainsi pareillement F double, triple, ou quadruple, &c. de C, sera à D. Semblablement, comme A est à B, ainsi C à D: Donc comme A est au double, triple ou quadruple, &c. de B, sçauoir à G, ainsi pareillement C, sera au double, triple ou quadruple, &c. de D, sçauoir à H.

THEOREME 23. PROP. 23.

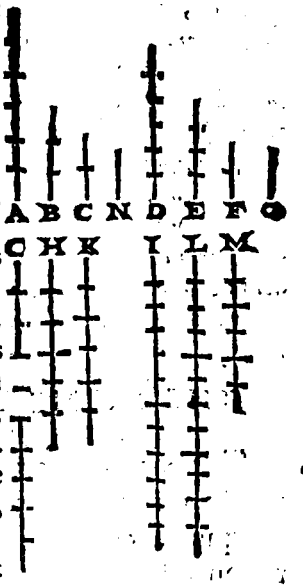
S'il y a trois grandeurs, & d'autres egales à icelles, en nombre, prises de deux en deux, & en mesme raison: & que leur proportion soit troublee, en raison egale; elles seront aussi en mesme raison.

Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, prises de deux en deux, & en mesme raison, & que leur proportion soit troublee: c'est à dire, soit A à B, comme E à F, & B à C, comme D à E. Ie dis qu'en raison egale, comme A sera à C, ainsi D sera à F.

Car soient prises G, H, I, equimultiples de A, B, D: semblablement K, L, M, equimultiples de C, E, F, comme A sera à B, ainsi G sera à H, puis que G, H sont equimultiples de A, B: Mais comme A à B, ainsi E à F. Donc comme G à H, ainsi E à F: mais comme E à F, ainsi L à M, puis que L, M sont equimultiples de E, F. Donc G sera pareillement à H, comme L à M. Derechef, d'autant

15. 5.
11. 5.
15. 5.
11. 8.

que B 1. eſt à C 2. comme D 3. à E 4. Pareillement H, multiple de la 1. B, ſera à K, multiple de C 2. comme I, multiple de D 3. eſt à L, multiple de E 4. Or d'autant qu'il y a trois grandeurs G, H, K, & autres trois I, L, M, leſquelles ſont priſes deux à deux en meſme raiſon, eſtant leur proportion 21. troublee: Puis qu'il eſt monſtré que G eſt à H comme L eſt à M, & comme H à K, ainſi I à L: Si G 1. excede K 3 14. excedera pareillement M 6. & ſi egale, egale: & ſi plus petite, plus petite. Partant puiſque G, I, equimultiples de la 1. A, & de D 3. ſont toutes deux plus grandes ou egales, ou plus petites que K, M, equimultiples de la 2. C, & de la quatrieſme F: Comme A premiere, ſera à C 2. ainſi D 3. ſera à F 4. Ce qui eſt propoſé. Donc s'il y a trois grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. 5. 5.



SCHOLIE.

Que s'il y a plus de trois grandeurs, & que leur proportion ſoit troublee, ſçauoir ſi A *eſt à* B, *comme* F *eſt* O, *&* B *à* C, *comme* E *à* F, *&* C *à* N, *comme* D *à* E. *Je dis que* A *ſera à* N, *comme* D *à* O: *Encore*

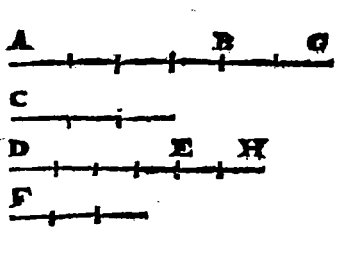
bien que la proportion d'egalité ne soit en vsage entre les Geometres en plus de trois grandeurs, quand la proportion est troublee. Qui est la cause pourquoy Euclide a proposé le Theoreme precedent de tant de grandeurs que l'on voudra, & celuy-cy de trois seulement. Encore qu'il soit aussi veritable de plusieurs: ce qui sera ainsi demonstré: puis qu'il a esté demonstré en trois grandeurs, que A est à C, comme F, à O: mais C est à N, par l'hypothese comme D à E, il y aura trois grandeurs A C N, & autres trois D, E, O, lesquelles prises deux à deux sont en mesme raison, leur proportion estant troublee. Dõc de reche sef en raison egale demonstree en trois grandeurs, comme A sera à N, ainsi D sera à O. Semblablement le mesme sera demonstré en cinq grandeurs, par quatre, comme il a esté demonstré en quatre par trois, & ainsi de plusieurs. Ce qui est proposé.

THEOREME 24. PROP. 24.

Si la premiere a mesme raison à la seconde, que la troisiesme à la quatriesme; Et que la cinquiesme ayt aussi mesme raison à la seconde, que la sixiesme à la quatriesme: Aussi la composee de la premiere & de la cinquiesme, aura mesme raison à la seconde, que la composee de la troisiesme & de la sixiesme à la quatriesme.

Soit AB, premiere, à C 2. comme DE, 3. à F 4. Pareillement, soit BG 5. à C 2. comme EH 6. à F

4. Ie dis que AG, composee de la premiere & de la cinquiesme est à C 2. comme DH, composee de la 3. & de la 6. est à F 4.



Car puis que BG est à C, comme EH à F, en changeãt cõme C, sera à BG, ainsi F sera à EH. Donc d'autant que AB est à C, comme DE est à F. & que C est à BG, comme F est à EH : en raison egale à AB, sera à BG, comme DE est à EH. Donc en composant la toute AG sera à BG, comme la toute DH à EH. Partant, puis que derechef AG est à BG, comme DH à EH; & BG à C, comme EH est à F. En raison egale, AG sera à C, comme DH est à F. Ce qui est proposé: Donc si la premiere, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. 22. 5. 22. 5.

SCHOLIE.

Cette proposition est veritable, soit que les grandeurs AB, BG, & C, soient de mesme genre que les grandeurs DE, EH, & F, ou non: comme il est manifeste de cette demonstration.

Presque en la mesme maniere cecy sera demonstré en tout genre de proportion. Ce qui a esté demonstré au 6. Theoreme de ce livre, tant seulement aux grandeurs multiples, sçauoir est.

Si deux grandeurs ont mesme raison à deux grandeurs, & que quelques-vnes

retranchees ayent meſme raiſon à icelles ; les reſtantes auront auſſi meſme raiſon à icelles.

Que AG, DH, ayent meſme raiſon à C & F, c'eſt dire, ſoit AG à C, comme DH à F. Semblablement les retranchees AB, DE, ayent meſme raiſon à icelles C, F : De ſorte que AB, ſoit pareillement à C, comme DE à F. Ie dis que les reſtantes BG, EH, ont meſme proportion à icelles C, F: c'eſt à dire, que BG eſt à C, comme EH eſt à F. Car puis que comme AB eſt à C, ainſi DE eſt à F, par raiſon inuerſe, comme C à AB, ainſi F à DE: D'autant donc
22. 5. que AG eſt à C, comme DH eſt à F, & C à AB, comme F eſt à DE, en raiſon egale AG ſera à AB,
17. 5. comme DH eſt à DE. Pareillement, en diuiſant comme BG ſera à AB, ainſi EH a DE : Et partant, puis que derechef BG eſt a AB, comme EH a DE,
22. 5. & AB a C, comme DE a F, en raiſon egale BG ſera a C, cõme EH a F. Ce qui eſt prop. à la fig. pre.

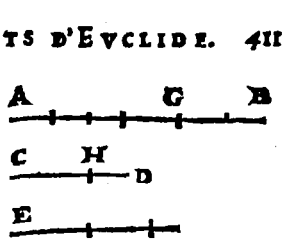
THEOREME 25. PROP. 25.

Si quatre grandeurs ſont proportionelles, la plus grande & la plus petite ſont plus grandes que les deux autres.

Soit AB a CD, comme E a F, & ſoit AB plus grande de toutes, & F plus petite. Ie dis que les deux AB & F, enſemble, ſont plus grandes que les deux CD, & E enſemble.

Car de la grandeur AB, ſoit retranchee AG egale a E, & de CD, ſoit auſſi retranchee CH, egale a

F. Donc AG ſera a CH, comme E a F, c'eſt a dire, comme AB a CD. Partant, puis que la toute AB, eſt a la toute CD, comme la retranchee AG, eſt à la retrãchee CH. Pareillement, comme la toute



¶ 19. 5.

AB, a la toute CD: ainſi le reſte GB au reſte HD: Mais AB (puis qu'elle eſt la plus grande de toutes) eſt plus grande que CD. Donc GB ſera auſſi plus grande que HD: Mais d'autant que AG & E, ſont egales, ſi l'on adiouſte a icelles les egales F & CH, a ſçauoir F a AG, & CH a E, AG & F enſemble: ſerõt eg. à E, & CH enſéble. Dõc adiouſtãt les ineg. GB, & HD: AB & F enſemble, ſeront plus grandes que E & CD enſemble: Puis que GB eſt plus grande que HD. Ce qui eſt propoſé: Si donc quatre grandeurs ſont proportionelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Or il s'enſuit neceſſairement, que ſi la grandeur antecedente d'vne proportion, eſt la plus grande de toutes, que la conſequente de l'autre proportion ſera la plus petite de toutes: comme on peut voir en l'exemple propoſé. Car puis que comme AB, eſt à CD, ainſi E à F, & AB premiere, eſt plus grande que E 3. CD 2. ſera plus grande que F 4. Semblablement, d'autant que AB, eſt plus grande que CD: pareillent E, ſera plus grande que F, à cauſe de la meſme raiſon de AB, à CD, & de E à E, comme nous auons monſtré au Scholie de la quatorziesme Propoſition.

Que ſi au contraire l'antecedente d'vne proportion eſt la plus petite de toutes, la conſequente de l'autre ſera la plus grande, comme il appert, ſi l'on dict que F eſt à E, comme CD eſt à AB. Or les quatre grandeurs doiuent pareillement eſtre toutes de meſme genre, autrement vne grandeur ne pourroit eſtre compoſee de la plus grande & de la plus petite; ny meſme des deux reſtantes.

En ce lieu, Federic Commandin adiouſte vn autre Theoreme, non beaucoup diſſemblable de cette 25. à ſçauoir:

Si trois grandeurs ſont proportionelles, la plus grande & la plus petite ſeront plus grandes que le double de l'autre.

Soit comme A a B, ainſi B a D, & ſoit A plus grãde, & D plus petite. Ie dis que A & D enſemble, ſont plus grandes que le double de B. Car ayant pris C egale a B, comme A ſera a B, ainſi C ſera a D. Donc A & D enſemble, ſeront plus grandes que B & D enſemble [a] comme nous venons de demonſtrer, c'eſt a dire, que la double de B. Ce qui eſt propoſé.

a 25. 5.



Icy Euclide finit le 5. liure: mais d'autant que Campanus & quelques autres, adiouſtent quelques autres Propoſitions, deſquelles les bons Autheurs s'aydent fort ſouuent, & les citent comme ſi

elles estoient d'Euclide, comme Archimede, Apollonius, Iean de Mont-Royal, & autres; nous les auons adiouſtees en ſuitte de ceux d'Euclide, apres Commandin & Clauius.

THEROEME 16. PROPOSIT. 26.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme; par raiſon inuerſe, la ſeconde aura moindre raiſon à la premiere, que la quatrieſme à la troiſieſme.

Que A ait plus grande raiſon a B, que C a D. Ie dis que la raiſon de B a A, *eſt* moindre que celle de D, a C.

Car ſoit entendu que E eſt a B, comme C eſt a D, la raiſon de A a B, ſera pareillement plus grande que celle de E a B: [b] & partant A, ſera plus grande que E: [c] parquoy il y aura moindre raiſon de B a A, plus grande, que de B a E, plus petite: Mais comme B, eſt a E, ainſi par raiſon inuerſe D eſt à C. Donc la raiſon de B a A, eſt pareillement moindre que de D à C. Ce qui eſt propoſé.



b 10. 5.
c 8. 5.

SCHOLIE.

En la meſme maniere, ſi A a moindre raiſon a B, que C à D, par conuerſion de raiſon, B aura plus grande raiſon à A, que D à C, &c.

THEOREME 27. PROP. 27.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde que la tierce a la quarte; auſſi en changeant la premiere aura plus grande raiſon a la tierce, que la ſeconde à la quarte.

Que A ait plus grande raiſon à B 2. que C 3. à D. Ie dis qu'en permutant, A premiere, aura plus grande raiſon à C 3. que B 2. à D 4. Car ſoit poſee E à B, comme C eſt à D: A aura pareillement plus grande raiſon à B, que E à B: [d] Parquoy A ſera plus grande que E. [e] Et partant, il y aura plus grande raiſon de A à C, que de E à C: [f] mais d'autant qu'en changeant, comme E eſt à C, ainſi B eſt à D, (E eſtant poſee à B, comme C à D.) Donc A, aura auſſi plus grande raiſon à C, que B à D. Ce qui eſt propoſé. Voyez la ſuyuante figure.

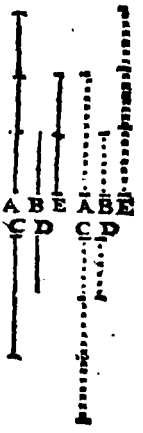
d 10. 5.
e 8. 5.
f 6. 5.

SCHOLIE.

Nous monſtrerons ſemblablement, que ſi la premiere a moindre raiſon à la 2. que la 3. à la 4. en changeant, la 1. aura moindre raiſon à la 3. que la 2. à la 4.

Car soit la raison de A à B, moindre que celle de C à D. Ie dis qu'en changeant, A aura moindre raison à C, que B à D.

Car d'autant qu'il y a moindre raison de A à B, que de C à D: Il y aura plus grande raison de C à D, que de A, à B : [h] *Donc en changeant, il y aura plus grande raison de C à A, que D à B; & par conuersion de raison, il y aura moindre raison de A à C, que de B à D. Ce qui est proposé.*



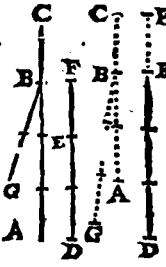
h 27. 5.

i 26. 5.

THEOREME 28. PROPO. 28.

Si la premiere a plus grande raison a la seconde, que la tierce a la quarte: La composee de la 1. auec la 2. aura aussi plus grande raison a la 2. que la composee de la 3. auec la 4. a la 4.

Car, que AB, ait plus grande raison à BC, que DE, à EF. Ie dis qu'en composant AC, aura plus grande raison à BC, que DF, à EF. Car soit posee GB, à BC, comme DE, à EF. il y aura aussi plus grande raison de AB à BC, que de GB à BC: [k] partant AB, sera plus grande que GB. Adiouſtant donc la commune



k 10. 5.

BC, AC sera plus grande que GC : & partant,
l 17. 5. AC, aura plus grande raison a BC, que GC a BC: mais en composant GC est BC, comme DF, a EF (puisque GB est posee a BC, comme DE a EF.) Donc AC, aura plus grande raison a BC, que DF, a EF. Ce qui est proposé.

SCHOLIE.

Que si AB, a moindre raison à BC, que DE à EF: aussi en composant AC, aura moindre raison d BC, que DE à EF: Car soit posee GB à BC, comme DE, à EF; Il y aura aussi moindre raison de AB,
m 10. 5. *à* BC, *que de* GB. *à* BC: [m] *Partant,* AB, *sera moindre que* GB, *adioustant* BC; AC *sera moindre que*
n 8. 5. GC. [n] *Donc il y aura moindre raison de* AC, *à* BC, *que de* GC, *à* BC: *Mais en composant comme* GC *à* BC, *ainsi* DF, *à* FE (GB *estant posee à* BC, *comme* DE *à* EF, *il y aura donc aussi moindre raison de* AC *à* BC, *que* DF *à* FE. *Ce qui est proposé. Voyez la figure precedente de poincts.*

THEOREME 29. PROP. 29.

Si la composee de la premiere auec la seconde, a plus grande raison à la seconde, que la composee de la tierce auec la quarte, à la quarte: En diuisant la premiere, aura aussi plus grande raison à la seconde, que la tierce à la quarte.

Que AC, ait plus grande raison a BC, que DF a EF. Ie dis qu'en diuisant AB, aura aussi plus grande

grande raiſon à BC, que DE, à EF. Car ſoit poſee GC à BC, comme DF, à EF, la raiſon de AC, à BC, ſera auſſi plus grande que de GC à BC: ° Parquoy AC, ſera plus grande que GC. Donc oſtāt BC commune, reſtera AB plus grande que GB: ᵖ partant il y aura plus grande raiſon de AB à BC, que de GB à BC.



o 10. 5.

p 17. 5.

Mais en diuiſant, comme GB eſt à BC, ainſi DE à EF (GC eſtant poſee à BC, comme DF, à EF,) il y aura donc auſſi plus grande raiſon de AB, à BC, que de DE à EF. Ce qui eſt propoſé.

SCHOLIE.

Que ſi AC a moindre raiſon à BC, que DF à EF, auſſi en diuiſant, AB aura moindre raiſon à BC, que DE à EF: Car ſoit poſee GC à BC, comme DF à EF; Il y aura auſſi moindre raiſon de AC à BC, que de GC à BC. q *Parquoy AC ſera moindre que GC. Donc oſtant BC commune, reſtera AB, moindre que GB:* r *partant il y aura moindre raiſon de AB à BC, que de GB à BC:* s *Mais en diuiſant, comme GB à BC, ainſi DE à EF, (eſtant poſee GC, à BC, comme DF à EF.) Donc il y aura auſſi moindre raiſon de AB à BC, que de DE à EF. Ce qui eſt propoſé.*

q 10. 5.

r 10. 5.

s 17. 5.

THEOREME 30. PROPO. 30.

Si la compoſee de la premiere auec la ſeconde, a plus grande raiſon a la ſeconde,

que la composee de la tierce auec la quarte à la quarte. Par conuersion de raison, la premiere auec la seconde, aura moindre raison a la premiere, que la tierce auec la quarte a la tierce.

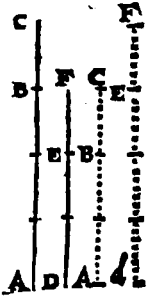
Que AC, ait plus grande raison à BC, que DF, à EF. Ie dis par conuersion de raison, que AC a moindre raison à AB, que DF, à DE.

Car AC, ayant plus grande raison à BC, que DF à EF, en diuisant AB, aura plus grande raison à BC, que DE à EF. Donc par conuersion de raison il y aura moindre raisō de BC à AB, que de EF à DE, & en cōposant il y aura moindre raison de la toute AC à AB, que la toute DF, à DE. Ce qui est proposé.

t 29. 5.

v 26. 5.

28.



SCHOLIE.

Semblablement, si AC *a moindre raison à* CB, *que* DE *à* EF. *Par conuersion de raison* AC *aura plus grande raison à* AB, *que* DF *à* DE : *Car puis qu'il y a moindre raison de* AC, *à* BC, *que de* DF, *à* EF; *il y aura plus grande raison de* DF, *à* BF, *que de* AC *à* BC.

x 30. 3.

Donc par conuersion de raison, Il y aura moindre raison de DF *à* DE, *que* AC *à* AB. *c'est à dire, qu'il y aura plus grande raison de* AC *à* AB, *que de* DF *à* DE. *Ce qui est proposé.*

THEOREME. 31. PROP. 31.

S'il y a trois grandeurs, & d'autres egales à icelles en nombre; & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la ſeconde, que de la premiere des dernieres à la ſeconde. Semblablement, qu'il ait plus grande raiſon de la ſeconde des premieres à la tierce, que de la 2. des dernieres à la tierce: En raiſon egale, il y aura auſſi plus grande raiſon de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, & qu'il y ait plus grande raiſon de A à B, que de D à E, & de B à C, que de E à F. Ie dis qu'en raiſon egale, il y aura plus grande raiſon de A à C, que de D à F.

Car ſoit poſee G à C, comme E à F: Donc il y aura auſſi plus grãde raiſon de B à C, que de G à C: y Parquoy B ſera plus grande que G: Partant z il y aura plus grande raiſon de A à G, qu'icelle de A, à B, plus grande: Mais la raiſon de A à B, eſt poſee plus grande que de D à E: Donc il y aura encor plus grande raiſon de A à G, que de D à E.



y 10. 5
z 8. 5

Soit poſee derechef H à G, comme D à E: Il y aura donc auſſi plus grande

raiſon de A, a G, que de H à G: [a] Partāt A ſera plus grande que H. [b] Donc A plus grande, aura plus grande raiſon a C, que H moindre à la meſme C: Mais comme H eſt a C, ainſi D eſt a F, en raiſon egale (puis que comme D eſt a E, ainſi H eſt a G, & comme E eſt a F, ainſi a C.) Donc il y aura auſſi plus grande raiſon de A a C, que de D a F. Ce qui eſt propoſé

a 10. 5.
b 8. 5.
c 22. 5.

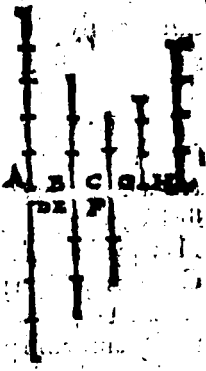
SCHOLIE.

Semblablement on demonſtrera, que ſi la premiere des premieres, a moindre raiſon à la ſeconde, que la premiere des dernieres a la ſeconde: mais la ſeconde des premieres a moindre raiſon a la 3. que la 2. des dernieres a la 3. auſſi en raiſon egale, la 1. des premieres aura moindre raiſon a la tierce, que la premiere des ſecondes a la tierce.

THEOREME 32. PROP. 32.

S'il y a trois grandeurs, & d'autres egales à icelles en nombre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la ſeconde, que de la ſeconde des dernieres a la tierce; Pareillement, qu'il y ait plus grande raiſon de la ſeconde des premieres a la tierce, que de la premiere des dernieres a la ſeconde: En raiſon egale, il y aura auſſi plus grande raiſon de la premiere des premieres a la tierce, que de la premiere des dernieres a la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D E, F, & que A ait plus grande raiſon à B, que E à F, & B à C, que D à E. Ie dis qu'en raiſon egale, A aura plus grande raiſon à C, que D à F.



Car ſoit poſee G à C, comme D à E. Donc B aura auſſi plus grande raiſon à C, que G à C : [c] Partant B, ſera plus grande que G ; [d] Parquoy il y aura plus grande raiſon de A à G, moindre que de la meſme A à B plus grande. Mais il y a plus grande raiſon de A à B, que de E à F. Donc il y aura encore plus grande raiſon de A à G, que de E à F.

c 10. 5.
d 8. 5.

Soit poſee derechef H à G, comme E à F. Il y aura donc plus grande raiſon de A à G, que de H à G. [f] Donc A ſera plus grande que H, parquoy [g] A, aura plus grande raiſon à C, que H moindre, à la meſme C : [s] Mais comme H à C, ainſi D à F, en raiſon egale, (D eſtant à E, comme G à C, & come E à F, ainſi H à G :) Il y a donc auſſi plus grande raiſon de A à C, que de D à F. Ce qui eſt propoſé.

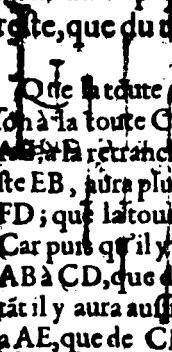
e 10. 5.
f 8. 5.
g 13. 5.

SCHOLIE.

Semblablement on monſtrera, que ſi les raiſons des premieres ſont moindres, auſſi la raiſon des extremes ſera moindre, &c.

THEOREME 33. PROP. 33.

S'il y a plus grande raiſon du tout au tout, que du retranché au retranché: Il y aura auſſi plus grande raiſon du reſte au reſte, que du tout au tout.



Que la toute AB ait plus grande raiſon à la toute CD, que la retranchée AE à la retranchée CF. Ie dis que le reſte EB, aura plus grande raiſon au reſte FD; que la toute AB, à la toute CD: Car puis qu'il y a plus grande raiſon de AB à CD, que de AE à CF, [h] en permutãt il y aura auſſi pl⁹ grãde raiſon de AB a AE, que de CD a CF, Donc par conuerſion de raiſon, il y aura moindre raiſon de AB a EB, que de CD a FD. [k] Donc en changeant il y aura auſſi moindre raiſon de AB a CD, que de EB a FD, ſçauoir le reſte EB, aura plus grande raiſon au reſte FD, que la toute AB, a la toute CD. Ce qui eſt propoſé.

h 27. 5.

i 30. 5.

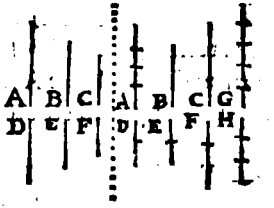
k 27. 5.

SCHOLIE.

Que ſi AB a moindre raiſon à CD, que AE à CF, le reſte EB aura auſſi moindre raiſon au reſte FD, que AB à CD. Comme il appert par la demonſtration.

THEOREME 94. PROP. 54.

S'il y a tant de grandeurs que l'on voudra, & d'autres egales à icelles en nombre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la premiere des dernieres, que de la ſeconde à la ſeconde, & de la ſeconde à la ſeconde, que de la 3 à la tierce, & ainſi de ſuitte; Toutes les premieres enſemble auront plus grande raiſon à toutes les dernieres enſemble, que toutes les premieres, la premiere oſtee à toutes les dernieres, la premiere auſſi oſtée; Mais moindre raiſon que la premiere des premieres, à la premiere des dernieres: & finalement auſſi plus grande raiſon que la derniere des premieres à la derniere des dernieres.



Soient premierement trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, & ſoit la raiſon de A à D. plus grande que de B a E, & de B a E, que de C a F. Ie dis que A, B, C enſemble, ont plus grande raiſon a D, E, F enſemble, que B, C enſemble, a E, F enſemble: mais moindre que A a D: Et finalement, plus grande que G, H, de A, C a F.

B, C, G, à D, E, F, H, que de B, C, G, a E, F, H: comme il a eſté monſtré; il y aura beaucoup plus grande raiſon de A, B, C, G, à D, E, F, H, que de la derniere G. à la derniere H. Ce qui eſt tiercement propoſé.

En la meſme façon, on conclura le meſme en 5. grandeurs par 4. & en 6. par 5. &c. Comme il eſt monſtré en 4. par 3.

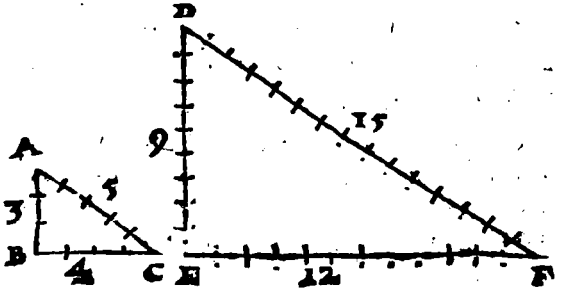
Fin du cinquieſme Liure.

LIVRE SIXIESME DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. Semblables figures rectilignes, sont celles qui ont les angles egaux, vn chacun au sien, & les costez qui sont autour des angles egaux, proportionaux.

COMME les triangles A B C, D E F, seront dicts semblables, s'ils sont equiangles : c'est à dire, que l'angle A, soit egal à l'angle D, & l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F : Et semblable-



ment que les costez autour des angles egaux soient proportionaux : sçauoir est, comme A B, est à AC, ainsi DE, soit à DF, & comme AB, à BC, ainsi DE, à EF : & comme AC, à CB, ainsi DF, à FE.

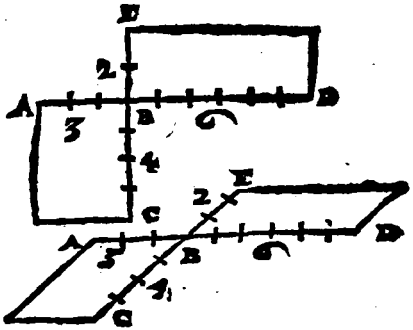
Que si chacun des angles de l'vne des figures est egal à chacun des angles de l'autre ; mais les costez à l'entour des angles egaux ne sont proportionaux, ou au contraire ; telles figures ne seront dictes semblables, comme sont le quarré, & le quarré long. Car icelles figures ont les angles egaux, sçauoir est, droicts : mais les costez de l'vne ne sont proportionaux aux costez de l'autre : Ceux du quarré ayans raison d'egalité, & ceux du quarré long, autour de l'angle droict, raison d'inegalité. D'où il appert que toutes les figures rectilignes, equiangles & equilateres, ayans les costez & les angles egaux en nombre, sont semblables, combien qu'elles soient inegales.

2. Les figures sont reciproques, quand les raisons antecedentes & consequentes, sont en l'vne & en l'autre figure.

Ou ainsi.

Les figures sont reciproques, quand les termes antecedens & consequens des raisons, sont en l'vne & en l'autre figure.

Car par les raisons antecedentes & consequentes, faut entendre les termes antecedens & consequens de la proportion. Comme s'il y a deux rectangles ou non, AC, ED, & que comme AB

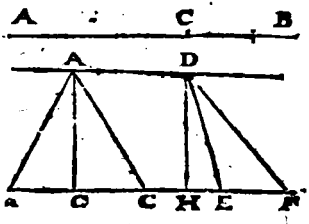


eſt à BD, ainſi EB eſt à BC, icelles figures ſeront dites reciproques: D'autant qu'en l'vne eſt le terme antecedent de la premiere raiſon, ſçauoir AB, & le conſequent de la ſeconde raiſon, ſçauoir B C: Et en l'autre eſt le terme conſequent de la premiere raiſon BD, & l'antecedent de la ſeconde EB: Telles figures ſont auſſi dites egales entr'elles, comme il ſera cy-apres demonſtré.

3. Vne ligne droicte eſt dite eſtre coupee, ſelon la moyenne & extreme raiſon, lors que la toute eſt au plus grand ſegment, comme le plus grand ſegment eſt au moindre.

Si quelconque ligne droicte comme AB, eſt diuiſee de telle ſorte au poinct C, inegalement, que la toute AB, ſoit au plus grand ſegment AC, comme icelluy meſme plus grand ſegment AC, eſt au plus petit C B: elle ſera dite eſtre diuiſee ſelon la moyenne & extreme raiſon; Laquelle diuiſion Euclide enſeignera à la 30. Propo. de ce liure.

4. La hauteur de quelconque figure, eſt la ligne perpendiculaire, menee du ſommet ſur la baſe.



Si du ſommet A, du triangle ABC, l'on mene AG, perpendiculaire ſur la baſe BC, la quantité d'icelle perpendiculaire ſera la hauteur ou altitude du triangle ABC; De meſme auſſi la perpendiculaire DH, menee du ſommet D, du triangle DEF, ſur la baſe EF, prolongee de la part de E, ſera la hauteur d'iceluy triangle DEF. Partãt, ſi les perpendiculaires de 2. figures, menees des ſommets ſur leurs baſes, (ſoit que les baſes ſoient prolongees ou non) ſont egales: telles figures ſeront dites auoir meſme hauteur. Or telles perpendiculaires ſeront egales, quand les baſes des figures, & les ſommets ſeront conſtituez entre meſmes paralleles, comme ſont AG, DH.

Car puis que les angles AGH, DHG, internes, & de meſme part, ſont egaux a deux droicts, ou pour mieux dire droicts: [a] AG, DH, ſeront paralleles; mais AD, GH, ſont auſſi paralleles: D'autant que les triangles ſont poſez eſtre conſtituez entre meſmes paralleles: donc AD, HG, ſera parallelogramme, [b] & partant les coſtez AG, DH, ſeront egaux: Donc iceux triangles ſeront dicts auoir meſme hauteur. Que ſi aux meſmes triangles l'on poſe C & F, pour les ſommets, &

a 28. 1.

b 34. 1.

AB, DE, pour les baſes, iceux triangles ne ſeront pas dits auoir meſme hauteur ; Car la perpendiculaire menee de F, a la baſe DE, n'eſt pas egale a la perpendiculaire menee de C, ſur la baſe AB : ces triangles ne pouuans eſtre conſtituez entre meſmes paralleles, comme il eſt manifeſte.

5. Vne raiſon eſt dicte eſtre compoſee de raiſons, quand les quantitez des raiſons multipliees entr'elles, font quelque raiſon.

D'autant que le Denominateur de quelconque raiſon exprime la quantité de la grandeur antecedente, au reſpect de la conſequente, (comme le Denominateur de la raiſon quadruple, à ſçauoir 4. monſtre qu'en toute raiſon quadruple la grandeur antecedente contient quatre fois la conſequente : mais le Denominateur de la raiſon ſubquadruple a ſçauoir $\frac{1}{4}$. demonſtre que la grandeur antecedente eſt la quatrieſme partie de la conſequente, &c. (le Denominateur a de couſtume d'eſtre appellé par les Geometres, la quantité de la raiſon : de ſorte que c'eſt meſme choſe que la quantité de quelque raiſon, & le Denominateur d'icelle.) Donc cette definition nous enſeigne qu'vne raiſon eſt dicte eſtre compoſee de deux ou pluſieurs raiſons, quand les Denominateurs ou quãtitez d'icelles multipliees entr'elles, feront icelle raiſon : (ou comme traduict Zambert) feront la quantité ou denominateur d'icelle raiſon. Comme la raiſon duodecuple eſt dite eſtre compoſee de la double &c

sextuple : D'autant que le denominateur de la raison duodecuple, à sçauoir douze, est produict de la multiplication du denominateur de la raison double, sçauoir de deux, par le denominateur de la sextuple : c'est a dicte par six. Ainsi la mesme raison duodecuple est dicte estre composee de la triple & de la quadruple : Car de la multiplication de 3. par 4. est produict le denominateur 12. de la raison duodecuple. Semblablement, la raison trigecuple est dicte estre composee de la double, triple & quintuple. Car les denominateurs d'icelles 2. 3. 5. multipliez entr'eux, produisent 30. denominateur d'icelle raison trigecuple. Ainsi la raison double est dicte estre composee de la sesquialtere & sesquitierce : D'autant que du denominateur de la sesquialtere, qui est $1\frac{1}{2}$. multiplié par $1\frac{1}{3}$. denominateur de la sesquitierce est produict 2. denominateur de la double.

Derechef, la mesme raison double est composee de la sesquiseptiéme, & de la supertripartiente quatriémes : car les denominateurs de ces raisons $1\frac{1}{7}$. $1\frac{1}{4}$. multipliez entr'eux, produisent 2. denominateurs de la double. Semblablement, la mesme raison double sera dicte estre composee de la subsequiquarte, & de la double sesquialtere : D'autant que les denominateurs d'icelles $\frac{1}{4}$. & $2\frac{1}{2}$. multipliez entr'eux, produisent pareillement le mesme denominateur de la raison double, sçauoir 2. &c.

Donc, si on propose tant de grandeurs qu'on voudra d'ordre A, B, C, D, sçauoir A a B, en raison double, B a C, triple, & C a D, quintuple, la raison des extremes A & D, sera trigecuple,

gecuple, laquelle ſera dite eſtre compoſee des raiſons moyennes: Car ſi on multiplie le denominateur de A à B, qui eſt 2. par celuy de B à C 3. l'on aura 6. denominateur de la raiſon de A à C: Donc A à C, a raiſon ſextuple. Derechef, multipliant 6. denominateur de la raiſon de A à C, par celuy de C à D, 5. l'on aura 30. denominateur de la raiſon de A à D. Parquoy A ſera à D, en raiſon trigecuple, &c.

60. 30. 10. 2.
A, B, C, D.

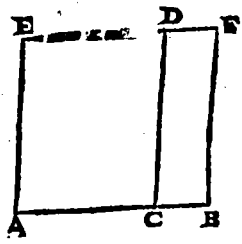
Et cecy ſoit dit des 5. Definitions d'Euclide ſur ce 6. liure, auſquelles ſera adiouſtee la ſuyuante, pour rendre plus intelligibles, tant les 27. 28. 29. & 30. Propo. de ce 6. liure, que de pluſieurs autres du 10. qui eſt telle.

6. Vn parallelogramme eſtant appliqué ſelon quelque ligne droicte, eſt dict defaillir d'icelle, d'vn parallelogrãme, quand il n'occupe pas toute ladite ligne; mais eſt dict exceder, quand il occupe vne plus grande ligne, que celle, ſelon laquelle il eſt appliqué: En ſorte toutefois que le parallelogramme excedant ou defaillant, ait meſme hauteur que le parallelogramme, duquel il defaut ou excede, & conſtituë auec iceluy vn ſeul parallelogramme.

Soit la ligne AB, ſur laquelle ſoit conſtitué le parallelogrãmme AD, n'occupant toute la ligne AB, mais laiſſant CB: ayant acheué le parallelogrãme AF, le parallelogramme AD. appliqué ſe-

lon la ligne AB, ſera dit defaillir d'icelle, du parallelogramme CF: de ſorte que CF ſera appellé le defaut.

Derechef, ſoit AC, ſur laquelle ſoit conſtitué le parallelogramme AF, ayant le coſté AB, plus grand que AC, auquel ſoit menee CD, parallele à BF, le parallelogramme AF, appliqué ſelon AC, ſera dict exceder AC, du parallelogramme CF, en ſorte que CF, ſoit dict l'excez.



Or ce defaut ou excez aux rectangles, peut eſtre quarré, ou quarré long: & aux parallelogrammes non rectangles, rhombe ou rhomboyde, comme il eſt manifeſte.

SCHOLIE.

Clauius, qui a tiré cette 6. Definition, tant de la 27. qu'autres ſuyuantes Propoſitions de ce liure, a manqué à la fin d'icelle, où il dict. Ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens, eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, conſtituatque cum eo totum vnum parallelogrammum. *C'eſt à dire: En ſorte toutefois que le parallelogramme defaillant, ou excedant, ait meſme hauteur que le parallelogramme appliqué, & conſtitue auec iceluy vn ſeul parallelogrãme.* Au lieu qu'il doit dire: *En ſorte toutefois, que le Parallelogramme defaillant, ou excedant, ait meſme hauteur que l'excez ou defaut, &c. Car le pa-*

rallelogramme defaillant ou excedant, eſt celuy meſme qui eſt appliqué : Donc il ne doit dire qu'il doit auoir meſme hauteur que luy-meſme, & conſtituer auec luy-meſme vn ſeul parallelogramme, attendu qu'il ne ſe peut faire autrement : mais bien qu'il doit eſtre de meſme hauteur que le defaut ou excez.

Or que le parallelogramme defaillant ou excedant, ſoit celuy meſme qui eſt appliqué, & l'autre qui conſtitue vn parallelogramme auec luy, ſoit le defaut ou excez ; il appert aſſez, tant par le texte d'Euclide, que le comment de Theon.

Παίτων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν ὠθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλείποντα εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις, τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον ὅμοιον ὂν, τῷ ἐλλείμματι. C'eſt à dire, de tous les parallelogrammes appliquez ſelon vne meſme ligne droicte, & defaillans de figures parallelogrammes ſemblables, & ſemblablement poſees au parallelogramme qui eſt deſcrit ſur la moitié, le plus grand eſt celuy qui eſt appliqué ſur la moitié, eſtant ſemblable au defaut. Et Theon : παραβεβλήσθω παρὰ τὴν α β, εὐθεῖαν τὸ α δ, παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, &c. Et ſoit appliqué ſelon la ligne droicte A B, le parallelogramme A D, defaillant d'vne figure parallelogramme, &c.

Henrion Copiſte, fait la meſme faute, copiant touſiours ce qu'il trouue, ſoit qu'il entende le ſens,

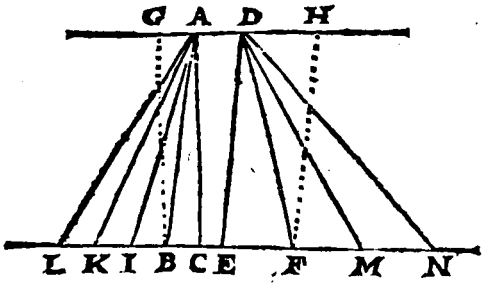
non. Toutefois ledit Copiſte, ou pluſtoſt ſon Traducteur, voulant corriger cette faute à la derniere Edition qu'il a faite des 6. premiers liures, en a fait vne ſemblable, en diſant. En ſorte toutefois, qu'iceluy parallelogramme defaillant ou excedant, ait deux angles communs auec le parallelogramme appliqué ſur toute la ligne propoſee; *c'eſt à dire, qui ait deux angles communs auec luy-meſme, qui eſt vne aſnerie bien manifeſte, le parallelogramme defaillant ou excedant, eſtant le meſme parallelogramme appliqué. Mais d'autant qu'il n'eſtoit aucun beſoin d'inuenter cette Definition, attendu que la 27.28.& 29. Propoſitions, ſe peuuent tout auſſi facilement entendre, que ſi elle n'y eſtoit point (comme nous ſouſtiendrons à qui voudra dire le contraire) nous n'en parlerons dauantage.*

THEOREME 1. PROP. 1.

Les triangles & les parallelogrammes qui ont meſme hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes.

Soient deux triangles A B C, D E F, ayans meſme hauteur, deſquels les baſes ſont B C, E F. Semblablement ſoient deux parallelogrammes, C G, E H, auſſi de meſme hauteur, & ſur les meſmes baſes B C, E F. Ie dis que le triangle A B C, eſt au triangle D E F, & le parallelogramme C G, au parallelogramme E H, comme la baſe B C, eſt à la baſe E F; C'eſt à dire, que ſi la baſe B C, eſt priſe pour premiere grandeur, la baſe E F, ſeconde: mais le triangle A B C, ou le parallelogramme

CG troiſieſme, & le triangle DEF, ou le parallelogramme E H 4. les equimultiples de la 1. & 3. grandeur ſeront toutes deux plus grandes, ou toutes deux plus petites ou egales que les equimultples de la 2. & 4. comme veut la ſixieſme Definition du cinquieſme liure.



Car ſoient conſtituez, tant les triangles que les parallelogrammes, entre meſmes paralleles GH, LN: [c] (Alors ils auront meſme hauteur, puiſque eſtans conſtituez entre meſmes paralleles, les perpendiculaires menees des ſommets ſur les baſes ſeront egales, comme il eſt dict en la 4. Definition,) & de BL, ſoient priſes BI, IK, KL, chacune egale à la baſe BC. c 4. d

Semblablement de FN, ſoient priſes FM, MN, chacune egale à EF; & des ſommets A & D, ſoient menees les droictes lignes AI, AK, AL, DM, DN: [d] les triangles ABC, AIB, AKI, ALK, eſtans conſtituez ſur baſes egales & entre meſmes paralleles, ſeront egaux entr'eux: par meſme raiſon les triangles DEF, DFM, DMN, ſeront auſſi egaux entr'eux. d 38. 1.

Or d'autant que CL contient autant de parties

egales à BC, que le triangle A C L, contient de triangles egaux au triangle ABC, comme il eſt monſtré, C L ſera autant multiple de CB, que le triangle ACL, l'eſt du triangle A B C. Pareillement, d'autant que E N, contient autant de parties egales à EF, que le triangle DEN, contient de triangles egaux, au triangle D E F, comme nous auons monſtré, E N ſera autant multiple de E F, que le triangle D E N, l'eſt du triangle DEF. Mais d'autant que ſi la baſe CL, eſt egale à la baſe E N, [e] neceſſairement le triangle ACL, ſera egal au triangle DEN, eſtans entre meſmes paralleles: & partant, ſi CL eſt plus grande que EN, le triangle ACL, ſera plus grand que le triangle DEN: & ſi moindre, moindre: comme il appert par la 9. commune ſentence. Donc la droicte ligne C L, & le triangle A C L, equimultiples de la premiere grandeur B C, & de la troiſieſme A B C, defaudront tous deux de la droicte ligne EN, & du triangle DEN, equimultiples de la ſeconde grandeur E F, & de la 4. D E F, ou ſeront tous deux egaux, ou tous deux plus grands, eſtans priſes les grandeurs comme elles s'entre-reſpondent: [f] Parquoy il y aura meſme raiſon de la premiere BC, à la 2. EF, que de la 3. ABC, à la 4. D EF, ſçauoir du triangle au triangle. Donc comme la baſe à la baſe, ainſi le triangle au triangle. Ce qui eſt propoſé.

e 38. 1.

f 6. d. 5.

g 15. 5. Pour la ſeconde partie: D'autant que [g] comme le triangle ABC, eſt au triangle DEF: ainſi le parallelogramme CG, [h] (qui eſt double du triangle ABC) au parallelogramme E H, [i] (qui eſt double du triangle DEF,) il eſt manifeſte que le parallelogramme [k] ſera auſſi au parallelogramme,

h 34. 1.

i 34. 1.

k 11. 5.

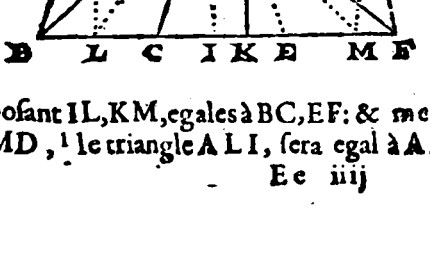
comme la base à la base. Ce que l'on peut aussi prouuer par le mesme discours, dont nous auons vsé en la demonstration des triangles, si premierement des poincts I, K, L, l'on mene des paralleles à BG, & aussi de M, N, à FH. Donc les triangles & les parallelogrammes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Nous adiousterons icy le Theoreme suyuant pris de Commandin.

" Les triangles & les parallelogrammes, constituez sur bases egales, ou sur vne mesme base, sont entr'eux comme leurs hauteurs.

Soient deux triangles ABC, DEF, & deux parallelogrammes AB, DF, ayant les bases egales BC, EF. Ie dis que le triangle ABC, est au triangle DEF, & le parallelogramme AB, au parallelogramme DF, cõme la hauteur AI, à la hauteur DK,



Car posant IL, KM, egales à BC, EF: & menant LA, MD, le triangle ALI, sera egal à ABC, 1 38. 1.

estant sur bases egales LI, BC, & entre mesmes paralleles AG, IB. En la mesme maniere le triangle
m 7. 5. DKM, sera egal à DEF: m Donc comme ABC, à
n 1. 6. DEF: ainsi ALI, à DKM; n Mais comme ALI, à DKM, ainsi AI, à DK: (car posant AI, DK, pour bases, les hauteurs LI, KM, seront egales.) Donc ABC, sera aussi à DEF, comme AI, à DK. Ce qui est proposé.

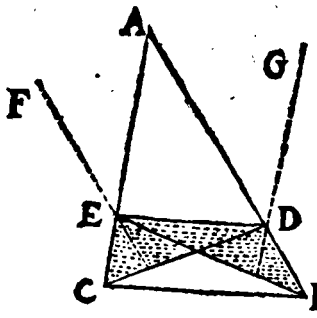
o 15. 5.

Mais d'autant que, o comme ABC, est à DEF,
p 34. 1. ainsi le parallelogramme AB, double du triangle ABC, est au parallelogramme DF, p double de DEF, le parallelogramme AB, sera aussi au parallelogramme DF, comme AI à DK. Ce que l'on peut aussi monstrer, menant LG, MH: l'on conclura le mesme, si les triangles & les parallelogrammes sont constituez sur vne mesme base, &c.

THEOREME 2. PROP. 2.

Si à l'vn des costez d'vn triangle, l'on mene quelque ligne droicte parallele, elle coupera les costez du triangle proportionellement: Et si les costez sont coupez proportionellement, la ligne droicte conioignãt les poincts des sections, sera parallele à l'autre costé du triangle.

Au triangle ABC, soit premierement la ligne droicte DE, parallele au costé BC. Ie dis que les costez AB, AC, sont coupez proportionellement aux poincts D & E: c'est à dire, que AD, est à DB, comme AE, à EC.



Car ayant mené les droictes lignes CD, BE, [q] les triangles DEB, DEC, constituez sur la base DE, & entre mesmes paralleles DE, BC, se-[q] 37. 1.

ront egaux entr'eux : Partant, comme le triangle ADE, est au triangle DEB ainsi le mesme ADE, sera au triangle DEC: [r] Mais comme ADE, est à DEB, ainsi la base AD, est à la base DB. (Puis que ces triangles sont de mesme hauteur comme il appert,) si par le poinct E, on mene la ligne EF, parallele à AB: (Et par mesme raison, comme le triangle ADE) au triangle DEC, ainsi la base AE, à la base EC, (AED, DEC, estans entre mesmes paralleles AC, DG.) [r] Donc comme AD, est à DB, ainsi AE, est à EC, (puis que ces deux raisons sont de mesme à la raison du triangle ADE, au triangle DEB, & du mesme triangle ADE, au triangle DEC. Ce qui est proposé. [7.] 5. [r] 11. 5. [r] 11. 6.

Secondement, que la droicte ligne DE, coupe les costez AB, AC, proportionellement. Ie dis que DE, est parallele à l'autre costé CB.

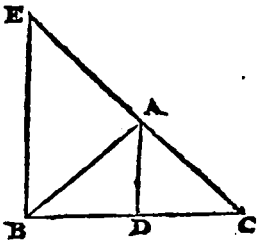
Car derechef ayant mené BE, CD, [t] comme la base AD, sera à la base DB; ainsi le triangle ADE, au triangle DEB, puis qu'ils sont de mesme hauteur: Mais comme AD, est à DB, ainsi AE, à EC, par l'hypothese. Donc comme [t] 16. 5.

le triangle ADE, ſera au triangle DEB : ainſi AE, ſera à EC. Mais derechef, comme la baſe AE, eſt à la baſe EC, ainſi le triangle ADE, au
u 11. 5. triangle DEC, eſtant de meſme hauteur. u Donc comme le triangle ADE, eſt au triangle DEB: ainſi le meſme triangle ADE, au triangle DEC.
x 9. 5. x Donc les triangles DEB, DEC, ſeront egaux: Et partant, puis qu'ils ſont conſtituez ſur meſ-
y 39. 1. me baſe, y ils ſeront auſſi entre meſmes paralleles. Donc DE eſt parallele à BC. Ce qui eſt propoſé : Partant, ſi à l'vn des coſtez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 3. PROP. 3.

Si vn angle d'vn triangle eſt coupé en deux parties egales, & que la ligne droicte qui coupe l'angle, coupe auſſi la baſe, les ſegments de la baſe auront meſme raiſon entr'eux, que les autres coſtez du triangle. Et ſi les ſegments de la baſe ont meſme raiſon entr'eux que les autres coſtez du triangle, la ligne droicte menee du ſommet au poinct de la ſection, coupe l'angle du triangle en deux egalement.

Soit le triangle ABC, dont l'angle BAC, ſoit coupé en deux egalement, par la ligne droicte AD, qui coupe auſſi la baſe au poinct D. Ie dis premierement, que comme BA, eſt à AC, ainſi BD, eſt à DC.



Car ſoit menee BE, parallele à DA, rencontrant CA, prolongee vers E. Or elles ſe rencontreront, puis que les angles C & CBE, ſont moindres que deux droicts, [z] car C, & CDA, ſont moindres que deux droits, [a] & CDA, eſt egal à CBE, l'externe à l'interne: C & CEB, ſeront pareillement moindres que deux droicts, & l'angle EBA, [b] ſera egal à ſon alterne BAD, & l'angle E, egal à l'externe DAC. Donc puis que les deux angles BAD, DAC, ſont egaux par l'hypotheſe; les angles EBA & E, ſeront egaux entr'eux: [c] partant les lignes AB, AE, egales entr'elles [d].

z 17. 1.
a 29. 1.
b 29. 1.
c 6. 1.
d 7. 5.

Donc, comme EA, ſera à AC, ainſi BA, ſera à la meſme AC: [e] Mais comme EA, eſt à AC, ainſi BD, eſt à DC, puis qu'au triangle BEC, la droicte ligne DA, eſt parallele au coſté BE. Donc comme BA, ſera à AC, ainſi BD, ſera à DC. Ce qui eſt propoſé.

e 2. 6.
f 15. 1.

Secondement, ſoit comme BA, à AC, ainſi BD, à DC. Ie dis que la droicte ligne AD, coupe l'angle BAC, en deux egalement: Car ſoit menee derechef la droicte ligne BE, par le poinct B, parallele à DA, rencontrant CA, prolongee au poinct E. D'autant donc que comme BA eſt à AC, ainſi BD, eſt à DC, par l'hypotheſe:

f 2. 6. f mais comme BD, eſt à DC, ainſi EA, eſt à AC: (puis qu'au triangle BCE, la ligne AD eſt paralle-
g 11. 5. lele au coſté BE) g comme BA, ſera à AC, ainſi EA
h 9. 5. à la meſme AC. h Donc BA, & AE, ſeront egales
i 5. 1. entr'elles, i partant les angles ABE & E, ſont
k 29. 1. egaux: k donc puis que l'angle ABE, eſt egal à ſon alterne BAD, & l'angle E, egal à ſon externe DAC, les deux BAD, DAC, ſeront egaux entr'eux: Ce qui eſt propoſé. Donc ſi l'angle d'vn triangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

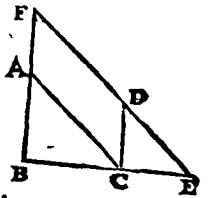
THEOREME 4. PROP. 4.

Des triangles equiangles, les coſtez qui ſont autour des angles egaux, ſont proportionaux; Et les coſtez qui ſouſtiennent les angles egaux, ſont homologues, ou de meſme raiſon.

Soient les triangles equiangles ABC, DEC, c'eſt à dire, que les angles ABC, DCE, ſoient egaux, & A & D: ſemblablement ACB, & E. Ie dis, que comme le coſté AB, eſt à BC, ainſi DC, à CE, & comme BC à CA, ainſi CE à ED; Et finalement, comme AB à AC, ainſi DC à DE: Car ainſi les coſtez à l'entour des angles egaux, ſont proportionaux: & les coſtez qui ſouſtiennent les angles egaux, ſont homologues, ou de meſme raiſon: c'eſt à dire, que tous les antecedens ſont oppoſez à angles egaux, & les conſequens pareillement.

Soient conſtituez BC, CE, en ligne droicte, en ſorte que l'angle externe DCE, ſoit egal à

l'interne A B C. Pareillement l'externe A C B, egal à l'interne D E C; & d'autant que les deux angles A B C, A C B, sont moindres que deux droicts: mais D E C, est egal à A C B, les deux angles B & E, seront moindres que deux droicts [l] parquoy B A, E D, prolongees de la part de A & D, se rencontreront. Soient donc icelles prolongees, & se rencontrent au poinct F.



l 11. ax.

Mais d'autant que l'angle externe D C E, est egal à l'interne & oppose A B C, [m] C D, B F, seront paralleles, & par mesme raison C A, E F, aussi paralleles, l'angle externe A C B, estant egal à l'interne D E C. Donc A C D F, est parallelogramme: [n] partant A F, egale à C D, & C A, à D F. Donc d'autant qu'au triangle B E F, la ligne A C, est parallele à E F, [o] A B, sera à A F, c'est à dire à D C, son egale, comme B C à C E. Donc en changeant comme A B, à B C, ainsi D C, à C E.

m 28. 1.

n 34. 1.

o 2. 6.

Derechef, puis qu'au mesme triangle B E F, la li. C D est parallele au costé B F, comme B C sera à C E, ainsi F D, c'est à dire C A; (qui est egale à F D) à E D. [p] Donc en changeant comme B C, à C A, ainsi C E, à E D; partãt, puis que comme A B, à B C, ainsi D C. à C E, & comme B C, à C A, ainsi C E, à E D: en raison egale A B, sera à C A, comme D C à E D: Ce qui est proposé. Donc des triangles equiangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

p 22. 5.

COROLLAIRE I.

D'icy il s'ensuit, que si en vn triangle on mene vne ligne parallele à vn des costez, elle ostera vn

triangle semblable au tout : Comme au triangle FBE, où la ligne CD, est menee parallele à BF. Ie dis que le triangle DCE, est semblable au triangle FBE: Car iceux sont equiangles, [q] puis que les angles EDC, ECD, sont egaux aux externes F & B, chacun au sien, & l'angle E, commun, [r] partant, comme il est demonstré, ils ont les costez au tour des angles egaux proportionaux: Donc, selon la definition, ils sont semblables.

q 29. 1.

r 4. 6.

COROLLAIRE II.

Il s'ensuit encore, que si deux triangles equiangles, c'est à dire, qui ont les costez proportionaux, sont disposez selon vn angle, en sorte que deux costez de mesme raison soient paralleles, les autres costez se rencontreront directement; comme aux triangles cy dessus, où AB, DC, & AC, DE estans paralleles, les autres BC, CD, se rencontrent directement, comme il est manifeste par la 14. Prop. du 1. liu. tous les angles au poinct C, estans monstrez egaux aux 3. angles du triangle ABC, c'est à dire, à 2. droicts, par la 32. Prop. du 1. liu. Ce qu'Euclide demonstre encore à la 32. de ce liure.

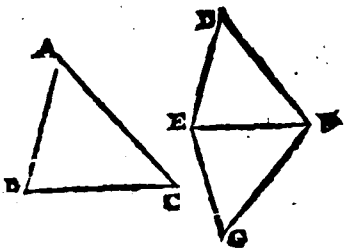
SCHOLIE.

Henrion Copiste, a obmis ce premier Corollaire, ce qu'il ne deuoit faire, attendu qu'il s'en sert aux demonstrations, & le cite, tant à la 4. Proposition du 15. liure, qu'autres Propositions, & ce faisant il confirme ses demonstrations par des choses qu'il n'a demonstrees.

THEOREME 5. PROP. 5.

Si deux triangles ont les costez proportionaux, iceux triangles seront equiangles, & auront les angles egaux, sous lesquels les costez de mesme raison sont soustendus.

Soient deux triangles ABC, DEF, qui ayent les costez proportionaux: & soit AB à BC, comme DE à EF, & cõme BC à CA: ainsi EF à FD, & finalement, comme AB à AC, ainsi DE à DF. Ie dis que ces triangles sont equiangles; à sçauoir, que l'angle A, est egal à l'angle D, & l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F: ainsi les costez homologues ou de mesme raison, sont opposez aux angles egaux.



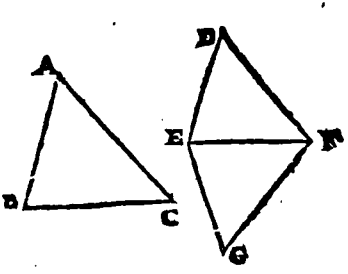
Car soit fait l'angle FEG, egal à l'angle B, & EFG, egal à C, les deux lignes EG, FG, se rencontreront au poinct G. Et [s] l'autre angle G, sera egal à l'autre angle A. Donc les triangles ABC, GEF, sont equiangles: [t] Partant, comme AB à BC, ainsi GE à EF. Mais comme AB à BC, ainsi DE à EF, par l'hypothese: [v] Donc comme GE à EF, ainsi DE à la mesme EF: parquoy GE, DE, seront egales.

[s] 32. 1.
[t] 4. 6.
[v] 11. 5.

Derechef, puis que BC est à CA, comme EF
γ 4. 6. γ 11. 5. à FG: γ mais comme BC, est à CA, ainsi EF, à FD, par l'hypothese: Comme EF, sera à FG, ainsi la
ζ 9. 5. mesme EF, sera à FD, ζ donc FG, & FD, seront egales. Partant puis que les costez GE, GF, sont egaux aux costez DE, DF, chacun au sien, & la ba-
a 8. 1. se EF, a commune, les angles G & D, seront egaux:
b 4. 1. b donc les autres angles GEF, GFE, seront egaux aux autres DEF, DFE, chacun au sien. Parquoy puis que l'angle G est egal à l'angle A, aussi D, son egal, sera egal à A, par mesme raison DEF, egal à B, & DFE, egal à C. Ce qui est proposé. Donc si deux triangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 6. PROP. 6.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez autour d'iceux angles egaux proportionaux, iceux triangles seront equiangles, & auront les angles egaux, sous lesquels les costez de mesme raison sont soustendus.



Soit l'angle B, du triãgle A B C, egal à l'angle E, du triangle DEF: & soient les costez A B, BC, proportionaux aux costez DE, EF; c'est à dire, soit AB, à BC, comme DE, à EF. Ie dis que les

les autres angles sont egaux aux autres angles, sçauoir l'angle A, egal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F : ainsi les angles egaux sont opposez aux costez homologues ou de mesme raison.

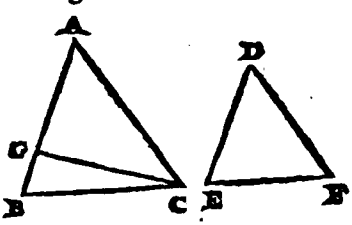
Car soit faict l'angle FEG, egal à B, & EFG, egal à C, le triangle GEF, sera equiangle, au triangle ABC, comme il est monstré en la precedente Proposition. [c] Partant, comme AB à BC, ainsi GE à EF: mais comme AB à BC, ainsi DE à EF, par l'hypothese. [d] Donc comme DE à EF, ainsi GE à la mesme EF. Donc DE, GE, seront egales: parquoy, puis que les costez DE, EF, sont egaux aux costez GE, EF, & les angles contenus d'iceux aussi egaux, (car l'angle B, auquel l'augle GEF est fait egal, est egal à DEF par l'hypothese: donc les deux angles au point E seront egaux) [e] les autres angles D, & EFD seront egaux aux autres G, & EFG. Donc puis que l'angle G est egal à l'angle A, & EFG egal à C, les angles D, & EFD, seront aussi egaux aux angles A & C: & partant les triangles ABC, DEF, seront equiangles, ce qui est proposé. Donc si deux triangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

c 4. 6.
d 11. 5.
9. 5.
e 4. 6.

THEOREME 7. PROP. 7.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & à l'entour d'vn autre angle les costez proportionaux; Mais des autres ensemble, l'vn & l'autre soit moindre, ou non moindre qu'vn droict: les triangles seront equiangles, & auront les angles egaux, à l'entour desquels les costez sont proportionaux.

Soit l'angle A, du triangle ABC, egal à l'angle D, du triangle DEF, & les costez AC, CB, à l'entour de l'angle ACB, proportionaux à DF FE, à l'entour de l'angle F, c'est à dire, soit AC à BC, comme DF à FE: à telle condition toutefois, que chacun des autres angles B & E, soit moindre qu'vn droict ou non moindre. Ie dis qu'iceux triangles sont equiangles, à sçauoir, que les angles ACB, & F, à l'entour desquels les costez sont proportionaux, & les angles B & E sont egaux.



Car soit premierement tant B que E, moindre qu'vn droit: cela estant, si les angles ACB & F sont egaux, la Proposition est manifeste: Mais si ACB & F, ne sont egaux, soit ACB plus grand que F, & soit fait ACG, egal à F. Donc puis que A, est posé egal à D, [f] l'autre angle AGC, sera egal à E. Partant, les triangles AGC, DEF, seront equiangles. [g] Parquoy comme AC, sera à CG, ainsi DF à EF? Mais comme DF à FE, ainsi AC à CB, par l'hypothese. [h] Donc comme AC à CG, ainsi la mesme AC à CB: [i] et partant CG, CB, seront egales, [k] & les angles CBG, CGB, seront egaux.

f 32. 1.
g 4. 6.
h 11. 5.
i 9. 5.
k 5. 1.
l 13. 1.

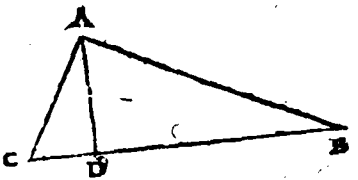
Donc puis que l'angle B, est posé moindre qu'vn droict CGB, sera aussi moindre qu'vn droit, & partant AGC, sera plus grand qu'vn droict: Puis que AGC, CGB, sont egaux à deux droicts. Or l'angle AGC, est monstré egal à l'angle E: donc l'angle E, sera aussi plus grãd qu'vn droit: Mais il est moindre qu'vn droit par l'hypot. Ce qui est impossible.

Secondement, soit tant l'angle B, que E, non moindre qu'vn droict ; comme auparauant l'angle B, sera egal à CGB; & partant CGB, sera non moindre qu'vn droict: & par ainsi les angles CBG, CGB, au triangle BCG, ne seront pas moindres que deux droicts : mais plus grands ou egaux à deux droicts, ce qui est absurde; [l] Car ils sont moindres que deux droicts: donc les angles ACB & F, ne sont pas inegaux, mais egaux, & partant [m] les autres angles B & E sont egaux; Ce qui est proposé. Donc si deux triangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. l 17. I. m 32. 1.

THEOREME 8. PROP. 8.

Si au triangle rectangle, l'on mene vne ligne perpendiculaire de l'angle droict, sur la base, les triangles qui sont de part & d'autre de la perpendiculaire, sont semblables au tout, & entr'eux.

Au triangle ABC, l'angle BAC, soit droict, duquel soit menee la perpendiculaire AD, sur la base CB. Ie dis que les triangles ADB, ADC, sont semblables à tout le triangle ABC, & entr'eux.



Car puis qu'aux triãgles ABC, DBA, les angles BAC, & ADB, sont droicts, & l'angle B commun, [n] les autres ACB, & DAB, seront egaux. Donc le triangle DBA, est equian- n 32. 1.

o 4. 6. gle au triangle A B C, ° & partant ils auront les coſtez à l'entour des angles egaux proportionaux, &c. C'eſt à dire, que CB, ſera à BA, comme BA à BD, & comme BA à AC: ainſi BD à DA, & comme BC à CA, ainſi BA à AD : car ainſi les coſtez de meſme raiſon ſont oppoſez aux angles egaux, comme veut la quatrieſme Propoſition de ce liure. Parquoy le triangle ADB, eſt ſemblable à tout le triangle ABC. Par meſme raiſon on monſtrera que le triangle ADC, eſt ſemblable au meſme triangle ABC : Car les angles BAC, & ADC, ſont droicts, & l'angle C commun; P Partant les autres angles ABC, & CAD, ſont egaux, q parquoy comme BC à CA, ainſi CA à CD, & comme CA à AB, ainſi CD à DA, & comme CB à BA, ainſi CA à AD : car ainſi les coſtez de meſme raiſon ſont oppoſez aux angles egaux, par a quatrieſme Propoſition du ſixieſme.

p 32. 1.
q 4. 6.

Tout de meſme, l'on demonſtrera que les triangles ADB, ADC, ſont ſemblables entr'eux : puis que les angles ADB, ADC, ſont droicts, & ABD, CAD, ſont monſtrez egaux, & auſſi les angles BAD, ACD, egaux. r Et partant, comme BD à DA, ainſi DA à DC; & comme DA à AB, ainſi DC à CA, & comme AB à BD, ainſi CA à AD. *Donc ſi au triangle* rectangle l'on mene vne ligne perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

r 4. 6.

COROLLAIRE.

De cette Propoſition il eſt euident, que la perpendiculaire menee de l'angle droict ſur la baſe, au triangle rectangle, eſt moyenne proportionelle entre les deux ſegments de la baſe. Semblable-

ment vn chacun des costez qui contiennent l'angle droict, est moyen proportionel entre toute la base, & le segment de la base qui est adjacent, ou touche iceluy costé.

Car il est demonstré que comme BD est à DA, ainsi DA est à DC: & partant DA, est moyenne proportionelle entre BD & CD. Semblablement comme CB est à BA, ainsi BA à BD, & par ainsi BA est moyenne proportionelle entre CB. BD. Finalement, il est demonstré que comme BC est à CA, ainsi CA est à CD. Et partant CA est moyenne proportionelle entre BC, & CD. Ce qui est proposé.

SCHOLIE.

Le Copiste & son Traducteur, ont adiousté ces mots à cette 8. Prop. Elle coupera iceluy triangle en deux autres triangles, *ce qui n'est pas au texte d'Euclide, comme s'ensuit.*

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τριγώνα ὅμοιά ἐστιν, τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις: *C'est à dire*, au triangle rectangle, si de l'angle droict on mene vne ligne perpendiculaire sur la base, les triangles qui sont à la perpendiculaire, (ou de part & d'autre de la perpendiculaire) sont semblables au tout, & entr'eux, *Donc le texte n'est pas comme ils le pretendent traduire, & ainsi ces marousles, ostent, adioustent, transposent ou desguisent les traductions & trauaux des autres, afin d'en faire leur propre en les copiant: Et en la 2. Prop. de ce liure cy-deuant, ils adioustent ces mots.* Laquelle coupe

les deux autres costez, elle les coupera, &c. *Ce qui n'est pas au texte, comme il appert.*

Ἐὰν τριγώνου δυσὶ μίαν τῶν πλευρῶν, ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς, &c. *C'est à dire.* Si à l'vn des costez d'vn triangle l'on mene vne ligne parallele, elle coupera les costez du triangle proportionellement, &c.

En la 4. 6. & 7. Propositions, là où Euclide dit: αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας; *C'est à dire,* qui sont autour des angles egaux: *Le Copiste dit,* au long des angles egaux. *Ce vilain a esté encore si impudent, de copier 9. Pro. que i'ay adiousstees à la fin du 5. liure, apres celles d'Euclide, lesquelles auparauãt n'auoiẽt esté encore traduites d'aucun, & les mettre en sa 3. Edition des 6. premiers liures, auec tout ce qu'il a copié ailleurs en ma traduction, & faict ainsi des collections de tout ce qui est traduict, & neantmoins se plainct en son Onologie, de ce que ie l'ay appellé Copiste; en quoy il a grand tort, estant recogneu & tenu de tous les doctes pour le plus franc Copiste, que iamais fut Secretaire de S. Innocent.*

Et qu'ainsi ne soit, estant chez se sieur Enleaume, il copia plusieurs escrits ou collections d'iceluy. qu'il fit imprimer par apres, & l'intitula, Memoires Mathematiques, *dont il fit present d'vn exemplaire audit Enleaume, lequel en fut tellement faschẽ (cela estant sorty de son estude, à son deceu & mal en ordre, n'y ayant apporté la derniere main, & venu en lumiere sous le nom de Henrion) que de despit il le ietta deuant ledit Henrion dedans le feu, & le fit bruſler en sa presence, luy re-*

prochant qu'il eſtoit bien effronté de copier ainſi ſes eſcrits.

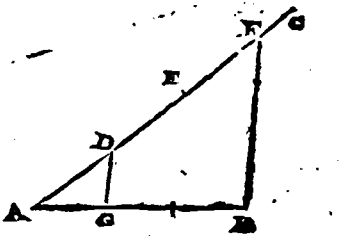
Cela eſtant ainſi paſſé, ledit Henrion s'aſſocia auec vn nommé Dimanche (lequel ſe nomme encore autrement) lequel Dimanche fit quelques remarques ou correction, ſur la traduction de Monſieur Donnot, auec pluſieurs Demonſtrations, Scholies & Corollaires tirez de Clauius, que ledit Dimanche inſera en la traduction dudict Donnot pour la deſguiſer, & bailla le tout à Henrion pour le faire imprimer ſous ſon nom; & depuis Dimanche & Henrion ont ainſi continué, à ſçauoir Dimanche à traduire & colliger, & Henrion à copier, & faire imprimer & vendre. Et voila comme ce bel oyſeau ſe pare des plumes des autres.

PROBLEME 1. PROP. 9.

D'vne ligne droicte donnee, en oſter vne partie demandee.

Soit la ligne droicte donnee A B, de laquelle il faut oſter la tierce partie, ou autre telle que l'on voudra.

De A, ſoit menee A C, faiſant angle quelconque auec AB, comme CAB; Et de A C, ſoient priſes autant de parties egales, de telle grãdeur qu'on voudra, que la par-



tie à soustraire denote, (car AC, doit estre aussi grande qu'il sera de besoin) comme en l'exemple proposé, il faut prendre trois parties egales AD, DE, EF: puis soit conioincte FB, à laquelle par le poinct D, soit menee DG, parallele à FB. Ie dis que AG, est la troisiesme partie demandee de AB.

Car puis qu'au triangle ABF, DG, est parallele au costé FB: [f] comme FD, à DA, ainsi BG, à GA, [g] donc en composant comme FA à DA, ainsi BA à GA: mais FA est triple de AD par la construction; Donc BA, sera aussi triple de AG: & partant AG, sera la tierce partie demandee de AB. Donc d'vne ligne droicte donnee, &c. Ce qu'il falloit faire.

f 2. 6.
g 18. 5.

SCHOLIE.

Mais si de AB, on vouloit oster vne partie non aliquote, mais vne partie qui en contienne plusieurs, lesquelles ne sõt vne partie aliquote, comme $\frac{4}{11}$. de AB: Il faudra prendre 11. *parties egales en*



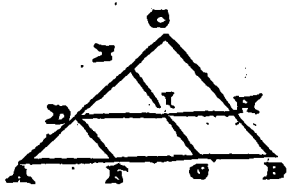
AC, comme iusques à D, & ayant mené DB, faut mener EF, parallele à icelle, du poinct E, terme des 4. parties AE, la ligne AF, sera la partie requise. Car derechef cõme DA *à* AE, *ainsi* BA *à* AF: *Et par cõuersion de raison, cõme* AE *à* AD, *ainsi* AF

à AB: mais AE est $\frac{1}{n}$. de AD, par la construction: donc AF, sera mesme partie de AB: Ce qui est proposé. Semblablement on esterra quelconque autre partie non aliquote, &c.

PROBLEME 2. PROP. 10.

Couper vne ligne droicte donnee, non coupee: semblablement à vne ligne droicte donnee & coupee.

Soit la ligne droicte AB, qu'il faut couper semblablement comme la ligne droicte AC, est coupee aux poincts D & E. c'est à dire en parties proportionelles, aux parties AD, DE, EF. Soient conioinctes les deux lignes donnees au poinct A, faisant angle quelconque BAC, & soit conioincte la ligne droicte BC, puis de



D & E soient menees DF, EG, paralleles à BC. Ie dis que AB, est coupee semblablement à F & G, comme AC est coupee par D, E: [u] c'est à dire, comme AD à DE, ainsi AF à FG. Donc les parties AF, FG, sont proportionelles à AD, DE. Que si on mene DH, parallele à FB, coupant EG au poinct I. [x]

u 2. 6.

x 2. 6.

Derechef, comme DE sera à EC, ainsi DI à IH: c'est à dire, ainsi FG à GB: [y] D'autant que FG est egale à DI, & GB à IH, parquoy les parties FG, GB, seront aussi proportionelles à DE,

y 34. 1.

EC. Et eſt la meſme raiſon s'il y auoit d'auantage de parties, &c. Partant nous auons coupé, &c. Ce qu'il falloit faire.

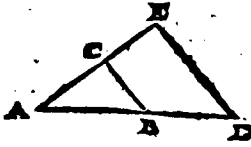
SCHOLIE.

Par ce Probleme on diuiſera vne ligne en tant de parties egales que l'on voudra, comme ſi l'on vouloit diuiſer AB en 11. parties egales, ſoit menee AC, faiſant angle auec AB; & en AC, ſoient priſes 11. parties egales, ſçauoir AD, & menee DB, puis de tous les poincts de diuiſion, ſoient menées ſur AB, des lignes paralleles à DB, comme eſt EF, l'on aura le requis. Voyez la figure du Scholie precedent.

PROBLEME 3. PROPO. 11.

A deux lignes droictes donnes, trouuer la troiſieſme proportionelle.

Soient deux lignes droictes AB, AC, diſpoſees en ſorte qu'elles faſſent angle quelconque A, auſquelles il faut trouuer la troiſieſme proportionelle, c'eſt à dire, comme AB eſt à AC, ainſi AC ſoit à vne troiſieſme.



Soit prolongee AB, poſee antecedente à D, & ſoit priſe BD, egale à AC, conſequente ou moyenne : puis ayant mené BC par D, ſoit menee DE parallele à BC, rencontrant AC prolongee à E. Ie dis que CE, eſt la troiſieſme proportionelle, c'eſt à dire, que

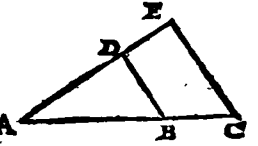
comme AB eſt à AC, ainſi AC à CE.

Car puis qu'au triangle ADE, BC eſt parallele à DE, [z] comme AB ſera à BD, ainſi AC ſera à CE: [z] 2. 6.
[a] Mais comme AB à BD; ainſi la meſme AB à AC, [a] 7. 5.
egale à BD: Donc comme AB à AC, ainſi AC à CE, ce qui eſt propoſé. Donc à deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 4 PROPO. 12.

A trois lignes droictes donnees, trouuer la quatrieſme proportionelle.

Soient les trois lignes droictes donnees A B, BC, AD, auſquelles il faut trouuer la quatrieſme proportionelle: ſçauoir comme AB à BC, ainſi AD à la quatrieſme. Soient diſpoſees les deux premieres ſelon vne ligne droicte, laquelle ſoit AC: Mais la 3. AD, auec la premiere AB, faſſe vn angle quelconque



A, puis ſoit conioincte BD, à laquelle par C ſoit menee CE, parallele, rencontrant AD prolongee à E. Ie dis que DE, eſt la quatrieſme proportionelle.

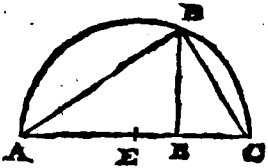
Car puis qu'au triangle ACE, BD, eſt menee parallele au coſté CE, [b] comme AB ſera à BC, [b] 2. 6.
ainſi AD à DE: Partant DE, eſt la 4. proportionelle: parquoy à trois lignes droites donnees, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 5. PROP. 13.

A deux lignes droictes donnees, trouuer la moyenne proportionelle.

Soient deux lignes droictes AB, BC, auſquelles il faut trouuer la moyenne proportionelle. Eſtant diſpoſees ſelon la ligne droite AC: ſoit diuiſee AC en deux egalement au poinct E, & du poinct E, comme centre à l'interualle EA, ou EC, ſoit deſcrit le demy-cercle ADC: puis du poinct B à AC, ſoit menee la perpendiculaire BD, iuſques à la circonference à D. Ie dis que BD, eſt moyenne proportionelle entre AB, & BC.

Car ayant mené AD, CD, [c] l'angle ADC, ſera droict au demy-cercle: & puis que de l'angle droict du triangle rectangle ADC, la perpendiculaire DB,



c 31. 1.

d *Coroll.* 8. 6.

eſt menee ſur la baſe AC, icelle BD ſera moyenne [d] proportionelle entre AB BC. Donc à deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

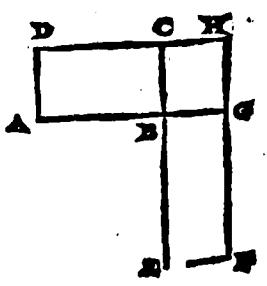
Par cette demonſtration il eſt manifeſte, que la ligne droicte menee de quelconque poinct du diametre du cercle à la circonference, perpendiculaire à iceluy diametre, eſt moyenne proportionelle entre les ſegments du diametre faits par la perpendiculaire. Car il ſera ſemblablement demonſtré, ayant

mené les lignes des extremitez du diametre au poinct de la circonference, d'où eſt menee la perpendiculaire.

THEOREME 9. PROP. 14.

Les coſtez qui ſont autour des angles egaux, des parallelogrammes egaux, qui ont vn angle egal à vn angle, ſont reciproques: Et les parallelogrammes qui ont vn angle egal à vn angle, & les coſtez autour des angles egaux reciproques, ſont egaux.

Soient deux parallelogrammes egaux AC, BF, ayans les angles ABC, EBG, egaux. Ie dis que les coſtez d'alentour d'iceux angles, ſont reciproques, c'eſt à dire, comme AB, à BG, ainſi EB, à BC.



Car ſoient conioincts iceux parallelogrammes ſelon les angles egaux: deſorte que AB, BG, faſſent vne ligne droicte: EB, BC, [c] feront auſſi vne ligne droicte, comme il eſt euident: & ſoient prolongees DC, FG, iuſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent à H.

[c] 2. c. ſ. 13. & 14. 1.

D'autant donc que les parallelogrammes DB, BF ſont egaux: [f] comme DB ſera à BH, ainſi BF, au meſme BH: mais comme DB à BH, [g] ainſi la

[f] 7. 5.
[g] 1. 6.

baſe AB, à la baſe BG. D'autant que les parallelogrammes ſont de meſme hauteur: ſemblablement comme BF à BH, ainſi la baſe EB à la baſe BC.

h 11. 5. [h] Donc comme AB à BG, ainſi EB à BC. Ce qui eſt propoſé.

Au contraire, ſoient les coſtez à l'entour des ſuſdits angles egaux reciproques, ſçauoir comme AB à BG, ainſi EB à BC. Ie dis que les parallelogrammes DB, BF, ſont egaux.

Soit faict la meſme conſtruction: puis que AB

i 11. 6. eſt à BG, cõme EB à BC: [i] mais comme AB à BG,

k 11. 5. ainſi DB à BH, & comme EB à BC, ainſi BF au meſme BH, [k] pareillement DB, ſera à BH, com-

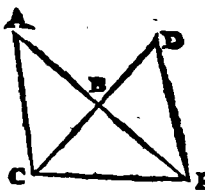
l 9. 5. me BF, au meſme BH: [l] Et partant les parallelogrammes DB, BF, ſeront egaux. Donc les coſtez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 10. PROPO. 15.

Les coſtez qui ſont autour des angles egaux des triangles egaux, & qui ont vn angle egal à vn angle, ſont reciproques: Et les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, & les coſtez qui ſont autour des angles egaux reciproques, ſont egaux.

Soient 2. triangles egaux ABC, DBE, ayans les angles au poinct B egaux. Ie dis que les coſtez qui ſont à l'entour d'iceux angles ſont reciproques: C'eſt à dire, comme AB, à BE, ainſi DB, à BC.

Soient conioincts iceux ſelon les angles egaux, de ſorte que AB, BE, faſſent vne ligne droicte, cela



eſtant, DB, BC, feront auſſi vne ligne droicte, comme il eſt dict à la precedente: & ſoit menee CE: d'autant que les triãgles ABC, DBE, ſont egaux, comme ABC, ſera à BCE, ainſi DBE, au meſme BCE: mais comme le triangle ABC, au triangle BCE, [m] ainſi la baſe AB à la baſe BE, eſtans iceux de meſme hauteur, & ſemblablement comme DBE à BCE, ainſi eſt la baſe DB, à la baſe BC; [n] Donc comme AB à BE, ainſi DB à BC. Ce qui eſt propoſé. 7. 5. m 1. 6. n 11. 5.

Maintenant ſoient les coſtez autour des angles egaux au poinct B, reciproques, à ſçauoir, comme AB à BE: ainſi DB à BC. Dis que les triangles ABC, DBE, ſont egaux.

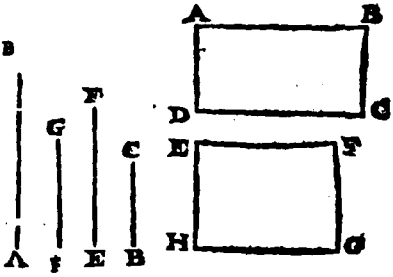
Soit faicte la meſme conſtruction: D'autant que cõme AB eſt à BE, ainſi DB à BC: mais comme AB à BE, [o] ainſi le triangle ABC, au triangle BCE, & comme DB à BC, ainſi le triangle DBE, au meſme triangle BCE. [p] Donc comme ABC, ſera à BCE, ainſi DBE, ſera au meſme BCE, & partant les triangles ABC, DBE, ſeront egaux. Donc les coſtez qui ſont autour des angles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. o 1. 6. p 11. 5.

THEOREME 11. PROP. 16.

Si quatre lignes droictes ſont proportionelles, le rectangle contenu ſous les extremes, eſt egal au rectangle contenu ſous les moyennes: Et ſi le rectangle contenu

sous les extremes, est egal au rectangle contenu sous les moyennes; lcelles quatre lignes droictes seront proportionelles.

Soient les quatre lignes droictes A B, FG, EF, BC, proportionelles, à sçauoir comme AB, à FG, ainsi EF à BC: & soit le rectangle A C, contenu sous les extremes AB, BC, & le rectangle EG, contenu sous les moyennes EF, FG. Ie dis qu'iceux rectangles AC, EG, sont egaux: Car puis que les angles B & F sõt egaux estãs droits & que A B, est à
q 14. 6. FG, cõme EF à BC. Iceux costez qui sont autour des angles egaux B & F, seront reciproques. q Partant les parallelogrammes AC, EG, seront egaux. Ce qui est proposé.



Au cõtraire, soient les rectãgles A C, EG, egaux. Ie dis que les 4. lignes AB, FG, EF, B C, sont proportionelles, sçauoir, comme A B à F G, ainsi EF, à BC.

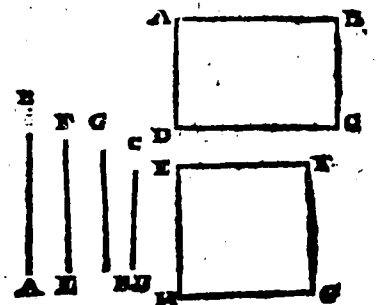
Car puis que les rectangles A C, E G sont egaux, ayans les angles B & F egaux, sçauoir
14. 6. droicts, r les costez qui sont autour d iceux angles seront reciproques: à sçauoir, comme AB à FG, ainsi EF à BC: partant si quatre lignes droites, &c, Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME

THEOREME 12. PROP. 17.

Si trois lignes droictes ſont proportionnelles: *le* rectangle contenu ſous les extremes *eſt* egal au quarré de la moyenne: Et ſi le rectangle contenu ſous les extremes, eſt egal au quarré de la moyenne; les trois lignes droictes ſeront proportionnelles.

Soient trois lignes droictes proportionelles, A B, EF, BC: ſçauoir, comme AB à EF, ainſi EF, à BC: & ſoit le rectangle AC, contenu ſous les extremes AB, BC, & le quarré de la moyenne EF, ſoit EFGH. Ie dis que le rectangle AC, & le quarré EG ſont egaux.



Car ſoit Priſe la ligne FG, egale à EF: les quatre lignes droictes AB, EF, FG, BC ſeront proportionelles: à ſçauoir, comme AB à EF, ainſi FG à BC: Et le quarré EG, ſera contenu ſous les moyennes EF, FG, eſtans EF, FG, egales: Parquoy le rectangle AC, contenu ſous les extremes AB, BC, eſt egal au quarré EG: c'eſt à dire, au rectangle contenu ſous les moyennes EF, FG. Ce qui eſt propoſé. 16. 6.

Mais soient egaux le rectangle AC, & le quarré EG. Ie dis que comme AB est à EF, ainsi EF est à BC: Car les rectangles AC, EG, estans egaux: comme AB, sera à EF, ainsi FG à BC: [t] Mais comme FG à BC, ainsi EF, egale à icelle, FG, est à la mesme BC; Partant, comme AB à EF, ainsi EF à BC. Donc si trois lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

t 16, 6. u 7. 5.

COROLLAIRE.

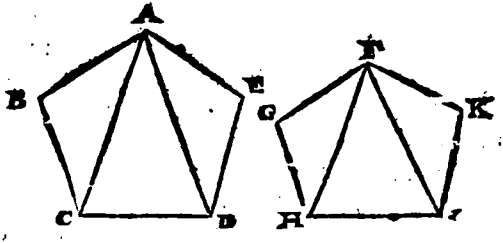
De la derniere partie de ce Theoreme, il s'ensuit que toute la ligne droicte est moyenne proportionelle entre deux autres quelconques lignes droictes, qui contiennent vn rectangle egal au quarré d'icelles: car de ce que les droictes lignes AB, BC. contiennent vn rectangle egal au quarré de la droicte ligne EF, il a esté monstré que comme AB est à EF, ainsi EF, est à BC. Parquoy EF est moyenne proportionelle entre AB, & BC.

PROBLEME 6. PROP. 18.

Sur vne ligne droicte donnée, descrire vne figure rectiligne semblable; & semblablement posee à vne figure rectiligne donnee.

Soit la ligne droicte donnee CD, sur laquelle il faut descrire vne figure rectiligne semblable, & semblablement posee à la figure rectiligne HIK FG. De quel angle qu'on voudra, comme de F, soient menees à chacun des angles opposez, les lignes droictes FH, FI, lesquelles diuisent le recti-

ligne en trois triangles FGH, FHI, FIK Puis soit faict l'Angle DCA, egal à l'angle IHF: & l'angle CDA egal à HIF. Or AC, AD, se rencon-



treront à A, estans les angles ACD, ADC, moindres que deux droicts, estans faits egaux à FHI, FIH, (qui sont moindres que deux droicts) & l'autre CAD, sera egal à l'autre HFI, & le triangle CAD, equiangle au triangle HFI. u 17. 1. x 32. 1.

Derechef, l'angle ADE, soit fait egal à FIK, & DAE, egal à IFK. Dautant que les deux angles KIF, KFI, sont moindres que 2. droicts, les 2. EAD, EDA, egaux à iceux, seront pareillement moindres que deux droicts. Et partant AE, DE, se rencontreront au poinct E, & le triangle AED, sera equiangle au triangle FKI, par la mesme raison. x 17. 1.

Dauantage, soit faict le triangle ABC, equiangle au triangle FGH, par mesme raison; & ainsi des autres, s'il y a dauantage de triangles. Ie dis que le rectiligne ABCDE, est semblable, & semblablement posé au rectiligne FGHIK. Car puis que l'angle ACD, est faict egal à FHI, & ACB, à FHG, le tout BCD, sera egal à GHI: Et par mesme raison CDE, est egal à HIK, & les autres egaux aux autres, comme il appert par la constru-

ction, puis que chacune partie de l'vn, eſt faicte egale à chacune des parties de l'autre: partant le rectiligne ABCDE, ſera equiangle à FGHIK.

y 4. 6. z 22. 5. y Or d'autant que comme CD eſt à DA, ainſi HI à IF, & comme AD à DE, ainſi IF à IK, z en raiſon egale CD ſera à DE, comme HI à IK: partant les coſtez autour des angles egaux CDE,

a 4. 6. HIK, ſont proportionaux: a Tout de meſme, les coſtez autour des angles egaux E & K, ſont proportionaux, à cauſe des triangles AED, FKI,

b 4. 6. equiangles. b Derechef EA eſt à AD, comme KF à FI, & AD à AC, comme FI à FH, & AC

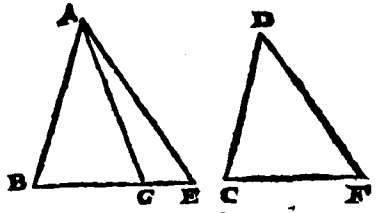
c 22. 5. à AB, comme HF à FG. c Donc en raiſon egale EA ſera à AB, comme KF à FG: Parquoy les coſtez autour des angles egaux EAB, KFG, ſont proportionaux, & ainſi des autres: Partant, puis que les rectilignes ſont equiangles, & ont les coſtés autour des angles egaux proportionaux, ils ſont ſemblables, & ſemblablement deſcrits: Donc ſur vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOREME 13. PROP. 19.

Les triangles ſemblables, ſont entr'eux en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon.

Soient les triangles ſemblables ABE, DCF, ayans les angles B & C egaux. Item E & F, & comme AB à BE, ainſi DC à CF. Ie dis qu'ils ſont entr'eux en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon BE & CF, ou AB, DC, ou AE, DF, c'eſt à dire, ſi on trouue la 3. proportionelle BG, le triangle ABE, ſera au triangle DCF, comme, BE eſt à BG: Puis que par la 10. Definition du 5. la raiſon doublee eſt telle. Car ſoit donc BG, 3. propor-

tionelle, & ſoit cõioincte A G. D'autant que comme AB eſt à BE, ainſi DC à CF: en changeant



11. 6.

comme AB, ſera à DC, ainſi BE à CF: mais comme BE à CF, ainſi CF à BG, par la conſtruction; [d] Donc comme AB à DC, ainſi CF à BG: partant puis que les triangles ABG, DCF, ont les coſtez autour des angles egaux B & C reciproques; [e] ils ſeront egaux entr'eux. Donc comme le triangle ABE, ſera au triangle DCF, [f] ainſi le meſme triangle ABE, ſera au triangle ABG: Mais comme le triangle ABE, eſt au triangle ABG, [g] ainſi la baſe BE, à la baſe BG, eſtant de meſme hauteur. Donc comme le triangle ABE, eſt au triangle DCF, ainſi BE, eſt à BG.

d 11. 5. e 15. 6. f 7. 5.

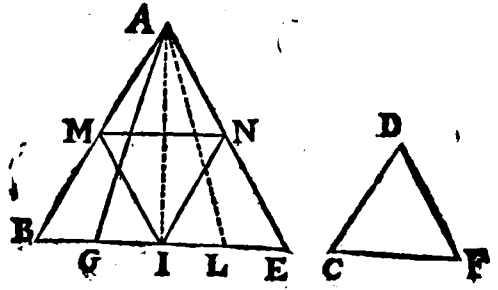
Or puis que les trois lignes BE, CF, BG, ſont continuellement proportionelles, la raiſon de la premiere BE, à la 3. BG, ſera dite doublee de la raiſon de BE, premiere à CF 2. Donc auſſi le triangle ABE, ſera au triangle DCF, en raiſon doublee du coſté BE, au coſté CF. Donc les triangles ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

g 1. 6.

COROL.

D'où il s'enſuit que s'il y a 3. l. proport. cõme la 1. à la 3. ainſi le triang. deſcrit ſur la 1. ſera au triangle ſemblable, & ſemblablement deſcrit ſur la 2. &c.

Ce qui eſt auſſi facile à conceuoir par cette derniere figure, où la 3. proportionelle BG, eſtant le quart de la baſe BE, ou bien BE eſtant quadruple de la 3. proportionelle BG, le triangle ABE, eſt



auſſi quadruple du triangle ABG, comme il appert par la 38. du 1. GI, IL, LE, eſtans egales à BG, & partant auſſi quadruple du triangle DCF, comme il eſt monſtré: & ce qui eſt auſſi manifeſte, le triãgle ABE eſtãt encore diuiſé en 4. autres triangles AMN, MBI, MIN, INE, chacun deſquels eſt égal au triangle DCF, ce qui eſt facile à entendre par ces figures, leſquelles i'ay bien voulu icy adiouſter, pour faciliter le ſens & intelligence de cette Propoſition, laquelle a beſoin d'eſtre bien entenduë, afin d'entendre la ſuyuante, & autres cy-apres.

THEOREME 14. PROP. 20.

Les polygones ſemblables ſe diuiſent en nombre egal de triangles ſemblables, & proportionaux à leurs touts; & les polygones ſont l'vn à l'autre, en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon.

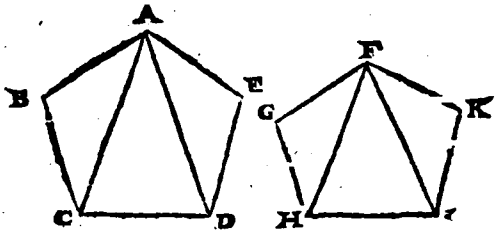
Soient les polygones ABCDE, FGHIK, ayans les angles egaux BAE, GFK. Item, les angles B

& G, & ainſi de ſuitte, & qu'ils ayent auſſi les coſtez proportionaux à l'entour d'iceux angles, ſçauoir eſt, comme AB à BC, ainſi FG à GH; & comme BC, à CD, ainſi GH à HI, &c. Ie dis premierement que ces polygones ſe peuuent diuiſer en nombre egal de triangles ſemblables.

Car des angles A & F, ſoient menees AC, AD, FH, FI, aux angles oppoſez C, D, H, I, ils ſeront diuiſez en nombre egal de triangles. Et d'autant que les angles B & G ſont poſez egaux, & les coſtez autour d'iceux proportionaux, [h] les triangles ABC, FGH, ſeront equiangles, ayans les angles BAC, GFH, BCA, & GHF, oppoſez aux coſtez homologues egaux: [i] Et partant auront les coſtez autour des angles egaux proportionaux, & par ainſi ſeront ſemblables; par meſme raiſon, les triangles AED, FKI, ſeront ſemblables, ayans les angles EAD, KFI, ADE, & FIK, egaux. Et d'auantage, [k] puis que comme AC à CB, ainſi FH à HG, à cauſe de la ſimilitude des triangles ABC, FGH: Mais comme BC à CD, ainſi GH à HI, par l'hypotheſe, pour la ſimilitude des polygones [l] en raiſon egale, comme AC à CD: ainſi FH à HI. Et d'autant que l'angle BCD, eſt [m] poſé egal à GHI: mais le retranché BEA, eſt monſtré egal au retranché GHF, le reſtant ACD, ſera egal au reſtant FHI. Partant puis que les triangles ACD, FHI, ont les angles ACD, FHI egaux, & les coſtez autour d'iceux proportionaux: Ils ſeront equiangles, & partant ſemblables, & ainſi des autres, s'il y en a d'auantage.

h 6. 6.
i 4. 6.
k 4. 6.
l 22. 5.
m 6. 6.

Secondement, ie dis que les triangles ſont proportionaux à leurs touts: c'eſt à dire, que comme un des triangles en vn des polygones, a meſme raiſon



à ſon triangle, correſpondant en l'autre Polygone, que tout le polygone à tout le polygone: Car d'autant que les triangles ABC, FGH, ſont ſemblables, ils ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublee de leurs coſtez, de meſme raiſon AC, FH: & par meſme diſcours les triangles ACD, FHI, ſont en raiſon doublee des meſmes coſtez AC, FH. Parquoy comme le triangle ABC, eſt au triangle FGH, ainſi le triangle ACD, ſera au triangle FHI, puis que la raiſon de l'vn & l'autre, eſt la raiſon doublee du coſté AC, à FH: ſemblablemét on conclura que le triangle ADE, eſt au triangle FIK, comme le triangle ACD, au triangle FHI: & ainſi de ſuitte, s'il y auoit d'autres triangles. Donc les triangles de l'vn des polygones ſont proportionaux aux triangles de l'autre: de ſorte que les triangles de l'vn, ſont antecedens des proportions, & les triangles de l'autre conſequens. Or comme vn des antecedens eſt à vn des conſequens, [m] ainſi tous les antecedens, ſont à tous les conſequens. Donc comme chacun des triangles d'vn des polygones eſt à ſon triangle, correſpondant de l'autre polygone, ainſi tout le polygone, ſera à tout le polygone: partant les triangles ſeront proportionaux à leurs touts.

[m] 12. 5.

Finalement, ie dis que les polygones sont entr'eux en raison doublee de leurs costez de mesme raison, c'est à dire, si aux costez homologues, pour exemple, AB, FG, on trouue la troisiesme proportionelle, que le polygone ABCDE, sera au polygone FGHIK. comme la ligne AB premiere, est à la 3. proportionelle trouuee. Car puis que comme le triangle ABC, est au triangle FGH, ainsi le polygone ABCDE, au polygone FGHIK. Mais le triangle ABC, est au triangle FGH, en raison doublee [n] du costé AB, au costé FG, pareillement [o] les polygones seront l'vn à l'autre en raison doublee des mesmes costez AB, FG. Donc semblables polygones, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

n 19.6.
o 11. 5.

COROLLAIRE.

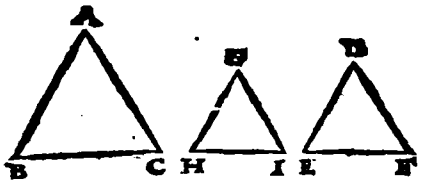
De cecy il est manifeste, que s'il y a trois lignes proportionelles, comme la premiere sera à la 3. ainsi le polygone descrit sur la premiere, sera au polygone semblable, & semblablement descrit sur la seconde: Ou bien le polygone descrit sur la seconde, sera au polygone semblable, & semblablement descrit sur la troisiesme, comme la premiere est à la troisiesme. Ce qui est euident, ayant esté demonstré que le polygone est au polygone, comme la premiere AB, est à la troisiesme proportionelle.

THEOREME 15. PROPO. 21.

Les figures rectilignes semblables à vne mesme figure rectiligne, sont aussi semblables entr'elles.

Soient les figures rectilignes ABC, & DEF, semblables à GHI. Ie dis qu'elles sont semblables entr'elles.

Car puisque les angles de ABC, sõt egaux à ceux
p^r. d. 6. de P GHI, à cause de la similitude, & ceux de DEF,
qi. c.f. à ceux de GHI, pour la mesme cause; q les angles



de ABC, seront egaux aux angles de DEF. Derechef, à cause de la mesme similitude, les costez de ABC, sont proportionaux à ceux de GHI, sçauoir ceux qui sont autour des angles egaux. Item,
r III. 5. les costez de DEF, sont proportionaux aux costez de GHI, pour la mesme cause. r Donc les costez de ABC, seront aussi proportionaux aux costez de DEF, sçauoir ceux qui enuironnent angles egaux; partant selon la definition ABC, & DEF, seront semblables. Donc les figures rectilignes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 16. PROP. 22.

Si quatre lignes droictes sont proportionelles, les figures rectilignes semblables, & semblablement descrites sur icelles, seront proportionelles; Et si les figures rectilignes semblables, & semblablement descrites sur telles lignes droi-

ſtes, ſont proportionelles, icelles lignes droictes ſeront auſſi proportionelles.

Soient premierement quatre droictes lignes AB, CD, EF, GH, proportionelles, ſçauoir comme AB à CD, ainſi EF à GH, & ſoient conſtituees deux figures rectilignes quelconques ſur AB, CD, ſemblables, & ſemblablemẽt deſcrites ABI, CDK, pareillement ſur EF, GH, ſoient conſtituez deux autres rectilignes quelconques EM, GO. Ie dis que ces figures ſont proportionelles, à ſçauoir, comme AIB, à CDK, ainſi EM à GO.

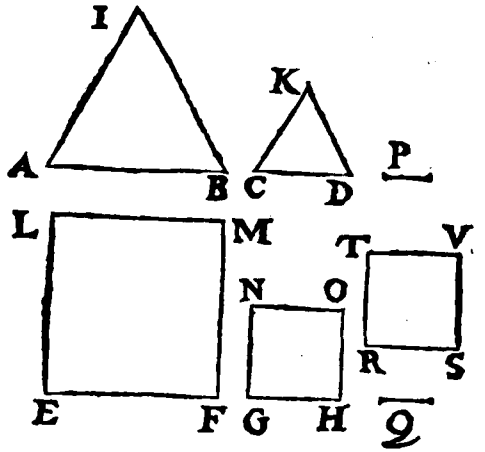
Car [r] à AB, CD, ſoit trouuee la troiſieſme proportionelle P; & à EF, GH, la troiſieſme proportionelle Q. [u] En raiſon egale, comme AB, ſera à P, ainſi EF à Q: mais comme AB eſt à P, ainſi [v] le rectiligne ABI, eſt au rectiligne CDK, ſemblable & ſemblablemẽt deſcrit: par meſme raiſon, comme EF eſt à Q, ainſi le rectiligne EM, au rectiligne GO. Donc [x] comme ABI à CDK, ainſi EM à GO. Ce qui eſt propoſé.

r II. 6.
u 22. 5.
v Coroll. 20. 6.
x XII. 5.

Secondement, ſoient les rectilignes ABI, CDK, EM, GO, proportionaux. Ie dis que les quatre lignes droictes AB, CD, EF, GH, ſont proportionelles, à ſçauoir comme AB à CD, ainſi EF à GH.

Car aux trois lignes AB, CD, EF, [y] ſoit trouuee la quatrieſme proportionelle RS, ſur laquelle ſoit deſcrit le rectiligne RV, ſemblable, & ſemblablement poſé au rectiligne EM, & partant [z] au rectiligne GO. D'autant que comme AB à CD, ainſi EF à RS: pareillement, comme il eſt deſia monſtré, comme ABI, ſera à CDK, ainſi EM à

y 12. 6.
z 21. 6.



RV, mais comme ABI, à CDK, ainsi EM à GO. Donc cõme EM à [a] RV, ainsi EM à GO, [b] partãt RV, GO, seront egaux, lesquels estans sẽblables & sẽblalement posez, ils seront necessairemẽt constituez sur lignes droictes egales RS, GH, cõme me nous monstrerons incontinent, [c] partant comEF sera à RS, ainsi EF à GH. Mais EF est à RS, comme AB à CD, par l'hypothese. [d] Donc comme AB à CD, ainsi EF à GH. Partant si quatre lignes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 11. 5.
b 9. 5.
c 7. 5.
d 11, 5.

LEMME.

Or que les rectilignes egaux, semblables & semblablement descrits, comme sont GO, RV, soient constituez sur lignes droictes egales, on le monstrera ainsi. Car si GH, RS, sont inegales, soit GH plus grande. Donc puis qu'à cause de la similitude des rectilignes, comme GH, est à HO, ainsi RS

à S V, & que GH eſt poſee plus grande que R S: pareillement H O, ſera plus grande que S V, & partant le rectiligne G O, plus grand que le rectiligne R V, puis que R V, peut eſtre conſtitué au dedans d'iceluy: Ce qui eſt abſurde, eſtant contre l'hypotheſe. Donc G H, R S, ne ſeront pas inegales. Ce qui eſt propoſé.

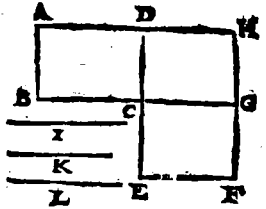
SCHOLIE.

Semblablement, s'il y a trois lignes droictes proportionelles, les rectilignes ſemblables et ſemblablement deſcrits ſur icelles, ſeront proportionaux, &c. Car ſi l'on prend la ligne du milieu & ſon rectiligne deux fois, l'on aura quatre lignes proportionelles. Donc par meſme moyen quatre rectilignes proportionaux, comme demonſtre icy Euclide. Donc puis que ce qui eſt deſcrit ſur la ſeconde eſt egal, voire meſme choſe que ce qui eſt deſcrit ſur la tierce, ce qui eſt propoſé eſt manifeſte.

THEOREME 17. PROP. 23.

Les parallelogrammes equiangles, ſont l'vn à l'autre en raiſon compoſee de celles de leurs coſtez.

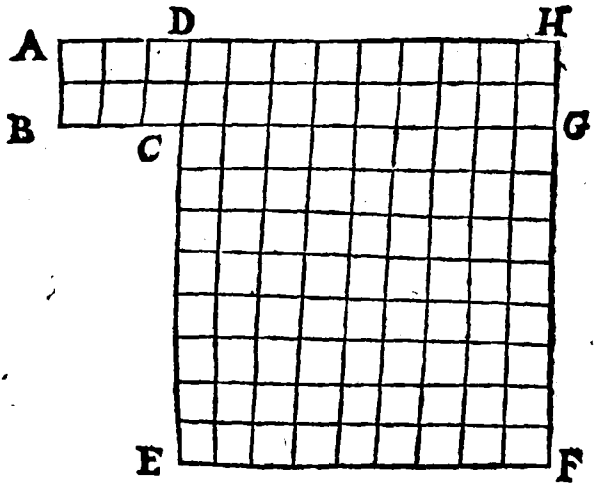
Soient les parallelogrammes equiangles A C, C F, ayans les angles B C D, E C G, egaux. Ie dis que la raiſon de A C à C F, eſt compoſee de la raiſon de B C à C G, & D C à C E: C'eſt à dire, ſi on prend trois lignes droictes I, K, L, deſorte que I ſoit à K, comme B C à C G, & K à L, comme D C à C E. le parallelogramme A C, ſera au parallelogramme C F, comme I, à L, qui eſt la raiſon compoſee de I à K, & de K à L, par la 5. definition de ce liure.



Car soient disposez les parallelogrammes selon les angles egaux au poinct C, desorte que B C, C G, fassent vne seule ligne droicte: ce qu'estant ainsi: puis que les angles BCD, ECG, sont egaux, E C, C D, feront aussi vne ligne droicte, comme nous auons monstré à la 14. & soient prolongees A D, FG, au poinct H, faisant le parallelogramme CH: Et soit prise quelconque droicte ligne I, & à B C,
12. 6. C G, & I, soit trouuee la 4. proportionelle K. Item, aux trois DC, CE, & K, la 4. proportionelle L: [e] D'autant que comme BC à C G, ainsi
e 1. 6. AC à CH: mais comme B C à CG, ainsi I à K,
f 11. 5. comme il est monstré: Pareillement [f] comme A C à CH, ainsi I à K.

Par la mesme raison on monstrera, que comme
g 1. 6. HC est à CF, ainsi K est à L: Car comme DC à CE, [g] ainsi HC à CF Donc puis que K est posé à L, comme DC à CE, pareillement H C, sera à
h 22. 5. CF, comme K à L: [h] Donc en raison egale AC, sera à CF, comme I à L: mais la raison de I à L, est composee des raisons de B C à C G, & D C à CE, par la cinquiesme Definition du sixiesme liure. Donc la raison du parallelogramme AC, au parallelogramme CF, est composee de ces mesmes raisons. Donc les parallelogrammes equiangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Ce qui est facile à comprendre par cette figure ainsi diuisee en parties egales, où le costé B C est



5 CG 9. D C 2. & C E 8. & en diuiſant CG par BC, ſçauoir 9. par 3. l'on aura 3. au quotiẽt 3. pour le denominateur ou quantité de la raiſon de CG à CB, & diuiſant auſſi CE 8 par DC 2. l'on aura 4. au quotient pour le denominateur de la raiſon de CE à CD, leſquels denominateurs 4. & 3. multipliez l'vn par l'autre, produiſent 12. pour la raiſon du parallelogramme C F, au parallelogramme CA, c'eſt à dire, que CF, contient CA 12. fois, ou bien que AC eſt la 12. partie de C F, comme il eſt manifeſte, tant par cette figure, que de ce qui eſt demonſtré.

SCHOLIE.

Le meſme ſera demonſtré plus briefuement en cette maniere, eſtans conioints les parallelogrammes comme auparauant: D'autant que comme AC eſt à

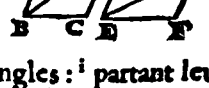
CH, ainſi BC à CG, & comme CH à CF, ainſi DC à CE: Mais la raiſon de AC à CF, eſt compoſee des raiſons entremoyennes AC à CH, & CH à CF, par la definition, la meſme raiſon de AC à CF, ſera auſſi compoſee des raiſons de BC à CG, & de DC à CE, leſquelles ſont egales à icelles moyennes. Ce qui eſt propoſé.

Nous adiouſterons icy quelques Theoremes aſſez vtiles, pris de Commandin.

I.

Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, ſont en raiſon compoſee des coſtez qui contiennent l'angle egal.

Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle C egal à F. Ie dis que la raiſon de ABC à DEF, eſt compoſee des coſtez, c'eſt à dire de la raiſon de BC à EF, & de AC à DF: ou de la raiſon de BC à DF, & de AC à EF. Car ayant accomply les parallelogrammes CG, FH, ils ſeront equiangles: [i] partant leur raiſon ſera compoſee des coſtez. [k] Donc puis que les triangles ABC, DEF, leurs *moitiez* [l] ont meſme raiſon qu'iceux. La raiſon de ABC à DEF, ſera auſſi compoſee des raiſons des coſtez BC, AC, aux coſtez EF, DF.

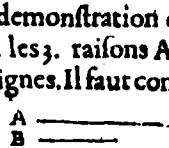


i 23. 6.
k 34. 1.
l 15. 5.

II.

Composer vne raison de deux, ou de plusieurs raisons.

Il sera facile à colliger de la demonstration de cette 23. Proposition. Car soient les 3. raisons A à B, C à D, & E à F, proposees en lignes. Il faut composer vne raison d'icelles: [m] Comme A à B, ainsi G, soit fait à H, & comme C à D, *ainsi* H à I, & comme E à F, *ainsi* I à K. Ie dis que la raison de G à K, est composee des 3. raisons donnees, car icelle estant composee des raisons



m 12. 6.

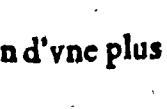
de G à H, H à I, & de I à K, par la 5. definition de ce liure, elle sera aussi composee des raisons de A à B, C à D, & de E à F; puis que celles-là sont prises egales à celles-cy.

III.

Oster vne moindre raison d'vne plus grande.

Soit la raison de A à B, moindre qu'il faut oster de celle de C à D plus grande: [n] Soit faict comme A à B, ainsi C à E, & soit E terme moyen, entre C & D. Ie dis que la raison de A à B, est ostee de celle de C à D, & que la restante est E à D: Car puis que la raison de C à D est composee de celles

n 12. 6.



de C à E, & E à D, si la raison de C à E : c'est à dire, de A à B, est ostee, restera la raison de E à D, &c.

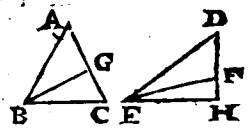
IIII

Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, sont en mesme raison, que les rectangles contenus sous les costez comprenans l'angle egal.

Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle A egal à D. Ie dis que ABC, est à DEF, comme le rectangle sous AB, AC, au rectangle sous ED, DF. Car ayant mené BG, EH, perpendiculaires à AC, DF, les triangles ABG, DEH, seront ° equiangles.

° *Coroll.* 32. 1.

P Donc comme GB à BA, ainsi HE à ED: mais comme GB à BA, q ainsi le rectangle sous BG, AC, au rectangle sous AB, AC, (car GB, BA, estans posees pour bases, la hauteur d'iceux sera la mesme AC) semblablement comme HE à ED, ainsi le rectangle sous EH, DF, au rectangle sous DE, DF. r Donc le rectangle sous BG, AC est au rectangle sous AB, AC, comme le rectangle sous EH, DF, au rectangle sous DE, DF. Et en changeant le rectangle sous BG, AC est au rectangle sous EH, DF, comme le rectangle sous AB, AC, au rectangle sous DE, DF. Mais comme le rectangle sous EG, AC est au rectangle sous EH, DF, t ainsi le triangle ABC, est à DEF, t les triangles estans moitiez des rectangles: (car ils ont mesmes bases auec iceux



p 4. 6.
q 1. 6.
r 11. 5.
s 15. 5.
t 41. 1.

AC, DF, & meſmes haureurs BG, EH, partant ſont entre meſmes paralleles.) Doc ABC, ſera auſſi à DEF, comme le rectangle ſous AB, AC, au rectangle ſous DE, DF. Ce qui eſt propoſé.

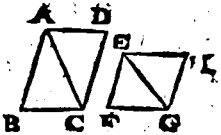
COROLLAIRE.

D'où il s'enſuit, que les parallelogrammes equiangles ſont auſſi en meſme raiſon, que les rectangles contenus ſous leurs coſtez, eſtans doubles de tels triangles.

V.

Les parallelogrammes equiangles entr'eux, ſont en meſme raiſon, que les rectangles contenus ſous les coſtez d'iceux, contenans l'angle egal.

Soient les parallelogrammes BD, FH, equiangles entr'eux, dont les angles B & F ſont egaux. Ie dis que comme BD eſt à FH, ainſi le rectangle ſous AB, BC, au rectangle ſous EF, FG: car ayant mené les diametres AC, EG, ſouſtendans les angles egaux B & F, les triangles ABC, EFG, auront l'angle B egal à F: partant (comme nous auõs demonſtré) comme le triangle ABC



ſera à EFG, ainſi le rectangle ſous AB, BC, au rectangle ſous EF, FG. [a] Donc puis que les parallelogrammes BD, FH, ſont en meſme raiſon que les triangles ABC, EFG, [b] ceux-là eſtans doubles de ceux-cy, [c] comme BD ſera à FH; ainſi pareille-

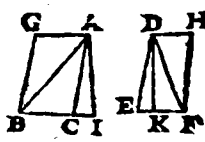
[a] VII. 5.
[b] XV. 34. I.
[c] XI. 15.

ment le rectangle sous AB, BC, au rectangle sous EF, FG. Ce qui est proposé.

VI.

Les triangles & les parallelogrammes, sont entr'eux en raison composée, de la raison des bases, & de la raison des hauteurs.

Soient les triangles ABC, DEF, & les parallelogrammes CG, EH, dont les hauteurs sont AI, DK. Ie dis que leur raison est composée de celle de la base BC, à EF, & de la hauteur AI, à DK : Car soient premierement les hauteurs egales, & les bases aussi egales, ou bien inegales : Et soit faict comme BC, à EF, ainsi L à M : mais comme AI à DK, ainsi M à N. Ce qu'estant, M sera egale à N, d'autant que AI, est aussi posée egale à DK. [a] Partant



27. 5. L sera à N, comme L à M, c'est à dire, comme BC à EF. [a] Mais comme BC à EF, ainsi le triangle ABC, à

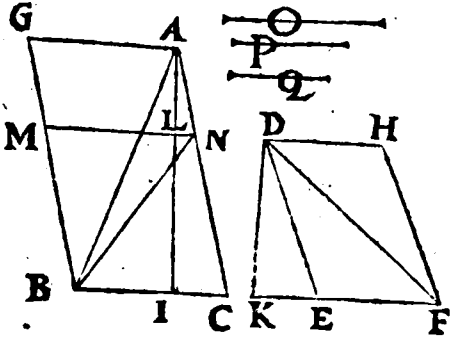
a 1. 6. DEF, & le parallelogramme CG à EH, parallelogramme. [b] Donc aussi comme L à N, ainsi ABC

b 11. 5. à DEF, & CG à EH : mais la raison de L à N, est composée de la raison de L à M, c'est à dire de la raison de la base BC, à la base EF, & la raison de M à N, c'est à dire de la hauteur AI, à la hauteur DK Donc la raison du triangle ABC, à DEF, & du parallelogramme CG, au parallelogramme EH, est composée de mesmes raisons. Ce qui est proposé.

Soient maintenant AI, DK, inegales, & AI plus grande, mais les bases BC, EF, egales ou inegales.

soit faict comme AI, à DK, ainsi O à P, & comme BC à EF, ainsi P à Q: & prise IL, egale à DK, & par L, soit menee LM parallele à BC, coupant AC à N, & conionte BN. D'autant que le triangle ABC, est à NBC, & le parallelogramme CG, à CM, cõme la hauteur AI, à IL, ou à DK, egale à IL, c'est à dire comme O à P, comme il est monstré à la 1. Prop de ce liure par Com. les triangles & les parallelogrammes ayans mesme base BC: & comme le triangle NBC, à DEF, & le parallelogramme CM, à EH, ainsi [c] la base BC à EF: (ayant mesme hauteur) c'est à dire, ainsi P à Q. [d] En raison egale ABC, sera à DEF, & CG à EH, cõme O à Q. Partant la raison de O à Q, estant composee de la raison de O à P, c'est à dire de la raison de la hauteur AI, à la hauteur DK, & de la raison de P à Q: c'est à dire de la raison de la base BC, à la base EF. De ces mesmes raisons sera composee la raison du triangle ABC, au triangle DEF, & du parallelogramme CG, au parallelogramme EH. Ce qui est proposé.

c 1. 6.
d 22. 6.



Semblablement on monstrera que la raison du triangle DEF, dont la hauteur est moindre, au triangle ABC, & du parall. EH à CG, est composee de la raison de la base EF à BC, & de la raison de la hauteur DK, à la hauteur AI: car si comme EF est à

BC, ainsi Q est faict à P, & comme DK à AI, ainsi P à O, & le reste soit faict comme parauant: le
§ 1. 6. triangle DEF, sera à NBC, & le parall. EH, au parall. CM, comme EF à BC, c'est à dire, comme Q à P.

Item, le triangle NBC, au triangle ABC, & le parall. CM à CG, comme LI, ou DK à AI, c'est à dire, comme P à O, comme il est monstré à la 1.
f 20. 5. Propos. de ce liure par Com. f Donc en raison egale, comme DEF, sera à ABC, & EH à CG, ainsi Q à O. Partant puis que la raison de Q à O, est composee de la raison de Q à P, c'est à dire de la raison de la base EF, à la base CB: & de la raison de P à O, c'est à dire de la raison de la hauteur DK, à la hauteur AI: la raison de DEF, à ABC, & de EH à CG, sera aussi composee des mesmes raisons. Ce qui est proposé.

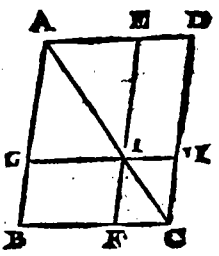
THEOREME 18. PROP. 24.

Les parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre de tout parallelogramme, sont semblables à leur tout, & entr'eux.

Soit le parallelogramme ABC, auquel soit mené le diametre AC, & par quelconque poinct d'iceluy, comme par I, soient menees EF, GH, paralleles aux costez AB, AD. Ie dis que les parallelogrammes EG, FH, à l'entour du diametre, sont semblables au tout BD, & entr'eux.

Car ils sont equiangles au tout, d'autant que l'angle A, est commun au parall. GE, & au tout
g 29. 1. BD, g & l'externe AEI, egal à l'interne D, & l'ex-

terne AGI, egal à l'interne B, & EIG, externe, egal à l'interne IFB, c'eſt à dire à BCD, egal à iceluy IFB; parquoy le parallelogramme EG, eſt equiangle à BD : Par meſme raiſon FH, eſt equiangle au meſme BD.



Or que EG, FH, ayent auſſi les coſtez autour des angles egaux proportionaux aux coſtez du tout BD: il ſera ainſi demõſtré. [h] Puis que le triangle AGI, eſt equiangle à ABC, & le triangle AEI, equiangle au triangle ADC, comme AB ſera à BC, ainſi AG à GI, & par ainſi les coſtez autour des angles egaux, B & G ſeront proportionaux. De rechef, [i] comme BC à CA, ainſi GI à IA; ſemblablement cõme CA à CD, ainſi IA, à IE. [k] Donc en raiſon egale, comme BC, à CD, ainſi GI à IE, & partant les coſtez autour des angles egaux BCD, GIE, ſont proportionaux.

h 29. 1. *ou Corell.* 4.6.

i 4. 6.

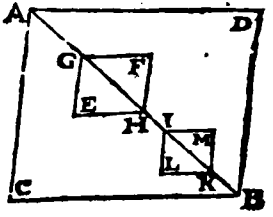
k 22. 5.

L'on monſtrera ſemblablement que les coſtez autour des autres angles egaux, ſont proportionaux. Donc par la premiere Definition de ce liure, le parallelogramme EG, ſera ſemblable à tout le parallelogramme BD, & par meſme raiſon le parallelogramme FH, ſemblable au meſme BD, & partant ſemblables auſſi entr'eux. Donc les parallelogrammes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

l 21. 6.

SCHOLIE.

Henrion a adiouſté à cette Propoſition, ces mots: Ayans vn angle commun au total. *Ce qu'il ne deuoit faire, n'eſtant au texte d'Euclide, comme il appert.* Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοια ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις: *C'eſt à dire; De tout parallelogramme, ou en tout parallelogramme, les parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre, ſont ſemblables entr'eux, & au tout. Or ce qui l'a incité à corriger ainſi Euclide, a eſté, comme ie croy, ce qui eſt en ſuitte de la Demonſtration de Clauius, qui dit.* Intelligenda autem ſunt parallelogramma, circa diametrum totius eſſe talia, quæ habeant vnum angulum cum toto parallelogrammo communem, vt manifeſtum eſt ex forma demonſtrationis: *C'eſt à dire; Mais il faut entendre que les parallelogrammes à l'entour du diametre du total, ſoient tels qu'ils ayent vn angle commun auec le total, comme il eſt manifeſte par la forme de la demonſtration.*



Ce qui ne doit toutefois eſtre ainſi reſtraint, veu que l'on peut demonſtrer ſans cette reſtriction, que les parallelogrammes à l'entour du diametre du total, n'ayans aucun angle commun auec le tout, & ayans les coſtez paralleles à ceux du total, ſont ſemblables en-

tr'eux, & au total. Car ſoit le parallelogramme CD, & ſon diametre AB, autour duquel ſoient conſtituez EF, LM, parallelogrammes. Iceux ſont ſemblables entr'eux, & au total; car GE, AC, eſtãs paralleles, & AB tombant ſur icelles, les angles [m] *CAG, EGB, ſont egaux, l'externe à l'interne, & auſſi CBH, & EHG, eſtant CB, EH auſſi parallele.* [n] *Donc C, ſera auſſi egal à E, parquoy ACB, GEH, ſeront equiangles, & ſemblablement ADB, GFH,* [o] *& auront les coſtez autour des angles egaux proportionaux, ſçauoir comme AC à CB, ainſi GE à EH, & comme CB à BA, ainſi EH à HG, & comme AB à BD, ainſi GH, à HF:* [p] *Donc en raiſon egale, comme CB à BD, ainſi EH à HF, & ainſi des autres. Donc tous les angles de EF, ſeront egaux à ceux de CD, chacun au ſien, eſtans les 2. au poinct A, egaux aux 2. au poinct G, & les 2. au poinct B, egaux aux 2. au poinct H, & les coſtez autour des angles egaux proportionaux.* [q] *Ainſi EF, ſera ſemblable à CD, par les meſmes raiſons LM, ſera ſemblable au meſme CD, &* [r] *partant ſemblables entr'eux, & au total.*

m 29. 1.
n 32. 1.
o 4. 6.
p 22. 5.
q 1. d. 6.
r 21. 6.

PROBLEME 7. PROP. 25.

Deſcrire vne figure rectiligne, ſemblable à vne figure rectiligne donnee, laquelle ſoit egale à vne autre propoſee.

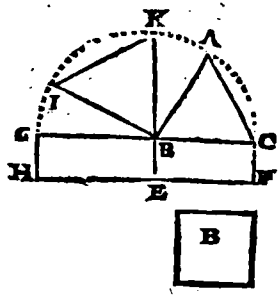
Soient 2. rectilignes ABC, & B, il faut conſtituer vn rectiligne ſemblable à ABC, & egal à l'autre B. Sur CB, coſté du rectiligne ABC, auquel on en doit faire vn ſemblable, [f] ſoit conſtitué le parall.

f 44. ou 45. 1.

CE, en quelconque angle egal au rectiligne ABC: Et ſur BE, ſoit fait le parallelogramme BH, egal à B, ayant l'angle EBG, egal à BCF, & les lignes CB, BG, feront vne ſeule ligne droicte, comme il eſt monſtré à la 45. Propoſition du premier liure.

13. 6. Maintenant ſoit trouuee la moyenne proportion BK, entre

18. 6. CB, BG, ſur laquelle ſoit conſtitué le rectiligne BIK, ſemblable & ſemblablement poſé au rectiligne ABC. Ie dis que BIK, eſt egal à l'autre rectiligne B.



u *Coroll.* 19. *ou* 20. 6. x1. 6. y 11. 5. z 7. 5. a 11. 5. b 9. 5.

Car puis que CB, BK, BG, ſont proportionelles[u] comme CB, premiere, eſt à BG 3 ainſi le rectiligne ſur la 1. CB, au rectiligne BIK, ſur la 2. BK, ſemblable, & ſemblablement deſcrit: [x] Mais comme CB à BG, ainſi le parallelogramme CE, au parall. BH, de meſme hauteur. [y] Donc comme CE à BH, ainſi ABC à BIK, [z] mais comme CE à BH, ainſi ABC à B: D'autant que ABC, & CE, ſont egaux, & BH, & B auſſi egaux, [a] donc comme ABC à B, ainſi ABC à BIK. [b] Donc B, & IBK, ſeront egaux: mais KIB, eſt ſemblable, & ſemblablement poſé à ABC, par la conſtruction: donc nous auons deſcrit, &c. Ce qu'il falloit faire.

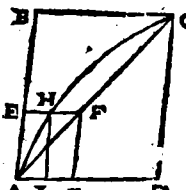
THEOREME 19. PROP. 26.

Si d'vn parallelogramme, l'on retran-

che vn parallelogramme, semblable au tout, & semblablement posé, ayant vn angle commun auec le tout : Il consiste à l'entour d'vn mesme diametre auec le tout.

Du parallelogramme BD, soit retranché le parallel. EG, semblable, & semblablement posé au tout BD, & ayant l'angle EAG, commun auec iceluy. Ie dis que EG, consiste à l'entour de AC, diametre du tout BD.

Car soient menees AF, CF, lesquelles si elles font vne ligne droicte : il est euident que EG sera à l'entour d'vn mesme diametre auec BD. Que si elles ne font vne ligne droicte, soit menee AC, diametre de tout le parallelogramme BD, coupant le costé EF, au poinct H, par lequel soit menee HI, parall. à FG. Or d'autant que les parallelogrammes BD, EI, sont à à l'entour d'vn mesme diametre AHC, [c] ils seront semblables, & semblablement posez. [d] Partant, comme BA à AD,



c 24. 6.
d 1. d. 6.

ainsi EA à AI : mais comme BA à AD ainsi EA est à AG : d'autant que BD, EG, sont semblables par l'hypothese, & semblablement posez. [e] Donc comme EA à AI, ainsi EA à AG, & partant AI, AG seront egales, la partie à son tout ce qui est absurde. Donc AF, FC, font vne seule ligne droicte, c'est à dire, les parallelogrammes BD, EF, consistent à l'entour d'vn mesme diametre. Ce qu'il falloit demonstrer : Que si l'on dict que la droi-

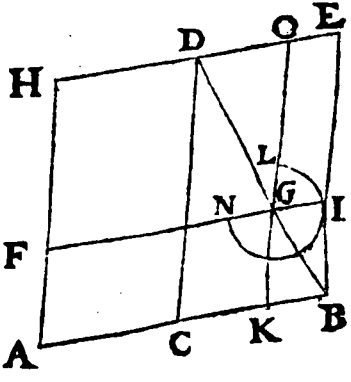
e 11. 5.
9. 5.

de ligne AHC, coupe le costé FG, il aduiendra la mesme absurdité, &c.

THEOREME 20. PROPO. 27.

De tous les parallelogrammes appliquez, selon vne mesme ligne droicte, & defaillans de figures parallelogrammes semblables, & semblalement posees à celuy qui est descrit sur la moitié; Le plus grand est celuy-là, lequel est appliqué sur l'autre moitié, & semblable au defaut.

Soit la ligne AB, diuisee en deux egalement à C, & sur la moitié CB, soit constitué vn parallelogramme quelconque CE, duquel le diametre soit BD. Donc si le parallelogramme ABEH, est acheué, le parallelogramme AD, constitué sur la moitié AC, sera appliqué selon AB, & defaillant du parall. CE, & semblable, au defaut CE. Ie dis que le parall. AD, appliqué à la moitié AC, & defaillãt du parall. CE, est le plus grãd de tous ceux qui sont appliquez selon la l. AB, & defaillẽt de parall semblables, & semblablement posez à CE.



Car ayant pris le poinct contingent G, au diametre B D, par lequel ayant mené les droictes lignes FGI, k G, paralleles à AB, BE, le parallelogramme F k, sera appliqué selon A B, & defaillant du parallelogramme k I, [f] qui est semblable à C E, & semblablement posé, estant autour d'vn mesme diametre auec CE. [g] Mais d'autant que les complements C G, G E, sont egaux, si on adiouste le commun k I, CI, & k E, seront egaux: [h] mais CI, est egal à CF, estant sur baſes egales A C, CB, donc CF, & kE, seront aussi egaux. Et ayant adiousté le commun C G, le parallelogramme A G, & le gnomon L N, seront egaux.

f 24. 6.
g 43. 7.
h 36. 1.

Partant, puis que CE, est plus grand que le gnomon L N: (car il contient le parallelogramme G D, plus que le gnomon) AD, [i] egal à CE, à cause des baſes egales AC, CB, sera aussi plus grand que A G, du mesme parallelogramme D G: semblablement on monstrera que A D, est plus grand que tous autres parallelogrammes qui sont appliquez selon AB, en sorte que le poinct G, soit entre les poincts B & D; c'est à dire, qui occupent vne ligne plus grande que la moitié AC; mais ont moindre altitude que AD, pourueu que les defauts soient semblables à CE.

i 36. 1.

Autrement, l'on demonſtrera AD, eſtre plus grand que AG, en cette maniere: [k] *les parallelogrammes FD, DJ, ſont egaux, puis que les baſes HD, DE, ſont egales: mais DI eſt plus grand que GE: c'eſt à dire, que le complement CG (lequel eſt egal à GE) du parall. DG. Donc FD, ſera auſſi plus grand que CG, du meſme parallelogramme DG:*

k 36. 1.
43. 1.

& partant, adiouſtant le commun CF, AD, ſera plus grand que AG, du meſme parallelogramme DG.

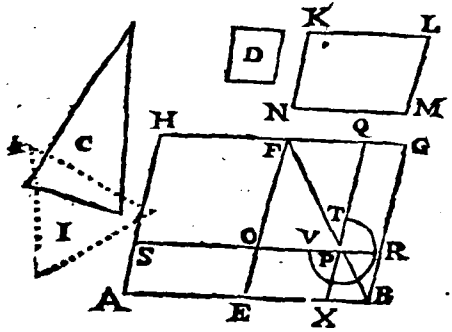
THEOREME 11. PROPO. 28.

A vne ligne droicte donnee, appliquer vn parallelogramme, egal à vne figure rectiligne donnee; defaillant d'vne figure parallelogramme, laquelle ſoit ſemblable à vn autre parallelogramme donné. Mais il faut que la figure rectiligne donnee, à laquelle il en faut appliquer vne egale, ne ſoit plus grande que celle qui eſt appliquee à la moitié de la ligne donnee; les defauts eſtans ſemblables, à celuy qui eſt appliqué ſur la moitié, & à celuy qui doit defaillir d'vn ſemblable.

Soit la ligne donnee AB, à laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal au rectiligne donné C, defaillant d'icelle ligne AB, d'vn parallelogramme ſemblable, à vn autre parallelogramme donné D.

I 18. 6. La ligne AB, eſtant coupee en deux egalement au poinct E, ſur la moitié EB, ſoit deſcrit le parallelogramme EG, ſemblable, & ſemblablement poſé à D, & ſoit accomply le tout BH. Si donc AF eſt egal à C, eſtant appliqué à AB, defaillant du parallelogramme EG, qui eſt faict ſemblable à D: l'on aura le requis. Mais ſi AF, eſt plus grand que C: (car il ne doit eſtre moindre,

puis que par la propoſition precedente, c'eſt le plus grand de tous les appliquez, les defauts eſtans ſemblables, l'on n'en pourroit appliquer au-



cun à AB, égal à C, mais tous ſeroient moindres Parquoy Euclide a adiouſté (Mais il faut que le rectiligne donné, &c.) EG, egal à iceluy, ſera auſſi plus grand que C, ſoit donc plus grand de I, comme il eſt monſtré enſuitte de la 45. du premier, & ſoit conſtitué kM, ſemblable, & ſemblablement poſé à D, ou à EG: mais egal à l'excez I; Deſorte que EG, ſoit egal à C, & à kM enſemble, & partant plus grand que kM. Dõc puis que comme GF à FE, ainſi NK à KL, à cauſe de la ſemblance, les coſtez GF, FE, ſeront auſſi plus grands que NK, KL: car s'ils eſtoient egaux à iceux, ou moindres, EG ſeroit pareillement egal à NL, ou moindre, comme il àppert.

Ayant donc retranché FO, FQ, egales à KN, KL, & ayant faict le parallelogramme OQ, il ſera egal à kM, & ſemblable, & ſemblablement poſé à iceluy, & partant à EG: " Et auſſi à l'entour d'vn meſme diametre que EG, lequel dia- n 26. 6.

metre soit BF, & ayant prolongé QP, OP, le parallelog. AP, sera appliqué à la ligne AB, defail-
o 24. 6. lant de PB, ° qui est semblable, & semblablement posé à EG, & partant aussi à D, Ie dis que
p 36. 1. AP, est egal au rectiligne C. ᵖ Car puis que PG est egal à PE, le complement au complement. Si on adiouste le commun PB, le parall. BQ, sera egal à ER, c'est à dire à ES, lequel est egal à ER: Les bases AE, EB estans egales. Parquoy si aux egaux AO, BQ, on adiouste le commun EP: AP, sera egal au Gnomon TV: mais le gnomon TV, est egal au rectiligne C, (car puis que le parallelogramme EG, est egal à C, & NL, ensemble, si on oste les egaux QO, LN, le gnomon TV, demeurera egal à C:) Donc AP, sera aussi egal au mesme C. Donc à la ligne AB, &c. Ce qu'il falloit faire.

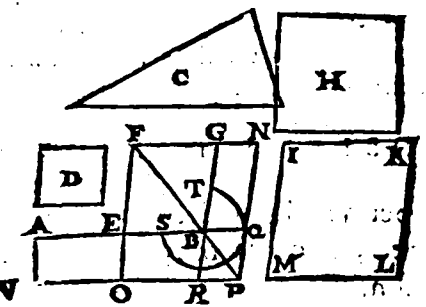
THEOREME 9. PROP. 29.

A vne ligne droicte donnee, appliquer vn parallelogramme egal, à vne figure rectiligne donnee, excedant icelle d'vn parallelogramme semblable à vn autre donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, à laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal au rectiligne donné C, excedant AB, d'vn parallelogramme semblable à vn autre parallelogramme donné D.

Soit diuisee AB, en 2. egalement à E: Et sur la
18. 6. moitié EB, soit descrit le parallelogramme EG,
q 14. 2. semblable à D, & semblablement posé: ᵠ puis soit

soit faict le quarré H, egal au rectiligne C, & au parallelogramme EG : [r] auquel soit faict le parallelogramme IL, egal, mais semblable à EG, & semblablement posé : parquoy IL, sera plus grand que EG puis qu'il est egal au quarré H, qui est faict egal à C, & à EG ensemble. Donc puis [r 25. 6.]



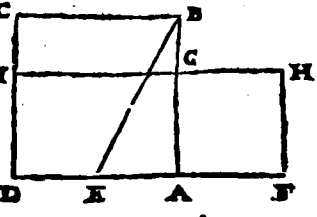
qu'à cause de la similitude de MK, EG, comme MI à IK, ainsi EF à FG, les costez MI, IK, seront aussi plus grands que EF, FG. Car si IM, IK estoient egales à EF, FG, ou moindres, MK, seroit egal à EG, ou moindre, comme il est manifeste. Donc ayant prolongé FE, FG, en sorte que FO, FN, soient egales à IM, IK, & ayant accomply le parallelogramme ON: iceluy sera semblable, & semblablement posé à EG, puis qu'il est egal à MK, & semblable, & semblablement posé. [f] Parquoy ON, EG, sont constituez à l'entour d'vn mesme diametre FP: ayant prolongé AB, GB à Q, & R, & PO, iusques à ce qu'elle conuienne auec AV, parallele à FO, au poinct V: le parallelogramme AP, sera appliqué à la ligne AB, l'excedant du parallelogramme QR, [t] lequel est semblable à EG, & partant à D. [f 26. 6.] [t 24. 6.]

x 36. 1. Ie dis donc que AP, est egal au rectiligne C: x
z 43. 1. Car puis que AO, ER sont egaux, z & ER est egal au complement BN; AO sera aussi egal à BN. Donc adioustant le cõmun OQ. AP sera egal au gnomon ST: mais ledict gnomon est egal au rectiligne C. (Car puis que MK, c'est à dire ON, est egal à C, & EG ensemble, si on oste le commun EG, demeurera le gnomon ST, egal à C.) Donc AP, sera aussi egal au rectiligne C: donc à vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 10. PROP. 30.

Couper vne ligne droicte proposee & terminee, selon la moyenne & extréme raison.

Soit la ligne droicte terminee AB, qu'il faut couper selon la moyenne & extreme raison:
y 29. 6. Ayant descrit sur icelle le quarré AC, y au costé DA, soit appliqué le rectangle DH, egal au quarré AC, excedant DA, du parallelogramme AH, semblable à iceluy quarré: en sorte que AH, sera pareillement quarré, attendu que le quarré seulement, est semblable au quarré. Mais que IH, coupe AB au poinct C. Ie dis que AB, est coupee selon la moyenne & extreme raison.



Car puis que le rectiligne DH, & le quarré AC sont egaux, si on oste le commun AI, FG, & GC, demeureront egaux, lesquels ayans

les angles egaux AGH, BGI, à sçauoir droicts, [a] les costez qui sont autour d'iceux, seront reciproques, à sçauoir IG, c'est à dire AB, son egale est à GH, c'est à dire à AG, egale à GH comme AG est à GB. Parquoy la toute AB, estant au plus grand segment AG, comme ledict segment AG est au plus petit GB, AB est coupee selon la moyenne & extreme raison par la definition. Donc nous auons coupé, &c. Ce qu'il falloit faire. a 14. 6.

Autrement, nous demonstrerons que AB, est coupee au poinct G, selon la moyenne & extreme raison: puis qu'il y a 3. lignes dõnees AB, AG, GB, & que le rect. GC, contenu sous la 1. AB, & la 3. GB, est egal au quarré de la moyenne AG: [a] Icelles seront proportionelles, à sçauoir comme AB 1. est à AG 2. ainsi AG 2. sera à GB 3. Donc par la definition, AB est coupee au poinct G, selon la moyenne & extreme raison. a 17. 6.

Autrement nous ferons tout le probleme: [b] soit diuisee AB, au poinct G, en sorte que le rectangle contenu sous la toute AB, & le segment GB, soit egal au quarré de l'autre segment AC. Ie dis que AB est coupee à G, selon la moyenne & extreme raison. [c] Car derechef, comme auparauant AB, AG, GB, seront proportionelles. Donc la proposition est manifeste. b 11. 2. c 17. 6.

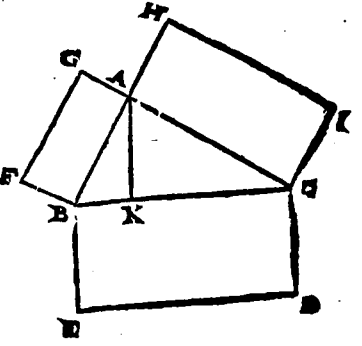
THEOREME 21. PROP. 32.

Aux triangles rectangles, la figure descrite sur le costé qui soustient l'angle droict; est egale aux deux figures des costez qui contiennent l'angle droict,

ſemblables à icelle, & ſemblablement deſcrites.

Soit le triangle rectangle A B C, ayant l'angle A droict: & ſoit deſcrit ſur BC, quelconque figure rectiligne BD, [a] à laquelle ſur les coſtez B A, AC, ſoient conſtituees AF, AI, ſemblables, & ſemblablement deſcrites. Ie dis que BD, eſt egale aux deux A F, A I.

a 18. 6.



Car ayant mené la perpendiculaire AK, du poinct A ſur B C, [c] comme B C ſera à CA, ainſi CA, ſera à C K. Parquoy comme BC 1. à C K 3. ainſi la figure BD, deſcrite ſur la premiere, ſera

c Coroll. 8.6.

[f] à la figure CH, ſur la 2. ſemblable, & ſemblablement deſcrite, & par conuerſion de raiſon, comme C K à B C, ainſi la figure CH à la figure B D; ſemblablement on monſtrera que comme BK eſt BC, ainſi la figure BG, eſt à la figure B D, puis que les trois lignes BC, BA, B K, ſont proportionelles.

f Coroll. 19. ou 20. 6

Donc, d'autant que comme CK premiere grandeur, eſt à BC 2 ainſi CH 3. eſt à BD 4. Item, comme BK 5. grandeur, eſt à B C 2. ainſi B G 6. eſt à BD 4 [g] Comme la premiere CK. auec la 5. BK ſera à la 2. BC: ainſi la 3. CH, auec la 6. B G, ſera à

g 24. 5.

BD 4. mais CK 1. & BK 5. enſemble, ſont egales à la 2. BC: Donc la 3. CH, & la 6. BG enſemble ſeront pareillement egales à la 4. BD. Ce qui eſt propoſé.

Autrement, [h] puis que le triangle KAC, eſt ſemblable au triangle ABC & que leurs coſtez BC, CA, ſont de meſme raiſon: (car comme BC à CA, au triangle ABC, ainſi AC à CK, au triangle ACK,) [i] le triangle KAC, ſera au triangle ABC, en raiſon doublee de CA à BC: [k] Mais la figure CH, eſt à la figure BD, auſſi en raiſon doublee de CA à BC: [i] Donc le triangle KAC, ſera au triangle ABC, comme la figure CH à la figure BD: par meſme raiſon on monſtrera que comme le triangle KAB, eſt au triangle ABC, ainſi la figure BG à la figure BD. h 8. 6. i 19. 6. k 19. ou 20. 6. i 11. 5.

Derechef, d'autant donc que comme KAC, premiere grandeur, eſt à ABC 2. ainſi CH 3. eſt à BD 4. Item, comme KBA 5. à ABC 2. ainſi BG 6. à BD 4. [m] Comme KAC 1. auec KBA 5. ſera à la 2. ABC: ainſi CH 3. & BG 6. enſemble, ſera à la 4. BD. Mais KAC, KBA, 1. & 5. enſemble ſont egales à la 2. ABC: donc CH, BG 3. & 6. enſemble ſeront pareillement egales à BD 4. Ce qui eſt propoſé. m 24. 5.

Autrement, comme le quarré de AC 1. grandeur, eſt au quarré de BC 2. grandeur, ainſi la figure CH 3. grandeur, à la figure BD 4. grandeur: [n] Puis qu'elles ſont toutes en raiſon doublee des coſtez AC, BC, ſemblablement comme le quarré de AB 5. grandeur, eſt au quarré de BC ſeconde grandeur, ainſi la figure BG 6. grandeur, eſt à la figure BD 4. grandeur, [o] partant comme la pre- n 19. ou 20. 6. o 24. 5.

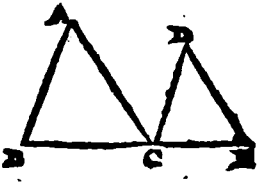
miere grandeur auec la 5. à ſçauoir le quarré de AC, auec le quarré de AB, ſera à la 2. c'eſt à dire, au quarré de BC : ainſi la 3. grandeur auec la 6. à ſçauoir la figure CH, auec la figure BG, eſt à la 4. à ſçauoir à la figure BD : Mais les quarrez de
47. 1. AC, AB, enſemble ſont egaux au quarré de BC, donc les figures CH, BG enſemble ſeront auſſi egales à la figure BD. Ce qui eſt propoſé. Donc aux triangles rectangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 22. PROPOSIT. 32.

Si 2. triãgles qui ont 2. coſtez proportionaux à deux coſtez, ſont diſpoſez (*compoſez*) ſelon vn angle, en ſorte que leurs coſtez de meſme raiſon ſoient auſſi paralleles : les autres coſtez d'iceux triangles ſe rencontreront directement.

Soient les deux triangles ABC, DCE, ayans les coſtez AB, AC, proportionaux à DC, DE, ſçauoir comme AB à AC, ainſi DC à DE, & ſoient diſpoſez ſelon l'angle ACD, de ſorte que les coſtez de meſme raiſon AB, DC; & AC, DE, ſoient paralleles entr'eux. Ie dis que les autres coſtez BC, CE, feront vne ligne droicte.

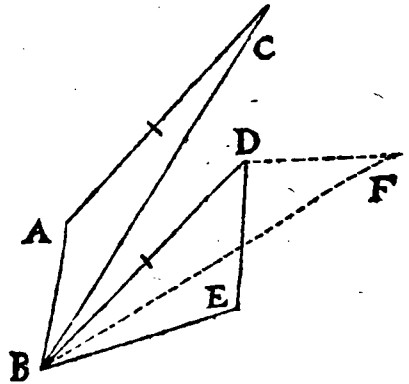
Car puis que AB, DC ſont paralleles, [P] l'angle
P 29. 1. A, ſera egal à ACD alterne : & par meſme raiſon l'angle D ſera egal au meſme ACD.



Et partant A & D seront egaux entr'eux: d'autant donc que les triangles ABC, DCE, ont les costez à l'entour des angles egaux A & D, proportionaux: Ils seront equiangles, & auront les angles B & DCE, egaux. Donc adioustant les egaux A, & ACD, les deux B & A seront egaux aux deux DCE, & ACD: c'est à dire, à l'angle total ACE. Derechef, adioustant le commun ACB, les 2. angles ACE, ACB, seront egaux aux 3. angles du triangle ABC: [q] Mais iceux 3. angles sont egaux à deux droicts: donc les 2. ACE, & ACB, seront egaux à 2. droicts, [r] & partant BC, CE, seront vne ligne droicte. Donc si 2. triangles qui ont 2. costez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. 6. 6. q 32. 1. r 14. 1.

SCHOLIE.

Nous remarquerons icy, que cette Proposition ne se peut entendre que des triangles equiangles (laquelle nous auons demõstree à la 4. Prop.) comme il est facile à colliger de cette demonstration, par laquelle il est manifeste que si l'angle A n'estoit egal à l'ãgle D, AB, AC, estãs proportionaux à DC, DE, il seroit impossible que les autres costez BC, CE, se rencontrassent directement, ou bien que les costez homologues AB, DC, *&* AC, DE, *fussent paralleles, cõme nous mõstrerons aussi par cette fig. où ayant mené* BA, ED, *paralleles entr'elles, &* AC, BD, *aussi paralleles entr'elles: en sorte que* BA *soit à* AC, *comme* ED *à* DB, *& conioinct les lignes droictes* BC, BE: *les triangles* BAC, *&* BDE, *seront composez selon l'angle* CBD, *ayant les costez de mesme raison* AB, DE, *& aussi* AC, BD *paralleles. Neãtmoins les autres costez* BE, BC, *ne se rencontrent di-* 31. 1.



rectement, comme il eſt manifeſte, & ne ſe pourront diſpoſer ſelon vn angle, en ſorte que les autres coſtez ſe rencontrans directement, les coſtez de meſme raiſon ſoient paralleles, & ce d'autant que les angles EDB, & BAC, contenus d'iceux coſtez proportionaux ne ſont egaux: & partant, chacun ne ſeroit egal à ſon alterne, comme il eſt monſtré, & comme il eſt auſſi manifeſte, en faiſant l'angle BDF, egal à l'angle A, & menant la ligne DF, egale à DE, & ioignant la ligne BF; lors les triangles BAC, BDF, ayans les coſtez BA, AC, proportionaux à FD, DB, & les angles A & BDF, contenus d'iceux coſtez, egaux, ils

6. 6. *ſeront equiangles, & eſtans diſpoſez au poinct B, ſelon vn angle, en ſorte que BA ſoit parallele à FD, & CA à BD, les autres coſtez BC, BF, ſe rencontreront directement, comme nous auons monſtré cy-deuant, d'autant que les triangles BAC, BDF ſont equiangles. Donc il ne ſe peut rien conclure de cette Propoſition que des triangles equiangles.*

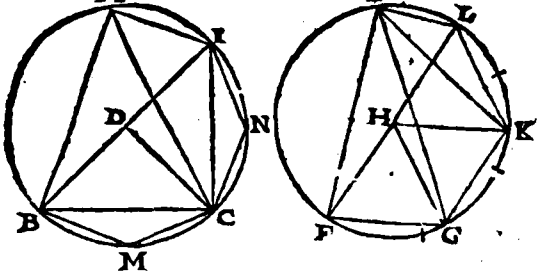
Or cette Propoſition ne ſe pouuant entendre que des triangles equiangles, comme nous auons demonſtré, il s'enſuit manifeſtement qu'elle eſt comme inutile; attendu que tout ce qui eſt propoſé par

icelle, se conclud par la 4. Proposition de ce 6. liure, comme nous auons là demonstré.

THEOREME 23. PROP. 33.

Aux cercles egaux, les angles ont mesme raison entr'eux, que les circonferences sur lesquelles ils sont appuyez, soit qu'ils soient appuyez estans constituez aux centres ou aux circonferences: En outre les secteurs sont aussi de mesme entr'eux, d'autant qu'ils sont constituez au centre.

Soient deux cercles egaux ABC, EFG, dont les centres soient D & H, & soient les angles BDC, FHG au centre, ou BAC, FEG à la circonference. Ie dis que comme l'arc BC, est à l'arc FG, ainsi l'angle BDC, est à l'angle FHG, & l'angle BAC, à l'angle FEG, & en outre le secteur BDC, au secteur FHG.



Car ayant mené les droictes lignes BC, FG, [1] soient appliquees aux cercles CI, egale à BC, & GK, kL, chacune egale à FG, & soiēt menees les droites l. ID, kH, LH. Donc d'autant que BC, CI sont egales, [2] les arcs BMC, CNI, seront pareillemēt egaux: [u] & [t] partant les angles BDC, CDI, seront egaux: par [u] 27. 3. [1] 28. 3. 4.

mesme raison les arcs FG, GK, KL, & les angles
27.&28.3. FHG, GHK, KHL, seront egaux. Donc l'angle BDI, sera autant multiple de l'angle BDC, que l'arc BCI, est multiple de l'arc BC. Par la mesme raison l'angle FHL, sera autant multiple de l'angle FHG, que l'arc FGL, l'est de l'arc FG: puis que les angles BDI, FHL, sont diuisez chacun en autant de parties egales que les arcs BI, FL, sur lesx 27. 3. quels ils sont appuyez: partant si l'arc BCI, est egal à l'arc FGKL, x de neceſſité l'angle BDI, sera egal à l'angle FHL, & si l'arc est plus grand que l'arc, l'angle sera plus grand que l'angle, & si plus petit, plus petit. Parquoy l'arc BCI, & l'angle BDI, equimultiples de la 1. & 3. grandeur, BC, BDC, seront ensemble, ou plus grands, ou egaux, ou plus petits, que l'arc FGKL, & l'angle FHL, equimultiples de
y 6.d. 5. la 2. grandeur FG, & de la 4. FHG, s'ils sont pris comme ils s'entrerespondent. y Parquoy comme l'arc BC 1. grandeur, à l'arc FG 2. ainsi l'angle BDC 3. à l'angle FHG 4. On monstrera le mesme des angles de la circonference.

Secondement, ie dis que comme la circonference, à la circonference, ainsi le secteur au secteur. Soient constituez aux segments BC, CI, les
z 27. 3. angles BMC, CNI, z lesquels seront egaux, insistãs
a 24. 3. aux arcs egaux BAC, CBAI, parquoy les segments BMC, CNI, seront semblables; a & partant egaux entr'eux, estans constituez sur lignes droictes egah 4. 1. les BC, CI. Donc adiouſtant les triangles BDC, CDI, b qui sont pareillement egaux, les secteurs BDC, CDI, seront faicts egaux. Parquoy le secteur BDI, sera autant multiple du secteur BDC, que l'arc BCI l'est de l'arc BC. Semblablement, le secteur FHL, sera monstré autant multiple du secteur FHG, que

l'arc FGKL, l'eſt de l'arc FG. Mais d'autant que ſi l'arc BCI, eſt egal à l'arc FGKL, auſſi le ſecteur BDI, eſt egal au ſect. FHL, (comme il a eſté monſtré aux ſect. BDC, CDI,), & ſi plus grād, pl^s grād: & ſi moindre, moindre; partant l'arc BCI, & le ſecteur BDI, equimultiples de la 1. grandeur BC, & de la 3. BDC, defaudront enſemble de l'arc FGKL, & du ſecteur FHL, equimultiples de la 2. grandeur FG, & de la 4. FHG, ou enſemble ſeront egaux ou excederont, s'ils ſont pris comme ils s'entrereſpondent. [c] Partant, comme l'arc BC 1. grandeur, eſt à l'arc FG 2. ainſi le ſecteur BDC 3. au ſecteur FHG 4. Donc aux cercles egaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. c 6. d. 6.

COROLLAIRE I.

Il eſt manifeſte de cecy, que le ſecteur eſt au ſecteur, comme l'angle eſt à l'angle: Car la raiſon de l'vn & de l'autre; ſçauoir de l'angle BDC, à l'angle FHG, & du ſecteur BDC, au ſecteur FHG, eſt de meſme à la raiſon de l'arc BC, à l'arc FG. [d] Parquoy elles ſeront de meſmes entr'elles. d 11. 5.

COROLLAIRE. II.

Il eſt pareillement manifeſte que comme l'angle au centre eſt à 4. droicts, ainſi l'arc qui ſouſtend iceluy angle, eſt à toute la circonference. Et au contraire, comme 4. angles droicts ſont à l'angle qui eſt au centre, ainſi toute la circonference eſt à l'arc qui ſouſtend ledit angle.

Car comme l'angle au centre, eſt à l'angle droit au centre, [e] ainſi l'arc qui ſouſtend iceluy angle, eſt au quart de la circonference du cercle, ou au quadrant qui ſouſtend iceluy angle droict. Parquoy e 33. 6.

f 33. 6. comme l'angle au centre ſera f au quadruple de l'angle droict: c'eſt à dire à 4. droits, ainſi l'arc ſouſtendu à iceluy angle, ſera au quadruple du quadrant: c'eſt à dire à toute la circonferẽce, par ce que nous auons demonſtré à la 22. Prop. du liure 5. Ce qui eſt premierement propoſé.

D'autant donc que comme l'angle au centre eſt à 4. droits, ainſi l'arc qui ſouſtend iceluy angle, eſt à toute la circonference; par conuerſion de raiſon, comme 4. angles droicts, à l'angle au centre: ainſi toute la circonference ſera à l'arc qui ſouſtend iceluy angle au centre. Ce qui eſt ſecondement propoſé.

f 33. 6. Mais cecy peut auſſi eſtre ainſi demonſtré: f puis que comme l'angle droict au centre, eſt à l'angle au centre. Ainſi le quadrant ou quarte partie de la circonference qui ſouſtend iceluy angle droict, eſt à l'arc qui ſouſtend iceluy angle au centre non droict. Pareillement, comme le quadruple de l'angle droict, c'eſt à dire 4. droits, ſera à l'angle au centre, par ce que nous auõs monſtré à la 22. Prop. du 5. liure: ainſi le quadruple du quadrant, c'eſt à dire, toute la circonference ſera à l'arc qui ſouſtend iceluy angle. Ce qui eſt propoſé.

SCHOLIE.

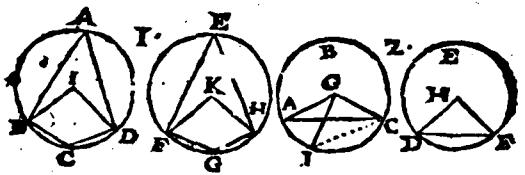
En ſuitte de cette Propoſition, nous demonſtrerons icy les Theoremes ſuyuans.

I.

Les angles qui ſont appuyez ſur ſemblables arcs de cercles, ſoit qu'ils ſoient aux centres ou aux circonferences, ſont e-

gaux entr'eux : Et au contraire, les arcs auſquels inſiſtent angles egaux, ſoit aux centres ou aux circonferences, ſont egaux.

Aux cercles ABCD, EFGH, dont les centres ſont I & K, ſoient les arcs BCD, FGH, ſemblables, ſur leſquels ſoient appuyez les angles I & K, aux centres, & A, E aux circonferences : Ie dis que tant ceux là que ceux-cy, ſont egaux entr'eux. Car ſoiét conſtituez en iceux arcs, les angles C, & G ; [h] qui ſeront egaux : mais tant les 2. C & A, que les 2. G & E, ſont egaux à 2. droits : oſtant donc les egaux BCD, FGH, A & E, demeureront egaux, [i] deſquels I & K, eſtans doubles, ils [k] ſeront auſſi egaux. Ce qui eſt propoſé. h 10. d. 3. i 22. 3. k 6. c. ſ.



Soient derechef, tant les angles I & K, que A & E, inſiſtãs aux arcs, BCD, FGH, egaux entr'eux. Ie dis qu'iceux arcs ſont ſemblables. Car A & E eſtãs egaux : & tant [l] les 2. A, C, que E, G, eſtans egaux à 2. droits, les reſtes C, G, ſeront egaux, [m] partant les ſegments auſquels ils ſont BCD, FGH, ſont ſéblables. Mais ſi I & K ſont egaux aux cétres, leurs moitiez [n] A & E, ſont auſſi egaux. Donc, comme auparauant, les arcs BCD, FGH, ſont ſemblables. Ce qu'il falloit demonſtrer. l 22. 3. m 10. d. 3. n 7. c. ſ.

II.

Aux cercles egaux, si on prend circonferences inegales, moindres que le demy-cercle, la plus grande circonference soustiendra vne plus grande ligne. Mais aux segments plus grands que le demy-cercle la plus petite ligne soustiendra vne plus grande circonference que la plus grande.

Aux cercles egaux ABC, DEF, dont les centres sont G, H, soient les arcs moindres que le demy-cercle AC, DF, & soit AC plus grand, & DF plus petit: & partant ABC moindre, & DEF plus grād. Ie dis que la ligne droite menee de A à C, est plus grande que la droicte ligne menee de D à F. Car apres auoir mené les lignes droites GA, GC, AC, HD, HF, puis que l'arc AC, est posé plus grand que l'arc DF, soit retranché CI, egal à DF, & soit menee la droicte ligne GI: les angles IGC & H
• 27. 3. seront egaux: • mais AGC est plus grand que IGC: il sera donc aussi plus grand que H. Derechef, les costez GA, GC, estans egaux aux costez HD, HF, chacun au sien, estans menez des centres de cercles egaux, & l'angle AGC, monstré plus grand que DHF, la base AC, sera plus grande que la base DF, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. Soit veuë la 2. figure.

Fin du sixiesme Liure.

LIVRE

LIVRE SEPTIESME DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. L'vnité, eſt ſelon laquelle vne chacune choſe, de celles qui ſont, eſt dite vne.

EVCLIDE a traicté iuſques icy, de la premiere partie de la Geometrie, ſçauoir de celle-là laquelle conſidere les plans: Il reſte l'autre partie, laquelle traicte des ſolides. Mais auparauant il luy a eſté neceſſaire de traicter des lignes commenſ. & incommenſ d'autãt que la cognoiſſance d'icelles eſt requiſe à l'explication & demonſtration des proprietez de pluſieurs corps ſolides, & principalement de ceux que l'on nomme reguliers; de ſorte que ſans icelles, le traicté des ſolides auroit eſté imparfaict, & d'auantage, que ſans icelles lignes

plusieurs costez, tant des plans que des solides, si l'on veut reduire la Geometrie en vsage & pratique, ne peuuent estre exprimez ny entendus: car plusieurs des costez, sont ces lignes que les Grecs appellent ἄλογοι, c'est à dire irrationelles, ou si elles ne sont irrationelles, elles sont incommensurables en longitude entr'elles, partant ne sont exprimees par les nombres.

Or d'autant que l'explication & intelligence de ces lignes, est comme enuelopee & conioincte auec les nombres, en sorte que sans iceux ne peuuent estre cogneuës, il a esté besoin de traicter des nombres auparauant. C'est pourquoy en ce 7. liure, & aux deux suyuans, il explique les affections & proprietez des nombres, entant qu'ils peuuent seruir à la Geometrie, afin qu'au 10. liure, auec plus de facilité & plus amplement, il face les demonstrations des lignes commensurables, & incommensurables.

Commençant donc, selon sa coustume, par les principes, il definit premierement l'vnité; enseignant que c'est celle, selon laquelle, chaque chose, de celles qui sont, est dite, vne: car selon l'vnité, nous auons de coustume d'appeller vn corps, vn corps: vn animal, vn animal: vne pierre, vne pierre, & ainsi des autres choses. Au reste, l'vnité ne reçoit aucune diuision aux nombres, tout de mesme que le poinct aux grandeurs.

2. Nombre, est vne multitude composee d'vnitez.

C'est à dire, que si on pose tant d'vnitez que

l'on voudra enſemble, la collection d'icelles, s'appelle, nombre, d'où il eſt manifeſte, qu'en tout nombre il y a autant de parties, qu'il y a d'vnitez qui le conſtituent: de ſorte que l'vnité eſt partie de chacun nombre denommee par iceluy nombre, duquel elle eſt partie. Comme le nombre 8. compoſé de huict vnitez, ſe diuiſe en autant de parties, ſçauoir en huict vnitez, chacune deſquelles eſt dite partie huictieſme du nombre huict, &c. D'où il s'enſuit que tous les nombres ſont commenſurables entr'eux, puis qu'ils ſont tous meſurez par vne meſme meſure, ſçauoir par l'vnité, comme il eſt dit. Ce qui ne peut pas conuenir à toutes les grandeurs, comme il ſera monſtré au 10. liure.

3. Vn nombre, eſt partie d'vn autre nombre; le plus petit du plus grand, lors que le plus petit, meſure le plus grand.

Cette Definition eſt ſemblable à celle du cinquieſme liure, par laquelle Euclide definit la partie de la quantité continuë. Car comme là, icy il definit la partie aliquote, laquelle eſt dite meſurer exactement ſon tout. Comme 6. eſt dict partie de 18. d'autant qu'il le meſure exactement ſans qu'il reſte rien. Semblablement chacun de ces nombres, 3. 4. 6. 8. eſt partie de 576. puiſque chacun le meſure exactement. Or toute partie prend ſon nom du nombre par lequel elle meſure vn autre, comme 6. eſt dite ſeptieſme partie de 42. d'autant que 6. meſure 42. par 7. c'eſt à dire, eſt contenu en 42. ſept fois exactement, & ainſi des autres.

4. Mais vn nombre, eſt dict parties d'vn autre plus grand, quand le plus petit ne meſure le plus grand.

Comme 4. ne ſera dict partie de 6. d'autant que 4. plus petit ne meſure 6. preciſement : mais ſera dict les deux parties de 6. ſçauoir $\frac{2}{3}$ & 5. ſera dict parties de 18. ſçauoir $\frac{5}{18}$. d'autant que l'vnité qui eſt leur commune meſure, eſt contenuë cinq fois en 5 & dix-huict fois en 18.

5. Vn nombre eſt dict multiple d'vn autre plus petit, lors que le plus petit meſure le plus grand.

Tout ainſi qu'vn nombre, qui en meſure preciſément vn plus grand, eſt dict partie du plus grand, auſſi le plus grand, qui eſt meſuré par le plus petit, eſt dict multiple du plus petit ; & tout ainſi auſſi qu'vn nombre qui n'en meſure exactement vn plus grand, n'eſt dict partie du plus grand, mais parties, auſſi le plus grand ne ſera dict multiple du plus petit, par lequel il n'eſt meſuré. Comme 4. eſt partie de 24. d'autant qu'il meſure 24. preciſement, & pareillement 24. eſt dict multiple de 4. puis qu'il eſt meſuré de 4. Et 30. multiple de 6. d'autant que 6. meſure 30. &c.

6. Nombre pair, eſt celuy qui peut eſtre diuiſé en deux egalement.

Comme tous les nombres ſuyuans 4. 10. 40. 100. 1000. ſont dicts nombres pairs, d'autant

que chacun peut estre diuisé en deux parties egales, dont les moitiez seront 2.5.20.50.500.

7. Mais nombre impair, est celuy qui ne se peut diuiser en deux egalement, ou qui differe du nombre pair de l'vnité.

Comme tous ces nombres icy, 5.11.15.37.101, sont appellez nombres impairs, d'autant qu'ils ne peuuent estre diuisez en deux egalement: ou bien d'autant qu'ils sont differens de l'vnité des nombres pairs 4.10.14.36.100.&c.

8. Nombre pairement pair, est celuy qu'vn nombre pair mesure par vn nombre pair.

Comme 32. sera dict pairement pair, dautant que 8. nombre pair, le mesure par 4. qui est aussi nombre pair: 24. sera aussi dict nombre pairement pair, puis que 4. nombre pair, le mesure par 6. nombre pair, &c.

9. Et nombre pairement impair, est celuy qu'vn nombre pair mesure, par vn nombre impair.

C'est à dire, que si vn nombre pair mesure vn nombre pair, par vn nombre impair, le mesuré sera appellé pairement impair. Comme 30. que 2. nombre pair mesure par 15. nombre impair. Et 6. nombre pair, mesure le mesme 30. par 5. nombre impair, &c.

10. Mais nombre impairement impair, eſt celuy lequel vn nombre impair, meſure par vn nombre impair.

Comme 45. lequel eſt meſuré de 9. nombre impair par 5. nombre auſſi impair, eſt dict nombre impairement impair: Et 15. auſſi, qui eſt meſuré de 5 par 3. Et ceux-cy 9.21.25.27.33.35.&c. ſont dits impairement impairs.

11. Nombre premier, eſt celuy lequel l'vnité ſeule meſure.

C'eſt à dire, que ſi vn nombre ne peut eſtre meſuré par aucun autre. Mais par l'vnité ſeulement, en ſorte qu'il ne puiſſe eſtre dict pairement pair, ou pairement impair, ou impairement impair, iceluy ſera appellé nombre premier, comme ſont ceux-cy, 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31, &c. Car la ſeule vnité les meſure.

12. Nombres premiers entr'eux, ſont ceux-là, leſquels ont la ſeule vnité pour commune meſure.

C'eſt à dire, que ſi deux ou pluſieurs nombres ſont propoſez, & qu'il ne ſe puiſſe trouuer aucun nombre qui meſure chacun d'iceux preciſement, outre la ſeule vnité, iceux ſeront dicts premiers entr'eux, comme 15.&8. ou 3.&5. ſont premiers entr'eux, d'autant qu'il n'y a que l'vnité qui ſoit commune meſure d'iceux, &c.

13. Nombre composé, est celuy lequel, quelque nombre peut mesurer.

Les Geometres appellent nombre composé, celuy que quelque autre nombre mesure outre l'vnité. Comme 15. qui est mesuré par 5. & 3. Or il est manifeste que tous les nombres pairs, outre le binaire, sont nombres composez, estans tous mesurez par 2. d'où il s'ensuit que tous les nombres premiers, outre le binaire, sont impairs, le binaire estant le premier des pairs.

14. Mais nombres composez entr'eux, sont ceux-là lesquels sont mesurez par quelque nombre, comme commune mesure.

Deux ou plusieurs nombres, lesquels sont mesurez par quelque nombre, outre l'vnité, comme par leur commune mesure, sont dicts composez entr'eux, jaçoit que chacun de soy ne soit composé. Comme 15. & 24. sont composez entr'eux, d'autant que 3. mesure l'vn & l'autre, comme commune mesure: aussi 7. 21. & 35. sont composez entr'eux: car le premier d'iceux mesure soy-mesme, & les deux autres, encore qu'il soit premier de soy.

15. Vn nombre est dict en multiplier vn autre, quand il en est produict quelqu'vn, qui est composé autant de fois du multiplié, qu'il y a d'vnitez au multipliant.

Comme 6 ſera dict multiplier 8 quand 8. ſera compoſé autant de fois qu'il y a d'vnitez au multipliant 6. ſçauoir ſix fois, & qu'il ſera procreé vn autre nombre, ſçauoir 48. Auſſi en changeant 8. ſera dict multiplier 6. ſi on poſe 6. huict fois, ſçauoir autant qu'il y a d'vnitez en 8. & que l'on fera le meſme 48. Ainſi vn nombre ſera dict eſtre produict de deux nombres, ſe multiplians l'vn l'autre, comme 63. de 7. & 9. &c.

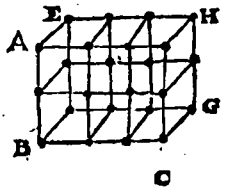
16. Mais quand deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre, en produiſent quelqu'vn, celuy qui eſt produict, eſt appellé plan. Et les nombres qui ſe multiplient l'vn l'autre, ſeront dicts coſtez d'iceluy.

Tout nombre produict de la mutuelle multiplication de 2. nombres, eſt appellé plan, d'autant que ſes vnitez eſtans diſpoſees en long & en large, repreſentent vn parallelogramme rectangle, les coſtez duquel ſont les deux nombres ſe multiplians, comme . . . . . il a eſté dict au ſecond liure, ... Comme 24 produict de 4. par 6. 4 . . . . . eſt dict nombre plan, duquel les . . . . . coſtez ſont 4. & 6. d'autant que 6 ſes vnitez diſpoſees en long & large, repreſentent vn parallelogramme rectangle, &c.

17. Quand trois nombres ſe multiplians l'vn l'autre, en produiſent quelqu'vn, celuy qui eſt procreé, ſera appellé ſolide. Et les nombres qui ſe multi-

plient l'vn l'autre, seront appellez costez d'iceluy.

Comme d'autant que ces trois nombres 2. 3. 4. se multiplians l'vn l'autre produisent 24. car 2. par 3. produict 6. & 6. par 4. produict 24. ou bien 2. par 4. faict 8. & 8. par 3. faict 24. ce nombre 24. sera appellé solide; & les nombres 2. 3. 4. sont les costez. D'autant que ses vnitez disposees en lõg, large & profondité, representent quelque figure solide, appellee parallelipipede, cõme il sera exposé au liu. 11. dõt



les 3. dimensions sont exprimees par les 3. nombres qui se multiplient. Car si on multiplie 2. par 4. on aura 8. pour le nombre de la base BG, du solide AC, longue de 4. vnitez, & large de 2. & si cette base est multipliee par 3. on produira tout le nombre du solide 24. haut de 3. vnitez, &c.

18. Nombre quarré, est celuy qui est egalement egal, ou qui est contenu sous deux nombres egaux.

C'est a dire, produict de deux nombres egaux, multipliez l'vn par l'autre.

Ce nombre plan, qui est egalement egal, c'est à dire, qui selon ses vnitez disposees en long & en large, refere vn parallelogramme rectangle, dont la longitude est egale à la latitude, de sorte que tous ses costez sont egaux, ou qui est produict de

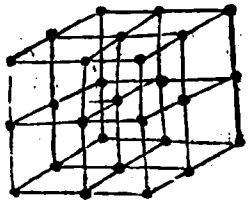
2. nombres egaux, & partant eſt conte-. . . . .
nu ſous iceux, eſt appellé quarré, com-. . . . .
me 25. contenu ſous 5. & 5. c'eſt à dire, 5. . . . .
produict de la mutuelle multiplica-. . . . .
tion des deux 5. l'vn par l'autre. Car. . . . .
ſes vnitez eſtans redigees en forme 5
plane, il repreſente vn quarré parfaict, ayant 5. vnitez à chaque coſté, partant egalement egal.

Mais l'vn ou l'autre des coſtez de la multiplication deſquels il eſt produict, eſt appellé racine du quarré.

19. Nombre cube, eſt celuy qui eſt egalement egal egalement; ou qui eſt contenu ſous 3. nombres egaux.

Ou produict de trois nombres egaux multipliez l'vn par l'autre.

Il appelle cube ce ſolide, qui eſt egalement egal egalement, c'eſt à dire, duquel les vnitez diſpoſees en long, large & profond, repreſentent vn cube Geometrique, en ſorte que toutes ſes dimenſions, ſçauoir longitude, latitude, hauteur ou profondité, ſoient egales; ou qui eſt produict de trois nombres egaux, comme 27. qui eſt contenu ſous ces trois nombres 3. 3. 3. car 3. fois 3. font 9. & 3. fois 9 font 27. Car toutes ſes vnitez redigees en forme de ſolide repreſentent vn cube Geometrique, y ayant 3. ſelon



chacune dimenſion. Et chacun de ces trois nombres, eſt appellé des Geometres coſté du cube, & de pluſieurs Arithmeticiens, racine cubique.

20. Les nombres ſont proportionaux; Quand le premier eſt autant multiple du ſecond, ou meſme partie, ou meſmes parties, que le troiſieſme du quatrieſme.

Ou bien, quand le premier contient autant de fois le ſecond; & en outre vne meſme partie d'iceluy, ou meſmes parties, que le troiſieſme le quatrieſme.

Afin de comprendre tous les nombres proportionaux, en tout genre de proportion d'inegalité, (comme ſont tous les nombres inegaux.) Nous auons adiouſté ces mots, tant à cauſe qu'ils ſe peuuent entendre de ce qu'a dict Euclide, que pour rendre cette Definition plus intelligible, (ou bien quand le premier contient autant de fois le ſecond: & en outre vne meſme partie, ou meſmes parties d'iceluy, que le troiſieſme le quatrieſme.) Car la vulgaire Definition d'Euclide (laquelle Clauius penſe eſtre corrompuë) comprend ſeulement les nombres proportionaux, en la proportion multiple & ſubmultiple, & aux autres proportions de moindre inegalité. Car en la proportion multiple, il y a 4. nombres proportionaux, quand le premier eſt autant multiple du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, & en la ſubmultiple, quand le premier eſt meſme partie du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, & aux au-

tres proportions de moindre inegalité. Quand le premier eſt meſmes parties du ſecond que le troiſieſme du quatrieſme, comme veut la Definition d'Euclide: mais par icelle l'on ne peut comprendre quels ſont les nõbres proportionaux en la raiſon ſuperparticuliere, ſuperpartiente, multiple ſuperparticuliere, & multiple ſuperpartiente: car en toutes ceux-cy, le premier nombre n'eſt pas autant multiple du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, ny meſme partie, ny meſmes parties: Mais le premier contient le ſecond, & le troiſieſme le quatrieſme egalement, ſçauoir vne fois ou plus: & en outre vne meſme partie d'iceluy, ou meſmes parties, comme il eſt manifeſte par la Definit. 4. liure 5.

Parquoy ces nombres 12. 4. 9. 3. ſont proportionaux, eſtant le premier autant multiple du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, ſçauoir triple. Item 4, 12. 3. 9. Car 4. eſt telle partie de 12. ſçauoir tierce, que 3. de 9. Derechef, 6. 8. 9. 12. ſont proportionaux, d'autant que 6. eſt meſmes parties de 8. que 9. de 12. ſçauoir les $\frac{3}{4}$. Finalemẽt, 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſont nombres proportionaux: car au premier exemple, le premier nombre contient vne fois le ſecond, & le troiſieſme 1. fois le quatrieſme, & en outre la $\frac{1}{4}$. partie. Au 2. exemple, le premier contient 1. fois le 2. & le troiſieſme le quatrieſme, & en outre $\frac{1}{4}$. parties. Au troiſieſme exemple deux fois, & $\frac{2}{5}$. partie. Et au dernier, le premier contient 2. fois le 2. & le 3. le quatrieſme, & en outre, $\frac{3}{5}$. parties, & autrement les nombres ne ſeront nullement proportionaux. Donc toutes & quantes fois que 4. nombres ſont poſez propor.

tionaux, il faudra accorder, que si les plus grands sont comparez aux moindres, le premier & le troisiéme, seront equimultiples du 2. & du 4. ou bien le premier & le 3. contiendront egalement le 2. & le 4. & en outre mesme partie, ou mesmes parties: Et au contraire, si le 1. & le 3. sont accordez equimultiples: ou bien que le 1. soit dict contenir autant de fois le 2. que le 3. le 4. & en outre mesme partie ou mesmes parties, on colligera que les nõbres sont proportionaux. Que si on compare les moindres aux plus grãds, & qu'ils soient dits auoir mesme proportion, il faudra confesser que le premier est mesme partie du 2. que le 3 du 4. ou mesmes parties; & au contraire si le premier est posé mesme partie du 2. que le 3. du 4. ou mesmes parties, on conclura qu'iceux nombres sont proportionaux.

Mais Euclide definit seulement ces nombres proportionaux là, lesquels ont mesme proportion d'inegalité. Car s'il est question de la proportion ou raison d'egalité, il est manifeste que le 1. doit estre egal au 2. & le 3. au 4. afin qu'ils soient dits proportionaux.

Or de cette Definition on collige manifestement que les nombres egaux ont mesme raison à vn mesme, & au contraire vn mesme aux egaux. Item, que les nombres qui ont mesme raison à vn mesme, ou ausquels vn mesme nombre a mesme raison, sont egaux.

Car puis que les nombres egaux sont equimultiples, ou mesme partie, ou mesmes parties d'vn mesme; ou le contiennent egalement, & en outre mesme partie ou mesmes parties. Item puis qu'vn mesme nombre est equimultiple de nom-

bres egaux, ou mesme partie, ou mesme parties; ou contient iceux egalement, & en outre mesme partie, ou mesmes parties d'iceux : il est manifeste que nombres egaux ont mesme raison à vn mesme, ou vn mesme à nombres egaux, selon cette Definition.

Derechef, d'autant que les nombres qui ont mesme raison à vn mesme, sont equimul. d'iceluy, ou mesme partie, ou mesmes parties, ou le cõtiennent egalement, & en outre mesme partie, ou mesmes parties. Et vn nombre qui a mesme raison à quelques vns, est equimultiple d'iceux, ou mesme partie, ou mesmes parties, ou les contient egalement, & en outre mesme partie, ou mesmes parties d'iceux : selon cette Definition, il est manifeste que les nombres qui ont mesme raison à vn, ou ausquels vn mesme à mesme raison, sont egaux entr'eux.

Semblablement, l'on infere qu'il y a plus grande raison d'vn plus grand nombre à vn mesme, que d'vn plus petit. Et au contraire, vn mesme a plus grande raison à vn plus petit qu'à vn plus grand. Item, que celuy des nombres qui a plus grande raison à vn mesme, est le plus grand, & celuy auquel vn mesme, a plus grande raison est le plus petit: toutes lesquelles choses sont faciles, entendant bien cette Definition.

Clauius dict icy, que cette Definition conuient aussi aux nombres rompus, soit qu'il y ait des nombres entiers conioincts auec iceux, ou non : Car pour exemple, ces quatre nombres sont proportionaux $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{4}$ le premier estant autant multiple du secõd, que le 3. du 4. sçauoir double, ce qui appert, si on reduict les deux premiers en mesme

denomination, ſçauoir à $\frac{6}{8}$ & $\frac{3}{8}$, & les deux derniers à $\frac{2}{4}$ & $\frac{1}{4}$. Semblablement, ces quatre ſont proportionaux, $2\frac{1}{8}$ $4\frac{2}{16}$ $1\frac{1}{4}$ $2\frac{1}{10}$, puis que le premier eſt telle partie du 2. que le 3. du 4. ſçauoir la moitié: ce qui eſt manifeſte, les reduiſant en meſme denomination, ſçauoir à $\frac{17}{8}$ $\frac{18}{8}$ & $\frac{5}{4}$ & $\frac{10}{8}$. En quoy Clauius ſe trompe lourdement, ne conſiderant pas, qu'à proprement parler, il n'y a point de nombres rompus, ou fractions, l'vnité eſtant indiuiſible, ſelon Euclide, & la fraction ſe faiſant en la choſe nombree, & non aux nombres, ſçauoir quand on diuiſe quelque tout en autres parties egales, & d'vn autre nom, comme nous auons monſtré en noſtre Arithmetique, leſquelles parties eſtans appliquees aux nombres, ou les nombres appliquez à icelles, ſont pour lors nombres abſolus, c'eſt à dire nombres entiers; comme aux exemples cy-deſſus, où il dict que $\frac{6}{8}$ eſt double de $\frac{3}{8}$. Il faut entendre que ces nombres 6. & 3. ſont pris abſolument, & comme nombres entiers, ſans auoir eſgard au nom: car l'on compare ſeulement le nombre au nombre, ſans comparer le nom au nom: c'eſt à dire, au Denominateur, & faut entendre le meſme des autres: Car ces choſes ainſi reduites ne ſont plus fractions; puis que fractions ſont ainſi dites, ſeulement en comparaiſon de leur tout ainſi diuiſé en parties d'vn autre nom: mais ces parties appliquees aux nombres, ſont nombres entiers: & ainſi l'entend Euclide.

21. Les nombres plans, ſemblables & ſolides, ſont ceux-là qui ont les coſtez proportionaux.

Afin qu'vn nombre plan ſoit ſemblable à vn nõbre plan, il n'eſt pas neceſſaire que deux coſtez de l'vn, tels que l'on voudra, ſoient proportionaux à deux coſtez de l'autre, tels que l'on voudra; mais ſuffit que l'vn ait deux coſtez, quels qu'ils ſoient proportionaux à deux quelconques coſtez de l'autre.

Comme les nombres plans 24. & 6. ſont ſemblables, d'autant que les coſtez de celuy-là, 6. & 4. ſont proportionaux, aux coſtez de cettuy-cy, 3. & 2. combien que les autres coſtez de ce premier 8. & 3. ou 12, & 2. ne ſoient proportionaux à ceux-cy 3. & 2.

Semblablement, il n'eſt pas requis, qu'à fin que deux nombres ſolides ſoient ſemblables, que 3. des coſtez de l'vn, tels qu'on voudra, ſoient proportionaux à 3. de l'autre, tels qu'on voudra; mais ſuffit que trois coſtez ſoient proportionaux à trois coſtez, quels qu'ils ſoient, car ainſi, ils ſont reduits en forme de ſolide, ſelon leurs vnitez, & leurs longitudes, latitudes & altitudes ſerõt proportionelles. Comme les nombres ſolides 192. & 24. ſont ſemblables, les coſtez de celuy-là, 8. 6. 4. eſtans proportionaux aux coſtez de celuy-cy, 4 3. 2. combien que les autres coſtez de ce premier 12. 8. & 2. ou 16. 4. 3. ne ſoient proportionaux à ceux-cy, 4. 3. 2. &c.

22. Nombre parfaict, eſt celuy-là qui eſt egal à toutes ſes parties aliquotes.

C'eſt à dire, que ce nombre là, auquel toutes ſes parties priſes enſemble ſont egales, (ſçauoir toutes ſes parties aliquotes) eſt appellé des Mathematiciens nombre parfaict, comme 6. 28. 496. Car le premier contient ces 3. parties aliquotes, 1.2.3. leſquelles toutes enſemble font 6. Toutes celles du ſecõd ſont 1.2.4. 7. 14. laſõme deſquelles faict 28. Et celles du troiſiéme 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. toutes leſquelles aſſemblees font 496. &c.

Que ſi toutes les parties aliquotes d'vn nombre priſes enſemble, ſont plus grandes qu'iceluy, il ſera dict abondant, ſi moindres, il ſera appellé diminué.

D'où il appert que ce mot, partie, eſt pris par Euclide, pour partie aliquote ſeulement: car autrement tout nombre ſeroit nombre parfaict, tout nombre eſtant egal à toutes ſes parties, ſi chaque nombre plus petit, peut eſtre dit parties d'vn plus grand, ſoit qu'il le meſure ou non.

A ces Definitions d'Euclide, nous adiouſterons les ſuyuantes, apres quelques Interpretes.

23. Vn nombre eſt dict meſurer vn nombre par celuy-là, lequel multipliant, ou eſtant multiplié, produict le meſme nombre.

Comme 4. ſera dict meſurer 12. par 3. d'autant

que 4. multiplié par 3. produict 12. Item, 3. ſera dict meſurer le meſme 12. par 4. puis que 4. multipliant 3. produict 12. &c.

24. Proportion, ou raiſon de nombres, eſt vne habitude d'vn nombre à vn autre, ſelon ce que l'vn eſt multiple de l'autre, ou partie, ou parties, ou bien le contient vne fois, ou quelques-fois, & en outre quelque partie, ou parties d'iceluy.

Comme ſi on compare 20. auec 4. ſelon ce que 20. eſt multiple de 4. ſçauoir quintuple, cette comparaiſon ou habitude ſera dite raiſon, comme il eſt dict à la 3. Definition du 5. liu. où Euclide a parlé de la raiſon en general.

25. Deux nombres ſont dicts termes ou racines de la proportion, auſquels l'on n'en peut trouuer deux plus petits en la meſme raiſon ou proportion.

26. Quand trois nombres ſont proportionaux, le premier eſt dict auoir au troiſieſme la raiſon doublee de celle du premier au ſecond: Et quand il y en a quatre, le premier eſt dict eſtre au quatrieſme en raiſon triplee, du premier au ſecond: Et ainſi d'vn meſme ordre, vn de plus, iuſques à ce que la proportion ſoit acheuee.

27. S'il y a tant de nombres que l'on

voudra d'ordre, la raiſon du premier au dernier, eſt dicte eſtre compoſee des raiſons du premier au ſecond, & du ſecond au troiſieſme, & du troiſieſme au quatrieſme, & ainſi d'ordre, iuſques à ce que la proportion ſoit acheuee.

PETITIONS ou demandes.

1. A tout nombre donné, en pouuoir prendre tant que l'on voudra d'egaux ou multiples.

2. A tout nombre donné en pouuoir prendre vn plus grand.

Combien que le nombre ne puiſſe eſtre diminué infiniment, mais paruient à l'vnité indiuiſible, il peut neantmoins eſtre augmenté infiniment, par la continuë addition de l'vnité. Parquoy quelconque nombre eſtant propoſé l'on en peut trouuer vn plus grand, ſçauoir celuy qui eſt produict de l'addition de l'vnité, ou de pluſieurs vnitez, au nombre donné.

COMMVNES SENTENCES.

1. Les nombres equimultiples de nombres egaux, ou d'vn meſme nombre, ſont egaux entr'eux.

2. Les nombres, desquels vn mesme nombre est equimultiple, ou desquels, nombres egaux sont equimultiples, sont egaux entr'eux.

3. Les nombres qui sont mesme partie, ou mesmes parties de nombres egaux, ou d'vn mesme nombre, sont egaux entr'eux.

4. Les nombres, desquels vn mesme nombre ou nombres egaux, sont mesme partie, ou mesmes parties, sont egaux entr'eux.

5. L'vnité mesure tout nombre, par les vnitez qui sont en iceluy, c'est à dire, par le mesme nombre.

Car l'vnité estant prise autant de fois, qu'il y a d'vnitez au nombre proposé, constituë iceluy: c'est pourquoy elle le mesure par les vnitez qui sont en iceluy, c'est à dire, par le mesme nombre constitué de ses vnitez.

6. Tout nombre mesure soy-mesme par l'vnité.

Puis que chacun nombre pris vne fois est egal à luy-mesme, il est manifeste que tout nombre se mesure soy-mesme par l'vnité.

7. Si vn nombre multipliant vn nombre, en produict quelqu'vn, le multipliant

meſurera le produict, par le multiplié: mais le multiplié meſurera le meſme par le multipliant.

Car que B, multipliant A, produiſe C. Ie dis que A, meſure C par B, & B meſure le meſme C par A: Car[a] puis que B, eſtant autant de fois compoſé qu'il y a d'vnitez en A, conſtituë C, il eſt manifeſte que B meſure C par A, & par meſme raiſon A, meſure le meſme par B, puis que B multipliant le meſme A, produict le meſme C, comme il ſera demonſtré à la 16. Propoſition de ce liure.

A....4 B...3
C.....12

a 15.def.

8. Si vn nombre en meſure vn autre, celuy par lequel il le meſure, meſure le meſme par les vnitez qui ſont au meſurant; c'eſt à dire, par le meſme nombre meſurant.

Comme d'autant que le nombre 6. meſure 18. par 3. iceluy 3. meſurera le meſme 18. par 6. c'eſt à dire par les vnitez qui ſont en 6. Car puis que 6. meſure 18. par 3. le nombre 18. ſera[b] produict de la multiplication de 6. par 3. ou de 3. par 6. Donc par le precedent axiome 3. meſurera 18. par 6.

b 23.def.

9. Si vn nombre meſurant vn nombre, multiplie celuy par lequel il le meſure, ou eſt multiplié par iceluy, il produira celuy-là lequel il meſure.

Car, que le nombre A, meſure C par B. Ie dis

que A multipliant B, ou multiplié de B. produira C: Car A eſt dict meſurer C par le nombre, lequel multipliant, ou eſtant multiplié, produict C. Donc A eſtant poſé, meſurer C par B; il eſt manifeſte que A multipliant B ou eſtant multiplié par iceluy, produira C.

A....4 B...3
C.....12

e 25. def.

10. Le nombre qui meſure tant d'autres nombres que l'on voudra, meſure auſſi le compoſé d'iceux.

Que le nombre A, meſure BC, & CD. Ie dis qu'il meſure auſſi leur compoſé B D. Car puis

A.... 4. 20.
B....4 E....4 C....4 F....4.G....4 D

que A meſure BC, CD, tant BC, que CD, ſera multiple de A; diuiſant donc BC, ſelon les parties BE, EC, egales à A, & CD, ſelon CF, FG, GD, egales à A; BD, compoſé de toutes les parties BE, EC, CF, FG, GD, egales à A, ſera multiple de A. Donc A meſure B. Ce qui eſt propoſé.

11. Le nombre, qui meſure quelconque autre nombre, meſure auſſi tout nombre que celuy-là meſure.

Que le nombre A meſure B, & B meſure CD. Ie dis que A meſure auſſi CD: Car puis que B meſure CD, iceluy CD, ſera multiple de B. Diuiſant donc CD, en CE, ED egaux à B; A meſurera

CE, ED, puis que A est posé mesurer B, nombre egal, tant à CE, que à ED. [d] Donc A mesurera aussi CD, compsé de CE, ED. Ce qui est proposé.

A...3
B.....9
C.....9 E.....9. D

d 1o. 6. s.

12. Le nombre, qui mesure le tout & le retranché, mesure aussi le reste.

Que A, mesure le tout BC, & le retranché BD. Ie dis qu'il mesurera aussi DC reste. Car puis que A mesure BC, & BD, tant BC, que BD, sera multiple de A, ou BD sera egal à A. Donc ayant diuisé tant BC, que BD, en parties egales à A, le reste DC, sera vne seule partie de BC, egale à A, ou plusieurs: partant DC, sera egal à A, ou multiple d'iceluy. Donc A, mesurera DC. Ce qui est proposé.

A...3
B.....9 D...3 C
B.....9 D.....6 C
B...3 D.....6

Tout ce qui a esté adiousté cy-dessus, outre les Definitiõs d'Euclide, est pour rendre les demõstrations cy-apres plus intelligibles: toutes lesquelles choses icy adiousteés, sont fondees sur tout ce qu'a dict Euclide par cy-deuant.

THEOREME 1. PROP. 1.

Si de deux nombres inegaux proposez; on retranche tousiours alternatiuement le plus petit du plus grand, & que le re-

ſtant ne meſure iamais ſon precedent, iuſques à ce que l'on ait pris l'vnité; les nombres propoſez au commencement, ſeront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inegaux propoſez A B, C D, le moindre deſquels C D, ſoit retranché tant de fois que l'on pourra du plus grand A B: & reſte E B, qui ſoit oſté de C D, auſſi autant de fois qu'il ſera poſſible, & le reſte F D, de E B: & qu'en cette alternatiue ſouſtraction, le nombre reſtant, ne meſure iamais le precedent duquel il a eſté ſouſtrait, iuſques à ce que l'on paruienne à l'vnité G B, qui meſure le nombre precedent F D. Ie dis que les nombres A B, C D, ſont premiers entr'eux, c'eſt à dire qu'ils ont la ſeule vnité pour commune meſure.

Car s'ils ne ſont premiers entr'eux, ils ſeront meſurez par quelque nombre, lequel ſoit H, commune meſure d'iceux outre l'vnité. D'autant donc que H meſure C D, & C D; A E, (C D, eſtant partie de A E, ou egal à iceluy, puis qu'eſtant oſté de A B, reſte E B) [e] H meſurera auſſi A E. Mais H meſure le tout A B. [f] Il meſurera donc auſſi le reſte E B. Mais E B meſure C F. [g] Donc H meſurera le meſme C F: & partant puis qu'il meſure le tout C D, [h] il meſurera auſſi le reſte F D, & puiſque F D, meſure E G, [i] H meſurera auſſi E G. Mais H meſuroit le tout E B, [k] donc H meſurera pareillement l'vnité reſtante G B, le tout ſa partie, ce qui eſt abſurde. Donc aucun nom-

A ..... 10 E .. 2 G 1. B
C ... 3 F .. 2 D
H .....

e 11. c. f
f 12. c. f.
g 11. c. f.
h 12. c. f.
i 11. c. f.
k 12. c. f.

bre outre l'vnité, ne meſurera AB, CD: & partant ſeront premiers entr'eux. Parquoy ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Commandin demonſtre icy la Propoſition ſuyuante.

Si de deux nombres propoſez, & compoſez entr'eux, on ſouſtraict touſiours le moindre du plus grand alternatiuement; l'on ne paruiendra pas iuſques à l'vnité.

Car ſi on paruenoit à l'vnité, [l] les nombres propoſez ſeroient premiers entr'eux: Ce qui eſt abſurde eſtans poſez, compoſez entr'eux. [l] 1. 2.

De ces choſes nous cognoiſtrons, ſi deux nombres quelconques eſtans propoſez, ſeront premiers entr'eux ou non. Car ſi oſtant touſiours alternatiuement le plus petit du plus grand, le reſte ne meſure ſon precedent iuſques à ce que l'on ait pris l'vnité, ils ſeront [m] premiers entr'eux: autrement ils ſeront compoſez entr'eux, &c. [m] 1. 7.

PROBLEME 1. PROPO. 2.

Trouuer la plus grande commune meſure de deux nombres donnez, non premiers entr'eux.

Soient propoſez deux nombres AB, CD, non premiers entr'eux, deſquels il faut trouuer la plus grande commune meſure. Soit retranché le plus petit CD, de AB, plus grand, autant de fois qu'il

sera possible, & reste EB, lequel soustrait de CD, laisse FD, & ainsi de suitte, tousjours le plus petit



soit retranché du plus grand, par vne soustraction alterne, par laquelle on paruiendra à vn nombre qui mesurera le precedent. Car si on paruenoit à l'vnité. [n] AB, CD, seroient premiers entr'eux: ce qui est contre l'hypothese. Que l'on paruienne donc à FD, lequel soustraict du precedent tant que faire se peut, ne reste rien. Ie dis que FD, est la plus grande commune mesure de AB, CD.

n 1. 7.

Car qu'il les mesure tous deux, nous le monstrerons ainsi. D'autant que FD, mesure EB; [o] & EB, mesure CF, [p] FD mesurera le mesme CF, & mesurant soy-mesme, [p] il mesurera aussi le tout CD, cõposé des 2. CF, FD. Mais CD, mesure AE, [q] donc FD, mesurera aussi AE. Et puis que FD, mesure aussi EB, [r] il mesurera le tout AB, composé de AE, EB. Donc FD mesure les 2. nombres AB, & CD. Il est aussi la plus grande commune mesure: car s'il n'est ainsi, en soit vne autre plus grande que FD, comme G, s'il se peut faire.

o 11. c. f.
p 10. c. f.
q 11. c. f.
r 10. c. f.

D'autant donc que G mesure AB, & CD estant la commune mesure; & CD, mesure AE, iceluy G [s] mesurera aussi AE, [t] & partant EB: mais EB mesure CF. [v] Donc G mesurera aussi CF, [x] il mesurera donc aussi le reste FD, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc vn plus grand que FD, ne mesure AB, CD, & partant FD, est leur plus grande commune mesure.

s 11. c. f.
t 12. c. f.
v 11. c. f.
x 12. c. f.

Mais si le moindre nombre CD, mesure le plus

grand AB, en telle sorte qu'estant soustraict d'iceluy tant de fois qu'il sera possible, il ne reste rien, CD sera la plus grande commune mesure des deux, attendu qu'il mesure soy-mesme, comme il appert par cette figure. Donc de deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A ..... 10. B
C ..... 5 D

COROLLAIRE.

De cette demostration il est manifeste, que le nombre qui en mesure deux autres, mesure aussi la plus grande commune mesure d'iceux.

Cecy est colligé de celle partie, par laquelle il est monstré que FD, est la plus grande commune mesure de AB, CD. Car il est monstré que si G mesure AB, CD, il mesure aussi FD, leur plus grande commune mesure.

SCHOLIE.

Par ce qui est dit cy-deuant, nous trouuerons facilement auec Campanus, si tant de nombres proposez que l'on voudra, sont premiers entr'eux ou non. *Schol. 1. 7.*

Car soient 3. nombres proposez : Premierement, t'experimente, si A et B sont premiers entr'eux, que s'ils sont premiers entr'eux, les 3. A, B, C, ne seront composez entr'eux, ne pouuans auoir aucune commune mesure, outré l'unité, puis que A & B, sont premiers entr'eux.

A 10
B 7
C 5

3. 7. *Mais si A & B sont composez entr'eux, soit trouuee leur plus grande commune mesure D, que si D mesure le nombre C, il est euident que les trois A, B, C, seront composez entr'eux, ayans D pour commune mesure.*

Que si D, plus grande commune mesure de A & B, ne mesure C; C & D seront premiers entr'eux ou non : si premiers, les trois A, B, C, ne seront composez entr'eux, mais premiers.

A ..... 18.
B ..... 12.
C ..... 9.
D ... 3.

Car s'ils sont dicts estre composez entr'eux, de sorte qu'ils ayent vn nombre pour commune mesure, icelle mesurera D, y plus grande commune mesure de A & B, & mesurant aussi C: C, D, ne seront premiers entr'eux : Ce qui est contre l'hypothese.

y Coroll. 3. 7.

Mais si C & D ne sont premiers entr'eux, les trois A, B, C, seront composez entr'eux. [2] *Car ayant trouué E, plus grande commune mesure de C & D: Puis que E mesure D, & D mesure A & B, E mesurera aussi les mesmes A & B: parquoy puis que E mesure pareillement C, le nombre E, mesurera les 3, A, B, C: & partant seront composez entr'eux. Ce qui est proposé.*

A 9
B 6
C 5
D ...

& 2. 7.

21. 6. f.

Semblablement, nous examinerons si plus de 3. nombres sont premiers entr'eux, ou composez. Car s'il y a quatre nombres propo-

A 16
B 12
C 6
D ... 4 E .. 2

sez, il faudra premierement faire l'experience de trois, s'il y en a 5. faudra faire l'experience de 4. &c. Et faut faire au reste selon ce que nous auons dict, de trois nombres proposez.

PROBLEME 2. PROP. 3.

Trouuer la plus grande commune mesure de trois nombres donnez, non premiers entr'eux.

Soient proposez trois nombres non premiers entr'eux A, B, C, dont il faut trouuer la plus grande commune mesure.

Soit trouué D, la plus grande commune mesure de A & B:

A ..... 16 D 4
B ..... 12 E .. 2 2. 7.
C ..... 6. F .....

si D, mesure aussi C,
il est manifeste que D est la plus grande commune mesure des 3. A, B, C. Car si vn plus grand nombre que D, est dict mesurer les 3. A B C, le mesme, [a] mesurera aussi D, plus grande commune mesure de A & B, le plus grand, le plus petit ce qui est impossible. Mais si D ne mesure C, au moins D & C seront composez entr'eux. Car A, B, C estans composez, quelconque commune mesure d'iceux, mesurera aussi D plus grande commune mesure de A & B. Donc puis qu'icelle commune mesure, mesure aussi C D & C serõt composez entr'eux, & soit E, leur grande commune mesure. [b] Ie dis que E est la plus grande commune mesure des 3. A, B, C. Car d'autant que E mesure C & D, mais D mesure A & B; E mesurera les mesmes A & B, & partant il mesurera les trois A, B, C.

[a] *Coroll.* 2. 7.

[b] 2. 7.

Or que E soit la plus grande commune mesure, il est evident: car, s'il se peut faire, soit F, commune mesure d'iceux, plus grande que E. D'autant

A.....16 D....4
B.....,....12 E..2
C.....6 F.....

c *Coroll.* 2. 7. que F mesure A & B [c] il mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure; mais F mesure aussi C: donc F, mesurant D & C, mesurera pareillement E, leur plus grande commune mesure, le plus grand nombre le moindre. Ce qui est impossible: donc vn plus grand nombre que E, ne mesure A, B, C, & partant E, est leur plus grande commune mesure. Donc de trois nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste de cette demonstration, qu'vn nombre qui en mesure 3. mesure pareillement leur plus grande commune mesure.

Cela est aussi colligé de la derniere partie de la demonstration, où il est monstré que puis que F mesure A, B, C, qu'il mesurera E, leur plus grande commune mesure, &c.

Semblablement, s'il y a plus de trois nombres proposez, non premiers entr'eux, pour trouuer leur plus grande commune mesure, ce Probleme aura lieu. Car s'il y a 4. nombres, il faudra premierement trouuer la plus grande commune mesure de trois. Et si 5. de 4. &c. Et faudra operer au reste, comme il a esté dict de 3. nombres.

THEOREME 2. PROPOSIT. 4.

Tout nombre plus petit, eſt partie ou parties, de tout nombre plus grand.

Soient deux nombres propoſez, A plus petit, & B plus grand. Ie dis que A eſt partie, ou parties de B. Car ſoient premierement A & B premiers entr'eux. D'autant que chaque vnité de A, eſt partie de B, il eſt manifeſte que A eſt parties de B, ſçauoir autant de parties qu'il y a d'vnitez en A.

A.....7
B.....10

Secondement, ſoient A & B non premiers entr'eux, mais compoſez, & que A meſure B, cela eſtant, [d] il appert que A eſt partie de B.

A.....5
B.....10

d 3. d. 7.

Mais ſi A ne meſure B, [e] ſoit trouué C, leur plus grande commune meſure: & ſoit diuiſé A ſelon les parties AD, DE, EF, chacune egale à C. [f] D'autant que C eſt partie de B, puis qu'il le meſure, AD ſera auſſi partie de B: ſemblablement DE & EF; & partant tout le nombre A, eſt parties de B, à ſçauoir autant de parties que C, eſt contenu de fois en AF: donc tout nombre plus petit, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

e 2. 7.

f 3. d.

A.2.D..2.E..2.F
B.....10
C..2

THEOREME 3. PROPO. 5.

Si vn nombre eſt telle partie d'vn nom-

bre, qu'vn autre l'eſt d'vn autre: l'vn & l'autre enſemble ſera telle partie de l'vn & l'autre enſemble, qu'vn ſeul l'eſt d'vn ſeul.

C'eſt à dire: Si de 4. nombres, le premier eſt telle partie du 2. que le 3. du 4. le premier & 3. enſemble ſeront telle partie du 2. & du 4. enſemble, que le premier l'eſt du ſecond.

Soient quatre nombres A, BC; D; EF, & ſoit A 1. telle partie de BC 2. que D 3. l'eſt de EF 4. Ie dis que l'vn & l'autre A & D, 1. & 3. enſemble, eſt telle partie de l'vn & l'autre BC 2. & EF 4. enſemble, que A ſeul, eſt partie de BC ſeul, ou D de EF.

A.....6 D....4
B.....6 G .....6 C E....4 H....4 F

Car ayant diuiſé les nombres BC, & EF, ſelon les parties BG, GC; EH, HF, egales à A & à D, il y aura en BC, autant de parties egales à A, qu'en EF, d'egales à D, puis que A eſt telle partie de BC, que D l'eſt de EF.

D'autãt dõc que A & BG ſont egaux: ſi l'on adiouſte à iceux les egaux D, & EH, A & D enſemble ſeront egaux à BG, & EH enſemble: ſemblablement A & D enſemble, ſeront egaux à GC, & HF enſemble. Et ainſi de ſuitte, s'il y auoit d'auantage de parties en BC, & EF: & partant l'vn & l'autre A & D enſemble, ſeront meſme partie de l'vn & de l'autre BC, & EF enſemble, que A l'eſt de BC, ou D de EF. Donc ſi vn nombre eſt, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Commandin a demonſtré ce Theoréme ſuyuant.

Si vn nombre eſt autant multiple d'vn nombre, qu'vn autre l'eſt d'vn autre, l'vn & l'autre enſemble ſera autant multiple de l'vn & l'autre enſemble, qu'vn ſeul l'eſt d'vn ſeul.

Soit A, autant multiple de B, que C de D. Ie dis que A & C enſemble, ſera autant multiple de B & D enſemble, que A de B.

Car A eſtant multiple de B, & C autant multiple de D; B ſera quelque partie de A & de meſme partie de C. Donc B, D, enſemble, ſeble, ſera meſme partie de A, C, enſemble, que A de B: partant A & C enſemble, ſera autant multiple de B & D enſemble, que A de B. Ce qu'il falloit demonſtrer. Ce que l'on doit auſſi entendre de pluſieurs, &c.

A.....8
B....4
C.....6
D...3

5. 7.

THEOREME 4. PROP. 6

Si vn nombre eſt telles parties d'vn nombre, qu'vn autre l'eſt d'un autre: l'vn & l'autre enſemble, ſera telles parties de l'vn & l'autre enſemble, qu'vn ſeul l'eſt d'vn ſeul.

C'eſt à dire : Si de 4. nombres le 1. eſt telles parties du 2. que le 3. du 4. le 1. & 3. enſemble, ſeront telles parties du 2. & 4. enſemble que le 1. du 2.

Soit le nombre AB, 1. meſmes parties de C 2. que DE 3. l'eſt de F 4. Ie dis que l'vn & l'autre AB 1. & DE 3. enſemble, ſont meſmes parties de C 2. & F 4. enſemble, que AB de C, ou DE de F.

Car ayant diuiſé AB, DE, ſelon les parties AG, GB, DH, HE, des nombres C & F; AB contiendra autant de parties de C, que DE, de F, puis que AB, eſt telles parties de C, que DE l'eſt de F. Donc d'autant que AG eſt telle partie de C, que DH de F, & l'vn & l'autre AG, DH enſemble, ſera telle partie de l'vn & l'autre C & F enſemble, que AG l'eſt de C, ou DH de F. Par meſme raiſon GB, HE enſemble, ſera meſme partie de C & F, enſemble que GB l'eſt de C, ou HE de F: & ainſi de ſuitte, s'il y a d'auantage de parties en AB, DE: partant l'vn & l'autre AB, DE enſemble, ſera meſmes parties de l'vn & l'autre C & F enſemble, que AB l'eſt de C, ou DE de F. Donc ſi vn nombre eſt telles parties, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A...3 G...3 B
C.....9
D....4 H....4 E
F.....12

g5. 7.

THEOREME 5. PROP. 7.

Si vn nombre eſt telle partie d'vn nombre, que le retranché du retranché: le reſte ſera auſſi telle partie du reſte, que le tout l'eſt du tout.

Soit le nombre AB, mesme partie de CD, que le retranché AE, l'est du retranché CF. Ie dis que le reste EB, est mesme partie du reste FD, que le tout AB, du tout CD.

Car soit pris GC, duquel EB soit telle partie que AE, l'est de CF, ou le tout AB, du tout CD. D'autant que AE, est mesme partie de CF, que EB, de GC, l'vn & l'autre AE, EB ensemble, sera telle partie de CF, h.s. 7.

GC ensemble, que A....4 E..2 B
AE l'est de GF: c'est G....4 C.....8 F....4 D
à dire, que le tout AB, l'est du tout CD: & partant AB, estant telle partie tant de FG, que de CD, ceux FG, CD seront egaux entr'eux: ostant donc le commun CF; GC, FD demeureront egaux: donc EB sera telle partie de FD, que de GC, c'est à dire que le tout AB, du tout CD. Donc si vn nombre est telle partie, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Nous demonstrerons aussi le Theoréme suyuant pris de Commandin.

Si vn nombre est autant multiple d'vn nombre, que le retranché du retranché; le reste sera aussi autant multiple du reste, que le tout, du tout.

Soit AB, autant multiple du tout CD, que le retranché AE, du retranché CF. Ie dis que le reste EB, est autant multiple du reste FD, que le tout AB, du tout CD.

Car AB, AE eſtans equimultiples de CD, CF, au contraire, le tout CD, ſera meſme partie du tout AB, que CF, retranché de AE retranché, parquoy le reſte FD, ſera meſme partie du reſte EB, que le tout CD, du tout AB. Partant, au contraire EB ſera autant multiple de FD, que le tout AB, du tout CD. Ce qui eſtoit propoſé. 17. 7.

A.....6E.....4B
C.....3F.....2D

THEOREME 6. PROP. 8.

Si vn nombre eſt telles parties d'vn autre nombre, que le retranché du retranché: le reſte ſera auſſi telles parties du reſte, que le tout, l'eſt du tout.

Soit le nombre AB, meſmes parties de CD, que le retranché AE, du retranché CF. Ie dis que le reſte EB, ſera meſmes parties du reſte FD, que le tout AB, l'eſt du tout CD.

Car ſoit pris GH, egal à AB; GH ſera donc auſſi meſmes parties de CD, que AB, de CD c'eſt à dire, que AE, de CF. Ayant donc diuiſé GH, ſelon GI, IH, parties de CD, & AE, ſelon AK, KE, parties de CF, le nombre des parties GI, IH, ſera egal au nombre des parties AK, KE, & tant GI, que IH, ſera telle partie de CD, que AK, ou KE, l'eſt de CF. Et puis que CD, eſt plus grand que CF, tant GI, que IH,

A.....6K.....6E.....4B
C.....18F.....6D
G.....6L.....2I.....1M..2H

partie de CD, ſera plus grand que AK, ou KE, partie de CF.

Ayant donc pris GL, IM, egaux à AK, KE; GL ſera meſme partie de CF, que AK; du meſme CF, ou que GI, de CD, & partant le tout GI, eſtant meſme partie du tout CD, que le retranché GL, du retranché CF, [k] le reſte LI, ſera telle partie du reſte FD, que le tout GI, du tout CD: Ainſi MH, ſera monſtré meſme partie de FD, que le tout GI, ou IH, du tout CD. Donc puis que tant GI, que IH eſt meſme partie de CD, que LI, & MH, de FD, l'vn & l'autre GI, IH, enſemble, ſeront telles parties de CD, que LI, & MH, enſemble de FD. Mais GH, eſt meſmes parties de CD, que AB, du meſme CD, (AB, GH eſtans egaux.) donc LI, MH enſéble, ſeront meſmes par. de FD, que AB, de CD. Mais d'autant que ſi des egaux AB, GH, l'on oſte les egaux AK, KE, & GL, IM, le reſte EB, ſera egal au reſte LI, & MH enſemble: & partant le reſte EB, ſera meſmes parties du reſte FD, que le tout AB, du tout CD: à ſçauoir que LI, MH enſemble du meſme FD. Donc ſi vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. k 7. 7.

THEOREME 7. PROPO. 9.

Si vn nombre eſt telle partie d'vn nombre, qu'vn autre eſt partie d'vn autre; Auſſi en changeant, le premier ſera telle ou telles parties du troiſieſme, que le ſecond du quatrieſme.

C'eſt à dire: Si de 4. nombres le premier eſt tel-

le partie du 2. que le 3. du 4. aussi en changeant le 1. sera telle partie ou parties du 3. que le 2. du 4.

Soit le nombre A, telle partie de BC, que D de EF, estans A & BC, moindres que D, & EF, chacun au sien.

Ie dis qu'en changeant A, sera telle ou telles parties de D, que BC est partie ou parties de EF. Car ayant diuisé BC, EF, selon les parties BG, GC, chacune egale à A, & EH, HF, chacune egale à D; le nombre des parties de BC, sera egal au nombre des parties de EF. Mais BG, GC, estans egaux entr'eux, & moindres que EH, HF, aussi egaux entr'eux, d'autant que le tout BC, est moindre que le tout EF, par l'hypotheſe, BG, sera meſme partie de EH, ou meſmes parties que GC, de HF, & partant BG, GC ensemble, sçauoir BC, 2. sera meſme partie, ou meſmes parties de EH, HF ensemble, c'est à dire EF 4. que BG, de EH: c'est à dire, que A 1. l'est de D 3. Donc si vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A....4
B....4 G....4 C
D.....6
E.....6 H.....6 F

1 5. ou 6. 7.

THEOREME 8. PROP. 10.

Si vn nombre est telles parties d'vn nombre, qu'vn autre est parties d'vn autre: Aussi en changeant le premier sera telles parties ou partie du troisiesme, que le second du quatriesme.

C'est à dire: Si de 4. nombres le 1. est telles par-

ties du 2. que le 3. du 4. auſſi en permutant le 1. ſera telle ou telles parties du 3. que le 2. du 4.

Soit le nombre A B, telles parties de C, que DE l'eſt de F. Ie dis qu'en changeant AB, ſera telles parties ou partie de DE, que C l'eſt de F, eſtans AB, & C, moindres que DE, & F, chacun au ſien.

Car ayant diuiſé AB, DE, ſelon AG, GB, parties de C, & DH, HE, parties de F, il y aura autant de parties en AB, qu'en DE, & tant AG, que GB ſera relle partie de C, que DH, ou HE, de F. [m] Donc en changeant AG, ſera meſme partie ou parties de DH, & GB, de HE, que C de F: & partant A G, ſera meſme partie ou parties de DH, que GB, de HE. [n] DONC AG, GB enſemble, c'eſt à dire AB 1. ſera meſme partie ou parties de DH, HE enſemble, c'eſt à dire de DE 3. que AG, de DH, c'eſt à dire que C 2. de F 4. DONC ſi vn nombre eſt telles parties, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[m] 9.7.

A..2 G..2 B
C.....6
D.....5 H.....5 E
F.....15

[n] 5. ou 6.7

THEOREME 9. PROP. 11.

Si comme le tout eſt au tout, ainſi le retranché eſt au retranché; auſſi le reſte ſera au reſte, comme le tout au tout.

Soit le tout AB, au tout CD, comme le retranché AE, au retranché CF. Ie dis que le reſte EB, eſt au reſte FD, comme le tout AB, eſt au tout CD.

Car puis que AB, eſt à CD, comme AE, eſt à CF. AB, eſtant plus petit que CD, ſera meſme partie ou meſmes parties de CD, que AE, de CF. Donc le reſte EB, ſera meſme partie ou parties du reſte FD, que AB, de CD. Partant EB, ſera à FD, comme AB, à CD. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A....4 E..2 B
C....8 F....4 D

o 20. d. 7.
p 7. ou 8. 7
q 20. d. 7. conuer.

SCHOLIE.

Cette demonſtration a lieu, quand AB, *eſt moindre que* CD: *mais ſi* AB *eſt plus grand que* CD, *il ſera neantmoins ainſi demonſtré: car* CD *meſure* AB, *ou non, s'il le meſure: d'autant que comme* AB *eſt à* CD, *ainſi* AE, *à* CF, AB, *ſera autant multiple de* CD, *que* AE *de* CF. *Partant le reſte* EB, *autant multiple du reſte* FD, *que le tout* AB, *du tout* CD: *Donc le reſte* EB, *ſera au reſte* FD, *comme le tout* AB *au tout* CD.

A.....8 E.....6 B
C....4 F...3 D

r 20. d. 7.
ſ Sch. 7. 7.
t 20. d. conuer.

Mais que CD, *ne meſure* AB: *Derechef, d'autant que comme* AB, *à* CD, *ainſi* AE *à* CF, CD *ſera meſmes parties de* AB, *que* CF *de* AE, *donc le reſte* FD, *ſera telles parties du reſte* EB, *que le tout* CD, *du tout* AB, *parquoy le reſte* EB, *ſera au reſte* FD, *comme le tout* AB, *au tout* CD. *Ce qu'il falloit demonſtrer.*

A.....6 E...3 B
C....4 F..2 D

v 20. d. 7.
x 8. 7.
x 20. d. con.

PROBLEME 10 PROPO. 12.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra proportionaux : comme vn des antecedens sera à vn des consequens : ainsi tous les antecedens seront à tous les consequens.

Soient tant de nombres que l'on voudra A, B, C, D, E, F, proportionaux: à sçauoir comme A à B, ainsi C à D, & comme C à D, ainsi E à F. Ie dis que tous les antecedens A, C, E, ensemble, sont à tous les consequens, BDF ensemble, comme A, seul antecedent est à B, seul consequent.

A....4 C..2 E...3
B.....8 D....4 F.....6

D'autant donc qu'à cause de la mesme proport. A est[z] telle partie ou telles parties (A, C, E, estans moindres) de B, que C de D, & E de F, [a] A & C ensemble, sera telle partie ou parties de B & D ensemble, que A de B, ou E de F.

z 20. d. a 5. ou 6. 7

De rechef, d'autant que A & C ensemble, comme vn est mesme partie ou mesmes parties de B & D ensemble, comme vn que E de F, les deux A & C ensemble, comme vn, & F ensemble, seront mesme partie ou mesmes parties des deux B & D ensemble, comme vn & F ensemble, que A de B. [b] Partant y aura mesme raison de A, C, E, ensemble, à B, D, F, ensemble, que de A, à B.

b 20. d. 7.

SCHOLIE.

Cette demonſtration a auſſi lieu ſeulement, quand les antecedens ſont moindres que les conſequens: Que s'ils ſont plus grands, il ſera auſſi demonſtré. Car B *meſurera* A, *ou non,*
s'il le meſure, nous dirons A.....9 C.....6
ainſi. D'autant que A *eſt à* B...3 D..2
c 20.d.7. B, *comme* C *à* D; A [c] *ſera*
d *Scho.* 5.7 *autant multiple de* B, *que* C *de* D. [d] *Donc* A *& C enſemble, ſera autant multiple de* B, D, *enſemble,*
e 20. d. conuert. *que* A *de* B. [e] *Donc comme* A *à* B, *ainſi* A, C, *enſemble: à* B, D, *enſemble.*

Que ſi B *ne meſure* A, *nous argumenterons ainſi.*
f 20.d 7. *D'autant que comme* A *eſt à* B, *ainſi* C *à* D; B *ſera* [f] *telles parties de* A *que* D *de* C, *dõc* B *&* D *enſemble, ſeront telles parties de* A, C, *enſemble, que* B *de* A, *partant com-* A.....9 C...3
20. d. 7. conuer. *me* A *à* B, *ainſi* A, C, *enſemble, à* B, D, *enſemble.* B.....6 D..2

Nous demonſtrerons le meſme, encore qu'il y ait pluſieurs nombres, ayant premierement demonſtré le ſuyuant.

Les raiſons des nombres, qui ſont de meſme à vne meſme raiſon, ſont auſſi de meſme entr'elles.

Soit comme A *à* B, *ainſi* C *à* D: *mais comme* C *à* D, *ainſi* E *à* F. *Ie dis que comme* A *à* B, *ainſi* E *à* F. *Car ſoit* A, *plus grand que*
B: *d'autant que com-* A.....9 C...3 E.....6
20.d.7. *me* A *à* B, *ainſi* C *à* D, B.....6 D..2 F....4
B, *ſera telle partie ou*

parties de A, que D de C. Derechef, C eſtant à D, comme E à F, telle ou telles parties que D eſt de C, telle ou telles parties ſera, de E. Donc telle ou telles parties que E, eſt de A; F ſera meſme partie ou parties de Ɛ: donc comme A à B, ainſi Ɛ à F. g 20. d. 7. con.

Mais ſoit, A, moindre que B, puis que comme A eſt à B, ainſi C à D, telle partie ou parties que A, ſera de B, telle partie ou parties C, ſera de D. Derechef, C eſtant à D, comme E à F, E ſera telle partie ou parties de F, que C de D: donc A eſt telle partie ou parties de B, que E eſt de F: donc comme h A eſt à B, ainſi E à F. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.....6 C..2 E....4
B.....9 D...3 F.....6 h 20. d. conuer.

Cecy eſtant demonſtré, ſoient les nombres proportionaux A, B, C, D, E, F, ſçauoir comme A à D, ainſi B à E, & C à F. Semblablement nous demonſtrerons, que comme A eſt à D, ainſi AB, à D E, & d'autant que comme A à D, ainſi C à F: par ce que nous venons de demonſtrer, comme AB à DE, ainſi C à F: ainſi nous demonſtrerons que comme A B, à D E, ainſi A B C, à D E F: donc comme A à D, ainſi A, B, C, à D, E, F, & ainſi des autres nombres, autant qu'il y en aura de proportionaux: Cecy reſpond à ce qui eſt demonſtré des grandeurs 12. 5.

A.....8 E.....6 C....4
D....4 Ɛ...3 F. 2

THEOREME 12. PROP. 13.

Si quatre nombres ſont proportionaux: auſſi en changeant ils ſeront proportionaux.

Soit A à B, comme C à D, Ie dis qu'en chan-

geant A ſera à C, comme B à D.

i 20. d. ou 10. 7. Car, d'autant que A eſt à B, comme C à D, i A eſt meſme partie ou parties de B, que C, de D. Donc en changeant A, ſera meſme partie ou parties de C, que B de D; & k partant, comme A ſera à C, ainſi B ſera à D. Ce qu'il falloit demonſtrer. k 20. d.

A....2
B....4
C.....6
D.....12

SCHOLIE.

Cette demonſtration a auſſi lieu, quand les antecedens ſont moindres que les conſequent, & que A *eſt moindre que* C; *mais s'ils ſont plus grands, &* A *ſoit plus grand que* B, *& moindre que* C, *nous dirons ainſi: D'autant que comme* A *a* B, *ainſi* C *à* D, l *ſera meſme partie ou parties de* A, *que* D *de* C. m *Donc en permutant* B, *ſera meſme partie ou parties de* D, *que* A *de* C. n *Donc comme* A *à* C, *ainſi* B *à* D. *Que ſi* A *eſt plus grand que* B *& que* C, *on dira ainſi. D'autant que comme* A *à* B, *ainſi* C *à* D; D *ſera meſme partie ou parties de* C, *que* B *de* A: *Donc en permutant* C, *ſera meſme partie ou parties de* A, *que* D *de* B. o *Donc comme* A *à* C, *ainſi* B *à* D. *Finalement, ſi* A *eſt moindre que* B, *& plus grand que* C, *on argumentera ainſi. D'autant que comme* A *à* B, *ainſi* C *à* D, C, p *eſt meſme partie ou parties de* D,

l 20. d. m 9. ou 10. 7. n 20. d. 7. conuert. o 9. ou 10. 7. o 20. d. 7. con. p 20. d. 7.

A....4
B...3
C.....8
D.....6
A.....9
B.....6
C...3
D..2
A....4
B.....8
C..2
D....4

que A *de* B, *donc en changeant* D, *ſera meſme partie ou parties de* B, *que* C *de* A. [q] *donc comme* A *eſt à* C, *ainſi* B *à* D. *Ce qu'il falloit demonſtrer.* [q] 20. 7. *convert.*

THEOREME 12. PROP. 14.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra d'vne part, & autant d'vne autre; leſquels ſoient pris de deux en deux, & en meſme raiſon; auſſi en raiſon egale ils ſeront en meſme raiſon.

Soient tant de nombres que l'on voudra A, B, C, & autant d'autres D, E, F, & ſoit comme A à B, ainſi D à E, & comme B à C, ainſi E à F. Ie dis qu'en raiſon egale, comme A eſt à C, ainſi D eſt à F.

Car d'autant que comme A eſt à B, ainſi D eſt à E, [r] en changeant comme A, ſera à D, ainſi B ſera à E; Semblablement, [r] 13. 7.

puis que comme B A.....12 D.....9
eſt à C, ainſi E à F, en B.....8 E.....6
changeant comme B C....4 F..2
ſera à E, ainſi C à F. DONC comme A eſt à D, ainſi C ſera à F. (Car puis que l'vne & l'autre raiſon de A à D, & de C à F, eſt de meſme à la raiſon de B à E, comme il a eſté demonſtré, [ſ] icelles ſeront auſſi de meſme entr'elles,) [t] & partant en changeant comme A, ſera à C, ainſi D, ſera à F. Ce qu'il falloit demonſtrer. [ſ] *Sch.* 12. 7. [t] 13. 7.

THEOREME 13. PROP. 15.

Si l'vnité meſure quelque nombre, &

qu'vn autre nombre en mesure autant de fois quelqu'autre; aussi en changeant l'vnité mesurera le troisiesme nombre, autant de fois que le second mesurera le quatriesme.

Que l'vnité A, mesure B C, autant de fois que D mesurera E F. Ie dis qu'en permutant B C, mesurera E F, autant de fois que A mesure D.

Car ayant diuisé B C, selon les vnitez B G, G H, H C, & E F, selon les parties E I, I K, K F, chacune egale à D. Il y aura en E F, autant de parties egales à D, qu'il y a d'vnitez en B C: donc B G, sera mesme partie de E I, que G H de I K, & H C de K F: [u] donc comme B G à E I, ainsi G H à I K, & H C à K F: [x] partant comme B G à E I, ainsi B G, G H, H C, à E I, I K, K F, tous les antecedens, à tous les consequens, c'est à dire B C à E F: donc B C sera mesme partie de E F, que B G, de E I, c'est à dire que A de D. Partant si l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A. 1
B. 1 G. 1 H. 1 C
D. . 2
E. . 2 I. . 2 K. . 2 F

u 20. d. 7.
x 12. 7.

THEOREME 14. PROP. 16.

Si deux nombres se multiplians l'vn l'autre en produisent quelques vns, les produicts d'iceux seront egaux entr'eux.

Que les deux nombres A & B, se multipliant l'vn l'autre facent C & D, sçauoir que A multipliant B, face C, & B multipliant A, face D.

Ie dis que C & D, sont egaux entr'eux.

Car d'autant que A multipliant B, produict C, y B sera autant en C, que l'vnité en A: & partant mesurera C, autant de fois que l'vnité mesure A. z Donc en permutant A, mesurera C, autant de fois que l'vnité mesurera B: derechef, puis que B multipliant A, produict D, y 15. d. 7. z 15. 7.

A sera autant de fois en D, que l'vnité en B, & partant mesurera D, autant de fois que l'vnité mesure B; mais A mesuroit aussi C, autant de fois, que l'vnité mesure B, donc A mesure C & D egalement: partant C & D sont egaux entr'eux: donc si, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. 15. d.

Unité 1.
A...3 B....4
C.....12
D.....12

THEOREME 15. PROP. 17.

Si vn nombre en multipliant deux autres, en produict quelques-vns, les produicts d'iceux auront mesme raison entr'eux, que les multipliez.

Soit le nombre A, lequel multipliant B & C, face D & E. Ie dis que comme B est à C, ainsi D est à E.

Car d'autant que A multipliant B, faict D, B sera autant de fois contenu en D, que l'vnité en A: Semblablement C, sera autant de fois en E, que l'vnité au mesme A: & partant B, mesurera 15. d.

Vnité 1.
A...3
B...2 C....4
D.....6 E.....12

autant de fois D, que C mesure E. Donc B sera
a 20. d. telle partie de D, que C de E: [a] & partant com-
b 13. 7. me B sera à D, ainsi C sera à E, [b] & en changeant
comme B à C, ainsi D à E. Donc si vn nombre
multipliant, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 16. PROPO. 18.

Si deux nombres multiplians quelque nombre, en produisent quelques-vns: les produicts d'iceux auront mesme raison, que les multiplians.

Que les nombres A & B, multiplians C, facent D & E. Ie dis que comme A est à B, ainsi D à E.

Car puis que D est pro-
e 16. 7. duict de C, multiplié par A...2 B....4
A, [e] le mesme D sera pro- C...3
duict de A, multiplié par D.....6 E.....12
C: Semblablement E
estant produict de C par B, le mesme E sera pro-
duict de B par C. D'autant donc que le mesme
17. 7. nombre C multipliant A & B, faict D & E, com-
me A sera à B, ainsi D sera à E. Donc si deux nom-
bres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Encore qu'Euclide propose ce Theoreme & le precedent, de deux nombres seulement, il l'entend neãtmoins de tant de nombres que l'on voudra: puis que la demõstration de tant que l'on voudra, est la mesme demonstration de deux, repetee autant de fois

fois qu'il eſt beſoin, prenant touſiours les nombres de deux en deux.

Qu'ainſi ne ſoit, que A *multipliant tant de nombres que l'on voudra* B, C, D, *ou* B, C, D, *multipliant* A, *faſſent* E, F, G. *Ie dis que les produicts* E, F, G, *ſont en meſme raiſon que les multipliez ou multiplians* B, C, D: *car* E, F, *eſtans produits de* A *en* B, C, *ou de* B C *en* A, [d] *il y aura meſme raiſon de* E *à* F, *que de* B *à* C: *ſemblablement* F, G, *eſtans produicts de* A *en* C, D, *ou de* C, D *en* A, *il y aura meſme raiſon de* B C, *que de* C *à* D: *& ainſi de ſuitte, s'il y a d'auantage de nombres: partant* E, F, G, *ſont en meſme raiſon que* B, C, D. *Donc ſi vn nombre en multiplie deux, ou tant que l'on voudra, ou ſi deux ou tant que l'on voudra en multiplient vn, les produicts auront meſme raiſon, que les multiplians, ou multipliez.* d 17. ou 18. 7.

A...
B..2 C...3 D....4
E.....6 F.....9 G.....12

Campanus & Clauius diſent en leur Scholie, qu'ils ont accommodé ce Theoréme & le precedent, à tant de nombres que l'on voudra: mais s'ils auoient bien entendu Euclide, ils auroient trouué qu'Euclide meſme les y a accommodez premier qu'eux, puis que ce qu'il a propoſé de 2. eſt monſtré de tant que l'on voudra, eſtant repeté, et n'en pouuant faire de demonſtration que de 2. à la fois, qui eſt la raiſon pour laquelle Euclide ne l'a propoſé que de deux, &c.

Henrion Copiſte, qui chante touſiours comme les autres, quoyqu'ils diſent, faict de meſme.

THEOREME 17. PROPO. 19.

Si quatre nombres ſont proportionaux, le produict du premier & du quatrieſme ſera egal au produict du ſecond & du troiſieſme nombre : & ſi le nombre produict du premier & du quatrieſme eſt egal au produict du ſecond & du troiſieſme ; iceux quatre nombres ſeront proportionaux.

Soient quatre nombres proportionaux A, B, C, D : ſçauoir comme A à B, ainſi C à D, & que A premier, multipliant D 4. faſſe E & B 2. multipliant C 3. faſſe F. Ie dis que E & F ſont egaux entr'eux.

Car derechef, que A multipliant C, faſſe G: D'autant que A multipliant C & D, faict G & E, comme C ſera à D: c'eſt à dire, comme A à B, ainſi G ſera à E.

Derechef, d'autant que A & B, multipliant C, font G & F, [e] comme A ſera à B, ainſi G ſera à F. Partant, [f] comme G ſera à E, ainſi le meſme G ſera à F, donc E, F ſeront egaux, par ce qui eſt en ſuitte de la 20. Definition.

A....3 B..2
C.....6 D.....4
E.....12
F.....12
G.....18

e 17. 7.
f 18. 7.
g *Sch.* 12. 7

Maintenant ſoit E, produict de A 1. par D 4. egal à F, produict de B 2. par C 3. Ie dis que les 4.

nombres A,B,C, D, ſont proportionaux, à ſçauoir comme A à B,ainſi C à D.

Soit derechef produict G de A,multiplié par c: d'autant que A, multipliant C & D, faict G & E, comme C ſera à D, ainſi G à E ou à F,egal à E. Car G a meſme raiſon à E & F egaux, comme il eſt monſtré à la 20. Définition.

Derechef, d'autant que A & B, multiplians C, font G & F, comme A à B, ainſi le meſme G à F: partant les raiſons de A à B,& C à D,eſtans de meſme à la raiſon de G à F, [h] elles ſeront de meſme entr'elles; & par ainſi comme A ſera à B, ainſi C à D. Donc ſi quatre nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [h] *Sbc.11.7*

THEOREME 18. PROPOSIT. 20.

Si trois nombres ſont proportionaux, le produict des extremes eſt egal au produict de celuy du milieu. Et ſi le produict des extremes eſt egal au produict de celuy du milieu; iceux trois nombres ſeront proportionaux.

Soient trois nombres proportionaux A, B, C, à ſçauoir A à B, comme B à C. Ie diſque le produict de A 1. multiplié par C 3. eſt egal au produit de B,moyen par ſoy-meſme.

Car ſoit pris D egal à B, comme A ſera à B, ainſi D ſera à C: [i] & partant le produict de A par C, ſera egal au

A.....9
B.....6 D.....6
C....4

[i] 19. 7.

produict de B, par D, c'eſt à dire de B, par ſoy-meſme.

Maintenant ſoit le produict de A premier, par C 3. egal au produict de B, moyen multiplié par ſoy-meſme. Ie dis que A, B, C, ſont proportionaux.

Car derechef, ſoit pris D, egal à B: comme A ſera à B, ainſi D à C, & le produict de A par C, ſera egal au produict de B par D, egal à B, c'eſt à dire de B par ſoy-meſme. Partant les trois nombres A, B, C, ſont proportionaux. Donc ſi trois nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBLEME 19. PROPO. 21.

Les nombres plus petits de tous ceux qui ont meſme raiſon auec iceux, meſurent egalement les nombres qui ont meſme raiſon auec iceux; à ſçauoir le plus grand, le plus grand, & le plus petit, le plus petit.

Soient les nombres AB, & CD, les plus petits, en la meſme raiſon que 2. autres E & F, à ſçauoir que A B, ſoit à CD, comme E à F. Ie dis que AB, & CD, meſurent egalement E & F, ſçauoir A B plus grand, E plus grand & CD plus petit, F plus petit: c'eſt à dire A B antecedent, E antecedent, & C D conſequent, F conſequent.

A..3 G..2 B
C..2 H.1 D
E.....10
F.....6

115. 7. Car puiſque AB eſt à CD, cõme E à F; i'en chan-

geant comme AB, à E, ainſi CD à F, & partant AB, CD, eſtans moindres que E & F, [m] AB, ſera telle ou telles parties de E, que CD de F. Mais ils ne peuuent eſtre parties: car, s'il ſe peut faire, ſoient diuiſez AB, CD, en AG, GB, & CH, HD, parties de E & F, les parties AG, GB, ſeront egales en nombre à CH, HD; & partant AG, ſera meſme partie de E, que CH de F. Donc comme AG, ſera à E, ainſi CH, ſera à F, [n] & en changeant comme AG, ſera à CH, ainſi E à F, ou AB, à CD: & partant AG, GH, moindres que AB, CD, auront meſme raiſon que AB, CD. Ce qui eſt impoſſible, puis que AB, CD, ſont les plus petits en leur proport. par l'hypotheſe. Donc AB, & CD, ne ſeront meſmes parties de E & F. Partant meſme partie, parquoy AB, CD, meſureront E & F egalement. Donc les plus petits nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

m 20. d.

n 20. d.

15. 7.

THEOREME 20. PROP. 22.

S'il y a trois nombres d'vne part, & autant d'vne autre, leſquels ſoient pris de deux en deux, & en meſme raiſon, & que leur proportion ſoit troublee: auſſi en raiſon egale, ils ſeront en meſme raiſon.

Soient trois nombres A, B, C, & autant d'autres D, E, F, leſquels ſoient pris deux à deux, & en meſme raiſon, & ſoit leur proportion troublee, ſçauoir comme A eſt à B, ainſi E à F, & comme B eſt à C, D à E. Ie dis qu'en raiſon egale, comme A eſt à C, ainſi D eſt à F.

Car puis que comme A eſt à B, ainſi E eſt à F, ° le produict de A 1. par F 4. ſera egal au produict de B 2. par E 3. Et puis que B eſt à C, comme D à E, le produict de C, par D, ſera egal au meſme produict de B, par E. Et partant le produict de A 1. par F 4. ſera egal au produict de C 2. par D 3. [P] Donc il y aura meſme raiſon de A 1. à C 2. que de D 3. à F 4. Partant s'il y a 3. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

° 19. 7.

[P] 19. 7.

A....4 D.....12
B...3 E.....8
C...2 F.....6

SCHOLIE.

D'autant que de ces ſix moyens d'argumenter és proportions, qu'Euclide a expliquez aux grandeurs, & demonſtré au 5. liure, il en demonſtre icy deux ſeulement és nombres, ſçauoir celuy qui eſt pris de la raiſon permutee, Prop. 13. & celuy de l'egalité, Propo. 14. & 22. de ce liure: il ne ſera hors de propos, de demonſtrer icy les quatre autres moyens d'argumenter en nombres, comme ont faict autres Interpretes.

I.

Si quatre nombres ſont proportionaux: En raiſon inuerſe, ou en changeant, ils ſeront auſſi proportionaux.

Soit comme A à B, ainſi C à D. Ie dis qu'en changeant, ou en raiſon inuerſe, comme B ſera à A, ainſi D à C.

A.....6 C...3
B....4 D..2

Car A estant à B, comme C à D, q en permutant A sera à C, comme B à D. Derechef, B estant à D, comme A à C, en changeant B, sera à A, comme D à C. Ce qui est proposé. q 13. 7.

II.

Si les nombres composez sont proportionaux, iceux estans diuisez seront aussi proportionaux.

Soit comme AB à CB, ainsi DE à FE. Ie dis qu'en diuisant comme AC, sera à CB, ainsi DF à FE. r 13. 7.

Car AB, estans à CB, comme DF à FE, r en changeant comme le tout AB, au tout DE; ainsi le retranché CB, au retranché FE: & partant comme le tout AB, au tout DE, ainsi le reste AC, au reste DF,

A.....6 C...3 B
D...4F..2E

c'est à dire AC à DF, comme CB à FE. Donc r en permutant comme AC à CB, ainsi DF à FE. Ce qui est proposé. r 13. 7.

En cette maniere on demonstrera la diuision de la raison conuerse & contraire, comme au 5. liure. Car soit premierement, comme AB à CB, ainsi DE à FE. Ie dis que par diuision de raison conuerse, que comme CB, à AC, ainsi FE à DF. Car AB estant à CB, comme DE à FE, en diuisant AC, sera à CB, comme DF à FE, & en changeant comme CB à AC, ainsi FE à DF. Ce qui est proposé.

Soit finalement comme AC à AB, ainsi DF à DE. Ie dis que par diuision de raison contraire,

que comme AC eſt à CB, ainſi DF à FE. Car d'autant que comme AC à AB, ainſi DF à DE, en raiſon conuerſe, comme AB à AC, ainſi DE à DF; Donc en diuiſant, comme CB à AC, ainſi FE, à DF, & en raiſon conuerſe, comme AC à CB, ainſi DF à FE. Ce qui eſt propoſé.

III.

Si les nombres diuiſez ſont proportionaux; iceux eſtans compoſez, ſeront auſſi proportionaux.

Soit comme AB à BC, ainſi DE à EF. Ie dis qu'en compoſant, que comme AC, ſera à BC, ainſi DF à EF.

t 13. 7. v 12. 7. x 13. 7.

Car AB, eſtant à BC, comme DE à EF, [t] En permutant comme AB à DE, ainſi BC à EF, [u] & partant AB, BC, enſemble, ſera à DE, EF enſemble, comme BC à EF; [x] & en chãgeant

AB, BC, enſemble, c'eſt à dire	A.....6 B...3 C
le tout AC à BC, comme DE,	D....4 E..2 F
EF enſemble, c'eſt à dire le tout DF à EF.	

Ce qui eſt propoſé.

Semblablement, la compoſition de raiſon conuerſe, & contraire, ſera icy demonſtree, comme au 5. liure.

Car ſoit premierement comme AB à BC, ainſi DE à EF. Ie dis que par compoſition de raiſon conuerſe, que cõme AC à AB, ainſi DF à DE: car puiſque comme AB à EC, ainſi DE à EF, par conuerſion de raiſon, comme BC à AB, ainſi EF à DE, & en compoſant, comme AC à AB, ainſi DF à DE. Ce qui eſt propoſé.

Secondement, soit derechef comme AB à BC, ainsi DE à EF. Ie dis que par composition de raison contraire, comme AB à AC, ainsi DE à DF. Car AB estant à BC, comme DE à EF, en raison conuerse, comme BC à AB, ainsi EF à DE. Donc en composant comme AC à AB, ainsi DF à DE; & par conuersion de raison, comme AB, à AC, ainsi DE à DF. Ce qui est proposé.

IIII.

Si les nombres composez sont proportionaux, par conuersion de raison, iceux seront aussi proportionaux.

Soit comme AB à CB, ainsi DE à EF. Ie dis que par conuersion de raison, comme AB à AC, ainsi DE à DF.

Car AB, estant à CB, comme DE à FE, en permutant comme le tout AB, au tout DE, ainsi le retranché CB, au retranché FE,

x & partant comme le tout AB, au tout DE, ainsi le reste AC, au reste DF. Donc en permutant, comme AB à AC, ainsi DE à DF. Ce qui est proposé.

A.....6 C...3 B
D....4 F..2 E

x II. 7.

THEOREME 21. PROP. 23.

Les nombres premiers entr'eux, sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux.

Soient les nombres A & B, premiers entr'eux.

Ie dis qu'ils ſont les plus petits de tous ceux qui ont meſme raiſon qu'iceux.

Car s'il n'eſt ainſi, ſoient, s'il eſt poſſible, c & d, plus petits en la meſme raiſon. D'autant que c & d
y 21. 7. ſont plus petits, en la meſme raiſon de a & b, y C meſurera a, & d meſurera b egalement; & partant

A.....7B....ſ
C....D....E..

ſelon vn meſme nombre, lequel ſoit E, de ſorte que C meſure autant de fois a, & d autant de fois b, que l'vnité eſt en E. Donc puis que l'vnité meſure
z 15. 7. E, & C meſure a egalement, z en changeant l'vnité meſurera C, & E meſurera A egalement. Derechef, puis que l'vnité meſure E, & d le nombre b egalement: auſſi en changeant l'vnité meſurera b egalement: partant puis que E meſure a & b, iceluy E ſera commune meſure d'iceux: parquoy ils ne ſeront premiers entr'eux: mais compoſez, ce qui eſt impoſſible, & contre l'hypotheſe. Donc a & b ſont les plus petits en la meſme raiſon. Donc les nombres premiers, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 22. PROPO. 24.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la meſme raiſon auec iceux, ſont premiers entr'eux.

Soient les nombres a & b, les plus petits de tous ceux qui ont meſme raiſon auec iceux. Ie dis qu'ils ſont premiers entr'eux, c'eſt à dire qu'ils n'auront aucun nombre pour commune meſure, outre l'vnité.

Car s'ils ne ſont premiers, ils auront vne commune meſure, laquelle ſoit C: donc que C meſure A, autant de fois que l'vnité eſt en D: & B autant de fois que l'vnité eſt en E.

D'autant donc que C eſt contenu autant de fois en A, que l'vnité eſt en D (puis qu'il meſure A ſelon D,) & que le meſme C, eſt contenu autant de fois en B, que l'vnité eſt en E: [a] D & E multiplians C, produiront A & B. Parquoy il y aura meſme raiſon de A à B, que de D à E: partant puis que D & E, parties de A & B ſont plus petits qu'iceux A & B; A & B ne ſeront les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon auec eux; ce qui eſt abſurde. DONC A & B ſont premiers entr'eux. Et partant les plus petits nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.....8 B.....5
C..
D.....E.....

[a] 9. c. ſ.

THEOREME 23. PROP. 25.

S'il y a deux nombres premiers entr'eux; le nombre qui en meſure vn d'iceux, ſera premier à l'autre.

Soient les deux nombres A & B, premiers entr'eux, & que C meſure A. Ie dis que C eſt premier à l'autre B.

A.....6 B.....5
C...3 D....

Car ſi B & C ne ſont premiers entr'eux, ils auront quelque nombre pour commune meſure, lequel ſoit D, s'il eſt poſſible.

D'autant donc que D meſure C, & C meſure A, [b] D meſurera auſſi A: mais il meſure auſſi B. DONC A & B ne ſont premiers entr'eux, ayans D pour

[b] 11. c. ſ.

commune meſure : ce qui eſt impoſſible & contre l'hypotheſe : donc c ſera premier à B. Partant ſil y a deux nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 24. PROP. 26.

Si deux nombres ſont premiers à quelque autre nombre, le produict d'iceux ſera auſſi premier à cet autre.

Soit l'vn & l'autre nombre A & B, premier à C, & ſoit D produict de A, multiplié par B, ou de B, par A. Ie dis que D ſera auſſi premier à C.

Car ſi C & D ne ſont premiers entr'eux, ſoit E leur commune meſure, meſurant D'autant de fois
e 9. c.f. qu'il y a d'vnitez en F. D'autant donc que E, eſt
16. 7. autant de fois en D, qu'il y a d'vnitez en F, [c] F multipliant E, produira D. Et au contraire E, multipliant F, produira le meſme D: mais D eſt produit de A par B. Dõc puis que le nombre produict de E premier, par F 4. eſt meſme que celuy de A

A.....7 B...3
C.....8
D.....21
E---- F----

19. 7. ſecõd par B3. il y aura meſme raiſon de E premier, à A 2, que de B 3, à F quatriéme. Mais d'autant
d 25. 7. que A & C ſont premiers entr'eux, & E eſt poſé meſurer C, [d] E ſera premier à A, & partant E & A eſtans premiers entr'eux, ſeront les plus petits de leur raiſon. Donc ils meſureront egalement B &
23. 7. F, qui ont la meſme raiſon, à ſçauoir E, meſurera
21. 7. B, & A meſurera F. Partant puis que E meſure

l'vn & l'autre B & C, B & C ne ſeront premiers entr'eux : ce qui eſt abſurde & contre l'hypotheſe. Donc D ſera premier à E. partant ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 25. PROPO. 27.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, le produict de l'vn d'iceux ſera premier à l'autre.

Soient A & B premiers entr'eux, & C produict de A par ſoy-meſme. Ie dis que c'eſt premier au reſtant B.

Car ſoit pris D egal à A, il ſera auſſi premier à B: Donc A & D eſtans premiers à B, [c] le produict de A, multiplié par D, c'eſt à dire de A par ſoy-meſme, à ſçauoir C, ſera premier au meſme B. Ainſi le produict de B par ſoy-meſme, ſera monſtré premier à A. Partant ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. c 26. 7.

A....4 B.....5
C.....16
D....4

THEOREME 26. PROP. 28.

Si deux nombres ſont premiers à deux autres nombres, l'vn & l'autre à l'vn & à l'autre : Les produicts d'iceux ſeront auſſi premiers entr'eux.

Soit l'vn & l'autre nombre A & B premier, à l'vn & à l'autre C & D, & ſoit produict E de A par

B & F, produict de C par D. Ie dis que E & F sont premiers entr'eux.

g 26. 7. Car puis que tant A que B est premier à C, Et produict d'iceux, sera premier au mesme C. Derechef, A & B estans premiers à D, E, produict d'iceux, sera aussi premier au mesme D. D'autant donc que C & D sont premiers à E; h F, produict d'iceux.

A.....5 B...3
E.....15
C....4 D..2
F.....8

h 26. 7.

sera aussi premier à E. Donc si deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 17. PROP. 29.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, & l'vn & l'autre se multipliant soy-mesme, en faict quelqu'vn, les produicts d'iceux seront premiers entr'eux. Et si les nombres proposez au commencement, multiplians iceux produicts, en font quelques-vns, iceux seront aussi premiers entr'eux: Et cecy aduiendra tousiours entiron les extremes.

Soient A & B premiers entr'eux, & C produict de A par soy-mesme, & D produict de B, aussi par soy-mesme. Ie dis que C, D, sont aussi premiers entr'eux: & si derechef E est le produict de C par A & F, de D par B. Ie dis que E, F, sont aussi premiers entr'eux.

i 27. 7. Car puis que A, B, sont premiers entr'eux, i C

produict de A, par ſoy-meſme, ſera premier à l'autre B : & ſemblablement B & C eſtans premiers entr'eux, D produict de B par ſoy-meſme, ſera auſſi premier à C : & partant les deux produits C, D, premiers entr'eux. Derechef, d'autãt que A & B ſont premiers entr'eux, [k] C produict de A par ſoy-meſme ſera premier à B : & D produict de B par ſoy-meſme premier à A : mais C eſt auſſi monſtré premier à D. Donc l'vn & l'autre A, C, ſera premier à l'vn & l'autre B D, [l] & partant E, produict de A par C, ſera premier à F, produict de B par D. Que ſi encore G eſt le produict de A par E, & H de B par F : Puis que A & C ſont premiers à B ; [m] E, produict d'iceux ſera auſſi premier à B : par meſme raiſon F ſera premier à A : D'autant donc que l'vn & l'autre A, E, eſt premier à l'vn & l'autre B, F, [n] le nombre G. produict de A en E, ſera premier à H, produict de B en F, & ainſi de ſuitte, s'il y en a d'auantage. Donc ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A..3 B..2
C.....9 D....4
E 27 F, 8
G 81 H, 16

27. 7.

k 27. 7.

l 28. 7.

m 26. 7.

n 28. 7.

THEOREME 28. PROPO. 30.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, l'vn & l'autre enſemble ſera premier à chacun d'iceux : Et ſi l'vn & l'autre enſemble eſt premier à quelqu'vn d'iceux, les nombres propoſez au commencement ſeront auſſi premiers entr'eux.

Soient AB, BC, premiers entr'eux. Ie dis que

l'vn & l'autre enſemble AC, ſera premier à AB, & à BC.

Car ſi AC, AB, ne ſont premiers entr'eux, ils ſeront meſurez par quelque nombre, outre l'vnité, lequel ſoit D, s'il eſt poſſible. 12. c. ſ.

Donc puis que D meſure le tout AC, & le retranché AB, il meſurera auſſi le reſte BC,

A.....8 B.....5 C
D ...

donc AB, BC, ne ſeront premiers entr'eux, puiſque D les meſure. Ce qui eſt abſurde & contre l'hypotheſe. Donc AC, ſera premier à AB, & à BC.

Soit maintenant AB, BC, enſemble, premier à quelqu'vn d'iceux, ſçauoir à AB. Ie dis que AB, BC, ſont premiers entr'eux : autrement ils ſeront meſurez par quelque nombre outre l'vnité, lequel ſoit D. Donc D, meſurant AB, BC, meſurera auſſi le compoſé d'iceux AC: & partant AC, AB, ne ſont premiers entr'eux, ce qui eſt abſurde & contre l'hypotheſe. Donc AB, BC, ſont premiers entr'eux. Et ſemblablement, ſi AC, eſt premier à BC. Donc ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. 10. c. ſ.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de cecy, que le nombre lequel eſtant compoſé de deux autres, eſt premier à vn d'iceux, il ſera auſſi premier à l'autre. Car ſi AC, eſt premier à AB, iceux AB, BC, ſeront premiers entr'eux, par la ſeconde partie de cette Propoſition. Donc AC, ſera auſſi premier à BC, par la premiere partie de la meſme Propoſition. Ce qui eſtoit propoſé.

THEOREME

THEOREME 29. PROP. 31.

Tout nombre premier, eſt premier à tout autre nombre, lequel il ne meſure point.

Soit le nombre A, premier, lequel ne meſure B. Ie dis que A eſt premier à B, c'eſt à dire que A & B ſont premiers entr'eux, encore que B ſoit nombre compoſé.

Car autrement ils ſeront meſurez par quelque nombre, outre l'vnité, lequel ſoit C, s'il eſt poſſible. Donc C, ne ſera le meſme que A; A eſtant poſé ne meſurer B. donc A eſtant meſuré par vn autre nombre C; A ne ſera premier, ce qui eſt impoſſible, & contre l'hypotheſe. Donc tout nombre premier, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.....5 B.....8
C-----

THEOREME 30. PROP. 32.

Si deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre, en font quelqu'autre, & que quelque nombre premier meſure leur produict, il meſurera auſſi vn des nombres propoſez au commencement.

Soient A & B, leſquels ſe multiplians l'vn l'autre faſſent C, lequel ſoit meſuré par D, nombre premier. Ie dis que D, meſurera à tout le moins l'vn d'iceux A, B, s'il ne les meſure tous deux.

Car que D ne mesure A, mais qu'il mesure C, autant de fois qu'il y a d'vnitez en E. De sorte que C, soit produict de D par E, lequel C est produict de A par B.

A....4 B.....6
C.....24
D...3 E.....8

o 19. 7. D'autant donc que C, produict de D 1. par E 4. est egal au produict de A 2. par B 3. ° il y aura mesme raison de D premier à A 2. que de B 3. à E 4.
p 31. 7. q 23. 7. r 21. 7. P Mais D 1. estant premier à A, puis qu'il ne le mesure ? D & A seront les plus petits de leur raison : r partant mesureront egalement B & E, à sçauoir D plus petit, mesurera B plus petit, & A plus grand, E plus grand. Donc si D ne mesure A, il mesurera B: semblablement on monstrera que si D ne mesure B, au moins qu'il mesurera A. Donc si deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 1. PROP. 33.

Tout nombre composé, est mesuré par quelque nombre premier.

f 13. d. Soit le nombre A composé. Ie dis que quelque nombre premier le mesure.

Car estant composé, il ' sera mesuré par quelque nombre, lequel soit B : que si B est premier, la proposition est manifeste. Mais si B est composé, il sera aussi mesuré par quelque nombre, lequel soit C, qui sera premier ou composé: si premier, puis qu'il mesure B, & B mesure A, t 11. e. f. icelui C premier, mesurera aussi A. Donc A sera mesuré

par vi. nombre premier.
Mais si C est composé, il sera mesuré par vn autre nombre.

A.....18
B.....6 C...3

Or d'autant qu'vn nombre ne se diminuë infiniment, on viendra enfin à quelque nombre qu'aucun autre ne mesurera, & partant à vn nombre premier, lequel mesurant tous les precedens, [a] il mesurera aussi le nombre composé A. [a] VII. est

THEOREME 32. PROP. 34.

Tout nombre est premier, ou bien mesuré par quelque nombre premier.

Soit vn nombre tel qu'on voudra A. Ie dis qu'il est premier, ou bien qu'il est mesuré par quelque nombre premier.

Car puis que tout nombre est premier ou composé, si A est premier, la proposition est manifeste : mais s'il est composé, [x] il sera mesuré par quelque nombre premier. Partant tout nombre est premier, ou est, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.....9

[x] 33. 7.

THEOREME 33. PROP. 35.

Tant de nombres que l'on voudra estans donnez, trouuer les plus petits nombres, qui ont la mesme raison auec iceux.

Soient proposez tant de nombres qu'on vou-

dra A,B,C, en quelque proportion que ce ſoit, il faut trouuer les plus petits, qui ont la meſme raiſon.

Car ou A,B,C, ſont premiers entr'eux ou non, ſi premiers, [y] ils ſeront les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon; Mais s'ils ſont compoſez, [z] ſoit trouué D, leur plus grande commune meſure, lequel meſure iceux A,B,C, par E,F,G. Ie dis que E, F, G, ſont les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon de A,B,C;

y 23. 7.

A.....6B....4C.....8
D..2
E...3F..2G...4
H----I----K----
L----

z 3. 7.

Car d'autant que D meſure A, B, C, par E, F, G, [a] D multipliant E, F, G, produira A,B,C, [b] donc E, F, G, auront meſme raiſon que A,B,C.

a 9. c.f.
b Sch. 18.7

Ie dis auſſi que E,F,G, ſont les plus petits: car s'il n'eſt ainſi, ſoient H, I, K, plus petits en la meſme raiſon, leſquels meſureront A, B, C, egalement.

21. 7.

Qu'ils les meſurent donc par L, cela eſtant ainſi, [c] L multipliant H,I,K, produira A, B, C, [d] & en changeant L, meſurera A,B,C, par H,I,K. D'autant donc que E 1. multipliant D 4. & H 2. multipliant L 3. produict le meſme A, [e] comme E 1. à H 2. ainſi L 3. ſera à D 4. Mais E eſt plus grand que H, donc L ſera plus grand que D: & partant puis que L meſure A,B,C; D ne ſera plus grande commune meſure des nombres A,B,C. Ce qui eſt contre l'hypotheſe: donc E,F,G, ſont les plus petits en la raiſon de ABC. Partant s'il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

c 9. c.f.
d 8. c.f.
e 19. 7.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte de cecy, que la plus grande commune meſure de tant de nombres qu'on voudra, les meſure par les plus petits nombres de tous ceux qui ont la meſme raiſon auec iceux. Car il a eſté monſtré que E, F, G, par leſquels D, plus grande commune meſure de A, B, C, meſure iceux A, B, C, ſont les plus petits en la raiſon de A, B, C, & ainſi de tous autres.

SCHOLIE.

Par ce que deſſus, nous pourrons trouuer les deux plus petits nombres qui ſont en meſme raiſon, que tant de nombres continuellement proportionaux que l'on voudra. Comme ſi on propoſe A, B, C, D, E, continuellement proportionaux, ſoit qu'ils ſoient les moindres en la continuation de la raiſon de A à B ou non: nous en trouuerons deux les plus petits en la meſme raiſon, ſi par ce Probleme nous prenons F & G, les plus petits en la raiſon de A à B, ſçauoir ceux par leſquels I, plus grande commune meſure d'iceux les meſure.

A. 16. *B* 24. *C* 36. *D* 54. *E* 81.
I, 8.
F, 2. *G*, 3.

Au ſurplus, il aduient quelquefois qu'vn d'iceux nombres E, F, G, trouuez par cette propoſition eſt l'vnité, ſçauoir quand D, plus grande commune meſure, eſt egal à vn d'iceux A, B, C,

comme il appert par cet exemple.

Or il eſt manifeſte que les nombres E, F, G, alors trouuez, ſont plus petits en la continuation de leurs proportions, puis qu'il ne ſe peut donner vn nombre moindre que l'vnité.

A...3 B.....6 G.....9
D...3
E.1 F..2 G...3

PROBLEME 4. PROP. 36.

Deux nombres eſtans donnez, trouuer le plus petit nombre lequel ils meſurent.

Soient les deux nombres propoſez A & B, il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils peuuent meſurer.

Soient premierement A & B, premiers entr'eux, & ſe multiplians l'vn l'autre faſſent C. Ie dis que C eſt le requis.

Or qu'ils le meſurẽt il eſt manifeſte. Car C eſtant produict de A par B, ou de B par A; [f] A meſurera C par B, & B le meſme C par A. Donc A & B meſurent C. Et ſi C n'eſt le plus petit; que A & B en meſurent vn autre plus petit, ſçauoir D, s'il eſt poſſible, & que A meſure D, par E & B, le meſme D par F, [g] ainſi D ſera produict, tant de A par E, que de B par F, & au contraire. D'autant que le meſme D eſt produict de A 1. par E 4. & de B 2. par F 3. Comme A 1. ſera à B 2. ainſi

A....4 B.....5
C.....20
D.....
E.....F.....

f 7. c. f.

9. c. f.

g 19. 7.

F 3. à E 4. Donc A & B (eſtans poſez premiers entr'eux, [h] & partant les plus petits en leur raiſon) ils meſureront E & F l'vn comme l'autre, à ſçauoir A meſurera F, & B meſurera E. Mais d'autant que A multipliant B & E, faict C & D; C ſera à D, comme B à E: & partant puis que B meſure E, comme il eſt monſtré: C meſurera auſſi D, le plus grand le plus petit. Ce qui eſt impoſſible. Partant C eſt le plus petit de tous ceux qui meſurent A & B. h 23. 7. 11. 7. 17. 7.

Secondement, ſoient A & B, non premiers entr'eux, [i] & ſoient trouuez C & D, les plus petits en la meſme raiſon, afin qu'il y ait 4. nombres proportionaux, ſçauoir comme A à B, ainſi C à D, par ainſi le produict de [k] A premier, par D 4. ſera egal au produict de C 2. par B 3. lequel produict ſoit E. Ie dis que E eſt le plus petit nombre que meſurent A & B: qu'ils le meſurent, il eſt manifeſte; car E eſtant produict tant de A en D, que de B en C, [l] tant A que B, meſurera E. Et s'il n'eſt le plus petit, que A & B en meſurent vn autre plus petit que E, ſçauoir F. Or que A meſure F par G, & B le meſme F par H, donc [m] F ſera le produict tant de A par G, que de B par H. i 35. 7. k 19. 7. l 17. 7. ſ. m 9. 7. ſ.

A....4 B....6
C..2 D...3
E.....12
F--------
G---H---

D'autant donc que le meſme F eſt faict de A 1. en G 4. & de B 2. en H 3. comme A 1. à B 2. ainſi H 3. à G 4. Partant C & D, eſtans les plus petits en la raiſon de A à B, ou de H à G, [n] ils meſurent H & G egalement, ſçauoir C meſurera H, & D meſurera G: mais d'autant que A multipliant D & G, faict E & F, [o] E ſera à F, comme D à G, & 19. 7. n 21. 7. o 17. 7.

partant D mesurant G, comme il est monstré, E mesurera aussi F, le plus grand, le plus petit : ce qui est impossible. Donc E est le plus petit. Partant deux nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

Si le plus petit nombre mesure le plus grand, le plus grand sera le requis, &c.

COROLLAIRE.

D'icy il s'ensuit, que si deux nombres multiplient les plus petits ayans la mesme raison, le plus grand le plus petit, & le plus petit le plus grand, le produict sera le plus petit nombre qu'iceux mesurent.

Car C & D, estans posez les plus petits en la raison de A à B, il a esté demonstré que E, produict de A, plus petit, par D plus grand, & de B plus grand, par C plus petit, est le plus petit nombre mesuré par A & B.

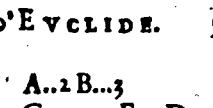
THEOREME 33. PROP. 37.

Si deux nombres mesurent quelque autre nombre. Le plus petit qu'ils mesurent, mesurera aussi le mesme nombre.

Que les deux nombres A & B, en mesurent quelque autre C D, & soit E, le plus petit que A & B mesurent. Ie dis que E, mesurera C D.

Car si E, ne mesure CD, ayant osté E, de CD, tant de fois que l'on pourra, il restera vn nom-

bre moindre que E, qu'il reſte FD, plus petit que E. s'il eſt poſſible, de ſorte que E, meſure le retranché CF. D'autant donc que tant A que B, meſure E, & E meſure CF, [p] tant A que B, meſurera auſſi CF. Donc puis que A & B, meſurent le tout CD, & le retranché CF, [q] ils meſureront auſſi le reſte FD. Or FD eſt plus petit que E: donc E n'eſt le plus petit nombre que A & B meſurent. Ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



[p] 11. e. ſ.

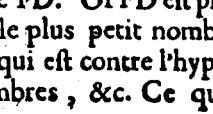
[q] 12. e. ſ.

PROBLEME 5. PROP. 38.

Trois nombres eſtans donnez, trouuer le *plus* petit nombre qu'ils meſurent.

Soient trois nombres propoſez A, B, C, il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils peuuent meſurer.

Soit [r] D, le plus petit que A & B, meſurent; C le meſurera ou non, s'il le meſure: Ie dis que c'eſt le plus petit que les 3. A, B, C, meſurent: autrement ſoit E, plus petit que D, meſuré par A, B, C: donc A & B meſurant E, moindre que D: D ne ſera le plus petit meſuré par A & B, ce qui eſt contre l'hypotheſe.



[r] 36. 7.

[ſ] 36. 7.

Si C ne meſure D, ſoit [t] E le plus petit, meſuré par C, D. Ie dis qu'il ſera le plus petit que

A, B, C, mesurent. Car A, B, mesurant D, & D,
tiu. c. 5. mesurant E, A, B, mesureront aussi E, mais C mesure pareillement E.

Donc les 3. A, B, C, mesurent E. Et si on dict que E ne soit le plus petit, soit F moindre que E, mesuré par A, B, C, s'il est possible : Donc puis que A & B, mesurent F ; D, plus petit mesuré par
▼37. 7. iceux, ▼ mesurera aussi F & C, D, mesurant F : (car A, B, C, le mesurent ſE, le plus petit nombre, mesuré par C, D, mesurera pareillement F, le plus grand le plus petit : ce qui est absurde. Partant E est le plus petit que A, B, C, mesurent. Donc 3. nombres estans, &c. Ce qu'il falloit faire.

A. 2 B. 3 C. 4
D. 6
E. 12
F.

COROLLAIRE.

D'icy il s'ensuit, que si trois nombres mesurent quelque nombre, que le moindre nombre qu'ils mesurent, mesure aussi ce mesme nombre. Car en la derniere partie de cette demonstration, de ce que A, B, C, estoient posez mesurer F, il a esté demonstré que E, qui est le moindre nombre, mesuré par iceux, mesure aussi F.

SCHOLIE.

En cette maniere, plus de trois nombres estans donnez, nous trouuerons le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car si quatre nombres sont donnez, faut faire la question de trois, si cinq, faut trouuer le plus petit que 4. mesurent, & fai-

re au reſte comme il eſt dict de 3. &c.

THEOREME 34. PROP. 39.

Si vn nombre meſure vn autre nombre; celuy lequel il meſure, aura vne partie denommee du meſurant.

Que le nombre B, meſure le nombre A. Ie dis que A, aura vne partie denommee de B.

Car que B meſure A, autant de fois qu'il y a d'vnitez en C. D'autant donc que l'vnité meſure C, & B meſure A; egalement: [x] en changeant l'vnité meſurera B, & C meſurera A egalement, & partant l'vnité ſera meſme partie de B, que C de A, [y] mais l'vnité eſt vne partie de B, denommee du meſme B: donc C ſera vne partie de A, denommee par B. Partant ſi vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.....12
B....4 C...3

x 15. 7.

y 2. d. 7.

THEOREME 35. PROP. 40.

Si vn nombre a vne partie quelconque, le nombre denommé de cette partie le meſurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B, par laquelle le nombre C eſt denommé. Ie dis que C meſure A.

Car puis que B, partie de A, eſt denommee de C, mais l'vnité eſt vne partie de C, denommee

du meſme C ; l'vnite meſurera C, & B meſurera A egalement. [a] Donc, en changeant l'vnité meſurera B, & C meſurera A egalement. Donc ſi vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.....15
B...3 C.....5

[a] 15. 7.

PROBLEME 6. PROP. 41.

Trouuer le plus petit nombre, qui ayt les parties donnees.

Soient les parties donnees A, B, C, il faut trouuer le plus petit nombre, ayant les meſmes parties.

Soient D, E, F, denommez des parties A, B, C, & [a] ſoit G, le plus petit que D, E, F, meſurent. Ie dis que G eſt le plus petit, ayant les parties donnees A, B, C. Car puis que D, E, F, meſurent G, [b] G aura les parties denommees par D, E, F, c'eſt à dire, les parties A, B, C, eſtans denommees de D, E, F. Ie dis que G, eſt auſſi le plus petit ayant telles parties.

D..2 *A, ſeconde,*
E...3 *B, tierce.*
F....4 *C, quarte.*
G.....12
H-------

[a] 38. 7.

[b] 39. 1.

Car s'il n'eſt ainſi, qu'vn autre plus petit que G, ait les meſmes parties A, B, C, lequel ſoit H. D'autant donc que H, a les parties A, B, C, les nombres D, E, F, denommez d'icelles parties A, B, C, meſureront H : donc H eſtant moin-

40. 7.

dre que G ; G, ne ſera le plus petit nombre meſuré par D , E, F : Ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc vn plus petit nombre que G, n'aura pas les parties donnees A, B, C : Mais G, ſera le plus petit. Partant nous auons, &c. Ce qu'il falloit faire.

FIN DV SEPTIESME LIVRE des Elements d'Euclide.



LIVRE HVICTIESME

DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

THEOREME 1. PROP. 1.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra, continuellement proportionaux, & que les extremes ſoient premiers entr'eux; ils ſont les plus petits de tous ceux qui ont meſme raiſon auec iceux.

SOIENT tant de nombres que l'on voudra, A, B, C, continuellement proportionaux; & ſoient les extremes A & C premiers entr'eux. Ie dis que A, B, C, ſont les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon qu'iceux.

Car s'il n'eſt ainſi, ſoient D, E, F, plus petits qu'iceux en la meſme raiſon, s'il eſt poſſible. D'autant

A.....8 D----
B.....12 E----
C.....18 F----

donc qu'il y a tant de nombres que l'on veut d'vne part A, B, C, & autant d'autre, D, E, F, lesquels pris de deux en deux, sont en mesme raison, [c] en raison egale, comme A sera à C, ainsi D à F: [d] Mais A & C, sont les plus petits de leur raison, estans premiers entr'eux par l'hypothese. [e] Donc tant que C, mesurera D & F egalement, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc A, B, C, sont les plus petits de leur raison. Partant s'il y a tant, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

c 14. 7.
d 23. 7.
e 21. 7.

PROBLEME 1. PROP. 2.

Trouuer tant de nombres que l'on voudra, continuellement proportionaux, les plus petits en vne raison donnee.

Soient A & B, les plus petits de leur raison, il faut premierement trouuer 3. nombres les plus petits en la raison donnee de A à B.

Que A, multipliant soy-mesme produise C, & multipliant B, produise D & B, par soy-mesme, faisse E. Ie dis que C, D, E, sont les plus petits en la raison de A à B, & sont continuellement proportionaux.

A 2. B 3.
C 4. D 6. E 9
F 8. G 12. H 18. I 27.

Car d'autant que A, multipliant A & B, faict C & D: comme A est à B, ainsi C à D. Derechef, puis que B, multipliant A, B, faict D, & E: [f] comme A est à B, ainsi D à E: donc C, D, E, sont continuellement proportionaux en la raison de A à B. Ils sont aussi les plus petits.

f 17. 7.

Car d'autant que les extremes C & E, ſont produicts de A & B, multipliez chacun par ſoy-meſme. [g] Mais A & B, ſont premiers entr'eux, eſtant les plus petits de leur raiſon, [h] les extremes C & E, ſeront auſſi premiers entr'eux. Donc C, D, E. ſont les plus petits en la raiſon de A, B, C.

g 24. 7.
h 29. 7.

1. 8. Secondement; que A, multipliant les 3. nomb. C, D, E, produiſe F, G, H, & B multipliant les, faſſe 1. Ie dis que les quatre nombres F, G, H, I, ſont les plus petits en la meſme raiſon donnee de A à B, & continuellement proportionaux.

Sch. 18. 7. Car puiſque A multipliant C. D, E, a produict F, G, H, F, G, H aurõt meſme raiſõ que C, D, E, c'eſt à dire que A, B. Derechef, puis que A & B, multipliant E, ont faict H & I,

i 18. 7. comme A à B, ainſi H à I. Donc F, G, H, I, ſont continuellement proportionaux en la raiſon donnee de A à B.

A 2 B 3.
C 4, D 6. E 9,
F 8. G 12. H 18. I 27.

k 24. 7. Ils ſont auſſi les plus petits: Car A & B eſtans les plus petits en leur raiſon, [k] ils ſeront premiers entr'eux: mais C & E, ſont produits de A & B par eux-meſmes, & F & I ſont auſſi produicts de A & B, en C, E, ſçauoir F, de A en C, & I de B, en F, [l] F, I, extremes ſeront auſſi premiers entr'eux. Partant F, G, H, I, ſont les plus petits de leur raiſon, qui eſt la raiſon de A à B. Par meſme raiſon nous en trouuerons cinq ou ſix, &c. Donc nous auons trouué, &c. Ce qu'il falloit faire.

l 29. 7.

1. 8.

AVTRE DEMONSTRATION.

Soit la raiſon donnee de C à D; s'ils ne ſont les plus petits de leur raiſon, [m] ſoient pris d'autres

m 35. 7.

tres qui soient les plus petits en la mesme raison A & B.

A 2. B 3. 2. 3.

C 4. D 6. E 9. 4. 6. 9.

F 8. G 12. H 18 I 27. 8. 12. 18. 27.

K 16. L 24. M 36. N 54. O 81 16. 24. 36. 54. 81.

P 32. Q 48. R 72. S 108. T 162. V 243. 32. 48. 72. 108. 162

A multipliant soy-mesme faict C, & multipliant B, faict D; B se multipliant faict E. Donc puis que A multipliant A, & B faict C, & D, les [n] produits seront en la raison des multipliez, c'est à dire en la raison de A à B. Et B multipliant A & B, a faict D, E, donc D, E, seront comme A à B. [n] 17. 7.

Derechef, A multipliant C, D, E, faict F, G, H, qui seront en la raison de C, D, E, multipliez, c'est à dire de A à B. Et d'autant que A, B, multiplians E, sont H & I, donc H, I, seront en la raison de A à B, par la 18. du 7. liure.

Derechef, A multipliant F, G, H, I, a faict K, L, M, N, qui seront en la raison de F, G, H, I: c'est à dire de A à B. Et puis que A, B, multipliant I, a faict N, O; N, O, seront en la raison de H à I, c'est à dire de A à B, & ainsi des autres. Partant, premierement trois les plus petits sont contin. propor. puis 4. en apres 5. & puis 6. & ainsi l'on en trouuera tant que l'on voudra. 18. 7.

Or qu'ils soient les plus petits en la raison donnee, on le monstrera ainsi. D'autant que C, E, sont procreez de A & B, par eux mesmes: mais A & B, [o] sont premiers entr'eux, estans les plus petits de leur raison; [p] donc C E, seront premiers entr' eux: & partant C, D, E, estans continuellement [o] 24. 7. [p] 29. 7.

proportionaux, ſeront les plus petits de leur raiſon: ainſi F, I, ſont premiers entr'eux, & F, G, H, I, eſtans contin. proport. ils ſeront les plus petits de leur raiſon.

q 29. 7.

L 8.

En apres, il faut monſtrer que A, C, F, K, P, B, D, G, L, Q; E, H, M, R, ſont continuellement proport. En cette ſorte: comme A à B, ainſi C à D: & en changeant, comme A à C, ainſi B à D, & comme C à D, ainſi F à G, & en permutant C eſt à F, comme D à G: & ainſi des autres K, P, L, Q. En apres, comme D à E, ainſi G à H, & en changeant comme D à G, ainſi E à H: Mais comme G à H, ainſi L à M, & en permutant, comme G à L, ainſi H à M: Mais comme L à M, ainſi Q à R, en permutant comme L à Q, ainſi M à R. Puis comme H à I, ainſi M à N, & en permutant comme H à M, ainſi I à N: Mais comme M à N, ainſi R à S, & en permutant, comme M à R, ainſi N à S. Donc A, C, F, K, P; B, D, G, L, Q; E, H, M, R, ſont continuellement proportionaux: ſemblablement on monſtrera que B, E, I, O, V; A, D, H, N, T; C, G, M, S; F, L, R, ſont continuelllement proportionaux, &c.

13. 7.

A 2. B 3.	2. 3.
C 4. D 6. E 9.	4. 6. 9.
F 8. G 12. H 18. I 27.	8. 12. 18. 27.
K 16. L 24. M 36. N 54. O 81.	16. 24. 36. 54. 81.
P 32. Q 48. R 72. S 108. T 162. V 243.	32. 48. 72. 108. 162

Finalement, il faut monſtrer que les moyens proportionaux peuuent eſtre procreez de la mul-

tiplication des extremes entr'eux: comme D, eſt faict de A en B: G eſt produict de A en D, & de B en C; d'autant que comme A à B, ainſi C à D; donc le produit des extremes A, D, eſt egal au pro- 19. 7.
duict des moyens.

Derechef, comme A à B, ainſi D à E; donc le contenu ſous A, E, eſt egal au contenu ſous B, D, ſçauoir H, donc H peut eſtre faict de A en E, & qui plus eſt, y a eſté faict par la conſtruction.

En apres, comme A à B, ainſi F à G; mais A multipliant G, a faict L: donc B multipliant F, fera L. Derechef, A extreme multipliant I, autre extreme, a faict N, par la conſtruction. Et combien que M ſoit faict de A en H, par la conſtruct. il ſe peut neantmoins faire de C en E: D'autant que comme A à C, ainſi E à H: Mais M eſt faict de A en H, donc M ſera faict auſſi de C en E. Finalement comme A à B, ainſi K à L: mais A multipliant L, par la conſtruction, a faict Q. donc B multipliant K, fera Q. Et comme A à F, ainſi E à M: mais A multipliant M, a faict R, donc E multipliant F fera R. Et comme A eſt à C, ainſi I à N: mais A multipliant N, a faict S: donc C multipliant I, fera S; & T, par la conſtruction, a eſté faict de A en O, & ainſi de ſuitte on pourra prouuer que les moyens proportionaux ſont faicts de la multiplication des extremes.

COROLLAIRE I.

Il s'enſuit de ces propoſitions, que ſi 3. nombres ſont continuellement proportionaux, & les plus petits de leur raiſon, les extremes ſeront quarrez: & ſi 4. ſont cõtinuellement proportionaux, les ex-

tremes seront cubes. Car C, E, extremes, sont produicts de A & B, chacun par soy-mesme: Et F & I, extremes des 4. sont produicts de A & B, multipliez chacun par son quarré C & D, &c.

COROLLAIRE II.

Il s'ensuit aussi que les extremes des nombres continuellement proportionaux, trouuez les plus petits en la raison donnee, par cette Proposition, sont premiers entr'eux, [r] ayant esté demonstré que CE, FI, sont premiers entr'eux.

r 24. & 29 7.

COROLLAIRE III.

Il appert aussi que deux nombres les plus petits en la raison donnee, mesurent tous les moyens quelconques des plus petits en la mesme raison, estans produicts de la multiplication d'iceux par quelques autres nombres, comme D, moyen qui est produict de A par B, & G, H, moyens de A, par D, & E, ou de B, par C, D, &c.

SCHOLIE.

Il s'ensuit d'icy, que tant ACFK, que BEIO, sont continuellement proportionaux depuis l'vnité. Car A mesurant son produict C, [f] C aura vne partie denommee de A, mais l'vnité est partie de A, denommee de A. Donc l'vnité sera mesme partie de A, que A, de C. Donc comme l'vnité à A, ainsi A à C, ainsi des autres.

f 39. 7.

THEOREME 2. PROP. 3.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra, continuellement proportionaux, les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux ; les extremes seront premiers entr'eux.

Soient A, B, C, D, les plus petits de leur raison continuellement proportionaux. Ie dis que les extremes A & D, sont premiers entr'eux.

Car soient [t] trouuez E, F, les plus petits, en la raison de A à B, ou B à C, ou C à D; [u] E, F seront premiers entr'eux. Puis soient trouuez les 3. G, H, I, les plus petits en la raison de E à F, & aussi les 4. K, L, M, N, & ainsi de suitte, iusques à ce que K, L, M, N, soient egaux en nombre à A, B, C, D. [t 35. 7.] [u 23. 7.] [v 2. 8.]

D'autant que A, B, C, D, sont les plus petits de leur raison: & K, L, M, N, egaux en nombre à iceux, estans aussi les plus petits en la mesme raison, ils seront egaux à iceux chacun au sien, sçauoir A à K, & D à N. [x] Or K, & N, sont premiers entr'eux. Donc A, & D, sont aussi premiers entr'eux. Donc s'il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4 H 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

[x] *Coroll.* 2.

PROBLEME 2. PROPO. 4.

Eſtans donnees tant de raiſons que l'on voudra, és plus petits nombres d'icelles, trouuer tant de nombres qu'on voudra, continuellement proportionaux, les plus petits ſelon les raiſons donnees.

Soient premierement donnees les deux raiſons de A à B, & de C à D, aux plus petits nombres d'icelles: il faut trouuer trois nombres continuellement proportionaux, & les plus petits ſelon icelles raiſons.

36. 7. Ayant [r] trouué E, le plus petit nombre meſuré par B, C 2. & 3. ſoit
trouué F, autant de fois meſuré par A, que E par B, & G, autant de fois meſuré par D,
que E par C: F, E, G, ſeront continuellement proportionaux, les plus petits ſelon les raiſons donnees.

A, 6 B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I---K---L---

Car d'autant que A & B, meſurent egalement F & E; c'eſt à dire par vn meſme nombre, qu'ils le meſurent par H. Cela eſtant, [z] A & B, multiplians H, produiront F & E. Parquoy comme A à B, ainſi F à E. Semblablement C & D, meſurans egalement E, G, comme C à D, ainſi E ſera G. Donc F, E, G, ſont contin. proport. ſelon les raiſons de A à B, & de C à D.

29. c. f. 18. 7.

Ie dis qu'ils ſont auſſi les plus petits: car s'il n'eſt ainſi, ſoient I, K, L, plus petits en icelles raiſons,

chacun au ſien, s'il eſt poſſible. D'autant donc que A & B, ſont les plus petits en leur raiſon, [a] iceux meſureront egalement I & K, eſtans en meſme raiſon, ſçauoir B, conſequent, meſurera K conſequent. Par la meſme raiſon C, D, meſureront egalement K & L, ſçauoir C antecedent, K antecedent. donc B & C meſurans K, [b] E plus petit meſuré par B & C, meſurera auſſi K, le plus grand le plus petit. Ce qui eſt abſurde. Donc F, E, G, ſont les plus petits. a 21. 7. b 37. 7.

Soient trois raiſons donnees aux plus petits nombres de A à B, C à D, & de E à F: Et il faut trouuer 4. nombres les plus petits, continuellement proportionaux, ſelon les raiſons donnees. [c] Ayant trouué derechef G le plus petit que meſurent B & c 36. 7.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K. 21.
L---D---N---O----

C 2. & 3. ſoit trouué H, autant de fois meſuré par A, que G par B: & I autant de fois meſuré par D, que G par C: cela eſtant E meſurera I, ou non. Qu'il le meſure premierement, & autant de fois que I eſt meſuré par E, ſoit K autant de fois meſuré par F. Ie dis que, H, G, I, K, ſont contin. proport. & les plus petits ſelon les raiſons donnees, comme il a eſté monſtré.

Maintenant que E ne meſure I, [d] & ayant trouué K, le plus petit que E & I, meſurent, ſoit L autant de fois meſuré par G, & M par H, que K par I; & ſoit auſſi N, autant de fois meſuré par F, que K par E. Ie dis que M, L, K, N, ſont les plus petits, ſelon les raiſons donnees d 36. 7.

Car H, G, I, meſurans M, L, K, egalement, com-

me cy-deuant M
ſera à L, comme A,6.B:5.C,4.D,3,E,2.F,7.
H à G, & L à K, H,24.G,20.I,15.
comme G à I: M,48.L,40.K,30.N,105.
mais par la meſ- O----P----Q----R----
me raiſon H eſt
à G, comme A à B, & G à I, comme C à D, (A, B,
e Sch.1.7 meſurant H, G, & C, D, G, I, egalement.) Donc
comme [e] A à B, ainſi M à L, & comme C à D, ainſi L à K. Mais cumme E à F, K eſt auſſi à N. (E, F, meſurans egalement k, N.) Donc M, L, K, N, ſont continuellement proportionaux, ſelon les raiſons donnees.

Ils ſont auſſi les plus petits, car s'il n'eſt ainſi, ſoient O, P, Q, R, plus petits ſelon les meſmes
f 21. 7. raiſons, s'il eſt poſſible. D'autant donc que A, B, ſont les plus petits de leur raiſon, [f] ils meſureront egalement O, P, en la meſme raiſon, ſçauoir B, conſequent, meſurera P, conſequent. Et par meſme raiſon C, D, meſureront P, Q, egalement: ſçauoir C, antecedent, P, antecedent: parquoy B, C,
g 37. 7. meſurans P, [g] G plus petit nombre, meſuré par B, C, meſurera le meſme P.

Or eſtant monſtré que comme G à I, ainſi L à k: c'eſt à dire, ainſi P à Q, en changeant comme G à
h 21. 7. P, ainſi I à Q: & partant G, meſurant P, I meſurera Q: mais E meſure auſſi Q, [h] puis que E, F, les plus petits de leur raiſon meſurent egalement Q, R, en la meſme raiſon, ſçauoir E, antecedent, Q, antecedent. Donc I, E, meſurans Q; k, plus petit, nombre
37. 7. meſuré par I, E, meſurera auſſi Q, le plus grand le plus petit. Ce qui eſt abſurde. Parquoy M, L, K N; ſont les plus petits: & ainſi de ſuitte, s'il y a d'auantage de raiſons donnees aux plus petits

nombres, &c. Donc eſtans donnees, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 3. PROPO. 5.

Les nombres plans ſont l'vn à l'autre en raiſon compoſee de leurs coſtez.

Soient deux nombres plans A, B, & les coſtez de A, ſoient C, D, & ceux de B, ſoient E, F. Ie dis que la raiſon de A à B, eſt compoſee des raiſons des coſtez, ſçauoir de la raiſon de C à E, & de D à F.

Car que D, multipliant E, produiſe G. D'autant que D multipliant C, E, a produict A & G: A ſera à G, cõme C à E: & puis que E multipliant D, F, a produict G, B, G ſera à B, comme D à F. Partant A, G, B, ſont continuellement proportionaux, ſelon les raiſons de C à E, & de D à F, coſtez. Mais la raiſon de A à B, eſt compoſee des raiſons de A à G, & de G à B: donc la meſme raiſon de A à B, ſera compoſee des raiſons de C à E, & de D à F, coſtez. Dõc les nombres plans, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A, 24. B, 48. G, 18. C, 4. D, 6. E, 3. F, 19.

17. 7. 17. 7. 17. d. 7.

THEOREME 4. PROPOSIT. 6.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra, continuellement proportionaux, & que le premier ne meſure le ſecond,

aussi pas vn autre ne mesurera pas vn autre.

Soient A,B,C,D,contin.proport.& que A 1. ne mesure B 2. Ie dis que pas vn autre n'en mesurera pas vn autre.

Car qu'aucun ne mesure son prochain suyuant, il est manifeste, d'autant que A,B,C,D,sont continuellement proportionaux, & que A ne mesure B, l il ne sera partie d'iceluy, mais parties: m parquoy B, qui est les mesmes parties de C,ne mesurera aussi C,ny C,D. Ie dis aussi que pas vn autre n'en mesurera pas vn autre, comme A ne mesurera C. n Car ayant trouué F,G,H,les plus petits en la raison de A à B, ou de A,B, C, en raison egale,comme A à C,ainsi F à H Mais puis que comme A est à B, ainsi F à G, & que A ne mesure B;F ne mesurera aussi G : Parquoy F ne sera l'vnité, autrement F mesureroit G, l'vnité mesurant tout nombre. Donc o F & H estans premiers entr'eux, & F n'estant l'vnité, F ne mesurera H:& partant A ne mesurera aussi C. Car il est monstré que comme A à C, ainsi F est à H : semblablement on monstrera que B ne mesurera D, prenant quatre nombres en la raison de A à B,& les plus petits, & que pas vn autre n'en mesurera pas vn autre,&c. Donc s'il y a, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

l 3.& 4.d. 7.

m 20.d. 7.

n 2. 8. ou 35.7.

o 3. 8.

THEOREME 5. PROP. 7.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra, continuellement proportionaux, &

que le premier meſure le dernier, il meſurera auſſi le ſecond.

Soient tant de nombres que l'on voudra, continuellement proportionaux, A, B, C, D, E, & que A 1. meſure E dernier. Ie dis que A 1. meſurera auſſi B 2.

Car ſi A n'eſt dict meſurer B 2. auſſi pas vn autre, n'en meſurera pas vn autre: partant A 1. ne meſurera E dernier. Ce qui eſt abſurde, A eſtant poſé meſurer E. Donc s'il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. P 6. 8.

THEOREME 6. PROP. 8.

Si entre deux nombres tombent des nombres moyens proportionaux, en proportion continuë: autant qu'il en tombera entre iceux, de moyens continuellement proportionaux, il en tombera autant de moyens continuellement proportionaux entre deux autres qui auront la meſme raiſon.

Soient A & B, & qu'entre iceux tombent les moyens C, D, continuellement proportionaux, & ſoit comme A à B, ainſi E à F. Ie dis qu'il tombera autant de nombres moyens continuellement proportionaux entre E & F, qu'entre A & B.

Car ayant pris G, H, I, K, les plus petits en la raiſon de A à C, & egaux en nombre à A. C, D, B: en 2. 8.

raiſon egale, comme A ſera à B : & partant comme
q 5. 8. E à F, ainſi G à k : q parquoy G & k, eſtans premiers entr'eux, puis qu'ils ſont les extremes
x 23. 7. des plus petits nombres, x & par ainſi les plus pe-
ſ 21. 7. tits de leur raiſon : ſ G meſurera E egalement, & k meſurera F. Donc autant de fois que G & k, meſurent E, F,

ſoient 2. autres	A, 24.	C, 36. D, 54. B, 81.
nombres L, M,	G. 8.	H, 12. I, 18. K, 27.
autant de fois	E, 32.	L, 48. M, 72. F, 108.

meſurez par H,

t 9. c. ſ. I : de ſorte que G, H, I, K, meſurent E, L, M, F, egalement chacun le ſien. t Parquoy G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils meſurent E,
v *Sbe.* 18. 7 L, M, F, ils produiront E, L, M, F : v donc E, L, M, F, ſeront en meſme raiſon que G, H, I, K : mais G, H, I, K, ſont continuellement proportionaux : donc E, L, M, F, le ſeront auſſi, & eſtans egaux en nombre à A, B, C, D, il tombera autant de moyens proportionaux entre E & F, qu'entre A & B. Partant ſi entre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Il eſt manifeſte de ceſte demonſtration, que non ſeulement il tombe autant de moyens proportionaux entre E & F, qu'entre A & B : mais auſſi que la proportion de E, L, M, F, eſt la meſme que de A, C, D, B, eſtant demonſtré que la proportion de E, L, M, F, eſt la meſme que celle de G, H, I, K, qui ſont en meſme raiſon que A, C, D, B, par la conſtruction : donc E, L, M, F, ſont auſſi en meſme proportion que A, C, D, B.

Il appert auſſi de ce Theoreme, qu'entre nom-

bres, en raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente, qu'il ne peut tomber vn nombre moyen proportionel. Car la raiſon double, és moindres nombres, eſtant trouuee entre le binaire & l'vnité, & la ſuperparticuliere entre nombres differens ſeulement de l'vnité; & la ſuperbipartiente entre nombres, dont la difference eſt le binaire.

Si entre deux nombres en raiſon double, ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente tombe vn moyen proport. [x] *Il en tombera auſſi entre le binaire & l'vnité, ou entre les nombres differens de l'vnité ſeulement, ou du binaire, ſçauoir entre deux nombres plus petits, qui ont la meſme raiſon qu'iceux, ce qui ne ſe peut faire. Car il eſt manifeſte qu'entre l'vnité & le binaire, n'y entre deux nombres differens de l'vnité ſeulement, ne tombe aucun nombre, tant s'en faut qu'il y puiſſe tomber vn nombre moyen proportionel.* x 8. 8.

Semblablement, entre deux nombres differens du binaire, tombe ſeulement vn nombre qui differe de l'vn & de l'autre de l'vnité, lequel nous demonſtrerons ne pouuoir nullement eſtre moyen proportionel entre iceux, en ceſte maniere.

Que AB, & CD, different entr'eux du binaire (ſoit que CD, ſoit vnité, & AD, ternaire ou non,) entre leſquels tombe EF, moindre que AB, de l'vnité, & plus grand que CD, de l'vnité. Ie dis que EF, n'eſt moyen proportionel entre AB, CD.

Car ſi on dict que

AB, eſt à EF, comme EF, à CD: eſtant AG, egal à EF, de AB, afin que le re-

A.. 2 G. B A..... 6 G. B
E.H.F E.....) H.F
C. D C.....) D

ſte ſoit l'vnité de GB, & de EF, EH, egal à CD; afin qu'il reſte auſſi l'vnité HF. Pareillement, comme le tout AB, ſera au tout EF, ainſi le retranché AG, au retranché EH; AG, EH, Eſtans egaux à EF, CD, par la conſtruction. Donc le reſte GB, ſera auſſi au reſte HF, c'eſt à dire l'vnité à l'vnité, comme le tout AB, au tout EF, le plus grand au plus petit. Ce qui eſt abſurde. Donc EF, n'eſt moyen proportionel entre AB, & CD.

Donc entre nombres de raiſon triple, ne peut
8. 8. tomber vn moyen proportionel: Autrement il en tomberoit auſſi entre 3. et 1. qui ſont les plus petits de la raiſon triple, qui different entr'eux du binaire, ce que nous venons de demonſtrer ne ſe pouuoir faire.

Semblablement, entre les nombres de raiſon quin-
y 8. 8. tuple ne peut tomber vn moyen proportionel: Car il en tomberoit auſſi vn moyen proport. entre 5. & 1. plus petits nombres de la raiſon quintuple. Ce que nous monſtrerons ne ſe pouuoir faire. Car qu'il en tombe vn moyen proport. entre le quinaire AB, & l'vnité C, ſçauoir le binaire ou le ternaire D. En ſorte que AB, ſoit à D, comme D à C: & en changeant C à D, comme D à AB: & d'autant que l'vnité C, meſure D: D, meſurera auſſi AB. Mais le binaire, ou le ternaire D, meſure auſſi le ſenaire AE, donc D, meſure auſſi le tout AE, & le retranché AB. [z] Et partant D, meſurera auſſi BE, vnité reſtante: ce qui eſt abſurde.

A.....5 B. E
D..2 D...3
C.

z 11. c. ſ.

Derechef, qu'il tombe, s'il ſe peut faire, vn moyen proportionel entre le quinaire AB, & l'vnité C, ſçauoir D, quaternaire. Donc nous monſtre-

rons comme auparauant, que D, *mesure le quinaire* AB: *mais le quaternaire* D, *mesure aussi le quaternaire* AE: *donc* D, *mesure le tout* AB, *& le retranché* AE, *& partant le nombre* D, *mesurera aussi l'vnité restante* EB: *Ce qui est absurde. Donc entre 5. & l'vnité ne tombera aucun moyen proportionel, ny entre quelconques nombres en raison quintuple.*

A....4 E.B
D....4
C.
II. *c.f.*

PROBLEME 7. PROP. 9.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, & entre iceux tombent des nombres moyens continuellement proportionaux; autant qu'il tombera de nombres moyẽs, continuellement proportionaux entr'eux, il en tombera autant entre vn chacun d'iceux & l'vnité.

Soient deux nombres A & B, premiers entr'eux, entre lesquels tombent C D, continuellement proportionaux. Ie dis qu'il en tombera autant entre A, & l'vnité de continuellement proportionaux, & autant entre B, & l'vnité, qu'entre A & B. 35. 7.

Car ayant posé l'vnité, soient trouuez E, F, les plus petits en la raison de A à C: & soiẽt pris les 3. G, H, I, en la mesme raison, puis les 4. K, L, M, N: & ainsi de suitte, iusques à ce que les nombres pris soient autant qu A, C, D, B. Or A, B, extremes, estans premiers entr'eux, A, C, D, B, seront les 2. 8. 1. 8.

plus petits en la raiſon de E à F : mais K,L,M N, qui ſont autant que A, C, D, B, ſont auſſi les plus petits en la meſme raiſon, par la conſtruction, donc k,L,M,N, ſont egaux à A, C, D,B, chacun au ſien, à ſçauoir κ à A, & N à B, afin qu'il n'y en aye de plus petits, que les plus petits.

A,8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnité 1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K,8. L,12. M,18. N,27.

Mais (comme il eſt manifeſte par la demonſtration de la 2. Propoſition 8.) E, multipliant ſoy-meſme, a produict G, & multipliant G, a produit κ; E, meſurera G par E, & G meſurera k auſſi par E: mais l'vnité meſure E par E : donc l'vnité meſure E, & E meſure G, & G meſure k egalement, & partant l'vnité eſt meſme partie de E, & E de G, que G de κ. Partant l'vnité & E, G, K, ſont continuellement proportionaux: ſemblablement l'vnité & F, I, N, ſont continuellement proportionaux. Donc tant E, G, κ, que F, I, N, auec l'vnité eſtans egaux en nombre à K, L, M, N, il tombera autant de nombres continuellement proportionaux entre l'vnité & k, ou A ſon egal; & entre l'vnité & N, ou B ſon egal: qu'entre A & B. Donc ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 7. c. ſ.
b 5. 6 ſ.
20. d.

THEOREME 8. PROPO. 10.

Si entre deux nombres & l'vnité tombent des nombres continuellement proportionaux, autant qu'il en tombe de cõtinuellement

tinuellement proportionaux entre chacun d'iceux & l'vnité, il en tombera autant de continuellement proportionaux entr'iceux.

Soient deux nombres A, B, & l'vnité C, & qu'entre l'vnité C & A tombent quelques nombres continuellement proportionaux D, & E, & entre l'vnité C & B, tombent F, G. Ie dis qu'il en tombera autant de continuellement proportionaux entre A & B.

Car soit H produict de D en F, & I produict de D en H, & K produict de F en H. C estant à D, comme D à E, & D à E, comme E à A: [A,8. I,12. k,18. B,27. / E,4. H,6. G,9. / D,2. F 3. / C,1.]
[c] & C mesurant D par les vnitez qui sont en D: D mesurera E, aussi par les vnitez qui sont en D, & E mesurera A, aussi par les vnitez qui sont en D [d] donc D par soy, produira E, & E par D, produira A. Semblablement F par soy, produira G, & G par F produira B. [c 5. c.f.] [d 9. c.f.]

D'autant donc que D multipliant D, & F produict E & H, [e] comme D à F, ainsi E à H: par mesme raison, puis que F, multipliant F & D, a faict H & G, comme D à F, ainsi H à G: Donc E, H, G, seront continuellement porportionaux. [e 17. 7.]

Derechef, D multipliant E & H, a faict A & I, donc cõme E [f] sera à H, ainsi A à I, & puis que D & F multiplians H, font I & K, [g] comme D sera à F, ainsi I à K. [h] Semblablement K sera à B, comme H à G. Donc A, I, k, B, sont continuellement proportionaux, partant entre A & B, tombent deux. [f 17. 7.] [g 18. 7.] [h 17. 7.]

moyens continuellement proportionaux, ſçauoir autant qu'entre A & l'vnité, ou B & la meſme vnité. Donc ſi entre deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 9. PROP. 11.

Entre deux nombres quarrez il y a vn nombre moyen proportionel: & le quarré eſt au quarré en raiſon doublee, du coſté au coſté.

Soient deux nombres quarrez A, B, & leurs coſtez C, D. Ie dis qu'entre A & B, il y a vn nombre moyen proportionel: & que le quarré A, eſt au quarré B, en raiſon doublee du coſté C, au coſté D.

Car ſoit E, produict de C en D, ou de D en C: D'autant que C par ſoy-meſme a faict A, [i] nombre quarré, & par D a faict E, [k] comme C A, 9. E, 21. B, 49. eſt à D, ainſi A à E. C, 3. D, 7. Derechef, puis que D multipliant C a faict E, & multipliant ſoy-meſme a faict B nombre quarré, comme C ſera à D, ainſi E à B. Donc A, E, B, ſeront continuellement proportionaux en la raiſon des coſtez C & D. Donc entre A & B, tombe vn nombre moyen proportionel E.

i 18. d.
k 17. 7.
18. d.
17. 7.

Secondement puis que A, E, B, ſont continuellement proportionaux, [l] A 1. ſera à B 3. en raiſon doublee de A 1. à E 2. qui eſt la meſme raiſon du coſté C, au coſté D. Donc entre 2. nombres quarrez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

l 26. d. 7. ou 10. p. 5.

THEOREME 10. PROP. 12.

Entre deux nombres cubes, il y a deux nombres moyens proportionaux : Et le cube eſt au cube en raiſon triplee, du coſté au coſté.

Soient deux nombres cubes A & B, & leurs coſtez C, D. Ie dis qu'entre A & B, tombent deux moyens continuellement proportionaux : & que le cube A, eſt au cube B, en raiſon triplee du coſté C, au coſté D.

Car que C ſe multipliant faſſe E, & D ſe multipliant faſſe F ; & C, D ſe multiplians l'vn l'autre faſſent G, & multiplians G, faſſent H, I.

D'autant que C multipliant C, & D a faict E, G, [m] comme C ſera à D, ainſi E à G. Semblablemẽt puis que D multipliant D, C, a fait G & F, [n] comme C eſt à D, ainſi G à F ; partant E, F, G, ſont continuellement proportionaux en la raiſon de C à D.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

m 17. 7.
n 17. 7.

Derechef, d'autant que C multipliant E, a fait A cube, & multipliant G à faict H par la conſtruction [o] A ſera à H, comme E à G, c'eſt à dire comme C à D : ſemblablement puis que par la conſtruction D multipliant G, a faict I, & multipliant F a faict [p] B cube, I ſera [q] à B, comme G à F, c'eſt à dire comme C à D. [r] Mais H eſt auſſi à I, comme C à D, d'autant que C, D, multiplians

19. d. o 17. 7.
p 19. d.
q 17. 7.
r 18. 7.

G, ont faict H & I : donc A, H, I, B, ſont continuellement proportionaux en la raiſon de C à D. Donc entre les cubes A & B, tombent 2. moyens proportionaux H & I.

Secondement, d'autant que A, H, I, B, ſont continuellement proport. A 1. ſera à B 4. en raiſon triplee de A 1. à H 2. c'eſt à dire du coſté C, au coſté D: car C eſt à D, comme A à H. Donc entre deux cubes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 11. PROP. 13.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que chacun multipliant ſoy-meſme en faſſe quelques-vns, les produicts d'iceux ſeront proportionaux. Et ſi les nombres pris au commencement multiplians leurs produicts en font quelques-vns, iceux faicts ſeront auſſi proportionaux, & touſiours cela aduiendra enuiron les extremes.

Soient A, B, C, continuellement proportionaux, leſquels multipliez chacun par ſoy-meſme, faſſent D, E, F, & que A, B, C, multiplians derechef D, E, F, faſſent G, H, I, & ainſi de ſuitte. Ie dis que D, E, F, & G, H, I, ſont contin. proport.

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.

Car que A & B, ſe multiplians l'vn l'autre faſ-

sent N, & B, C fassent O; puis A multipliant N, E fasse P, & Q, & B, multipliant O, F, fasse R, S.

D'autant que A, multipliant A, & B, a faict D, N, [f] comme A à B, ainsi D à N, par la mesme raison, puis que B multipliant A & B, a faict N, E, comme A est à B, ainsi N à E: donc D, N, E, sont continuellement proportionaux en la raison de A à B. f 17.7.

Derechef, puis que B, multipliant B, & C, a faict E & O, [t] comme B à C, ainsi E à O: semblablement, puis que C multipliant B, & C, a faict O & F, comme B à C, ainsi O à F. Partant E, O, F, sont continuellement proportionaux en la raison de B à C, ou de A à B: donc D, N, E, estans continuellement proportionaux en la mesme raison: en raison egale comme D à E, ainsi E à F: donc D, E, F, sont continuellement proportionaux. t 17. 7.

En apres, puis que A, multipliant D, N, E, a faict G P Q; [u] G, P, Q, seront en mesme raison que D, N, E: c'est à dire que A à B. Et puis que A & B multiplians E, ont faict Q H, [x] comme A à B, ainsi Q à H. Donc G, P, Q, H, sont proportionaux, en la raison de A à B: semblalement, puis que B multipliant E, O, F, a faict H, R, S, [y] H, R, S, seront proportionaux en la raison de E, O, F: c'est à dire de B à C, ou de A à B. u *Sch.* 18.7 x 18. 7. y *Sch.* 18.7

Finalement, puis que B, C, multiplians F, ont faict S, I, [z] S sera à I, comme B à C, ou A à B. Partant H, R, S, I, sont proportionaux en la raison de A à B: donc puis que G, P, Q, H, sont aussi en continuelle proportion en la raison de H, R, S, I, en raison egale, comme G sera à H, ainsi H à I. z 18. 7.

Partant G, H, I, ſont continuellement proportionaux. Donc s'il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 12. PROPO. 14.

Si vn nombre quarré meſure vn nombre quarré, auſſi le coſté meſurera le coſté: Et ſi le coſté meſure le coſté, auſſi le quarré meſurera le quarré.

Soit A nombre quarré, dont le coſté eſt C, meſurant B, nombre quarré, dont le coſté eſt D. Ie dis que C, coſté de A, meſurera D, coſté de B.

Car que C, D, ſe multiplians l'vn l'autre, faſſent E. d'autant que C, multipliant C D, a faict A, E, comme C ſera à D, ainſi A à E: ſemblablement, puis que D multipliant C, D, a faict E, B, E ſera à B, comme C à D: c'eſt à dire comme A à E: donc A, E, B, ſont continuellement proport. en la raiſon de C à D. Mais A 1. meſure B dernier: donc A 1. meſurera auſſi E 2. Partant puis que C eſt à D, comme A à E, & A meſure E: donc le coſté C, meſurera le coſté D.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2, D, 6.

a 17. 7.
b 17. 7.
7. 8.

Secondement, que le coſté C meſure le coſté D. Ie dis que le quarré A, meſure le quarré B. Car comme il a eſté demonſtré, A, E, B, ſont continuellement proport. en la raiſon de C à D: mais C meſure D: donc A meſurera E, & E meſurera B. donc A meſurera auſſi B. Partant ſi vn nombre quarré, &c. Ce qu'il faloit demonſtrer.

c 11. 8.
d 11. c. 8.

THEOREME 13. PROP. 15.

Si vn nombre cube, meſure vn nombre cube; auſſi le coſté meſurera le coſté: Et ſi le coſté meſure le coſté, auſſi le cube meſurera le cube.

Soit A, nombre cube, dont le coſté eſt C, meſurant B nombre cube, dõt le coſté eſt D. Ie dis que C coſté de A, meſurera D, coſté de B.

Car que C, D, chacun multipliant ſoy-meſme faſſe E, F, & ſe multiplians l'vn l'autre faſſent G: & finalement multiplians G, faſſent H, I. D'autant que comme il appert par la demonſtration de la 12. Prop. 8. tant E, G, F, que A, H, I, B, ſont contin. proport. en la raiſon de C à D: Mais A 1. meſure B dernier, [c] A 1. meſurera auſſi H 2. donc A eſtant à H, comme C à D: C coſté, meſurera auſſi D coſté.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

c 7. 8.

Maintenant que le coſté C, meſure le coſté D. Ie dis que le cube A, meſurera le cube B. Car par les raiſons cy-deſſus, comme C à D, ainſi A à H; A, H, I, B, eſtans contin. proport. en la raiſon de C à D, comme il eſt monſtré en la 12. Propoſition 8. Parquoy C, coſté meſurant le coſté D; auſſi A meſurera H: mais H meſure I, & I meſure le cube B, (eſtans cont. proport.) [f] donc A meſurera auſſi le cube B: donc ſi vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

f 11. c. 8.

THEOREME 14. PROP. 16.

Si vn nombre quarré ne meſure vn nombre quarré, auſſi le coſté ne meſurera le coſté; Et ſi le coſté ne meſure le coſté, auſſi le quarré ne meſurera le quarré.

Soient les nombres quarrez A & B, & leurs coſtez C & D; & que A quarré, ne meſure le quarré B. Ie dis que le coſté C, ne meſurera auſſi le coſté D.

Car, s'il eſt poſſible, que le coſté C, meſure le coſté D: & donc le quarré A, meſurera le quarré B, ce qui eſt abſurde: car il eſt poſé ne le meſurer: parquoy C coſté, ne meſurera le coſté D.

A, 16. B, 81. C, 4. D, 9.

g 14. 8.

Maintenant: Ie dis que ſi le coſté C, ne meſure le coſté D, qu'auſſi le quarré A, ne meſurera le quarré B. Car ſi A eſt dict meſurer B; le coſté C meſurera auſſi le coſté D, ce qui eſt abſurde: car il eſt poſé ne le meſurer. Partant le quarré A, ne meſurera le quarré B. donc ſi vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

14. 8.

THEOREME 15. PROP. 17.

Si vn nombre cube ne meſure vn nombre cube, auſſi le coſté ne meſurera le coſté; Et ſi le coſté ne meſure le coſté, auſsi le cube ne meſurera le cube.

Soient les nombres cubes A & B, & leurs costez C & D, & que A ne mesure B. Ie dis que costé le C, ne mesure le costé D.

Car que le costé C mesure le costé D, s'il est possible [h] Donc le cube A, mesurera le cube B, ce qui est absurde : car il est posé ne le mesurer: Donc C ne mesure D. h 15. 8. A,8. B,27. C,2. D,3.

Maintenant que le costé C, ne mesure le costé D, Ie dis que le cube A, ne mesurera le cube B. Car si A, est dict mesurer B ; [i] le costé C mesurera aussi le costé D, ce qui est absurde ; Car il est posé ne le mesurer. Donc le cube A, ne mesure le cube B. Parquoy si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. i 15. 8.

THEOREME 16. PROP. 18.

Entre deux nombres plans semblables, il y a vn nombre moyen proportionel; Et le plan est au plan en raison doublee des costez homologues, ou de semblable raison.

Soient les nombres A, B, plãs semblables, & les costez de A soient C, D, & les costez de B soient E, F : ([k] lesquels costez sont proport.) de sorte que C, D, se multiplians font A, & E, F, font B, & comme C est à D, ainsi E est à F. Ie dis qu'entre A & B, tombe vn moyen proportionel, & que le plan A, est au plan B, en raison doublee des costez homologues CE, DF. k 21. d. 7.

Car que DE, se multiplians l'vn l'autre fassent G. D'autant que comme C est à D, ainsi E à F, en changeant C sera à E, comme D à F: & puis que D multipliant C, E, a faict A & G, [l] A sera à G, comme C à E: c'est à dire comme D à F. Et puis que E multipliant D, F, a faict G & B, [m] G sera à B, comme D à F. Donc A, G, B, sont continuellement proportionaux en la raison de C à E, ou de D à F: donc entre A & B, il y a vn moyen proportionel G.

A, 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

l 17. 7.

m 17. 7.

Mais d'autant que A, G, B, sont continuellement proportionaux. A [n] est à B, en raison doublee de A à G, c'est à dire de C à E, ou de D à F. Donc le plan A, est au plan B, en raison doublee de C à E, ou de D à F, costez de mesme raison. Donc entre deux nombres plans, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

n 26. d. 7.

THEOREME 17. PROP. 19.

Entre deux nombres solides semblables, il y a deux nombres moyens proportionaux; Et le solide est au solide en raison triplee, du costé homologue au costé homologue, ou de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A, B, les costez de A soient C, D, E, & de B soient F, G, H: [o] C, D, E, sont proportionaux à F, G, H, sçauoir comme C à D, ainsi F à G, & comme D à E, ainsi G à H. Ie dis qu'entre A & B, se trouuent deux

o 21. d.

moyens proportionaux, & A eſt à B, en raiſon triplee des coſtez homologues C, F, ou D, G, ou E, H.

Car que CD, ſe multiplians l'vn l'autre faſſent I; & F, G faſſent k, & D, F faſſent L: finalement E, H multiplians L, faſſent M, N. D'autant donc que C, D, E, ſont proport. à F, G, H, en changeant ils ſeront auſſi proport. ſçauoir comme C à F, ainſi

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4 G, 6. H, 10.

à G, & E à H. Et puis que D multipliant C, F, a fait I, L, [p] comme C à F, ainſi I à L. Pareillement puis que F multipliant D, G, a faict L & k; comme D eſt à G, ainſi L à k. Parquoy I, L, k, ſont contin. proportionaux en la raiſon de C à F, ou de D à G, ou de E à H. p 17. 7.

Et d'autant que A ſolide, eſt produict de la mutuelle multiplicatiõ des coſtez C, D, E: & I eſt faict de C en D, ou de D en C; E multipliant I fera A: ſemblablement B ſolide, eſtant faict de la mutuelle multiplication de F, G, H, & k de F en G, ou de G en F: H multipliant k fera B.

Parquoy puis que E multipliant I & L, a faict A & M; [q] A ſera à M, comme I à L: c'eſt à dire comme C à F, ou D à G, ou E à H. Par meſme raiſon, puis que H multipliant L, k, a faict N & B, [r] N ſera à B, comme L à k: c'eſt à dire comme C à F, ou D à G, ou E à H. [s] Mais M eſt à N, comme E à H, puis que E, H multiplians L, ont faict M & N; donc A, M, N, B, ſont continuellement proportionaux en la raiſon de C à F, ou de D à G, ou E q 17. 7. r 17. 7. s 18. 7.

à H. Partant entre A & B ſolides ſemblables, tombent deux nombres moyens continuellement proportionaux.

t 10. d. 5. ou 26. d. 7 Secondement, puis que A, M, N, B, ſont continuellement proportionaux, t A eſt à B, en raiſon triplee de A à M: mais A eſt à M, comme C à F, ou D à G, ou E à H: donc A ſera à B en raiſon triplee de C à F, ou de D à G, ou de E à H, coſtez de ſemblable raiſon. Donc entre deux ſolides, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 18. PROP. 20.

Si entre deux nombres tombe vn nombre moyen proportionel: iceux nombres ſeront plans ſemblables.

Soient deux nombres A & B, entre leſquels tombe vn moyen proportionel C. Ie dis que A & B ſont plans ſemblables.

v 21. 7. Car ayant pris D, E, les plus petits en la raiſon de A, C, B; v D & E, meſureront egalemét A & C. Qu'ils les meſurent par F, ils meſureront auſſi egalement C, B, en la meſme raiſon: que ce ſoit par G. x donc F multipliant D, & E, produira A & C, y & G multipliant D E, produira C, B.

A, 18. C, 24. B, 32.
D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

x 9. c. ſ.
y 9. c. ſ.

z 17. 7. Dautant donc que E multipliant F & G, a produict C, B, z comme C ſera à B, ainſi F à G: mais comme C à B, ainſi eſtoit D à E. donc D ſera à E, comme F à G; & en permutant comme D à F, ain-

si E à G : mais d'autant que F multipliant D, a faict A : A sera nombre plan, & ses costez seront D F. Semblablement puis que G multipliant E, a faict B : B sera aussi plan, duquel les costez seront E, G. Et iceux costez estans monstrez proportionaux, sçauoir comme D à F, ainsi E à G ; [a] A & B seront plans semblables. Donc si entre deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. a 21.d. 7.

THEOREME 19. PROP. 21.

Si entre deux nombres tombent deux moyens proportionaux ; iceux seront solides semblables.

Soient A & B, entre lesquels tombent deux moyens proportionaux C & D. Ie dis que A, & B, sont nombres solides semblables.

Car [b] soient pris E, F, G, les plus petits en la raison de A, C, D, B. D'autant qu'entre E & G, tombe vn moyen proportionel F, [c] E & G seront plans semblables. Soient H I, costez de E & k, L de G. Et d'autant que E, F, G, mesurent A, C, D, egalement [d] estans les plus petits en la mesme raison, qu'ils les mesurent par M. [e] Et puis que E, F, G, mesurent aussi C, D, B, par la mesme raison, que ce soit par N, de sorte que M multipliant E, F, G, face A, C, D : & N, multipliant aussi E, F, G, face C, D, B. Or E est produict de ses costez H, I, multipliez l'vn par l'autre : & G est produict des costez k & L. Donc A est produict de H, I, M, entr'eux, &

b 2. 8.
c 20. 8.
A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. k, 3. L, 3. N, 3.
d 21. 7.
e 21. 7.

h 21.d.7. B de k L,N: partant[h] A eſt nombre ſolide, ayant les coſtez H,I,M,& B auſſi ſolide, ayant les coſtez k,L,N: Mais puis que M & N multiplians F, font
i 18. 7. C & D, comme il eſt monſtré,[i] C ſera à D, com-
k 17. 7. me M à N: mais[k] C,D, ſont en meſme raiſon que E,F, puis que N multipliant E,F, a faict C, D, & auſſi E,F, ſont en meſme raiſon que H,k, ou I, L. Donc H ſera à k, & I à L, comme M à N, & en changeant H ſera à I, comme k à L, & I à M, comme L à N: donc les coſtez H, I, M, ſont proportionaux aux coſtez k, L, M.
l 21.d.7. [l] Partant les nombres A & B ſont ſolides ſemblables: Donc ſi entre deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 20. PROPO. 22.

Si trois nombres ſont continuellement proportionaux, & que le premier ſoit quarré; Auſſi le troiſieſme ſera quarré.

Soient trois nombres A,B,C, continuellement proportionaux, & que A 1. ſoit quarré. Ie dis que C 3. ſera auſſi quarré.

m 20. 8. Car puis qu'entre A & C, tombe vn moyen proportionel: [m] A & C ſeront plans ſemblables; partant A eſtant quarré, C ſemblable à iceluy, ſera auſſi quarré: Donc s'il y a trois nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

B,9.B,54. C,324.

THEOREME 21. PROP. 23.

Si quatre nombres ſont continuellement proportionaux, & que le premier ſoit cube, auſſi le quatrieſme ſera cube.

Soient quatre nombres A, B, C, D, continuellement proportionaux, & que A 1. ſoit cube. Ie dis que D 4. ſera auſſi cube.

Car puis qu'entre A & D, tombent deux moyens proportionaux B & C, [a] A & D ſeront ſolides ſemblables. Partant, A eſtant cube, [b] ſemblable à iceluy, ſera auſſi cube. Donc ſi quatre nombres ſont continuellement, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [a] 21. 8.

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125.

SCHOLIE.

D'autant que comme nous auons dict à la 21. Definition du 7. liure, Deux nombres plans ou ſolides peuuent eſtre ſemblables, pourueu que deux coſtez, quels qu'ils ſoient de l'vn, ſoient proport. à deux de l'autre, quels qu'ils puiſſent eſtre, encore que deux quelconques coſtez que l'on voudra de l'vn, ne ſoient proportionaux à deux quels que l'on voudra de l'autre, l'on pourra nier à bon droict, que de deux nombres plans ſemblables, ſi l'vn eſt quarré, que l'autre ſoit auſſi quarré, & de deux nombres ſolides ſemblables, ſi l'vn eſt cube, l'autre ſoit auſſi cube, ce qui eſt neantmoins accordé en ces deux demonſtrations precedentes. Car ces deux

nombres 36. & 64. eſtans propoſez ſemblables, il ſuffit qu'à deux coſtez du 1. 3. & 12. on trouue deux coſtez du dernier proportionaux, comme 4. & 16. d'où il s'enſuit que encore que le premier ſoit quarré, ayant deux coſtez egaux 6. & 6. quelqu'vn pourroit douter, meſme nier, que l'autre euſt auſſi deux coſtez proportionaux, aux deux coſtez egaux du premier, c'eſt à dire auſſi egaux entr'eux, & partant eſtre quarré. Comme il eſt auſſi manifeſte de ces deux coſtez du premier 4. & 9. ou 2. ou 18. auſquels ne correſpondent deux autres coſtez au dernier proport. à iceux.

Donc ſi à ces deux coſtez du premier, l'on ne trouue deux coſtez au dernier proportionaux, encore bien que ces nombres ſoient ſemblables, l'on ne ſera tenu d'accorder ſans demonſtration qu'il y puiſſe auoir deux coſtez au dernier proportionaux à ces deux 6. & 6. & auſſi egaux entr'eux. Ce qu'il faut auſſi entendre des ſolides. C'eſt pourquoy nous auons icy mis ces deux demonſtrations de Clauius.

Soient trois nombres A, B, C, continuellement proportionaux, & que A premier ſoit quarré. Ie dis que C 3. ſera quarré.

21. 7. *Car ayant pris trois nombres D, E, F, les plus petits en la raiſon de A à B, & de B à C: [f] D meſurera A, & F meſurera C egalement: & les extremes D, F [g] eſtans quarrez, & A eſtant quarré par l'hypotheſe, il tombera entre A & D quarrez vn moyen proportionel comme G. Mais d'autant qu'en raiſon egale, comme A à C,*

[f] 1. cor. 2. 8

A, 36. B, 48. C, 64.
G, 18. H, 32.
D, 9. E, 12. F, 16.
L, 64. K, 8. J, 4.

A à C, ainſi D à F: & en permutant comme A à D, ainſi C à F. Il tombera auſſi vn moyen proportionel entre C & F, comme H. ° *Donc F 1. meſurant C dernier, il meſurera auſſi H ſecond. Mais ayant pris J, coſté du quarré F, que J meſure le nombre K, autant de fois que F meſure H, en ſorte que H à F, et K à I, ait meſme raiſon multiple. Et ſoit pareillement L quarré de K: partant puis que le q. L, eſt au q. F, en raiſon doublee du coſté K au coſté I: c'eſt à dire de H à F; mais C à F, eſt auſſi en raiſon doublee de la meſme raiſon de H à F, par la definit. puis qu'en changeant C, H, F, ſont auſſi proport. L ſera à F, comme C à F: & partant L & C ſont egaux. Donc L eſtant q. par la conſtruction C ſera auſſi quarré.* ° 7. 8. 11. 8.

Soient 4. nombres A, B, C, D, continuellement proport. & que A 1. ſoit cube. Ie dis que D 4. ſera cube auſſi.

Car ayant trouué 4. nombres E, F, G, H, les plus petits en la raiſon de A à B, de B à C, & de C à D; p *E meſurera A, & H meſurera D egalement: &* q *E, H extremes des quatre plus petits, q eſtans cubes, & A eſtant auſſi cube par l'hypotheſe, entre* p 21. 7. q Corell. 1. 2. 8.

A, 64.	*B*, 160.	*C*, 400.	*D*, 1000.
K, 32			*M*, 500.
J, 16.			*L*, 250.
E, 8.	*F*, 20.	*G*, 50.	*H*, 125.
P, 1000.	*O*, 10.	*N*, 5.	

12. 8.

E, A cubes, tomberont deux moyens propart. leſquels ſoient I, K: mais d'autant qu'en raiſon egale, comme A à D, ainſi E à H, & en changeant comme A à E, ainſi D à H: il tombera auſſi entre E, D, 8. 8.

deux moyens proport. qui soient L, M. Donc puis
r 8. 8. que H premier, mesure D dernier, il mesurera aussi
L second.

Apres, ayant pris N, costé du cube H, que N mesure autant de fois O, que H mesure L, en sorte que
f 12. 8. L soit à H, & O à N, en mesme raison multiple. Soit aussi P cube de O: partant puis que le cube P, est au cube H, en raison triplee du costé O, au costé N, c'est à dire de L à H: & D est aussi à H, en raison triplee de L à H, par la definit. puis qu'en changeant D, M, L, H, sont aussi proport. P sera à H, comme D à H. Partant P, D seront egaux. Donc P estant cube par la construction, D sera cube aussi. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 22. PROP. 24.

Si deux nombres sont en mesme raison l'vn à l'autre, que nombre quarré à nombre quarré; & que le premier soit quarré, le second sera aussi quarré.

Soient deux nombres A & B, lesquels ayent mesme raison l'vn à l'autre, que le nombre quarré C, au nombre q. D, & que A premier soit quarré. Ie dis que B second est aussi quarré.

t 11. 8. Car d'autant que C & D sont quarrez, t il tombera entr'eux vn moyen proportionel, lequel soit
y 8. 8. E. y Il en tombera donc aussi vn entre A & B, qui sont en la mesme raison, lequel soit F. D'autant donc que les trois nombres A, F, B, sont continuel-

A, 36. F, 48. B, 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

lement proportionaux, & A premier, eſt quarré,
[a] B troiſieſme ſera auſſi quarré. Partant ſi deux x 22. 8.
nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte de ce qui eſt demonſtré cy-deſſus, que la proportion de tout nombre quarré, à quelconque nombre non quarré que ce ſoit, ne peut eſtre exhibee en deux nombres quarrez. Car ſi ainſi eſtoit, [y] les deux premiers nombres qui ont la meſme raiſon que les quarrez de la proportion exhibee ſeroient auſſi quarrez, puis que le premier eſt poſé quarré. Ce qui eſt abſurde, car le ſecond eſt poſé non quarré. D'où s'enſuit que les nombres qui ſont en raiſon double, ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Car tous ces nombres doubles icy, 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. ſeroient quarrez. Car le premier 4. eſtant quarré, [z] 8. ſeroit auſſi quarré, & auſſi 16. & 32. &c. ce qui eſt impoſſible. Car entre 4. & 8. entre 8. & 16. entre 16. & 32. &c. tomberoit vn moyen proportionel s'ils eſtoient quarrez: veu que toutefois il eſt monſtré au Scholie de la 8. Propoſition de ce liure, qu'entre aucuns nombres de proportion double, il ne peut tomber de moyen proportionel. y 24. 8. z 24. 8.

Semblablement, les nombres qui ſont en raiſon quintuple, n'auront meſme raiſon que nombre quarré à nombre quarré: car ſi ainſi eſtoit, [a] il tomberoit entr'eux vn moyen proport. Donc il en tomberoit auſſi vn moyen proport. entre 5. & 1. qui ſont les plus petits nombres en la raiſon quintuple: [b] mais nous auons monſtré le contraire. a 11. 8. b Sch. 18. 8

THEOREME 23. PROPO. 25.

Si deux nombres ont meſme raiſon l'vn à l'autre, qu'vn nombre cube à vn nombre cube, & que le premier ſoit cube, auſsi le ſecond ſera cube.

Soit A à B, comme le cube C au cube D, & que A premier ſoit cube. Ie dis que B ſecond, ſera auſſi cube.

c 12. 8. Car d'autant que A eſt à B, comme C à D: [c] mais entre C & D cubes, tombent deux moyens proportionaux,

8. 8. leſquels ſoient E & F. Donc entre A & B, tomberont auſſi deux moyens proportionaux, qui ſoient G & H. Donc d'autant que les quatre nombres A, G, H, B, ſont continuellement proportionaux, & A

A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

d 23. 8. 1. eſt cube, [d] B 4. ſera auſſi cube. Partant ſi deux nombres ont, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il eſt auſſi manifeſte, par ce qui eſt monſtré cy-deſſus, que la raiſon de quelconque nombre cube que ce ſoit, à quelconque nombre non cube que ce ſoit, ne ſe peut retrouuer en deux nombres cubes.

25. 8. Car ſi elle s'y retrouuoit, les deux premiers nombres ayans la meſme raiſon que les cubes de la proportion trouuee, ſeroient auſſi cubes, puis

que le premier eſt poſé cube. Ce qui eſt abſurde: car le ſecond eſt poſé non cube.

THEOREME 24. PROP. 26.

Les nombres plans ſemblables, ont meſme raiſon entr'eux, que nombre quarré à nombre quarré.

Soient les nombres A & B, plans ſemblables. Ie dis que A eſt à B, comme vn nombre quarré à vn nombre quarré.

Car puis que A & B ſont plans ſemblables, [c] il tombera entr'eux vn moyen proportionel, lequel ſoit C. [c] 18. 8.

Donc ayant pris les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raiſon de A, C, B, les extremes D & F ſeront quarrez: A, 20. C, 30. B, 45. D, 4. E, 6. F, 9. 1. *Corell.* 2. 8.

partant puis qu'en raiſon egale A eſt à B, comme D à F: il eſt manifeſte que A ſera à B, comme vn nombre quarré à vn nombre q. ſçauoir comme le nombre quarré D, au nombre quarré F. Donc les nombres plans ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Mais la conuerſe de cette Propoſition eſt vraye auſſi, laquelle nous demonſtrerons ainſi, priſe de Commandin.

Les nombres plans qui ont meſme proportion entr'eux, que nombre q. à vn nombre q. ſont plans ſemblables.

Que les nombres plans A, B, ayent meſme raiſon entr'eux que les quarrez C, D. Ie dis que A, B, ſont plans ſemblables.

f 11. 8. Car d'autant qu'entre les quarrez C, D, tombe vn moyen f proportionel : &

comme C eſt à D, ainſi A à A, 8. B, 18.

g 8. 8. B, g il tombera auſſi vn C, 16. D, 36.

moyen proportionel entre

h 20. 8. A & B, h Parquoy A & B, ſont plans ſemblables.

Il appert de cecy que les nombres plans, qui ne ſont ſemblables, n'ont pas meſme raiſon entr'eux, que nombre quarré à nombre quarré : car s'ils auoient meſme raiſon, ils ſeroient plans ſemblables, comme il eſt demonſtré : Ce qui eſt abſurde : Car ils ſont poſez non ſemblables.

THEOREME 25. PROPO. 27.

Les nombres ſolides ſemblables ont meſme raiſon entr'eux, qu'vn nombre cube à vn nombre cube.

Soient les nombres A & B, ſolides ſemblables. Ie dis que A eſt à B, comme vn nombre cube à vn nombre cube.

Car d'autant que A & B ſont ſolides ſemblables : i 19. 8. entre iceux il tombera deux moyens proportionaux, leſquels ſoient C & D. Et ayant pris les quatre nombres

E, F, G, H, les plus A, 16. C, 24. D, 36. B, 54.

petits en la raiſon E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

k *Coroll.* 1. 2. 8. de A, C, D, B, les extremes E, H ſeront cubes. Parquoy puis qu'en

raiſon egale A eſt à B, comme E à H, il appert que A ſera à B, comme le nombre cube E à vn autre nombre cube, à ſçauoir à H. Donc les nombres ſolides ſemblables ont meſme raiſon entr'eux que, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons apres Clauius icy la conuerſe de cette Propoſition.

Les nombres qui ſont l'vn à l'autre, comme nombre cube à nombre cube, ſont ſolides ſemblables.

Car que A & B ayent meſme raiſon entr'eux, que les cubes C & D. Ie dis que A, B ſont ſolides ſemblables. Car A eſtant à B, comme C à D : [l] & qu'entre C, D cubes, il tombe 2. moyens proport. [m] il en tombera auſſi 2. entre A & B. Donc A, B, ſont ſolides ſemblables.

l 12. 8.
m 8. 8. 21. 8.

De toutes ces choſes il eſt manifeſte, qu'aucuns nombres en raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente ne ſont plans ſemblables ou ſolides. Car s'ils eſtoient plans ſemblables, [n] il tõberoit vn moyen proport. entr'iceux. [o] Ce qui eſt abſurde. Ils ne ſeront auſſi ſolides ſemblables, ne pouuant tomber entr'iceux 2. moyens proport. car autrement il en tomberoit auſſi 2. [p] entre les plus petits de la meſme raiſon, ce qui ne ſe peut, eſtans ſeulement differens entr'eux de l'vnité ou du binaire, entre leſquels 2. moyens proportionaux ne peuuent tomber.

A, 16. B, 54.
C, 64. D, 216.

n 18. 8.
o *Sch.* 8. 8. 8. 8.
p *Sch.* 8. 8.

Ainſi, deux quelconques nombres premiers ne ſont plans ſemblables ou ſolides, ne pouuans auoir les coſtez proportionaux. Car quelconque nombre plan, qui eſt nombre premier, a ſeulement pour coſtez ſoy & l'vnité, bien qu'improprement.

Comme ces nombres plans 19. & 23. ont pour coſtez 1. & 19. 1. & 23. eſtans produicts de la multiplication d'iceux coſtez, leſquels ne ſont proportionaux comme il appert. Mais quelconque nombre ſolide, eſtant auſſi nombre premier, a ſeulement deux vnitez pour coſtez, & ſoy-meſme. Comme ces ſolides 29. & 47. ont pour coſtez 1. 1. 29. & 1. 1. 47. eſtans produicts de la multiplication d'iceux; or il eſt manifeſte qu'iceux ne peuuent eſtre auſſi proportionaux.

Derechef, deux quelconques nombres premiers entr'eux, qui ne ſont quarrez ou cubes, (combien qu'aucun d'iceux ne ſoit premier) ne peuuent eſtre plans ſemblables ou ſolides: Car ſi deux tels nombres premiers entr'eux eſtoient dits plans ou ſolides ſemblables, [q] il tomberoit entr'eux vn ou deux moyens proportionaux: parquoy les deux extremes eſtans poſez premiers entr'eux, tous les trois ou quatre ſeroient premiers entr'eux, aucune commune meſure ne les pouuant meſurer, à cauſe des deux extremes premiers entr'eux. [r] Partant ils ſeront les plus petits continuellement proportionaux: Donc les deux extremes ſeront quarrez ou cubes. Ce qui eſt abſurde, n'eſtans quarrez ny cubes par l'hypotheſe.

A, 16. B, 54.
C, 64. D, 26.

q 18. & 19. 8.

r 23. 7.

12. 8.

Il s'enſuit de ces choſes, que ſi deux nombres ſont plans ou ſolides ſemblables, deſquels le moindre ſoit premier, le moindre meſurera le plus grand, autrement ils ſeroient premiers, & partant ne ſeroient plans ou ſolides ſemblables, comme il eſt demonſtré : ce qui eſt contre l'hypotheſe. 31. 7.

D'où il appert, que deux nombres premiers entr'eux, dont le moindre eſt premier, ne ſont plans ou ſolides ſemblables : car autrement le moindre meſureroit le plus grand, comme il a eſté dict ; parquoy meſurant auſſi ſoy-meſme, ils ne ſeroient premiers entr'eux, mais compoſez : ce qui eſt contre l'hypotheſe.

Dont il ſera facile de trouuer deux nombres plans ou ſolides non ſemblables. Car prenant deux nombres en raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente, ou deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, deſquels l'vn ny l'autre ne ſoit quarré ou cube, par ce qui a eſté dict, iceux ſeront plans ou ſolides non ſemblables.

Derechef, quelconques deux nombres, dont l'vn eſt quarré, l'autre non, ſont plans diſſemblables, comme A, 16. B, 54. C, 64. D, 216. 16. & 20. Car s'ils eſtoient plans ſemblables, [r] ils ſeroient entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré. [u] Donc 16. eſtant quarré, 20. ſeroit auſſi quarré. Ce qui eſt abſurde, eſtant poſé non quarré. [r] 26. 8. [u] 24. 8.

Semblablement, quelconques deux nombres, dont l'vn eſt cube, & l'autre non cube, ſont ſolides non ſemblables, comme 27. & 40. Car s'ils eſtoient ſolides ſemblables, ils ſeroient entr'eux, comme nombre cube à nombre cube. Donc 27. eſtant cube, 40. ſeroit auſſi cube : ce qui eſt abſurde ; car il eſt poſé non cube.

27. 8.
25: 8.

FIN DV HVICTIESME LIVRE
des Elements d'Euclide.



LIVRE NEVFIESME
DES ELEMENTS
D'EVCLIDE.

THEOREME 1. PROP. 1.

Si deux nombres plans ſemblables ſe multiplians l'vn l'autre en produiſent quelqu'vn; Le produict ſera quarré.

SOIENT deux nombres plans ſemblables A, B, & que A multipliant B, ou B multipliant A, faſſe C. Ie dis que C eſt nombre quarré.

Car ſoit D produict de A, par ſoy-meſme, D ſera nombre quarré. Donc d'autant que A multipliant A, & B, a produict D & C, [x] comme A ſera à B, D ſera à C. Mais entre A & B, plans ſemblables, [y] tombe vn moyen proportionel, [z] il en tombera donc auſſi vn entre D & C, lequel ſoit E, afin que D, C, E,

A, 6. B, 54. D, 36. E, 108 C, 324.

[x] 17. 7.
[y] 18. 8.
[z] 8. 8.

soient continuellement proportionaux : Mais D
a 22. 8. premier, est quarré par la construction ; [a] donc C 3. sera aussi quarré. Partant si deux nombres plans, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 2. PROP. 2.

Si deux nombres se multiplians l'vn l'autre, font vn quarré : iceux sont plans semblables.

Que les deux nombres A & B se multiplians l'vn l'autre, fassent C, nombre quarré. Ie dis que A, B, sont plans semblables.

Car soit D produict de A, par soy-mesme, D sera quarré. D'autant donc que A, multipliant A &
b 17. 7. & B, a produict D & C, [b] comme A est à B, ainsi
c 11. 8. D est à C. [c] Mais entre D & C nombres quarrez, il tombe vn moyen pro-
d 8. 8. portionel. [d] Donc entre
e 20. 8. A & B, tombera aussi vn moyen proportionel : [e] partant A & B sont plans semblables. Donc si deux nombres se multiplians, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A, 6. B, 54.
D, 36. C, 324.

THEOREME 3. PROP. 3.

Si vn nombre cube se multipliant soy-mesme, en produict quelqu'vn ; Le produict sera cube.

Que le nombre cube A, se multipliant soy-

meſme faſſe B. Ie dis que B eſt nombre cube.

Car ſoit pris C, coſté de A, cube, & ſoit D, le produict de C, par ſoy meſme, & par ainſi le cube A, ſera produict de C par D. D'autant donc que C multipliant ſoy meſme a faict D [f] iceluy C meſurera D, par C: [g] mais l'vnité meſure auſſi C par C. Donc l'vnité ſera meſme partie de C, denommee de C. que C de D: & partant, [h] comme l'vnité à C, ainſi C à D.

[f] 7. e. ſ. [g] 5. c. ſ. [h] 20. d.

Derechef, d'autant que C multipliant D, a faict A, [i] D meſurera A par C: Mais C meſure D par C. Donc C ſera meſme partie de D, que D eſt de A: [k] partant comme C à D, ainſi D à A: mais comme C eſt à D, ainſi l'vnité eſtoit à C. Donc comme l'vnité eſt à C, ainſi C à D, & D à A. Donc entre l'vnité & A, tombent deux moyens proportionaux C & D. [l]

A, 8.		
E, 16.	D, 4.	
F, 32.	C, 2.	[x] 20. d.
B, 64.	Vnité.	

[i] 7. e. ſ. [k] 20. d. [l] 7. c. ſ.

Mais d'autant que A meſure B par A: (car A ſe multipliant faict B,) [m] & l'vnité meſure A par A, l'vnité ſera meſme partie de A, que A de B; [n] & partant l'vnité ſera à A, comme A à B. Donc puis qu'entre l'vnité & A, tombent deux moyens proportionaux C & D; [o] il en tombera autant entre A & B, qui ſoient E & F.

[m] 5. c. ſ. [n] 20. d. [o] 8. 8.

Donc puis que les quatre nombres A, E, F, B, ſont continuellement proportionaux, & A premier eſt cube, B 4. ſera pareillement cube: Donc ſi vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

23. 8.

THEOREME 4. PROPOSIT. 4.

Si vn nombre cube multipliant vn nombre cube, en faict quelqu'vn: le produict sera cube.

Que le nombre cube A, multipliant le nombre cube B, face C. Ie dis que C est cube.

p 3. 9. Car que A se multipliant face D, [p] D sera cube. Et d'autant que A multipliant A, & B, a faict
q 17. 7. D & C, [q] comme A, sera à B, ainsi D sera à C. Mais entre les cubes A & B, tombent deux moyens proportionaux. [r] Dõc entre D & C, tombera
r 12. 8. 8. 8. s 23. 8. auſſi deux moyens proportionaux, [s] partant D estant cube, C, sera auſſi cube. Donc si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

THEOREME 5. PROPO. 5.

Si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, produict vn cube: le multiplié sera auſſi cube.

Que le nombre cube A, multipliant B, face C nombre cube. Ie dis que B, est auſſi nombre cube.

Car soit D, produit de A, A, 8. B, 27.
t 3. 9. multiplié par soy-meſme: [t] D, 64. C, 216.
D sera cube. D'autant dõc
u 17. 7. que A multipliant A, & B, a faict D & C, [u] com-

me A sera à B, ainsi D à C: [x] mais entre les cubes D & C, tombe deux moyens proport. [y] Donc entre A & B, tomberont aussi deux moyens proport. [z] Et partant A estant cube, B sera aussi cube. Donc si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. x 12. 8. y 8. 8. z 22. 8.

THEOREME 6. PROP. 6.

Si vn nombre se multipliant soy-mesme faict vn cube, iceluy sera aussi cube.

Soit le nombre A, lequel se multipliant soy-mesme face B, nombre cube. Ie dis que A est aussi cube.

Car soit C produict de B par A, C sera nombre cube, comme il est manifeste. D'autant donc que B cube multipliant vn autre nombre, sçauoir A, a produict C, nombre cube, A sera aussi cube. Donc si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. 19. d. A, 8. B, 64. C, 512. 5. 9.

THEOREME 7. PROP. 7.

Si vn nombre composé multipliant quelque nombre, en faict quelqu'autre: le produict sera solide.

Soit le nombre composé A, lequel multipliant quelque nombre, B face C. Ie dis que C sera solide.

Car puis que A est composé, quelque autre nombre, outre l'vnité, le mesurera: Donc que 13. d.

A, 6. B, 11. C, 66. D, 2. E, 3.

a 9. c. f. D mesure A par E, cela estant, [a] D multipliant E, produira A. Donc puis que B multipliant le mesme A a faict C; C sera produict de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B: Et partant C sera solide, duquel les costez sont D, E, B.

17. d. Donc si vn nombre composé, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 8. PROP. 8.

Si depuis l'vnité tant de nombres que l'on voudra sont continuellement proportionaux: le troisiesme depuis l'vnité est quarré, & tous les autres qui en laissent vn: Mais le quatriesme est cube, & tous les autres qui en laissent deux, & le septiesme est cube & quarré ensemble: & tous les autres qui en laissent cinq.

Soient, tant de nombres que l'on voudra, depuis l'vnité continuellement proportionaux, sçauoir A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Ie dis que B troisiesme depuis l'vnité, est quarré: Et tous les autres qui en intermettent ou laissent vn, comme sont D, F, H, K, M: mais le quatriesme est cube, & tous les autres qui en laissent deux, comme F, I, M, & le septiesme F, est cube & quarré ensemble, & tous ceux qui en laissent cinq, sçauoir M.

Vnité.

Vnité. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

Car d'autant que l'vnité eſt à A, comme A à B, l'vnité meſurera A, & A meſurera B egalement: [b] Mais l'vnité meſure A par A, donc A meſurera b 5. c.ſ. auſſi B par A: [c] donc A multipliant A, produira c 9. c.ſ. B, partant B eſt quarré.

Or d'autant [d] que B, C, D, ſont continuellement proportionaux, & B eſt quarré: D ſera auſſi d 22. 8. quarré: ſemblablement, puis que D, E, F, ſont continuellement proportionaux, & que D eſt quarré, F ſera auſſi quarré, & tous les autres qui en laiſſent vn.

Derechef, d'autant que l'vnité eſt à A, comme B à C, l'vnité meſurera A, & B meſurera C egalement: [e] Mais l'vnité meſure A par A: donc B meſurera C auſſi par A. [f] Et partant B multipliant A, e 5. c.ſ. f 9. c.ſ. produira C. Donc puis que A ſe multipliant ſoy-meſme faict B, & multipliant B faict C, [g] C ſera g 17. d. 7. cube.

Mais d'autant que C, D, E, F, ſont continuellement proportionaux, & que C premier eſt cube, F 4. [h] ſera auſſi cube. Par meſme raiſon, puis que F, G, H, I, ſont continuellement proportionaux, & h 23. 8. que F eſt cube, I ſera auſſi cube; & tous les autres qui en laiſſent deux.

Finalement d'autant que F 7. depuis l'vnité eſt monſtré quarré & cube: iceluy ſera cube & quarré enſemble, & en la meſme maniere M 7. depuis F, laiſſant G, H, I, K, L, ſera cube & quarré enſemble, & auſſi tous les autres qui en laiſſent

cinq. Donc si depuis l'vnité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 9. PROP. 9.

Si depuis l'vnité il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que celuy qui suit apres l'vnité soit quarré, aussi tous les autres seront quarrez; Et si celuy qui est apres l'vnité est cube, aussi tous les autres seront cubes.

Soient tant de nombres que l'on voudra depuis l'vnité continuellement proportionaux, A, B, C, D, E, F, & premierement que A, prochain de l'vnité, soit quarré. Ie dis que tous les autres sont quarrez.

i 8. 9. Car puisque A, B, C, D, E, F, sont continuellement proportionaux depuis l'vnité, [i] B 3. depuis l'vnité est quarré, & tous les autres qui en laissent vn, sçauoir D & F. Et d'autant que A, B, C, sont

Vnité. A, 4. B, 16 C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

k 22. 8. continuellement proportionaux, & que A est quarré par l'hypothese: [k] C 3. sera aussi quarré: Semblablement prenant C, D, E, continuellement proportionaux, puis que C 1. est quarré, E 3. sera aussi quarré: Partant tous les nombres A, B, C, D, E, F, sont quarrez, & ainsi des autres, &c.

22. 8.

Maintenant que A, proche de l'vnité soit cube. Ie dis que les autres sont cubes.

Vnité. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

Car d'autant que depuis l'vnité, A, B, C, D, E, F, [l] sont continuellement proportionaux, C quatrieſme depuis l'vnité eſt cube, & tous les autres qui en laiſſent deux, ſçauoir F. Or que les autres B, D, E, ſoient auſſi cubes, nous le monſtrerons ainſi. l 8. 9.

D'autant que l'vnité eſt à A, comme A à B, l'vnité meſurera A, & A le nombre B, egalement: [m] Mais l'vnité meſure A, par le meſme A. Donc A meſurera B auſſi par A: [n] Partant A multipliant ſoy-meſme produira B: [o] mais A eſt cube, donc B ſera auſſi cube. Et d'autant que A B C D, ſont continuellement proport. & que A eſt cube, [q] auſſi D ſera cube: dauantage, puis que B, C, D, E, ſont continuellement proport. & que B eſt cube: [r] E ſera auſſi cube: donc A, B, C, D, E, F, ſont tous cubes, & ainſi de ſuitte s'il y en auoit dauantage. Donc ſi depuis l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

m 5. c. ſ.
n 9. c. ſ.
o 3. 9.
q 23. 8.
r 23. 8.

THEOREME 10. PROP. 10.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que celuy qui eſt apres l'vnité ne ſoit quarré, auſſi pas vn autre ne ſera quarré, outre le troiſieſme depuis l'vnité, & tous les autres qui en laiſſent vn: Et ſi celuy qui eſt apres l'vnité n'eſt cube, auſ-

si aucun autre ne sera cube, outre le quatrieſme, depuis l'vnité, & tous les autres qui en laiſſent deux.

Soient depuis l'vnité tant de nombres que l'on voudra continuellement proport. A, B, C, D, E, F, G, H, I, & premierement que A, proche de l'vnité, ne ſoit quarré. Ie dis qu'aucun autre ne ſera quarré excepté B, le 3. depuis l'vnité, & tous les autres qui en laiſſent vn, ſçauoir D, F, H.

Vnité A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512.

Car ſi outre ceux-cy, il y en a d'autres quarrez, ſoit E quarré: 18. 9. donc autant que D eſt q. & que comme D eſt à E, ou E à F, ainſi A eſt à B: & en raiſon conuerſe, comme E à D, ou F à E, ainſi B à A; B ſera à A, comme le nombre quarré E, au 8. 9. nombre quarré D, ou comme le quarré F, au quarré E: mais B 3. depuis l'vnité eſt quarré. 8 & 24. 8. donc A premier apres l'vnité ſera quarré. Ce qui eſt abſurde: car il n'eſt quarré par l'hypotheſe: donc E ne ſera quarré. Par les meſmes raiſons nous monſtrerons qu'aucun autre n'eſt quarré outre les ſuſdicts.

Soit maintenant A proche de l'vnité non cube. Ie dis qu'aucun autre n'eſt cube, outre C, quatrieſme depuis l'vnité, & tous ceux qui en laiſſent 8. 9. deux, ſçauoir F, I. Car ſi quelqu'autre eſt cube, que ce ſoit D: donc puis que F eſt cube, & qu'en raiſon egale, comme D eſt à F, ainſi A à C, puis que DEF, Et ABC ſont en meſme raiſon, & en raiſon conuerſe; comme F à D, ainſi C à A; C ſera A.

comme le nombre cube F, au nombre cube D. [r] v 8. 9.
Mais C 4. depuis l'vnité est cube: [s] donc A 1. apres x 25. 8.
l'vnité, sera aussi cube. Ce qui est contre l'hypothese: donc D n'est pas cube; par les mesmes raisons on monstrera qu'aucun autre, outre les susdicts, ne peut estre cube. Partant si depuis l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME II. PROPO. II.

Si depuis l'vnité il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux; le plus petit mesure le plus grand, par quelqu'vn de ceux qui sont entre les nombres proportionaux.

Soient depuis l'vnité tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, A, B, C, D, E, F, G, Ie dis que chacun moindre mesure, chaque plus grand, comme C mesure G, par quelqu'vn des nombres, A, B, C; D, E, F.

Vnité. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243.
F, 729. G, 2187.

Car d'autant qu'en raison egale, comme C est à G, ainsi l'vnité est à D: (Car C, D, E, F, G, sont en mesme raison continuë que l'vnité, & A, B, C, D,) [r] l'vnité mesurera D: & C, le nombre G, egalement: [s] Mais l'vnité mesure D, par le mesme D. donc C mesurera aussi G par D: par mesme raison E mesurera F par A, puis que cõme E est à F, ainsi l'vnité est à A, &c. Ainsi A mesurera y 20. d. z 5. 6. f.

G par F, puis qu'en raiſon egale, comme A eſt à G, ainſi l'vnité à F, &c. & ainſi de ſuitte: partant ſi depuis l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

De ce qui eſt demonſtré cy-deſſus, il appert que le plus grand nombre eſt autant eſloigné du plus petit qui le meſure, que le nombre par lequel le plus petit meſure le plus grand l'eſt de l'vnité; attendu qu'il y doit auoir meſme raiſon du plus petit au plus grand que de l'vnité à celuy, par lequel le plus petit meſure le plus grand, comme il eſt manifeſte par la demonſtration.

Vnité 1. *A*, 3. *B*, 9. *C*, 27. *D*, 81. *E*, 243. *F*, 729. *G*, 2187.

Partant B, meſurera F par D, & C meſurera F par C, à ſçauoir par ſoy-meſme, &c. D'autant qu'entre B & F y a trois nombres, & entre l'vnité & D trois auſſi: & tant entre C & F, qu'entre l'vnité & C, y a deux nombres interpoſez.

Derechef, il appert de cecy que chacun de ces nombres multiplié par ſoy-meſme, produira vn nombre, lequel entre les nombres proport. ſera autant eſloigné d'iceluy multiplié, que le meſme l'eſt de l'vnité. Mais ſi vn moindre en multiplie vn plus grand, le produict ſera autant eſloigné du plus grand, que le moindre l'eſt de l'vnité. D'autant que ſi vn nombre qui meſure vn nombre, 9. c. f. *multiplie celuy par lequel il le meſure, celuy-là lequel il meſure eſt produict. Donc C multipliant ſoy-meſme produira F, puis que F eſt autant eſloi-*

gné de C, qui C l'eſt de l'vnité. Et partant C meſurera F par E, comme nous auons dict: Semblablement B multipliant D, fera le meſme F, d'autant que D meſura F par B, &c. & ainſi des autres.

THEOREME 12. PROPO. 12.

Si depuis l'vnité il y a tant de nombres continuellement proportionaux que l'on voudra, tous les nombres premiers qui meſurent le dernier, les meſmes meſureront auſsi celuy qui eſt proche de l'vnité.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, depuis l'vnité A, B, C, D. Ie dis que tous les nombres premiers qui meſurent le dernier D, les meſmes meſureront auſſi A, prochain de l'vnité.

Vnité. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

Car ſoit E nombre premier, lequel meſure le dernier D. Ie dis que E meſurera auſſi A: Car s'il ne le meſure, [a] iceluy E ſera premier à A. D'autant donc que A & E ſont premiers entr'eux, [b] & A ſe multipliant ſoy-meſme faict B, [c] comme il appert: B ſera premier à E. Donc puis que A & B ſont premiers à E, [d] & C, eſt produict de A en B, [e] C ſera premier à E. a 31. 7. b *Sch.* 11. 9. c 27. 7. d *Sch.* 11. 9 e 26. 7.

Derechef, puis que A & C ſont pareillement premiers à E, [f] & que D eſt produict de A en C, [g] D ſera premier à E: donc E ne meſure D. Ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc E meſure A. Partant f *Sch.* 11. 9 g 26. 7.

si depuis l'vnité il y a tant de nombres continuellement proport. &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Partant, aucun nombre premier plus grand que celuy qui est proche de l'vnité, ny aucun moindre, ne mesurant celuy qui est proche de l'vnité ne mesurera le dernier : car s'il le mesuroit, il mesureroit aussi celuy qui est proche de l'vnité, comme il est demonstré. Ce qui est contre l'hypothese.

SCHOLIE.

Henrion a copié ainsi cette Proposition de la traduction Françoise.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, autant de nombres premiers mesureront le nombre d'apres l'vnité, qu'il y en aura qui mesureront le dernier

Ce qui n'est conforme à la demonstration ny au texte d'Euclide, comme s'ensuit. Ἐὰν ὦσι μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὅσοι, ὑφ' ὅσων ἀριθμῶν ὁ ἔσχατος πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, καὶ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τῇ μονάδι μετρηθήσεται. *C'est à dire, si depuis l'vnité tant de nombres que l'on voudra sont proportionaux, par quelconques nombres premiers qu'est mesuré le dernier, par les mesmes sera mesuré celuy qui est proche de l'vnité:* ou bien, *tous les nombres premiers qui mesurent le dernier, les mesmes mesureront celuy qui est proche*

de l'vnité, & non autant &c. comme dict Henrion: Car il s'ensuyuroit, selon son dire, que si quelques nombres premiers mesurent le dernier, qu'autant d'autres nombres premiers, (car autant peuuent n'estre pas les mesmes) quels qu'ils soient, mesureront celuy qui est proche de l'vnité, ce qui est faux; Mais les mesmes seulement qui mesurent le dernier, mesureront celuy qui est proche de l'vnité, comme dit Euclide, & comme il est demonstré.

THEOREME 13. PROP. 13.

Si depuis l'vnité il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que celuy d'apres l'vnité soit premier: aucun autre ne mesurera le plus grand, outre ceux qui sont entre les proportionaux.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux depuis l'vnité A B CD, dont A proche de l'vnité, soit premier. Ie dis qu'aucun autre nombre ne mesurera D plus grand, outre A, B, C.

Vnité. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
H---- G---- F---- E----

Car que quelqu'autre comme E, mesure D, s'il est possible, E sera premier ou composé: si premier, & mesurant D extreme, il mesurera aussi A premier, proche de l'vnité: ce qui est absurde; donc E n'est premier: mais composé, [i] & partant mesuré par quelque nombre premier, qui [l] 12. 9. [l] 33. 7.

ne peut eſtre autre que A: car E meſurant D, tout nombre premier meſurant E, meſurera auſſi D: mais meſurant D plus grand, [k] il meſurera auſſi A premier, proche de l'vnité, ce qui eſt abſurde. Donc autre nombre premier que A ne meſure E: donc que A meſure E par F. [l] Donc A multipliant F faict E, D: [m] Et partant E ſera à D, comme F à C Parquoy E meſurant D; F meſurera C, & ſemblablement on monſtrera que F n'eſt premier; mais compoſé, lequel ſera demonſtré comme auparauant eſtre ſeulement meſuré par A premier.

k 12. 9.

l Sch. 11. 9.

m 17. 7.

Vnité. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
H--- G--- F--- E ---

Que A meſure donc F par G: [n] Donc A multipliant G B, produict F, C, [o] parquoy F ſera à C, comme G à B; mais F meſure C, donc G meſure auſſi B.

n Sch. 11. 9

o 17. 7.

Derechef; ſi G eſt premier meſurant B: [p] il meſurera auſſi A premier, ce qui eſt abſurde. Donc G eſt compoſé, lequel ſera ſeulement meſuré par A, comme il a eſté demonſtré de E. Que A meſure donc G par H, parquoy A [q] multipliant A H fera B, G donc comme G à B, ainſi H à A; mais G meſure B donc H meſurera auſſi A 1. parquoy H eſt egal au meſme A.

p 12. 9.

q Sch. 11. 9

17. 7.

Mais A eſt moyen proportionel entre H & G, [r] puis que B, produict des extremes G H, eſt egal au meſme B, quarré de A moyen. Ce qui eſt impoſſible: partant aucun nombre ne meſurera D plus grand, outre A B C, deſquels [s] le moindre meſure touſiours le plus grand. Donc ſi depuis l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

r 20. 7.

s 11. 9.

THEOREME 14. PROP. 14.

Le plus petit nombre mesuré par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, que par ceux qui le mesuroient au commencement.

Soit A, le plus petit nombre, que peuuent mesurer les nombres premiers B, C, D. Ie dis qu'aucun autre nombre premier, outre B, C, D ne mesure A.

Car, s'il est possible, que E, nombre premier, different de B, C, D, mesure A par F. D'autant que E, mesure A par F, [s] E, A, 30. B, 2. C, 3. D, 5. multipliant F, E--- F--- sera A. [u] Parquoy chacun des nombres B, C, D, mesureront l'vn des deux E, F. Ils ne mesureront pas E premier autre qu'iceux, Donc F, qui est plus petit que A, ce qui est absurde : Car A est posé le plus petit qui puisse estre mesuré par les nombres B, C, D, premiers. Donc le plus petit nombre. &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[s] 9. c. s.

[u] 32. 7.

SCHOLIE.

Demonstration en nombres, des dix premiers Theoremes qu'Euclide a demonstrez en lignes au second liure, par Barlaam Moyne.

THEOREME I.

Si deux nombres ſont propoſez, l'vn deſquels ſoit diuiſé en tant de nombres que l'on voudra, le nombre plan faict des deux nombres propoſez au commencement, eſt egal aux nombres plans, faits du nombre non diuiſé, & de chacune des parties du nombre diuiſé.

Soient deux nombres AB, & C, deſquels AB, ſoit diuiſé en AD, DE, EB, & ſoit F produict de C, en AB: & GH, de C, en AD, & HI, de C, en DE, & IK, de C, en EB. Ie dis que F, eſt egal à GH, HI, IK, c'eſt à dire à tout GK, compoſé des trois.

A..3. D..2. E. B C..2.
F.....12.
G.....6 H....4 I..2 K

17. c.f. Car puis que C, multipliant AB, à faict F, AB, meſurera F par C: c'eſt à dire AB, ſera partie de F, denommee de C: Semblablement AD, ſera partie de GH, & DE, de HI, & EB, de IK, denommee de C, ſçauoir meſme partie que AB, de F. Mais par ce qui eſt demonſtré à la 5. Prop. du 7. liure: le tout AB, eſtant meſme partie du tout GK, que AD, de GH; le tout AB, ſera auſſi meſme
y 4. c.f. partie du tout GK, que AB, de F: Partant y F & GK, ſont egaux. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME II.

Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties, les deux nombres plans qui ſont faicts du tout, & d'vne chacune partie, ſont egaux enſemble, au quarré faict du tout.

Soit AB, diuiſé en AC, CB. Ie dis que les nombres produicts du tout AB, par AC, CB, parties d'iceluy, ſont egaux enſemble au nombre quarré du tout AB. Car ſoit pris D, egal à AB, le nombre faict de D, c'eſt à dire de AB, en AB, ſçauoir le q. de AB, ſera egal aux nombres faicts de D, c'eſt à dire de AB, en AC, & en CB. Ce qui eſt propoſé.

D.....6.
A....4 C..2 B

21. Theor. Sch. 14. 8.

Que ſi AB, eſt diuiſé en plus de deux parties, AC, CD, DB. Il ſera demonſtré en la meſme maniere. Car ſemblablement le nombre faict de E, c'eſt à dire de AB, en AB, ſçauoir le quarré de AB, eſt egal aux nombres faicts de E, c'eſt à dire de AB, en chacune partie, AC, CD, DB.

E.....6
A...3. C..2 D. B

THEOREME III.

Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties: le nombre plan faict du tout, & d'vne des parties, eſt egal au plan qui eſt faict des parties, & au quarré faict de la partie premierement priſe.

Soit AB, diuiſé en AC, CB. Ie dis que le nombre produict du tout AB, en la partie AC, eſt egal au contenu ſous les parties AC CB, & au quarré de la dicte partie AC.

D....4.
A....4C.....6B

Car ayant pris le nombre D, egal à la partie AC: [a] le nombre faict de D, c'eſt à dire de AC, en AB, (ou ce qui eſt le meſme) de AB, en AC, eſt egal aux nombres faicts de D: c'eſt à dire de AC, en CB, & de D, c'eſt à dire de AC, en AC, c'eſt à dire au quarré de AC. Ce qui eſt propoſé.

a 1. *Theor. Sch.* 14. 9.

THEOREME IIII.

Si vn nombre eſt diuiſé en deux nombres: le quarré faict du tout, eſt egal aux quarrez faicts des parties, & à deux fois le nombre plan contenu ſous icelles parties.

Soit AB, diuiſé en AC, CB. Ie dis que le nombre quarré faict de AB, eſt egal aux quarrez des parties AC, CB, & à deux fois le nombre faict de la partie AC, en la partie CB. [b] Car le nombre quarré de AB, eſt egal aux nombres faicts de AB, en AC, & en CB. Mais le nombre faict de AB, en AC, [c] eſt egal au nombre produict de AC, en CB, auec le quarré de AC. Semblablement le nombre faict de AB, en CB, eſt de meſme egal au nombre produict de AC, en CB, auec le q. de CB. Donc le nombre q. faict de AB, eſt egal aux nombres quarrez des par-

6 4
A.....C....B

b 2. *Theo. Sch.* 14. 9.

c 3. *Theo. Sch.* 14. 9.

ties AC, CB, auec deux fois le nombre faict de AC, en CB. Ce qui estoit propolé.

THEOREME V.

Si vn nombre pair est diuisé en deux parties egales, & en deux inegales, le nombre plan contenu sous les parties inegales, auec le nombre quarré, du nombre moyen entre les deux sections, est egal au quarré qui est produict de la moitié du nombre.

Soit AB, nombre pair diuisé en deux parties egales AC, CB: & en deux inegales AD; DB, Ie dis que le nombre contenu sous les parties inegales du tout AD, DB, auec le q. du nombre moyen CD, (qui est l'excez entre la moitié AC, ou CB, & l'vne ou l'autre des parties inegales AD, DB) est egal au q. faict de la moitié CB.

Car le nombre q. de CB, [d] estant egal au q. des parties CD, DB & a deux fois le nombre plan contenu sous CD, DB: mais le nombre de CB, en DB, [e] estant faict egal au nombre contenu sous CD, DB, vne fois, & au q. de DB: si on prend ce nombre de CB, en DB, pour le q de DB, & le nombre faict de CD, en DB, le nombre q. de CB, estant aussi egal au q. restant de CD, & à l'autre nombre faict de CD, DB, vne fois, & au nombre CB, c'est à dire au nombre produict de AC, en DB. [f] Mais le nombre faict du tout AD, en DB, est egal aux nombres faicts de

d 4. Theo.
e 3. Theo.

8
A..... 5. C... 3 D.. 2 B

f 1. Theo
preced.

CD, en DB, & de AC, en DB. Donc le q. de CB, sera egal au q. de CD, & au nombre faict de AD, en DB: c'est à dire le nombre faict de AD, en DB, auec le q. de CD, sera egal au q. de CB. Ce qui est proposé.

THEOREME VI.

Si vn nombre pair est diuisé en deux parties egales, & qu'on luy adiouste quelqu'autre nombre, le nombre faict du tout auec l'adiousté, en l'adiousté, auec le quarré de la moitié du nombre, est egal au quarré du nombre composé de la moitié & de l'adiousté.

Car que AB, soit diuisé egalement en AC, CB, & soit adiousté à iceluy BD. Ie dis que le produict du tout AB, & de l'adiousté BD, comme d'vn, c'est à dire de AD, en DB, adiousté, auec le q. de la moitié CB, est egal au q. faict de CB, moitié, & de l'aiousté BD, cõme d'vn, c'est à dire au q. de CD. A....4C...B..2D

g 4. *Theo. Sch. 9. 14.* Car[g] le q. de CD, estant egal aux deux quarrez des parties CB, BD, & au nombre contenu sous CB, BD, deux fois, à sçauoir aux quarrez des parties CB, BD, & au nombre contenu sous CB, BD, & AC, BD. Mais le nombre faict de AD, h en BD, estant egal aux nombres contenus sous CB, BD, & sous AC, BD, & sous BC, BD, c'est à dire au q. de BD: si on prend ce nombre faict de AD, en BD, pour le q. de la partie BD, auec les nombres faicts de CB, en BD, & de AC, en BD, le q. de CD, sera aussi egal à l'autre q. de CB, & au nombre faict de AD, en BD: c'est à dire, le nombre faict de AD, en BD, auec

h 1. *Theo. Sch. 9. 14.*

auec le quarré de CB, eſt egal au quarré de CD, Ce qui eſt propoſé.

THEOREME VII.

Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties, le quarré du tout, auec le quarré de l'vne des parties eſt egal à deux fois le nombre faict du tout en ladicte partie, & au quarré de l'autre partie.

Soit AB, diuiſé en deux AC, CB. Ie dis que le q. du tout AB. auec le q. de CB, eſt egal à deux fois le nombre, faict du tout AB, en ladite partie CB, & au q. de l'autre partie AC.

Car le q. du tout AB, eſtant egal aux quarrez des parties AC, CB, & [k] à deux fois le nombre fait de AC, en CB, ſi le q. de CB commun, eſt adiouſté, les quarrez de AB, CB, enſemble, ſeront egaux aux 3. quarrez de AC, CB, & CB, & à deux fois le nombre faict de AC, en CB: mais le nombre faict de AB, en CB, eſt egal au [l] nombre faict de AC, en CB, & au q. de CB: & partãt 2. fois le nombre faict de AB, en CB, eſt egal à deux fois le nombre faict de AC, en CB, & à 2. fois le q. de CB. Donc ſi au lieu du nombre qui eſt faict 2. fois de AC, en CB, auec 2. fois le q. de CB, on prend le nombre faict de AB, en CB, 2. fois, les quarrez des nombres AB, CB, enſemble ſont egaux à 2. fois le nombre faict de AB, en CB, & au q. de l'autre partie AC. Ce qui eſt propoſé.

[k] 4. Theo. preced.

8
A.....5 C...3B

[l] 3. Theo. prec.

THEOREME VIII.

Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties, quatre fois le nombre plan faict du tout en vne partie, auec le quarré de l'autre partie, eſt egal au quarré du nombre compoſé du tout & de la partie premierement priſe.

Soit AB, diuiſé en AC, CB. Ie dis que le nombre plan, faict 4. fois du tout AB, en la partie CB, auec le q. de l'autre partie AC, eſt egal au q. du nombre compoſé du tout AB, & de la partie premierement dicte CB.

m 4. *Theo. prec.* Car ſoit poſé BD, egal à ladicte partie CB: le q. du tout AD, compoſé de AB, & BD, ou de ladicte partie CB, [m] eſtant egal aux quarrez des nombres AB, BD, & à 2. fois le nombre faict de AB, en BD, c'eſt à dire aux quarrez de AB, CB, &

A....4 C...3 B..3 D
7

n 7. *Theo. prec.* à 2. fois le nombre de AB, en CB, & les quarrez de AB, CB, enſemble [n] eſtans egaux à 2. fois le nombre contenu ſous AB, CB, & au q. de AC: Si au lieu des quarrez de AB, CB, on prend 2. fois le nombre faict de AB, en CB, auec le quarré de AC: le quarré faict de AD, ſera egal au nombre faict de AB, en CB, 4. fois, & au q. de l'autre partie AB. Ce qui eſt propoſé.

THEOREME IX.

Si vn nombre pair eſt diuiſé en deux parties egales, & en deux inegales : les quarrez des parties inegales enſemble, ſont doubles des quarrez enſemble, faicts de la moitié du nombre, & de la ſection du milieu.

Soit diuiſé AB, en parties egales AC, CB, & en non egales AD, DB. Ie dis que les quarrez des parties inegales AD, DB, ſont doubles des quarrez de AC moitié, & CD nombre moyen (qui eſt l'excez entre la moitié AC, ou CB, & l'vne ou l'autre des parties inegales AD, DB.) Car puis que le q. du nombre AD, ° eſt egal aux quarrez de AC, CD, & a deux fois le nombre de AC, en CD : ſi on adiouſte le commun q. de la partie DB, les quarrez des parties AD, DB, ſeront egaux aux quarrez des parties AC, CD, DB, & a 2. deux fois le nõbre faict de AC, c'eſt à dire de CB, en CD : Mais les quarrez faicts de CB, c'eſt à dire de AC, & CD, ᵖ ſont egaux au quarré de DB, & à 2 fois le nõbre fait de CB, en CD. Donc ſi au lieu du quarré de DB, auec le produict de CB, en CD, 2. fois, on prend les quarrez de AC, CD : les quarrez des parties AD, DB, ſeront egaux à 2. fois les qq. des parties, AC, CD : & partant les quarrez des parties AD, DB, ſeront doubles des quarrez faicts des parties AC, CD. Ce qui eſt propoſé.

A.....5 C...3 D..B

° 4. Theor. prec.

ᵖ 7. Theo. prec.

THEOREME X.

Si vn nombre pair eſt diuiſé en deux parties egales, & qu'on luy en adiouſte quelqu'autre: le quarré du nombre compoſé du tout & de l'adiouſté, & le quarré de l'adiouſté enſemble ſont doubles, du quarré faict de la moitié, & de celuy qui eſt faict du nombre compoſé de la moitié & de l'adiouſté.

Soit AB, nombre pair, diuiſé en deux parties egales AC, CB, & à iceluy AB, ſoit adiouſté BD. Ie dis que le q. de AD, compoſé de tout AB, & de l'adiouſté BD, & le q. du nombre adiouſté BD, les 2. enſemble ſont doubles des quarrez de AC, moitié, & de CD, compoſé de CB, BD, moitié & adiouſté.

q 4. *Theo. prec.* Car le q. de AD,[q] eſtant egal aux quarrez des parties AC, CD, & à 2 fois le nombre plan de AC, c'eſt à dire de CB, en CD, ſi on adiouſte le commun q. de BD: les quarrez de AD, BD, ſeront egaux aux quarrez des parties AC, CD, BD, & à 2. fois le nombre plan de CB, en CD. Mais les qq. de CB, CD,[r] ſont egaux au q. de BD, & à 2. fois le nombre plan de CB, en CD: & le q. de AC, eſt egal au q de CB. Donc

r 7. *Theor. prec.*

ſi au lieu du q. de BD, ..A....4C. ..4B..2D

& de deux fois le nombre plan de CB, en CD, on prend les quarrez des nombres de CB, CD: c'eſt à dire de AC, CD, les quarrez de AD, BD, ſeront egaux aux quarrez de

AC, CD, deux fois. Parquoy les quarrez de AD, BD, seront doubles des quarrez de AC, CD. Ce qui estoit proposé.

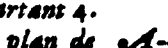
SCHOLIE.

Il faut icy entendre qu'au 5.6. & 9.& 10. Theoremes, la demonstration ne se pourra faire, si les nombres proposez ne sont pairs (ce que nous auons obserué au texte, disant. *Si vn nombre pair est diuisé en deux parties egales, &c.*) D'autant que selon Euclide, tout nombre impair ne se peut diuiser egalement, comme il appert de cette 6.& 7. Definition d'Euclide.

Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος : Le nombre pair est celuy qui se diuise en deux egalement : περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα, ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ : Mais le nombre impair est celuy qui ne se diuise en deux egalement, ou qui differe du nombre pair de l'vnité. Ce que n'a pas obserué Clauius, qui a aussi pris ces 10. Theoremes de Barlaam Moyne; encore que ledit Clauius dise les auoir inuentez, comme il appert de ce qu'il dict. *Quod idem & Barlaam Monachum feciße, à nonnullis est traditum.* Ce qui est faux neantmoins, attendu que si Clauius les eust faicts de luy-mesme, sans les prendre d'aucun, il eust bien recogneu que les 5.6. 9.& 10. que nous auons alleguez, ne se peuuent faire qu'aux nombres pairs : Ce qu'a fort bien obserué ledict Moyne Barlaam; les autres qui ont traduict de Clauius ont faict les mesmes fautes.

Nous aduertirons encore icy le Lecteur, que ces 10. Theoremes ſe pourront encore plus facilement entendre par nos figures diuiſees en parties egales, que nous auons miſes au ſecond liure.

Or le Theoreme qui reſpond à la vnzieſme Propoſition du ſecond liure à ſçauoir : Diuiſer vn nombre en telle ſorte, que le nombre plan faict du tout, & de l'vne des parties, ſoit egal au nombre quarré de l'autre partie, *ne ſe peut faire par les nombres, ce qui ſera ainſi demonſtré. Car (s'il eſt poſſible) ſoit diuiſé AB, en AC, CB, en ſorte que le nombre plan faict du tout AB, en la partie CB, ſoit egal au q. de l'autre partie AC. Donc 4. fois le nombre fait de AB, en CB, ſera quadruple du q. de AC, partant 4. fois le nombre plan de AB, en CB, auec le q. de AC, ſera quintuple du q. de la partie AC. Mais quatre fois le nombre plan de AB, en CB, auec le quarré de AC, eſt quarré* estant egal *au quarré faict du nombre compoſé de AB, & de CB : Donc les deux nombres quarrez (ſçauoir celuy qui eſt faict de AB, en CB, 4. fois auec le quarré de AC; Et le q. AC,) ont meſme raiſon que 5. à 1. ou 25. à 5. Ce qui eſt abſurde: Donc le nombre AB, ne peut eſtre diuiſé, en ſorte que le nombre plan faict du tout en vne des parties, ſoit egal au q. de l'autre partie. Ce qui eſtoit propoſé.*



5. Theor. 8. prec.

Coroll. 24. 8.

THEOREME 15. PROP. 15.

Si trois nombres ſont continuellement proportionaux, & les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon auec iceux. Le compoſé de deux tels qu'on voudra d'iceux, ſera premier au reſtant.

Soient trois nombres ABC, les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon auec iceux. Ie dis que le compoſé de deux quels qu'on voudra d'iceux, comme de A & B, eſt premier à C, reſtant, & le compoſé de BC, premier à A, & de AC, premier à B.

Car ayant[t] pris DE, les plus petits en la meſme raiſon, il appert par la demonſtr. de la 2. Propo. 8. que A eſt q. de D, & C q. de E, & B, produict de D en E.[u] Et le compoſé de DE, multiplié par D, produira vn nombre egal au compoſé de AB:[x] Mais DE, eſtans premiers entr'eux,[y] le compoſé d'iceux ſera 1. à E,[z] & partant auſſi premier à C, q. de E, & par la meſme raiſon D, ſera 1. à C, & le nombre produit du compoſé de DE, multiplié par D, ſera auſſi 1. à C, lequel produict eſt monſtré egal au compoſé de AB: donc le compoſé de AB, eſt premier à C.

A,9. B,12. C,16. D,3. E,4.

t *Sch.* 35. 7

u *Theo.* 3. *Sch.* 14. 9.

x 24. 7.

y 30. 7.

y 27. 7.

26. 7.

Derechef, le compoſé de DE, eſtant premier tant à D, qu'à E, le produict d'iceluy compoſé, multiplié par E, ſera auſſi premier à D: mais le meſme produict eſt egal à C, quarré de E, & à B,

26. 7.

a *Theo.* 3. *Sch.* 14. 9.

enſemble produict de D en E: donc le compoſé de
b 27. 7. BC, ſera auſſi premier à D.[b] Et partant premier à A, quarré de D.

c 24. 7. Finalement, [c] puis que D E ſont premiers en-
d 30. 7. tr'eux,[d] & premiers à leur compoſé, B produict
e 26. 7. d'iceux, [e] ſera auſſi premier à leur compoſé.
f 27. 7. [f] Et le produict du compoſé de D E, multiplié par
g *Theo.* 4. luy meſme ſera premier à B:[g] Mais le meſme pro-
Sch. 14. 9. duict eſt egal à A & C, & à deux fois B, enſem-
10. 6. *ſ.* ble, donc le compoſé de A & C, & de deux fois B, eſt premier à B: oſtant donc 2. fois B, le reſte compoſé de AC, ſera premier à B. Car s'il n'eſtoit ainſi, ils ſeroient compoſez entr'eux, & leur commune meſure meſurant le compoſé de A C, & B, meſureroit auſſi le compoſé de AC, & de deux fois B. Parquoy le compoſé de AC, & de deux fois B, ne ſeroit premier à B, ce qui eſt abſurde, eſtans demonſtrez premiers entr'eux. Partant le compoſé de AC, eſt premier à B. Donc ſi trois nombres ſont, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 16. PROP. 16.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux: comme le premier eſt au ſecond, ainſi le ſecond ne ſera pas à quelqu'autre.

Soient A & B premiers entr'eux. Ie dis que comme A eſt à B, ainſi B n'eſt à vn autre: c'eſt à dire qu'à 2. nombres premiers, il n'y a point de 3. proportionel.

Car, s'il eſt poſſible, comme A eſt à B, qu'ainſi B ſoit à vn autre, ſçauoir à C.

D'autant que A & B, ſont premiers entr'eux, [h] & les plus petits qui ſoient en la meſme raiſon : [i] Ils meſureront egalement B & C en la meſme raiſon : ſçauoir A meſurera B, & B meſurera C : mais A ſe meſure auſſi ſoy-meſme. Donc A, meſurera A & B, premiers entr'eux, ce qui eſt abſurde. Donc comme A eſt à B, ainſi B n'eſt à C. A, 5. B, 7. C---

h 23. 7.
i 21. 7.

Semblablement, comme B eſt à A, ainſi A ne ſera à quelqu'autre. Donc ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 17. PROPO. 17.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux ; & que les extremes ſoient premiers entr'eux, comme le premier ſera au ſecond, ainſi le dernier ne ſera à quelqu'autre.

Soient continuellement proportionaux tant de nombres que l'on voudra A B C D, deſquels les extremes AD, ſont premiers entr'eux. Ie dis que comme A eſt à B, ainſi D ne ſera à quelqu'autre.

Car s'il n'eſt ainſi, comme A eſt à B, qu'ainſi D ſoit à quelqu'autre, à ſçauoir à E. D'autant donc que comme A eſt à B, ainſi D à E, en permutant comme A à D, ainſi B à E. Mais A, D eſtans premiers en- A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E---

k 23. 7. l 21. 7. tr'eux,[k] ſont les plus petits de leur raiſon : [l] Donc ils meſureront B & E egalement, ſçauoir A, meſurera B, & D meſurera E. Mais comme A eſt à B, ainſi B eſt à C: donc puis que A meſure B, auſſi m 11. 6. ſ. B meſurera C : [m] & partant A meſurera auſſi C: & d'autant que comme B eſt à C, ainſi C à D: mais B meſure C, auſſi C meſurera D: Parquoy n 11. 6. ſ. A meſurant C, [n] meſurera pareillement D, & A meſure auſſi ſoy-meſme; Donc A, meſure A & D premiers entr'eux, ce qui eſt impoſſible, donc comme A eſt à B, ainſi D n'eſt à quelqu'autre, ſçauoir à E. Semblablement comme D eſt à C, ainſi A n'eſt à vn autre : partant s'il y a, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBLEME 1. PROP. 18.

Deux nombres eſtans donnez ; conſiderer, s'il eſt poſſible de trouuer vn troiſieſme proportionel à iceux.

Soient les deux nombres A & B, donnez, il faut conſiderer ſi l'on peut trouuer vn troiſieſme proportionel à iceux : car ou les nombres A & B ſont o 16. 9. premiers entr'eux, ou non : ſi premiers, [o] il ne ſe peut trouuer de troiſieſme proportionel. S'ils ne ſont premiers que B, multipliant ſoy-meſme, faſſe C, ou A meſure C ou non: s'il le meſure, ſoit par D. Ie dis qu'il ſe peut trouuer vn troiſieſme proportionel qui eſt D.

A, 4. B, 7.
A, 4. B, 6, D, 9. C, 36.

p 9. e. ſ. Car puis que A meſure C par D, [p] C ſera le

produit de A par D: mais le mesme C est produit de B par soy-mesme. Donc C, contenu sous les extremes A & D, est egal au produict du milieu B, multiplié par soy-mesme, q donc les 3. A, B, D, sont continuellement proportionaux, sçauoir comme A à B, ainsi B à D: Donc D sera le 3. proportionel. q 20. 7.

Mais si A ne mesure C. Ie dis que l'on ne pourra trouuer vn 3. proportionel.

Car s'il n'est ainsi, soit D, troisiesme proportionel. D'autant que comme A est à B, ainsi B à D, le nombre produict de A & D extremes sera egal au produict B, moyen multiplié par soy-mesme: c'est à dire à C. Donc puis que C est faict de A par D, r A mesurera C par D: ce qui est absurde, estant posé ne le mesurer. Donc on ne peut trouuer vn 3. proport. à A & B, puis que A premier, ne mesure C, produict de B 2. par soy-mesme, &c. Donc deux nombres estans donnez, &c. Ce qu'il falloit faire. A, 6. B, 4. D, 00. C, 16. 20. 7. r 7. c. 5.

PROBLEME 2. PROP. 19.

Trois nombres estans donnez, considerer, s'il est possible, d'en trouuer vn quatriesme, proportionel à iceux.

Soient les trois nombres donnez A, B, C, continuellement proportionaux ou non: sçauoir si on peut trouuer vn 4. proportionel, c'est à dire, comme A est à B, ainsi C est à vn autre.

A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.
A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.

Que B multipliant C, faſſe D, A meſurera D ou non: qu'il le meſure par E. Ie dis que E eſt le 4. proportionel.

f 9. e. f. Car puis que A meſure D par E, f D ſera le produict de A par E: mais D eſt auſſi produict de B par C, par la conſtruction. Donc le produict des extremes A & B, eſt egal au produict des moyens B, C. t 19. 7. Donc comme A à B, ainſi C à E.

Mais ſi A ne meſure D. Ie dis que l'on ne pourra trouuer vn quatrieſme proportionel : car autrement ſoit E, quatrieſme proportionel, s'il eſt poſſible. D'autant dõc que les quatre nombres A, B, C, E, ſont u 19. 7. continuellement proportionaux, u le nombre contenu ſous les extremes A & E, ſera egal au nombre contenu ſous les moyens B C, ſçauoir à D. x 7. 6. f. Donc puis que D eſt faict de A, multiplié par E, x iceluy A meſurera D par E, contre l'hypotheſe: ſemblablement nous examinerons ſi comme A eſt à B, ainſi C eſt à vn autre: donc trois nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 54.
A, 3. B, 14. C, 10. E.... D, 40.

THEOREME 18. PROP. 20.

Les nombres premiers ſont en plus grande multitude, que quelconque multitude de nombres premiers propoſez.

C'eſt à dire, que ſi on propoſe tant de nombres premiers que l'on voudra, il s'en trouuera encore d'autres.

Soient tant de nombres premiers propoſez que l'on voudra A, B, C. Ie dis qu'il y a encore d'autres nombres premiers : Car [y] ayant pris D, le plus petit que peuuent meſurer A, B, C, & qu'on luy adiouſte l'vnité E F, le tout D F, eſt premier ou non : s'il eſt premier, l'on a le requis : car A, B, C, & D, F, ſont en plus grand nombre que la multitude propoſee, A, B, C.

y 38. 7.

A, 2. B, 3. C, 5.
30 1
D----- E. F

Mais ſi D F n'eſt premier, [z] il ſera meſuré par quelque nombre premier, ſoit par G. Ie dis que G n'eſt pas vn des nombres propoſez A, B, C : car s'il eſtoit vn d'iceux, puis que A, B, C, meſurent D E ; G meſureroit auſſi D E. Donc meſurant le tout D F, & le retranché D E, il meſureroit auſſi le reſtant E F ; ſçauoir vn nombre, l'vnité, ce qui eſt impoſſible.

z 38. 7.

A, 3. B, 5. C, 7.
105 1
D-----E. F
35
G----

12. ef.

Donc G premier, n'eſt vn des propoſez A, B, C : partant A, B, C, G, premiers, ſont en plus grand nombre que les propoſez A B, C, & ainſi à l'infiny l'on pourra trouuer d'autres nombres premiers. Donc les nombres premiers, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 19. PROPO. 21.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra ſont adiouſtez, le tout ſera pair.

Soient adiouſtez tant de nombres pairs que l'on voudra AB, BC, CD. Ie dis que tout le compoſé A D, eſt pair.

a 6. 7. Car d'autant [a] que tout nombre pair peut eſtre diuiſé en deux parties egales, les moitiez de AB, BC, CD, feront la moitié du tout A D:



mais toutes les moitiez enſemble ſont egales à toutes les autres moitiez enſemble, partant AD, eſt pair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 20. PROP. 22.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra, ſont adiouſtez; & que la multitude d'iceux ſoit pair: le tout ſera pair.

Soient adiouſtez tant de nombres impairs que l'on voudra: deſquels la multitude AB, BC, CD, DE, ſoit pair. Ie dis que le tout eſt pair.

Car puis que AB, BC, CD, DE, ſont impairs, vn chacun ſera different du nõbre pair de l'vnité, ſelon la de-



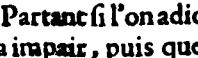
finition. Parquoy si d'vn chacun l'on retranche l'vnité, vn chacun des restans sera pair: [b] partant le composé d'iceux sera pair: Mais la multitude des vnitez retranchees est aussi pair. [c] Donc le tout composé AE, sera pareillement pair. Partant si tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. b 21. 9. c 21. 9.

THEOREME 21. PROPO. 23.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra sont adiouſtez, & que la multitude d'iceux soit impair: le tout sera aussi impair.

Soient adiouſtez tant de nombres impairs que l'on voudra, desquels la multitude, comme AB, BC, CD, est impair. Ie dis que le tout composé AD, est impair.

Car puis que le nombre impair differe du nombre pair de l'vnité par la definition: ayant retranché l'vnité ED. du nombre impair CD, le reste CB sera pair. [d] Mais AC, composé des impars AB, BC, pairs en multitude, est pair: [e] donc aussi AE, composé des pairs AC, CE, sera pair. Partant si l'on adiouste l'vnité ED, le tout AD sera impair, puis que l'impair differe du pair de l'vnité par la definition. Donc *si tant de nombres impairs*, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



d 22. 9. e 21. 9.

THEOREME 22. PROP. 24.

Si d'vn nombre pair l'on retranche vn nombre pair, le reſte ſera auſſi pair.

Du nombre pair AB, ſoit retranché le nombre pair CB. Ie dis que le reſtant AC, eſt auſſi pair.

Car ſi AC n'eſt pair, ſoit retranchee l'vnité AD, le reſte DC demeurera pair (puis que le nombre impair differe du nombre pair de l'vnité.) [f] Partant le compoſé DB ſera pair: Donc adiouſtant l'vnité AD, au compoſé DB, pair, le tout AB, ſera impair: ce qui eſt impoſſible, car il eſt pair par l'hypotheſe. Donc AC, ne ſera impair.

1 5 4
A.D.....C.....B

f 21. 9.

THEOREME 23. PROPOSIT. 25.

Si d'vn nombre pair l'on retranche vn nombre impair, le reſte ſera auſſi impair.

De AB, nombre pair, ſoit retranché CB, impair. Ie dis que le reſte AC, ſera impair. Car de CB, ayant retranché l'vnité CD, le reſte DB, ſera pair. Donc d'autant que le tout AB eſt poſé pair, [g] le reſte AD ſera pair. Ayant donc oſté l'vnité CD, le reſtant AC ſera impair. Donc ſi d'vn nombre pair l'on oſte vn, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

7 1 4
A.....C.D....B

g 24. 9.

THEOREME

THEOREME 24. PROP. 26.

Si d'vn nombre impair l'on retranche vn nombre impair, le reſte ſera pair.

Du nombre impair AB, ſoit retranché le nombre impair CB. Ie dis que le reſte AC eſt pair.

Car ayant retranché l'vnité des nombres impairs AB, CB: les reſtans AD, CD, ſeront pairs. D'autant donc que du nombre pair AD, le nombre pair CD, eſt retranché: [h] le reſte AC, ſera pair: donc ſi d'vn nombre impair, on retranche vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

4 6 1
A....C....D.B

h 24. 9.

THEOREME 25. PROP. 27.

Si d'vn nombre impair l'on retranche vn nombre pair, le reſte ſera impair.

Soit AB, nombre impair, duquel ſoit retranché le pair CB. Ie dis que le reſtant AC, eſt impair: car de l'impair AB, ſoit retranché l'vnité AD: le reſte DB, ſera pair: duquel CB, pair eſtant retranché, [i] le reſte DC, ſera auſſi pair: Partant l'vnité AD, adiouſtee, AC, ſera impair.

Donc ſi d'vn nombre impair l'on, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

1 4 6
A.D....C.....B

i 24. 9.

THEOREME 26. PROP. 28.

Si vn nombre impair multipliant vn nombre pair, en faict quelqu'vn; le produict ſera pair.

Soit le nombre A impair, lequel multipliant B nombre pair, faſſe C. Ie dis que C eſt pair: Car puis que C eſt produict de A par B: iceluy C, ſera compoſé d'autant de nombres egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A. Mais B eſt pair: donc C ſera compoſé d'autant de nombres pairs egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A, & partant [k] C ſera pair. Donc ſi vn nombre impair multipliant, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A 3 B 4
A...B....
1 2
C.....

k 21. 9.

SCHOLIE.

Semblablement ſi vn nombre pair multiplie vn nombre pair, le produict ſera pair. Car derechef C ſera compoſé d'autant de nombres pairs egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A, &c. figure ſuyuante.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit auſſi qu'vn nombre pair multiplié par ſoy-meſme, produira vn nombre pair, comme il eſt manifeſte, ſi on poſe les nomb. pairs A & B egaux.

A....4 B....4
C.....16

THEOREME 27. PROP. 29.

Si vn nombre impair multipliant vn nombre impair, en faict quelqu'vn, le produict sera impair.

Soit faict le nombre C, de A, impair, multipliant B impair: Ie dis que C est impair.

Car puis que C est produict de A en B, iceluy C sera composé d'autant de nombres egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A. Partant, puis que tant A que B est nombre impair; C sera composé d'autant de nombres impairs, egaux à B, qu'il y a d'vnitez en, A nombre impair, parquoy la multitude d'iceux sera impair.

3 5
A...B.....
15
C.....

[1] Donc C sera nombre impair: partant si vn nombre impair. Ce qu'il falloit demonstrer. [1] 23. 9

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cecy qu'vn nombre impair multiplié par soy-mesme, produict vn nombre impair: comme il est manifeste, si les nombres impairs A & B sont posez egaux.

3 3
A...B...
C.....
9

SCHOLIE.

Campanus a aussi demonstré les deux Theoremes suyuans.

Vn nombre impair meſurant vn nombre pair, il le meſure par vn nombre pair.

Que le nombre A impair, meſure le nombre pair B, par C. Ie dis que C eſt pair. Car ſi C eſt impair, B produict de A impair, par C, pair, ſera impair: ce qui eſt abſurde, car il eſt pair par l'hypotheſe. Donc C eſt pair.

m 29. 9.

3 4
A...C...
12
B.....

Vn nombre impair meſurant vn nombre impair: il le meſure par vn nombre impair.

Que le nombre A impair, meſure le nombre impair B, par C. Ie dis que C eſt impair: car ſi C eſt pair 33 n B produict de A impair par C, pair, ſera pair; ce qui eſt abſurde, puis que B eſt poſé impair. Donc C eſt impair.

n 28. 9.

A, 3. C, 5. B, 15.

THEOREME 28. PROP. 30.

Si vn nombre impair meſure vn nombre pair, il meſurera auſſi ſa moitié.

Soit le nombre A impair, lequel meſure B, nombre pair. Ie dis que A, meſurera auſſi la moitié de B.

Car que A meſure B par C, par la Propoſition antecedente, demonſt. de Camp. le nombre C ſe-

ra pair. Et partant aura vne moitié. Parquoy puis que A mesure B par C : [o] C mesurera aussi B par A : & par ainsi C, sera vne partie de B, denommee de A, comme il est enseigné à la 3. Definition du 7. liure. Mais d'autant que comme C est à sa moitié ainsi B est aussi à sa moitié : & en changeant comme C à B, ainsi la moitié de C, à la moitié de B. Mais C est vne partie de B, denommee de A, comme il est monstré; aussi la moitié de C, sera vne partie de la moitié de B, denommee de A : [p] partant A mesurera la moitié de B. Donc si vn nombre impair mesure vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

3 4
A... C....
12
B.....

[o] 8. 6. f.

[p] 40. 7.

THEOREME 29. PROPO. 31.

Si vn nombre impair est premier à quelque nombre: Il sera aussi premier au double d'iceluy.

Soit le nombre impair A, premier au nombre B, duquel le double soit C. Ie dis que A est aussi premier à C.

Car si A & C ne sont premiers entr'eux, ils seront mesurez par quelque nombre, lequel soit D, lequel sera necessairement impair : car s'il est pair, mesurant A impair, [q] A, produict de D pair,

5 8
A.....B.....
16
C.....D--

[q] 28. 9.

multiplié par le nombre par lequel il le meſure, ſera pair. Ce qui eſt abſurde, car A eſt poſé impair: partant D impair, meſurant C pair, (car C eſt pair puis qu'il a vne moitié B,) meſurera auſſi B, ſa moitié: mais il meſure auſſi A. Donc D, meſure iceux A, B, premiers entr'eux. Ce qui eſt abſurde, donc A eſt premier à C: donc ſi vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

f 30. 9.

THEOREME 30. PROP. 32.

De tous les nombres qui ſuyuent le binaire; en progreſſion double; vn chacun eſt pairement pair ſeulement.

Soient tant de nombres doubles que l'on voudra depuis le binaire A, ſçauoir B, C, D, E. Ie dis que B, C, D, E, ſont tant ſeulement pairement pairs. Qu'il ſoit ainſi, il eſt manifeſte: car ayant poſé l'vnité: puis que A eſt binaire, & B, C, D, E, doubles depuis le binaire, iceux ſeront continuellement proportionaux, depuis l'vnité, ſçauoir en proportion double. Donc A meſurera vn chacun d'iceux B, C, D, E, & chacun moindre meſurera le plus grand ſuyuant par quelqu'vn d'iceux A, B, C, D, E, leſquels eſtans tous pairs, à ſçauoir doubles depuis le binaire, vn nombre pair meſurera vn chacun d'iceux B, C, D, E, par vn nombre pair: partant chacun ſera pairement pair ſelon la definition.

f 11. 9.

Vnité. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

Or qu'ils soient pairement pairs tant seulement, il est manifeste: Car puis que A, B, C, D, sont continuellement proportionaux depuis l'vnité, & que A, prochain de l'vnité, est nombre premier, à sçauoir binaire; [t] aucun autre ne mesurera vn chacun d'iceux, excepté iceux A, B, C. D, E, lesquels estans tous pairs, vn nombre pair mesurera chacun d'iceux par vn nombre pair tant seulement. Donc des nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. t 13. 9.

THEOREME 31. PROPO. 33.

Si vn nombre a sa moitié impair, iceluy est pairement impair, tant seulement.

Soit le nombre A, duquel B, moitié, est impair. Ie dis que A, est seulement pairement impair.

Car d'autant que B, impair, est moitié de A, le nombre binaire C, mesurera A, nombre pair, par icelle moitié C, impair; [u] Donc A, est pairement impair. Ie dis aussi qu'il l'est seulement: car soit B, moitié de A & C, binaire. Si A n'est pairement impair seulement, il sera aussi pairement pair. Donc quelque nombre pair le mesurera par vn nombre pair. Que D pair, le mesure par E aussi pair [x] par ainsi A, sera produict de D par E: mais le mesme A est produit de C binaire, par B, moitié de A. Donc le nomb. produit de C 1. par B 4. est egal à celuy qui est prod. de D 2. par E 3. [y] partant comme C à D, ainsi

10
A.....
5 2
B.....C..
D---E---

u 9. d.

x 9. 6. f.

y 19. 7.

E à B. Mais C binaire, mesure D, nombre pair: donc E, nombre pair, mesurera aussi B, impair: ce qui est absurde. Donc A n'est pairement pair, il est donc seulement pairement impair, donc si vn nombre a vne moitié, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 32. PROP. 34.

Si vn nombre pair n'est de ceux qui sont doubles depuis l'vnité, & n'a sa moitié impair: Il est pairement pair, & pairement impair.

Soit A, de ceux qui ne sont doubles depuis l'vnité, & que sa moitié soit pair. Ie dis que A est pairement pair, & pairement impair. Qu'il soit pairement pair, il est euident: Car puis que sa moitié est pair, le binaire qui est pair, le mesurera par icelle moitié: partant sera pairement pair.

20
A.....

9. d.

Il est aussi pairement impair: car iceluy A, estant diuisé en deux egalement, & sa moitié derechef diuisee en deux, & ainsi de suitte, l'on paruiendra enfin à vn nombre impair (premier qu'au binaire, puis qu'il n'est de ceux qui sont doubles depuis l'vnité) lequel mesurera A par vn nombre pair. Car s'il le mesuroit par vn nombre impair, puis qu'vn nombre impair multipliant vn nombre impair, faict vn nombre impair, A seroit impair. Ce qui est impossible, puis qu'il est posé pair. Donc puis qu'vn nombre impair mesure A,

a 29. 9.

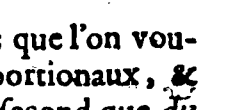
par vn nombre pair, & qu'vn nombre pair le mesure aussi par vn nombre pair, A sera pairement pair, & pairement impair. Donc si vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 33. PROPO. 35.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que l'on retranche tant du second que du dernier, vn nombre egal au premier: comme l'excez du second sera au premier, ainsi l'excez du dernier sera à tous les antecedens.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux A, BC, D, EF: & que de BC second, & de EF, dernier, on retranche CG & FH, egaux chacun au premier A. Ie dis que comme le reste BG, sera à A, ainsi EH, sera à A, BC, & D ensemble.

Car soit retranché FI, egal à BC, & FK, egal à D. D'autant que FI, est egal à BC, & le retranché FH, est egal au retranché CG, le reste IH, sera egal au reste BG. Mais d'autant



que comme A est à BC, ainsi BC est à D, & D à EF: & par conuersion de raison comme EF, à D, ainsi D à BC, & BC à A: mais KF est egal à D, &

Et s'il eſt poſſible que quelqu'autre meſure F, outre les ſuſdicts, ſçauoir O par P, [l] cela eſtant, F, ſera le produict de O par P: mais le meſme F, eſt auſſi produict de E par D: partant le nombre produict de E premier par D 4. eſt meſme que le produict de P 2. par O 3. [m] Donc comme E à P, ainſi O à D.

l 9. 6. f.

m 19. 7.

[n] Mais puis que A, B, C, D, ſont continuellement proportionaux depuis l'vnité, & que A proche de l'vnité eſt premier, aucun autre ne meſurera D dernier, outre ceux de la proportion A, B, C. O. O eſt different de A, B, C, par l'hypotheſe: donc O ne meſurera D. Mais comme O à D, ainſi E à P. Donc E auſſi ne meſurera P: [o] Partant E eſtant premier, E & P ſeront premiers entr'eux, [p] & par ainſi les plus petits de leur raiſon: parquoy E meſurera O, & P meſurera D egalement, eſtant en la meſme raiſon. [q] Mais aucun nombre ne meſure D, excepté A, B, C: donc P ſera meſme qu'vn d'iceux A B C.

n 13. 9.

o 31. 7.

p 23. 7.

21. 7.

q 13. 9.

Qu'il ſoit meſme que B, & ſoient pris E, G, H doubles depuis E, en telle multitude que B C D, [r] en raiſon egale, comme B à D, ainſi E à H: [s] Mais le produict de B en H, eſt egal au produict de D, en B, & le produict de D en E, a eſté monſtré egal au produict de P en O. Donc le nombre faict de P par O, eſt le meſme que de B par H: [t] Donc comme P à B, ainſi H à O: mais P eſtoit meſme que B: donc H ſera meſme que O, ce qui eſt abſurde: car O a eſté poſé autre qu'aucun des nombres A, B, C, D, E, G, H, I. Donc A, B, C, D, E, G, H, I, ſeuls meſurent le nombre F, lequel ils compoſent: Donc ſi depuis l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

r 14. 7.

f 19. 7.

t 19. 7.

SCHOLIE.

Nous remarquerons icy, que Clauius dict au Scholie de la dix-neufieſme Propoſition de ce 9. liure, que ce qui eſt demonſtré par la 16. 17. 18. & 19. Propoſitions du meſme liure, ſe doit entendre des nombres entiers. Car par les fractions (dict-il) à deux ou trois nombres propoſez tels que l'on voudra, encore qu'ils ſoient premiers entr'eux, ou les extremes (s'il y en a plus de 2.) premiers entr'eux; l'on peut trouuer vn autre nombre proportionel: Mais il ſe trompe lourdement, n'y ayant point de fractions ou nombres rompus, puis que ſelon Euclide, l'vnité eſt indiuiſible: et voicy vn exemple qu'il apporte.

A ces deux nombres premiers 3. & 8. ſi le q. du 2. ſçauoir 64. eſt diuiſé par le 1. nombre 3. le quotient ſera 21. & $\frac{1}{3}$. pour le 3. proport. & ainſi ces 3. nomb. 3. 8. & 21. $\frac{1}{3}$. ſont contin. proport. ce qui eſt faux: d'autant que 8. contient 3. deux fois, & en outre les $\frac{2}{3}$ de 3. ſçauoir deux vnitez de 3. mais 21. & $\frac{1}{3}$ ne contient pas 8. de la meſme façon, d'autant que 8. ne ſe diuiſe en 3. preciſement, & que l'vnité, comme nous auons dit, eſt indiuiſible.

Il eſt bien vray que 21. $\frac{1}{3}$ eſtant pris pour vne quantité continuë, & ſemblablement les deux autres 3. & 8. comme 3. toiſes ou choſes ſemblables, 8. & 21. $\frac{1}{3}$ eſtans reduits en meſmes parties egales, & appliquees aux nomb. qui ſeroient pour lors 9. 24. & 64. tels nomb. ſeroient proport. mais pour tout cela 21. $\frac{1}{3}$ ne ſeroit pas 3. proport. aux 2. nomb. propoſez 3. & 8. premier entr'eux, comme dit Clauius. Et de plus, Euclide n'entẽd parler en ces trois liures

precedens que des nombres Arithmetiques, & non de la quantité continuë, en laquelle arriuẽt les fractions, & non aux nombres, mais ſeulement aux choſes nombrees, quand on les ſubdiuiſe en autres parties, que l'on appelle fractions, entant qu'elles ſont comparees à leur tout, diuiſé en certain nombre de parties egales, leſquelles s'expliquent neantmoins par les nombres entiers; c'eſt à dire, par les nomb. deſquels traitte Euclide: & lors que telles quantitez continues ſont reduites en meſmes parties egales ne ſont plus fractions, & les nombres comparez à telles choſes ſont comparez entr'eux comme nomb. entiers, & pris abſolument, ſans les referer à aucun tout: & toutes les demonſtrations & operations qui ſe peuuent faire des fractions vulgaires, dont traite l'Arithmetique, ſe font toutes par les nombres entiers & Arithmetiques, deſquels traite Euclide en ces 7. 8. & 9. liures. Nous rapporterions encore icy pluſieurs autres reſueries de Clauius qu'il a miſes à la fin du 9. liure touchant les fractions; mais d'autant que tout cela n'eſt neceſſaire, nous n'en parlerons dauantage.

FIN DV NEVFIESME LIVRE des Elements d'Euclide.

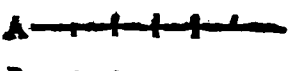
LIVRE DIXIESME
DES ELEMENTS
D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. Commenſurables grandeurs ſont celles là, leſquelles ſont meſurees par vne meſme commune meſure.

EVCLIDE, ſelon ſa couſtume, commence icy par l'explication des termes, dont il doit vſer : Et declare premierement quelles grandeurs ſont dites commenſ. & quelles cõmenſ. definiſſant que celles-là ſont dites cõmenſurables, leſquelles ſont meſurees par vne meſme commune meſure ou grandeur. Comme les deux grandeurs A & B, leſquelles vne meſme meſure, comme C, meſure : (car repetee ſix fois meſure A, & repetee trois fois

mesure a) seront dictes commensurables.



En la mesme maniere, vne ligne de 20. palmes, & vne de 13. seront dictes commensurables, puis que tant la ligne d'vne palme, que celle de demye palme, &c. les mesure toutes deux. Semblablement les superficies sont dictes commensurables, lesquelles sont mesurees par vne mesme superficie, & les corps solides sont aussi dicts commesurables, lesquels sont mesurez par vn mesme corps ou solide.

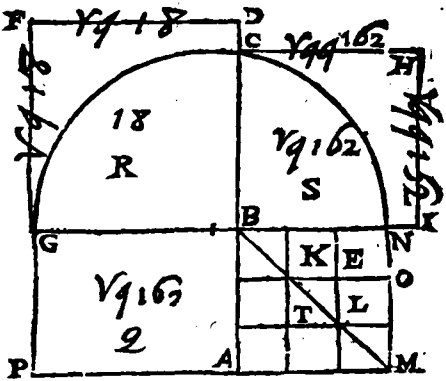
2. Mais les grandeurs incommensurables, sont celles-là lesquelles n'ont aucune commune mesure.

Telles grandeurs sont le diametre de quelconque quarré, & le costé du mesme quarré dont il est le diamotre, d'autant qu'il n'y a aucune commune grãdeur qui les puisse mesurer l'vn & l'autre, comme il sera demonstré par Euclide, à la derniere Proposition de ce liure. Il y a aussi *plusieurs* autres lignes incommensurables, *c'est à dire* qui n'ont aucune commune mesure; plusieurs desquelles il explique en ce liure, & enseigne la maniere de les trouuer. Derechef, les superficies & les solides sont dicts incommensurables, lesquels n'admettent aucune commune mesure.

3. Les

3. Les lignes droictes ſont commenſurables en puiſſance, quand les quarrez d'icelles ſont meſurez par vn meſme eſpace ou ſuperficie.

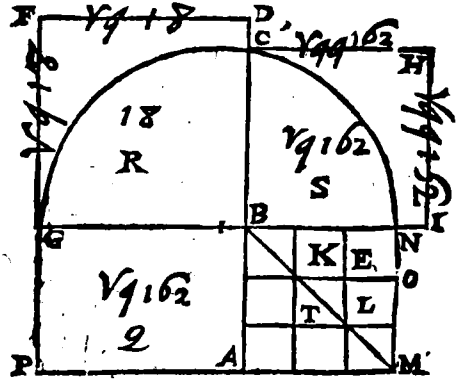
Des lignes droictes, les vnes ſont commenſurables en longitude, ſçauoir, celles qui ſont meſurees par vne meſme ligne, & ſont dictes ſimplement ou abſolument commenſurables, quelques autres ſont dictes incommenſurables: c'eſt à dire, qui n'ont aucune commune meſure, comme il a eſté expoſé 1. & 2. Definition.



Derechef, des lignes qui ſont incommenſurables en longitude, les vnes le ſont de telle ſorte, que les quarrez d'icelles ſont commenſurables, comme vne ligne de 2. toiſes, & vne autre qui ſera ɣq. 8. (c'eſt à dire, de laquelle le q. contiendra 8. toiſes,) ſont dictes commenſurables en puiſſance, leurs quarrez 4. & 8. eſtans meſurez par vne

meſme ſuperficie. Ainſi vne ligne de 3. toiſes, & vne de 6. ſeront auſſi commenſurables en puiſſance, puis que leurs quarrez 9. & 36. ſont meſurez par vne meſme ſuperficie, ſçauoir par 1. ou par 6.

Item, vne ligne qui ſera γqq. de 20. & vne qui ſera γqq. 125. ſont commenſurables en puiſſance: car leurs qq. γq 20. & γq. 125. ſont commenſurables, eſtans comme 5. à 2. & γq. 5. ſera en γq. 20. 2. fois & en γq. 125. 5. fois. Ce que l'on entendra plus



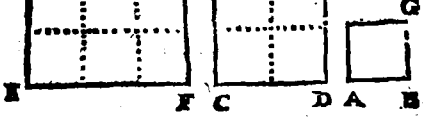
facilement par cette figure, où la ligne A B, eſt 3. & ſon q. AN, 9. dont le diametre eſt B M, auquel A B eſt incommenſurable, comme il a eſté dict à la 2. Definition, & ayant mené BD, egale au
47. I. diametre B M, & deſcrit le q. BF, iceluy ſera 18. eſtant double du q. de B A, & ſon coſté ſera γq. 18. commenſurable en puiſſance à B A: car E meſure l'vn & l'autre q. ſçauoir A N, 9. fois & B F, 18. fois. E triplé meſure auſſi BF, 6. fois, & A N, 3. fois.

Maintenant ſi on entend que le quarré E, faſſe

yq. 6. le q. de la ligne AB, sera yq. 486. Et le quarré de BD, sera yq. 1944. & yq. 6. mesurera l'vn & l'autre, & yq. 54. triple de yq. 6. mesurera aussi ces deux quantitez.

4. Mais les lignes droictes sont incommensurables en puissance, quand les quarrez d'icelles ne peuuent estre mesurez par aucune commune mesure.

Les autres lignes incommensurables, dont les quarrez sont aussi incommensurables, sont dictes incommensurables en puissance, comme vne ligne de deux toises, & vne lig. qui sera yy. 6. seront incommensurables en puissance, n'y ayant aucun commun espace qui puisse mesurer leurs quarrez 4. & y. 6. ainsi yq. 8. & yqq. 12. sont aussi incommesurables en puissance, d'autant qu'aucune superficie ne mesure leurs qq. 8. & yq. 12.

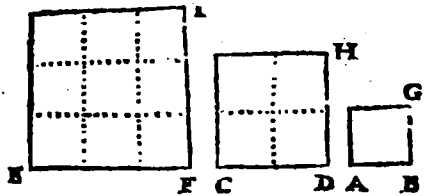


Derechef, comme en la figure de la 3. Definit. la superficie rect. P B, soit yq. 162. à laquelle soit faicte egale la superficie quarree BH, la ligne G B, ou BD, son egale, sera incommensurable en puissancę à BC, ou B I, car BC, est moyenne proportionelle entre GB, BA, ou B N, egale à B A. x 14. 2. 17. 6.

Donc GB, BC, BN, eſtans continuellement proport. y GD, q. de GB, eſt à BH, q. de BC, cõme GB, premier, à BN 3. Mais GB, eſt incommen. à BN, comme il a eſté dict en la 2. Definit. z donc le q. de GB, qui eſt GD, ſera incommenſurable au q. de BC, c'eſt à dire à BH: partant GB, BC, ou BI, ſon egale, ſont incommenſurables en puiſſance: c'eſt à dire, que leurs quarrez ſont incommenſurables. Et perſonne ne doit trouuer cecy eſtrange, que cette demonſtration ſoit appuyee ſur des Propoſitions cy-apres, attendu qu'elle n'eſt neceſſaire pour la demonſtration d'aucune d'icelles.

y 20. 6.

z 10.



Or toutes les lignes droictes commenſurables en longitude, le ſont auſſi en puiſſance, puis que le quarré de leur commune meſure, meſure les quarrez d'icelles, comme il appert par cette figure. Car comme AB, meſure CD, EF, ainſi ſon quarré AG, meſure CH, EI, non pas que toutes les lignes droictes commenſurables en puiſſance, le ſoient auſſi en longitude, comme appert par la figure de la 3. Definit. où les lignes AB, BD, ſont monſtrees incommenſurabl. en longitude, leſquelles ſont monſtrees commenſurables en puiſſance, & comme il ſera auſſi demonſtré en ce liure.

5. Ces choſes eſtans ainſi, il eſt monſtré c. à d. manifeſte, qu'à toute ligne droicte propoſee, infinies lignes droictes en multitude, ſont commenſurables & infinies incommenſurables: les vnes en longitude & puiſſance, les autres en puiſſance ſeulement. Or que cette ligne droicte propoſee ſoit appellee rationelle.

Si on propoſe quelque ligne droicte de grandeur cogneuë & determinee, de toutes les lignes comparees auec icelle, quelques-vnes ſeront commenſurables en longitude & puiſſance à icelle, quelques-vnes en puiſſance ſeulement. Item, quelques-vnes ſeront incommenſurables en longitude ſeulement à icelle; & quelques-vns en longitude & puiſſance, comme il ſera monſtré en ce liure.

Mais cette ligne propoſee, à raiſon de laquelle les autres ſont dictes commenſurables ou incommenſurables, eſt dite des Grecs ῥητὴ; c'eſt à dire rationelle, d'autant qu'elle eſt touſiours poſee de grandeur cogneuë, & que ſelon icelle on ratiocine: mais les autres comparees auec icelle, ne ſont pas touſiours cogneuës: combien que ſelon icelles priſes ſeparement elles ſoient cogneuës, chacune d'icelles pouuant eſtre diuiſee en telles parties egales que l'on voudra.

6. Et les lignes droictes commenſurables à cette ligne rationelle, ſoit en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement; ſoient appellees auſſi rationelles.

Il enſeigne que les autres lignes commenſurables comment que ce ſoit, à la ligne dicte rationelle, ſont auſſi rationelles, non par ſuppoſition, comme icelle: mais entant qu'eſtans comparees auec icelle, elles ſe trouuent commenſurables à icelle en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement.

7. Et les lignes incommenſurables à cette ligne rationelle, ſoient appellees irrationelles.

Puis qu'en la precedente Definition Euclide a appellé les lignes commenſurables en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement à la rationelle propoſee, rationelles, il eſt manifeſte par cette Definit. que celles qui ſont incommenſ. à la rationelle propoſee en longitude & puiſſance, & non en longitude ſeulement, ſont irrationelles.

8. Et le quarré deſcrit de la rationelle propoſee, ſoit appellé rationel.

Tout ainſi que la ligne qui eſt poſee pour cogneuë & determinee, eſt dicte rationelle: tout de meſme le q. deſcrit d'icelle, eſt appellé rationel, d'autant qu'il eſt auſſi cogneu & certain, &

en comparaiſon d'iceluy les autres ſuperficicies ſont dictes commenſurables ou incommenſurables.

9. Et les figures commenſurables à ce q rationel, ſoient appellees rationelles.

Toutes les ſuperficies planes commenſurables au quarré de la rationelle propoſee, ſont dictes rationelles, non toutefois par poſition comme iceluy : mais entant qu'eſtans comparees audict quarré, elles ſont trouuees commenſurables à iceluy, ou incommenſurables. Tout ainſi auſſi que les lignes comment que ce ſoit commenſurables à la ligne poſee rationelle, ſont appellees rationelles.

10. Mais les figures incommenſurables au quarré rationel, ſoient appellees irrationelles, ou ſourdes.

Ainſi que les lignes incommenſurables à la ligne poſee rationelle, ſont dictes irrationelles: auſſi les ſuperficies planes incommenſurables au quarré de la ligne rationelle, ſont appellees irrationelles.

11. Et les lignes droictes qui peuuent icelles figures irrationelles, ſoient dictes irrationelles & ſourdes ; ſçauoir ſi elles ſont quarrees, leurs coſtez ſoient irrationaux ; mais ſi ce ſont autres rectilignes quelconques, les lignes qui peuuent des quarrez egaux à icelles figures irrationelles, ſoient irrationelles.

Il appelle les lignes qui peuuent des eſpaces incommenſurables au quarré de la ligne rationelle, irrationelles: de ſorte que ſi ces eſpaces irrationaux ſont quarrez, leurs coſtez ſeront dicts irrationaux: s'ils ne ſont quarrez, mais ſont autres rectilignes, les lignes droictes qui deſcriuent des quarrez egaux à iceux eſpaces incommenſurables, ſeront dictes irrationelles: car vne ligne droicte eſt dicte pouuoir vne figure, quand le q. deſcrit d'icelle ligne, eſt egal à icelle figure.

Enſuitte de ces Definitions d'Euclide nous adiouſterons icy (apres Commandin) vne demande, & trois communes ſentences, dont vſe Euclide en ce liure.

DEMANDE.

Que l'on puiſſe multiplier quelconque grandeur tant de fois, qu'elle puiſſe exceder quelconque grandeur propoſee de meſme genre.

Car deux grandeurs inegales de meſme genre eſtans propoſees, la plus grande n'eſtant infinie, & la moindre pouuant eſtre augmentee infiniment: il eſt manifeſte que la moindre peut eſtre multipliee tant de fois, qu'elle excede la plus grande: Ce qui appert auſſi par la cinquieſme Definition du cinquieſme liure.

COMMVNES SENTENCES, ou Notions.

1. Vne grandeur meſurant tant de grandeurs que l'on voudra, meſure auſſi la grandeur compoſee d'icelles.

2. Vne grandeur qui mesure quelconque grandeur : mesure pareillement toute autre grandeur que celle-là mesure.

3. Vne grandeur mesurant toute vne grandeur, & la retranchee d'icelle, mesure aussi le reste.

Ces communes sentences sont monstrees en nombres au septiesme liure, aux 3. dernieres communes sentences, qui est la mesme chose qu'aux grandeurs, &c.

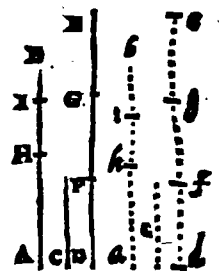
Faut entendre que les Propo. sont notees en la marge par 2. nombres, & que le superieur denote l'ordre de Theon : & l'inferieur l'ordre de Campanus : que s'il n'y a qu'vn seul nombre ; c'est à dire, qu'ils ne different, &c.

THEOREME 1. PROP. 1.

Deux grandeurs inegales estans proposees, si de la plus grande l'on retranche plus de la moitié, & du reste encore plus de la moitié, & que cela se face touſiours ainsi en continuant, il demeurera enfin quelque grandeur plus petite que la moindre grandeur proposee.

Soient deux grandeurs inegales AB, & C, proposees, dont AB, est la plus grande. Ie dis que si de AB, on retranche plus de la moitié, & du reste encore plus de la moitié, & ainsi touſiours en continuant, il restera enfin quelque grandeur moindre que C, plus petite grandeur proposee.

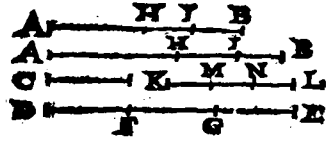
Car soit C, multipliee tant de fois que le produict excede AB, & soit DE, produict : de sorte que DE, soit multiple de C, & prochainemẽt plus grande que AB : Et soit diuisee DE, selon les parties DF, FG, GE, chacune egale à C, & de AB, soit retranché plus de la moitié AH, & du reste HB, aussi plus de la moitié HI, & ainsi touſjours, iusques à ce que les parties de AB, soient egales en nombre à celles de DE. Soient Donc AH, HI, IB, autant que DF, FG, GE. D'autant que DE, est plus grande que AB, & que de DE, on a osté DF, moins que la moitié (ou la moitié, si DE, estoit seulement double de C) & de AB, plus de la moitié AH, le reste FE, sera plus grand que le reste HB.



Derechef, FE estant plus grande que HB : si de FE, on oſte la moitié FG, (ou moins que la moitié, si FE, estoit plus grande que le double de C:) Mais de HB, plus de la moitié HI, le reste GE, sera pareillement plus grand que le reste IB ; *Mais* GE, est egale à C: donc C, sera aussi plus grande que IB, derniere partie de AB. Partant de AB, il demeure vne grandeur plus petite que C. Donc 2. grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Il en aduiendra de meſme, si on oste la moitié AH, & du reste HB, la moitié HI. Car semblablement IB reste, sera plus petite que GE, c'est à dire que C.

Autrement, ayant faict la construction comme auparauant, soit prise KL, autant multiple de IB, que DE, de C. Donc KL, estant diuisee en KM, MN, NL, parties egales, chacune à IB, il y aura autant de parties en KL, qu'en DE: mais AH, estant plus grande que HB (ou egale, si on oste seulemẽt la moitié de AB) &



HB, plus grande que IB: AH, sera aussi plus grande que IB, c'est à dire que KM.

Derechef, d'autant que HI, est plus grande que IB, ou egale: mais IB, est egale à MN: HI, sera aussi plus grande que MN, ou egale à icelle: & partant la toute AI, sera plus grande que KN, parquoy adiouſtant les egales IB, NL, la toute AB, sera plus plus grande que la toute KL: Mais DE, est plus grande que AB. Donc DE, sera encore bien plus grande que KL: parquoy DE estant à C, comme KL, est à IB. (Car KL, est prise autant a multiple de IB, que DE, de C:) a pareillement C, sera plus grande que IB: & par ainsi IB, reste plus petite que C. Ce qu'il falloit demonstrer. a 14. 5.

THEOREME 2. PROP. 2.

Deux grandeurs inegales estans proposees, si l'on retranche touſiours alternatiuement la plus petite de la plus gran-

de, & que la grandeur reſtante ne meſure iamais ſa precedente; Icelles grandeurs ſeront incommenſurables.

Soient deux grandeurs inegales propoſees AB, CD, deſquelles la moindre AB, ſoit retranchee de la plus grande CD, & le reſte de CD, ſoit retranché de AB, & ainſi touſiours alternatiuement la moindre ſoit oſtee de la plus grande, & que le reſte ne meſure iamais ſa grandeur precedente. Ie dis que AB, CD, ſont incommenſurables.

Car autrement elles ſeront meſurees par quelque commune meſure, laquelle ſoit E, s'il eſt poſſible. Donc E ſera egale à AB, ou moindre. Et ayant oſté AB, de CD, tant de fois que l'on pourra, qu'il reſte FD, moindre que AB, de ſorte que AB, meſure CF.



Derechef, ayant oſté FD, de AB, qu'elle laiſſe GB, moindre que celle FD: deſorte que FD, meſure AG, & ſoit faict ce retranchement touſiours ainſi:

b 1. 10.

[b] Il demeurera enfin de CD, ou AB, de quelque grandeur moindre que E.

Car d'autant que AB, oſtee de CD, laiſſe FD, moindre que ſoy, CF, retranchee, ſera plus grande que la moitié de CD: car ſi CF, eſtoit la moitié, ou moindre que la moitié de CD: AB, pourroit encor eſtre retranchee de CD. Semblablement AG, retranchee de AB, ſera plus grande que la moitié de AB: & aduiendra touſiours ainſi.

Retranchant donc touſiours plus de la moitié, il reſtera enfin quelque grandeur moindre que E. Soit donc GB, reſte moindre que E. I. 10.

D'autant que E, meſure AB, & AB, meſure CF; [c] E meſurera auſſi CF. Mais E meſure la toute CD. [d] Donc E, meſurera auſſi le reſte FD, & FD, meſure AG: [e] donc E meſurera auſſi AG. Mais E, meſure la toute AB, [f] Donc E meſurera auſſi le reſte GB, la plus grande la plus petite. Ce qui eſt abſurde. Donc aucune grandeur ne meſurera AB, CD: Partant ſeront incommenſurables. Donc ſi deux grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 2. c. ſ.
d 3. c. ſ.
e 2. c. ſ.
f 3. c. ſ.

PROBLEME 1. PROP. 3. iij.

Deux grandeurs commenſurables eſtans donnees, trouuer la plus grande commune meſure d'icelles.

Soient deux grandeurs commenſurables propoſees AB, CD, dont il faut trouuer la plus grande commune meſure. D'autant que AB, CD, ſont commenſurables de la plus grande CD, ſoit oſtee AB, moindre, tant de fois que l'on pourra, & qu'il reſte ED, & de AB, ſoit oſtee ED, auſſi tant de fois que l'on pourra, & reſte FB. Et faiſãt touſiours ainſi alt. reſtera enfin quelque



grãdeur qui meſurera ſa prec. autremẽt AB, CD, ſeroient incommenſ. contre l'hyp. Que FB, meſure donc ED. Ie dis que FB, eſt la plus grande commune meſure de AB, CD.

Car puis que FB, mesure ED, & ED, mesure
k 2. e. f. AF, [k] FB, mesurera AF: mais FB, mesure soy-mes-
1. c. f. me: elle mesurera donc aussi la toute AB: [l] partant
l 2. e. f. FB, mesurera aussi CE, qui est mesuree de AB.
Donc puis que FB, mesure aussi ED, [m] la mesme
m 2. e. f. FB, mesurera la toute CD: elle mesure donc AB, & CD, partant est leur commune mesure. Ie dis qu'elle est la plus grande.

Car s'il n'est ainsi, soit G, la plus grande commune mesure, s'il est possible: D'autant donc que
u 2. c. f. G mesure AB, & CD, & que AB, mesure CE, [u] G
o 3. c. f. mesurera aussi CE. Mais G mesure CD, [o] donc G mesurera aussi ED, reste, (puis que G mesure la toute CD, & la retranchee CE:) mais ED, mesu-
p 2. c. f. re AF. [p] Donc G mesurera aussi AF, & mesurant la toute AB, elle mesurera aussi le reste FB, plus petite que soy: ce qui est absurde: donc FB, est la plus
3. c. f. grande commune mesure de AB, CD.

Or si la moindre AB, mesure la plus grande, de sorte qu'estant retranchee de CD, il ne reste rien: AB, sera la plus grãde commune mesure des deux, puis que AB, mesure soy-mesme, partant deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cette demonstration il est manifeste, qu'vne grandeur laquelle mesure deux grandeurs, mesure aussi leur plus grande commune mesure, comme l'on peut colliger de cette partie de la demonstration, par laquelle il est monstré que FB, est la plus grande commune mesure de AB, CD: car là il est monstré que si G mesure AB, CD, qu'elle mesure aussi leur plus grande commune mesure FB.

PROBLEME 2. PROP. 4.

Trois grandeurs commensurables estans donnees, trouuer la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient 3. grandeurs commensurables proposees A B C, desquelles il faut trouuer la plus grande commune mesure.

Soit premierement [q] trouuee D, plus grande commune mesure de A, B, si D mesure aussi C, il appert que D, est la plus grande commune mesure des 3. A B C. [a] 33. 10.

Car si vne grandeur plus grande que D, mesure A B C, la mesme [r] mesurera aussi D plus grande commune mesure de A & B, la plus grande la plus petite, ce qui est absurde. Mais si D, ne mesure C, au moins C & D seront commensurables. [r] 1 Coroll. 3. 10.



Car puis que A B C, sont commesurables, quelconque commune mesure d'icelles mesurera [f] D, plus grande commune mesure de A, B: donc icelle commune mesure mesurant aussi C: D & C seront commensurables. [t] Soit dõc E plus grande commune mesure de C, & D. Ie dis que E, est la plus grande commune mesure de A B C; Car d'autant que E mesure D, & C: Et D mesure A & B, [u] E mesurera aussi A, B. Mais E mesure aussi C: donc E, est la cõmune mesure de A B C. Ie dis [f] Coroll. 3. 10. [t] 3. 10. [u] 2. c. f.

que E, eſt auſſi plus grande commune meſure d'icelles: car autrement ſoit F, plus grande commune meſure que E.

x *Coroll. 3. 10.* D'autant donc que F meſure A & B, x elle meſurera auſſi D, leur plus grande commune meſure: Mais F, meſure auſſi C, elle meſurera donc auſſi E, plus grande commune meſure de C & D: ſçauoir la plus grande la plus petite : Ce qui eſt abſurde: Donc E, eſt la plus grande commune meſure de ABC. Partant trois grandeurs, &c. Ce qu'il falloit faire.

y *cor. 3. 10.*

COROLLAIRE.

Il eſt auſſi manifeſte qu'vne grandeur qui meſure *3.* grandeurs, meſure auſſi la plus grande commune meſure d'icelles. Car il a eſté demonſtré que puis que F, meſure ABC, elle meſurera auſſi leur plus grande commune meſure E.

Semblablement, s'il y a plus de 3. grandeurs commenſurables donnees, on trouuera leur plus grande commune meſure. Comme s'il y en a quatre, l'on fera premierement la queſtion de trois, ſi cinq, on fera la queſtion de quatre, &c. Et ce meſme Corollaire aura lieu.

V. THEOREME 3. PROPO. 5.

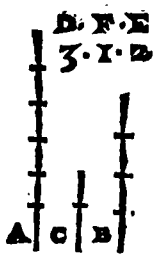
Les grandeurs commenſurables ont meſme raiſon l'vne à l'autre, que nombre à nombre.

Soient les grandeurs A & B, commenſurables. Ie dis qu'elles ſont entr'elles comme vn nombre

nombre eſt à vn autre nombre.

Car [a] ſoit C, leur plus grande commune meſure, & autant de fois que C meſure A, que l'vnité F, meſure autant de fois vn nombre comme D, & autant de fois que C meſure B, que l'vnité meſure auſſi le nombre E. a 3. 10.

D'autant donc que la grandeur C, & l'vnité F, meſurét la grãdeur A, & le nomb. D egalement, la grandeur A, contiendra C, autant de fois que le nombre D, contient l'vnité. Partant comme A à C, ainſi le nombre D, à l'vnité. Mais comme C eſt à B, ainſi l'vnité eſt à E: (puis que C meſure B, & l'vnité meſure E, egalement.) [b] Donc en raiſon egale A ſera à B, comme le nombre D, au nombre E. partant les grandeurs commenſurables ſont entr'elles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



b 22. 5.

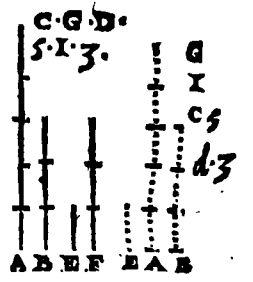
THEOREME 4. PROPOSIT. 6.

Si deux grandeurs ont meſme raiſon entr'elles que nombre à nombre; Elles ſeront commenſurables.

Que les 2. grandeurs A & B, ayent meſme raiſon entr'elles que les nombres C, D. Ie dis qu'elles ſont commenſurables.

Car que la grandeur A ſoit entenduë eſtre diuiſe en autant de parties egales, que C contient d'vnitez, à vne deſquelles parties ſoit egale la gran-

deur E, & ſoit quelque autre grandeur F, meſuree autant de fois par E, que l'vnité meſure le nombre D.



D'autant que E eſt autant de fois en A, que l'vnité au nombre C, la grãdeur A, & le nombre C, contiendront E, & l'vnité egalement: partant A ſera à E, comme C à l'vnité. Mais E eſt à F, cõme l'vnité à D, (E meſurant F, & l'vnité meſurãt D egalement,) dõc, en [c] raiſon egale, A ſera à F, cõme le nõb. C, au nomb. D. Mais A eſt auſſi à B, cõme le nombre C, au nombre D, par l'hypotheſe: [d] Donc comme A à B, ainſi A à F: [e] Partant B & F ſont egales: donc E meſurant F, meſurera auſſi B, egale à F: Mais E, meſuroit auſſi A: partant E meſure A & B, [f] donc A B, ſont commenſ. Partant ſi 2. grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 22. 5.
d 11. 5.
e 9. 5.
f 1. d.

Autrement ſoit entenduë la grandeur A, diuiſee en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nombre C, à vne deſquelles parties ſoit egale la grandeur E.

D'autant donc que comme E à A, *ainſi l'vnité au nombre C*, (E meſurant A, & l'vnité le nombre C egalement.) Mais A eſt poſée à B, comme le nombre C, au nombre D. Donc en raiſon egale, cõme E [g] à B, ainſi l'vnité à D, mais l'vnité meſure le nõb. D: dõc E meſurera B, & E meſure auſſi A: [h] donc A & B ayant E pour cõmune meſure, ſerõt cõmenſ. Ce qui eſt propoſé. Soit veuë la 2. partie de la fig.

g 22. 5.
h 1. d.

COROLLAIRE.

De la premiere demonſtration de ce Theoreme, il appert comment on pourra trouuer vne ligne droicte, à laquelle quelconque autre ligne droicte propoſée, ſoit comme nombre à nombre. Car (voyez la premiere figure) ſoit trouuee vne ligne, à laquelle ſoit la ligne propoſee A, comme le nombre C, au nombre D: Faut diuiſer A en autant de parties egales, qu'il y a d'vnitez en C, & prendre F, contenant autant des meſmes parties de A, qu'il y a d'vnitez en D: par ainſi A ſera à F, comme le nombre C au nombre D. Comme il eſt demonſtré.

Il appert auſſi par quel moyen on trouuera vne ligne droicte, au quarré de laquelle ſoit le quarré d'vne autre ligne droicte donnee comme nombre à nombre: comme pour exemple: ſoit trouuee vne ligne, au q. de laquelle ſoit le q. de la ligne A, comme le nombre C, au nombre D, ſoit premierement trouuee F, à laquelle ſoit A, comme C à D, comme il eſt dict, [i] puis ſoit trouuee la moyenne proportionelle entre A & F: [k] A, la ligne trouuee, & F eſtant continuellement proportionelles, le q. de A, ſera au q. la moyenne: comme A à F: Mais A eſt à F, comme le nombre C, au nombre D. Donc le quarré de A, ſera au quarré de la moyenne proportion. comme le nombre C au nombre D.

i 13. 6.
k Cor. 20. 6.

vij THEOREME 5. PROP. 7.

Les grandeurs incommenſurabl. n'ont pas meſme raiſon entr'elles, que nombre à nombre.

Soient les grandeurs incommenſurables A & B. Ie dis qu'elles n'ont meſme raiſon l'vne à l'autre, que nombre à nombre. [1] Car ſi A, B, auoient meſme raiſon entr'elles que nombre à nombre, elles ſeroient commenſurables. Ce qui eſt abſurde, eſtans poſees incommenſurables. Donc A & B, ne ſont entr'elles comme nombre á nombre. Partant les grandeurs incommenſurables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



1. 6. 10.

viij THEOREME 6. PROPO. 8.

Si deux grandeurs n'ont meſme *raiſon* entr'elles que nombre à nombre, icelles grandeurs ſeront incommenſurables.

Soient les grandeurs A & B, n'ayans meſme raiſon entr'elles que nombre à nombre. Ie dis qu'elles ſont incommenſurables.

Car ſi elles eſtoient commenſurables, [1] el-

1. 5. 10.

les ſeroient l'vne à l'autre, comme nombre à nombre. Ce qui eſt abſurde, n'eſtans entr'elles comme nombre à nombre par l'hypotheſe. Donc A & B, ne ſont commenſurables: Partant ſi deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOREME 7. PROP. 9. ix

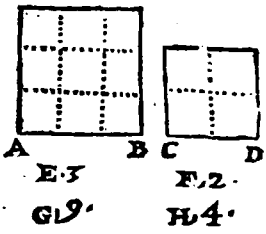
Les quarrez deſcrits de lignes droictes commenſurables en longitude, ont meſme raiſon entr'eux, que nombre quarré à nombre quarré. Et les quarrez qui ont meſme raiſon entr'eux que nombre quarré à nombre quarré, auront auſſi les coſtez commenſurables en longitude. Mais les quarrez deſcrits de lignes droictes incommenſurables en longitude, n'ont meſme raiſon entr'eux, que nombre quarré à nombre quarré: Et les quarrez qui n'ont meſme raiſon entr'eux que le nombre quarré à nombre quarré, n'auront les coſtez commenſurables en longitude.

Soient premierement les lignes droictes A B, CD, commenſurables en longitude. Ie dis que

le quarré de AB, eſt au quarré de CD, comme nombre quarré à nombre quarré.

Car AB, CD, eſtans commenſurables en longi-
n 5. 10. tude [n] AB, ſera à CD, comme nombre à nombre, & ſoit comme le nombre E, au nombre F. Et les
o 20. 6. quarrez de E & F, ſoient G & H.

Donc puis que AB, eſt à CD, comme E à F: [o] Mais le quarré de AB, eſt au quarré de CD, en raiſon doublee du coſté AB, au coſté CD. Et [p] le nom-
p 11. 8. bre q. G, eſt au nombre q. H, auſſi en raiſon doublee du coſté E, au coſté F, le q. de AB, ſera au q. de CD, comme le nombre q. G, au nombre quarré H: D'autant que ces deux raiſons ſont doubles de raiſons egales. Ce qui eſt propoſé.



Secondement, ſoit le quarré de AB, au quarré de CD, comme le nombre quarré G, au nombre quarré H. Ie dis que AB, CD, ſont commenſurables en longitude. Car ſoient E, F, coſtez de G & H.

D'autant donc que le q. de AB, eſt au q. de CD,
q 20. 6. comme le nombre q. G, au nombre q. H. [q] Mais le quarré de AB, eſt au quarré de CD, en raiſon dou-
r 11. 8. ble du coſté AB, au coſté CD. [r] Et le nombre q. G, au nombre q. H, auſſi en raiſon doublee du coſté E, au coſté F. Donc AB, ſera à CD, comme E à F: leurs raiſons doublees eſtans egales: partant AB, CD
6. 10. ſont commenſurables en longitude.

Tiercement, soient A, & B, incommensurables en longitude. Ie dis que leurs quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Car si le quarré de A, estoit au quarré de B, comme nombre quarré à nombre quarré, A & B, seroient commens. en longitude, comme il a esté monstré, ce qui est contre l'hypothese. Donc le q. de A, n'est au q. B, comme *n. q. à n. q.* Ce qui est proposé.

Finalement, que les quarrez de A & B, ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Ie dis que A & B, sont incommensurables en longitude. Car s'il n'est ainsi, leurs quarrez sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, comme il est demonstré : Ce qui est contre l'hypothese Donc A, B, ne sont commensurables en longitude : ce qui est proposé. Partant les quarrez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



COROLLAIRE.

De ces choses ainsi demonstrees, il est manifeste que les lignes droictes commensurables en longitude, sont aussi commensurables en puissance: Mais que celles qui sont commensurables en puissance, ne le sont pas toutes en longitude. Et que celles qui sont incommensurables en longitude, ne le sont pas toutes en puissance. Mais les incommensurables en puissance, le sont toutes en longitude.

f 9. 10. Car les quarrez des [f] lignes commensurables en longitude, estans entr'eux comme nombre q. à nombre q. c'est à dire comme nombre à nombre simplement; t 6. 10. [t] iceux seront commensurables, u 3. d. [u] & partant leurs costez commens. en puiss. Donc les lignes droictes commens. en long. le sont aussi toutes en puissance.

En apres, puis que les lignes dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre q. à nombre q. mais simplement comme nombre à nombre, x 3. d. [x] y 9. 10. [y] z 9. 10. [z] sont commensurables en puissance, (leurs quarrez estans commens.) mais non en longitude. Il est manifeste que les lignes commensurables en puissance, ne le sont pas tousiours en longitude, mais seulemẽt les lignes commensurables en puissance, dont les quarrez sont entr'eux comme nombre quarré à nombre q. sont aussi commensurables en long. comme il appert par la 2. partie de ce Theoreme.

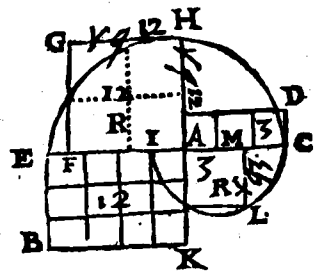
Derechef, d'autant que les lignes dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre q. à nombre q, mais seulement comme nombre à nombre, sont incommensurables en longitude, mais commensurables en puissance, comme il est dict: il appert que les lignes incommensurables en longitude, ne le sont pas toutes en puissance, mais seulement les lignes incommensurables en longitude, dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre à nombre, 4. d. 8. 10. sont aussi incommens. en puiss. leurs quarrez estans incommensurables.

Finalement, il est manifeste que les lignes incommensurables en puissance, le sont aussi en longitude: car si elles estoient commensurables en longitude, elles le seroient en puissance, cõme

il eſt euident de la premiere partie de ce Corollaire, Ce qui eſt abſurde, eſtans poſees incommenſurables en puiſſance.

SCHOLIE.

Pour mieux entendre les deux premieres parties de ce Theoreme, faut ſçauoir que les lignes droictes commenſurables en longitude, dont les quarrez ſont entr'eux comme nombre q. à nombre q. ne ſont pas ſeulement celles qui ſont explicables par nombre; mais auſſi celles qui ne s'y peuuent expliquer, pour l'intelligence dequoy, nous mettrons icy ces deux ſuperficies rectangulaires AB, de douze pieds, ou autres meſures: & AD, de 3. pieds, leſquelles ſont commenſ. la moindre meſurant la plus grande 4. fois preciſement, & ayant fait le q. AG, egal au rect. AB, & AL, egal à AD, le q. AG, ſera 12. & AL, 3. & leurs coſtez ſeront yq. 12. & yq. 3. leſquelles ne ſe peuuent expliquer par aucun nombre, eſtant la By. ou coſté de 12. plus de 3. et moins que 4. et la By. de 3. plus de 1. & moins que 2. Et neantmoins AG, 12. eſtant quadruple de AL, 3. ſon coſté AH, ſera double du coſté AM, comme nous auons monſtré en ſuite de la 4. Propo. du 2. liure. Et partant commenſurables.



14.2.

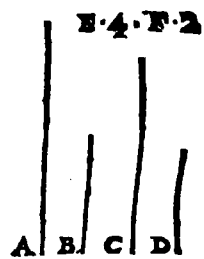
XI. THEOREME 8. PROP. 10.

Si quatre grandeurs ſont proportionelles, & que la premiere ſoit commenſurable à la ſeconde, la troiſieſme ſera auſſi commenſurable à la quatrieſme. Et ſi la premiere eſt incommenſurable à la ſeconde, la troiſieſme ſera auſſi incommenſurable à la quatrieſme.

Soient 4. grandeurs A, B, C, D, proportionelles, & ſoit A 1 commenſurable à B 2. Ie dis que C 3. ſera commenſ. à D 4.

a 5.10. Car d'autant que A & B ſont commenſ. [a] elles ſeront entr'elles comme nombre à nombre.

Soit donc A à B, comme le nombre E, au nombre F: mais comme A eſt à B ainſi C eſt à D, par l'hypotheſe: Donc C, ſera auſſi à D, comme le nombre E, au nombre F. [b] Partant C & D, ſont commenſurables entr'elles.



b 6.10.

Soit maintenant A, incommenſurable à B. Ie dis que C, eſt auſſi incommenſurable à D. Car puis que A & B, ſont incommenſurables: [c] A ne ſera à B comme nombre à nombre: mais comme A eſt à B, ainſi C à D, par l'hypotheſe: Donc C ne ſera à D, comme nombre à nombre. [d] Partant C & D, ſont incommenſurables en-

c 7. 10.

d 8. 10.

tr'elles. Donc ſi quatre grandeurs ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

LEMME.

Trouuer deux nombres plans, leſquels n'ayent meſme raiſon entr'eux que nombre quarré à nombre quarré.

Puis [c] *que les nombres plans ſemblables ont meſme raiſon entr'eux que nombre q. à nombre q. tous les nombres plans diſſemblables ſont tels que requiert ce Lemme. Et tous les nombres premiers ſont tels, & les nombres en raiſon double, ſuperparticuliere, ou ſuperpartiente. Et meſme tous les nombres pris deux à deux, dont l'vn eſt q. & l'autre non, comme 16. & 30. car s'ils eſtoient plans ſemblables,* [f] *ils ſeroient entr'eux comme nombre q. à nombre q. Et l'vn eſtant q. comme 16. l'autre 30. le ſeroit auſſi: ce qui eſt abſurde. Car il eſt poſé non quarré.* 16. 30.

c 26. 8.

f 26. 8.

PROBLEME 4. PROP. 11.

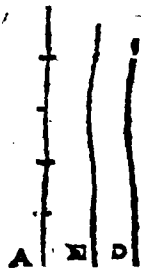
x.
xj.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables à vne ligne droicte propoſee : à ſçauoir, l'vne en longitude ſeulement, & l'autre en longitude & puiſſance.

C. à D. à la ligne droicte, appellee rationelle.

Soit la ligne droicte propoſee A, à laquelle il faut premierement trouuer vne ligne droicte incommenſ. en long. ſeulement.

g. *Lemme prec.* Soient[g] trouuez deux nombres B, C, n'eſtans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré,[h] puis ſoit trouuee la ligne D, au quarré de laquelle ſoit le quarré de A, comme le nombre B au nombre C. Ie dis que D eſt incommenſurable à A en longitude ſeulement. Car le quarré de A, eſtant au quarré de D, comme le nombre B, au nombre C: Mais B & C, ne ſont nombres quarrez: donc le quarré de A, ne ſera au quarré de D, comme nombre quarré à nombre quarré:



h *Cor.* 6. 10.

i 9. 10. [i] donc A & D, ſeront incommenſurables en longitude. Et puis que les quarrez de A & D, ſont entr'eux comme

k 6. 10. nombre à nombre, ils ſeront commenſurables.[k] Partant A & D, commenſurables en puiſſance, elles ſeront donc incommenſurables en longitude ſeulement.

Maintenant pour trouuer vne ligne droicte incommenſ. en longit. & puiſſance à la ligne propoſee A,

l 13. 6. [l] ſoit trouuee E, moyenne proportionelle entre A & D. Ie dis que E, eſt la requiſe. Car

m *Cor.* 20. 6. A, E, D, eſtãs continuellement proport.le[m] q. de A ſera au q. de E, comme A à D: mais A eſt incommenſurable en longitude à D, comme il eſt monſtré:

n 10. 10. o *Coroll.* 9. 10. [n] Donc le q. de A ſera incommenſ. au q. de E: Partant A, E, ſont incom. en puiſ. par la def.[o] & par conſequent auſſi en longit. Parquoy nous auons trouué 2. lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

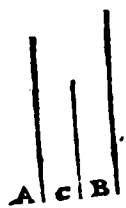
Les nombres prins eſtans 5. & 4. le moyen proportionel entr'eux ſera √q. 20. qui exprime la longitude de D. Mais entre 5. & √q. 20. le moyen proportionel eſt √qqq. 500. quãtité de E, ſi on confere maintenant 5. & √q. 20. il eſt manifeſte qu'ils ſont incommenſurables en longitude, & non en puiſſance, leurs quarrez 25. & 20. eſtans commenſurables. Mais 5. & √qqq. 500. ſont incommenſurables en longitude et puiſſance.

THEOREME 9. PROP. 12. xij viij

Les grandeurs commenſurables à vne meſme grandeur, ſont auſſi commenſurables entr'elles.

Soit l'vne & l'autre grandeur A & B, commenſurables à C. Ie dis que A & B, ſont commenſurables entr'elles.

Car puis que A & C, ſont commenſurables, [x] A ſera à C, comme nombre à nombre, & ſoit comme le nombre D, au nombre E. Et CB, eſtans auſſi commeſurables, C ſera à B, comme nombre à nombre.



x 5. 10.

Soit donc comme le nombre F, au nombre G, & [y] ſoient trouuez les trois nombres HIK, continuelle-

y 4. 8.

ment proportionaux, & les plus petits en la raiſon de D à E, & de F à G. Et H ſera à I, comme D à E: c'eſt à dire, comme A à C, & I à K, comme F à G, c'eſt à dire comme C à B.

Donc A eſtant à C, comme H à I, & C à B, comme I à K: en raiſon egale A ſera à B, comme H à K. Partant A & B, ſeront commenſurab. [z] eſtans entr'elles comme le nombre H, au nombre K. Donc les grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

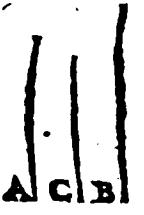
z 6.10.

xij o THEOREME 10. PROP. 13.

S'il y a deux grandeurs, & que l'vne ſoit commenſurable à vne meſme grandeur, & l'autre incommenſurable: Icelles grandeurs ſeront incommenſurables entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, deſquelles A ſoit commenſurable à C, & B incommenſurable à la meſme C. Ie dis que A & B ſont incommenſurables entr'elles.

Car ſi B, eſt dicte eſtre commenſurable à A, C eſtant poſee commenſurable à la meſme A: B & C ſeroient commenſurabbles entr'elles: Ce qui eſt abſurde, eſtans poſees incommenſurables entr'elles. Donc A n'eſt commenſurable à B. Partant s'il y a deux grandeurs, &c: Ce qu'il falloit demonſtrer.

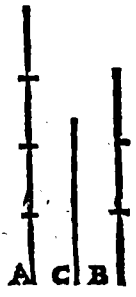


12.10.

THEOREME II. PROP. 14. xiij vij

S'il y a deux grandeurs commensurables, & que l'vne d'icelles soit incommensurable à quelque grandeur; l'autre sera aussi incommensurable à la mesme.

Soient deux grandeurs commensurables A & B, desquelles A soit incommensurable à quelque autre grandeur C. Ie dis que B, sera aussi incommensurable à la mesme C. Car si B est dite estre commensurable à C, & partant aussi C commensurable à B, [a] A & C seroient commensurables entr'elles: Ce qui est absurde, estans posées incommensurables. Donc B, C sont incommensurables entr'elles: Partant si deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



a 12. 10.

SCHOLIE.

De ce Theoreme les Interpretes d'Euclide colligent le suyuant, fort vtile à ce qui est demonstré cy-apres.

Les grandeurs commensurables à des grandeurs incommensurables entr'elles, seront aussi incommensurables entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, incommensurables, ausquelles C & D, soient commensurables,

ſçauoir C *à* A, *&* D *à* B. *Ie dis que* C *&* D *ſont incommenſurables entr'elles. Car d'autant que* A *&* C *ſont commenſurables, &* A *eſt incommenſurable à* B, [b] *la reſtante* C, *ſera auſſi incommenſ. à* B.

b 14. 10.

c 14. 10. *Derechef, d'autant que* D *&* B, *ſont poſees commenſ. &* B *eſt monſtree incommenſ. à* C : [c] *la reſtante* D, *ſera pareillement incommenſurable à la meſme* C. *Ce qui eſt propoſé. Voyez ceſte figure cy-deſſous.*

SCHOLIE.

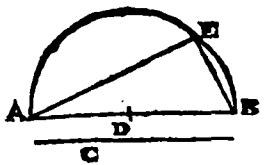
Soient incommenſurables entr'elles yq. 8. *&* *yq.* 27. *auſquelles ſoient commenſurables yq.* 32. *&* *yq.* 147. *à ſçauoir la premiere à la premiere, & la derniere à la derniere : yq.* 32. *&* *yq.* 147. *ſeront auſſi incommenſurables entr'elles, comme il appert.*



LEMME.

Deux lignes droiétes inegales eſtans donnees, trouuer de combien la plus grande peut plus que la plus petite.

Soiens deux lignes droictes inegales propoſees AB, *&* C, *dont* AB, *eſt la plus grande: Il faut trouuer de cõbiẽ* AB, *peut plus que* C.



Soit diuiſee AB, *en deux egalement au poinct* D, *&*

de D,

de D, comme centre, et à l'interualle DA, *ou* DB, *soit descrit le demy-cercle* AEB:[d] *auquel soit accommodee la droicte ligne* AE, *egale à* C, *& conioincte* EB. *Ie dis que* AB, *peut plus que* C, *du q. de* EB,[e] *car puis que l'angle* E, *est droit au demy-cercle :*[f] *le q. de* AB, *est egal aux quarrez de* AE, EB. *Partant* AB *pourra plus que* AE : *c'est à dire que* C, *du quarré de la ligne* BE. *Ce qui est proposé.*

[d] 1. 4.
[e] 31. 3.
[f] 47. 1.

SEMBLABLEMENT.

Deux lignes droictes egales ou inegales, estans proposees, trouuer vne autre ligne droicte pouuant icelles.

Soient les deux lignes droictes AE, EB, lesquelles estans constituees à angle droict au poinct E, & ayant mené AB icelle AB, pourra les deux AE, EB: le quarré de AB, estant egal aux deux quarrez de AE, EB.

47. 1.

THEOREME 12. PROP. 15. xiv xij

Si quatre lignes droictes sont proportionelles, & la premiere peut plus que la seconde, du quarré d'vne ligne qui soit commensurable en longitude à icelle. La troisiesme pourra plus aussi que la quatriesme du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude ; Et si la premiere peut plus que la seconde du quarré d'vne ligne incommensurable en

longitude à icelle. La troiſieſme pourra auſſi plus que la quatrieſme du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle.

Soient les quatre lignes droictes A, B, C, D, proportionelles, & que A premiere, puiſſe *plus que* B 2. du q. de la droicte ligne E, & C 3 plus que D 4. du q. de la droicte ligne F. Ie dis que ſi E eſt commenſ. en longit. à A, que F ſera auſſi commenſ. en longitude à C. Et ſi E eſt incommenſurable en longitude à A: F ſera incommenſurable en longitude à C.

Car puis que A eſt à B, comme C à D: [g] auſſi comme le q. de A ſera au q. de B, ainſi le q. de C au q. de D: Mais le q. de A eſt egal aux qq. de B, E, par l'hypotheſe, & le q. de C, aux quarrez de D, F, donc comme les quarrez de B, E, enſemble, ſeront au q. de B, ainſi les qq. de DF, au q. de D: & en diuiſant, comme le q. de E, au quarré de B: ainſi le quarré de F, au quarré de D. [h]



g 22. 6.

h 22. 6.

Donc comme E eſt à B, ainſi F à D: & *en changeant* comme B à E, ainſi D à F: Donc A eſtant à B, comme C à D, & B à E, comme D à F, en raiſon egale, comme A ſera à E, ainſi C ſera à F. [i] Partant, ſi A eſt commenſurable en longit. à E, auſſi C ſera commenſ. à F en long. Et ſi incommenſ. incommenſ. Donc ſi 4. lignes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

i 10. 10.

PROBLEME 13. PROP. 16. xv ix

Si deux grandeurs commensurables sont composees, la toute sera aussi commensurable à chacune d'icelles : Et si la toute est commensurable à vne d'icelles, les grandeurs proposees au commencement seront commensurables entr'elles.

Soient composees les deux grandeurs commensurables AB, BC. Ie dis que la toute AC, est aussi commens. à chacune d'icelles.



Car[k] soit D, commune mesure de AD, BC. D'autant donc que D, mesure AB, BC, elle[l] mesurera aussi la toute AC: Donc puis que D, mesure AC, & AB: AC, & AB, seront commens. Semblablement puis que D, mesure AC, & BC: AC, & BC, seront aussi commensurables. Donc AC, sera commensurable à chacune d'icelles AB, BC. k 3. 10. l 11. c. ſ.

Soit maintenant la toute AC, commensurable à vne d'icelles, AB, BC, desquelles elle est composee, sçauoir à AB. Ie dis que AB, BC, sont commens. entr'elles. m Car soit D, commune mesure de AC, AB. Donc D mesurant la toute AC, & la retranchee AB: n elle mesurera aussi le reste BC. Partant AB, BC, seront commens. entr'elles, D mesurant l'vne & l'autre, &c. Donc si deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. m 3. 10. n 3. c. ſ.

COROLLAIRE.

D'icy il s'enſuit, que ſi vne grandeur compoſee de 2. eſt commenſurable à vne d'icelles, qu'elle ſera auſſi commenſurable à l'autre. Comme ſi AC, eſt commenſurable à AB, elle ſera auſſi commenſ. à BC, reſtante. Car comme il eſt monſtré en la derniere partie de ce Theoreme: D'commune meſure de la toute AC, & de AB, retranchee,* meſurera le reſte BC. Partant AC, BC, ſont commenſurables.

o 3. c. ſ.

SCHOLIE.

Soient AB, γγ. 8. & BC γγ. 18. commenſurables: AC, γγ. 50. compoſee d'icelles, ſera auſſi commenſurable à chacune des deux. Car γγ. 50. eſt à γγ. 8. comme 5. à 2. nombre à nombre, & γγ. 50. eſt à γγ. 18. comme 5. à 3. P *Partant elles ſont commenſurables en longitude.*

p 6. 10.

xvj ix THEOREME 14. PROPO. 17.

Si deux grandeurs incommenſurables ſont compoſees, la toute ſera auſſi incommenſurable à chacune d'icelles; Et ſi la toute eſt incommenſurable à vne d'icelles, les grandeurs propoſees au commencement, ſeront incommenſurables.

Soient compoſees les deux grandeurs incom-

menſurables AB, BC. Ie dis que la toute AC, eſt auſſi incommenſurable à chacune d'icelles AB, BC; car s'il n'eſt ainſi, elle ſeroit commenſurable, à tout le moins à vne: Soit donc commenſurable à AB, s'il eſt poſſible: [q] & ſoit D, leur commune meſure. Donc puis que D, meſure la toute AC, & la retranchee AB, [r] elle meſurera auſſi le reſte BC. Donc AB, BC, ſeront commenſurables, ayans D pour commune meſure. Ce qui eſt abſurde: car elles ſont poſees incommenſurables.



q 3. 10.

r 3. *e. ſ.*

Soit maintenant la toute AC, incommenſurable à vne d'icelles, ſçauoir à AB. Ie dis que AB, BC, ſont incommenſurables. Car s'il n'eſt ainſi: [t] la toute AC, ſera commenſurable à chacune d'icelles AB, BC ce qui eſt abſurde & contre l'hypotheſe. Donc AB, BC, ſont incommenſurables. Ainſi on demonſtrera AC, AB, incommenſurables. Donc ſi deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

t 16. 10.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de ces demõſtrations, que ſi vne grandeur compoſee de deux, eſt incommenſur. à vne d'icelles, qu'elle l'eſt auſſi à l'autre. Comme ſi AC eſt incommenſ. à AB, elle le ſera pareillement à BC. Car ſi AC eſtoit commẽſ. à BC: [r] AC ſeroit auſſi commenſ. au reſte AB. Ce qui eſt abſurde: car elles ſont poſees incommenſ. Donc AC, n'eſt commenſ. à BC. Ce qui eſt propoſé.

t *Coroll.* 16. 10.

SCHOLIE.

Il eſt manifeſte que ſi ces mombres incommenſ. 8. & γq. 28. ſont compoſez: tout le compoſé 8. p. γq. 28. ſera incommenſ. à chacun d'iceux. Semblablement γq. 10. & γq. 27. ſi chacun eſt conferé auec le compoſé γq. 27. p. γq. 10. & ainſi des autres.

LEMME 1.

Si à vne ligne droicte l'on applique vn parallelogramme deffaillant d'vne figure quarree, le parallelogramme appliqué eſt egal au rectangle, lequel eſt contenu ſous les ſegmens de la ligne droicte, faicts par l'application.

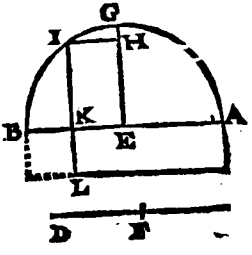
Ce Lemme eſt facile par la 28. Propoſition du ſixieſme liure.

LEMME 2.

Deux lignes droictes inegales eſtans donnees, appliquer à la plus grande vn parallelogramme, egal au quart du quarré de la plus petite: deffaillant d'vne figure quarree.

Cecy ſe peut faire par la 28. du 6. & en ceſte maniere. Soit la droicte ligne AB, plus grande, & CD, plus petite. Il faut faire le requis. Sur AB, ſoit deſcrit le demy-cercle AGB, & ayant couppé CD, en deux egalement au poinct F, ſoit priſe EH, egale à CF, ou à DF, & du poinct H, ſoit menee HI, parallele à BE, & du poinct I, ſoit menee IKL, parallele à GE, & ayant pris KL, egale à

KB, soit acheué le rectangle AL, & le q. LB. Ie dis que le rect. LA, est egal au quart du q. de CD: & est appliqué à la droicte ligne AB, deffaillant de la figure quarree LB. [n] *Car d'autant que KI, est moyenne proportionelle entre AK, KB,* [x] *le rectangle AL, contenu sous les extremes AK, KB, sera egal au q. de KI, c'est à dire au q.de EH:* [y] *(car EH, est egale à KI:) c'est à dire au q.de CF, qui est la quarte partie du q.de CD. Ce qui estoit proposé.*



C v Sch. 13. 6

x 17. 6.

y 34. 1.

Cor. 4. 2.

Le mesme se fera ainsi par les nombres.

Soit AB 20. CD 18. puis que IH, est moyenne proportionelle entre GH, & le reste du diametre: IH, sera yq. 19. ou KE, son egale. Donc BK, sera 10. — yq. 19. mais KA 10. p. yq. 19. Et soit multiplice AK, par KB, le rectangle LA, sera 81. Mais le q. de CD, est 324. Dont la quarte par. 81. est egale au rectangle LA. Or LB est q. car le rectangle sous AB, KL, est 200. — yq. 7600. Mais le rectangle LA, estant osté d'iceluy, demeure l'espace LB, 119 — yq. 7600. lequel est quaré, comme monstre l'Analyse, dont le costé est 10 — yq. 19.

LEMME 3.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & qu'à la

plus grande l'on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, deffaillant d'vne figure quarree, les segmens faicts par cette application seront inegaux.

Soient les lignes droictes AB, CD, & le reste faict, ainsi qu'il est dit en la precedente figure. Ie dis que Bk, n'est egal à AK. Car s'ils estoient egaux, puis que par le Lemme premier, le parallelogramme appliqué à AB, deffaillant de la figure quarree descrite de KB, est egal au rectangle contenu sous les segmens Ak, KB, & le rectangle contenu sous AK, KB, soit q. ledit parallelogramme sera vn q. descrit de AK, moitié de AB: & [2] partant le q. de AB, sera quadruple du mesme parallelogramme. Mais le q. de CD, est aussi quadruple du mesme parallelogramme appliqué, c'est à dire de la quatriesme partie du q. de CD, par l'hypothese. Donc les quarrez de AB, CD, sont egaux: & partant les lignes droictes AB, CD, egales. Ce qui est absurde: car elles sont posees inegales.

2 Sch. 4. 2.

xviij xiij THEOREME 15. PROPO. 18.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & à la plus grande l'on applique vn parallelogramme, egal à la quatriesme partie du quarré de la plus petite, deffaillant d'vne figure quarree, & qu'il diuise icelle plus grande en parties commensurables en longitude: la plus grande pourra plus que la moindre du quarré d'vne li-

gne qui luy ſera commenſurable en longitude. Et ſi la plus grande peut plus que la plus petite, du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude, & qu'on applique vn parallelogramme ſur la plus grande egal au quart du quarré de la plus petite defaillant d'vne figure quarree, il diuiſera icelle en parties commenſurables en longitude.

Soient deux lignes droictes inegales AB, & C, & à la plus grande AB, ſoit appliqué vn parallelogramme egal à la quatrieſme partie du quarré de C, defaillant de AB, d'vne figure quarree, & ſoit contenu ſous AD, DB, & qu'il faſſe les ſegmens AD, DB, commenſurables en longitude. Ie dis que AB, peut plus que C, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude. D'autant que AD, eſt plus grande que DB: Soit diuiſee AB, en deux egalement au poinct E, & ſoit priſe EF, egale à ED, cela eſtant, puis que les toutes EA, EB ſont egales, & les retranchees EF, ED, pareillement, les reſtes AF, BD, ſeront auſſi egales. *Lẽme 3. 18*

Et d'autant que AB, eſt diuiſee egalement par E, & inegalement à D, le rectangle ſous AD, DB, auec le q. de ED, ſera egal au q. de EB: Et partant 4. fois le rectangle ſous AD, DB, & 4. fois le q. de ED, ſera egal à 4. fois le q. de EB: Mais le q. de C, eſt egal à 4. fois le rect. ſous AD, DB: (le rect. ſous AD, DB, eſtant poſé egal au quart du q. de C) & le q. de FD, eſt egal à 4. fois le q. de ED, moitié de FD, & le q. de AB, egal à 4. fois le quarré *5. 2.* *a Sch. 4. 2.*

de EB, moitié de AB. Donc les quarrez de C, & FD, ſont egaux au q. de AB. Parquoy AB peut plus que C, du q. de FD. Ie dis auſſi que FD, eſt commenſ. en long à AB. Car AD, DB, eſtans poſees commenſ. en longit.[b] la toute AB, ſera auſſi commenſ. en longit. à ſa partie DB. Mais la compoſee de DB, AF, eſt auſſi commenſ. en long. à DB, (la compoſee de AF, DB egales, eſtant double de BD.) Donc AB, & la compoſee de AF, DB eſtant commenſ. en longit. chacune à DB,[c] AB, & la compoſee de AF, DB, ſeront commenſ. en long. entr'elles.



b 16. 10.

c 12. 10.

Partant AB, compoſee de AF, DB, comme d'vne, & de FD, eſtant commenſ. en longit. à la compoſee de AF, DB, ſa partie: la meſme AB, ſera[d] commenſ. en longit. à la reſtante FD. Donc AB, peut plus que C, du q. de FD, commenſ. en longitude à AB.

d Cor. 16. 10.

Maintenant que AB, puiſſe plus que C, du q. d'vne ligne commenſ. en longit. à icelle, & ſoit appliqué à icelle vn parallelogramme, comme dict eſt, faiſant les ſegmens AD, DB. Ie dis que AD, DB, ſont commenſurables en longitude entr'eux: Car demeurant la meſme conſtruction l'on demonſtrera pareillement que AB, peut plus que C, du q. de FD. Parquoy AB, eſtant poſee pouuoir plus que C, du q. d'vne ligne droicte commenſ. en longit. à icelle: AB, ſera commenſurable en longitude à FD.

Donc la toute AB, compoſee de FD, & AF,

DB, comme d'vne, eſtant commenſ. en longit. à FD, la meſme AB, [c] ſera auſſi commenſ. en long. à la reſtante compoſee de AF, DB: mais la compoſee de AF, DB, eſt auſſi commenſ. en longit. à DB, (eſtant double d'icelle:) [f] donc AB, DB, eſtans commenſ. en longit. à la compoſee de AF, DB, ſeront commenſ. entr'elles. Partant la toute AB, compoſee de AD, DB, eſtans commenſ. en longit. à DB: AD. DB ſeront commenſ. en longit. entr'elles. Donc s'il y a, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c *Coroll.* 16 10.

f 12. 10.

SCHOLIE.

Soit AB, 30. C. 24. les ſegmens [g] *de AB, ſont 6. & 24. &* [h] *celle par laquelle la plus grande peut plus que la moindre, eſt 18. commenſurable en longitude à 30.*

g 1. 2. *Lemme* 17 10.

h 47. 1.

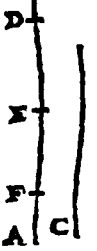
THEOREME 16. PROP. 19. xviij xiiij

S'il y a deux lignes droictes inegales, & à la plus grande l'on applique vn rectangle egal à la quarte partie du quarré de la plus petite, deffaillant d'vne figure quarree; & qu'il diuiſe icelle en parties incommenſurables en longitude; la plus grande pourra plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui ſera incommenſurable en longitude à icelle. Et ſi la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude a icelle, & qu'on ap-

plique à la plus grande vn parallelogramme egal à la quarte partie du quarré de la moindre, defaillant d'vne figure quarree, il diuisera icelle en parties incommensurables en longitude.

2. Lême 17 10. Soient deux lignes droictes inegales AB, & C, & à AB, plus grande, soit appliqué vn parallelogramme egal à la quarte partie du quarré de la moindre C, defaillant d'vne figure quarree, lequel faſſe en AB, les parties AD, DB, incommens. en longitude. Ie dis que AB, peut plus que C, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommensurable en longitude.

Car ayant faict la conſtruction comme en la precedente, nous monſtrerons comme là, que AB, peut plus que C, du q. de FD. Et ie dis que FD, eſt incommens. en longit. à AB: car AD, DB, eſtans poſees incommenſurables en longitude, [i] la toute AB, ſera incom. en longit. à ſa partie DB.: mais DB, eſt commēſ. en long. à la comp. de AF, DB, (celle-cy eſtant double de celle-là,) donc puis que de deux lignes commens. DB, & la compoſee de AF, DB, l'vne, ſçauoir DB, eſt incommens. en longit. à [k] AB: [k] la reſtante compoſee de AF, DB, ſera auſſi incommens. en longit. à AB. Partant AB, compoſee de AF, DB, comme d'vne, & de FD, eſtant incommenſur. en longit. à la compoſee de AF, DB, la meſme AB, [l] ſera auſſi incommenſurable en lon-



i 17. 10.

k 14. 10.

l Coroll. 17 10.

gitude au reſte FD: donc AB, peut plus que C, du quarré de FD, qui luy eſt incommenſurable en longitude.

Maintenant, que AB, puiſſe plus que C, du q. d'vne ligne qui luy ſoit incommenſ. en longit. & qu'on applique à AB, vn parallelogramme egal au quart du q. de C, defaillant d'vne figure quarree, & faiſant en AB, les parties AD, DB. Ie dis que AD, DB, ſont incommenſ. en longitude.

Car demeurant la meſme conſtruction, nous monſtrerons, comme auparauant, que AB, peut plus que C, du q. de FD: parquoy puis que AB, eſt poſee pouuoir plus que C, du q. d'vne ligne qui luy eſt incom. en long. AB, ſera incom. en long. à FD: dõc la toute AB, comp. de FD, & de AF, DB, cõme d'vne, eſtãt incõ. en long. à FD. La meſme AB, [m] ſera incom. en longit. au reſte cõp. de AF, DB: mais la compoſee de AF, DB, eſt commenſ en longit. à DB: (celle-là eſtant double de celle-cy:) donc puis que de deux lignes commenſ. ſçauoir la compoſee de AF, DB, & DB: Icelle compoſee de AF, DB, eſt incommenſ. en longit à AB, [n] la reſtante DB, ſera incommenſ. en longit. à la meſme AB: partant la toute AB, compoſee de AD, DB, eſtant incommenſ. en longit. à DB, [o] icelles AD, DB, ſeront incõmenſ. en longit. entr'elles. Parquoy s'il y a deux lignes droictes inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

m *Cor.* 17. 10.

n 14. 10.

o 17. 10.

SCHOLIE.

Soit AB, 30. & C, 14. Donc les ſegmens AD, DB, ſeront 15. p. γq. 176. & 15. —— γq. 176. incommenſ. entr'eux, [p] *comme il appert: Et FD, par laquelle la plus grande peut plus que la moindre*

p 2. Lẽme 17. 10.

est yq.704.incommenſ.en longit. à 30. Il aduient de meſme de 12. & yq.96. Car les ſegmẽs du plus grand ſont 6. p. yq.12. & 6.——yq. 12. & ce dont le plus grand peut plus que le moindre, eſt yq.48.incommenſ.en longit. à 12.

Juſques icy Euclide a traicté des grandeurs rationelles & irrationelles. Il traictera des rationelles & mediales cy-apres.

LEMME 1.

Eſtant monſtré que les lignes commenſ. en longit. le ſont auſſi en puiſſance : Mais que celles qui ſont commenſ.en puiſſ.ne le ſont pas touſiours en longit. Il eſt euident que s'il y a quelque ligne droite commenſ.en longit.à la rationelle propoſee, qu'elle doit eſtre appellee rationelle et commenſ.à icelle, non en longit.ſeulement; mais auſſi en puiſſ.Car les lignes commenſurables en longitude, le ſont touſiours en puiſſance.

Mais s'il y a quelque ligne commenſ.en puiſſ.& longit.à la rationelle propoſee, elle ſera auſſi dicte rationelle & commenſ.à icelle en longit.& puiſſ.Et ſi derechef il y a quelque ligne commenſ. en puiſſ. à la rationelle propoſee, laquelle luy ſoit incommenſ.en long.elle ſera dite rationelle commenſ.en puiſſance ſeulement à icelle.

LEMME 2. DE PROCLVS.

Il appelle rationelles, les lignes commenſ. en longit. & puiſſ. à l'expoſee rationelle; ou en puiſſ. ſeulement. Il y a auſſi d'autres lignes qui ſont in-

commenſ. en longit. à l'expoſee: mais commenſ. en puiſſ. ſeulement: Et partant ſont dites derechef rationelles & commenſ. entr'elles, entant que rationelles commenſ. diſ-je entr'elles en longit. & puiſſ. ou en puiſſ. ſeulement: Et ſi en longit. elles ſont dites rationelles commenſ. en longit. entr'elles, afin que l'on les entende auſſi commenſ. en puiſſ. Mais ſi elles ſont commenſ. en puiſs. ſeulement entr'elles, ſeront dites rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement entr'elles.

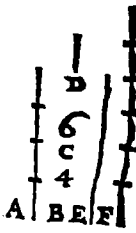
SCHOLIE.

De ces choſes l'on peut colliger qu'il y a trois ſortes de lignes ration. commenſ. en longit. entr'elles. Car de deux lignes ration. commenſ. en longit. entr'elles, l'vne eſt egale à la ration. propoſee: & partant toutes deux commenſ. en long. à la rationel. ou l'vne ny l'autre ne luy eſt egale, & toutesfois toutes deux commenſ. en longit. à icelle ration. propoſee. Où finalement l'vne & l'autre eſt commenſ. à l'expoſee rationelle en puiſſance ſeulement. Or l'on trouuera ces trois ſortes de lignes comme s'enſuit.

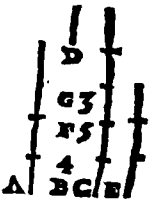
Soit A rationelle propoſee, diuiſee en quatre parties egales, ſçauoir en autant qu'il y a d'vnitez au nombre B. Et prenant quelqu'autre nombre C, ſoit D, egale à vne des parties de A, & autant de fois que D meſure A, qu'elle meſure auſſi quelqu'autre E, autant de fois. Et autant de fois que l'vnité eſt en C, que D en meſure auſſi quelqu'autre F.

D'autant donc que A, E, ſont compoſees de parties egales en multitude, & chacune deſquelles parties

est egale à D, icelles seront egales. Derechef, D mesurant les trois A, E, F, elles seront commens. en longit. Parquoy E, F, estant commens. en longit. à la rationelle proposee A, sont ration. Mais elles sont monstrees commens. en longit. entr'elles, estant D leur commune mesure: Donc EF, sont trouuees ration. commensurables en longitude entr'elles, & à l'expose ration. A, l'vne desquelles, sçauoir E, est egale à icelle A.



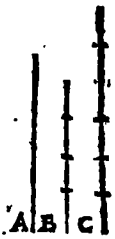
Maintenant que D, mesure deux quelconques lignes C, E, par deux nombres F, G, differens de B: en sorte que l'vne ny l'autre C, E, ne soit egale à A, les 3. A, C, E, seront commens. en longit. comme a esté dict, ayant D pour commune mesure. Donc C, E, sont ration. commens. en longit. à la ration. proposee A: & le sont aussi entr'elles. Donc deux lignes ration. sont trouuees, sçauoir C, E, commens. en longit. entr'elles, & à la ration. proposee A; Dont l'vne ny l'autre n'est egale à A, expose rationelle.



q 11. 10. *Finalement, q soit trouuee B, incommens. en long. seulement à la ration. exposee A, & ayant couppé B, en tant de parties egales que l'on voudra, soit prise C, composee de tant de parties egales que l'on voudra, chacune desquelles soit egale à vne des parties de B. Cela estant, B, C, seront commens. en longit. & chacune sera commens. en puiss. seulement*

ment à A. Car A, B, estant commens. en puiss. le q. de A, sera commens. au q. de B: mais le q. de C, est aussi commens. au q. de B, estant B, C, commens. en longit. & partant en puiss.[r] Donc les quarrez de A & C, seront aussi commens. entr'eux. Parquoy C, est commens. en puiss. à A: & puis que des deux B, C, commens. en long. l'vne, sçauoir B, est incommens. en longit à A:[t] l'autre C, sera aussi incommens. en longit. à la mesme A. Donc C, est seulement commens. en puiss. à A, & puis que B, C, commens. en puiss. à la ration. exposee A, sont ration. L'on aura trouué 2. lignes ratio. B, C, commens. en long. entr'elles. Mais cõmens. en puiss. seulement à la rationelle exposee A. Ce qui est proposé.

r 12. 10.



t 14. 10.

Que si on desire trouuer quelconques lignes ration. commens. en longit. entr'elles (voyez la 2. figure) soit prise quelconque mesure D, & soient composees tant de lignes que l'on voudra A, C, E: d'autant de parties egales à D, qu'il y a d'vnitez en autant de nombres inegaux B, F, G: Car A, C, E, ayans D pour commune mesure, seront commens. en longitude.

Au reste, il est manifeste que toutes les lignes rationelles ne sont pas seulement commens. à vne exposee ration. mais aussi le sont entr'elles.[t] *Car d'autant que les ration. sont celles qui sont commens. à la ration. proposee en longit. & puiss. ou en puiss. seulement:*[v] *mais celles-là lesquelles sont commens. à vne mesme, sont aussi commens. entr'elles. Il appert que quelconques lignes rationelles sont commens. entr'elles.*

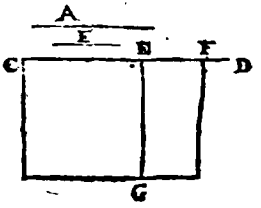
t 6. d.

v 12. 10.

LEMME 3.

S'il y a deux lignes droictes propoſees, comme la premiere ſera à la ſeconde : ainſi le quarré faict de la premiere ſera au rectangle contenu ſous les deux : & comme la ſeconde à la premiere, ainſi le rectangle contenu ſous icelles au quarré de la premiere.

Soient les deux lignes A, E. *Ie dis que comme* A *eſt à* E, *ainſi le q. de* A, *au rectangle ſous* A, E. DE CD, *ſi grande qu'il ſera de beſoin, ſoit priſe* CE, *egale à* A, *& du reſte* ED, *ſoit auſſi priſe* EF, *egale à* E, *& ſoit deſcrit* CG, *q. de* CE, *& accomply le rectangle* GF, *contenu ſous* CE, EF : [a] *D'autant donc que comme* CE, *à* EF, *c'eſt à dire* A *à* E, *ainſi le parallelogramme* CG, *c'eſt à dire le q. de* A, *eſt au parallelogramme* GF, *contenu ſous* A *&* E : *la Propoſition eſt manifeſte. Semblablement comme* E, *à* A, *ainſi le rect.* FG, *au q.* GC. *Ce qui eſt propoſé.*



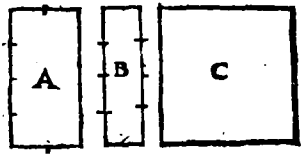
a I. 6.

LEMME 4.

L'eſpace ou ſuperf. commenſurable à vne eſpace rationel, eſt auſſi rationel.

Soit l'eſpace A, *commenſ. à l'eſpace ration.* B. *Ie dis que* A *eſt rationel : car ſoit* C, *q. de la ration.*

proposee : [b] d'autant que B est rationel, il sera cōmens. au q. rationel C, & C commens. à B : mais A est



b 9. d.

aussi commens. à B. Donc A & C, [c] estans commens. à B, seront commens. entr'eux. Partant l'espace A, estant commens. à C q. de la ration. proposee, [d] est ration. Ce qu'il falloit demonstrer.

c 12. 10.
d 6. d.

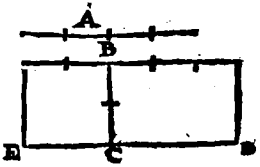
THEOREME 17. PROP. 20. xix xv

Le rectangle contenu sous deux lignes rationelles commensurables en longitude, selon quelqu'vne des manieres deuant dictes, est rationel.

Soit la rationelle exposee A, & le rectangle BD, contenu sous BC, CD, rationelles commens. en longit. selon quelqu'vne des manieres [e] cy-deuant dites. Ie dis qu'iceluy est rationel.

e *Sch.* 19. 10.

Car de l'vne d'icelles, comme de BC, soit descrit le q. BE: D'autant donc que BC, est ration. commens. à la ration. proposee A, ou en long. & puiss. ou en puiss. seulement : [f] son q. BE, sera commens. au q. de



f 3. d.

g 9. d. A: Mais le q. de A eſt rationel, [g] donc BE, commenſ. à iceluy, ſera rationel: mais BC, c'eſt à dire EC, CD, eſtans commenſ. en longit. (car elles ſont poſées ration. commenſ. en longit. entr'elles.) Et comme [h] EC, eſt à CD, ainſi EB à BD: [i] EB, BD, ſeront auſſi commenſ. [k] Parquoy BD, commenſ. à l'eſpace rationel BE, eſt auſſi rationel. Donc le rectangle contenu ſous deux lignes ration. commenſ. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

h 1. 6.
i 10. 10.
k 1. Lem. 49 10.

SCHOLIE.

Soit BC 3. *et* CD 4. *le plan* BD, *ſera* 12. *ou bien ſoit la ligne* BC, *yq.* 3. *&* CD, *yq.* 12. *le rect.* BD, *contenu ſous* BC, CD, *ſera yq.* 36. *c'eſt à dire* 6. *Semblablement ſi on poſe* BC, *yq.* 8. *&* CD, *yq.* 18. *le plan faict d'iceux eſt yq.* 144. *c'eſt à dire* 12. *tous leſquels plans ſont rationaux, ces nombres ayans meſme raiſon entr'eux que nomb. q. à nomb. q.*

XX THEOREME 18. PROP. 21. XVj

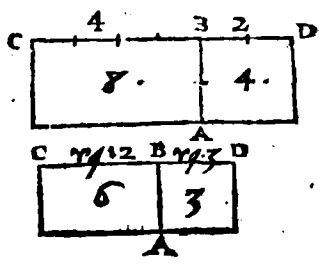
Si vn rectangle rationel eſt appliqué à vne ligne rationelle: il faict la latitude rationelle commenſurable en longitude à la ligne à laquelle il eſt appliqué.

C'eſt à dire, ſi vn rectangle rationel a vn coſté rationel, il aura auſſi l'autre coſté rationel, & iceux coſtez ſeront entr'eux commenſ. en long.

l 45. 1. Soit la rationelle AB, [l] à laquelle ſoit appliqué le rectangle rationel AC. faiſant la latitude BC.

Ie dis que BC, eſt rationelle commenſurable en longitude à AB.

Car ſur AB, ſoit deſcrit le q. AD, [m] lequel ſera rationel: mais comme le rectangle CA, eſt au q. AD: [n] ainſi CB, eſt à BD, ou à BA, ſon egale. Or le rectangle AC, & le q. AD, ſont rationaux: & partant commenſ. Donc [o] CB, & BD, ou BA, ſeront commenſ. en long Mais AB, eſt rationelle: donc [p] BC, ſera auſſi rationelle. Partant ſi vn eſpace rationel, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



m 8. d.

n 1. 6.

o 10. 10.

SCHOLIE.

Soit l'eſpace AC, 6. *& la ligne droicte* AB, γq. 3. CB, *ſera* γq. 12. *laquelle eſt commenſ. en longit. à* γq. 3. *eſtant double d'icelle. Derechef ſoit* AC, 12. *& la ligne droicte* AB, γq, 8. CB, *ſera* γq. 18. *&* γq. 18. *eſt à* γq. 8. *comme* 3. *à* 2. *Car ſi* γq. 18. *eſt diuiſee par* γq. 8. *le quotient ſera* γq. 2. ¼. *c'eſt à dire* γq. 2 ¼ *qui eſt* 2½.

LEMME 1.

Vne ligne droicte pouuant vn eſpace irrationel eſt irrationelle.

Soit quelconque ligne droicte pouuant vn eſpace irrationel, c'eſt à dire, que le q. d'icelle ſoit egal à

quelque ſuperficie irration. Je dis qu'icelle ligne eſt
irration. Car autrement le q. d'icelle ſera ratio-
q 20. 10. *nel: Ce qui eſt abſurde, eſtant poſé irrationel: Donc*
elle eſt irrationelle. Ce qui appert auſſi par la
vnzieſme Definition.

LEMME 2.

Trouuer deux lignes droictes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement.

r 11. 10. *Soit trouuee r vne ligne droite incõmenſ. en long. ſeulement à vne ligne droite rationelle propoſee, icelles ſeront les requiſes: Car eſtans commenſura-*
s 6. d. *bles en puiſſance ſeulement, elles s ſeront auſſi rationelles.*

t 11. 10. *Et ſi à la ligne trouuee on trouue encore vn' au-*
12. 10. *tre ligne commenſ. en puiſſ. ſeulement moindre ou plus grande que la rationelle propoſee t les 3. ſe-*
v 6. d. *ront commenſurables en puiſſ. ſeulement. v Et partant rationelles.*

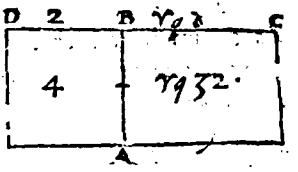
xxj xix

THEOREME 19. PROP. 22.

Le rectangle contenu ſous deux lignes droictes rationelles, commenſurables en puiſſance ſeulement, eſt irrationel: & la ligne droicte pouuant iceluy eſt irrationelle. Soit icelle appellee mediale.

Soit le rectangle AC, contenu ſous les deux lignes rationelles AB, BC, commẽſurables en puiſſance ſeulement. Ie dis que AC eſt irrationel, & la

ligne qui peut icelluy eſt auſſi irrationelle, & icelle ſoit appellee mediale. Car ſur AB, ration. ſoit deſcrit le q.



AD. [x] Donc AD, ſera rationel. Et d'autant que AB, ou DB, ſon egale, eſt incommenſ. en longitude à BC, & que comme DB, eſt à BC, [y] ainſi DA, eſt à AC: [z] AD, ſera auſſi incommenſ à AC: mais le q. AD, eſt rationel: donc [a] le rectangle AC, ſera irrationel. [b] Partant la ligne droicte qui peut le rect. AC: c'eſt à dire de laquelle le q. eſt egal à AC, eſt irrationelle. Soit icelle appellee mediale, où moyenne proportionelle entre AB, BC: d'autant que le q. d'icelle [c] eſt egal au rect. AC, contenu ſous AB, BC. Donc le rectangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

x 8. d.
y 1. 6.
z 10. 10.
a 10. d.
b *Lem.* 1.
21. 10.
c 17. 6.

SCHOLIE.

Il faut icy entendre que toute ligne moyenne proportionnelle, entre deux lignes ration. commenſ. en ſoy, elles ſoyent en puiſſ. ſeulement, ſera appellee mediale. [a] *Car puis que le q. d'icelle eſt egal au rect. contenu ſous telles lignes ration. lequel nous auons monſtré irrationel, le coſté d'iceluy, ſçauoir la moyenne proport. entre icelles ration. ſera irration. laquelle ſera appellee mediale. D'où nous deſcrirons facilement la ligne mediale, diſans que:*

a d d 17. 6.

C'eſt vne ligne irrationelle moyenne proportionelle entre deux lignes rationelles commenſ.

entr'elles en puiſſance ſeulement. Ou bien celle-là qui peut vn rectangle contenu ſous 2. lig. rationelles commenſurables entr'elles en puiſſance ſeulement. Car cette ſeule ligne ſera appellee en ce lieu mediale.

Et le q. d'icelle, ou rect. irration. qu'elle peut, eſt auſſi medial, d'autant qu'il eſt moyen proportionel entre les quarrez d'icelles lignes ration. commenſ. entr'elles en puiſſ. ſeulement: tout de meſme qu'icelle eſt moyenne proport. entre icelles lignes ration. Or tout rect. medial n'eſt pas touſiours contenu ſous 2. lignes ration. commenſ. en puiſſ. ſeulement, comme eſt le medial AC, comme il ſera monſtré à la 25. & 26. de ce liure.

Soit la ligne droicte AB 2. *&* BC, *yq.* 8. *le rect.* AC *ſera yq.* 32. *lequel eſt irrrationel, il ſera auſſi appellé medial. Or la ligne qui peut icelluy qui eſt yqq.* 32. *eſt appellee mediale.*

xxij xx THEOREME 20. PROPO. 23.

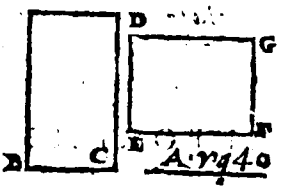
Le quarré d'vne ligne mediale appliqué à vne ligne rationelle, faict la latitude rationelle, & incommenſurable en longitude à la ligne à laquelle il eſt appliqué.

45. 1. Soit la mediale A, & la rationelle BC, à laquelle ſoit appliqué le rectangle BD, egal au quarré de la mediale A; faiſant la latitude ou coſté C D.

e 11. 6. (Ou pour l'appliquer plus briefuement que par la 45. du 1. aux 2. lignes BC, & e A, ſoit trouuée la

troisiesme proport. CD, le rectangle B D, contenu sous BC, CD, [f] sera egal au q. de A.) Ie dis que CD, est rationelle, incommensurable en longitude à BC. [l] 17. 6.

Car d'autant que A est mediale, [g] elle peut vn rectangle contenu sous deux lignes ration. commens. en puiss. seulement: lequel soit EG, sous EF, FG, ration. mais elle peut aussi BD: donc BD, & EG, sont egaux: [h] & estans equiangles, ils auront les costez reciproques autour des angles egaux, sçauoir cõme BC, à EF, ainsi FG, CD: Partant cõme [i] le q. de BC, au q. de EF, ainsi le q. de FG, au q. de CD: mais le q. de BC est commens. au q. de EF, BC, EF, estans ration. [k] dõc le q. de FG, est aussi commens. au q. de CD, donc FG, CD, sont au moins commens. en puiss: mais FG, est posee ration. donc CD, sera aussi rationelle. [g] 22. 10. [h] 14. 6. [i] 22. 6. [k] 10. 10.



Ie dis aussi qu'elle est incommens. en longitude à BC. Car d'autant que EF, FG, sont ration. commens. en puiss. seulement: & comme EF, à FG, [l] ainsi le q. de EF, au rect. EG, [m] le q. de EF, sera incommens. au rect. EG: & partant aussi au rectangle B D. [l] 3. Lẽme 19. 10. [m] 10. 10.

Mais le q. de EF, est commens. au q. de CD, (EF, CD, estans monstrees ration.) donc le [n] q. de CD, & le rectangle B D, sont incõmensurables: mais le [o] q. de CD, est au rectangle BD, comme CD, à BC. [p] donc CD, BC, sont incommen. en longitude: donc CD, est rationelle commensurable [n] 13. 10. [o] 3. Lẽme 19. 10. [p] 10. 10.

en puissance seulement à la rationelle BC, c'est à dire incommensurable en longitude. Ce qu'il falloit demonstrer.

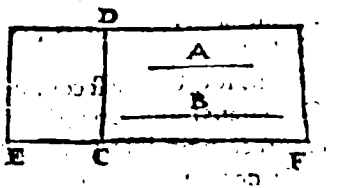
SCHOLIE.

Soit le q. de A, yq. 40. & BC, 2. Donc si l'on applique à BC, yq. 40. la latitude qu'elle fera, c'est à dire, l'autre costé CD, sera yq. 10. lesquels sont entr'eux, comme 5. à 2. qui n'est comme nombre q. à nombre q. & partant incommensurables en long. mais commensurables en puissance. Derechef, soit CB, yq. 5. à laquelle yq. 40. appliquee fera yq. 8. pour la latitude ou costé CD, qui sont entr'eux, comme 5. à 8. & partant commensurables en puiss. seulement, comme il est dict.

THEOREME 21. PROP. 24.

La ligne droicte commensurable à vne ligne mediale, est aussi mediale.

Soit A, mediale, & à icelle A, soit B commensurable. Ie dis que B est mediale.



Car soit exposee CD, rationelle, à laquelle soit q appliqué le rect. DE, egal au q. de la mediale A, faisant la latitude EC: r donc EC, est ration. incommens. en long.

q 45. 1.

r 13. 10.

à CD Derechef, à CD, soit appliqué le rectangle DF, egal au q de B, faisant la latitude CF. Donc d'autant que A & B, sont posees commens. leurs quarrez, c'est à dire les rectang. DE, DF, egaux à iceux, seront commen.[s] mais comme ED, à DF, ainsi la ligne EC, est à CF.[t] Donc EC, CF, sont commensurables en longitude. Mais EC, est demonstree ration. & incommens. en longitude à ED :[v] donc CF, est aussi rationelle, & incommensurable en longitude à CD. Donc DC, CF, sont rationelles commensurables en puissance seulement,[y] & partant la ligne droicte B, pouuant le rectangle DF, contenu sous icelles ED, CF, est mediale. Ce qu'il falloit demonstrer.

[s] 1. 6.
[t] 10.10.
[v] 14. 10.
[y] 22.10.

COROLLAIRE.

De cette demonstration, il est manifeste qu'vn espace medial commensurable à vn espace medial, est aussi medial : car apres qu'il a esté demonstré que DF, est commensurable au rectangle medial DE, de là on a monstré que DF, est aussi medial, contenu sous les rationelles CD, CF, commensurables en puissance seulement.

SCHOLIE.

Soit A, yqq. 48. & B, yqq. 243. CD, 3. Donc EC, sera yq. 5. ; mais DF, yq. 27. lesquelles sont entr'elles comme 4. à 9. Mais si A estoit yq. 12. & B, yq. 27. & CD, 3. EC, seroit yq. 1 ½. & CF, yq. 3. lesquelles sont comme 2. à 3.

LEMME 1.

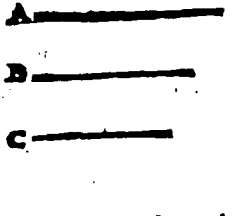
Ce qui a eſté dit des lignes ration. au Lẽme de la 19. Pro. ſera icy dit des mediales: ſçauoir que la lig. droite commen. en longit. à vne mediale ſera auſſi mediale et commenſ. à icelle, non ſeulement en long. mais auſſi en puiſſ. Car vniuerſellement les lignes commenſ. en longit. ſont auſſi commen. en puiſſ. mais s'il y a quelque ligne droite commenſ. en longit. & puiſſ. à vne ligne mediale, elle ſera dite mediale commenſ. à icelle en longit. & puiſſ. Que ſi quelque ligne eſt commenſ. à vne mediale en puiſſ. & incommenſ. à icelle en longit. elle ſera auſſi dite mediale commenſ. en puiſſ. ſeulement à icelle.

LEMME 2.

Trouuer 2. lignes droictes mediales commenſ. en longit. ſemblablement en trouuer 2. commenſurables en puiſſance ſeulement.

Soit vne mediale A, à laquelle ſoient trouuees 2. lignes droictes cõmenſ. B et C: celle-là en longitude, & celle-cy en puiſſ.

24. 10. *l'vne et l'autre B, C, commenſ. à la mediale A, ſera mediale. Donc puis que A & B ſont commenſ. en long. & A, C, en puiſſ. ſeulement; les lignes A, B, ſeront trouuees mediales comm. en long. & A, C, auſſi mediales commen. en puiſſ. ſeul. Ce qui eſt propoſé.*



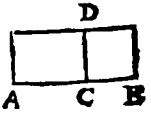
SCHOLIE.

Combien que toute ligne droite commenſ. à vne mediale, ſoit mediale; toutefois toute ligne mediale n'eſt pas commenſ. à quelconque ligne mediale que ce ſoit: d'autant que deux mediales ſe peuuent trouuer, leſquelles ſont totalement incommenſ. ſçauoir eſt en long. & puiſſ. comme il eſt manifeſte par la 36. Propo. de ce liure, par laquelle eſt monſtree la maniere de trouuer deux mediales incommenſ. en longitude & puiſſance.

THEOREME 22. PROP. 25.

Le rectangle contenu ſous deux lignes droictes mediales, commenſurables en longitude, eſt medial.

Soit le rectangle AD, contenu ſous les mediales AC, CD, commenſurables en longitude. Ie dis que AD, eſt medial: Car ſur la mediale CD, ſoit deſcrit le quarré BD, lequel ſera medial. Et d'autant que comme AC, eſt à CB, ainſi AD, à DB: Mais AC, CB: c'eſt à dire AC, CD, ſont commenſ. en long. AD, DB, ſeront auſſi commenſ. Partant l'eſpace AD, commenſ. à l'eſpace medial DB, [a] eſt medial: donc le rect. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. I. 6.



[a] Cor. 24. 10.

SCHOLIE.

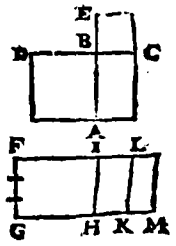
Soient les mediales commenſ. en longit. A C, ÿqq.32.& CD ÿqq.2.le rect. AD, cõtenu ſous icelles, ſera ÿqq. 64. c'eſt à dire ÿqq. 8. Car ÿqq. 32. & ÿqq.2.ſont commenſ.en longit.ſçauoir comme 2. à 1. Car ſi on diuiſe ÿqq.32.par ÿqq.2. le quotient ſera ÿqq.16.c'eſt à dire 2.

XXV XXIIJ

THEOREME 23. PROPO. 26.

Le rectangle contenu ſous deux lignes droictes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, eſt rationel ou medial.

Soit le rectangle AC, contenu ſous les mediales AB, BC, commenſ. en puiſſ. ſeulement. Ie dis que AC, eſt rationel ou medial.



Car de AB, BC, mediales, ſoient deſcrits les quarrez AD, CE, [z] leſquels ſeront mediaux. Et ſoit expoſee la rationelle FG, [b] à laquelle ſoient appliquez les rect. FH, HL, LM, egaux à AD, AC, CE: FM ſera vn ſeul rect. Et AD, CE, eſtans mediaux, leurs egaux rect. FH, LM, ſeront auſſi mediaux, leſquels appliquez à [c] FG, KL, ration. (car KL, eſt egale à FG) & faiſant les latitudes GH, KM, [d] les lignes

z 22.10

a 45.1.

c 34.1.

d 23.10.

GH, KM, seront rationelles incommens. en long. à FG, ou KL. Et d'autant que AB, BC, sont commens. en puiss. entr'elles, leurs quarrez AD, CE, & partant leurs egaux rect. FH, LM, seront commens.[e] Mais comme FH, à LM, ainsi GH, à KM:[f] Donc GH, KM, seront commens. en longitude. e 1.6. f 10.10.

Donc puis qu'il est monstré que GH, KM, sont rationelles & commens. en longit. entr'elles, & commens. en puiss. seulement à la ration. proposee, estans monstrees incommensurables en longitude à icelle;[g] le rectangle sous GH, KM, sera rationel.[h] Et d'autant que comme DB, est à BC, ainsi AD, à AC: & comme AB, à BE, ainsi AC, à CE: (DB, BC, estans egales à AB, BE, chacune à la sienne) comme AD, sera à AC, ainsi AC, à CE: Partant AD, AC, CE, seront proportionaux: Parquoy FH, HL, LM, leurs egaux rectangles sont continuellement proport.[i] mais GH, HK, KM, sont en mesme raison que les rect. FH, HL, LM, elles seront donc proportion.[k] & le rectang. contenu sous GH, KM, est egal au q de HK: mais le rectangle sous GH, KM, est monstré rationel: donc le quarré de HK, sera aussi rationel, donc HK, sera rationelle,[l] & partant commensurable à FG, exposee rationelle, ou à son egale HI, sçauoir en lon. & puiss. ou en puiss. seul. Et si HK, est com. en long. à HI: c'est à dire à son egale FG,[m] le rect. IK, ou son egal AC, sera rationel, & si en puiss. seulement,[n] le rect. IK, sera medial ou son egal AC: donc le rect. AC, contenu sous AB, AC, mediales commens. en puiss. seulement est rationel ou medial. Partant le rect. contenu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. g 20.10. h 1.6. i 1. 6. k 17. 6. l 6. d. m 20. 10. n 22.10.

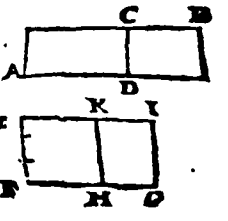
SCHOLIE.

Soient AB, BC, *mediales comm.en puiſſ.ſeulemẽt, & ſoit* AB, *yqq.54.& BC, yqq.24. le rect. ſous icelles ſera 1296.i.6.qui eſt rationel. Derechef, ſoit* AB, *yqq 128.* BC, *yqq. 72. le rect. d'icelles ſera yqq. 9216. i. yqq.6.medial. Or que yqq. 54. & yqq. 24. Item yqq.128.& yqq.72.ſoient com.en puiſſ.ſeulement, il appert: car ſi on diuiſe yqq. 54. par yqq. 24. le quotiẽt ſera yqq. ¾. i. yqq ⅜. Donc yqq. 54. ſera à yqq.24. comme yq.3. à yq.2. Derechef, ſi yqq.128. eſt diuiſee par yqq.72. prouiendra yq. ⅔. Partant yqq.128. et yqq.72. ſeront entr'elles, comme yq. 4. à yq. 3. Ce qui ſera auſſi manifeſte par la 28. & 29. Propoſitions.*

xxvj xxij THEOREME 24. PROP. 27.

Vne eſpace ou figure mediale, n'excede pas vne figure mediale, d'vne figure rationelle.

Soit AB, figure mediale, laquelle excede la mediale AC, de la figure DB. Ie dis que DB, n'eſt pas rationelle.



Car ſoit DB, rationelle, s'il eſt poſſible: & ſoit expoſee la ration. EF, ſur laquelle
45. 1. ſoit appliqué le rect. EG, egal à la mediale AB, & le rect. EM, egal à la

mediale

mediale AC, par ainsi le reste HI, sera egal à la rationelle DB. Et EG, EH, seront mediaux, estans egaux aux mediaux AB, AC, & HI, rationel, estant egal à la figure ration. DB, & EG, EH, estans appliquez sur la ration. EF, [a] ils auront les autres costez FG, FH, rationaux incommensurables en longitude à EF. a 23. 10.

Derechef, puis que HI, ratio. est appliqué à la ration. EF, [b] c'est à dire à HK, son egale, la ligne [c] HG, sera ration. commen. en longit. à la mesme EF, ou HK. Mais FH, est ration. incom. en long. à EF: [d] donc FH, est incom. en longit. à HG; [e] mais comme FH, à HG, ainsi le q. de FH, au rect. contenu sous FH, HG: [f] donc le q. de FH, est incommensurable au rectangle contenu sous FH, HG. Mais les quarrez de FH, HG, sont commen. entr'eux, (car l'vn & l'autre sont descrits sur les ration. FH, HG,) & [g] partant les deux quarrez FH, HG, ensemble sont commens. au q. de FH: Et 2. fois le rectangle sous FH, HG, est commen. au rect. FH, HG, l'vn estant double de l'autre. DONC les 2. q. de FH, & HG, ensemble [h] sont incom. à 2. fois le rect sous FH. HG. Donc le composé des quarrez FG, HG, & du rect. deux fois sous FH, HG; c'est à dire le q. de FG, egal [i] à iceux quarrez & rect. [k] est incom. au composé des quarrez FH, HG, [l] lequel est rationel, estant commen. au q. ration. de FH.

b 34. 1. c 21. 10. d 14. 10. e 14. 10. f *Lemme* 3. 19. 10. g 16. 10. h *Sch.* 14. 10. i 4. 2. k 17. 10. l *Lem.* 4. 19 10.

Donc puis que le q. de FG, est incom. au composé des deux quarrez FH, HG, qui est ration. [m] il sera aussi irrationel. [n] & FG, irratio. Ce qui est absurde; car elle a esté mõstree ration. com. en longit. à EF. DONC HI, ou son egal DB. n'est pas ration. dõc vne figure, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

m 10. d. n 11. d.

SCHOLIE.

Soit AD,CB,prises pour vne seule ligne, yqq. 19683. mais AD,yqq.3888.& CD,yqq,1875. Donc le rect. AB,seray q.6075.& AC,yq.2700.ostant celuy-cy de celuy là, restera DB,yq.675. L'on trouuera le mesme rect. ostant AD, de AD,CB, comme d'vne,& multipliant la restante CB,yqq. 243. par DC, le rectangle DB, sera aussi yq. 675. Et si la rationelle EF, est 3.FH, sera yq. 300.& HG,yq.75. Or que DB,soit medial, il est manifeste par les nombres.

AVTRE SCHOLIE.

Vne figure rationelle, excede vne figure ration.
09. d. *d'vne figure ratio. Car que EG,figure ratio. excede*
p 12. 10. *EH,ratio. de HI. Ie dis que HI, est ration. car EG, EH,estant ration.° elles seront comm. au q. de la ration. EF,ᵖ et partant commen. entr'elles. Donc le*
q Cor. 16. *tout EG,composé de EH, KG, estant commen. à*
10. *EH,ᑫ il sera aussi commen. à l'autre partie KG.*
r Lẽme 4. *Mais EG, est rational:ʳ Donc KG, sera aussi*
19. 10. *rational. Ce qui est proposé.*

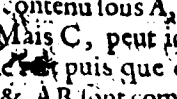
xxvij PROBLEME 4. PROP. 28.

Trouuer deux lignes mediales, commensurables en puissance seulement; contenant vn rectangle rational.

s Lẽme 2.
21. 10. Soient exposees ˢ les deux rationelles A,B,com-

mensurab. en puiss. seulement, [t] & soit trouué C, moyenne proportionelle entre A & B, & comme A est à B, [u] ainsi C, soit à D. Ie dis que CD, sont mediales commensurables en puissance seulement, lesquelles contiennent vn rectangle rationel. t 13. 6. u 12. 6.

Car puis que A, B, sont posees ration. commen. en puiss. seulement, [x] le rect. contenu sous A, B, sera irratio. appellé medial: Mais C, peut iceluy rect. partant elle sera mediale [y] puis que comme A est à B, ainsi C à D, & AB, sont commen. en puiss. seulement, [z] C, D, seront aussi commen. en puiss. seulement: & partant D, commen. à la mediale C, sera aussi mediale: donc nous auons trouué CD, mediales, commen. en puiss. seulement. Ie dis qu'elles contiennent vn rectangle rationel. Car puis que A, est à B, comme C à D, en changeant A sera à C, comme B à D: mais comme A à C, ainsi C à B: Donc C sera aussi à B, cõme B à D: partant B, moyenne proportionelle entre C & D, pourra le rectang. contenu sous CD: mais le quarré de B, ligne rationelle, est rationel: donc le rectangle sous CD, sera aussi rationel. Partant nous auons trouué CD, mediales commensurables en puissance seulement, qui contiennent vn rectangle rationel. Ce qu'il falloit faire. x 22. 10. y 17. 6. z 10. 10. 24. 10. 17. 6.



SCHOLIE.

Soit A, yq.20. B, yq.12. partant C, moyenne proport. sera yqq.240. Et A estãt à B comme C à D, D sera yqq.86. $\frac{2}{3}$. M ais yqq.240. & yqq. 86. $\frac{2}{3}$. sont commens. en puiss. sçauoir comme 5. à 3. est le rect. contenu sous icelles est yqq. 20736. c'est à dire 12. egal au q. de yq.12. qui est aussi 12. Semblablement si A estoit yq. 20. & B, yq. 80. C, seroit yqq. 32000. & D, yqq.1280. & le rectangle sous C D, est yqq.40960000. c'est à dire 80. egal au q. de yq.80. qui est aussi 80.

PROBLEME 5e PROP. 29.

xxviij

Trouuer deux lignes mediales commensurables en puissance seulement ; lesquelles contiennent vn rectangle medial.

Soient prises les trois rationelles A, B, C, commensurab en puiss seulement : [b] & entre A & B, soit trouuée la moyenne proportio. D, puis soit faict comme B à C, ainsi D à E. Ie dis que D & E sont mediales commen. en puiss. seulement, & contiennent vn rect medial.

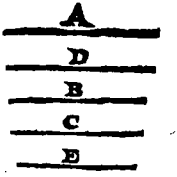
21e 10. b 13. 6. 12. 6.

Car puis que A & B sont ration. commen. en puissance seulement, le rectangle sous A & B, & partant le q. de D egal [c] à iceluy, sera irrationel, lequel est dit medial, & la ligne D, pouuant iceluy mediale.

c 17. 6. 22. 10.

Et puis que B, est à C, comme D à E, & B C, sont ration. commen. en puiss. seulement, D, & E sont aussi commens. en puiss. seulement. Donc

puis que D eſt mediale, [d] d E, commen. en puiſſ. d 24.10.
ſeulement à D, ſera auſſi mediale. Ie dis que D & E, contiennent vn rectangle medial. Car d'autant que B eſt à C, comme D à E, en changeant comme B, ſera à D: ainſi C à E; mais comme B à D, ainſi D à A: donc comme D ſera à A, ainſi C ſera à E. [e] Donc le rectan. e 16.6.



contenu ſous D & E, eſt egal au rect. ſous A C: mais le rectangle contenu ſous A, C, rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement, eſt irrationel & medial: [f] donc le rect. ſous D E, eſt auſſi medial, donc D, E, ſont les mediales requiſes. Ce qu'il falloit faire. f 22.10.

SCHOLIE 1.

Soit A 20. *B yq.* 200. *C yq.* 80. *Partant D, moyenne proport. ſera yqq.* 80000. *Mais comme B à C, ainſi D à E, laquelle ſera yqq.* 12800. *Or yqq.* 80000. *& yqq.* 12800. *ſõt cõme* 5. *à* 2. *et partant commen. en puiſſ. Et le rect. contenu ſous icelles eſt yqq.* 1024000000. *c'eſt à dire yq.* 32000. *egal au rect. contenu ſous* 20. *& yq.* 80.

SCHOLIE 2.

Ce Probleme eſt neceſſaire à ce qui eſt cy-apres.

Trouuer deux nombres plans ſemblables.

Soient pris 4. *nombres quelconques proportio-*

naux, A, B, C, D, ſçauoir que A ſoit à C, comme B à D.

A, 6. C, 12.

Or A multipliant B, faſſe E, & C, multipliant D, faſſe F, E, F, ſeront nombres plans ſemblables, attendu qu'ils ont les coſtez proport, comme il eſt manifeſte par la conſtruction.

B, 4. D, 8.

E, 24. F, 96.

g 28. 29. prop.

Or[g] puis qu'il a eſté demonſtré au 9. liure: que ſi vn nombre impair, ou vn nombre pair, multiplie vn nombre pair, il ſera produict vn nombre pair. Mais ſi vn nombre impair multiplie vn nombre impair, il produira vn nombre impair. Il eſt manifeſte par quelle maniere l'on pourra trouuer deux nombres pairs ſemblables, leſquels ſoient tous deux nombres plans, ou tous deux impairs, ou bien l'vn ſoit pair, & l'autre impair.

Car ſi les coſtez pris ſont nombres pairs, leurs plans ſeront auſſi pairs: mais ſi les nombres ſont impairs, leurs plans ſeront auſſi impairs: mais ſi les coſtez d'vn des nombres ſont nombres impairs et les coſtez de l'autre ſont pairs, le nombre plan, de ceux-là ſera impair: mais de ceux-cy pair. Semblablement ce ſeront plans pairs, ſi vn chacun a vn coſté nombre pair, & l'autre impair, &c.

LEMME I.

Trouuer deux nombres quarrez tels que le compoſé des deux, ſoit auſſi nombre quarré.

h Scho. prec.

Soient[h] trouuez deux nombres plans ſemblables A B, & C, tous deux pairs, ou tous deux impairs.

[i] *Et d'autant que ſi on oſte vn nombre pair d'vn nombre pair, ou d'vn nombre impair vn nombre pair, le reſte eſt pair; ayant oſté* B D, *de* A B, *lequel* D B, *ſoit egal à* C, *le reſte* A D, *ſera pair, lequel diuiſé en deux egalement à* E. *Ie dis que le nombre faict de* A B, *en* B D, [k] *lequel eſt nombre q. compoſé auec le quarré du nombre* E D, *faict vn nombre quarré.* i 24. & 26. 9. k 1. 9.

Car d'autant que le nombre A.....5..E..5.....D...8.....B 18
C.....8
AD, *eſt diuiſé en deux egalement par* E, *& à iceluy eſt adiouſté* D B, [l] *le nombre produict de* AB, *en* BD, *auec le q. du nombre* DE, *eſt egal au q. du nombre* E B. *Donc les deux nõbres quarrez, ſçauoir celuy qui eſt faict de* A B, *en* BD, *& le quarré du nombre* D E, *compoſez, font vn nombre quarré, ſçauoir celuy qui eſt produict de* B E. *Ce qui eſt propoſé.* l 6. Theo. 14. 9. ou 6 2.

COROLLAIRE.

De ce qui eſt dit cy-deſſus, il eſt manifeſte que lors que AB, & C, ſont ſemblables, en la meſme maniere l'on a trouué les deux quarrez des nombres BE, ED: l'excez deſquels, ſçauoir le nombre faict de A B, en B D, eſt auſſi nombre quarré.

Mais ſi on prend les nombres AB, & C, non ſemblables, & neantmoins tous deux pairs ou impairs; en la meſme maniere l'on aura trouué les deux quarrez des nombres BE, ED, l'excez deſquels, ſçauoir le nombre qui eſt faict de A B, en BD, n'eſt pas nombre q. Car s'il eſtoit nombre q. les nombres AB, BD, c'eſt à dire AB, & C, ſeroient 2. 9.

plans ſemblables. Ce qui eſt abſurde : car ils ſont poſez non ſemblables.

SCHOLIE.

Partant, s'il faut trouuer deux nombres quarrez, l'excez deſquels ſoit auſſi nombre q. nous prendrons comme auparauant, deux nombres plans ſemblables, tous deux pairs ou impairs, comme AB, & C, & ferons au reſte comme il eſt dict au Lemme prochain 1. Car les quarrez de BE, ED, ſont les requis. Car le q. de BE, excede le q. de ED, du nombre produict de AB, en BD, qui eſt auſſi quarré.

Mais s'il faut trouuer 2. quarrez, dont l'excez ne ſoit q. il faudra prendre deux nombres AB, & C, non ſemblables, tous deux pairs ou impairs, & faire au reſte comme il eſt dit : Car il ſera monſtré ſemblablement que le q. de BE, eſt egal au q. de DE, auec le nombre produit de AB, en BD: partant l'excez des quarrez de BE, & ED, eſt le nombre produict de AB, en BD, lequel n'eſtant q : (car s'il eſtoit quarré, AB, BD, ſeroient plans ſemblables : ce qui eſt contre l'hypotheſe) l'on a trouué le requis.

A..5...E..5...D...8.....B
C.....8
A..3...E..3..D..7....B
C...7.....

Nous ferons ce dernier plus facilement, ſi nous diuiſons quelconque nombre q. en deux nombres, l'vn deſquels ſoit q. & l'autre non. Comme ſi 36. eſt

diuisé en 16. nombre q. & 20. non q. le nombre q. 36. excedera le nombre q. 16. du nombre 20. non q. Pareillement 36. estant diuisé en 25. & 11. le quarré 36. excedera le quarré 25. du nombre non quarré 11. & ainsi des autres.

LEMME 2.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le composé d'iceux soit nombre non quarré.

Soient[m] trouuez deux nombres plans semblables AB, & C pairs ou impairs, & soit faicte la construction en sorte que le q. faict de la multiplication des nombres semblables AB, DB, l'vn par l'autre, auec le q. de DE, soit egal au q de BE, puis soit retranché de DE, l'vnité EF. Donc le q. de DF, sera moindre que le q. de DE. puis que le costé DF, est moindre que le costé DE. Ie dis que les nombres quarrez, l'vn desquels est faict de AB, en BD, & l'autre de DF, par soy-mesme; composez ne font pas vn nombre quarré.

m *Lemme preced.*

Car si le composé d'iceux est q. il sera plus grand que le q. de BF, ou egal ou moindre, ce qui ne se peut. Car s'il est plus grand que le q. de BF, le co-

A. 2. H. . 2 I. 1 E. F. 1 G. . 3. D. . . 8. . . . . B
C. 8

sté d'iceluy sera plus grand que le costé BF: partant egal au nombre BE, ou plus grand. (Car il ne sera moindre, puis qu'entre BE, BF, differens de l'vnité, il n'y a point de milieu, afin de ne diuiser l'vnité: mais ledict costé seroit milieu entr'eux,

s'il eſtoit poſé plus grand que BF, & moindre que BE.) S'il eſt dict egal, deſorte que le nombre q. compoſé du q. de AB, en BD, & du q. de BF : ſoit egal au q. de BE, puis que le nombre produict de de AB, en BD, auec le q. de DE : n eſt monſtré egal au meſme q. de BE, le nombre de AB, en BD, auec le q. de DF, ſera egal au nombre faict de AB, en BD, auec le q. de DE : oſtant donc le commun, ſçauoir celuy de AB, en BD, le reſtant q. de DF, ſera egal au reſtant q. de DE : & partant le coſté DF, egal au coſté DE, la partie à ſon tout. Ce qui eſt impoſſible : donc le coſté du q. compoſé des quarrez, dont l'vn eſt faict de AB, en BD, & l'autre de DF, par ſoy-meſme, n'eſt egal au nombre BE. Mais il n'eſt auſſi plus grand : car, s'il eſt poſſible, ſoit egal à BI, qui ſoit plus grand que BE : deſorte que ce dict nombre quarré compoſé, ſoit egal au quarré de BI.

n Lemme prec.

A. 2. H. 2 I. 1 E. F. 1 G. 3. D. 8 ..... B
C 8

D'autant donc que le q. de BI, plus grand coſté, eſt plus grand que le q. de BE, moindre coſté : Pareillement le compoſé des qq. dont l'vn eſt produict de AB, en BD, & l'autre de DF, par ſoy-meſme (puis que ce compoſé eſt poſé egal au q. de BI) ſera plus grand que le q. de BE. Mais le q. de BE, o eſt monſtré egal au nombre faict de AB, en BD, auec le q. de DE.

o Lemme prec.

Oſtant donc le commun de AB, en BD, le reſtant q. de DF, ſera plus grand que le reſtant q. de DE : & partant le coſté DF, plus grand que le coſté DE : la parti- que le tout Ce qui eſt impoſſible : donc le coſté du q. compoſé des quarrez de AB, en BD, &

de DF, par soy mesme, n'est pas plus grand que le costé BE : mais il est aussi monstré qu'il n'est pas egal, ny plus petit que BE. DONC ce dit q. composé n'est pas plus grand que le q. BF.

Mais, s'il est possible, soit le nombre de AB, en BD, auec le q. de DF, egal au q. de BF: & soit mis le nombre AH, double de l'vnité EF. D'autant que le tout AD, est double du tout ED (car AD, est diuisé en deux egalement par E) & le retranché AH, double de l'vnité retranchee EF: P le reste HD, sera aussi double du reste FD, & partant HD, est diuisé en 2. egalement à F: q Parquoy le nombre faict de HB, en BD, auec le q. de DF, est egal au q. de BF. Mais le nombre faict de AB, en BD, auec le q. de DF, est posé egal au mesme q. de BF. DONC le nombre faict de HB, en BD, auec le q. de DF, est egal à celuy qui est faict de AB, en BD, auec le q. de DF: & ayant osté le commun q. de DF, le nombre faict de HB, en BD, demeurera egal à celuy qui est faict de AB, en BD. p 7. 7. q 6. Theo. 14. 9.

Partant, puis que HB AB, multiplians vn mesme nombre, BD, produisent nombres egaux, r & que les multiplians ont mesme proportion que les produicts, HB, sera egal à AB, la partie au tout, ce qui est impossible. DONC le nombre de AB, en BD, auec le q. de DF, n'est egal au q. de BF. r 18. 7.

Soit finalement, s'il est possible, le nombre de AB, en BD, auec le q. DF, moindre que le q. de BF: & partant le costé d'iceluy, moindre que le costé de BF, lequel soit BG: de sorte que le nombre de AB, en BD, auec le q de DF, soit egal au q de BG. Or soit pris AI, double de EG. D'autant donc que le tout AD, est double du tout ID, & le retranché AI, du retranché EG. DERECHEF, le reste ID, sera

A. 2. H.. 2 I. 1 E. F. 1 G. 3.. D.... 8..... B C....,...8

double du reſte GD: & partant ID, ſera diuiſé en G, en deux egalement : [5 Theo. 6. 14. 9.] DONC le nombre produict de IB, en BD, auec le q. de DG, eſt egal au q. de BG. Mais le nombre faict de AB, en BD, auec le q. de DF, eſt posé egal au meſme q. de BG. DONC le nombre faict de IB en BD, auec le q. de DG, eſt egal au nombre faict de AB, en BD, auec le q. de DF: oſtant donc les quarrez de DG, DF: dont le q de DG, eſt le moindre; demeurera celuy qui eſt fait de IB, en BD, plus grand que celuy de AB, en BD, la partie que le tout, ce qui eſt abſurde.

Donc le nombre faict de AB, en BD, auec le q. de DF, n'eſt moindre que le q. de BF. Mais il eſt auſſi monſtré n'eſtre plus grand, ny egal. DONC le nombre faict de AB, en BD, auec le q. de DF, n'eſt pas nombre q. Ce qui eſt propoſé.

SCHOLIE. 3.

De ces choſes nous trouuerons facilement deux nombres, tels que le compoſé des deux n'ait meſme proportion à l'vn ny à l'autre d'iceux, que nombre q. à nombre q. Car ſi on trouue deux nombres qq. ſelon le Lemme precedent, tels que le compoſé d'iceux, ne ſoit q. Icelluy n'aura meſme proportion à l'vn ny l'autre deſdits qq. que nombre q. à nombre q

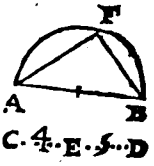
Nous obtiendrons la meſme choſe, ſi nous diuiſons quelconque nombre quarré en deux nombres non quarrez: ainſi le quarré total n'aura meſme pro-

portion à l'vn ny à l'autre de ceux ausquels il est diuisé, que nombre q. à nombre q.

PROBLEME 6. PROP. 30. xxix xvij

Trouuer deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement, en sorte que la plus grande puisse plus que la moindre du q. d'vne ligne droite commens. en longitude à icelle.

Soit exposee la rationelle AB, [t] & soient trouuez deux nomb. quarrez CD, CE, desquels l'excez ED, ne soit q. [u] puis comme le nombre CD, est au nombre DE: ainsi le q de AB, soit au q. de quelque ligne AF, & soit accommodee AF, au demy-cercle descrit sur AB, & conioincte FB. D'autant que l'angle F, [x] est droict au demy-cercle, [y] le q. de AB, sera egal aux deux quarrez de AF, FB: c'est à dire que AB, pourra plus que AF, du q. de FB, & le q. de AB, estant au q. de AF, comme



CD, à DE, nombre à nombre. [z] Iceux quarrez de AB, AF, seront commensurables: Et puis que le q. de AB, est rationel, estant descrit sur la rationelle AB, le q de AF, sera aussi rationel: & partant AF, ratio. donc AB, AF, sont ration. & comm. long. au moins en puiss. & les quarrez de AB, AF, n'estans entr'eux, comme nombre q. à nombre q. icelles AB, AF, seront incommensurables en

t *Sch.* 2. 29
10.
u *Cor.* 6.
10.
x 31. 3.
y 47. 1.
z 6. 10.

longitude: mais elles ſont monſtrees commenſurables en puiſſance : donc AB, A F, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement.

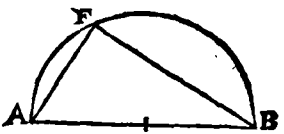
Maintenant, puis que comme CD, eſt à DE, ainſi le quarré de AB, eſt au quarré de A F, par conuerſion de raiſon, comme le nombre quarré CD, ſera au nombre quarré CE, ainſi le quarré de AB, au quarré de BF: (car comme CD, excede ED, par CE, nombre quarré, ainſi le quarré
9.10. AB, excede le quarré de AF, du quarré de FB.) Partant les lignes droictes A B, B F, ſont commenſurables en longitude : Donc nous auons trouue AB, AF, rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, telles que AB, plus grande, peut plus que AF, du q. de BF, commenſ. en long. à icelle. Ce qu'il falloit faire.

xxx xviij PROBLEME 7. PROPO. 31.

Trouuer deux lignes rationelles, commenſurables en puiſſance ſeulement, en ſorte que la plus grande puiſſe plus que la plus petite, du quarré *d'vne* ligne incommenſurable *en longitude* à icelle.

a *Lem.* 29. 10. Soit expoſee la rationelle AB, [a] & trouuez les deux nombres quarrez CE, ED, tels que CD, compoſé d'iceux, ne ſoit nombre q. Ou ſoit diuiſé CD, nombre quarré, en deux nombres non quarrez CE, E D : ainſi le tout ne ſera à

aucun d'iceux, cõme nombre quarré à nombre quaré.



[b] Puisfoit trouuée A F, au quarré de laquelle soit le quarré de A B, comme C D, est à D E, & soit accommodee A F, au demy cercle descrit sur A B, & soit conioincte F B. [c] Donc A B, pourra plus que A F, du quarré de F B. Et A B, A F, seront rationelles commensurables en puissance seulement. Comme il appert par la demonstration precedente.

[b] *Corol. 6. 10.*

[c] *31. 3.*

47. 1.

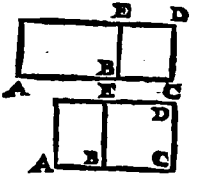
Mais d'autant que par conuersion de raison (comme cy deuant) comme C D, à C E, ainsi le quarré de A B, est au quarré de B F: mais C D, C E, ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré: pareillement les quarrez de A B, B F, ne seront entr'eux comme nombre quarré à nombre q. [d] Partãt les lignes A B, F B, sont incommensurables en longitude. Donc nous auons trouué deux rationelles A B, A F, commensurables en puissance seulement, telles que A B, plus grande, peut plus que A F, moindre du quarré de F B, incommensurable en longitude à icelle. Ce qu'il falloit faire.

[d] *9. 10.*

LEMME.

S'il y a deux lignes droictes inegales, comme la plus grande ſera à la plus petite, ainſi le rectangle contenu ſous icelles, eſt au q. de la plus petite.

Soient deux lignes droictes inegales AB, BC, conſtituees directement, dont AB, eſt plus grande, Ie dis que comme AB eſt à BC, ainſi le rectangle ſous AB, BC, eſt au q. de CB. Car ſoit deſcrit le quarré de BC, & ſoit acheué le rect: AD, le re.



AE, ſera cõtenu ſous AB, BC, puis que EB, eſt egale à
1. 6. *BC : Il eſt donc manifeſte que comme AB, eſt à BC, ainſi le rectangle AE, eſt au q. BC.*

Semblablemẽt, comme la moindre à la plus grande, ainſi le rectangle contenu ſous icelles, eſt au q. de la plus grande, comme il eſt manifeſte, par la 2. figure, en laquelle AB, *eſt moindre que* BC.

PROBLEME 8. PROP. 32.

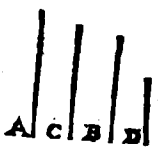
xxvj xiv vx

Trouuer deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, leſquelles contiennent vn rectangle rationel, en ſorte que la plus grande puiſſe plus que la plus petite, du q[uarré] d'vne ligne commenſ. en longitude à icelle.

Soient

Soient trouuees A & B, rationelles commen- a 30. 10.
surables en puissance seulement, telles que A, plus grande, puisse plus que B moindre, du q. d'vne ligne commensurable en longitude à icelle, b & soit C, moyenne proport. entre A & B, & comme A est à B, ainsi C soit à D. b 13. 6. 12. 6.

D'autant que A, B, sont rationelles commens. en puissance seulement: c le rect. sous A, B, est irrationel, & la ligne C, pouuant iceluy, mediale: Et A estant à B, comme C à D, & A, B, commensur. en puiss. seulement: d C, D, seront aussi commens. en puiss. seulement, e partant D, commens. à la mediale C, est mediale. Donc on a trouué deux mediales C, D, commens. en puissance seulement. Ie dis qu'elles comprennent vn rectangle rationel: car puis que A est B, comme C à D, aussi en changeant A sera à C, comme B à D: mais comme A est à C, ainsi C est à B: C sera pareillement à B, comme B à D. Partant le rectangle sous C, & D, sera egal au quarré de B: Parquoy le q. de B, rationelle estant rationel, le rectangle sous C & D, son egal sera aussi rationel: donc C, D, contiennent vn rectangle rationel. c 12. 10. d 10. 10. e 24. 10. 17. 6.



Mais d'autant que A est à B, comme C à D: & A peut plus que B, du q. d'vne ligne commens. en longitude à icelle par la construction: f C pourra aussi plus que D, du q. d'vne ligne qui luy est commens. en longitude. Donc nous auons trouué deux mediales C, D, commens. en puiss. seulement, qui contiennent vn rectangle rationel, & la plus grande C, peut plus que la moindre D, du quarré f 19. 10.

d'vne ligne commenſurable en longit. à icelle. Ce qu'il falloit faire.

§ 31.10. Mais ſi § A, B, ſont trouuees rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement, de ſorte que A puiſſe plus que B, du q. d'vne ligne incommenſurable en longit. à icelle, & que le reſte ſoit faict comme auparauant, on monſtrera ſemblablement que C, D, ſont mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, qui contiennent vn rect. rationel: en ſorte que C, peut plus que B, du q. d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude.

SCHOLIE.

Soit A, 8. & B, γq. 28. le rect. ſous icelles ſera γq. 1792. & la ligne droite C, ſera γqq. 1792. mediale. Et ſoit comme 8. à γq. 28. ainſi γqq. 1792. à vne autre, qui ſoit D, icelle ſera γqq. 343. Donc γqq. 1792. & γqq. 343. ſont 2. mediales commenſ. en puiſſance ſeulement qui contiennent vn rationel, ſçauoir 28. & la plus grande peut plus que la moindre du q. d'vne ligne commenſurable en longitude à icelle.

Car ſi du q. de la plus grande l'on oſte le q. de la moindre: c'eſt à dire, ſi de γq. 1792. on oſte γq. 343. reſtera γq. 567. & γqq. 1792. & Cqq. 567. ſont 2. mediales commenſ. en longit. entr'elles, eſtant comme 4. à 3. Car diuiſant l'vne par l'autre en prouient γqq. 1 1/3. qui eſt 1 1/3. c'eſt à dire 4/3.

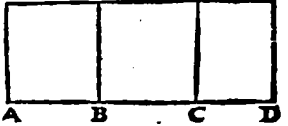
Derechef, ſoit A 8. B γq. 20. le rect. ſous icelles, ſera γq. 1280. & la ligne droicte C γqq. 1280. & ſoit comme 8. à γq. 20. ainſi γqq. 1280. à vne autre, ſçauoir à D, icelle D ſera γqq. 125. Donc γqq. 1280. & γqq. 125. ſont deux mediales cont. vn rect. ratio-

nel, ſçauoir 20. & la plus grande peut plus que la moindre du q. d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle.

Mais ſoit A 3. & B γq. 6. le rect. ſous icelles ſera γq. 54. & la ligne droicte C γqq. 54. Et comme 3. à γq. 6. ainſi γqq. 54. ſoit à vne autre, cet autre ſera γqq. 24. Donc γqq. 54. & γqq. 24. ſont 2. mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement, qui contiennent vn rectangle rationel, ſçauoir 6. & la plus grande peut plus que la moindre du q. d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude.

LEMME.

S'il y a trois lignes droictes propoſees, comme la premiere ſera à la troiſieſme: ainſi le rect. contenu ſous la premiere & la 2. à celuy qui eſt contenu ſous la 2. & la 3.



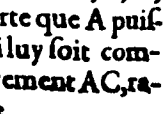
Soient 3. lignes droictes conſtituees directemẽt, AB, BC, CD. Ie dis que comme AB 1. eſt à CD 3. ainſi le rectangle contenu ſous AB, BC, eſt au rectangle ſous BC, CD.

Car ſur BC, ſoit deſcrit le quarré B C G E, & ſoit acheué le rectangle A F: A E, ſera contenu ſous AB, BC: & CF, ſous BC, CD, puis que BE, CG, ſont egales chacune à BC. Or il eſt manifeſte que A E, eſt à CF, comme AB, à CD. 1. 6.

xxxij xxvj PROBLEME 9. PROP. 33.

Trouuer deux lignes mediales commensurables en puissance seulement; lesquelles contiennent vn rectangle medial: en sorte que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.

h 30. 10. Soient trouuees[h] les trois rationelles A, B, C, commens. en puiss. seulement, en sorte que A puisse plus que C, du q. d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude: Lem. 2. 21 10. [i] premierement AC, rationelles commens. en puissance seulement, en sorte que la plus grande puisse plus que la moindre du q. d'vne ligne qui luy soit commens. en longit. & B, commens. en puiss. seulement à l'vne & à l'autre,[k] puis soit prise D, moyenne proportion. entre A, B:[l] & comme D à B, ainsi C soit à E.



k 13. 6. l 12. 6. m Lem. pr. n 17. 16. D'autant que comme A est à C, [m] ainsi le rect. sous A, B, est au rect. sous BC:[n] mais le q. de D, est o 16. 6. egal au rect sous AB: Et le rect. sous DE, est egal au rect. sous BC:[o] puis que DB, CE, sont prop. Pareillement, comme A à C, ainsi le q. de D, sera au rect. p Lem. 3. 19. 10. sous D, E.[p] Mais comme le q. de D. est au rect. de DE, ainsi D est à E. Donc comme A est à C, ainsi D à E: mais A, C, sont commensur. en puiss. seule- q 10. 10. ment: [q] donc D, E, le seront aussi. Mais d'autant

que D pouuant le rect. de A, B, rationelles commens. en puiſſ. ſeulement, eſt irrationelle & mediale, [r] E, commens. à D, ſera auſſi mediale. Nous auons donc trouué deux mediales D, E, commens. en puiſſ. ſeulement. [r] 22. 10. [r] 24. 10.

Et d'autant que le rectangle ſous D E, eſt monſtré egal au rect. de B, C, [r] medial, (puis que B, C, ſont ration. commenſur. en puiſſance ſeulement) le rect. ſous D E, ſera auſſi medial. [r] 22. 10.

Finalement, puis que nous auons monſtré que comme A eſt à C, ainſi D à E : mais A peut plus que C, du q. d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. par la conſtruction, [r] D pourra auſſi plus que E, du q. d'vne ligne qui luy ſera commenſurable en longitude. [r] 15. 10.

Nous auons donc trouué deux mediales D E, commenſurables en puiſſ. ſeulement, qui contiennent vn rectangle medial, & la plus grande D, peut plus que la plus petite E, du q. d'vne ligne qui luy eſt commenſur. en longitude. Ce qu'il falloit faire.

Mais ſi les rationelles ſuſdictes auoient eſté trouuees, en ſorte que A peuſt plus que C, du quarré d'vne ligne incommenſur. en longitude à icelle, la mediale D, pourroit plus que E, du quarré d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle : & ayant acheué la conſtruction comme auparauant, l'on demonſtrera ſemblablement que D E, ſont trouuees mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement, contenant vn rectangle medial, en ſorte que la plus grande peut plus que la moindre du q. d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle. &c.

SCHOLIE.

Soit A 8. B γq. 48. C γq. 28. le rectangle ſous AB, *ſera γq. 3072, & la droite ligne D γqq. 3072. qui eſt mediale. Soit comme A à C, ainſi D à vne autre qui ſoit E: E ſera γqq. 588 Donc γqq. 3072. & γqq. 588. ſont deux mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement cont. vn medial, & la plus grande peut plus que la moindre du q. d'vne ligne commenſ. en longitude à icelle.*

Car oſtant le moindre du plus grand, c'eſt à dire de γq. 3072. γq. 588. le reſte ſera γq. 972. & γqq. 3072. & γqq. 972. ſont deux mediales commenſ en longitude entr'elles, ſçauoir comme 4. à 3. Car diuiſant γqq. 3072. par γqq. 972. le quotient ſera γqq. $3\frac{1}{3}$. qui $1\frac{1}{3}$. c'eſt à dire $\frac{4}{3}$.

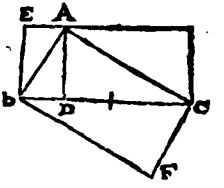
Derechef, ſoit A 8. B γq. 48. C γq. 20. D ſera auſſi γqq. 372. ſoit comme A à C, ainſi D à vne autre qui, ſoit E: E ſera γqq. 300. Donc γqq. 3072. & γqq. 300. ſont deux mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement, contenant vn medial, la plus grande pouuant plus que la moindre du quarré d'vne ligne qui eſt incommenſurable en longitude à icelle. Mais ſoit A γq. 6. B γq. 3. C γq. 2. D ſera γqq. 18. Et ſoit comme A à C, ainſi γqq. 18. à vne autre qui ſoit E: E ſera γqq. 2. Donc γqq. 18. & γqq. 2. ſont deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, qui contiennent vn rectangle medial, dont la plus grande peut plus que la moindre du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle.

LEMME I.

Soit le triangle ABC, ayant l'angle BAC, droict, duquel soit menee la perpendiculaire AD. Ie dis que le rectangle contenu sous CB, BD, est egal au quarré de AB: Et le rectangle contenu sous BC, CD, est egal au quarré de AC: Et le rectangle sous BD, DC, est egal au quarré de AD. Finalement, le rectangle contenu sous BC, AD, est egal au rectangle contenu sous AB, AC.

D'autant que AB, [u] *est moyenne proport. entre* CB, BD: *le rectangle contenu sous* CB, BD, [x] *sera egal au q. de* AB, *par la mesme raison, le rectangle sous* BC, CD, *sera egal au q. de* AC, *puis que* AC, *est moyenne proportion. entre* BC, CD.

u Coroll. 8. 6.
x 17. 6.



Derechef, d'autant que AD, *est moyenne proport. entre* BD, DC, *semblablement le rect. sous* BD, DC, *sera egal au q. de* AD.

Finalement, d'autant [y] *que les triangles* ABC, ABD, *sont semblables, comme* BC, *sera à* AC, *ainsi* AB, *sera à* AD. *Donc le rect. contenu sous* BC, AD, *sera egal au rect. contenu sous* AB, AC. *Ce qui sera aussi monstré ainsi. Soit acheué le rect.* CE, *contenu sous* BC, AD: *Semblablement le rect.* AF, *contenu sous* AB, AC. [z]

y 8. 6.
16. 6.
z 41. 1.

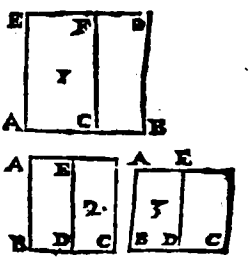
D'autant donc que le rectangle CE, *eſt double du triangle* ABC, *& que le rectangle AF, eſt double du meſme triangle, iceux rectangles* CE, AF, *ſeront egaux entr'eux. Ce qui eſt propoſé.*

LEMME 2.

Si vne ligne droicte eſt coupee en deux parties inegales, comme la plus grande partie eſt à la plus petite, ainſi le rectangle ſous la toute, & la plus grande partie, eſt au rectangle ſous la toute & la moindre partie.

Soit coupee AB, *en deux parties inegales par* C, *& ſoit* AC, *la plus grande partie. Ie dis que comme* AC, *eſt à* CB, *ainſi le rect. ſous* AB, AC, *eſt au rect. ſous* AB, CB.

Car ſur AB, *ſoit deſcrit le q.* A B D E, *& ſoit menee* C F, *parallele à* A E, *le rectang. AF, ſera contenu ſous* AB, AC, *&* CD, *ſera contenu ſous* AB, CB, *puis que tant* AE, *que* CF, *eſt egale à* A B. [a] *D'autant donc que comme* A C, *eſt à* CB, *ainſi AF, à* CD: *la propoſition eſt manifeſte.*



a I. 6.

Semblablement, comme la moindre partie B C, *à la plus grande* CA, *ainſi* BF, *contenu ſous* AB, BC, *la toute & la moindre partie eſt à* CE, *contenu ſous* AB, CA, *la toute & la plus grande partie.*

LEMME 3.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & que la plus petite ſoit coupee en deux parties egales : le rectangle contenu ſous icelles lignes, ſera double de celuy qui eſt contenu ſous la plus grande ligne, & ſous la moitié de la moindre.

Soient deux lignes droictes inegales AB, BC, *contenant l'angle droit* ABC, *& ſoit coupé* BC, *moindre, en deux egalement au poinct* D. *Ie dis que le rect. ſous* AB, BC, *eſt double du rect. ſous* AB, BD. *Car ſoit acheué le rect.* AC, *contenu ſous* AB, BC, *& ſoit menee* DE, *parallele a* AB : BE, *ſera contenu ſous* AB, *&* BD, *moitié de la moindre.* [b] *D'autant que* AC, *eſt double de* BE, *puis que la baſe* BC, *eſt double de la baſe* BD : *la propoſition eſt euidente.* I. 6.

Semblablement, ſi BC, *(laquelle ſoit plus grande) eſt coupee en deux egalement, le rect. contenu ſous* AB, BC, *eſt double de celuy qui eſt contenu ſous* AB, *moindre, &* BD, *moitié de la plus grande, comme il appert par la 2. figure. Voyez la figure & 3. precedente.*

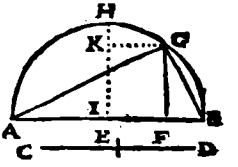
PROBLEME 10. PROP. 54.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, leſquelles faſſent le compoſé de leurs quarrez rationel : mais le rectangle contenu ſous icelles medial.

Soient [c] trouuees deux rationelles AB, CD, *c* 31. 10.

commenſurables en puiſſance ſeulement, telles que la plus grande AB, puiſſe plus que la plus petite CD, du q. d'vne ligne qui luy ſoit incommenſurable en long. Et ayant coupé CD, en deux egalement à E: [d] ſoit appliqué à AB, vn rect. egal au q. de CE, c'eſt à dire egal au quart du q. de CD, defaillant d'vne figure quarree, & ſoit celuy qui eſt contenu ſous AF, FB: & ayant deſcrit le demy-cercle AGB, ſoit menee FG à angles droicts, & coniointes AG, GB.

d *Lem.* 17. 10.



D'autant que AB, peut plus que CD, du q. d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en long. & qu'on a appliqué à AB, vn rect. contenu ſous AF, FB, egal au quart du q. de CD, defaillant d'vne figure q. [e] AF, ſera inf. commenſ. en longit. à FB. [f]

e 19. 10.

f *Lem.* 2. 33 10.

Mais comme AF, à FB, ainſi le rectangle ſous AB, AF, au rectangle ſous AB, FB: [g] mais le rectangle ſous AB, AF, eſt egal au q. de AG, & le rect. ſous AB, FB, egal au q. de BG, puis que l'angle AGB. eſt droict [h] au demy cercle: dõc comme AF, à FB, ainſi le q. de AG, au q. de GB: & partant puis que AF, FB, ſont incommenſ. en longit. [i] les quarrez de AG, GB, ſeront incommenſ. [k] Donc les lignes AG, GB, ſont incommenſ. en puiſſ. Et d'autant que le q. de la rationelle AB, eſt rationel, [l] & egal aux quarrez de AG, GB, le compoſé des quarrez de AG, GB, eſt auſſi rationel.

g *Lem.* 1. 33 10.

h *31.* 3.

i 10. 10.

k 4. d.

l 47. 1.

m *Lẽme* 1. 33. 10.

Derechef, d'autant que le rect. ſous AF, FB, [m] qui eſt faict egal au q. de CE, [n] eſt egal au q. de

n 17. 6.

FG (puis que l'angle AGB, eſt droict, & FG, perpendiculaire à AB) les quarrez de FG, GE, ſeront egaux, & partant les lignes FG, CE, egales: parquoy CD, double de CE, ſera auſſi double de FG: [o] donc le rect. ſous AB, CD, ſera double du rect. ſous AB, FG, mais le rectangle contenu ſous les rationelles AB, CD, commenſurables en puiſſance ſeulement, eſt medial; donc le rectangle ſous AB, FG, commenſurable à icelluy, eſtant ſa moitié, [p] eſt auſſi medial. Mais le rectangle contenu ſous AG, GB, [q] eſt egal au rectangle contenu ſous AB, FG. Donc le rectangle contenu ſous AG, GB, eſt auſſi medial: mais le compoſé des quarrez de AG GB, eſt monſtré rationel. Donc nous auons trouué deux lignes droites AG, GB. incommenſ. en puiſſ. qui font le compoſé de leurs quarrez rationel, & le rectangle contenu ſous icelles medial. Ce qu'il falloit faire.

o Lem. 3. 33 10. 22. 10.

p Cor. 4. 10.

q Lem. 1. 33 10.

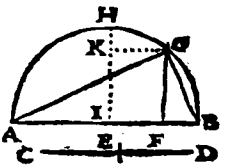
SCHOLIE.

Soit AB, 12. et CD, yqq. 6. & ſoit AB, diuiſee en AF, FB, faiſant AC, 6. p. yq. 12. & FB 6. —— yq. 12. Partant FG, moyenne proport. entre AF, FG, ſera yq. 24. dont la double CD, eſt yq. 96. Donc CD, faiſant yq. 96. FG, ſera yq. 24. Et AF, 6. p. yq. 12. FB. ſera 6. —— yq. 12. Partant AG ſera yq. 72. p. yq. 1728. & GB, yq. 72. —— yq. 1728. Partant AG, GB, ſont les requiſes: car elles ſont incõmenſur. en puiſſ. conte. vn rect. medial, qui eſt yq. 3456. & le compoſé de leurs qq. 144. eſt rationel.

xxxiv xvxiij PROBLEME II. PROP. 35

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, leſquelles faſſent le compoſé de leurs quarrez Medial: Et le rectangle contenu ſous icelles Rationel.

Soient trouuees deux mediales AB, CD, commenſ. en puiſſ. ſeulemét, contenant vn rect. rationel: en ſorte que AB, plus grande, puiſſe plus que CD, moindre du q. d'vne ligne incommenſ. à icelle en longit. Et ſoit faict au reſte comme en la 34. Prop. l'on monſtrera ainſi qu'en icelle 34. pro. que AC, GB ſont incommenſ. en puiſſ. Et le q. de la mediale AB (egal aux quarrez de AG, GB) eſtant medial, le compoſé d'iceux quarrez de AG, GB, ſera auſſi medial.



Derechef, comme en la 34. Prop. le rect. ſous AB, CD, ſera monſtré double du rect. ſous AB, FG: & partant commenſ. Parquoy le rect. ſous AB, CD, eſtant rationel par la conſtruction, le rectang. ſous AB, FG, commenſ. à iceluy, ſera auſſi rationel mais le rect. ſous AG. GB, eſt egal au rectangle ſous AB, FG: donc le rect. ſous AG, GB, eſt auſſi rationel.

Or le compoſé des quarrez de AG, GB, eſt

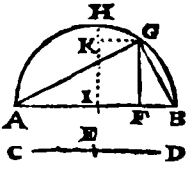
monſtré medial. Donc AG, GB, ſont trouuez incommenſ. en puiſſ. faiſant le compoſé de leurs quarrez medial : mais le rectangle ſous icelles rationel, Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit la ligne AB yqq.864. CD yqq.384. ED, ou FC, ſon egale, ſera yqq.24. & AF, yqq. 54. p. yqq.6. FB, yqq.54. —— yq.6 Donc AG, ſera yq. (yq.125. p. yq.72.) Mais GB, yq. (yq.216. —— yq. 72.) incommenſurables en puiſſance, faiſans le compoſé de leurs quarrez, ſçauoir yq.864. medial, & le rectangle ſous icelles rationel.

PROBLEME 12. PROPO. 36. xxxv xxix

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, faiſans le compoſé de leurs quarrez medial, & le rectangle contenu ſous icelles medial, & incommenſurable au compoſé de leurs quarrez.



Soient [u] trouuees A B, CD, mediales, commenſ. en puiſſ. ſeulement, contenant vn rect. medial, en ſorte que AB, plus grande, puiſſe plus que C D, moindre, du q. d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle : & ayant faict au reſte comme en la trente-quatrieſ-

[u] 33.10.

me Proposition. Ie dis que AG, GB, sont les lignes requises.

Car comme en la 34. Prop. l'on monstrera que AG, GB, sont incommensurables en puissance. Et d'autant que le q. de AB, mediale, est medial, (x estant egal aux quarrez de AG, GB,) le composé des quarrez de AG, GB, sera aussi medial. Derechef, le rectangle sous AB, CD, est double du rectangle sous AB, FG, (y comme il est mõstré,) & partant commensurables; donc par la construction le rectangle sous AB, CD, estant medial, le rectang. sous AB, FG, (c'est à dire le rect. sous AG, GB, z son egal) est aussi medial: mais AB, estant posee incommensur. en longit. à CD, & CE, est commens. en longit. à la mesme CD: CD estant double de CE, a AB, CE, seront incommensur. en longitude.

x 47. 1.
y 34. 10.
z 1. Lem. 33. 10. Cor. 24. 10
a 13. 10.

Mais comme AB, à CE, b ainsi le quarré de AB, au rectangle sous AB, CE: c'est à dire au rect. sous AB, FG, c'est à dire sous AG, GB: c (car les rectangles sous AB, FG, & sous AG, GB, sont egaux:) donc d le quarré de AB, est incommens. au rectangle sous AG, GB. Partant AG, GB, sont trouuees incommens. en puissance: faisans le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez. Ce qu'il falloit faire.

b 3. Lem. 19. 10.
c 1. Lẽme 33. 10.
d 10. 10.

SCHOLIE.

Soit AB, γqq. 720. CD γqq. 320. *Donc* CE, *ou son egale* FG, *sera* γqq. 20. *&* AF, γqq. 45. *p.* γqq. 5. *Mais* FB, γqq. 45. —— γqq. 5. *et* AG, γq. (γq. 180. *p.* γq. 60.) *&* GB, γq. (γq. 180. —— γq. 60. *lesquel-*

les ſont incommenſurables en longitude, faiſans le compoſé de leurs quarrez medial, & le rectangle medial, &c.

De ce Probleme nous obtiendrons facilement le ſuyuant.

Trouuer deux lignes mediales incommenſurables en longitude & puiſſance.

D'autant qu'il a eſté demonſtré, que tant le compoſé des quarrez de A G, G B, que le rectangle ſous icelles eſt medial, ce iceluy rectangle eſt incommenſurable au compoſé deſdits quarrez : la ligne qui peut iceluy compoſé medial, & la ligne qui peut le rectangle medial, ſeront auſſi mediales incommenſurables, tant en longitude qu'en puiſſance.

Car ſi elles eſtoient commenſurables en puiſſance, leurs quarrez ſeroient auſſi commenſurables: c'eſt à dire le compoſé des quarrez de AG, GB, & le rectangle ſous AG, GB: ce qui eſt contre l'hypotheſe. Partant, ſi on prend AB, qui peut le compoſé des quarrez de AG, GB, & vne autre ligne droite ponuant le rectangle ſous AG, G B: c'eſt à dire la moyenne proport. entre AG, G B, l'on aura trouué deux mediales incommenſurables en longitude & puiſſance. Ce qui eſt propoſé.

ICY COMMENCENT les ſizaines des lignes irrationelles par compoſition.

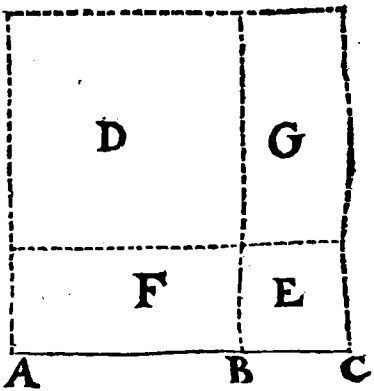
xxxvj
xxx

THEOREME 25. PROP. 37.

Si deux lignes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement ſont compoſees : la toute ſera irrationelle. Soit icelle appelle de deux noms.

Soient compoſees deux rationelles trouuees, [c] AB, BC, commenſ. en puiſſ. ſeulement. Ie dis que la toute AC, eſt irrationelle.

c *Lem.* 2. 21 10.

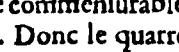


Car AB, eſtant incommenſ. en longitude à BC : & [f] comme AB, à BC, ainſi le rectangle ſous AB, BC, au q. de BC : [g] ſçauoir F à E ; le rectangle ſous AB, BC, ſera incommenſurable au q. de BC. Mais deux fois le rect. ſous AB, BC,

f *Lem.* 3. 10 ou 1. 6.

g 10. 10.

est commensurable à iceluy rectangle, sous A B, BC, sçauoir F & G ensemble, à G, ou F, & le q. de AB, est commensurable au quarré de BC, sçauoir D à E, (estans rationaux,) [h] parquoy le composé des quarrez de AB, BC, est commensurable au quarré de BC. [i] Partant le composé de deux fois le rectangle sous AB, BC, & le composé des quarrez de AB, BC, sont incommensurables. Parquoy le q. de AC, composé des quarrez de AB, BC, & de deux fois le rectangle sous AB, BC: ([k] car le quarré de AC, est egal à iceux deux qq. de AB, BC, & aux deux rectangles sous AB, BC, comme il appert) [l] est incommensurable au composé des quarrez de AB, BC: mais le composé des quarrez de AB, BC, est rationel, estant monstré commensurable au quarré de la rationelle BC. Donc le quarré de AC, incommensurable au quarré de la rationelle BC, est [m] irrationel: Partant AC, sera irrationelle. Or soit icelle ligne appellee de deux noms, ou comme disent les autres, binome, d'autant qu'elle est composee de deux noms, c'est à dire de deux lignes rationelles AB, BC, commensurables en puissance seulement. Donc si deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement, sont composees, la toute sera irrationelle. Ce qu'il falloit demonstrer.



h 16.10.
i 16.14.10.
k 4.2.
l 17.10.
m 10.d.

SCHOLIE.

Soit AB 2. BC, 3. q. 3. AC, sera 2. p. 3. & son quarré 7. p. 3 q. 48. Car le quarré de AB, est 4. & le quarré de BC, 3. mais le rectangle

ſous AB, BC, yq. 12. dont le double eſt yq. 48.

Partant deux lignes irration. ſont procreées de deux rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. [a] *Car la moyenne proportionelle entre icelles eſt irrationelle, laquelle eſt appellee mediale:* [o] *& la compoſee d'icelles eſt irrationelle, laquelle eſt appellee de deux noms ou Binome.*

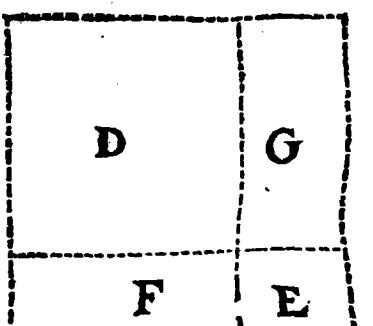
a 22. 10.

o 37. 10.

xxxvij xxxj THEOREME 26. PROP. 38.

Si deux lignes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, contenant vn rectangle rationel ſont compoſees; la toute ſera irrationelle. Or ſoit icelle appellee premiere de deux mediales.

p 28. 10. Soient compoſees deux mediales [p] trouuees AB, CD, commenſ. en puiſſ. ſeulement contenant vn rectangle rationel. Ie dis que la toute AC, eſt irrationelle: [q] car AB, eſtant à BC comme le rectangle ſous AB, BC, eſt au q. de BC, [r] & AB, BC



q *Lem.* 31 *on* 16. 10.

r 10. 10.

incommensurables en longitude, le rectangle sous AB, BC, sera incommensurable au quarré de BC, sçauoir F à E. Mais deux fois le rect. sous AB, BC, est commensurable au rectangle sous AB, BC, & le composé des quarrez de AB, BC, est commensurable au q. de BC. (car AB, BC estans commensurables en puissance, leurs quarrez seront commensurables, & [f] partant le composé d'iceux sera commens. au q. de BC.) Donc deux fois le rect. sous AB, BC, & le composé des quarrez do AB, BC, [c] sont incommens. Donc le composé des quarrez de AB, BC, & de deux fois le rect. sous AB, BC, (qui [v] est le q. de AC) [x] est incommens. au composé de deux fois le rect. sous AB, BC. Mais le rect. sous AB. BC, est commens. à 2. fois le rect. sous AB, BC, estant moitié d'iceluy. [y] Donc le quarré de AC, est incommensurable au rect. sous AB, BC, mais le rect. sous AB. BC, est posé rationel. donc le q. de AC, est irrationel: [z] Et partant AC, sera irrationelle. Mais soit icelle appellee premiere de deux mediales, ou comme disent les autres, bimediale premiere. Donc si deux mediales commensurables en puissance seulement sont composees, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

f 16. 10.
c Sch. 14. 10.
v 4. 2.
x 17. 10.
y 13. 1.
10. d.
z 11. d.

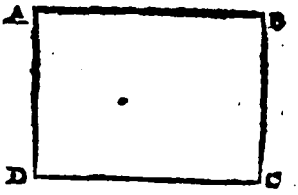
SCHOLIE.

Soit la ligne AB, yqq. 54. BC, yqq. 24. la ligne totale AC, sera yqq. 54. p. yqq. 24. irrationelle, appellee premiere de deux mediales, ou bimediale premiere.

LEMME.

Le rectangle contenu sous vne ligne rationelle, & vne irrationelle est irrationel.

Soit le rectangle ABCD, contenu sous AB rationelle, & BC irrationelle. Ie dis qu'iceluy rect. est irrationel: car s'il est dit estre rationel, estant appliqué à la rationelle AB, il feroit la latitude BC rationelle. Ce qui est absurde; car BC, est posée irrationelle. Donc le rectangle AC n'est rationel; mais irrationel. Ce qui est proposé.



21. 10.

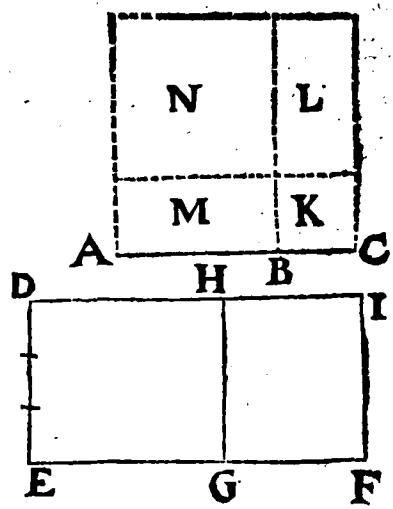
xxxviij xxxij THEOREME 27. PROPO. 39.

Si deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, contenant vn rectangle medial, sont *composees:* la toute sera irrationelle: & *soit icelle* appellee seconde de deux Mediales.

a29.10. Soient composees deux mediales [a] trouuees AB, BC, commensurables en puissance seulement, contenant vn rect. medial. Ie dis que la toute AC, est irrationelle.

Car soit exposee la Rationelle DE, à laquelle

[b] soit appliqué le rect. D F, egal au q. de AC: & DG, egal au composé des quarrez de A B, B C, sçauoir N, K, & le q. de A C, (ou D F, son egal rectangle) [c] estant egal aux 2. quarrez



b 45. 1.

c 4. 2.

de AB, BC: & à deux fois le rect. sous AB, BC, le reste HF, sera egal au rect. sous AB, BC, deux fois, sçauoir à M, L, mais le rect. sous AB, BC, estant posé medial, le double d'iceluy, qui luy est commens. [d] sçauoir HF, sera aussi medial.

d *Cor.* 24. 10.

Derechef, puis que les quarrez de AB, BC, Mediales commens. en puiss. sont commens. [e] leur cõposé, sçauoir DG, sera commens. à chacun d'iceux; & estans Mediaux, [f] DG, sera Medial. Donc puis que les Mediaux DG, HF, sont appliquez à la Rationelle DE, & [f] H G. son egale, [g] les latitudes E G, GF, seront rationelles incommens. en longit. à DE. Derechef, AB, BC, estans incommens. en longit. Et comme AB, à BC, ainsi le q. de AB, au rectang. sous AB, BC; sçauoir N, à L, [h] le q. de AB, sera in-

e 16. 10.

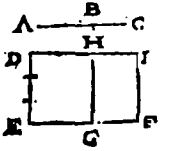
f *Coroll.* 24 10.

f 34. 1.

g 23. 10.

h 3. *Lem.* 19 10. *ou* 1. 6.

commensurable au rectang. sous AB, BC: Mais le composé des quarrez de AB, BC, est monstré commens. au q. de AB: & deux fois le rect. sous AB, BC, est commens. au rect. sous AB, BC, estant double d'iceluy. Donc le composé des quarrez de AB, BC, & deux fois le rect. sous AB, BC, ou leurs egaux rect. DG, HF, sont incommens. Parquoy DG estant à HF, comme EG, à GF, EG, GF seront incommens. en longit. Et estans monstrees Rationelles, elles seront Rationelles commens. en puiss. seulement. Partant la toute EF, sera Irrationelle: parquoy le rect. DF, sous DE, Rationelle, & EF Irrationelle, sera Irrationel, & le q. de AC, egal à iceluy DF, est aussi Irrationel: Parquoy AC est Irrationelle. Soit appellee seconde de 2. Mediales, ou Bimediale seconde. Donc si deux Mediales commensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



i *Sch.* 14. 10.
k 1. 6.
l 10. 10.
m 17. 10.
n *Lemme* 38. 10.

SCHOLIE.

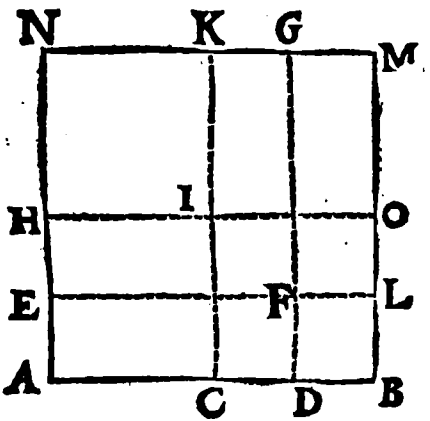
Soit la ligne AB, γqq. 18. BC, γqq. 8. la ligne totale AC, sera γqq. 18. p. γq. 8. Dont le quarré est γq. 50. p. γq. 48. laquelle ligne AC, est Irrationelle, nommee 2. de deux Mediales, ou Bimediale seconde.

LEMME.

Si vne ligne droicte est coupee en deux inegalement, le composé des quarrez des parties sera

plus grand, que deux fois le rectangle contenu sous icelles parties, du quarré de la ligne, dont la plus grande partie excede la moindre.

Soit AB, coupee à D, non egalement, & soit AD la plus grande partie, en laquelle soit prise DC, egale à DB, de sorte que AC, soit l'excez, par lequel AD, excede DB, ou DC, egale à DB. Ie dis que les quarrez de AD, DB, ensemble, sont plus grands que 2. fois le rect. sous AD, DB, du q. de AC, qui est HK. Car les quarrez de AD, DC, estans egaux à 2. fois le rect. sous AD, DC, & au q. de AC; 7. 2.



& DC, est egale à DB, les quarrez de AD, DB seront aussi egaux à 2. fois le rect. sous AD, DB, & au q. de AC: partant les qq. de AD, DB, sont plus grands que 2. fois le rect. sous AD, DB, du q. de AC. Ce qui est proposé. Ce qui est aussi à intelligible par cette fig.

COROLLAIRE:

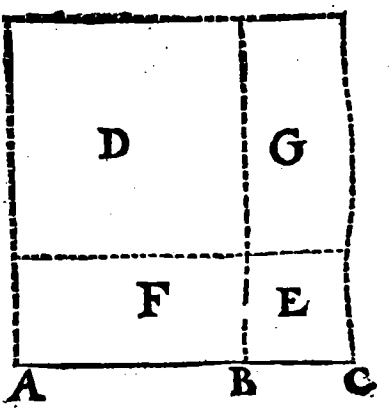
De là s'enſuit que les quarrez des parties inegales ſimplement, ſont plus grands que deux fois le rectangle ſous les parties inegales.

xxxix xxxiij

THEOREME 28. PROP. 40.

Si deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, faiſans le compoſé de leurs quarrez Rationel, & le rectangle contenu ſous icelles Medial, ſont compoſees; la toute ſera Irrationelle: Soit icelle appellee Majeure.

9 34.10. Soient compoſees deux lignes droictes ° trouuees A B, B C, incommenſ. en puiſſ. faiſant le compoſé de leurs quarrez Rationel: mais le rectangle ſous icelles Medial. Ie dis que la toute A C eſt Irrationelle.



Car d'autant que le rectangle sous AB, BC, est posé medial, 2. fois le rectangle sous AB, BC, commenſ. à iceluy, [p] ſera auſſi medial, & partant Irrationel. Or le composé des quarrez de AB, BC, est posé Rationel: [q] Donc 2. fois le rect. sous AB, BC, ſera incommenſurable à iceluy: Partant le q. de AC, composé des quarrez de AB, BC, & de 2. fois le rect, sous AB, BC, ſera incommenſur. au composé des quarrez de AB, BC: & ce composé des quarrez de AB, BC, eſtant posé Rationel; [t] le q. de AC, incommenſurable à iceluy ſera Irrationel; [u] & AC, Irrationelle: ſoit icelle appellee Majeure. Partant ſi, &c. Ce qu'il falloit faire.

p *Corol.* 24. 10.
q 10. *d.* 17. 10.
t 10. *d.*
u 11. *d.*

SCHOLIE.

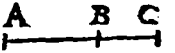
Soit la ligne AB yq. (32. p. yq. 704.) & BC yq. (32. —— yq. 704.) Donc la toute AC, ſera yq. (32. p. yq. 704.) p. yq. (32. —— yq. 704.) laquelle eſt Irrationelle, appellee ligne Maieure.

PROBLEME 29. PROP. 41. XL XXXIV

Si deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance ſont compoſees; leſquelles faſſent le composé de leurs quarrez Medial: Mais le rectangle contenu ſous icelles Rationel; la toute ſera Irrationelle. Soit appellee pouuant vn Rationel & vn Medial.

Soient compoſees deux lignes droictes [x] trou- x 35. 10.

uees AB, BC, incommenſ. en puiſſ. faiſant le compoſé de leurs quarrez Medial: mais le rectangle contenu ſous icelles Rationel. Ie dis que la toute AC, eſt Irrationelle.



Car le compoſé des quarrez de AB, BC, eſtant Medial: mais deux fois le rectangle ſous AB, BC. Rationel, ſa moitié, ſçauoir le rectangle vne fois ſous AB. BC, eſtant poſé Rationel [1] le compoſé des quarrez de AB, BC, eſt incommenſ. à 2. fois le rect. ſous AB, BC. [2] Donc le compoſé des quarrez de AB, BC, & 2. fois le rect. ſous AB, BC: c'eſt à dire le q. de AC, eſt incommenſ. à 2. fois le rect. ſous AB. BC, lequel eſtant Rationel, comme a eſté dict: le q de AC, incommenſ. à iceluy eſt Irrationel, & partant AC Irrationelle ſoit dite pouuant vn Rationel & vn Medial. Donc ſi deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

y 10. d.
z 17. 10.
a 10. d.
11. d.

SCHOLIE.

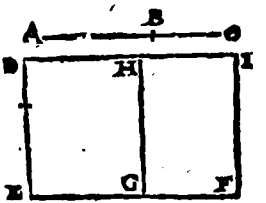
Soit la ligne AB, $yq.(q.13.\frac{1}{2}.p.yq.4.\frac{1}{2}.)$ *&* BC, $yq.(q.13.\frac{1}{2}.$ ——— $yq.4\frac{1}{2}.)$ *afin que la toute* AC

xlij xxxv *ſoit* $yq.(yq.13.\frac{1}{2}.p.yq4.\frac{1}{2}.p.yq.yq.13.\frac{1}{2}.$ ——— $yq.4.\frac{1}{2}.)$

THEOREME 30. PROP. 42.

Si deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance ſont compoſees, leſquelles faſſent le compoſé de leurs quarrez Medial, & le rectangle contenu ſous icelles Medial ; & incommenſurable au compoſé de leurs quarrez : la toute ſera Irrationelle : Soit icelle appellee pouuant deux Mediaux. 36. 10.

Soient compoſees deux lignes droictes, [a] trouuees AB, BC, incommenſurables en puiſſance, faiſant le compoſé de leurs quarrez Medial & le rectangle contenu ſoubs icelles medial & incommenſurable au compoſé de leurs quarrez. Ie dis que la toute AC, eſt irrationelle.



Car ſoit expoſee DE Rationelle, [b] à laquelle ſoit appliqué le rect. DF, egal au quarré de AC, & DG, egal au compoſé des quarrez de AB, BC. Et le quarré de AC, [c] eſtant egal au compoſé des b 45. 1. c 4. 2.

quarrez de AB, BC, & à deux fois le rect. sous AB, BC, le reste HF, sera egal à deux fois le rect. sous AB, BC.

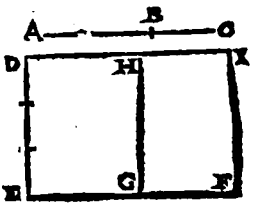
Mais puis que tant le composé des quarrez de AB, BC, c'est à dire le rectangle DG, que le rect. sous AB, BC: [d] & partant le composé de deux fois le rectangle sous AB, BC: c'est à dire HF, (luy estant commensurable) est posé medial, DG, HF, appliquez à la Rationelle DE, feront les latitudes EG, GF, Rationelles incommensurables en longitude à DE.

d Cor. 24. 10.

23. 10.

Derechef, le composé des quarrez de AB, BC: c'est à dire le rectangle DG, estant posé incommensurable au rectangle sous AB, BC, & deux fois le rect. sous AB, BC, sçauoir HF, estant commensurab. au mesme rect. sous AB, BC, (luy estant double) [e] DG, HF, seront incommens. Parquoy EG, estant à GF, comme DG, à HF, [g] EG, GF seront incommens. en lon. & estans monstrees rationelles, icelles EG, GF seront ration. commens. en puiss. seulement: [h] partant la toute EF, composee d'icelles est irrationelle: donc le rect. DF, contenu sous DE, Rationelle & EF Irrationelle, [i] est irrationel. Et partant le quarré de AC, egal à iceluy, est aussi irrationel, & la ligne AC pouuant iceluy est irrationelle. Soit dite pouuant deux mediaux. Donc si deux lignes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

e 13. 10.
f 1. 6.
g 10. 10.



h 37. 10.

i Lem. 38. 10.

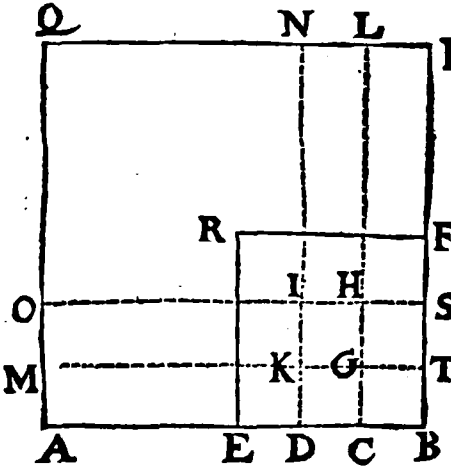
SCHOLIE.

Soient AB, BC, *incommenſurables en puiſſ. dont les quarrez adiouſtez ſont vn medial, & le rectangle ſous icelles medial, ſçauoir,* AB *yq.* (*yq.* 5. *p.* *yq.* 2.) *&* BC *yq.* (*yq.* 5. —— *yq.* 2.) AC *totale, ſera yq.* (*yq.* 5. *p.* *yq.* 2.) *p.* *yq.* 5. —— *yq.* 2.) *&c.*

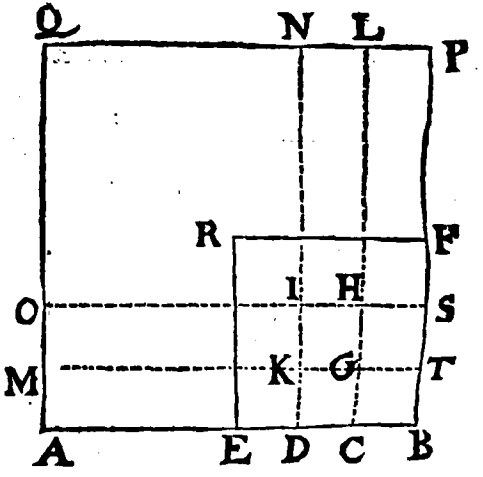
LEMME.

Si vne ligne droicte eſt coupee en parties inegales, & derechef en autres parties inegales, les quarrez des parties plus inegales enſemble, ſeront plus grands que les quarrez des parties moins inegales enſemble.

Soit coupee AB, *inegalement à* C, *& derechef inegalement à* D, *& ſoient les premieres parties* AC,



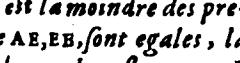
CB, plus inegales que les dernieres AD, DB. Ie dis que les quarrez de AC, CB, ensemble, qui sont ML, CT, sont plus grands que les quarrez de AD, DB, ensemble, sçauoir ON, DS: Car ayant diuisé AB, en deux egalement à E, le poinct D, tombera entre EC, ou AE. Qu'il tombe premierement entre EC: D'autant donc que le rect. sous AC, CB, auec le q. de EC, k 5. 2. k est egal au q. de EB, sçauoir à EF. Semblablement le rect. sous AD, DB, sçauoir AI, auec le q. de ED, est egal au mesme q. de EB, le rectangle sous AC, CB, auec le q. de EC, sera egal au rect. sous AD, DB. auec le q. de ED: estant donc les quarrez inegaux, des lignes droites inegales EC, ED, puis que le q. de EC,



est plus grand que le q. de ED, le rect. sous AC, CB, sera moindre que le rect. sous AD, DB: & partant deux fois le rect. sous AC, CB, sçauoir AG, GP, sera moindre que deux fois le rect. sous AD, DB, sçauoir AI, IP.

[l] *Mais d'autant que deux fois le rect. sous AC, CB, auec les quarrez de AC, CB, sont egaux au q. de AB, & pareillement deux fois le rect. sous AD, DB, auec les quarrez de AD, DB, sont egaux au mesme q. de AB, deux fois le rect. sous AC, CB, auec les qq. de AC, CB, seront egaux à deux fois le rect. sous AD, DB, auec les 2. qq. de AD, DB. Parquoy puis que deux fois le rect. contenu sous AC, CB, a esté monstré moindre que deux fois le rect. sous AD, DB, les quarrez restans de AC, CB, sçauoir ML, CT, seront plus grands que les autres quarrez de AD, DB, qui sont ON, DS. Ce qui est proposé.* l 4. 2.

Maintenant que D, tombe entre AE, d'autant que les parties AC, CB, sont posées plus inegales que AD, DB: AD, (qui est la plus petite des dernieres) sera plus grande que CB, (qui est la moindre des premieres) & partant puis que AE, EB, sont egales, la restante EC, sera plus grande que la restante DE: [m] *partant le rect. sous AC, CB, auec le quarré de EC,* m 3. 2.
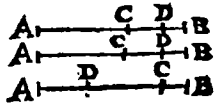


estant egal au q. de EB. Semblablement, le rect. sous AD, DB, auec le q. de DE, estant egal au q. de AE: c'est à dire au mesme q. de EB: le rectan. sous AC, CB, auec le q. de EC, sera egal au rect. sous AD, DB, auec le q. de DE: Donc nous demonstrerons comme de premier, que les quarrez de AC, CB, sont plus grands que les quarrez de AD, DB Ce qui est proposé. xlij.

THEOREME 31. PROP. 43. xxxvj

La ligne de deux noms, peut estre diuisee en ses noms, à vn poinct seulement.

Soit AB, de deux noms, ou binome, diuisee au poinct C, en ses noms, de sorte que AC, CB, soient Rationelles commens. en puiss. seulement, selon la 37. Prop. 10. Ie dis que AB, ne peut estre diuisee en d'autres noms à vn autre poinct : c'est à dire en d'autres lignes que AC, CB, qui soient Rationelles commensurables en puissance seulement.



Car, s'il est possible, soit diuisee derechef en ses noms à D. Il est manifeste que AB, n'est diuisée à C en deux egalement: car AC, CB, seroient commen. en longit. contre l'hypothese, ny semblablement à D. Donc AC, est coupee tant à C, qu'à D, inegalement : partant AC, CB, sont parties moins inegales que AD, DB, ou plus inegales. [n] Parquoy les quarrez de AC, CB, seront moindres que les quarrez de AD, DB, ou plus grands: (car les parties AD, DB, ne seront egales aux parties AC, CB, chacune à la sienne, sçauoir la plus grande à la plus grande, & la moindre à la moindre, de quelque part que tombe le poinct (D, autrement AB, seroit diuisee à la seconde diuision au mesme poinct qu'à la premiere.)

n *Lême* 42. 10.

Mais d'autant que si de choses egales on oste [q] choses inegales, [r] l'excez des restantes est egal à l'excez des retranchees: mais les quarrez de AC, CB, auec deux fois le rect. sous AC, CB, sont egaux aux quarrez de AD, DB; auec deux fois le rect. sous AD, DB. Puis que tant ceux là que ceux-cy sont egaux au q. de AB : il s'ensuit que l'excez du composé des quarrez de AC, CB, &

q *Cor.* 2. 1.

r 4. 2.

du

du composé des quarrez de AD, DB, sera egal, ou le mesme que du composé de deux fois le rectangle sous AC, CB, & de deux fois le rectangle sous AD, DB.

Mais l'excez des composez des quarrez de AC, CB, & AD, DB, est rationel: (car AC, CB, estans rationelles, & partant leurs quarrez rationaux, & leur composé [a] estant commensurable à chacun d'iceux, sera rationel; (par la mesme raison le composé des quarrez de AD, DB, sera rationel; [b] donc puis qu'vn ratio. excede vn ratio. d'vn rationel. Il est manifeste que l'excez des cõposez des quarrez de AC, CB, & de AD, DB, est rationel. Donc l'excez de deux fois le rect. sous AC, CB, & de deux fois le rect. sous AD, DB, est aussi rationel. [c] Mais le rectangle sous AC, CB, estant medial deux fois le rect. sous AC, CB, commens. à iceluy [d] est aussi medial. Semblablement deux fois le rect. sous AD, DB, est aussi medial: [e] Parquoy vn medial n'excedant vn medial d vn rationel, l'excez de deux fois le rect. sous AC, CB, & de deux fois le rect. sous AD, DB, ne sera espace rationel. Mais nous auons monstré qu'il est rationel, ce qui est absurde. Donc AB, ne peut estre diuisee en ses noms à vn autre poinct qu'à C. Partant est diuisee en ses noms à vn poinct seulement. Ce qu'il falloit demonstrer. Cette demõst. est aussi facile à entendre par la figure cy-apres.

a 16.10.
b *Se.* 27.10
c 22.10.
d *Co.* 24. 10.
e 27.10.

SCHOLIE.

Henrion Copiste, dit en la demonstration de cette Proposition. Si AD, & DB, sont parties plus grandes que AC, CB, par le Lemme qui suit la

42. Proposition 10. le composé des quarrez de AC, & CB, sera plus grand que le composé des quarrez de A D, & D B, &c. *Ce qui est absurde.*

Car si AD, & DB, (comme il dit) sont parties plus grandes que AC, *&* CB : *au contraire le composé des quarrez de* AD, *&* DB, *sera plus grand que le composé des quarrez de* AC, *&* CB, *chacun des premiers descrits sur les lignes plus grandes, estant plus grand que chacun des derniers descrits sur lignes moindres, & ce qu'il dit ne conuiant nullement audit Lemme qu'il cite.*

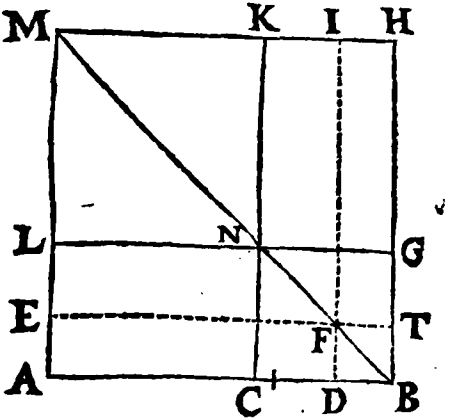
D'auantage, selon le Lemme allegué, les parties qu'il veut dire, sçauoir AD, *&* DB, *ne peuuent estre plus grandes que* AC, *&* CB : *car si cela estoit, la toute AB, composée de AD, et DB. plus grandes, seroit plus grande que la mesme AB, composée de* AC, *&* CB, *moindres : ce qui est ridicule de dire, qu'vne chose soit plus grande qu'elle mesme. Mais il deuoit dire, que si* AD, *et* DB, *sont parties moins inegales que* AC, *&* CB, *le composé des quarrez de* AC, *&* CB, *parties plus inegales, est plus grand que le composé des quarrez de A D, et D B, parties moins inegales, comme veut le Lemme cité, &c.*

Quant à moy ie croy, que s'il entendoit bien ce qu'il dict, ou plustost ce qu'il doit dire, qu'il auroit corrigé ses fautes à la seconde Edition de son liure.

THEOREME 32. PROP. 44. xliij xxxviij

La ligne de deux Mediales premiere, eſt diuiſee en ſes noms à vn poinct ſeulement.

Soit AB, Bimediale premiere, ou de deux Mediales premiere, diuiſee en ſes noms par le poinct C, en ſorte que AC, CB, ſoient mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, contenant vn rectangle Rationel, comme il eſt dict. Ie dis 38. 10. que AB, ne peut eſtre diuiſee en ſes noms à vn autre poinct.



Car, s'il eſt poſſible, ſoit icelle auſſi diuiſee à D, en ſorte que AD, DB ſoient Mediales commenſ. en puiſſance ſeulement, & contenant vn rectangle Rationel. De quelque part que tõbe le poinct D, l'on monſtrera comme en la precedente, que

l'excez de deux fois le rectangle sous AC.CB ; & de deux fois le rect. sous AD, DB, est le mesme que l'excez des composez des quarrez de AC, CB, & de AD, DB. Mais l'excez desdicts rect. est rationel: (car le rect. sous AC, CB, estant rationel, deux fois le rect. sous AC, CB, commensurable à iceluy, est aussi rationel, & semblablement deux fois le rectangle sous AD, DB, sera rationel : & vne figure rationelle ; [g] excedant vne fig. rationelle, d'vne figure rationelle; l'excez de deux fois le rectangle sous AC, CB, & de deux fois le rectangle sous AD, DB, est rationel.) Donc l'excez des composez des quarrez de AC, CB, & des quarrez de AD, DB, est rationel : AC, CB, estans mediales commensurables en puissance, leurs quarrez Lk, CG, seront mediaux & commensurables. [h] Parquoy leur composé sera commensurable à chacun d'iceux : [k] & partant medial: par la mesme raison le composé des quarrez de AD, DB, qui sont EI, DT, est medial, [l] & vn espace medial n'excedant pas vn medial d'vn rationel, l'excez des composez des quarrez de AC, CB, & de AD, DB, ne sera rationel : mais nous l'auons monstré rationel : ce qui est absurde. Donc AB, premiere de deux mediales ou bimediale premiere, ne peut estre diuisee en ses noms à vn autre poinct que C. Partant est diuisee en ses noms à vn poinct seulement. Ce qu'il falloit demonstrer.

g Schol. 27. 10.

h 16. 10.

Cor. 24. 10.

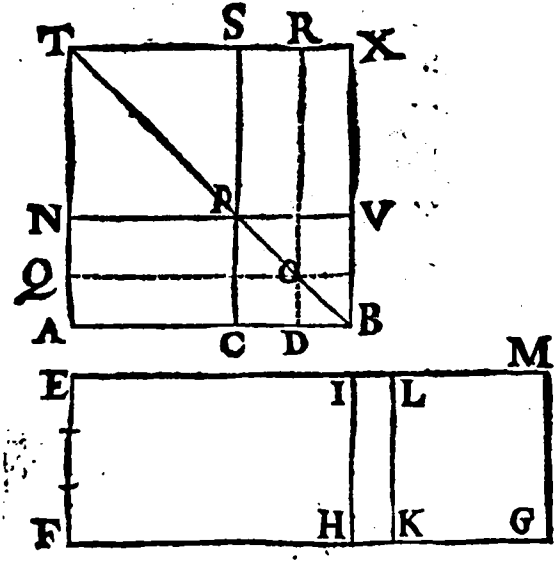
l 27. 10.

(.·.) (.·.) (.·.)

THEOREME 33. PROP. 45. xliv xxxviij

La ligne de deux Mediales seconde, est diuisee en ses noms à vn poinct seulement.

Soit la ligne AB, de deux mediales seconde, ou bimediale seconde, diuisee en ses noms au poinct C, de sorte que AC, CB, soient mediales com-

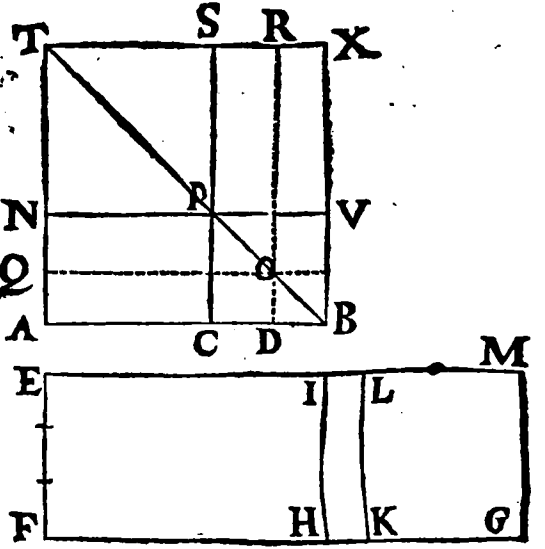


mensurables en puissance seulement, & contenant vn rect. medial, [m] comme il est dict. Ie dis que AB, ne peut estre diuisee en d'autres noms à vn autre poinct, comme à D. m 39. 10.

Car, s'il se peut faire, soit diuisee à D, en sorte que AD, DB, soient aussi mediales, commensur. en puissance seulement, & contiennent vn rect. medial. Nous demonstrerons comme à la 43. que les quarrez de AC, CB, qui sont NS, CV, sont plus grands ou plus petits que les quarrez de AD, DB, sçauoir QR, OB.

a 45. 1. Soit exposee EF, rationelle, à laquelle soit a appliqué le rect. EG, egal au q. de AB, & EH, egal

b 4. 2. aux qq. de AC, CB, donc le reste IG, sera egal à 2. fois le rect. sous AC, CB, b puis que le q. de AB, est egal à iceux quarrez de AC, CB, & 2. fois le rectangle sous AC, CB, & comme il appert par cette figure.



Semblablement, si à EF, on applique Ek, egal

aux quarrez de AD, DB, le reſte LG, ſera egal à 2. fois le rectangle ſous AD, DB. Et puis que les quarrez de AC, CB, ſont inegaux aux quarrez de AD, DB, les rectang. EH, EK, qui leur ſont egaux, ſeront auſſi inegaux : & partant FH, FK, ſeront inegales.

Derechef, les quarrez de AC, CB, eſtans plus grands que [p] deux fois le rectangle contenu ſous AC, CB, EH, ſera plus grand que IG, & partant EH, plus grand que la moitié de EG, & la ligne FH, plus grande que la moitié de FG : par meſme raiſon FK, ſera monſtree plus grande que la moitié de FG : donc les parties FH, HG, ſont inegales aux parties de FK, KG, chacune à la ſienne. Mais d'autant que AC, CB, ſont mediales commenſurables en puiſſance, leurs quarrez ſont mediaux & commenſurables. Donc le compoſé [q] d'iceux EH, ſera commenſurable à vn chacun d'iceux, [r] & partant medial : par meſme raiſon EK ſera medial. Donc [t] EH, EK, appliquez à la rationelle EF, font les latitudes FH, FK, rationelles incommenſ. en longitude à EF.

p *Lem.* 39. 10.

q 16. 10.

r *Coroll.* 24. 10.

t 23. 10.

Semblablement, puis que le rect. ſous AC, CB, eſt poſé medial, deux fois le rectangle ſous AC, CB, commenſ. à iceluy [t] i. IG eſt auſſi medial : donc eſtant appliqué à la rationelle HI, HG ſera rationelle [v] incommenſ. en longitude à HI.

t *Co.* 24. 10.

v 23. 10.

Semblablement nous monſtrerons LG eſtre medial, & KG rationelle incommenſurable en longitude à KL.

Derechef, puis que AC, CB, ſont incommenſurables en longitude, & que comme AC, à CB. [x] ainſi le quarré de AC, au rectang. ſous AC, CB, ſera le quarré de AC, incommenſurable au rect.

x 1. *Lem.* 3. 19. 10.

10. 10. sous AC, CB. Mais le composé des quarrez de AC, CB, est commensurable au quarré de AC: (car AC, CB, estans commensurab. en puiss. c'est à dire, leurs quarrez estans commensur. y le composé d'iceux sera commens. à chacun d'iceux, sçauoir au q. de AC. Mais 2. fois le rect. sous AC, CB, est commens. au rect. sous AC, CB. Donc le composé des quarrez de AC, CB; c'est à dire le rect. z EH, est incommens. à deux
y 16. 10. fois le rectangle soubs AC, CB; c'est à dire à IG.

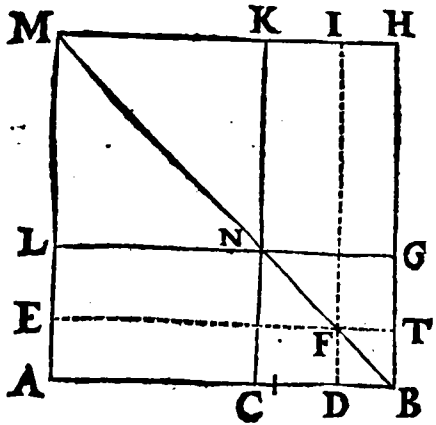
Partant puis que EH, a est à IG, comme FH, à HG; b FH, HG, seront incommens. en longitude;
z 5 6. 14. 10 mais elles sont monstrees rationelles, & partant rationelles commens. en puiss. seulement. c Donc
a 1. 6. la toute FG est irrationelle, qui est appellee de
b 10. 10. deux noms, & diuisee en ses noms au poinct H. Semblablement nous demonstrerons aussi que
c 37. 10. FG, de deux noms, est diuisee en autres noms à vn autre poinct K: d ce qui est impossible. Donc AB, bimediale seconde, n'est diuisee en ses noms à vn autre poinct que C. Partant est diuisee en ses noms à vn poinct seulement. Ce qu'il falloit
d 43. 10. demonstrer.

(·˙·) (·˙·) (·˙·)

THEOREME 36. PROPOSIT. 46. xlv xxxix

La ligne Majeure eſt diuiſee en ſes noms à vn poinct ſeulement.

Soit la ligne majeure AB, diuiſee en ſes noms au poinct C, en ſorte que AC, CB, ſoient incommenſ- en puiſſance, faiſant le compoſé de leurs quarrez 40. 10.
rationel, & le rectangle ſous icelles medial. Ie dis AB, ne peut eſtre diuiſee à vn autre poinct, en d'autres noms, ſçauoir leſquels ſoient lignes incommenſurables en puiſſance, faiſant le compoſé de leurs quarrez rationel, & le rectangle ſous icelles medial.



Car, s'il ſe peut faire, ſoit diuiſee en d'autres noms par D, comme e il a eſté demonſtré, l'excez 43. 10.

du composé des quarrez AC, CB, & du composé des quarrez de AD, DB, est le mesme que celuy de deux fois le rectangle sous AC, CB, & de deux fois le rectangle sous AD, DB: mais l'excez des composez desdicts quarrez est rationel: (car puis que l'vn & l'autre composé est posé rationel, l'excez d'iceux sera aussi rationel) donc l'excez de deux fois le rectangle sous AC, CB, & de deux fois le rect. sous AD, DB, est rationel. Mais d'autant que le rect. sous AC, CB, est posé medial, deux fois le rectangle de AC, CB, est aussi medial, estans commesurables: semblablement le rect. sous AD, DB, deux fois est medial. Donc puis qu'vn medial n'excede vn medial d'vn rationel, l'excez de deux fois le rect sous AC, CB, & de 2. fois le rectangle sous AD, DB, ne sera pas rationel: Mais nous auons monstré qu'il est aussi rationel: ce qui est absurde. Donc AB, ne se peut pas diuiser en ses noms à vn autre poinct que C. Partant elle se diuise en ses noms à vn poinct seulement. Ce qu'il falloit demonstrer.

f Sc. 27. 10

e Cor. 24. 10.

h 27. 10.

xlvj xl

THEOREME 35. PROPO. 47.

La ligne pouuant vn Rationel & vn Medial, est diuisee en ses noms à vn poinct seulement.

Soit AB, pouuant vn rationel & vn medial diuisee en ses noms, au poinct C, en sorte que AC, CB, soient incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles rationel. Ie dis que AB,

i 41. 30.

ne peut eſtre diuiſee en d'autres noms à vn autre poinct, leſquels ſoient auſſi lignes



incommenſurables en puiſſance, faiſans le compoſé de leurs quarrez medial, & le rectang. contenu ſous icelles rationel.

Car ſoit diuiſee en d'autres noms, s'il eſt poſſible, à D: de quelque part que tombe le poinct D, nous monſtrerons comme en la 43. Propo. que l'excez de deux fois le rect. ſous AC, CB, & de 2. fois le rect. ſous AD, DB, eſt le meſme que l'excez du compoſé des quarrez de AC, CB, & du compoſé des quarrez de AD, DB: mais l'excez deſdits rectangles eſt rationel [k] comme il eſt monſtré. Donc l'excez du compoſé des quarrez de AC, CB, & de AD, DB, eſt auſſi rationel: mais les compoſez d'iceux quarrez ſont poſez mediaux: [l] Donc l'excez d'iceux ne ſera rationel, vn medial n'excedant vn medial d'vn rationel: mais il eſt monſtré rationel, ce qui eſt abſurde. Donc AB, n'eſt diuiſee en ſes noms à vn autre poinct que C. Partant à vn poinct ſeulement. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[k] 44. 10.

[l] 27. 10.

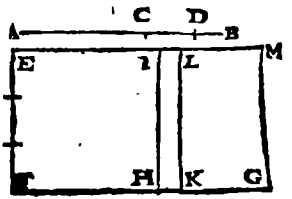
THEOREME 36. PROP. 48. xlvij xlj

La ligne pouuant deux Mediaux, eſt diuiſee en ſes noms à vn poinct ſeulement.

Soit AB, pouuant deux mediaux, diuiſee en ſes noms à C, en ſorte que AC, CB, ſoient in-

commensurables, faisans le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles me-
m 42. 10. dial, & incommensurable m au composé de leurs quarrez. Ie dis que AB, ne peut estre diuisee à vn autre poinct en d'autres noms, qui soient aussi lignes incommensurables en puissance, faisant ce qui est dict.

Car, s'il est possible, soit diuisée en d'autres noms par D: faisant la mesme construction qu'en la 45. Proposition: nous demonstrerons comme en icelle que les parties FH, HG, sont inegales aux parties FK, KG, chacune à la sienne. D'autant donc que le composé des quarrez de AC, CB, est posé medial, EH, son egal, est aussi medial: & puis que le rectangle sous AC, CB, est
n Cor. 24. 10. aussi posé medial, IG, egal au double d'iceluy n est medial, estans commensurables. Donc EH, IG, mediaux, appliquez à la rationelle EF, font FH, HG, rationelles, incommensurables en longitude à EF: (car HI, est egale à EF:) ainsi nous prouuerons que FK, KG, sont rationelles incommensurables en longitude à EF: mais puis que le composé des quarrez de AC, CB, c'est à dire, EH, est incommensurable à deux fois le rectangle sous AC, CB, par l'hypothese: c'est à dire IG:



o 1. 6. p 10. 10. o Et comme EH, à IG, ainsi FH, à HG; FH, HG, sót p incó-

mensurables en longitude : mais elles sont monstrees rationelles. Donc FH, HG, sont rationelles commensurables en puissance seulement. Donc la toute FG est rationelle, appellee de deux noms, & diuisee en ses noms à H ; mais nous monstrerons que FG, est aussi diuisee en d'autres noms à vn autre poinct K, ce qui est demonstré impossible. q Donc AB, pouuant deux mediaux n'est diuisee en ses noms à vn autre poinct qu'à C. Donc à vn poinct seulement. Ce qu'il falloit demonstrer. q 43. 10.

SECONDES DEFINITIONS.

Vne ligne Rationelle estant exposee, & vne ligne de deux noms, (laquelle ils appellent Binome) diuisee en ses noms, de laquelle le plus grand nom puisse plus que le moindre, du quarré d'vne ligne droite qui luy est commensurable en longitude.

1. Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la Rationelle exposee : la toute soit appellee, premiere de deux noms, ou binome premier.

2. Mais si le moindre nom est commensurable en longitude à la Rationelle exposee : Soit appellee seconde, de deux noms, ou binome second.

3. Que si l'vn ny l'autre d'iceux noms n'est commensurable en longitude à la Rationelle exposee : Soit appellee troisiesme de deux noms, ou binome troisiesme.

Derechef, si le plus grand nom peut plus que le moindre, du quarré d'vne ligne droite, qui luy soit incommensurable en longitude.

4. Si le plus grand nom est commensurable en longitude à la Rationelle exposee : Soit appellee quatriesme de deux noms, ou binome quatriesme.

5. Mais si le moindre nom est commensurable en longitude à la Rationelle exposee : Soit appellee cinquiesme de deux noms.

6. Que si l'vn ny l'autre d'iceux noms n'est commensurable en longitude à la Rationelle exposee: Soit appellee sixiesme.

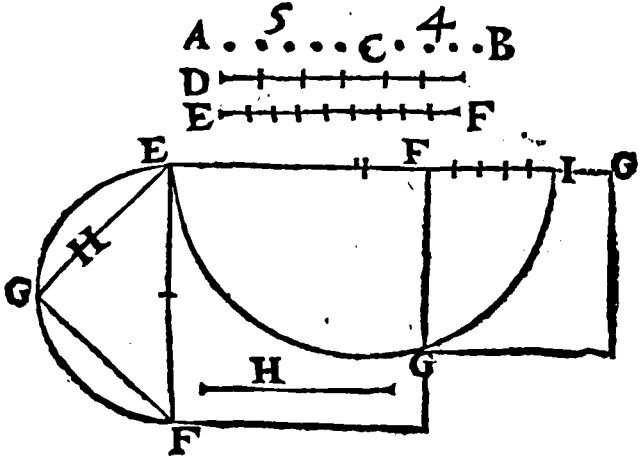
Theon appelle icy les Definitions des Binemes, secondes Definitions, à cause des premieres qui sont au commencement de ce liure 10. *d'Euclide, encore qu'elles soient, peut-estre, de luy; de Theon, dit-il, & non d'Euclide.*

xlviij xlix PROBLEME 13. PROP. 49.

Trouuer vne ligne premiere de deux noms, ou Binome premier.

t Sc. 29. 10 Ayant trouué deux nombres quarrez AB, CB, dont l'excez AC ne soit quarré: de sorte que AB, CB, soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Mais AB, AC, ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, & soit exposee vne ligne rationelle D, à laquelle soit prise

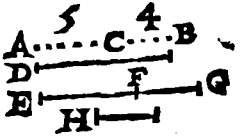
EF, commensurable en longitude, EF, commensurable à D rationelle, sera aussi [r] rationelle ; puis [r] Cor. 6. 10
soit FG, au quarré de laquelle soit le quarré EF, comme le nombre AB, au nombre AC. (Ce qui sera aussi facile, en diuisant EF, en autant de parties egales, qu'il y a d'vnitez en AB, & prenant F I. de 5. telles part. & FG, moyenne proportionelle entre icelles, comme il appert par cette figure.) Ie dis que EG totale, est binome premier.



Car puisque les quarrez de EF, FG, estans entr'eux comme les nombres AB, AC, [t] sont commensurables ; EF, FG, seront commensurables, au moins en puissance: mais EF, est monstree rationelle : donc FG l'est aussi: & AB, n'estant à AC comme nombre quarré à nombre quarré, les qq. de EF FG, ne seront entr'eux comme nombre q. à nombre q. donc EF, FG, sont incommensurables [t] 6. 10. [9] 9. 10.

en longitude, & partant rationelles commensurables en puissance seulement, & la toute EG est irrationelle, appellee de deux noms. Ie dis qu'elle est aussi premiere. Car le q. de EF, estant au q. de FG, comme AB, à AC, nombre à nombre, & AB estant plus grand que AC, le q. de EF, sera *plus* plus grand que le q. de FG. Qu'il soit *donc plus* grand du q. de H: & comme il appert par la figure.

Lem. 14. 18.



D'autant que comme le nõbre AB, est au nombre AC, ainsi le q. de EF, au q. de FG, par conuersion de raison, comme AB, sera à CB: (sçauoir à l'excez, donc AB antecedent, excede AC consequent:) ainsi le q. de EF, est au q. de H, sçauoir à l'excez, dõc l'antecedent q. de EF, excede le consequẽt q. de FG. Mais AB, CB, sont nombres qq. donc les quarrez de EF, & H, sont entr'eux comme nombre q. à nombre q. partant EF, & H, sont commens. en longit. Donc puis que le plus grand nombre EF, peut plus que le moindre FG, du q. de H, commensurable en longitude à icelle: & le mesme EF, est aussi commensurable en longitude à D, rationelle exposee: EG, sera premiere de deux noms, en binome premier, selon la def. Donc nous auons trouué vn binome premier. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

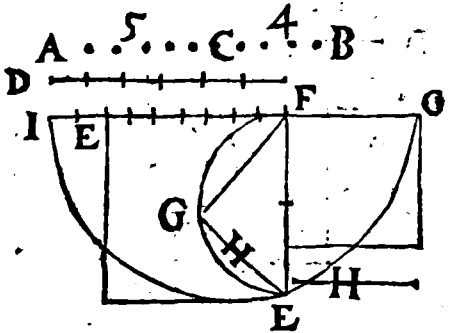
SCHOLIE.

Soit la ligne Rationelle proposée D, 8. & E F, soit 6. et comme AB, 9. nombre quarré est à AC, 5. nombre non quarré: ainsi 36. quarré EF, 6. soit à vn autre; sçauoir au quarré de FG, qui sera tronné de 20. Donc FG, sera yq. 20. & EG, toute, sera 6. p. yq. 20. Binome premier, comme il est manifeste de ce qui est dit cy dessus.

PROBLEME 14. PROP. 50. xlix xliij

Trouuer vne ligne, seconde de deux noms, ou Binome second.

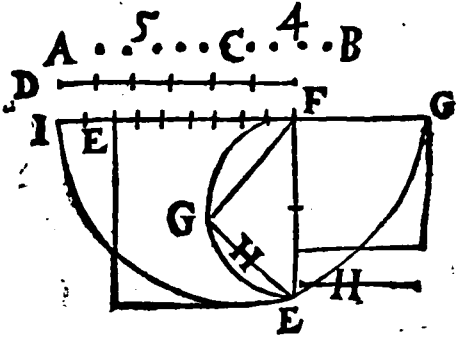
Ayant trouué deux nombres quarrez AB, CB, comme en la precedente, & estant exposée la rationelle D: soit prise FG, commensurable en lon-



gitude à icelle; FG, sera donc aussi rationelle: Et comme le nombre AC, est au nombre AB, " soit u Cor. 6. 10

le quarré de FG, au quarré de EF. Ce qui sera facile comme en la precedente, en prenant vne ligne comme F *r.* de *9.* telles parties, que FG, en est *5.* & FE, moyenne proportionelle entre icelles, comme il appert par cette figure. Ie dis que EG est binome second.

76. 10. Car les quarrez de FG, EF, estans entr'eux comme les nombres AC, AB, [1] iceux seront commensurables, & les lignes FG, EF, commensurables, au moins en puissance, & FG est monstree rationelle: donc EF l'est aussi. Mais puis que AC, ny AB, ne sont entr'eux comme nombre q. à nombre qu. *79. 10.* les quarrez de FG, EF, ne le seront aussi comme nombre q. à nombre q. [2] Et partant EF, FG, incommensurables en long & par ainsi rationelles com- *87. 10.* mens. en puiss. seulement; & la toute EG irrationelle, qui est appellee binome. Ie dis que c'est la seconde.



Car puis que le q. de FG. est au q. de EF, cõme le nõb. AC, au nõb. AB, & par conuer. de raison le q. de

EF, au q. de FG, comme AB, à AC; & que AB, eſt plus grand que AC: le q. de EF, ſera plus grand que le q. de FG.[a] Qu'il ſoit donc plus grand du q. de H, comme il appert par cette figure. Nous monſtrerons & cõme en la preced, que H eſt commenſ. en longitude à EF. Or puis que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG, du q. de H, commenſur. à icelle en longitude: & le moindre nom FG, eſt commenſ. en longitude à la rationelle expoſee D, EG par la definition, ſera la ſeconde de deux noms. Donc nous auons trouué vn binome ſecond. Ce qu'il falloit faire.

a Lem. 14. 10.

SCHOLIE.

Soit la ligne FG, priſe pour ſecond nom 5. nombre Rationel, & ſoit fait comme AC, 5. au nombre quarré AB, 9. ainſi 25. quarré du nombre pris, ſoit à vn autre, ſçauoir à 45. quarré de EF: Donc EF, ſera γq. 45. Partant la toute EG, ſera γq. 45. p. 5. Binome ſecond.

PROBLEME 15. PROPO. 51.

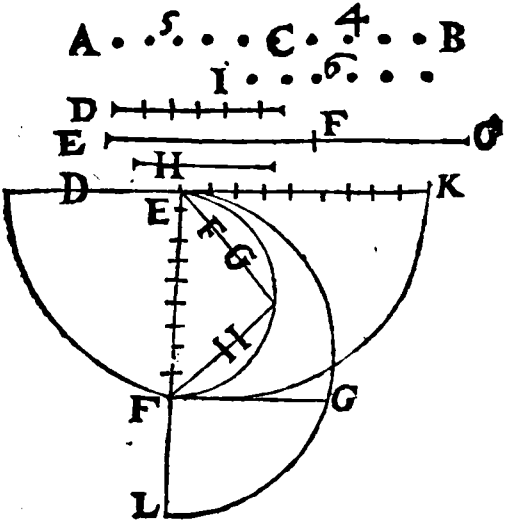
Trouuer vne troiſieſme ligne de deux noms: ou Binome troiſieſme.

Ayant pris deux nombres AB, CB, comme en la 49. Propoſition, ſoit pris vn autre nombre I, qui ne ſoit à AB, ny à AC, comme nombre quarré à nombre quarré. Ce que l'on fera, prenant I, nombre non quarré, prochainement plus grand que AC: cela eſtant, il ne ſera à AB, comme nombre quarré à nombre quarré.

Derechef, n'eſtant quarré prochain plus grand que AC, il ſera different de 1. de AC, ou de 2. Donc entre I & AC, il ne [b] tombera vn moyen proportionel, partant ne ſeront plans ſemblables: & ne ſeront entr'eux comme nombre q. à nombre q. Maintenant ſoit propoſee D rationelle, & comme I à AB, ainſi le q. de D, [c] ſoit au q. de EF. Ce qui ſera facile auſſi en prenant EK, de 9. telles parties que D en eſt 6. & EF, moyenne proportionnelle entre les deux D, & EK. Donc les quarrez de D, & EF, ſeront commenſ. & D, & EF

[b] 8. 8.

[c] Cor. 6. 10



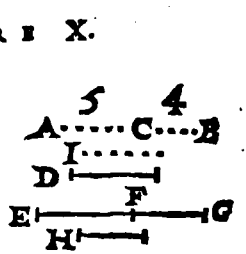
commenſ. au moins en puiſſance, & D eſtant rationelle, EF le ſera auſſi. Et d'autant que I n'eſt à AB, c'eſt à dire le q. de D, n'eſt au q. de EF, comme

q.à nombre q, [d] D & EF, ſeront incommenſurab. en longitude. [d] Cor. 9. 10.

Derechef, ſoit FG, au q. de laquelle ſoit le q. de EF, comme AB, à AC. [e] Ce que l'on fera, en diuiſant EF, en 9. parties egales, & faiſant FL de 5. telles parties, puis prenant FG, moyenne proportionelle entre EF, FL, cõme il appert par la figure. Iceux quarrez ſeront commenſ. & EF, FG, au moins commenſ. en puiſſ. Donc EF, eſtant monſtree rationelle, FG ſera auſſi rationelle: & d'autant que AB, n'eſt à AC: c'eſt à dire le q. de EF, n'eſt au q. de FG comme nombre quarré à nombre q. EF, FG, [f] ſeront incommenſ. en longit. Donc EF, FG, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement: [g] partant la toute EG, irrationelle appellee de deux noms. Ie dis que c'eſt la troiſieſme. [e] 6. 10. [f] 9. 10. [g] 37. 10.

Car puis que comme I eſt AB, ainſi le quarré de D, au quarré de EF, & comme AB, à AC, ainſi le q. de EF, au q. FG, en raiſon egale comme I à AC, ainſi le q. de D, au q. de FG; Mais I, & AC, ne ſont entr'eux comme nombre qu. à nombre qu. Donc les qq. de D, & FG, ne ſeront auſſi comme nombre q. à nombre q. Donc [h] D, & FG, ſont incommenſ. en longitude. Mais d'autant que comme AB, à AC, ainſi le quarré de EF, au quarré de FG: Mais AB, eſt plus grand que AC, donc le quarré de EF, ſera plus grand que le quarré de FG: [i] qu'il ſoit donc plus grand du quarré de H. Nous monſtrerons comme en la 49. Propoſition; que H eſt commenſurable en longitude à EF. D'autant donc que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG, du quarré de H, commenſurable en longitude à icelle, & que l'vne ny l'au- [h] 9. 10. [i] Lem. 14. 10.

tre EF FG, n'eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſée D, cõme il eſt demonſtré : EG, par la definit. ſera la troiſieſme de deux noms : Donc nous auons trouué vn binome troiſieſme. Ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

Soit la ligne Rationelle propoſee D, 12. & comme 7, 6. eſt au nombre quarré AB, 9. ainſi 144. quarré de D, ſoit à vn autre, ſçauoir au q. de EF, ſçauoir à 216. Donc EF, ſera γq. 216. pour le plus grand nom. Derechef, comme le nombre q. AB, 9. eſt au nombre AC, 5. ainſi le q. trouué 216. ſoit à vn autre : ſçauoir au q. de FG, qui ſera trouué de 120. Donc FG, ſera γq. 120. moindre nom, partant la toute EG, ſera γq. 216. p. γq. 120. Binome troiſieſme, &c.

lj xiv

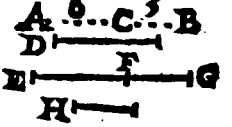
PROBLEME 16. PROP. 52.

Trouuer vne ligne quatrieſme de deux noms ; ou Binome quatrieſme.

k *Sc.* 3. 29. 10.

Ayant trouué deux nombres AC, CB, tels que le compoſé AB, [k] ne ſoit à aucun d'iceux, comme nombre quarré à nombre quarré. Soit propoſee D rationelle, & priſe EF, commenſurable en longitude à icelle : donc icelle EF, ſera auſſi ratio-

nelle. Et ayant faict le reſte comme en la 49. Prop. nous monſtrerons comme là, que la toute E G, eſt de deux noms. Ie dis que c'eſt la quatrieſme. Car le quarré de EF, (comme en la 49.) ſera plus grand que le q. de FG. Que ce ſoit donc du q. de H. Et par conuerſion de raiſon comme en la 49. comme AB, eſt à CB, ainſi le q. de EF, eſt au q. de H : mais AB, n'eſtant à CB, comme nombre quarré à nombre quarré, le q. de EF, ne ſera au q. de H, comme nombre q. à nombre q. donc[1] EF, & H, ſont incommenſ. en long. Et puis que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG, du q. de H, incommenſ. en longitude à icelle, & le plus grand nom EF, eſt commenſ. en longitude à la rationelle D; EG, par la definition ſera binome quatrieſme, Donc nous auons trouué le requis. Ce qu'il falloit faire. 1 9. 10.



SCHOLIE.

Soit D, Rationelle expoſee 8. & la ligne EF, priſe pour le plus grand nom ſoit 6. & comme le nombre q. AB, 9. à AC, 6. nombre non qu. ainſi 36. q. de EF, 6. ſoit à vn autre, ſçauoir au quarré de FG, qui ſera trouué de 24. Partant F G, moindre nom, ſera yq. 24. Donc la toute EG, ſera 6. p. yq. 24. Binome quatrieſme.

PROBLEME 17. PROP. 87.

lij
xlvij

Trouuer vne cinquieſme ligne de deux noms.

Ayant trouué deux nombres AC, CB, comme en la precedente, ſoit fait la conſtruction comme en la 50. c'eſt à dire, ſoit priſe FG, commenſurable en longitude à l'expoſee rationelle D. Il ſera monſtré comme en la 50. Propoſit. que EG eſt binome, Ie dis auſſi que c'eſt le cinquieſme: car on demonſtrera comme en la meſme 50, que le q. de EF, ſera plus grand que le q. FG. Qu'il ſoit donc plus grand du q. de H.

Mais d'autant que par conuerſion de raiſon (comme il eſt monſtré en la 49. comme AB, eſt à CB, ainſi le q. de EF, eſt au q. de H) il ſera monſtré comme en la precedente, que EF, & H, ſont incommenſur. en long. Partant puis que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG, du quarré de H, incommenſurable en longitude à icelle, & le moindre nom FG, eſt commenſurable en longitude à la rationelle expoſee D, par la definition EG, ſera binome cinquieſme. *Donc nous auons trouué le requis. Ce qu'il falloit faire.* Voyez la figure precedente.

(∴) (∴) (∴)

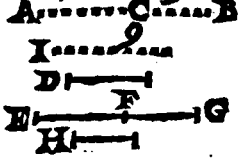
SCHOLIE.

Soit la ligne D, Rationelle, expoſee, & ſoit FG, moindre nom 2. & comme le nombre AC, 6. eſt au nombre quarré AB, 9. ainſi 4. qu. de FG, 2. ſoit à vn autre, ſçauoir au quarré de EF, qui ſera trouué de 6. Donc EF, ſera yq. 6. pour le plus grand nom. Partant la toute AG, ſera yq. 6. p. 2. binome cinquieſme.

PROBLEME 18. PROP. 54. liij xlvij

Trouuer vne ligne ſixieſme de deux noms, ou binome ſixieſme.

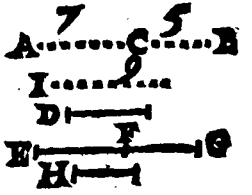
Ayant trouué deux nombres AC, CB, plans non ſemblables, l'vn ny l'autre deſquels ne ſoit quarré, & le compoſé d'iceux AB, ne ſoit auſſi quarré, & ne ſoit à l'vn ny l'autre, comme nombre q. à nombre q. (ce que l'on fera, diuiſant quelque nombre non quarré en deux nombres premiers entr'eux. [m] Car ainſi le tout ſera premier à chacun d'iceux, [n] & partant ne ſera à aucun d'iceux comme nombre q. à nombre q.) Et ſoit pris quelconque autre nombre I, qui ne ſoit à AB, ny à AC, comme nombre q. à nomb. q. & ſoit vne Rationelle propoſee D; & comme



m 30. 7.

n *Sc.* 17. 8.

o *Corol.* 6. 10. I eſt à AB, ainſi ſoit faict le q. de D, ° au q. de EF, & le reſte comme en la 51. Nous monſtrerons comme en icelle que D & EF, ſont incommenſurables en longitude, & que la toute E G eſt binome. Ie dis auſſi que c'eſt la ſixieſme. Car il ſera demonſtré comme en la 51. Propoſition, que D & FG, ſont incommenſurables en longitude, & que le quarré de E F, eſt plus grand que le quarré de FG. Soit donc plus grand du quarré de H. Nous demonſtrerons auſſi comme en la 49. que par cõuerſion de raiſon, comme AB, eſt à CB, ainſi le quarré de EF, eſt au quarré de H. Donc puis que AB, n'eſt à CB, & partant le q. de EF, au q. de H, comme nombre quarré à nõbre quarré: P EF & H, ſeront incommenſurables en longitude. Donc puis que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG, du quarré de H, incommenſurable en longitude à icelle, & aucune d'icelles EF, F G, n'eſt commenſurable en longitude à l'expoſée Rationelle D, ſelon la definition E G, ſera binome ſixieſme. Donc nous auons trouué vn binome ſixieſme. Ce qu'il falloit faire.



P 9. 10.

SCHOLIE.

Soit D, Rationelle, propoſee 9. & comme 7, 9. eſt à AB, 12. ainſi le q. de D, qui eſt 144. ſoit à vn autre, ſçauoir au qu. de EF, qui ſera trouué de 192.

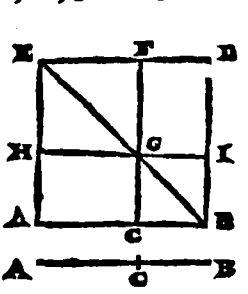
Donc EF, sera yq. 192. plus grand nom. Derechef, comme AB, 12. à AC, 7. ainsi le qu. de EF, 192. soit à vn autre, sçauoir au qu. du moindre nom FG, on trouuera 112. Donc FG, sera yq. 112. & la toute EG, sera yq. 192. p. yq. 112. binome sixiesme.

LEMME.

Si vne ligne droicte est coupee, comme l'on voudra, le rectangle contenu sous les parties est milieu proportionel entre les quarrez d'icelles parties. Item, le rectangle contenu sous la toute & vne partie, est milieu proportionel entre le q. de la toute, & le q. de ladicte partie.

Soit coupee AB, comment que ce soit, à C, & sur icelle soit descrit le q. AD. & soit mené le diametre BE, & par C, soit aussi menee EF, parallele à BD, ou AE, coupant le diametre par G, & par G, soit menee IH, parallele à AB: FH, CI, q seront les quarrez des parties AC, CB; & l'vn & l'autre des rectangles DG, GA, sera contenu sous lesdites parties. Mais les rectangles CD, AI, sont contenus sous la toute AB, & la partie CB. le dit que DG, est milieu proportionel entre les qq. FH, CI: Mais CD est milieu proportionel entre les qq. AD, CI.

q Co. 4. 2

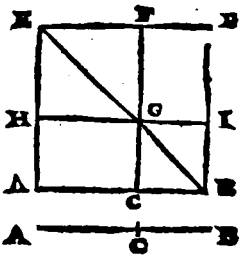


Car d'autant que comme HG, à GI, r ainsi tant

r 1. 6.

le rectangle FH, eſt à DG, que AG, à CJ; comme
[43. 1.] *FH, ſera à DG, ainſi AG. à CI: Mais [43. 1.] AG, eſt egal à DG. Donc comme FH eſt à DG, ainſi DG à CI: donc DG, eſt milieu proportionel, entre les quarrez FH, CI.*

[1. 6.] *Derechef, d'autant [1. 6.] que comme AB, eſt à CB, ainſi tant AD, eſt à CD, que AI, à CI: comme AD, ſera à CD; ainſi AI, à CJ: mais AI, eſt egal à CD. Donc*



comme AD, à CD, ainſi CD, ſera auſſi à CI; donc CD, eſt milieu proportionel entre les quarrez AD, CJ. Semblablement AF, ſera milieu proportionel entre les quarrez AD, FH.

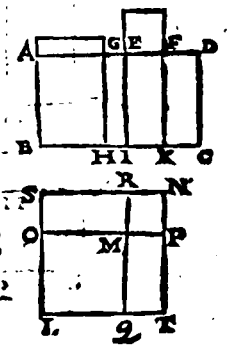
liv lviij

THEOREME 37. PROPO. 55.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vne ligne premiere de deux noms; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt irrationelle, laquelle eſt appellee de deux noms.

Soit l'eſpace ou rectangle AC, contenu ſous la Rationelle AB, & ſous AD, premiere de deux noms, ou binome premier. Ie dis que la droicte ligne qui peut l'eſpace AC, eſt irrationelle, appellee binome.

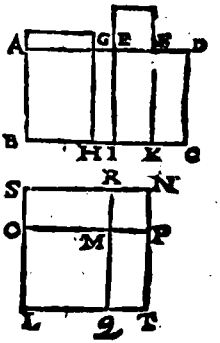
Car ſoit AE, le plus grand nom de AD. Donc AE, ED, ſeront rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, ſelon la definition, & AE, pourra plus que ED, du q. d'vne ligne commenſurable en longitude à icelle, & AE, ſera commenſurable à la rationelle expoſee AB. Soit coupee ED, en deux egalement à F: D'autant donc que AE, peut plus que ED, du q. d'vne ligne commenſurable en longitude à icelle: ſi on applique à AG, vn rectangle egal au quart du quarré de ED, c'eſt à dire au q. de EF, contenu [u] ſous AG, GE: & defaillant d'vne figure quarree, [x] il diuiſera icelle en parties commenſur. en longitude: donc AG, GE, ſont commenſ en longit. entr'elles. Maintenant ſoient menees GH, EI, FK, paralleles à AB, DC: [y] & ſoit le q. LM, egal au parallelogramme AH & le q. MN, egal au parallelogramme GL: & ſoient coniоincts iceux quarrez au poinct M, en ſorte que MO, MP, faſſent vne ligne droicte OP: dont MQ, MR, feront auſſi vne ligne droicte QR, [z] comme il appert. Et ayant acheué le rectangle LN, OM, MP, eſtans egales à QM, MR, (à cauſe des quarrez LM, MN:) & partant la toute OP, à la toute QR, & OP, [a] eſtant auſſi egale, tant à SN, qu'à



u *Lem.* 2. 17. 10.
x 18. 10.
y 14. 2.
z 15. 13. & 14. 1.
a 34. 1.

LT, & QR, à LS, TN, le rectangle LN, sera equilatere, & partant quarré.

Mais le rect. sous AG, GE, estant faict egal au quarré de EF, [b] comme AG, à EF: ainsi EF, à GE: & [c] partant comme AH, à EK, ainsi EK à GI; donc EK, est moyen proportionel entre AH, GI, c'est à dire entre leurs egaux quarrez LM, MN, [d] Mais TM, est moyen proportionel entre LM, MN. Donc TM, est egal à EK: donc MS estant egal à TM, [e] & FC egal à EK, MS sera aussi egal à FC. Parquoy tout le q. LN, sera egal à tout le rectangle AC, partant la toute OP, peut l'espace AC: contenu sous AB rationelle, & AD binome premier. Ie dis que OP est irrationelle, appellee Binome. Car puis que AG, GE, sont monstrees commensurables en longitude, la toute AE, sera commensurable en longitude à chacune d'icelles: mais AE (estant le plus grand nom de AD, Binome premier) est commens. en longit. à la rationelle AB: donc AG, GE, sont commensurables en longit. à la mesme AB, [f] comme il appert; partant AB estant rationelle, AG, GE, seront rationelles: donc [g] les rectangles AH, GI, contenus sous les rationelles commensurables en



b 17. 6.
c 1. 6.
d Lem. 54. 10.
e 43. 1.
36. 1.
16. 10.
f 12. 10.
g 20. 10.

longitude, ſont rationaux, & auſſi leurs egaux quarrez LM, MN, & partant OM, MP, ſeront rationelles.

Et AE, eſtant incommenſ. en longit. à ED, & AG, monſtree commenſur. en longit. à AE, & EF, commenſ. en longitude à ED, eſtant moitié d'icelle, [k] AG, EF ſeront incommenſ. en longit. entr'elles: [l] parquoy AH, EK, eſtans en meſme raiſon que AG, EF, [k] c'eſt à dire leurs egaux LM, MT, ſont incommenſur. Donc OM, MP, ſont incommenſ. en longit. ([l] ayant meſme raiſon que LM. MT. Mais OM, MP, ſont monſtrees rationelles, elles ſont donc rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. Parquoy la toute OP, pouuant l'eſpace AC, eſt irrationelle, appellee Binome. Donc ſi vn eſpace eſt contenu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[k] Sc. 14. 10
[l] 1. 6.
[k] 10. 10.
[l] 37. 10.

SCHOLIE.

Soit la Rationelle AB, 5. & AD, 4. p. γq. 12. EF, ou FD, ſera γq. 3. & ſi à AE on applique vn parallelogramme egal au q. de EF, defaillant d'vne figure quarree, AG ſera 3. & GE 1. partant AH ſera 15. Gℱ, 5. & EK, ou FC γq. 75. Parquoy le tout AC ſera 20. p. γq. 300. tels eſpaces ſont par les recens, appellez binomiaux, ou de deux noms.

Trouuer le coſté ou racine quarree de l'eſpace Binomial.

Soit l'eſpace Binomial 20. p. γq. 300. dont il faut trouuer le coſté, ſoit diuiſé le plus grand nom en deux telles parties, que le produict d'icelles ſoit

egal au quart du quarré du moindre nom, ſçauoir à 75. la plus grande partie ſera 15. & la moindre 5. Ie dis que yq. 15. p. yq. 5. ſera le coſté du q. egal à 20. p. yq. 300. Car la ligne de deux noms, ſçauoir yq. 15. p. yq. 5. eſtant diuiſee en deux parties, le q. de la toute ſera egal aux qq. des parties, et à deux fois le rect. ſous icelles parties. Donc le q. de yq. 15. eſt 15. & celuy de yq. 5. eſt 5. & le rect. ſous yq. 15. & yq. 15. eſt 75. Donc le double eſt yq. 300. & le tout fait 20. p. yq. 300. egal au q. de yq. 15. p. yq. 5. Donc yq. 5. p. yq. 5. ſera le coſté du q. de l'eſpace Binomial 20. p. yq. 300, & ainſi des autres.

lix xlix

THEOREME 38. PROP. 56.

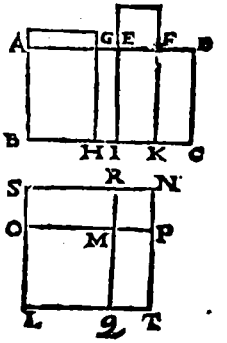
Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vne ligne ſeconde de deux noms: la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt irrationelle, laquelle eſt appellee premiere de deux mediales.

Soit l'eſpace A C, contenu ſous la Rationelle AB, & AD, binome ſecond. Ie dis que la ligne droicte pouuant A C, eſt irrationelle, appellee premiere de deux mediales, ou bimediale premiere.

Car ſoit AE, plus gand nom de AD, donc AE, ED, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, ſelon la definition. Et AE, peut plus que ED, du quarré d'vne ligne commenſurable en longitude à icelle; & ED, ſera commenſurable en longitude à la rationelle expoſee AB. Soit coupee ED, en deux egalement à F: & ayant faict le reſte

reste comme en la precedente ; l'on demonstrera comme en icelle que OP, peut l'espace contenu sous AB, rationelle, & AD, binome second. Ie dis que OP est irration. appellee bimediale premiere.

Car AE, estant incommensurable en lõgitude à ED, moindre nom de AD, binome second, cõmensurable en longitude à AB, rationelle, [a] AE, AB sont incõmensurables en longitude. Et AG, GE, estans [b] monstrees commensurables en longitude, [c] la toute AE, sera commensurable en longit. à chacune d'icelles.



a 13. 10.

b 55 10.

c 16. 10.

Parquoy AE, plus grand nom de AD estant rationelle, AG, GE, seront aussi rationelles. Donc puis que tant AG, que GE, est commensurable en longit. à AE ; Mais AE, incommens. en longit. à AB rationelle, [d] l'vne & l'autre AG, GE, est incommens. en longitude à la mesme AB: Donc tant AB, AG, que AB, GE, sont rationelles commens. en puissance seulement: [e] partant les rect. AH, GI, ou leurs egaux quarrez LM, MN, sont mediaux: & partant OM, MP, mediales : Mais AG, GE estans commensurables en longitude, [f] AH, GI. estant en mesme raison, & partant leurs egaux quarrez LM, MN, seront commesurables: donc OM, MP, sont commensurables, au moins en puissance.

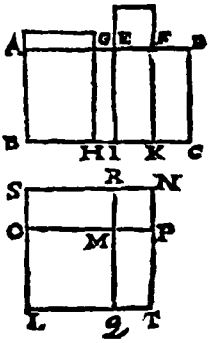
d 14. 10.

e 22. 10.

f 10. 10.

Et puis que AE, ED, ſont incommenſur. en longitude, & AG eſt monſtree commenſ. en longit. à AE: Et E F, eſt commenſurable en longitude à ED, eſtant moitié d'icelle, [g] AG, EF, ſeront incommenſurables en longitude. Donc AH, EK, ayant meſme raiſon, [h] ou leurs egaux rectangles LM, MT, ſont incommenſurables [k] & partant OM, MP, ſont incommenſurables en longitude, ayant meſme raiſon. Donc OM, MP, eſtans monſtrees mediales & commenſurables, elles ſeront mediales commenſurables en puiſſauce ſeulement.

h *Se.* 14. 10
g 10. 10.
k 1. 6.



Finalement, E D, moindre nom eſtant commenſurable en longitude à AB, c'eſt à dire à EI: mais EF, eſt auſſi commenſurable en longitude à ED, [l] EI, EF, ſeront commenſurables en longitude: parquoy EI eſtant rationelle, EF, ſera auſſi rationelle. Donc [m] EK, eſt rectangle rationel: mais MT, contenu ſous OM, MP, eſt egal à EK, donc MT, eſt rationel: partant OM, MP, ſont mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, contenant vn rect. rationel: [n] & par ainſi OP eſt irrationelle, appellee 1 mediale premiere. Donc ſi vn eſpace eſt contenu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

l 12. 10.
m 20. 10.
n 31. 10.

SCHOLIE.

Soit AB,6.& AD,yq.12.p.3. EF, ou FD,1½.& ſi à AE on applique vn parallelogramme egal au q.de EF, defaillant d'vne figure quarree AG, ſera yq. 6¼.GE,yq.¼. Donc le parallelogramme AH eſt yq.243. GK yq.27. & EL 9. & le tout AC,yq. 432.p.18. Or pour trouuer ſa racine faut diuiſer yq. 432. en deux parties, telles que le produict d'icelles parties ſoit egal au quart du q.de 18.c'eſt à dire à 81. comme il eſt dict, la plus grande partie ſera yq.108.p.yq. .27. leſquelles eſtans aſſemblees ſeront yq.243. mais la moindre partie ſera yq. 108. —— yq.27. & ayant oſté yq.27. de yq. 108. demeure yq.108. —— yq.27. Donc la plus grande partie eſt yq.243.& la moindre yq. 27. Parquoy la racine de l'eſpace binomial yq. 432. p. yq. 18. ſera yqq.243. p. yqq.27.

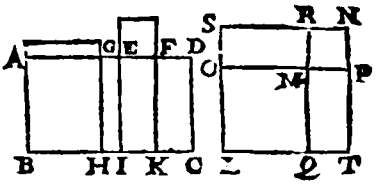
THEOREME 39. PROP. 57. lvj l

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vne ligne troiſieſme de deux noms : la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt irrationelle; laquelle eſt appellee ſeconde de deux mediales.

Soit l'eſpace AC, contenu ſous AB, rationelle, & AD, binome troiſieſme. Ie dis que la droicte ligne pouuant AC eſt irrationelle, appellee bimediale ſeconde.

Car ſoit AE, plus grand nom de AD. Donc

AE, ED, seront rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement ſelon la definition.



Et AE, pourra plus que ED, du qu. d'vne ligne commenſ. en longit. à icelle : & l'vne ny l'autre AE, ED, ne ſera commenſurable en longitude à la rationelle expoſee AB.

Soit coupee ED, en deux egalement à F, & ſoit faict au reſte comme en la 55. Prop. l'on demonſtrera ainſi qu'en icelle 55. Prop. que OP, peut l'eſpace AC. Et comme en la precedente 56. Prop. que OM, MP, ſont mediales commenſurables en puiſſ. ſeulement; puis que AE eſt poſee incommenſurable en longitude à AB, rationelle, comme la meſme AE, eſtoit là incõmenſurables en lõgitude à AB. Mais ED, EF, eſtans commenſurab. en longitude. Et ED, incommenſ. en long. à la rationelle AB: c'eſt à dire EI: [o] EF ſera auſſi incommenſ. en longitude à EI: mais EF, EI ſont rationelles, EF, eſtant moitié de ED rationelle; & EI, egale à la rationelle AB. Donc EF, EI, ſont rationelles commenſurab. en puiſſ. ſeulement. [p] Partant EK eſt medial: donc MT ſon egal, eſt auſſi medial, contenu ſous OM, MP, mediales: partant OM, MP, eſtans mediales commenſurables en puiſſance ſeulement contenant vn eſpace medial: [q] OP ſera irratiouelle, appellee bimediale ſeconde. Donc ſi vn eſpace eſt contenu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

o 14. 10.

p 22. 10.

q 22. 10.

SCHOLIE.

Soit AB,6. AD,yq.18.p.yq.10. EF,ſera yq.2½. Et ſi à AE on applique vn parallelogramme contenu ſous AG,GE,egal au q. de EF, defaillant d'vne figure quarree, AG, ſera yq.12. ½. & GE ½. partant AH, eſt yq.450. GK, yq.18. & EL, yq.90. Et tout le parallelogramme AC eſt 648. p. yq. 360. Soit diuiſee yq.648. en deux parties telles que leur contenu ſoit egal au quart du quarré de yq. 360. c'eſt à dire à 90. la plus grande partie ſera yq. 450. & la moindre yq.18. Donc la racine ou coſté du rectang. bino. AC, yq. 648. p. yq. 360. eſt yqq. 450. p. yqq. 18.

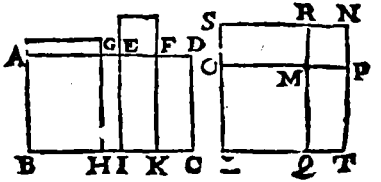
THEOREME 40. PROP. 58. lvij lij

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vne ligne quatrieſme de deux noms: la droicte ligne pouuant iceluy eſpace eſt irrationelle, laquelle eſt appellee Majeure.

Soit l'eſpace ou rectangle AC, contenu ſous AB rationelle, & AD binome quatrieſme. Ie dis que la ligne pouuant AC eſt irrationelle, appellee Majeure.

Car ſoit AE, le plus grand nom de AD: donc AE, ED ſeront rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement ſelon la definition, & AE, pourra plus que ED, du quarré d'vne ligne incommenſurable à icelle en longitude, & AE, ſera commenſur. en longitude à AB. Car ayant

coupé ED en deux egalement à F, soit faict le reſte comme en la 55. Propo.



r 19.10. [r] Donc AG, GE, ſeront incommenſurables en longit. Maintenant on demonſtrera comme en la 55. Propo. que OP, peut l'eſpace AC. Ie dis que OP eſt irrationelle, appellee majeure. Car AG, GE, eſtant incommenſur. en longitude: [f] AH, GI, ayans meſme raiſon, ſont incommenſ. & partant leurs egaux quarrez LM, MN, incommenſ. Parquoy OM, MP, ſont incommenſ. en puiſſance. Mais AE plus grand nom eſtant commenſur. en longitude à AB rationelle, ſera auſſi rationelle: [t] Et le rect. AI ſous icelles rationel: lequel eſtant egal au compoſé des quarrez LM, MN, iceluy compoſé de LM, MN, eſt rationel.

f 10.10.

t 20. 10.

Et d'autant que ED, moindre nom eſt incommenſ. en longit. à la rationelle AB; EF ſa moitié ſera auſſi incommenſurable en longitude à AB: & EF eſt rationelle, eſtant commenſur. à ED rationelle. Donc EF, AB, ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement: [u] parquoy EK contenu ſous icelles, & partant MT ſon egal, contenu ſous OM. MP, eſt medial, parquoy OP, MP, eſtans incommenſ. en puiſſance, & faiſans le compoſé de leurs quarrez LM, MN, rationel, & le rect. MT, ſous icelles medial: [x] la toute OP ſera irrationelle, laquelle eſt appellee majeure. Donc ſi vn eſpace, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

u 22.10.

x 40.10.

SCHOLIE.

Soit AB,6. & AD,6. p. yq. 24. EF, ſera yq. 6. ayant appliqué à AE, vn parallelogramme contenu ſous AG, GE, egal au q. de FF, defaillant d'vne figure quarree AG, ſera 3. p. yq. 3. & GE, 3. —— yq. 3. Donc AH eſt 18. p. yq. 108. & GK 18. —— yq. 108. & EK, ou FC, yq. 216, & le tout AC 36. p yq. 864. Donc ſi on diuiſe 36. en deux parties telles que leur produit ſoit egal à 216. la plus grande partie ſera 18. p. yq. 108. & la moindre 18. —— 9q. 108. partant la yq. de l'eſpace binom. 36. p. yq. 864. eſt (18. p. yq. 108.) p. yq. (18. —— yq. 108.)

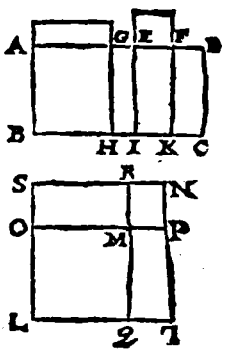
THEOREME 41. PROP. 59. lviij lij

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vne ligne cinquieſme de deux noms; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt Irrationelle, laquelle eſt appellee pouuant vn Rationel & vn Medial.

Soit l'eſpace AC, contenu ſous AB Rationelle, & AD binome cinquieſme. Ie dis que la droicte ligne qui peut AC, eſt Irrationelle, appellee pouuant vn Rationel & vn Medial.

Car ſoit AE, plus grand nom de AD: Donc par la definit. AE, ED, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement: & AE, peut plus que ED, du q. d'vne ligne incommenſ. en longitude à icelle: & ED eſt commenſurable en longitude à

AB, expoſee rationelle. Soit coupee ED en deux egalement à F, & ſoit fait comme en la 55. Propo. 7 donc AG, GE, ſeront incommenſur. en longit. Et comme en la 55. Prop. on monſtrera que OP, peut l'eſpace AC. Ie dis que OP eſt irrationelle, appellee, pouuant vn Rationel & vn Medial. Car comme en la precedente Prop. OM, MP, ſeront incommenſ. en puiſſ. Et AE, plus grand nom eſtant rationelle, & incommenſurable en longitude à la rationelle AB: AE, AB, ſeront rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement: parquoy le rectangle AI ſous icelles eſt medial. Mais AI eſt egal au compoſé des quarrez LM, MN: donc iceluy compoſé ſera medial.



Derechef, ED eſtant poſee rationelle commenſurable en longitude à la rationelle AB, eſtant le moindre nom de AD, binome 5. EF, moitié de ED, ſera auſſi commenſur. en longit. à AB, & rationelle. Donc EK, contenu ſous EI, EF, rationelles commenſ. en longit. & partant ſon egal rectangle MT, ſous OM, MP, eſt rationel. Partant OM, MP, eſtans incommenſurables en longitude, & faiſant le compoſé de leurs quarrez LM, MN, medial: mais le rect. MT, ſous icelles rationel, la toute OP ſera irrat. dite pouuant vn rationel & vn medial. Donc ſi vn eſpace eſt contenu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

19. 10.

21. 10.

20. 10.

46. 10.

SCHOLIE.

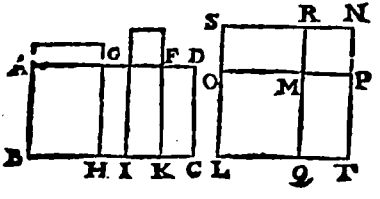
Soit AB,6.AD,*racine quarree* 24.*p.* 4.*EF sera* 2.*& à* AE,*soit appliqué le parallelogramme sous* AG,GE, *egal au q. de* EF, *defaillant d'vne figure q.* AG *sera yq.*6.*p. yq.* 2. GE *yq.*6 —— *yq.*2.ET AH, *yq.* 216.*p. yq.*72. GK,*yq.*216.——*yq.*72.*FK* 12. *& le tout AC, yq.* 864.*p.*24. *Donc si on diuise yq.* 864.*en deux telles parties que leur produict soit egal à* 144. *la plus grande partie sera yq.*216.*p. yq.*72.*& la moindre yq.*216. ——*yq.*72,*la racine quarree de l'espace binom.*AC,*yq.* 864.*p.* 24. *est yq.* (*yq.*216.*p. yq.*72.)*p. yq.* (*yq.* 216.——*yq.* 72.

lix

THEOREME 42. PROP. 60.

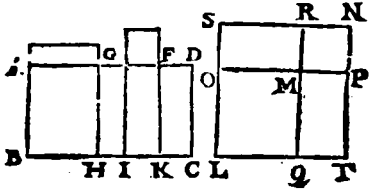
liij

Si vn espace est contenu sous vne ligne Rationelle, & vne ligne sixiesme de deux noms; la droicte ligne pouuant iceluy espace est irrationelle, laquelle est nommee pouuant deux mediaux.



Soit le rectangle, ou espace AC, contenu sous AB rationelle, & AD binome sixiesme. Ie dis que la droicte ligne pouuant AC, est irrationelle, dite pouuant deux mediaux.

Car ſoit AE le plus grand nom : donc AE, ED, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, ſelon la definition : & AE, pourra plus que ED, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longit. & l'vne ny l'autre AE, ED, ne ſera commenſ. en long. à AB rationelle. Ayant *faict*
c 19. 10. comme és precedentes, [c] AG, GE, ſeront incom-



menſ. en longit. Et on monſtrera comme en la 58. Prop. que OP peut l'eſpace AC, & comme en la 58. Prop. que OM, MP, ſont incommenſurables en puiſſance.

Derechef, comme en la precedente, le compoſé des quarrez L M, MN, ſera medial : mais comme en la 58. Prop. MT, ſous OM, MP ſera auſſi medial. Et d'autant que de AE, EF, celle-là eſt incommenſ. en longit. à ED, & cella-cy commenſ. à
d 13. 10. ED : [d] AE, EF ſeront incommenſ. en longit. [e] donc
e 10. 10. AI, EK ſont incommenſ. [f] ayans meſme raiſon
f 1. 6. que AE, EF. Parquoy le compoſé des quarrez LM, MN, egal à AI, & MT egal à EK, ſont incõmenſ. Donc OM, MP eſtans incommenſ. en puiſſ. & faiſans le compoſé de leurs quarrez LM, MN medial, & MT rect. ſous icelles medial, & incommenſ. au compoſé de leurs qq. [g] La toute O P ſera
g 42. 10. irration. laquelle eſt dite pouuant 2. mediaux : donc ſi vn eſpace eſt contenu ſous, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit AB *5.* AD, *yq.10.p.yq.8.* EF *ſera yq.2. ſi à* AE, *on applique le parallelogramme ſous* A G, GE, *egal au q. de* EF, *& defaillant d'vne fig. quarree,* AG, *ſera yq.2 ½.p.yq.½.* GE, *yq.2 ½.* —— *yq.½. &* AH, *yq.62.½.p.yq.12.½.* GK *yq.62 ½.* —— *yq.12.½. & EK yq.50. & le tout AC, yq.250.p.yq.200. ſoit diuiſee 7q.250. en deux telles parties que leur produit ſoit egal à 50. la plus grande partie ſera yq.62 ½.p.yq.12 ½. & la moindre yq.62 ½.* —— *yq.12 ½. Donc la racine quarree d'iceluy eſpace binomial, yq.250.p.yq.200. eſt yq.* (*yq.62.½.p.yq.12.½.p.yq.*(62 ½. —— *yq.12 ½.*)

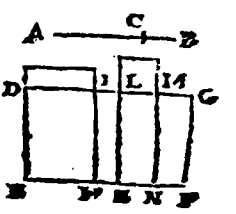
THEOREME 43. PROPOSIT. 61. lx liiij

Le quarré d'vne ligne de deux noms, ou binome, appliqué ſur vne ligne Rationelle, faict la latitude, binome premier.

Soit AB binome, dont A C eſt le plus grand nom, [b] & ſur DE rationelle propoſee, ſoit appliqué le rect. DF, egal au q. de AB, faiſant DG, latitude. Ie dis que DG, eſt binome premier. [h] 45.1.

Car à DE rationelle, ſoit appliqué DH, egal au q. de AC: & à HI, ſoit appliqué IK, egal au qu. de CB: donc le reſte LF, ſera egal à deux fois le rectangle ſous AC, CB: les[i] quarrez de AC, CB, & deux fois le rect. ſous AC, CB, eſtans egaux au q. de AB: tout ainſi que le rect. DF, eſt egal au meſme q. de AB par la conſtruction. [i] 4. 2.

Soit diuisee LG en deux egalement à M, & menee MN, parallele à LK, GF: l'vn & l'autre rect. LN, MF, sera egal au rect. sous AC, CB, [k] Et AC, CB estans rationelles commensurab. en puiss. seulement, la toute AB estant binome, les quarrez de AC, CB, seront rationaux, & partant commensurables. [l] Et leur composé estant commensurable à chacun d'iceux, iceluy composé sera aussi rationel, auquel DK estant egal par la construction, DK sera aussi rationel: & puis qu'iceluy DK est appliqué à la rationelle DE, il fera la latitude DL, rationelle & commens. en longit. à DE.



k 37. 10.

l 16. 10.

Derechef, puis que AC, CB sont rationelles commensurables en puissance seulement, [m] le rectang. sous icelles sera medial, & partant deux fois le rect. sous AC, CB, commens. à iceluy: c'est à dire LF [n] sera medial. Donc LF appliqué à LK, ration. [o] faict la latitude LG, ration. incommens. en longit. à LK, c'est à dire à DE: mais DL est monstree commens. en longit. à DE, [p] donc DL, LG, sont incommensurab. en longitude. Donc icelles sont rationelles commens. en puiss. seulement, [q] & partant DG est binome, ou de deux noms. Ie dis qu'elle est premiere.

m 22. 10.

n *Cor.* 24. 10.

o 23. 10.

p 13. 10.

q 37. 10.

Car le rectangle sous AC, CB, estant [r] milieu proportionel entre les quarrez de AC, CB, LN, sera aussi milieu proportionel entre DH, IK: [s] partant DI, LM, IL, ayant mesme raison que DH, LN, IK, LM, sera aussi moyenne proport. entre

r *Lem.* 54. 10.

s 1. 6.

DI,IL. [c] Partant le rect. sous DI, IL, sera egal au quarré de LM. Et les qq. de AC, CB, estans commens. puis que AC, CB, sont posees commens. en puiss. DH, IK, egaux à iceux seront commensur. [d] Donc DI, IL, ayant mesme raison seront commensurables en longitude. c 17. 7. d 10. 10.

Mais puis que DK, est plus grand que LF, [x] les qq. de AC, CB estans plus grands que deux fois le rect. sous AC, CB, DL, sera plus grande que LG, ([y] DL, LG, ayant mesme raison que DK, LF.) Donc puis que DL est plus grande que LG, & à DL, est appliqué le rect. sous DI, IL, egal au q. de LM; c'est à dire au quart du quarré de LG, moindre, & defaillant d'vne figure quarree; (car le rectangle sous DI, IL, est monstré egal au quarré de LM,) & DL, est diuisé à I, en DI, IL, commensurables en longitude, comme il est demonstré. [z] Donc DL, plus grande, pourra plus que L G, moindre du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle: parquoy D G, estant monstree de deux noms, & que DL plus grand nom, peut plus que le moindre L G, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, & que le mesme DL plus grand, est commensurable en longitude à la rationelle proposee DE: par la definition DG sera premiere de deux noms. Donc le quarré d'vne ligne de deux noms, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. x Lem. 39. 10. y 1. 6. z 18. 10.

(·) (·) (·)

SCHOLIE.

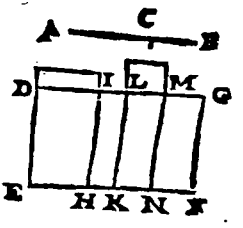
Soit AB, *yq.* 15. *p. yq.* 5. *&* BE, 5. DH *ſera* 15. *&* IK 5. *&* LN, *yq.* 75. *&* MF, *yq.* 75. *Partant ſi à* DE *on applique* DH, *il ſera la latitude* DJ, 3. *&* ſi *on applique* IK, *il ſera* JL, 1, *Que ſi à la meſme on applique* LN, *ſçauoir yq.* 75. *il ſera la latitude* LM, *racine quarree* 3. *&* MG *ſera auſſi racine quarree* 3. *Donc la toute* DG *eſt* 4. *p. racine quarree* 12. *premiere de deux noms.*

lxj lv

THEOREME 44. PROPO. 62.

Le quarré d'vne ligne premiere de deux mediales appliqué ſur vne ligne Rationelle, faict la latitude ſeconde de deux noms.

C'eſt à dire Binome ſecond.



Soit AB, premiere de deux mediales, dont le plus grand nom eſt AC.

a 45. 1. [a] Et à la rationelle DE, ſoit appliqué le rectangle DF, egal au q. de AB, faiſant la latitude ou coſté DG. Ie dis que DG eſt binome 2.

Car ſoit faict comme en la precedente, de ſorte que DH, IK ſoient derechef egaux aux quarrez de AC, CB, & LN, MF, egaux chacun au rectangle

sous AC, CB. D'autant donc que AC, CB, composant AB bimediale premiere, [b] sont mediales commens. en puiss. seulement, contenant vn rect. rationel: les quarrez de AC, CB, & partant leurs egaux rect. DH, IK, sont commensur. & mediaux, [c] & partant le tout DK, estant commensurable à chacun d'iceux DH, IK [d] sera aussi medial, lequel estant appliqué à DE rationelle, [e] sa latitude DL sera rationelle incommensurable en longitude à DE.

b 38. 10. c 16. 10. d coroll. 24 10. e 23. 10.

Derechef, le rectangle sous AC, CB, estant rationel, le double d'iceluy, sçauoir LF, sera aussi rationel; lequel estant appliqué à L K rationelle, [f] sa latitude LG, sera rationelle commensurab. en long. à Lk, c'est à dire à DE. Donc puis que L G est commensur. en longit. à DE, & D L incommens. en longitude à DE, [g] DL, L G seront incommens. en longitude, & estans monstrees rationelles, elles seront rationelles commens. en puiss. seulement. [h] Et partant la toute D G est de deux noms. Et comme en la precedente on monstrera que DL est le plus grand nom, & peut plus que LG moindre du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, & le moindre nom LG, estant monstré commensurable en longitude à la rationelle exposee DE, selon la definition, DG sera seconde de deux noms, ou binome second. Donc le quarré d'vne ligne premiere de deux mediales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

f 21. 10. g 13. 10. h 37. 10.

(.·.) (.·.) (.·.)

SCHOLIE.

Soit AB. $\sqrt{qq.48.p.}$ $\sqrt{qq.27.}$ *&* DE 4. DH, *sera* $\sqrt{q.48.}$ *&* IK $\sqrt{q.27.}$ *LN, ou* FM 6. *Donc si à* DI *on applique* DH, *la latitude* DI, *sera* $\sqrt{q.}$ *de 3. & si à la mesme on applique* IK; IL *sera* $\sqrt{q.}$ 1. $\frac{1}{2}$; *ainsi* LN *appliqué, sera* LM 1 $\frac{1}{2}$. *c'est à dire* MG, *egal à iceluy.* Et DI, IL. *c'est à dire* $\sqrt{q.3.}$ *et* $\sqrt{q.1\frac{1}{2}}$. *estans commensu. en longitude, la toute* DL *sera* $\sqrt{q.9\frac{1}{2}}$. *Donc la toute* DG *sera* $\sqrt{q.9\frac{1}{2}}$. *p.3. seconde de deux noms.*

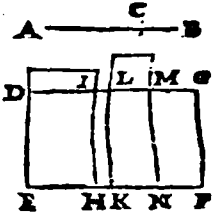
kij lvj

THEOREME 45. PROP. 63.

Le quarré d'vne ligne seconde de deux mediales, appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude, binome troisiesme.

Soit AB, seconde de deux mediales, ou bimediale seconde, dont le plus grand nom est AC, & à la rationelle DE soit appliqué le rectangle DF, egal au q. de AB, faisant la latitude DG. Ie dis que DG est binome troisiesme.

i 45. 1.



Car ayant faict la construction comme en la 61. D'autant que AC, CB, faisant la toute AB, bimediale seconde, k sont mediales commens.

k 39.10.

en puissance

en puiſſance ſeulement, contenant vn medial; les quarrez de AC, CB, & partant leurs egaux rectangles DH, IK, ſont commenſurables & mediaux. Parquoy le tout DK, [l] eſtant commenſurable à chacun d'iceux, [m] ſera auſſi medial: & eſtant appliqué à la rationelle DE, [n] fera la latitude L D, rationelle, incommenſurable en longitude à D E. l 16. 10. Cor. 24. 10. m 23. 10. n

Derechef, le rect. ſous AC, CB eſtant medial, le double d'iceluy, ſçauoir LF, ſera auſſi medial, lequel eſtant appliqué à la rationelle LK, [o] l'autre coſté ou latitude L G ſera rationelle incommenſ. en longit. à LK c'eſt à dire à D E. Et puis que A C eſt incommenſ. en longit. à CB: & comme AC, à CB, [p] ainſi le q. de AC, au rect. ſous AC, CB: [q] le q. de AC, eſt auſſi incommenſ. au rect. ſous A C, CB. Mais le compoſé des qq. de AC, CB [r] eſt commenſ. au q. de AC, (eſtans iceux qq. commenſur. deſcrits de lignes poſees commenſ en puiſſance,) & 2. fois le rect. ſous AC, CB, eſt commenſ. au rectang. ſous AC, CB eſtant double d'iceluy. Donc le compoſé des qq. de AC, CB, c'eſt à dire le rect. DK, [s] eſt incommenſ. à deux fois le rect. ſous A C, CB, c'eſt à dire au rect. LF. Donc DL, LG, ayans meſme raiſon que DK, LF, [t] ſont incommenſ. en longit. Mais elles ſont monſtrees rationelles donc DL, LG, ſont rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement: partant [v] la toute DG eſt binome. Et cõme en la 61. Prop. on monſtrera que DL eſt le plus grand nom, & peut plus que LG, moindre, du q. d'vne ligne, qui luy eſt commenſ. en longitude, & l'vne ny l'autre DL, LG, eſtant monſtree n'eſtre commenſurable en longitude à la rationelle propoſee par la definition D G, ſera binome o 23. 10. p Lemme 3. 19. 10. q 10. 10. r 16. 10. s Sc. 14. 10. t 10. 10. v 37. 10.

troiſieſme. Partant le quarré d'vne ligne ſeconde de deux mediales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit AB, √qq.72.p.√qq.8. & DE,4. DH ſera √q.72.1k, √q.8. LN, ou MF, √q.4. Donc ſi à DE on applique DH, la latitude DI, ſera √q.4½. mais ſi on applique FK, la latitude FL ſera √q.½. & ſi LN, ou MF eſt appliq. LM, ou MG ſera √q.1½. Mais ſi DI, FL ſont adiouſtez, c'eſt à dire √q.4½. & √q.½. DL ſera √q.8. Donc la toute DG, eſt √q.8.p.√q.6. binome troiſieſme.

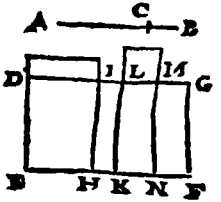
lxiij lvij

THEOREME 46. PROP. 64.

Le quarré d'vne ligne Majeure, appliqué à vne ligne rationelle, faict la latitude binome quatrieſme.

Soit la majeure AB, dont le plus grand nom eſt AC: & à la rationelle DE, ſoit appliqué le rect. DF, egal au q. de AB, faiſant la latitude DG. Ie dis que DG, eſt binome quatrieſme.

[a] 45. 1.



Car ſoit faicte la conſtruction comme en la 61. Prop. d'autant que AC, CB, faiſans la majeure, A B ſont incommenſ. en puiſſ. & font le compoſé de leurs qq. rationel, & le rect. ſous icelles medial: DK egal

[a] 45.10.

au composé d'iceux qq. sera aussi rationel ; mais LF, double du rect. sous AC, CB, medial. d'autant donc que DK est appliqué à la rationelle DE, [a] DL sera rationelle commens. en longit. à DE. Semblablement, LF medial; estant appliqué à la rationelle LK, [a] LG sera rationelle incommensur. en longit. à LK, c'est à dire à DE. Donc puis que DL est commens. en longitude à DE, & LG incommensurable : DL, LG seront incommensurab. en longitude : mais elles sont monstrees rationelles: donc DL, LG, sont rationelles commensurables en puissance seulement. [b] partant DG, est binome.

[a] 21.10.
[a] 23.10.
13.10.
[b] 37.10.

Maintenant, comme il est monstré en la 62. Prop. le rect. sous DI, IL, est egal au quarré de LM: mais d'autant que les qq. de AC, CB sont incommens. (estans AC, CB incommens. en puiss.) leurs egaux rectangles DH, Ik, seront aussi incommensur. [c] & partant DI, IL, estans en mesme raison, sont incommens. en longit.

[c] 10.10.

Mais, comme il est monstré en la 61. Propos. DL est plus grãde que LG, & à DL, on a appliqué vn rectangle contenu sous DI, IL, egal au q. de LM, c'est à dire à la quarte partie du qu. de LG, defaillant d'vne figure quarree, lequel diuise DL à I, en parties incommens. en longit. [d] DL, pourra plus que LG, du q. d'vne ligne qui luy est incommens. en longit. Parquoy DL (plus grand nom de DG binome) estant monstree commens. en longitude à D.., rationelle proposee : DG, par la definition sera binome quatriesme: donc le quarré d'vne ligne figure, appliqué à vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[d] 19.10.

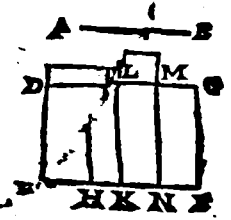
SCHOLIE.

Soit AB, $\sqrt{q.}$ (*10.p.* $\sqrt{q.37.\frac{1}{2}.}$) *p.* $\sqrt{q.10.}$ —— $\sqrt{q.37.\frac{1}{2}.}$ *et* DE, *5.* DH *sera 10.p.* $\sqrt{q.37.\frac{1}{2}.}$ *IK, 10.* —— $\sqrt{q.37.\frac{1}{2}.}$ *LN, ou MF,* $\sqrt{q.62.\frac{1}{2}.}$ *Partant si à* DE *on applique* DH, *faisant la latitude* DI; DI *sera 2. p.* $\sqrt{q.\ 1\frac{1}{2}.}$ *Mais si on applique IK faisant la latit. IL, icelle sera 2.* —— $\sqrt{q.1\frac{1}{2}.}$ *& si on applique LN, ou MF, LM, ou MG, sera* $\sqrt{q.2\frac{1}{2}.}$ *que si on compose* DI, $\mathcal{J}L$, *c'est à dire 2. p.* $\sqrt{q.1\frac{1}{2}.}$ *et 2.* —— $\sqrt{q.1\frac{1}{2}.}$ DL *sera 4. parquoy la toute* DG *est 4. p.* $\sqrt{q.10.}$ *binome 4.*

[lxiiij lviij] THEOREME 47. PROP. 65.

Le quarré d'vne ligne, pouuant vn Rationel & vn Media., appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude Binome cinquieſme.

c45.L Soit AB, pouuant vn rationel & vn medial, dont le plus grand nom eſt à AC, c & à DE rationelle, ſoit appliqué le rectangle D F, egal au q. de A B, faiſant la latitude de DG. Ie dis que DG eſt 5. de 2. noms ou binome cinquieſme. Soit faict comme en la 61. Propoſition.



D'autant donc que AC, CB, qui font AB, pouuant vn rationel & vn medial, ſont incommenſurables en puiſſance, faiſans le compoſé de leurs quarrez medial, & rectangle ſous icelles rationel: Dk, egal au compoſé des quarrez de AC, CB, ſera medial: & LN, egal au rectangle ſous AC, CB: & partant le double d'iceluy, ſçauoir LF, ſera rationel. Donc Dk medial, appliqué à DE rationelle, [f] faict DL, latitude rationelle, incommenſurable en longitude à DE rationelle: mais LF rationel, appliqué à la rationelle LK, [g] faict la latitude LG. rationelle commenſ. en longit à Lk, c'eſt à dire à DE. [h] 41. 10. f 23. 10. g 21. 10. h 13. 10.

D'autant donc que LG, eſt commenſurable en longitude à DE ratiouelle, & DL incommenſ. en long. DL, LG, ſeront incommenſurables en longitude, parquoy DL, LG, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement: [i] & partant DG eſt binome. i 37. 10.

Maintenant on monſtrera comme on la 61. que le rectangle ſous DI, IL, eſt egal au quarré de LM: & comme en la precedente, que DL eſt le plus grand nom, & peut plus que LG, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, Parquoy le moindre nom LG, eſtant monſtré commenſurable en longitude à la rationelle expoſee DE, par la definition DG, ſera binome cinquieſme. Donc le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit AB, √q. (√q. 125. p 5.) p. √q. (√q. 125. ——— 5.) & DE soit 5. DH sera √q. 125. p. 5. IK, √q. 125. ——— 5. LN, ou MF 10. Et si à DE on applique DH, faisant la latitude DI; DI sera √q. 5. p. 1. Et si on applique IK, faisant IL; IL sera √q. 5. ——— 1. Et si on applique LN, ou MF, LM, ou MG sera 2. & DI, IL estans adiouſtees, ſçauoir √q. 5. p. 1. et √q. 5. ——— 1, DL sera √q. 20 donc la toute DG, eſt √q. 20. p. 4. binome cinquieſme.

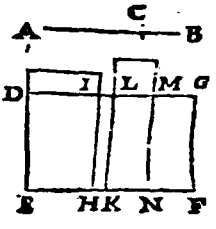
lxv
lix

THEOREME 48. PROP. 66.

Le quarré d'vne ligne pouuant deux Mediaux, appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude, binome ſixieſme.

Soit AB, pouuant deux mediaux, dont le plus grand nom eſt AC; & à DE rationelle, ſoit appliqué le rectangle DF, egal au q. de AB, faiſant la latitude DG. Ie dis que DG eſt binome ſixieſme.

R 45. 1.



Car ayant faict la conſtruction comme en la 61. Propoſition: d'autant que AC, CB faiſans AB, pouuant deux mediaux, ſont incommenſurables en puiſſance, & font le compoſé de

42. 10.

leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles medial & incommensurable au composé de leurs quarrez: tant Dk, egal à iceluy composé, que L F egal à deux fois le rectangle sous AC, CB, est medial: & Dk, LF, mediaux, estans appliquez à la rationelle DE: l leurs latitudes DL, LG, seront rationelles incommensurables en longitude à DE rationelle. m l 23.10. m 42.10.

Et d'autant que le composé des quarrez de AC, CB, est incommensurable au rectangle, sous AC, CB; & deux fois le rectangle sous AC, CB, est commensurable à iceluy rect. sous AC, CB, estant double d'iceluy: n le composé desdicts quarrez, c'est à dire Dk, est incommensurable à deux fois le rect sous AC, CB, c'est à dire à L F. Parquoy DL, LG, ayans mesme raison que Dk, LF, o sont incommensurables en longitude. Donc DL, LG, sont rationelles commens. en puiss. seulement, p partant DG est binome. n 13. 10. o 10.10. p 37.10.

Et on demonstrera, comme en la precedente, que DL, est le plus grand nom, & peut plus que LG, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude, & estant monstré que DL, ny LG, n'est commensurable en longitude à DE, rationelle exposee, par la definition DG sera binome sixiesme. Donc le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit AB, $\sqrt{q}.(\sqrt{q}.252.p.\sqrt{q}.72.)p.\sqrt{q}.(\sqrt{q}.252.$ —— $\sqrt{q}.72.)$ *&* DE 6. DH *sera* $\sqrt{q}.252.p.\sqrt{q}.72.$ Ik, $\sqrt{q}.252.$ —— $\sqrt{q}.72.$ *LN, ou* M F $\sqrt{q}.180.$ *Et à* DE, *soit appliqué* DH, *la latitude*

CI, sera √q. 7. p. √q. 2. Derechef, soit appliqué IK, la latit. IL: sera √q. 7. √q. 2. Finalement, soit appliqué LN, ou MF, LM, ou MG, sera √q. 5. donc la toute DG, est √q. 28. p. √q. 20. binome sixiesme.

lxvj

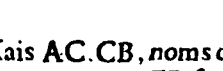
lx

THEOREME 49. PROPO. 67.

La ligne commensurable en longitude à la ligne de deux noms, ou binome, est aussi ligne de deux noms, & de mesme ordre.

Soit AB, ligne de deux noms, ou binome quelconque, diuisee en ses noms, dont le plus grand est AC, & le moindre CB: & soit DE, commens. en longit. à AB. Ie dis que DE est aussi binome, & de mesme ordre que AB.

q 12. 6. r 19 5. Car comme la toute AB, est à la toute DE, q ainsi la retranchee AC, soit à la retranchee DF: r dõc le reste CB, sera au reste FE, comme la toute AB, à la toute DE.



Et d'autant que DE est posee commensur. en longit. à AB, s DF, sera aussi commens. en long. à AC. & FE, à CB. t Mais AC. CB, noms de AB, binome, sont rationelles, donc DF, FE, sont aussi rationelles.

s 10. 10. t 37. 10.

Derechef, puis que comme AC, est à DF, ainsi CB, à FE: & en permutant comme AC, à CB, ainsi DF, à FE. Mais AC, CB, sont commensurables en puiss. seulement. v donc DF, FE, sont aussi commensurables en puissance seulement: donc

v 10. 10.

DF, FE, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement : x Et partant DE eſt binome. x 37. 10.
Ie dis que DE eſt auſſi de meſme ordre que AB: Car AC, peut plus que CB, du q. d'vne ligne qui luy eſt commenſ. ou incommenſurable. Que ſi AC peut plus que CB, du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude, y DF pourra plus que FE, du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. en longitude. y 15. 10.

Que ſi AC eſt commenſurable en longitude à la rationelle expoſee, de ſorte que AB ſoit binome premier, z DF ſera auſſi commenſurable en longitude à la meſme rationelle, l'vne & l'autre eſtant rationelle, & DF eſtant auſſi commenſurable en longitude à AC. Parquoy DE, ſelon la definition, eſt binome premier, c'eſt à dire de meſme ordre. z 12. 10.

Mais ſi CB, eſt commenſ. en longitude à la rationelle expoſee: de ſorte que AB ſoit binome ſecond : Semblablement FE ſera commenſurab. en longit. à la rationelle expoſee. Parquoy DE, par la definition eſt binome ſecond.

Finalement, ſi l'vne ny l'autre AC, CB, n'eſt commenſurable en longitude à la rationelle expoſee : de ſorte que AB ſoit binome troiſieſme, l'vne ny l'autre DF, FE, n'eſt commenſurable en longit. à la rationelle expoſee: donc DE par la definition, eſt binome troiſieſme. 12. 10.

Mais ſi AC. peut plus que CB, du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſur. en longitude, DF, pourra plus que FE, du quarré d'vne ligne qui luy ſera incommenſurable en longitude: Parquoy nous monſtrerons, comme auparauant, que DE eſt binome quatrieſme, ou cinquieſme, 15. 10.

ou ſixieſme; ſelon que AB ſera binome quatrieſme, ou cinquieſme, ou ſixieſme: donc la ligne commenſurable en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

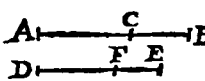
lxvij lxj

THEOREME 50. PROP. 68.

La ligne droicte commenſurable à vne ligne Bimediale, icelle eſt auſſi Bimediale & de meſme ordre.

Soit AB, bimediale quelconque diuiſee en ſes noms, dont AC eſt le plus grand, & CB le moindre: & ſoit DE commenſurable en longitude à icelle. Ie dis que DE eſt auſſi bimediale, & de meſme ordre que AB.

a 12. 6. Car [a] comme la toute AB, eſt à la toute DE, ainſi la retranchee AC, ſoit la retranchee DF: [b] donc le reſte CB, ſera au reſte FE, comme la toute AB, à la toute DE. Parquoy DE eſtant poſee commenſ. en longit. à AB, [c] DF ſera commenſ. en long. à AC, & FE, à CB: Mais AC CB ſont mediales, [d] donc DF FE commenſ. à icelles, ſont auſſi mediales.



b 19. 5.

c 10. 10.

d 24. 10.

e 38. 10. Derechef, AC eſtant à DF, comme CB à FE, en permutant comme AC, eſt à CB, DF, ſera à FE: [e]

f 10. 10. Mais AC, CB, ſont commenſ. en puiſſance ſeulement; [f] donc DF, FE ſeront auſſi commeſurables en puiſſ. ſeulement. Et eſtans monſtrees mediales,

g 39. 10. icelles DF, FE, ſeront mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement: [g] parquoy DE ſera bimediale.

Ie dis qu'elle eſt de meſme ordre que AB. Car puis que comme AC, à CB, ainſi DF, à FE; [h] mais comme AC, à CB, ainſi le q. de AC, au rect. ſous AC, CB, & comme DF, à FE, ainſi le q. de DF, au rect. ſous DF, FE; comme le q. de AC, ſera au rect. ſous AC, CB: ainſi le q. de DF, ſera au rect. ſous DE, EF: & en permutant comme le q. de AC, au q. de DF: ainſi le rect. ſous AC, CB, au rect. ſous DF, FF: Mais le q. de AC eſt commenſ au quarré de DF: eſt. ns AC, DF, monſtrees commenſurab. en long. [i] Donc le rect. ſous AC, CB, ſera commenſurable au rect. ſous DF, FE. Parquoy ſi le rect. ſous AC. CB eſt rationel: en ſorte que A B ſoit bimediale premiere: le rectangle ſous D F, FE commenſurable à iceluy, ſera auſſi rationel, [l] & partant DE, ſera bimediale premiere.

h *Lem.* 3. 19. 10.
i 10. 10.
l 38. 10.

Mais ſi le rectangle ſous AC, CB, eſtoit medial, en ſorte que AB fuſt bimediale ſeconde: le rectangle ſous DF, FE, commenſurable à iceluy, [m] ſeroit auſſi medial: partant DE ſeroit bimediale ſeconde. Partant la ligne droicte commenſurable, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Cor. 24 10.
m 39. 10.

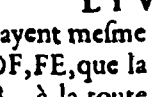
THEOREME 51. PROPO. 69. lxvij lxij

La ligne droicte commenſurable à vne ligne Majeure; eſt auſſi ligne Majeure.

Soit la ligne maieure AB, diuiſee en ſes noms à C, & ſoit DE commenſurable à icelle en longit. & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement. Ie dis que DE eſt auſſi maieure.

Car ſoit faict comme cy-deuant, en ſorte que

AC, CB ayent meſme raiſon à DF, FE, que la toute AB, à la toute DE: d'autant donc que AB, DE ſont commenſurables ou en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement, [a] tant AC, DF, que CB, FE ſeront commenſurables de meſme façon.



a 10.10.

Derechef, d'autant que comme AC, à DF, ainſi CB, à FE. Et en permutant comme AC, à CB, ainſi DF, à FE: [o] comme le q. de AC, ſera au q. de CB, ainſi le q. de DF, au q. de FE. Et en compoſant comme le compoſé des qq. de AC, CB, au q. de CB: ainſi le compoſé des qq. de DF, FE, au q. de FE. Et par conuerſion de raiſon, comme le q. de CB, au compoſé des qq. de AC, CB, ainſi le q. de FE, au compoſé des qq. de DF, FE. Et en permutãt comme le q. de CB, au q. de FE, *ainſi le compoſé* des qq. de AC, CB, au compoſé des quarrez de DF, FE. Mais le q. de CB, eſt commenſurab. au q. de FE: CB, FE eſtans monſtrees commenſur. ſoit en longit. & puiſſ. ou en puiſſ. ſeulement. [p] Donc le compoſé des qq. de AC, CB eſt commenſurab. au compoſé des qq. de DF, FE: Mais le compoſé des quarrez de [q] AC, CB eſt rationel, puis que AC, CB compoſent la maieure *A B*: *donc le* compoſé des quarrez de DF, FE, eſt auſſi rationel.

o 22.6.

p 10.10.

q 40. 10. 9. d.

Derechef, puis que comme AC eſt à CB, ainſi DF à FE: [r] mais comme AC à CB, ainſi le q. de AC, au rect. ſous AC, CB: & comme DF, à *FE*, ainſi le q. de DF, au rect. ſous DF, FE. Comme le q. de AC, ſera au rectangle ſous AC, CB: ainſi le

r *Lem.* 3. 19.10.

q. de DF, sera au rect. sous DF, FE : & en changeant comme le quarré de AC, au quarré de DF, ainsi le rectangle sous AC, CB, au rectang. sous DF, FE.

Mais le q. de AC est commen sur. au q. de DF estans AC, DF monstrees commensurab. ou en long. & puiss. ou en puiss. seulemét. [r] donc le rect. sous AC, CB est aussi commens. au rectang. sous DF, FE : [t] mais le rect. sous AC, CB est medial donc le rect. sous DF, FE, comménsurable à iceluy, est aussi medial : mais AC estant à CB, comme DF, à FE, [u] & AC, CB sont incommensurables en puiss. (composant la maieure AB,) DF, FE seront aussi incommensurables en puissance. Donc DF, FE estans incommen. en puiss. & faisans le composé de leurs qq. rationel, & le rect. sous icelles medial, comme il est monstré: [x] la toute DE sera ligne maieure. Donc la ligne commensurable, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[r] 40. 10.
[t] Cor. 24. 10.
[u] 40. 10.
10. 10.
[x] 40. 10.

THEOREME 52. PROP. 70. lxix lxiij

La ligne commonsurable à vne ligne pouuant vn Rationel & vn Medial, est aussi ligne pouuant vn Rationel & vn Medial.

Soit AB, pouuant vn rationel & vn medial, diuisee en ses noms à C, & soit DE commensurable à icelle en longitude & puissance, ou en puissance seulement. Ie dis que DE peut aussi vn rationel & vn medial.

Car ayant faict la mesme construction que

cy-deuant, nous demonſtrerons comme en la precedente, que le composé des qq. de AC, CB, eſt cõmen. au composé des qq. de DF, FE: Mais le composé des qq. de AC, CB eſt medial, puis que AC, CB compoſent AB, pouuant vn rationel & vn medial. Donc le composé des qq. de DF, FE commenſurable à iceluy, eſt auſſi medial.

41. 10.

Cor. 24. 10

Semblablement, comme en la precedente Propoſition, le rect. ſous AC, CB, qui eſt rationel, ſera commenſurable au rectangle ſous DF, FE, & partant le rectangle ſous DF, FE, ſera rationel.

y 41. 10. 9. def.

Finalement, comme en la meſme precedente Propoſition, DF, FE, ſeront incommenſ. en puiſſ. donc DF, FE eſtans incommenſ. en puiſſ. & faisãs le composé de leurs qq medial, & le rectang. ſous icelles rationel, comme il eſt demonſtré. la toute DE, ſera ligne pouuant vn rationel & vn medial. Partant la ligne commenſurable, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

z 41. 10.

lxix lxiij THEOREME 53. PROP. 71.

La ligne commenſurable à vne ligne pouuant deux Mediaux, eſt auſſi ligne pouuant deux Mediaux.

Soit AB, pouuant deux mediaux, diuiſee en ſes noms à C, & DE commenſurable à icelle en

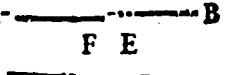
longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement. Ie dis que D E, peut auſſi deux mediaux.

Car, la conſtruction faicte comme auparauant, l'on monſtrera comme en la 69. Propoſition, que le compoſé des qq. de AC, CB, eſt commenſur. au compoſé des qq. de DF, FE; & le rect. ſous AC, CB, commenſ. au rect. ſous DF, FE. [a] Parquoy tãt le compoſé des qq. de AC, CB, que le rect. ſous AC, CB eſtant medial: [b] auſſi tant le compoſé des qq. de DF, FE, que le rect. ſous DF, FE ſera medial: Mais DF, FE ſont incommenſ. en puiſſ. comme auparauant.

a 42. 10.

b Cor. 24. 10.

Finalement, [c] le compoſé des qq. de AC, CB, & le rect. ſous AC, CB eſtant incommenſ. par l'hypotheſe, puis que AB peut deux mediaux: mais le compoſé des qq. de DF, FE, eſt monſtré commenſ. au compoſé des qq. de AC, CB, & le rect. ſous DF, FE, monſtré commenſ au rect. ſous AC, CB, [d] le compoſé des qq. de DF, FE, & le rect. ſous DF, FE ſeront incommenſur. Partant DF, FE eſtans incommenſ. en puiſſ. & faiſans le compoſé de leurs qq. medial. & le rect. ſous icelles medial, & incommenſ. au compoſé de leurs quarrez: [c] D E ſera ligne pouuant deux mediaux. Partant la ligne commenſ. à la ligne pouuant, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



c 42. 10.

d 5c. 14. 10.

c 42. 10.

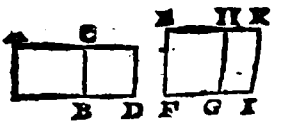
lxxj lxv THEOREME 54. PROP. 72.

Si vne superficie Rationelle & vne Mediale sont composees, il se faict quatre Irrationelles, sçauoir celle qui est dite Binome, ou Bimediale premiere, ou ligne Maieure, ou ligne pouuant vn Rationel & vn Medial.

C'est à dire, que la ligne pouuant tout le composé, est vne de ces quatre Irrationelles, sçauoir celle qui est dite Binome, ou Bimediale premiere, &c.

Soit l'espace ou superficie AB rationelle, composee auec la mediale CD. Ie dis que la droicte ligne qui peut tout l'espace AD, est premiere de deux noms. i. binome premier, ou bimediale premiere, ou ligne maieure, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Car l'espace AB, sera plus grand que CD, ou moindre ne pouuant estre egal. Car AB estãt rationel, si CD estoit egal à icelui, il seroit aussi rationel contre l'hypothese.



45. 1.

Soit premierement AB, plus grand que CD, & à la rationelle proposee E F soit applique le rect. EG, egal à AB, & à HG soit applique HI, egal à CD; de sorte que le tout EI, soit egal au tout AD.

Et

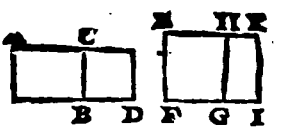
Et AB estant rationel, & CD medial, EG sera
aussi rationel, & HI medial: lesquels appliquez
à la rationelle EF: [f] EH, sera rationelle com- f 21. 10.
mensurable en longit. à EF: [g] mais HK rationelle g 23. 10.
incommens. en long. à EF.

Derechef, EG, HI estans incommens. comme il
appert par les def. EG estant rationel, & HI irra-
tionel, sçauoir medial: EH, [h] HK ayans mesme h 1. 6.
raison [i] seront incommen en long. & partant sont i 10. 10.
rationelles commen. en puiss. seulement: [k] donc k 37. 10.
Ek est binome. Et AB estant posé plus grand que
CD, c'est à dire EG, plus grand que HI: EH sera
aussi plus grande que HK: EH, HK ayans mesme
raison que EG, HI. Maintenant EH plus grand
nom, pourra plus que H K moindre du quarré
d'vne ligne commensurable en longitude à icel-
le, ou incommensurable.

Si EH peut plus que Hk, du q. d'vne ligne com-
mens. en longit. à icelle: Ek sera binome premier
par la definit. estant EH plus grand nom monstré
commensur. en longitude à la rationelle EF. Par-
quoy la ligne pouuant l'espace EI, contenu sous la
rationelle EF, & E k binome premier: & par-
tant l'espace AB, composé du rationel AB, &
du medial CD, [l] est irrationelle, appellee bi- l 55 10.
nome.

Mais si EH peut plus que Hk, du quarré d'v-
ne ligne qui luy soit incommens. en longit. E k
sera binome quatriesme par la definition, estant
EH plus grand nom monstree commensurable en
longit. à la rationelle EF Donc la ligne droicte
pouuant l'espace EI, contenu sous EF rationelle, &
Ek binome 4. & partant aussi l'espace AD [m] est ir- m 58. 10.
rationelle, appellee maieur.

Soit maintenant AB, plus grand irrationel & medial, & CD plus petit rationel: ayant faict la construction comme auparauant, EH



sera incommensurable en longit. à EF, & HK, commens. & partant EH, HK rationelles commensur. en puiss. seulement, & la toute EK binome. donc EH plus grand nom, pourra plus que HK, du q. d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude, ou incommeus. si commensurable & EH est monstree incommens. en longitude à la rationelle proposee, EK, par la definition sera binome second. donc la ligne pouuant l'espace EI, (ou AD) contenu sous EF rationelle, & EK binome second
a 56.10. est irrationelle a appellee bimediale premiere. Si incommensurable, EK sera binome cinquiesme: donc la droicte ligne pouuant l'espace EI (qui est AB) contenu sous EF rationelle, & EK binome
• 59.10. cinquiesme • est irrationelle, dite pouuant vn rationel & vn medial. Donc si vn espace rationel & vn medial sont compotez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit l'espace Rationel AB, 7. *& le medial* CD, *yq.* 48 *la ligne pouuant iceux espaces adiouſtez ensẽble, ſera* 2. *p. yq.* 3. *binome prem. si:* AB *eſtoit* 21. *&* CD, *yq.* 432. *la ligne pouuant iceux ſera yq* 12. *p.* 3. *binome* 2. *ſi* AB *eſt* 14. CD *yq.* 192: *la lig pouuãt iceux ſera r q.* 8. *p. r q.* 6. *binome* 3. *Et ſi* AB *eſt* 6. *&* CD *r q.* 32. *icelle ſera* 2. *p. r q.* 2. *binome*

quatrieſme. Mais ſi AB eſt 3. & CD yq. 8. elle ſera V q. 2. p. 1. binome cinquieſme: & ſi AB eſt 5. & CD V q. 24. la ligne pouuant leur composé ſera V q. 3. p. yq. 2. binome 6. Mais ſi AB eſt 4. & CD V q. 18. la ligne pouuant leur composé ſera yqq. 8. p. yqq. 2. bimediale premiere: & ſi AB eſt 6. et CD yq. 22. icelle ligne ſera yq. (6. p. 12.) ou yq. (3. p. yq. 6.) p. yq. 3. ——— yq. 6. Finalement, ſi AB eſt 2. & CD V q. 8. la ligne pouuant iceux eſpaces, ſera yq. (yq. 8. p. 2.) ou yq. (yq. 2. p. 1.) p. racine quarree (yq. 2. ——— 1.)

lxxij

THEOREME 55. PROPO. 73. lxvj

Si deux ſuperficies Mediales, incommenſurables entr'elles, ſont compoſees, les deux autres lignes Irrationelles ſont faictes, ſçauoir, ou la Bimediale ſeconde, ou la ligne pouuant deux Mediaux.

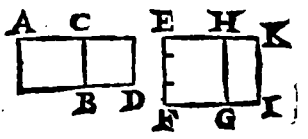
C'eſt à dire, que la ligne qui peut tout le compoſé eſt, ou Bimediale ſeconde, ou pouuant deux Mediaux.

Soient compoſez deux mediaux incommenſurables AB, CD. Ie dis que la droicte ligne qui peut tout, l'eſpace AD, eſt bimediale ſeconde, ou pouuant 2. mediaux.

Car derechef AB ſera plus grand que CD, ou moindre: & egal non, autrement AB, CD ſeroient commenſurables, ce qui eſt contre l'hypotheſe.

Soit premierement plus grand, & ſoit fait tout

comme en en la precedente. Et AB, CD, eſtans poſez mediaux & incommenſurab. leurs egaux EG, HI, ſeront auſſi



p 1.6. mediaux & incommenſurables. [p] Partans EH,
q 10.10. HK ayans meſme raiſon, [q] ſeront incommenſ. en
r 23.10. longitude: (Et EG, HI, mediaux, eſtans appliquez à la rationelle EF, [r] l'vne & l'autre EH, HK, eſt rationelle incommenſ. en longit. à la rationelle
37. 10. EF. Donc EH, HK, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement: partant la toute EK eſt binome.

Mais puis que AB, eſt poſé plus grand que CD comme en la precedente Propo. EH ſera le plus grand nom de EK: partant pourra plus que Hk, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, ou incommenſurable. Si EH, peut plus que Hk, du q. d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude, tant EH, que Hk eſtant monſtree incommenſ. en longit. à EF rationelle, per la definition, Ek ſera binome troiſieſme. Donc la droicte ligne pouuant l'eſpace EI, contenu ſous EF rationelle, & Ek binome troiſieſme,
57. 10. & partant la ligne pouuant l'eſpace AD, eſt irrationelle; dite bimediale ſeconde.

Si EH peut plus que Hk, du quarré d'vne ligne incommenſurable en longit. à icelle, tant EH que Hk. eſtans incommenſur. en longitude à EF
60. 10. rationelle: Ek ſera binome ſixieſme par la definition: donc la ligne pouuant EI, ou AD: eſt irrationelle, dite pouuant deux mediaux. Que ſi AB

eſtoit moindre que CD, on demonſtrera ſemblablement ce qui eſt proposé. Partant ſi deux ſuperficies mediales incommenſurables entr'elles, ſont composées, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit AB, γq. 50. & CD γq. 48. la ligne pouuant leur composé ſera γqq. 18. p. γqq. 18. bimediale ſeconde, ou ſoit AB γq. 12. et CD γq. 8. la ligne pouuant iceux ſera γq. (√q. 12. p. √q. 8.) ou √q. (√q. 3. p. √q. 1.) p. √q. (γq. 3. — √q. 1. pouuant deux medianx.

COROLLAIRE.

De toutes ces choſes on collige facilement que la ligne de 2 nõs ou binome, & les autres lignes irrationel. ſuyuans icelle, ſont differentes entr'elles, & de la ligne mediale.

Car le q. d'vne l. mediale, appliqué à vne ligne rationelle, [r] faict la latitude rationelle, incommenſ. en longit. à icelle rationelle, à laquelle il eſt appliqué. [r] 23. 10.

Mais le q. de la ligne de 2. noms, appliqué à vne ligne rationelle, [t] fait la latitude premiere de deux noms, ou binome premier. [t] 61. 10.

Et le quarré d'vne bimediale premiere, appliqué à vne ligne rationelle, [v] faict la latitude binome ſecond. [v] 62. 10.

Et le quarré d'vne bimediale ſeconde, appliqué à vne ligne rationelle: [x] fait la latitude binome troiſieſme. [x] 63. 10.

Mais le quarré d'vne ligne maieure, appliqué

y 64.10. à vne rationelle : [y] faict la latitude binome quatrieſme.

Et le q. d'vne ligne pouuant vn rationel & vn
z 65.10. medial, appliqué à vne ligne rationelle, [z] faict la latitude binome cinqnieſme.

Finalement le q. d'vne ligne pouuant deux me-
a 66.10. dianx, appliqué à vne ligne rationelle, [a] faict la latitude binome ſixieſme.

Or puis que toutes ces latitudes different de la latitude de la mediale, & entr'elles (ſçauoir de la latitude de la mediale, cette-cy eſtant rationelle, & celles-là irrationelles:) Mais entr'elles, d'autãt qu'elles ne ſont binomes de meſme ordre. Il eſt manifeſte que toutes les lignes irrationelles, dont il a eſté parlé iuſques icy, ſont differentes entr'elles.

ICY COMMENCENT les Sixains des lignes Irrationelles par le retranchement.

lxxiij lxviij

THEOREME 56. PROP. 74.

Si d'vne ligne rationelle on retranche vne ligne Rationelle, commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute, la reſtante eſt irrationelle : Soit appellee apotome, ou reſidu.

De la rationelle AB, ſoit retranchee AC, rationelle, commenſurable en puiſſance ſeule-

lement à la toute AB. Ie dis que le reſte BC eſt irrationelle.

Car, comme AB, à AC, ainſi le quarré de AB, au rect. ſous AB,AC: & AB,AC, eſtant incommenſurab. en longitude, le [b] quarré de AB ſera incommenſurable au rect. ſous AB,AC: Mais le compoſé des quarrez de AB, AC, eſt commenſ. au q. de AB, (car AB,AC eſtans poſees commenſ. en puiſſance, les qq. de AB, AC ſeront commenſurables [c]: Et partant leur compoſé commenſurable au q. de AB.) mais deux fois le rect. ſous AB, AC, eſt commenſurable au rectangle ſous AB, AC,. [c] Donc le compoſé des quarrez de AB,AC,& deux fois le rect. ſous AB,AC, ſont incommenſur. [f] Or le compoſé des qq. de AB, [a] c eſt egal à deux fois le rect. ſous AB, AC, & au q de BC: [g] donc le compoſé des quarrez de AB,AC, eſt incommenſurable au reſtant q. de BC: parquoy le compoſé des quarrez de AB,AC, eſtant rationel; (eſtant commenſurable au quarré de la rationelle AB,) le quarré de BC ſera irrationel: & partant BC irrationelle. Or ſoit icelle appellee Apotome, que les autres appellent reſidu: Donc ſi d'vne ligne rationelle, &c. Ce qu il falloit demonſtrer.

A C B

Lême 3. 19 10.

b 10.10.

d 16.10.

c Sc. 14. 10

f 7. 2.

g Cor. 17. 10.

SCHOLIE.

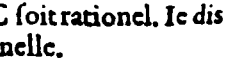
Soit AB 2. AC √q. 3. BC reſtante ſera 2. — racine quarree 3.

lxxiv lxix THEOREME 57. PROPO. 75.

Si d'vne ligne Mediale, on retranche vne ligne Mediale, commensurable en puissance, seulement à la toute, laquelle contienne vn rectangle rationel auec la toute, le reste est irrationel: Soit appellé residu Medial premier.

De AB mediale, soit retranchee AC, mediale commensurable en puissance seulement à AB, & que le rect. sous AB, AC soit rationel. Ie dis que la restante CB est irrationelle.

Car AB, AC estant commens. en puiss. les qq. de AB, AC, seront commensur. [h] Et partant le composé d'iceux sera commensurable au quarré de AC. Mais le q. de AC mediale, est irrationel & medial: [k] donc le composé des qq. de AB, AC, commens. à iceluy, est irrationel & medial, & le rect. sous AB, AC estãt posé rationel: deux fois le rectangle sous AB, AC, sera rationel: parquoy le composé des quarrez de AB, AC sera incommensurable à deux fois le rect. de AB, AC. [l] Donc puis que le composé des quarrez de AB, AC est egal à 2. fois le rect. sous AB, AC, & au q. de BC, 2. fois le rect. sous AB, AC, auec le q. de BC, sera aussi incommensurable à 2. fois le rectangle sous AB, AC. [m] Parquoy 2. fois le rect. sous AB, AC, & le quarré de BC sont iucommensurables: & deux



h 16. 10.

k Co. 24. 10

l 7. 2.

m 17. 10.

fois le rectangle sous AB, AC estant rationel; le quarré de BC sera irrationel: & partant BC irrationelle. Or soit appellee Apotome ou residu medial premier. Partant si d'vne ligne mediale on retranche vne ligne mediale commensurable en puissance, seulement à la toute, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit AB √qq.54. & AC retranchee √qq. 24. la restante CB sera √qq.54. —— √qq.24.

THEOREME 58. PROP. 76. lxxv. lxx

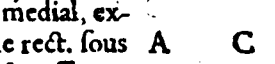
Si d'vne ligne Mediale on retranche vne ligne mediale, commensurable en puissance seulement, à la toute, laquelle contienne auec la toute, vn rectangle Medial, le reste est Irrationel; Soit appellé Apotome ou residu, Medial second.

De la mediale AB, soit retranchee la mediale AC: commensurable en puissance seulement, à AB, & soit le rectan. sous AB, AC medial. Ie dis que la restante BC est irrationelle

Car d'autant que les quarrez de AB, AC, A——C——B commensurables en puissance, sont commensurables, n leur composé sera commensurable à chacun d'iceux: mais chacun d'iceux quarrez est medial, (estans AB, AC posees mediales, (n 16. 10.

• Co.24.10 • donc leur composé eſt medial, eſtant commenſurable à chacun d'iceux.

Derechef, puis que le rectan. ſous AB, AC eſt
dCo.24.10 poſé medial, & le double d'iceluy, ſçauoir deux
q7. 2. fois le rectangle ſous AB, AC, ſera auſſi medial. q Donc puis que le compoſé des quarrez de *AB*, AC, eſt egal à deux fois le rectangle ſous *AB*, *AC*, & au quarré de BC : le compoſé des quarrez de AB, AC, qui eſt medial, excedera deux fois le rect. ſous AB, AC, (qui eſt auſſi me-
r27.10. dial) du quarré de BC: r mais vn medial n'excede vn medial d'vn rationel: donc le quarré de BC, ne ſera rationel : donc irrationel, & BC irrationelle : Soit appellee Apotome ſecond, de la ligne mediale. Partant ſi d'vne ligne &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

Soit AB yqq. 18. *AC yqq.* 8. *BC ſera yqq.* 18 ——*racine quarree* 8.

THEOREME 59. PROP. 77.

lxxvj
lxxj Si d'vne ligne droicte, on retranche vne ligne droicte, incommenſurable en puiſſance à la toute, faiſant auec la toute le compoſé de leurs quarrez rationel, & le rectangle contenu ſous icelles Medial. La reſtante eſt Irrationelle: Soit icelle appellee Mineure.

De la ligne droicte AB, soit retranchee AC incommensurable en puissance, à icelle AB : & soit le composé des qq. de AB, AC rationel, mais le rect. sous AB, AC, medial. Ie dis que la restante BC est irrationelle.

Car le composé des quarrez de AB, AC estant rationel; mais le rect. sous AB, AC, & partant le double d'iceluy, qui luy est commensurab. c'est à dire deux fois le rect. sous AB, AC medial: c'est à dire irrationel: le composé des quarrez de AB, AC sera incommensurable à deux fois le rectangle A C B sous AB, AC, mais le cõposé des qq. de AB, AC est egal à 2. fois le rect. sous AB, AC & au q. de BC. Donc le composé des qu. de AB, AC, sera incõmens. au restant quarré de BC. Mais le composé des qq. de AB AC est posé rationel. Donc le q. de BC incommensurable à iceluy est irrationel, & la ligne BC irrationelle : soit appellee mineure: Donc si d'vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[s] *Corol.* 24. 10.
[t] 10. 10. 7. 2.
[v] *Co.* 17. 10
[x] 10. d.

SCHOLIE.

Soit AB racine quarree (32. *p. racine quarree* 704.) *AC racine q.* (32. ——— *racine q.* 704.) *BC sera racine q.* (32. *p. racine q.* 704.) ——— *racine q.* (32. ——— *racine q.* 704.)

THEOREME 60. PROP. 78. lxxvij lxxij

Si d'vne ligne droicte est retranchee vne ligne droicte, incommensurable en

puiſſ. à la toute, faiſant auec la toute, le composé de leurs quarrez medial : mais le rectangle contenu ſous icelles Rationel, la reſtante eſt Irrationelle. Soit appellee, ligne faiſant auec vn eſpace Rationel, vn tout Medial.

Soit la ligne AB, de laquelle ſoit retranchee AC incommenſurable en puiſſance à AB, & ſoit le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle ſous icelles rationel. Ie dis que la reſtante BC eſt irrationelle.

Car le composé des quarrez de AB, AC eſtant medial, c'eſt à dire irrationel : & le rectangle ſous AB, AC, & partant le double d'iceluy, ſçauoir deux fois le rectangle ſous AB, AC rationel:

y 10. d. [y] le composé des quarrez de AB, AC ſera incom-

z 7. 2. menſurable à deux fois le rectangle ſous AB, AC: [z]

A C B

mais le composé des qq. de AB, AC eſt egal à deux fois le rectangle ſous AB, AC, & au quarré de BC. Donc deux fois le rect ſous AB, AC, auec le q. de BC, eſt incommenſ. à 2. fois le rect. ſous AB, AC.

a 17. 10. [a] Partant 2. fois le rect. ſous AB, AC, & le q. de BC ſont incommenſurables. Donc 2. fois le rect. ſous

10. d. AB, AC eſtant rationel, le q. de BC ſera irrationel : & la ligne BC irrationelle. Soit appellee ligne faiſant auec vn eſpace rationel vn tout medial. D'autant que le quarré d'icelle, adiouſté auec deux fois le rectangle ſous AB, AC, qui eſt rationel, fait vn tout medial: Donc ſi d'vne ligne droicte eſt retranchee vne ligne droicte incom-

mensurable en puissance, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{q}.(\sqrt{q}.13\frac{1}{2}.p.\sqrt{q}.4\frac{1}{2}.)$ *AC* $\sqrt{q}.(\sqrt{q}.13\frac{1}{2}.$ —— $\sqrt{q}.4\frac{1}{2}.)$ *BC sera* $\sqrt{q}.(\sqrt{q}.13\frac{1}{2}.p.\sqrt{q}.4\frac{1}{2})$ —— $\sqrt{q}.(\sqrt{q}.13\frac{1}{2}$ —— $\sqrt{q}.4\frac{1}{2}$.

THEOREME 61. PROP. 79. lxxviij lxxiij

Si d'vne ligne droicte on retranche vne ligne droicte, incommensurable en puissance à la toute; laquelle auec la toute, face le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle contenu sous icelles medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez, la restante est irrationelle: soit appellee faisant vn tout medial, auec vn rectangle medial.

De la droite l. AB, soit retranchee AC, incommensurable en puissance à AB; & soit tant le composé de leurs quarrez, que le rectangle sous icelles medial, & incommensurable au composé des quarrez d'icelles. Ie dis que la restante BC, est irrationelle.

Car d'autant que le composé des quarrez de AB, AC, est egal à deux fois le rectangle sous AB, [b] AC, & au quarré de BC; le composé des quarrez de AB, AC, posé medial, excedera deux fois le rectangle sous AB, AC,

A C B

[b] 7. 2.

• Co. 24. 10. qui eſt medial (eſtant commenſurable au medial contenu ſous AB, AC) du quarré de *BC*: mais vn medial n'excede vn medial d'vn rationel, 27. 10. parquoy le quarré de BC n'eſt rationel, donc irrationel, & BC irrationelle: Soit appellee faiſant vn tout medial auec vn medial: d'autant que le *q.* d'icelle, auec le rectangle ſous AB, AC, *qui eſt* medial, faict tout le composé des quarrez de AB, AC, qui eſt auſſi medial. Donc ſi d'vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

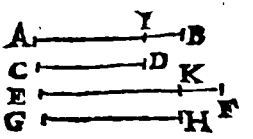
SCHOLIE.

Soit AB racine quarree (racine q. 13 ½. p. 3.) AC racine q. (racine q. 13 ½. ——— 3.) BC ſera racine q. (racine q. 13 ½. p. 3.) ——— racine qu. (racine q. 13 ½. ——— 3.)

LEMME.

S'il y a meſme excez entre vne premiere grandeur & vne ſeconde; qu'entre vne troiſieſme & vne quatrieſme; auſſi en permutant il y aura vn meſme excez entre la premiere grandeur & la troiſieſme, qu'entre la ſeconde & la quatrieſme.

Soient 4. grandeurs AB, CD, EF, GH, & ſoit IB, l'excez d'entre AB, & CD, egal à KF, excez d'entre EF, GH. Ie dis qu'il y a vn meſme excez



entre AB, & EF, qu'entre CD, & GH. Car d'autant que IB, eſt l'excez d'entre AB, & CD: Aſſera egale à CD. Semblablement, EK ſera egale à GH. Donc il y aura meſme excez entre AJ, & EK, qu'entre CD, & GH, puis que ces grandeurs cy ſont egales à celles-là, chacune à la ſienne. [d] *Mais l'excez des toutes AB, EF, eſt le meſme excez d'entre AJ, EK: puis que JB, KF, ſont poſees egales; donc il y aura pareillement meſme excez entre AB, & EF, qu'entre CD, & GH. Ce qui eſt propoſé.* d 16. c. ſ. 1.

COROLLAIRE.

Il appert de ces choſes, que quatre grandeurs ayans meſme proportion Arithmetique, qu'en permutant elles auront auſſi meſme proportion Arithmetique. D'autant que telle proportion conſiſte au meſme excez qu'auons monſtré eſtre meſme entre la 2. & 3. grandeurs, qu'entre la 2. & 4. s'il y a meſme excez entre la 1. & la 2. qu'entre la 3. & la 4. ſçauoir ſi 4. grandeurs ont meſme proportion Arithmetique.

THEOREME 62. PROPOSIT. 80. lxxix lxxiv

Au reſidu ou apotome conuient tant ſeulement, vne ſeule ligne droicte rationelle, commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute.

Soit AB reſidu, à laquelle conuienne BC rationelle commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute AC. Ie dis qu'aucune autre rationelle ne

peut conuenir à AB, commensurable en puissance, seulement à la toute.

Car, s'il est possible, conuienne à icelle vne autre rationelle BD, commensurable en puissance seulement à AD. Et BC estant rationelle, AC commensurable en puissance seulement à *icelle*, sera rationelle. Donc AC, BC sont rationelles commensurables en puissance seulement. Semblablement, AD, BD seront rationelles commensurables en puissance seulement.

Mais y ayant mesme excez entre le composé des quarrez de AC, BC,



& 2. fois le rect. sous AC, BC, qu'entre le composé des quarrez de AD, BD, & 2. fois le rect. sous AD, CB; (car l'excez entre le *composé* des quarrez de AC, BC, & deux fois le rectangle sous AC, BC, est le quarré de AB: [c] le *composé* des quarrez de AC, BC estant egal à 2. fois le rectangle sous AC, BC, & au q. de AB.)

c 7. 2.

Semblablement, le q. de AB, est l'excez entre le composé des qq. de AD, BD, & 2. fois le rect. de AD, BD, (le composé des quarrez de AD, BD estant egal à 2. fois le rect. de AD, BD, & au q. de AB,) [f] aussi en chãgeant il y aura mesme excez entre *le* cõposé des quarrez de AC, BC, & le *composé* des qq. de AD, BD, qu'entre 2. fois le rect. de AC, BC, & [g] 2. fois le rect. de AD, BD. Mais l'excez entre iceux composez est rationel, [g] iceux composez estans rationaux: (car AC, CB estans rationelles commens. en puiss. seulement, leurs qq. seront rationaux & commens. Donc leur composé sera commens.

7. 2.

f Sc. prec.

g Sc. 27. 10.

16. 10.

9. def.

mensl à chacun d'iceux, & partant rationel. Semblablement, le composé des qq. de AD, BD, sera monstré rationel.) Donc l'excez entre 2. fois le rectangle sous AC, BC, & 2. fois le rectangle sous AD, BD, est vn espace rationel: Et puis que [h] le rectangle sous AC, BC, rationelles commensur. en puissance seulement est medial: [i] le double d'iceluy, sçauoir 2. fois le rect. sous AC, BC, sera medial: par mesme raison le rectang. sous AD, BD est medial, [k] & vn medial n'excede vn medial d'vn rationel. Donc l'excez entre 2. fois le rect. sous AC, BC, & 2. fois le rectangle sous AD, BD, n'est espace rationel: Mais il est monstré rationel. Ce qui est absurde. Donc aucune autre rationelle ne conuient à AB, commensur. en puissance seulement à la toute, outre BC. Partant au residu medial premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

h 22. 10.
i Co. 24. 10
k 27. 10.

THEOREME 63. PROP. 81. lxxx lxxv

Au residu Medial premier, ne conuient qu'vne seule ligne Mediale, commensurable en puissance seulement à la toute, contenant auec la toute vn rectangle rationel.

Soit AB, residu medial premier, & à icelle conuienne BC, mediale, commensurable en puissance seulement à la toute AC, & le rectangle sous AC, BC soit rationel. Ie dis qu'aucune autre mediale ne conuient à AB, qui soit commensur. en puiss. seulement à la toute, & qui contienne auec la toute vn rect. rationel.

Car, s'il eſt poſſible, conuienne vn autre BD mediale, commenſ. en puiſſ. ſeulement à la toute, & ſoit le rect. ſous AD, BD, rationel. Et BC eſtant mediale commenſ. en puiſſ. ſeulement à AC, AC ſera mediale; donc AC, BC ſont mediales commen. en puiſſance ſeulement.

[24. 10.

Et puis qu'il y a meſme excez entre le compoſé des quarrez de AC, BC, & le compoſé des quarrez de AD, BD, qu'entre deux fois le rectan. ſous AC, BC, & deux fois le rectangle ſous AD, BD, comme il eſt monſtré en la precedente: Mais l'excez entre iceux rectangles [m] eſt rationel; l'vn & l'autre eſtant rationel: (car le rectan. ſous AC, BC eſtant poſé rationel, deux fois le rectang. ſous AC, BC, commenſ. à iceluy, eſt rationel, & par meſme raiſon deux fois le rectangle ſous AD, BD eſt rationel.) Donc l'excez entre le compoſé des qq. de AC, BC, & celuy des qq. de AD, BD eſt ratio. Et AC, BC eſtans mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement, leurs quarrez ſeront mediaux & commenſurables. [n] Donc leur compoſé eſt commenſ. à chacun d'iceux, [o] & partant medial. Par meſme raiſon le compoſé des quarrez de AD, BD, ſera medial. Mais vn medial n'excedant vn medial d'vn rationel, l'excez d'entre le compoſé des qq. de AC, BC, & celuy des qq. de AD, BD, n'eſt rationel: Mais il eſt monſtré rationel. Ce qui eſt abſurde. Donc vne autre mediale ne conuient à AB, outre BC, qui ſoit commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute, & contienne vn rectangle rationel auec la toute. Donc au re-

m Sc. 27. 10.

n 16. 10

o Co. 24. 10

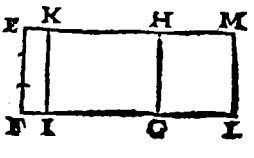
fidu medial premier, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 64. PROP. 81. lxxxj lxxvj

Au reſidu medial ſecond, ne peut conuenir qu'vne ſeule ligne droicte mediale, commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute, & contenant vn rectangle medial auec la toute.

Soit AB, reſidu medial ſecond, à laquelle conuiéne BC, mediale commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute AC. Et ſoit le rectangle ſous AB, AC medial. Ie dis qu'aucune autre mediale ne conuient à AB, commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute, & contenant auec icelle toute vn rectangle medial.

Car, s'il eſt poſſible, conuienne BD, mediale commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute AD, & ſoit le rect. ſous AD, BD medial, & ſoit expoſée EF rationelle, [p] à laquelle ſoit appliqué EG, rect. egal au compoſé des qq. de AC, BC Et à EF ſoit auſſi appliqué EI rect. egal au q. de AB, puis EL, rect. egal compoſé des quarrez de AD, BD. [q] D'autant donc que le compoſé des quarrez de AC, BC, eſt egal à deux fois le rect. ſous AC, BC. & au qu. de AB; KG ſera egal à deux fois le rect. ſous AC, BC. Ainſi KL ſera egal à deux fois le rect ſous AD, BD.

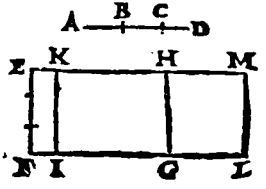


p 45. I.

q 7. 2.

Et AC, BC estans mediales commens. en puissance
[r] 16. 10. seulement. (Car BC estant posee mediale, [s] AC
Corol. commens. en puiss. à icelle, sera aussi mediale,)
[s] 24. 10. leurs qq. seront mediaux & commens. [t] Donc leur
composé est commens. à chacun d'iceux: [u] & par-
tant medial: Donc EG, egal à iceluy composé, est
aussi medial, & EG estant appliqué à EF ratio-
[u] 23. 10. nelle, [x] EH sera rationelle incommens. en longi-
tude à EF.

[v] Co. 24. 10 23. 10. Derechef, le rect. sous AC, BC estant medial, [v] le double d'iceluy, sçauoir KG, sera medial. Et estant appliqué à KI rationelle, KH, sera ratio-
Lem. 3. 19. nelle incommés. en longit. à KI, c'est à dire à EF:
10. & puis que AC, BC, sont incommens. en longit. &
10. 10. comme AC, à BC, ainsi le q. de AC, au rect. sous
AC, BC: [x] le q. de AC sera incommens. au rect. sous
AC, BC: Mais le composé des qq. de AC, BC, c'est
à dire le rectangle EG, est commens. au q. de AC,
(car AC, BC estans posees commensurables en
puiss. leurs qq.
[x] 6. 10. seront commés.
Donc leur com-
posé commens.
à chacun d'i-
ceux, sçauoir au
q. de AC.) Et le
double du rect.
sous AC, BC, sça-



[x] 30. 14. 10. uoir KG, est commensurable à iceluy rectan. sous
[x] 1. 6. AC, BC. Donc EG est incommens. à KG, donc
[x] 10. 10. EH, KH, ayant mesme raison que EG, KG, sont
incommensurables en longitude. Et estans mon-
strees rationelles, elles seront rationelles com-
mens. en puissance seulement. Parquoy de EH

rationelle, eſtant retranchee la rationelle, KH commenſ. en puiſſ. ſeulement à EH, [a] EK ſera reſidu, & KH conuenable à icelle. Ainſi on monſtrera que Ek, eſt reſidu à k M, conuenable à icelle. Donc au reſidu ne conuient vne ſeule ligne rationelle, commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute. Ce qui eſt abſurde, comme il eſt demonſtré. Donc au reſidu medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [a] 74. 10. 80. 10.

THEOREME 65. PROP. 83. lxxxij lxxviij

A la ligne mineure conuient vne ſeule ligne droicte incommenſurable en puiſſance à la toute; & faiſant auec la toute le compoſé de leurs quarrez rationel, & le rectangle ſous icelles medial.

Soit AB mineure, & BC conuenable à icelle, incommenſurable en puiſſance à la toute AC, faiſant le compoſé des quarrez de AC, BC rationel; Mais le rectangle ſous AC, BC medial. Ie dis qu'aucune autre ligne ne conuient à AB, faiſant le meſme.

Car autrement, qu'vne autre BD conuienne à AB, incommenſurable en puiſſance à la toute AD, faiſant le compoſé des qq. de AD, BD rationel, & le rectangle ſous AD, BD medial.



D'autant donc que comme il eſt demonſtré en la 80. Propoſition, l'excez du compoſé des qq. de

AC, BC, & du cõposé des qq. de AD. BD est le mesme que celuy d'entre deux fois le rectangle sous AC, BC, & de deux fois le rectangle sous AD, BD:

b 56.27.10 Mais l'excez d'entre iceux composez b est rationel, l'vn & l'autre estant posé rationel. Donc l'excez entre deux fois le rectangle sous AC. BC, & deux fois le rectangle sous AD, BD, est espace rationel: mais il est aussi non rationel, (car le rectangle sous AC, BC, estant posé medial, deux fois

c Co.24.10 le rectangle sous AC, BC double d'iceluy, c est aussi

d 27. 10. medial: Semblablement, deux fois le rectangle sous AD, DB, sera medial, d donc l'vn n'excedera l'autre d'vn rationel. Ce qui est absurde. Donc vne autre ligne ne conuient à AB, outre BC, incommensurable en puissaone à la toute, &c. Donc à ligne mineure, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

lxxxiij
lxxviij

THEOREME 66. PROP. 84.

A la ligne faisant auec vn espace rationel vn tout medial, conuient vne seule ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, & faisant auec la toute le composé de leurs quarrez medial: mais le rectangle contenu sous icel. les rationel.

Soit AB, faisant vn tout medial, auec vn espace rationel, à laquelle conuienne BC, incommensurable en puissance à la toute AC, & faisant le composé des quarrez de AC, BC, medial, & le rectangle sous AC, BC, rationel, Ie dis que à

AB n'en conuient vne autre, faisant les mesmes choses.

Car, s'il est possible, en conuienne vne autre BD, incommensurable en puissance à la toute AD, & faisant le composé des qq. de AD, BD, medial & le rectangle sous AD, BD rationel. D'autant que comme il est monstré en la 80. Proposition, il y a mesme excez entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, qu'entre deux fois le rectangle sous AC, BC, & deux fois le rectangle sous AD, BD. Mais l'excez entre iceux rectangles est espace rationel, comme il est monstré en la 81. Propo. Donc l'excez d'entre iceux composez des quarrez est aussi espace rationel: mais il n'est pas aussi rationel, l'vn & l'autre estant medial; e vne medial n'excedant vn medial d'vn rationel. Ce qui est absurde. Donc vne autre ligne que BC, ne conuient à AB, incommensurable en puissance à la toute. Donc à la ligne faisant, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. Voyez la figure prec. e 27. 10.

THEOREME 67. PROPO. 85. lxxxiv lxxix

A vne ligne faisant auec vn espace medial, vn tout medial conuient vne seule ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, & faisant auec la toute le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle contenu sous icelles medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez.

Soit AB, faisant auec vn espace medial, vn tout medial, à laquelle conuienne BC, incommensurable en puissance à la toute AC, & faisant le composé des quarrez de AC, BC medial, & le rect. sous icelles medial & incommensurable au composé d'iceux quarrez de AC, BC. Ie dis qu'aucune autre ligne ne peut conuenir à AB, faisant les mesmes choses.

Car, s'il est possible, que BD luy conuienne incommensur. en puiss. à la toute AD, faisant ce que dit est. Et soit faict cõme en la 81. D'autant que le
[f] 23. 10. composé des quarrez de AC, BC est medial, EG son egal, est aussi medial. [f] Donc EH est rationelle incommens. en longitude à EF.

Derechef, d'autant que le rect. sous AC, BC est
[g] 23. 10. medial, le double d'iceluy KG est aussi medial, [g] donc KH est rationelle incommens. en longitude à EF. Et d'autant que KG est commensurable au rectangle sous AC, BC, estant double d'iceluy
[h] 14. 10. rect. Mais le rect. sous AC, BC, est posé incõmensurable au composé des quarrez de AC, BC: [h] KG sera aussi incõmensur. à iceluy composé, c'est à dire à EG: & partant EH, KH estant en mesme rai-
[i] 10. 10. son que EG, KG, [i] sont incommens. en long. Mais elles sont monstrees rationelles: partant sont rationelles commensurables en puissance seulement.

Ostant donc de la ratio. EH, la rat. k_H, com. en
[k] 74. 10. puissance seulement à EH: [k] Ek sera residu, & à icelle conuenant kH: Semblablement, nous monstrerons que Ek est residu, à laquelle conuient k_M. Donc vne seule ligne ne conuient à vn residu,
[l] 80. 10. &c. Ce qui est absurde. [l] Estant mostré le contraire, &c. Donc à vne ligne faisant, &c. Ce

qu'il falloit demonstrer. Voyez la figure de la page 879.

DEFINITIONS TROISIESMES.

Vne ligne rationelle estant propoposee & un residu, quand la toute composee du residu & de la conuenable ou adiouſtee, peut plus que la conuenable du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude.

1. Si la toute est commensurable en longitude à la rationelle proposee, le residu soit appellé, residu premier.

2. Mais si la conuenable ou adiouſtee, est commensurable en longitude à la rationelle proposee, soit appellé residu second.

3. Et si ny la toute, ny la conuenable n'est commensurable en longitude à la rationelle proposee, soit appellé residu troisiesme.

Derechef, si la toute peut plus que la conuenable du quarré d'vne ligne droite incommensurable en longitude à icelle.

4. Si la toute est commensurable en

longitude, à la rationelle propoſee; ſoit appellee reſidu quatrieſme.

5. Mais ſi la conuenable eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſee, ſoit appellee reſidu cinquieſme.

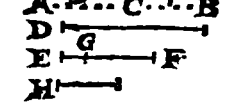
6. Et ſi ny la toute, ny la conuenable, n'eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſee, ſoit appellee reſidu ſixieſme.

lxxxv lxxx PROBLEME 19. PROP. 86.

Trouuer vn apotome, ou reſidu premier.

m Sch. 2. 29. 10. Ayant[m] trouué deux nombres quarrez AB, CB, dont l'excez AC, ne ſoit quarré. Soit propoſee D rationelle, & ſoit EF commenſurable en longitude à icelle: EF ſera auſſi rationelle, & [n] comme le nombre AB, à AC, ſoit faict le quarré de EF, au quarré de GF. Ie dis que EG, eſt reſidu premier.

n Cor. 6. 10.



6. 10. Car d'autant que les qq.de EF, GF eſtans entr'eux comme les nomb. AB, AC, ſont commenſ. EF, GF ſeront commenſur. au moins en puiſſance. Donc puis que EF eſt monſtree rationelle, GF le ſera auſſi.

Et puis que AB, AC ne ſont entr'eux comme

nombres quarrez, les quarrez de EF, GF, ne seront l'vn à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré. ° Partant EF, GF, sont incommensurables en longitude: elles sont donc rationelles commensurables en puiſſ. ſeulement: ᵖ partant le reſte EG eſt reſidu. Ie dis qu'elle eſt reſidu premier. Car que EF plus grande, puiſſe plus que GF, du q. de H. Et d'autant que comme le nombre AB, eſt au nombre AC, ainſi le q. de EF, au q. de GF, par conuerſion de raiſon, comme AB, à CB, ainſi le q. de EF, au q. de H. Mais AB, CB, ſont nombres qq. donc le q. de EF, ſera au q. de H, comme nombre q. au nombre q. donc EF & H, ſont commenſ. en longitude. ° 9. 10. ᵖ 74. 10. 9. 10.

D'autant donc que la toute EF, peut plus que GF, conuenable du q. de H, commenſu. en longitude à icelle, & la toute EF, eſt commenſ. en longit. à la rationelle expoſee D, par la definition, EG ſera reſidu premier. Donc nous auons trouué vn reſidu premier. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit D rationelle propoſee 9. & EF, 6. le nombre AB, 9. & CB, 4. & comme AB, 9. nombre quarré eſt à AC, 5. ainſi 36. q. de EF, ſoit à vn autre, ſçauoir au q. de FG, qui ſera trouué de 20. Donc FG, ſera √q. 20. Donc EG, ſera 6. —— √q. 20. apotome ou reſidu premier.

Et faut entendre que apotome ou reſidu, eſt le reſte de deux lignes, ou de deux nõbres rationaux, le moindre eſtant ſouſtraict du plus grand, & ſe trouue tout ainſi que le binome poſant le ſigne —— en lieu du ſigne. p. Comme apres auoir trouué ce

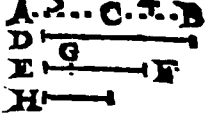
binome 6.p.yy. 20. changeant p. en —— le resi-du sera 6. —— r q.20.

PROBLEME 20. PROP. 87.

Trouuer vn residu second.

Ayant trouué deux nombres AB, CB, comme en la precedente, & proposé la rationelle D, soit prise GF, commensurable en longitude à icelle,
q Cor. 6. 10. GF sera aussi rationelle. Et q comme le nombre AC, au nombre AB, ainsi le quarré de GF, soit faict au quarré de EF. Ie dis que EG est apotome second.

6. 10. Car les quarrez de GF, EF, estans entr'eux, comme les nombres AC. AB, sont commensurables, & GF, EF, commensurables, au moins en puissance. Et puisque GF est monstree rationelle, EF sera aussi rationelle.



Mais d'autant que les nombres AC, AB, & par mesme moyen les qq. de GF, EF, ne sont entr'eux comme nombre q. à nombre q.

r 9. 10. r GF, EF, seront incommens. en longit. Donc GF, EF, sont rationelles commens. en puiss. seule-
f 74. 10. ment, f & partant EG, restante, est residu. Ie dis aussi qu'elle est residu second. Car que EF puisse plus que GF, du q. de H.

D'autant donc que comme AC à AB, ainsi le q. de GF, au q. de EF, & en raison conuerse, comme AB, à AC, ainsi le q. de EF, au q. de GF: main-

tenant nous monſtrerons, comme en la precedente, que la ligne H eſt commenſurable en longitude à EF: parquoy la toute EF, pouuant plus que la conuenable GF, du q. de H, commenſurab. en longit à icelle, & qu'icelle conuenable, GF eſt commenſurable en longitude à la rationelle expoſee D, par la definition EG, ſera apotome ou reſidu ſecond. Donc nous auons trouué vn apotome ſecond. Ce qu'il falloit demonſtrer.

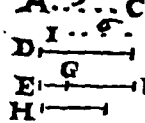
SCHOLIE.

Soit FG, 5. & comme AC, 5. au nombre quar. à B, 9. ainſi 25. q. du nõbre pris, ſoit à vn autre, ſçauoir à 45. q. de EF; donc EF ſera √q. 45. Partant EG ſera √q. 45. —— 5. reſidu ſecond.

PROBLEME 21. PROP. 88. 87. 22.

Trouuer vn apotome ou reſidu troiſieſme.

Ayant trouué deux nombres AB, CB, comme en la 86. Propoſition, ſoit pris vn autre nombre 1. comme eſt enſeigné en la 51. qui ne ſoit à l'vn ny l'autre comme nombre q. à nombre q. Et ayant propoſé D ration. ſoit fait comme I, à AB: ainſi le q.



de D, au q. de EF, & iceux quarrez de D & EF, ſeront entr'eux comme les nombres I, & AB: 6. 10. t Cor. 6. 10

& partant commenſurables : Et partant D & EF, commenſ. au moins en puiſſance : & D eſtant rationelle, EF ſera auſſi rationelle. Et d'autant que les nombres I & AB, & partant les qq. de D & EF, ne ſont entr'eux comme nombre q. à nombre q.

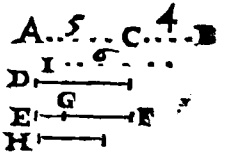
x 9. 10. y Cor. 9. 10. x D & EF, ſeront incommenſurables en longitude. y

Derechef, comme AB eſt à AC, ainſi le q. de EF, ſoit au quar. de GF. Ie dis que EG eſt reſidu troiſieſme.

z 6. 10. ¦Car z puis que les qq. de EF, GF, eſtans entr'eux comme les nombres AB AC, ſont commenſurables, EF, GF, ſeront commenſ. au moins en puiſſance; & EF eſtant monſtree rationelle, GF ſera auſſi rationelle. Et d'autant que AB, AC, & par ainſi les quarrez de EF, GF, ne ſont

9. 10. entr'eux comme nombres quarrez, EF, GF ſeront incommenſurables en longitude. Donc EF, GF, ſont rationelles commenſur. en puiſſance ſeulement: & partant GF eſtant retranchee de EF,

74. 10. commenſ. à icelle en puiſſ. ſeulement, EG ſera reſidu. Ie dis qu'elle eſt reſidu troiſieſme.



Car, d'autant que comme I à AB, ainſi le q. de D, au q. de EF, & comme AB, à AC, ainſi le q. de EF, au q. de GF, en raiſon egale, comme I à AC, ainſi le q. de D, au q. de GF. Or I & AC, ne ſont entr'eux comme nombres qq. Donc les qq de D & GF, ne

9. 10. ſeront entr'eux comme nombre q. à nombre q. Donc D & GF, ſont incommenſurables en longitude. Donc l'vne ny l'autre EF, GF, n'eſt com-

mensurable en longitude à la rationelle proposee D.

Maintenant que EF, puisse que GF, du q. de H: nous monstrerons comme en la 86. Prop. que H est commensurable en longitude à EF. Parquoy, puisque EF toute, peut plus que la conuenable GF du q. de H, commensur. en longit. à icelle, & que l'vne ny l'autre EF, GF, n'est commensur. en longit. à la rationelle proposee D, par la definition EG, sera residu troisiesme. Donc nous auons trouué vn residu troisiesme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit D rationelle proposee 12. & comme 16. est au nombre q. AB 9. ainsi 144. q. de D, soit à vn autre, sçauoir au q. de EF 216. Donc EF sera √q. 216. Derechef, comme AB 9. est à AC 5. ainsi 216. soit à vn autre sçauoir au q. de FG, qui sera trouué de 120. Donc FG sera √q. 120. partant EG sera √q. 216. ——— √q. 120. residu troisiesme.

PROBLEME 22. PROPO. 89. 88. 83.

Trouuer vn residu quatriesme.

Ayant trouué deux nombres AC, CB, tels que leur composé ne soit à l'vn ny à l'autre, comme nombre q. à nombre q, soit exposee D rationelle, à laquelle soit EF, commensurable en longitude; EF sera aussi rationelle. Et ayant faict au reste comme en la 86. Prop. nous monstrerons comme là, que EG est residu. Ie dis aussi qu'elle est residu *Se. 3. 29. 10*

quatrieſme. Car que EF puiſſe plus que GF, du qu. de H. Et d'autant que comme AB, à AC, ainſi le q. de EF, au q. de GF, en raiſon conuerſe, comme AB, ſera à CB, ainſi le q.



9.1 6. de EF, au q. de H. Donc puis que AB, CB, ne ſont entr'eux comme comme nombres quarrez, EF & H ſeront incommenſurables en longitude. D'autant donc que la toute EF, peut plus que la conuenable GF, du q. de H, incommenſurable en longitude à icelle, & la meſme toute EF, eſt commenſurable en longitude à la rationelle D. EG par la definition, ſera reſidu quatrieſme. Nous auons donc trouué le reſidu quatrieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit D rationelle 8. & EF 6. & comme AB nombre q. 9. eſt à AC 6. nombre non quarré: ainſi 36. q. de EF ſoit à vn autre, ſçauoir au q. de FG, qui ſera trouué de 24. partant FG ſera √ q. 24. Donc EG ſera 6. ——— √ q. 24. apotome ou reſidu quatrieſme.

89.

84. ## PROBLEME 23. PROP. 90.

Trouuer vn reſidu cinquieſme.

Ayant trouué deux nombres AC, CB, comme en la precedente, ſoit conſtruit comme en la 87. Propoſition, c'eſt à dire, ſoit priſe GF, commenſurable

ſurable en longitude à la rationelle D, &c. Donc comme en la 87. nous monſtrerons que EG eſt reſidu. Ie dis auſſi qu'il eſt cinquieſme. Car que EF, puiſſe plus que GF, du q. de H. Et d'autant que nous monſtrerons tout ainſi qu'en la 86. que par conuerſion de raiſon, comme AB, à CB, ainſi le quarré de EF, au quarré de H. Derechef, comme en la precedente, EF & H ſeront incommenſurables en longitude, & la conuenable GF, eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſee D: par la definition, EG ſera reſidu cinquieſme. Donc nous auons trouué vn reſidu cinquieſme. Ce qu'il falloit faire.

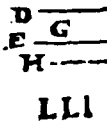
SCHOLIE.

Soit D rationelle propoſee, & ſoit FG 2. & comme AC 6. à AB 9. ainſi 4. q. de FG 2. ſoit à vn autre, ſçauoir au q. de EF. Donc EF ſera √q. 6. Donc EG ſera √q. 6. ——— 2. reſidu cinquieſme.

PROBLEME 14. PROP. 91. xc. lxxxv

Trouuer vn reſidu ſixieſme.

Ayant trouué 3. nombres AC, CB, & I, comme en la 54. en ſorte que AB, ne ſoit à AC, ny à CB, & I, ne ſoit à AB, ny à AC, comme nombre qu. à nombre q. Soit expoſée la rationelle D. Et au reſte, ſoit faict comme en la 88. Propo. Nous monſtrerons



donc, comme en icelle 88. que D, & EF, ſont incommenſurables en longit. Et que EG, eſt reſidu ſixieſme.

Car, comme en la 88. D & GF, ſeront auſſi incommenſurables en longitude: & partant l'vne ny l'autre EF, GF, n'eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſee D. Maintenant que EF, puiſſe plus que GF, du quarré de H, laquelle nous monſtrerons incommenſurable en longitude à EF, comme en la 89. Donc puis que la toute EF, peut plus que la conuenable GF, du q. de H, incommenſur. en longit. à icelle, & EF, ny GF, n'eſt commenſ. en longit. à la rationelle expoſee D, par la definition EG ſera reſidu ſixieſme. Donc nous auons trouué vn reſidu ſixieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit D rationelle 9. & comme 3 9. à A B 12. ainſi 144. V q. de 12. à vn autre, ſçauoir au q. de EF, qui ſera 192. Donc EF ſera V q. 192. Puis comme 12. à 7. ainſi le q. de EF 192. à vn autre, ſçauoir au quarré de FG, qui ſera 112. Donc FG ſera V q. 112. Et partant EG V q. 192. ——— V q. 112. reſidu ſixieſme.

Mais l'on trouuera auſſi les ſuſdits reſidus comme Theon, en cette maniere.

Comme pour exemple, pour trouuer le reſidu premier, [a] *ſoit trouué A B binome premier: dõt le plus grand nom eſt AC, & le moindre CB: & de AC ayãt oſté CD, egale à CB. Je dis que AD*

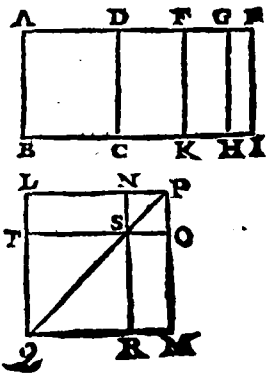
a 49. 10.



eſt reſidu premier. Car puis que AC, BC ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement AC, DC, ſeront auſſi rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. [b] *Donc AD eſt reſidu: & AC pouuant plus que CB, c'eſt à dire que DC du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, & AC eſt commenſurable en longitude à la rationelle expoſee par la definition du binome premier: par la definition du reſidu premier, AD ſera reſidu premier; & ſemblablement on trouuera les reſidus des autres binomes, oſtant les moindres nombres des plus grands.* b 74. 10.

THEOREME 68. PROPO. 92. lxxxv

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vn reſidu premier; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace, eſt reſidu.



Soit l'eſpace AC, contenu ſous la rationelle AB, & le reſidu premier AD. Ie dis que la ligne qui peut l'eſpace AC, eſt reſidu.

Car ſoit DE, conuenable à AD: donc AE, DE, par la definition du reſidu premier, ſeront rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement: & la toute AE, com-

menſ. en longitude à la rationelle AB, & la toute AE, pourra plus que la conuenable DE, du quarré d'vne ligne commenſurable en longitude à icelle.

Soit coupee DE, en deux egalement à F, & ſoit appliqué à AE, vn rect. egal au q. de EF, [c] c'eſt à dire, egal au quart du q. de DE, & defaillant d'vne figure quarree, ſçauoir ſous AG GE. Et d'autant que AE peut plus que DE, du q. d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. AG, GE [d] ſeront commenſ. en lõgit. parquoy [e] l'vne & l'autre ſera commenſ. en longit à la toute AE. Mais la toute AE, eſt commenſ. en longit. à la ratio. AB. Donc [f] tant AG que GE, eſt commenſ. en long. à AB, [g] & partant ratio. Donc ayant mené GH, EI, paralleles à AB, rencontrant BC prolongee à H & I, [h] l'vn & l'autre rectangle AH, GI, contenu ſous deux rationelles commenſurables en longitude, ſera rationel.

c Lem. 2. 37. 10.
d 18. 10.
e 16. 10.
f 2. 10.
g 6. d.
h 20. 10.

Derechef, d'autant que l'vne & l'autre DF, FE, eſt commenſ. en longit. à DE: & DE incommenſ. en longit. à la rationelle AB: (car ſi elle eſtoit cõmenſ. en longit. AE eſtant auſſi commenſ. en long. à AB, [i] AE, DE ſeroient auſſi commenſ. en longit. ce qui eſt abſurde, car elles ſont poſees commenſ. en puiſſ. ſeulement,) [k] l'vne & l'autre d'icelles D E, FE ſera auſſi incommenſ. en longit. à la rationelle A B.

i 12. 10.
k 14. 10.

Et d'autant que l'vne & l'autre DF, FE, eſt commenſ. à la rationelle DE, elles ſont rationelles: partant, tant AB, DF, que AB, FE, ſeront rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement: Donc ayant mené FK, parallele à AB, [l] l'vn & l'autre rectangle Dk, FI, contenu ſous les rationelles com-

l 22. 10.

mensurables en puissance seulement, est medial.

Maintenant soit [m] faict le q. LM, egal à AH: & NO egal à GI, ayant vn angle commun auec LM, sçauoir LPM, [n] donc les qq. LM, NO, seront à l'entour d'vn mesme diametre, lequel soit PQ; & soit parfaicte la figure comme l'on voit. m 14. 10. n 26. 6.

D'autant donc que le rectangle sous AG, GE, est egal au q. de FE, par la construction, les trois lignes AG, FE, GE, seront proportionelles: & partant AH, FI, GI ayans mesme raison: FI sera moyen proport. entre AH, GI, c'est à dire entre les quarrez LM, NO, egaux à iceux rectangles. 17. 6. 1. 6.

[o] Mais LO, est aussi moyen proportionel, entre les mesmes LM. NO. Donc les rectangles FI LO sont egaux: [p] Mais DK est egal à FI, & MN à LO. Donc le tout DI, est egal à tout le Gnomon RO, ON, NP, auec le q. NO. Mais le tout AI, est egal aux qq. LM. NO, par la construction, donc le reste AC, sera egal au reste q. TR. Donc TS peut l'espace AC. Ie dis que TS est residu. o Lemme 14. 10. p 36. 10.

Car d'autant que les espaces, AH, GI, sont monstrez rationaux, & à iceux sont egaux LM, NO, iceux quarrez LM, NO seront rationaux, & partant TO, SO rationelles.

Derechef, puis que FI est monstré medial, LO, egal à iceluy, sera aussi medial. Donc LO, NO, sont incommenſ. l'vn estant ratio. & l'autre irratio. [q] donc les lignes TO, SO, ayans mesme raison que LO, NO, sont incommenſ. en long. partant le reste TS est residu. Donc si vn espace, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. Voyez la figure cy-dessus. q 1. 6. r 10. 10. 74. 10.

SCHOLIE.

Soit AB 6. AC 7. —— Vq.13. DE sera Vq. 13. & DF, ou à FG Vq.3¼. & si à AE on applique vn rectangle sous AG, & GB egal au quarré de FE, comme il a esté monstré, defaillant d'vne figure q. AG sera 6¼. GE ¼. Donc AH est 39. et GJ 3. & le tout AJ 42. Mais DI est Vq.468. & DK, ou BI Vq. 117. —— 3. & GI 3. Donc AC est 42. —— Vq. 468. residu premier, pour trouuer son costé soit diuisé 42. en 2. telles parties que leur produit soit egal au quart du q. de 468. c'est à dire à 117. la plus grande partie sera 39. la moindre 3. & partant Vq.39. —— Vq. 3. sera le costé de l'espace residu 42. —— Vq.468.

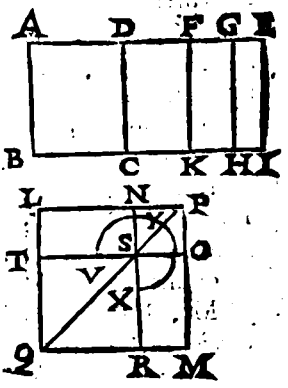
92. 87. THEOREME 69. PROP. 93.

Si vn espace est contenu sous vne ligne Rationelle, & vn residu second : La ligne droicte pouuant iceluy espace est residu Medial premier.

Soit le rectangle ou espace AC, contenu sous AB rationelle, & AD residu second. Ie dis que la ligne pouuant AC, est residu medial premier.

Car soit DE, conuenable à AD ; Donc AE, DE, par la definition du residu second seront rationelles commensurables en puissance seulemẽt, & la conuenable DE, commensurable en longit. à la rationelle AB. Et finalement AE, pourra plus

que DE, du q. d'vne ligne commensurable en longitude à icelle. Soit coupee DE en deux egalement à F, & au reste, soit fait comme en la precedente: comme en la 92. Propo.[f] AG, GE seront commensur. en longitude. [t] Et partant chacune sera commensurable à la toute AE; mais AE est incōmens. en long. à AB rationelle: (car si elle estoit commens. en longit. à AB, DE estant posee commens en longit à la mesme AB:[v] AE, DE seroient commens. en longit. entr'elles: ce qui est absurde, estans posees commens. en puiss. seulement.[x]) Donc tant AG, que GE est incommensur. en longit. à AB. Mais AG, GE cōmens. à A E rationelle, sont rationelles: donc tant AB, AG, que AB, GE sont rationelles commens. en puiss. seulement:[y] donc tant le rectangle AH, que GI; contenu sous les rationelles commens. en puiss. seulement, est medial.



f 18. 10.

t 16. 10.

v 12. 10.

x 14. 10.

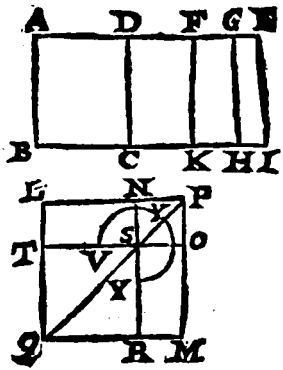
y 22. 10.

Derechef, tant DF, que FE estans commens. en long. à DE, posee comm. en long. à AB rationelle. DF, FE seront commens en long. à AB ration. comme il appert par la 12. Prop. & partant ration. [z] Donc tant le rect. DK, que FI, contenu sous les rationel. commensurables en longit. est rationel. Et on monstrera, comme en la 92. Prop. que TS

z 20. 10.

peut l'espace AC. Ie dis que TS est aussi residu medial premier.

Car AG, GE estans commensurab. en longitude, [a] AH, GI ayans mesme raison qu'icelles, seront commens. Et partant aussi leurs egaux quarrez LM, NO, commens. Donc les costez TO, SO, seront au moins commensur. en puiss. mais TO, SO sont mediales, estans les qq. LM, NO, egaux à AH, GI, (monstrez mediaux) mediaux. Et d'autant que FI, & partant son egal LO est rationel : & par ainsi incommen. au Medial NO, [b] TO, SO ayans mesme raison qu'iceux, seront incommensurables en longitude. Et estans monstrees mediales & commensurables, icelles TO, SO seront mediales commensurab. en puissance seulement : & contenant le rectangle LO monstré rationel, [c] TS sera residu medial premier. Donc si vn espace est contenu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



a 10. 10.

b 10. 10.

c 75. 10.

SCHOLIE.

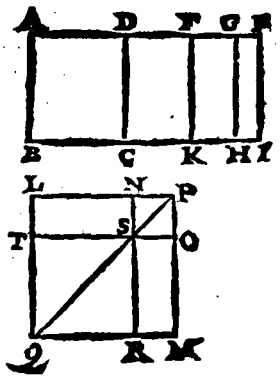
Soit AB 4. AD 9q. 48. ——— 6. DE sera 6. & DF, ou FE 3. Et si à AE on applique vn rect. sous AG, GE, egal au q. de FE: & defaillant d'vn

ne figure q. AG ſera √q. 27. GE √q. 3. Et AH √q. 432. GJ √q. 48. & AI √q. 768. Mais DJ 24. DK, ou FI 12. & FH 12. ——— √q. 48. Donc AC eſt √q. 768. ——— 24. reſidu ſecond. Et pour trouuer le coſté de ſon q. ſoit diuiſee √q. 768. en 2. telles parties, que leur produit ſoit egal au quart du q. de 24. c'eſt à dire à 144. la plus grande partie ſera √q. 432. la moindre √q. 48. partant √qq. 432. ——— √qq. 48. eſt le coſté de l'eſpace reſidu √q. 768. ——— 24.

THEOREME 70. PROP. 94.

93. 88.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vn reſidu troiſieſme; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt reſidu Medial ſecond.



Soit l'eſpace ou rectangle AC, contenu ſous AB rationelle, & ſous A D reſidu troiſieſme. Ie dis que la ligne qui peut AC, eſt reſidu medial ſecond.

Car ſoit DE conuenable à AD: donc AE, DE, ſelon la definion du reſidu troiſieſme, ſeront rationelles commenſurables en puiſſ. ſeulement, & AE, ny DE ne ſera

commenſ. en longitude à la rationelle AB, & AE pourra plus que DE, du q. d'vne ligne commenſu. en longit. à icelle. Soit coupee DE à F, en 2. egalement, & ſoit acheué le reſte de la conſtruction comme en la 92.

d 16. 10. Derechef, comme en icelle 92. AG, GE ſeront commenſ. en longit. entr'elles: [d] & partant, tant AG, que GE, com. enlõ. à la toute AE, mais AE eſt poſee incomm. en longit. à AB rationelle. Donc

e 14. 10. [e] tant AG, que GE ſera incommenſ. en longit. à AB: Donc tant AG que GE, commenſ. à AB rationelle, eſtant rationelle: tant AB, AG, que AE, GE,

f 22. 10. ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement: [f] Partant l'vn & l'autre rectang. AH, GI ſera medial.

Derechef, DE eſtant poſee incommenſ. en longit. à AB rationelle: DF, & FE commenſ. en long.

g 14. 10. à DE, [g] ſera auſſi incommenſur. en longit. à AB. Donc DF, & FE, eſtans commenſurables à DE rationelle, tant AB, DF, que AB, FE ſeront ratio-

h 22. 10. nelles commenſ. en puiſſ. ſeulement i [h] & partant, tant le rect. DK, que FI, ſera medial: & comme en la 92. Propoſition, on monſtrera que TS peut l'eſpace AC. Ie dis que TS eſt reſidu medial ſecond.

Car AH, GI eſtans monſtrez mediaux, leurs egaux quarrez LM, NO ſeront auſſi mediaux: &

i 10. 10. partant TO, SO mediales. [i] Et puis que AH, GI (ayans meſme raiſon que AG, GE monſtrees commenſurables) ſont commenſurables, les quarrez LM, NO ſeront auſſi commenſurables. Donc TO, SO ſont commenſur. au moins en puiſſance.

Mais d'autant que AE, DE ſont commenſ. en

puiſſ. ſeulemant, c'eſt à dire incommenſ. en longit. & GE eſt monſtree commenſ. en longit. à AE, & FE, commenſ. en long à DE: [k] GE, FE, ſeront incommenſ. en long. [l] Et partant GI, FI, ayans meſme raiſon que GE, FE, c'eſt à dire leurs egaux NO, LO, ſont incommenſ. parquoy TO, SO ayans meſme raiſon que LO, NO, ſont incommenſ. en longit. Et eſtans monſtrees mediales & commen. elles ſeront mediales commenſur. en puiſſ. ſeulement: & contenant LO medial: (car puis que LO eſt egal à FI, comme il appert par la 92. lequel eſt monſtré medial: LO ſera auſſi medial,) TS ſera reſidu medial ſecond. Partant ſi vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

k *S.* 14. 10
l 10. 10.
76. 10.

SCHOLIE.

Soit AB 6. *AD* √*q.* 27. —— √*q.* 15. *DE ſera* √*q.* 15. *& DF, ou FE,* √*q.* 3¼. *& ſi à AB on applique vn rect. ſous AG, GE, egal au q. de FE, & defaillant d'vne figure quarree, AG ſera* √*q.* 18. ¼. *GE* √*q.* ¼. *et partant AB eſt* √*q.* 675. *GF* √*q.* 27. *et le tout AI* √*q.* 972. *Mais DF* √*q.* 540. *FF* √*q.* 135. *et FH* √*q.* 135. —— √*q.* 27. *Donc AC eſt* √*q.* 972. —— √*q.* 540. *reſidu troiſieſme. Soit donc diuiſé* √*q.* 972. *en 2. telles parties, que leur produit ſoit egal à* √*q.* 135. *la plus grande ſera* √*q.* 672. *& la moindre* √*q.* 27. *Donc* √*qq.* 675. —— √*qq.* 27. *eſt le coſté du quarré de l'eſpace reſidu* √*q.* 972. √*q.* 540.

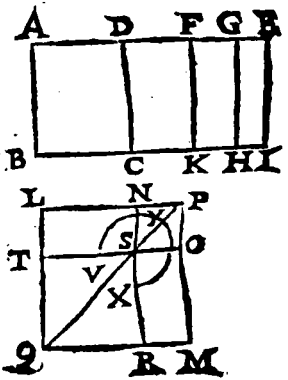
94. 89. THEOREME 71. PROPOSIT. 95.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle & vn reſidu quatrieſme: *la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt ligne Mineure.*

Soit l'eſpace ou rect. AC, contenu ſous AB rationelle, & AD reſidu quatrieſme. Ie dis que la ligne droicte pouuant AC eſt mineure.

Car ſoit DE, conuenable à AD. Donc AE, DE ſeront rationelles commenſ en puiſſance ſeulement, par la definition du reſidu quatrieſme: & AE commenſ. en longit. à AB rationelle: & icelle AE, pourra plus que DE, du q. d'vne ligne incommenſ. en long. à icelle. Soit coupee DE en 2. egalement à F, & le reſte faict comme auparauant: [m] Donc AG, GE ſeront incommenſ. en longit. puis que AE, peut plus que DE, du quarré d'vne ligne incõmenſ. en longit. à icelle: & à AE eſt appliqué vn rect. ſous AG, GF: egal au quart du q. de DE, defaillant d'vne fig. qu. Et AE eſtant rationelle & commenſurable en longitude à la ratio-

m 19.10.



nelle AB ; [n] le rectangle AI ſera rationel. n 20. 10.

Derechef, DE eſtant rationelle & incommenſ. en longit. à AB rationelle, [o] DI: & partant ſa moitié FI ſera medial. Et d'auantage, AG, GE eſtans incommenſ. en long. [p] AH, GL ayans meſme raiſon ſeront incommenſ. Et comme en la 92. on demonſtrera que TS peut l'eſpace AC. Ie dis que TS eſt mineure. o 21. 10. p 10. 10.

Car le compoſé des quarrez LM, NO, deſcrits de TO, SO, eſt egal au rect AI, par la conſtruction: mais iceluy eſt monſtré rationel, donc le compoſé des qq. de TO, SO, ſera rationel. Semblablement, FI eſtant monſtré medial, LO, contenu ſous TO, SO, egal à iceluy, ſera medial.

Finalement, AH, GI eſtans monſtrez incommenſ. leurs egaux qq. LM, NO, ſeront incommenſ. & partant TO, SO, incommenſur. en puiſſ. Donc TO, SO, eſtans incommenſurables en puiſſance, & le compoſé de leurs quarrez eſtant rationel, & le rectangle ſous icelles medial: la reſtante TS ſera mineure. Partant ſi vn eſpace eſt contenu ſous, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. 77. 10.

SCHOLIE.

Soit AB 6. AD 7. ——— yq. 14. DE ſera racine q. 14. & DF, ou FF yq. 3 ¼. Mais ſi à AE on applique vn rectangle ſous AG, GE egal au q. de FE, defaillant d'vne figure q. AG ſera 3½. p. Vq. 8¼. GE 3½. ——— Vq 8¼. & AH eſt Vq. 21. p. yq 315. GI 21. ——— Vq. 315. & le tout AI 42. Mais DI eſt Vq. 504. FI Vq. 126. ——— AC 42. ——— Vq. 504. reſidu quatrieſme. Donc ſi 42. eſt diuiſé en 2. telles parties que leur produit ſoit egal au quart

de yq.504.c'eſt à dire à 126.la plus grande partie ſera 21.p.yq.126.& la moindre 21. —— yq.126. Donc yq.(21. p.yq. 126.) —— yq.(21. —— yq. 126.)eſt le coſté du quarré ou eſpace reſidu 42. —— racine quarree 504.

95. 90. THEOREME 72. PROP. 96.

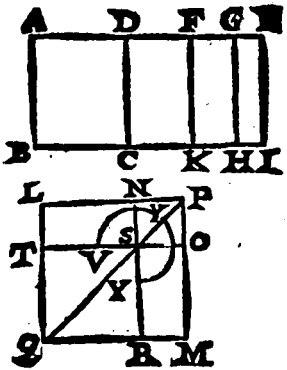
Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vn reſidu cinquieſme, la ligne droicte qui peut iceluy eſpace eſt ligne faiſant auec vn eſpace Rationel vn tout Medial.

Soit l'eſpace AC, contenu ſous la rationelle AB,& le reſidu cinquieſme AD. Ie dis que la ligne qui peut l'eſpace AC,eſt celle qui auec vn rationel faict vn tout medial. Que DE, conuienne à AD,par la definition du reſidu cinquieſme AE, DE,ſeront rationelles commenſ.en puiſſance ſeulement,& DE, commenſ.en long.à la rationelle AB. Finalement AE pourra plus que DE,du qu. d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle.

Soit coupee DE en deux egalement à F,& ſoit faict au reſte comme cy-deuant. Donc comme en la precedente AG,GE, ſeront incommenſurables en longitude. Et d'autant que *AE eſt* rationelle incommenſurable en longitude à AB rationelle,
q 22.10. comme il eſt dict en la 93.le rectangle AI, q ſera medial.

r 20. 10. Item, puis que DE eſt rationelle commenſurable en long.à AB rationelle, r le rect. DI : & par-

tant ſa moitié FI eſt rationel.



Derechef, comme en la precedente, AH, GI, ſont incommenſurables, & comme il eſt monſtré en la 92.TS, pourra l'eſpace AC. Ie dis que TS, eſt la ligne laquelle auec vn eſpace rationel, faict vn tout medial.

Car d'autant qu'il eſt monſtré que AI eſt medial, le composé des quarrez LM, NO, des lignes TO, SO, egal à iceluy: eſt medial. Et FI eſtant rationel, comme nous auons monſtré, le rectangle LO, contenu ſous TO, SO, egal à iceluy, eſt auſſi rationel: & TO, SO ſont incommenſurables en puiſſance, comme il eſt monſtré en la precedente. Donc, puiſque le composé de leurs qq. eſt medial, & le rectangle ſous icelles rationel, [f] la reſtante TS, eſt la ligne qui auec vn rationel, faict vn tout medial. Donc ſi vne eſpace, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [f] 78. 10.

SCHOLIE.

Soit AB 6. AD vq. 59. — 4. DE ſera 4. & DF, ou FE 2. Que ſi à AE on applique vn rect. ſous AG, GE egal au q. de FE, & defaillant d'vne figure q. AG ſera vq. 14. p. vq. 10. GE vq. 14.

yq. 10. & AH eſt yq. 504. p. yq. 360. GF yq. 504. —— yq. 360. & le tout AI yq. 2016. Mais DI eſt 24. FI 12. & AC yq. 2016. — 24. reſidu 5. Soit diuiſee yq. 2016. en 2. telles parties que leur produit ſoit egal à 144. la plus grande ſera yq. 504. p. yq. 360. & la moindre yq. 504. —— yq. 360. parqueyq. (yq. 504. p. yq. 360.) — yq. (yq. 504 —— yq. 360.) eſt le coſté du quarré dudict eſpace reſidu yq. 2016. — 24.

96. 91. THEOREME 73. PROPO. 97.

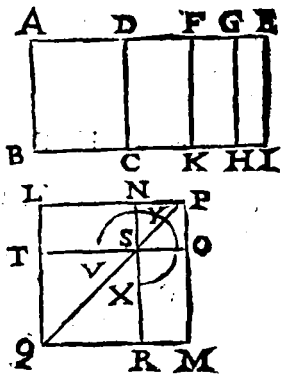
Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle & vn reſidu ſixieſme; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt celle là, laquelle auec vn rectangle Medial, faict vn tout Medial.

L'eſpace AC, ſoit contenu ſous la rationelle AB, & AD, reſidu ſixieſme Ie dis que la ligne droite qui peut l'eſpace AC, eſt celle qui auec vn eſpace medial, fait vn tout medial.

Car à icelle AD, conuienne DE: donc AE, DE, par la definition du reſidu ſixieſme, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, & l'vne ny l'autre n'eſt commenſurable en *longitude* à la rationelle AB. Et finalement *AE pourra plus* que DE, du quarré d'vne ligne *incommenſurable* en longitude à icelle. Soit coupee DE en deux egalement à F, & ſoit faict le reſte de la conſtruction comme auparauant. Donc comme en la 95. AG, GE ſeront incommenſurables en longitude.

Et puis

Et puis que tant AE, que DE, eſt rationelle incommenſurable en lõgitude à la rationelle AB : [a] tant AI, que DI, & partant FI, moitié de DI ſera medial. Et AH, GI, comme en la 95. ſeront incommenſurables.



a 22.10.

Et d'autant que AE, DE, ſont commenſurables en puiſſance ſeulement: [b] AI, DI, qui ſont en meſme raiſon, ſont incommenſurables, & DI, FI eſtans commenſurables, [c] FI ſera incommenſ. à AI: maintenant nous monſtrerons comme en la 92. Propo. que TS, peut AC: & ie dis que TS, eſt celle qui auec vn medial, fait vn tout medial.

b 10.10.

c 14.10.

Car d'autant que AI eſt monſtré medial, le composé des quarrez LM, NO, des droictes lignes TO, SO, egal à iceluy eſt medial. Item, FI eſtant monſtré medial, SO ſon egal, contenu ſous TO, SO eſt medial.

Derechef, FI eſtant incommenſ. à AI, comme eſt monſtré: LO, contenu ſous TO SO, ſera incommenſurable au composé des qq. de TO, SO, puis que LO, eſt egal à FI, & le composé des quarrez de TO, SO, egal à AI. Finalement TO, SO, ſont incommenſ. en puiſſance, comme il eſt monſtré en la 95. Donc puis que le cõposé de

leurs quarrez eſt medial, & le rectangle ſous icelles medial, & incommenſ. au compoſé des quarrez
d 79.10. d'icelles, d la reſtante TS, eſt celle qui auec vn medial, faict vn tout medial. Donc ſi vn eſpace eſt contenu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

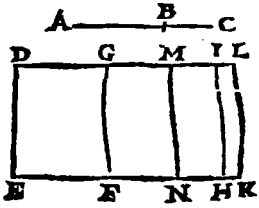
SCHOLIE.

Soit AB 6. AD yq. 32. — yq. 20. DE *ſera yq. 20, &* DF, *ou* FE *yq. 5. Mais ſi à* AE *on applique vn rect. ſous* AG, GE, *egal au q. de* FE, *& defaillant d'vne figure q.* AG *ſera yq. 8. p. yq. 3.* GE *yq. 8 — yq. 3. & partant* AH *ſera yq. 288. p. yq. 108.* GI *yq. 288. — yq. yq. 108. & le tout* AI *yq. 1152. Mais DI eſt yq. 720. DK yq. 18. &* AC *yq. 1152. — yq. 720. reſidu ſixieſme: & ſon coſté ſera trouué eſtre yq. (yq 288. p. racine q. 108.) — racine q. (racine q. 288. — racine q. 108.*

xcvij
xciij

THEOREME 74. PROP. 98.

Le quarré d'vn reſidu appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude reſidu premier.



Soit AB reſidu, & BC ſa conuenable, en
45. L ſorte que AC, BC ſoient rationelles cõmenſ. en puiſſ. ſeulemẽt: & à DE, rationelle, ſoit appliqué le rect. DF, egal au q. de AB,

faisant la latitude DG. Ie dis que DG est residu premier.

Car à DE soit appliqué le rect. DH, egal au q. de AC, & à HI soit appliqué IK, egal au q. de BC, en sorte que le tout DK, soit egal au composé des qq. de AC, CB.

Et [c] d'autant que le composé des quarrez de AC, BC, est egal à 2. fois le rect sous AC BC, & au quarré de AB, si l'on osté le quarré de AB, & le rectangle DF, le rect. GK, demeurera egal à deux fois le rectangle sous AC, BC. Donc GL estant diuisée en deux également à M, & menée MN, parallele à DE; MK, sera egal au rectangle sous AC, BC. c 7. 2.

Et d'autant que AC, BC sont rationelles, leurs quarrez seront rationaux, & partant commensurables. [f] Donc puis que le composé des quarrez de AC, BC, est commensur. à chacun d'iceux, iceluy composé c'est à dire son egal rectang. DK sera rationel, lequel estant appliqué à la rationelle DE, [g] DL sera rationelle commensurable en longitude à DE. f 16. 10. g 21. 10.

Derechef, puis que AC, BC, sont rationelles commens. en puiss. seulement. le rect. sous icelles, & son double GK est medial. Lequel estant appliqué à la rationelle GF, [h] GL sera rationel. incommens. en long. à GF, c'est à dire à DE. Et d'autant que DK rationel, & GK medial, c'est à dire irrationel, sont incommens. DL, [i] GL, ayans mesme raison que DK, GK, seront incommens en long. Donc estans monstrees rationelles, elles seront rationelles commens. en puiss seulement: [k] & partant DG restante, sera residu. Ie dis qu'elle est premiere. h 23. 10. i 10. 10. k 74. 10.

l *Lême 54.* 10. Car d'autant l que le rectangle sous AC, BC, c'est à dire Mk, est moyen proportionel entre les quarrez de AC, BC, c'est à dire entre Dk, Ik: DH, Mk, Ik, sont continuellement proportionaux, & les lignes DI, ML, IL, continuellement m 17. 6. propor. estans en mesme raison. m Parquoy le rect. sous DI, IL, est egal au quar. de ML, c'est à dire au quart du q de GL.

Et d'autant que les quarrez de AC, BC, ou leurs n 10. 10. egaux DH, Ik, sont commensurables, n DI, IL estans en mesme raison, seront commensurables en longitude. Partant DL, GL estans inegales, & à la plus grande est appliqué vn rectangle sous DI, IL, egal au quart. du quarré de GL moindre, defaillant d'vne figure quarree, & *DI* estant p 18. 10. monstree commensurable en longitude à IL, p DL pourra plus que GL, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude. Parquoy DG, estant monstree residu, & la toute DL, pouuoir plus que GL, sa conuenable du q. d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude: & que la mesme toute DL, est commensurable en longitude à la rationelle DE, par la definition DG sera residu premier. Donc le quarré d'vn residu appliqué à vne ligne rationelle, fait l'autre costé. &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

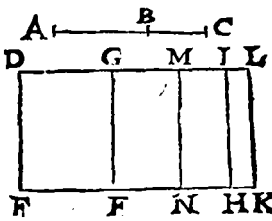
Soit AB √q. 33. —— √b. 3. BC √q. 3. DE rationell 6. & à DE soit appliqué DH, egal au q. de AC, qui est 33, faisant la latitude DI: DI sera 5½. & si à icelle on applique fK, egal au quarré de CB, qui est 3. faisant la latitude IL; IL sera ½.

& la toute DL 6. Derechef, si à DE on applique GN, qui est √7. 99. faisant la latitude GM; GM sera γq. 2¼. & par mesme raison ML est γq. 2¼. & la toute GL γq. 11. Donc DG est 6.——γq.11.residu premier.

THEOREME 75. PROP. 99. 98. 93.

Le quarré d'vn residu Medial premier appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude residu second.

Soit AB, residu medial premier, & BC sa conuenable, de sorte que AC, BC soient mediales commensurables en puissance seulement, & contenant vn rationel, & à DE rationelle, soit appliqué le rectangle DF, egal au quarré de AB, faisant la latitude DG. Ie dis que DG est residu second. 45.1.



Car soit fait comme en la precedente: de sorte que DH, IK, soient egaux aux quarrez de AC, BC, & GK, egal à 2. fois le rect. sous AC, BC: & partant MK egal à vne fois iceluy rectangle. D'autant donc que AC, BC, sont mediales commensurables en puissance seulement, & leurs quarrez, c'est à dire leurs egaux DH, IK, mediaux & commensurables & partant le tout DK, sera commens. à chacun d'iceux: donc medial. Et Dk estant appliqué à la q 16. 10. r Co. 24. 10

[s] 23. 10. rationelle DE, [t] DL sera rationelle incommens. en longitude à DE.

Derechef, d'autant que le rect. sous AC, BC, est p ssé rationel, le double d'iceluy GK, sera aussi
[t] 21. 10. rationel: lequel estant appliqué à la rationelle DE, GL sera rationelle commensurable en longitude à DE.

Mais d'autant que Dk medial, c'est à dire irrationel & GK rationel, sont incommensurables,
[u] 10. 10. [u] DL, LG estans en mesme raison, seront incommensurables en longit. Et estans monstrees rationelles, DL LG seront rationelles comm nsura-
[x] 74. 10. bles en puiss. seulement: [x] & partant la restante DG est residu. Ie dis qu'elle est second. Car comme en la precedente, on monstrera que la toute DL, peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne commensurable à icelle en longitude. Partant GL estant monstree commensurable en longitude à la rationelle DE, icelle DG, par la definition, sera residu second. Donc le quarré d'vn residu medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

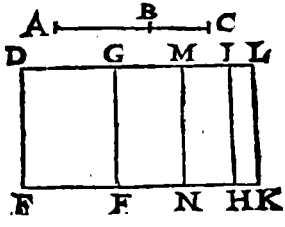
Soit AB yqq. 972.——yq. 108. & yq 108. & DE rationelle soit 6. & si à DE *on applique DH, egal au q. de AC, qui est yq. 972. faisant la latit. DI:* DI *sera yq. 27. Et si à la mesme on applique IK, egal au q. de CB yq. 108 faisant la latitude IL: IL sera yq. 3. & la toute DL yq. 48. Derechef, si à* DE *on applique GN, egal au rect. sous AC, CB, qui est 18. faisant la latitude GM: GM sera 3. & ML 3. et la toute GL 6. Donc DG est racine q. 48.——6. residu second.*

xcix.

THEOREME 78. PROP. 100. xciv.

Le quarré d'vn residu Medial second, appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude residu troisiesme.

Soit AB, residu medial second; & BC sa conuenable, en sorte que AC, BC soient mediales commensurables en puissance seulement, & contenant vn medial; & à la rationelle DE, soit appliqué DF, egal au quarré de AB, faisant la latitude DG. Ie dis que DG est residu troisiesme. Soit y fait comme auparauant: l'on monstrera, comme en la precedente, que DK est medial, & partant DL, rationelle incommens. en longitude à DE: & d'autant que le rect. sous AC, BC est medial, & partant le double d'iceluy, sçauoir Gk; GL sera aussi rationelle incommensurable en longitude à DE. y 45. 1. z 23. 10.



Mais d'autant que AC, BC sont incommensurab. en long. & comme AC, à BC, [a] ainsi le q. de AC, au rect. sous AC, BC; [b] le q. de AC sera incommensurable au rectangle sous AC, BC: [c] Mais le composé des quarrez de AC BC, est commens. au q. de AC, estans iceux quarrez commensurables, descrits de lignes commens. en puiss. & 2. fois le rect. sous AC, BC, est commensurable

a *Lem.* 5. 19
10.
b 10. 10.
c 16. 10.

dSc.14. 10 audict rectangle, sous AC, BC. [d] Donc le composé des quarrez de AC, BC, c'est à dire Dk, est incommens. à 2. fois le rect. sous AC, BC, c'est à
e 10. 10. dire à Gk. [e] Et partant DL, GL, estans en mesme
f raison que Dk, Gk, sont incommensurab. en longitude, & sont monstrees rationelles : donc DL,
f 74. 10. GL, sont rationelles commensurables en puiss. seulement : [f] & partant DG restante, est residu. Ie dis qu'elle est troisiesme.

Car nous monstrerons, comme en la 98. que la toute DL, peut plus que GL. sa conuenable, du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude. Donc puis que DL, ny GL, n'est commens. en longit. à la rationelle DE, comme il est monstré : DG sera residu troisiesme par la definition. Donc le quarré d'vn residu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

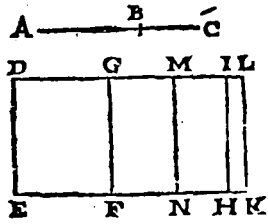
Soit AB racine qq. 882. — *racine qq.* 18. *BC racine qq.* 18. *& DE rationelle* 6. *Et si à DE on applique le rectangle DH, egal au qu. de AC, faisant la latitude DI; DI sera racine q.* 24 ½. *& appliquant IK, egal au q. de CB, faisant la latitu. de IL : IL sera racine q.* ½. *et la toute DL racine q.* 32. *D'auantage, si à DB on applique GN, egal au rectangle sous* AC, BC, *qui est racine q.* 126. *faisant la latitude, GM : GM sera racine q.* 3 ½. *& la toute GL racine q.* 14. *Donc* DG *est racine q.* 32. — *γq.* 14. *residu troisiesme.*

(·.·) (·.·) (·.·)

THEOREME 77. PROPO. 101. 100. 95.

Le quarré d'vne ligne Mineure, appliqué à vne ligne rationelle; faict la latitude, residu quatriesme.

Soit la ligne mineure AB, & sa conuenable BC, de sorte que AC, BC soient incommensurables en puissance, faisans le composé de leurs qq. rationel, & le rect. sous icelles AC, BC, medial: & à la rationelle DE. soit appliqué l'espace DF. egal au q. de AB, faisant la latitude DG. Ie dis que DG est residu quatriesme. Soit faict comme aux precedentes. 45.1.



D'autant que le composé des qq. de AC, BC, c'est à dire Dk, leur egal est rationel: DL, [g] sera rationelle commensurab. en longit. à DE. Et puis que le rect. sous AC, BC, & partant le double d'iceluy GK est medial, [h] GL sera rationelle incommensurable en longitude à DE. g 21.10. h 23.10.

Derechef, d'autant que Dk rationel, & GK irrationel, sçauoir medial, sont incommensurables, [i] DL, GL estans en mesme raison, sont incō. en lon. Et astans monstrees ratio. DL, GL sont rat. commensur. en puissance seulement: [k] partant i 10.10. k 74.10.

DG reſtante, eſt reſidu. Ie dis qu'elle eſt reſidu quatrieſme. Car AC, BC, eſtans incommenſurables en puiſſance, leurs quarrez ou leurs egaux rect. DH, IK ſeront incommenſurables : [l] & partant DI, IL incommenſurables en longitude. Et puis que le rectangle ſous DI, IL, eſt egal au q. de ML, [m] c'eſt à dire au quart du quarré de GL, comme eſt demonſtré en la 98. DL, pourra plus que GL, du quarré d'vne ligne incommenſurable en longit. à icelle: puis qu'à DL plus grande, eſt appliqué le rectang. ſous DI, IL, egal au quart du q. de GL, moindre, & defaillant d'vne figure quarree, & diuiſant DL en parties incommenſ. en longitude DI, IL. Donc puis que DL totale, peut plus que la conuenable GL, du q. d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle, & la toute DL eſt monſtree comm. en long. à la ratio. DE : par la definition DG ſera reſidu quatrieſme. Partant le quarré d'vne ligne mineure, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

l 10. 10.

m 19. 10.

SCHOLIE.

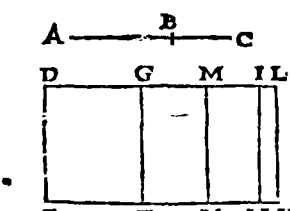
Soit AB *yq.(yq. 21.p.yq.315.)* ——— *yq.(yq 21.p.yq.315.)* BC *yq.(yq.21.* —— *yq.315:) mais la rationelle* DE *ſoit 6. Et à* DE *appliquant* DH, *egal au q. de* AC, *faiſant* DI, *latit.* DI *ſera* $3\frac{1}{2}$. *p.yq* $8\frac{1}{4}$. *& ſi on applique* JK, *egal au q. de* CB. *faiſant* JL, *latit.* IL *ſera* $3\frac{1}{2}$. ——— *yq.* $8\frac{1}{4}$. *& la toute* DL 7. *Et ſi à* DE *on applique* GN, *egal au rect. ſous* AC, CB, *ſçauoir à yq. 126. faiſant* GM, *latit.* GM *ſera* $yq.3\frac{1}{2}$. *& la toute* GL, *yq.* 14. *Donc* DG *eſt* 7. ——— *yq.*14. *reſidu quatrieſme.*

THEOREME 78. PROP. 102. cf. 96.

Le quarré d'vne ligne, laquelle auec vn espace Rationel, faict vn tout Medial, appliqué à vne ligne Rationelle, fait la latitude, residu cinquiesme.

Soit AB faisant auec vne superficie rationelle, vn tout medial, & sa conuenable BC, en sorte que AC, BC soient incommens. en puissance, faisant le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles rationel: [n] & à DE rationelle, soit appliqué DF, egal au quarré de AB, faisant DG, latitude. Ie dis que DG, est residu cinquiesme. n 45. 1.

Car soit faict comme cy deuãt. D autant que le composé des qq. de AC, BC, ou son egal DK est medial: [o] DL, sera rationelle incommensurable en longitude à DE. Et d'autant que le rectangle sous AC, BC ou le double d'iceluy, GK est rationel: [p] GL sera rationelle commensurable en longitude à DE.



o 23. 10.

p 21. 10.

Et d'autant que DK, medial ou irrationel, & GK rationel, sont incommensurables, [q] DL, GL, ayans mesme raison, seront incommensurables en longitude: mais elles sont monstrees rationel- q 10. 10.

les. Donc DL, GL, ſont rationelles commen-
174.10. ſurables en puiſſance ſeulement: Donc la reſtante DG eſt reſidu. Ie dis qu'elle eſt cinquieſme. Car comme en la precedente, on monſtrera que DL toute, peut plus que GL, conuenable du q. d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle. Donc puis que la conuenable GL, eſt monſtree commenſurable en longitude à la rationelle DE, par la definition DG ſera reſidu cinquieſme. Donc le quarré ,,&c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

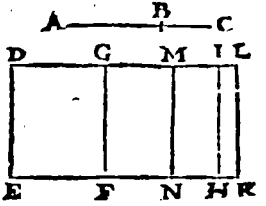
Soit AB *racine q.* (*racine q.* 288. *p. racine q.* 207.) ——— *racine q.* (*racine q.* 288. —— $\sqrt{q.}$ 207.) BC *racine q.* (*racine q.* 288. —— *racine qu.* 207.) *Et* DE *rationelle ſoit &. ſi à* DE *on applique* DH, *egal au quarré de* AC, *faiſant* DF, *latitude,* DI *ſera racine q. &. p. racine q.* $5\frac{1}{4}$. *& appliquant* IK *egal au q. de* CB, *faiſant* IL *latitude,* IL *ſera racine q.* 8. ——— *racine q.* $5\frac{1}{4}$. *& la toute* DL, *racine q.* 32. *Derechef, ſi à* DE *on applique* GN, *egal au rectangle ſous* AC, CB *faiſant* GM *latitude,* GM *ſera* $1\frac{1}{2}$. *& la toute* GL 3. *Parquoy* DG, *eſt racine quarree* 32. ——— 3. *reſidu cinquieſme.*

cij 97. THEOREME 79. PROP. 103.

Le quarré d'vne ligne faiſant auec vn eſpace Medial, vn tout Medial, appli-

qué à vne ligne Rationelle, faict la latitude, residu sixiesme.

Soit AB. faisant auec vn medial, vn tout medial, & soit BC, sa conuenable, en sorte que AC, BC, soient incommensurables en puissance, faisans le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles medial & incommensurable au composé de leurs quarrez: [f] & à DE rationelle, soit appliqué DF, egal au q. de AB, faisant D G, latitude. Ie dis que DG est residu sixiesme. Soit fait comme aux precedentes. [f 45. I.]



D'autant que tant le composé des quarrez de AC, BC, ou DK son egal, que le rectangle sous AC, BC, & partant le double d'iceluy GK, est medial: [t] tant DL, que GL, sera rationelle incommens. en longitude à DE. Et le rect. sous AC, BC estant incommensurable au composé des quarrez d'icelles AC, BC: & le rectangle sous AC, BC, & le double d'iceluy GK, commensurables, [x] GK sera incommens. à iceluy composé c'est à dire à Dk. Et [x] partant DL, GL ayans mesme raison que Dk, Gk seront incommensurables en longit. & elles sont monstrees rationelles: donc DL, GL sont rationelles commensurables en puissance seulement: [y] Partant DG est residu. Ie dis qu'elle est sixiesme. [t 23. 10.] [v 14. 10.] [x 10. 10.] [y 74 10.]

Car, comme en la 101. nous monstrerons

que la toute DL, peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne incommensurable en longitude à icelle, Donc puis que DL, ny GL, n'est commensurable en longitude à la rationelle DE; par la definition DG sera residu sixieme: donc le q. &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

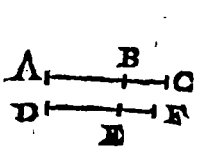
Soit AB $\sqrt{q.}$ (*$\sqrt{q.}$*396. *p.* $\sqrt{q.}$188.) —— $yq.$ (*$\sqrt{q.}$*396. —— $\sqrt{q.}$ 288.) *BC* $\sqrt{q.}$ (*$\sqrt{q.}$* 396. —— $yq.$288.) *& la rationelle* DE 6. *appliquant à* DE, *le rectangle* DH, *egal au q. de* AB, *faisant* DI *latitude*, DJ *sera* $yq.$ 11. *p* $yq.$ 8. *& appliquant* IK, *egal au q. de* CB, *faisant* IL *latitude*, IL *sera* $yq.$11. —— $yq.$8. *& la toute* DL *sera* $yq.$ 44. *Derechef, appliquant à* CD, *le rectangle* GN *egal au rectangle sous* AC, CB, *faisant* GM *latitude*, GM *sera racine q.* 3. *& la toute* GL *rac. q.* 12. *Donc* DG *est racine quarree* 44. —— $yq.$ 12. *residu sixiesme.*

cilj. 98. THEOREME 80. PROP. 104.

La ligne droicte commensurable en longitude à vn residu, est aussi residu & de mesme ordre.

Soit AB residu, & BC, sa conuenable, en sorte que AC, BC, soient rationelles commensurables en puiss. seulement, & soit DE. commen. en long. à AB. Ie dis que DE est residu, & de mesme ordre que AB.

Car soit comme A B, à DE, [a] ainsi B C, à E F. [b] Donc la toute A C, sera à la toute DF, ainsi comme AB, à DE, ou BC, à EF. D'autant donc que A B, D E sont posees commens. en longit. [c] AC, DF, & BC, EF, seront aussi comment. en longit. Et d'autant que AC, BC, sont rationelles, leurs commensurables DF, EF, seront rationelles.



a 12. 6.
b 12. 5.
c 10. 10.

Derechef, d'autant que comme AC, à DF, ainsi BC, à EF; & en permutant comme A C, à BC. ainsi DF, à EF: & AC, BC sont commensurables en puissance seulement: Donc DF. EF, seront aussi commensu. en puiss. seulement: & estans monstrees rationelles, [d] la restante DE est residu. Ie dis qu'elle est de mesme ordre que AB. Car premierement, que AC, puisse plus que BC, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle. Cela estant [e] DF, pourra plus que EF, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle. Donc si AC, est commens. en longitude à la rationelle exposee, afin que AB soit residu premier, DF sera aussi com. en lõg. à la rat. exposee puis que tãt la rat. exposee, que DF est com. en longit. à la mesme AC, donc par la definition DE sera residu premier, sçauoir de mesme ordre que AB. Mais si B C est commensur. en longit. à la rationelle, en la mesme façon E F sera commensurable en longitude à la rationelle: partant l'vne & l'autre A B, D E, par la definition, sera residu second.

d 74. 10.
e 15. 10.
f 12. 10.

Finalement, si l'vne ny l'autre AC, B C, n'est commensurable en longitude à l'exposee ratio-

f 14. 10. nelle, f auſſi l'vne ny l'autre DF, EF, ne ſera commenſurable en longitude à la meſme rationelle. Donc tant l'vne que l'autre AB, DE, ſera reſidu troiſieſme par la definition.

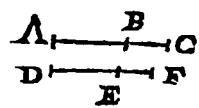
Maintenant que AC, puiſſe plus que BC, du
g 15. 10. quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle. Cela eſtant g DF, pourra plus *que* EF, du quarré d'vne ligne qui luy ſera incommenſurable en longitude. Parquoy nous monſtrerons, comme auparauant, que DE eſt reſidu quatrieſme, cinquieſme ou ſixieſme : donc la ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

civ 99. THEOREME 81. PROP. 105.

La ligne droicte commenſurable à vn reſidu Medial, eſt auſſi reſidu Medial, & de meſme ordre.

Soit AB reſidu, & BC ſa conuenable, en ſorte que AC, BC ſoient mediales, commenſurables an puiſſ. ſeulement ; & ſoit DE commenſurable à icelle. Ie dis que DE eſt auſſi reſidu, & de meſme ordre que AB.

Car comme AB, eſt à
h 12. 6. 12. 5. DE h ainſi BC, ſoit à EF, donc la toute AC, ſera à la toute DF, comme AB, à DE, & BC, à EF. D'autant donc que AB, DE



k 10. 10. ſont poſees commenſurables, k BC, EF, & AC, DF, ſeront auſſi commenſurables. Et AC, B
l 24. 10. C eſtans mediales: DF, l EF, commenſurables à icelles.

icelles, seront aussi mediales. Derechef, AC, estant à DF, comme BC, à EF, & en changeant comme AC à BC, ainsi DF, à EF: mais AC, BC sont commens. en puiss. seulement; [m] donc DF, EF, seront commens. en puiss. seulement. Parquoy DF, EF estans monstrees mediales, [n] la restante DE sera residu medial. Ie dis qu'elle est de mesme ordre que AB. Car puis que comme AC, à BC, ainsi DF à EF. Et comme [o] AC, à BC, ainsi le quarré de AC, au rectangle sous AC, BC. Et comme DF, à EF, ainsi le quarré de DF, au rect. sous DF, EF: donc comme le quarré de AC, au rectangle sous AC, BC, ainsi le quarré de DF, au rectangle sous DF, EF: & en changeant, comme le quarré de AC, au quarré de DF. ainsi le rect. sous AC, BC, au rectangle sous DF, EF: donc le quarré de AC, estant commensurable au quarré de DF, AC, DF, estans monstrees commensurables, [p] le rectangle sous AC, BC, sera commensurable au rectangle sous DF, EF. donc si le rectangle sous AC, BC est rationel, de sorte que AB soit residu medial premier; le rectangle sous DF, EF, commensurable à iceluy, sera aussi rationel: [q] & partant DE sera residu medial premier. Mais si le rectangle sous AC, BC est medial, en sorte que AB, soit residu medial second, le rectangle sous DF, EF, commensurable à iceluy [r] sera aussi medial: [s] partant DE sera residu medial second. Donc la ligne droicte commensurable au residu medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

m 10. 10.

n 75. 10. ou 76.

Lẽme 3. 19. 10.

p 10. 10.

q 75. 10.

r 24. 10.

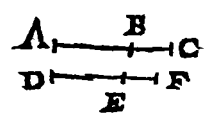
s 76. 10.

civ. 99. THEOREME 81. PROPO. 108.

La ligne droicte, commensurable à vne ligne Mineure, est aussi ligne Mineure.

Soit la ligne mineure AB, & BC sa conuenable: de sorte que AC, BC soient incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs quarrez AC, BC, rationel, & le rectangle sous AC, BC medial: & soit DE, commensurable à AB. Ie dis que DE est mineure.

Car soit faict comme auparauant, en sorte que AB, BC, ayent mesme raison à DE, EF, que AC, à DF, comme en la precedente, DF, EF seront commensurables à AC, BC, soit en longitude & puissance ou en puissance seulement. Et puis que comme AC, à DF, ainst BC, à EF, & en changeant comme AC à BC, ainsi DE à EF: comme le quarré de AC, au quarré de BC: ainsi le quarré de DF, au quarré de EF, & en composant, comme le composé des quarrez de AC, BC, au quarré de BC, ainsi le composé des quarrez de DF, EF, au quarré de EF: & en permutant comme le composé des quarrez de AC, BC, au composé des quarrez de DF, EF, ainsi le quarré de BC, au quarré de EF. Mais le quarré de BC, est commensurable au quarré de EF: BC, EF, estans monstrees commensurables. Donc le



128. 6.

110. 10.

composé des quarrez de AC, BC, eſt commenſurable au composé des quarrez de DF, EF. Mais le composé des quarrez de AC, BC, eſt posé rationel; [x] Donc le composé des quarrez de DF, EF eſt rationel. x 9. des

Derechef, comme il eſt monſtré en la precedente Propoſition, le rectangle ſous AC, BC, eſt commenſurable au rectangle ſous DE, EF : mais le rectangle ſous AC, BC, eſt posé medial: [y] Donc le rectangle ſous DF, EF, ſera auſſi medial. Et puis que comme AC à BC, ainſi DF, à EF: & AC, BC ſont incommenſurables en puiſſance, DF, [z] EF ſeront auſſi incommenſurables en puiſſance. Partant DF, EF eſtans incommenſurables en puiſſance, & faiſans le composé de leurs quarrez rationel: & le rectangle ſous icelles medial: [a] DE ſera mineure. Donc la ligne droicte commenſurable, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. y Co. 24. 10. z 10. 10. a 77. 10.

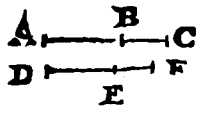
THEOREME 83. PROPO. 107. cvij.

La ligne droicte commenſurable à vne ligne, laquelle auec vn eſpace Rationel, faict vn tout Medial, eſt auſſi ligne faiſant auec vn eſpace Rationel, vn tout Medial. q.

Soit AB, faiſant auec vne ſuperficie rationelle vn tout medial, & BC conuenable à icelle, de ſorte que AC, BC ſoient incommenſurables en puiſſance, & faſſent le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle ſous icelles rationel: &

soit DE, commensurable à AB, comment que ce soit. Ie dis que DE faict auec vn espace rationel vn tout medial.

Car ayant fait la construction comme auparauant, on monstrera comme en la precedente Proposition, que le composé des quarrez de AC, BC, est commensurable au composé des quarrez de DF, EF: donc celuy là estant posé medial, [b] celuy cy sera aussi medial.



b Co. 24. 10

Derechef, comme en la 105. Proposition, on monstrera que le rectangle sous AC, BC, est commensurable au rectangle sous DF, EF: donc celuy là estant posé rationel; [c] cettuy cy sera aussi rationel. Et finalement, comme il est monstré en la precedente Proposition, DF, EF, sont incommensurables en puissance, parquoy DF, EF estans incommensurables en puissance, & faisans le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles rationel: [d] DE fera auec vn espace rationel, vn tout medial. Ce qu'il falloit demonstrer.

c 9. def.

d 78. 10.

cvij. cij. THEOREME 84. PROP. 108.

La ligne droicte commensurable à vne ligne, laquelle auec vn espace Medial, faict vn tout Medial, icelle est aussi ligne faisant auec vn espace Medial, vn tout Medial.

Soit AB, faisant auec vne superficie mediale, vn tout medial ; & BC conuenable à icelle, en sorte que AC, BC, soient incommens. en puiss. faisans le composé de leurs qq. medial, & le rect. sous icelles medial, & incommens. au composé de leurs quarrez. Et soit DE commens. à AB, comment que ce soit. Ie dis que DE, auec vn espace medial, faict vn tout medial.

Car ayant faict la construction comme au parauant: on monstrera comme en la Prop. 106. que le composé des quarrez de AC, BC, est commens. au composé des quarrez de DF, EF. Donc le composé des quarrez de AC, BC estant posé medial : [c] celuy des quarrez de DF, EF sera aussi medial. [c] Co. 24. 10

Derechef, comme en la 105. on monstrera que le rectangle sous AC, BC, est commensurable au rectangle sous DF, EF : donc celuy-là estant medial, [d] celuy-cy sera aussi medial. Et comme en la 106. DF, EF seront aussi incommensurables en puissance.

Finalement, d'autant que le composé des quarrez de DF, EF est commensurable au composé des quarrez de AC, BC, comme il est dict: & le rect. sous DF, EF est commensurable au rectangle sous AC, BC. Mais le composé des quarrez de AC, BC, & le rectangle sous AC, BC sont posez incommensurables. [f] donc le composé des quarrez de DF, EF, & le rectangle sous DF, EF, seront incommensurables. Parquoy DF, EF estans incommensurables en puissance, & le composé de leurs quarrez medial, & le rectãgle sous icelles medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez : [g] DE faict auec vn espace me- [f] 14. 10 [g] 79. 10.

dial, vn tout medial. Donc la ligne droicte commensurable à vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

cviij. ciij.

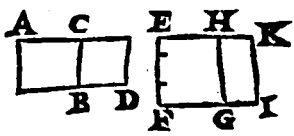
THEOREME 85. PROP. 109.

Si vn espace Medial est retranché d'vn Rationel, la ligne droicte qui peut le reste de l'espace, est vne de ces deux Irrationelles; sçauoir Residu ou Mineure.

De la superficie ou espace rationel AD, soit retranché le medial CD. Ie dis que la ligne qui peut le reste AB, est residu ou mineure.

Car, soit exposee

a 45. EF rationelle,[a] à laquelle soit appliqué le rectangle EG, egal à AB, & à GH, le rectangle HI, egal à CD: de sorte que le tout EI, soit egal au tout AD. D'autant donc que EI, egal à AD rationel, est rationel:



i 21. 10. [i] EK sera rationelle commensurable en longitude à EF rationelle.

Derechef, d'autant que HI, egal à CD medial, est medial: HK sera rationelle incommensurable en longitude à EF. Parquoy EK estant commensurable en longitude à EF: mais HK,

k 23. 10. incommensurable en longitude à la mesme EF,

l 13. 10. [k] EK, HK seront incommensurables en longitude; & estans rationelles, elles seront rationelles

commensurables en puissance seulement : & l 74. 10.
partant le reste EH est residu, & HK conuenable à icelle : donc EK peut plus que HK, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, ou incommensurable.

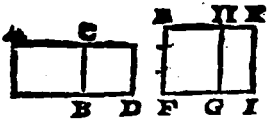
Si Ek peut plus que Hk, du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude, la toute Ek estant aussi monstree commensurable en longitude à EF rationelle : par la definition EH sera residu premier. Parquoy la ligne pouuant l'espace EG, contenu sous EF rationelle, & le residu premier EH, c'est à dire l'espace AB, egal à iceluy, m est residu. Mais si Ek peut plus que H m 92. 10.
k du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude. La toute Ek estant monstree commensurable en longitude à EF rationelle : selon la definition EH sera residu quatriesme. Partant la ligne pouuant l'espace EG, contenu sous EF rationelle, & EH residu quatriesme, c'est à dire l'espace AB egal à iceluy, n est mineure. Donc si vn espace medial est osté d'vn rationel, &c. Ce n 95. 10.
qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 86. PROP. 110. cix. civ.

Si vne superficie Rationelle est retranchee d'vne Mediale, il se faict deux autres Irrationelles, sçauoir, ou vn Residu Medial premier, ou vne ligne faisant auec vn espace Rationel, vn tout Medial.

C'eſt à dire, que la ligne pouuant le reſte de l'eſpace, eſt reſidu medial premier, ou ligne faiſant auec vn rationel, vn tout medial.

Du medial AD, ſoit retranché le rationel CD. Ie dis que la ligne pouuant l'eſpace reſtant AB, peut eſtre, ou reſidu medial premier, ou ligne faiſant auec vn eſpace rationel vn tout medial. Soit faicte la meſme conſtruction qu'auparauant. D'autant que EI egal au medial AD, eſt medial, [p] Ek ſera rationelle incommenſurable en longitude à EF. p 23. 10.



Et d'autant que HI, egal au rationel CD, eſt rationel: [q] HK ſera rat. com, en longitude à EF: Donc Hk eſtant commenſurable en longitude à EF: mais Ek incommenſurable en longitude à la meſme EF: [r] Hk Ek ſeront incommenſurables en longitude, & ſont rationelles. Elles ſont donc rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement: [ſ] Donc le reſte EH eſt reſidu, & hk conuenable à icelle: donc Ek, peut plus que Hk, du qu. d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, ou incommenſurable, ſi commenſurable, & la conuenable Hk eſtant monſtree commenſurable en longitude à EF rationelle, par la definition EH ſera reſidu ſecond. Donc la ligne pouuant l'eſpace EG, contenu ſous EF rationelle, & EH reſidu ſecond, c'eſt à dire AB egal à iceluy, [t] eſt reſidu medial premier. Mais ſi Ek peut plus que hk, q 21. 10. r 13. 10. ſ 74. 10. t 73. 10.

du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle, la conuenable Hk eſtant monſtree commenſurable en longitude à EF rationelle: EH ſera reſidu cinquieſme par la definition. Donc la ligne pouuant l'eſpace EG, contenu ſous EF ratio. & le reſidu cinquieſme EH, c'eſt à dire AB, egal à iceluy, " eſt la ligne, qui auec vn u 96. 10.
rationel, faict vn tout medial. Donc vn eſpace, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 87. PROP. III. cx. cv.

Si vne ſuperficie Mediale eſt retranchee d'vne ſuperficie Mediale, incommenſurable à la toute : il ſe faict deux autres Irrationelles : ſçauoir vn reſidu Medial ſecond, ou vne ligne faiſant auec vne ſuperficie Mediale, vn tout Medial.

C'eſt à dire, que la ligne pouuant le reſte de l'eſpace, eſt reſidu medial ſecond; ou ligne faiſant auec vn eſpace medial, vn tout medial. Voyez la figure precedente.

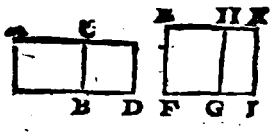
Soit le medial CD, oſté du medial AD, & incommenſ. au tout AD, Ie dis que la ligne pouuant l'eſpace reſtant AB, eſt reſidu medial ſecond; ou ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale, vn tout medial.

Car ayant faict la meſme conſtruction qu'auparauant, d'autant que EI, HI egaux aux me-

x 23. 10. diaux AD, CD sont mediaux, x Ek, Hk seront rationelles incommensurables en longitude à EF, & AD, CD, c'est à dire EI, HI, estans posez incommensurables: y Ek, Hk ayans mesme raison seront incommensurables en longitude, & sont ra-

y 10. 10,

z 74. 10. tionelles: donc elles sont rationelles commensurables en puissance seulement: z partant EH restante est residu, & Hk est conuenable à icelle. Donc Ek peut plus que Hk, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, ou incommensurable.



Si du q. d'vne l. qui luy soit commensurable en longitude, l'vne & l'autre Ek, Hk, estant monstree n'estre commensurable en longitude à EF rationelle, selon la definition EH sera residu troisiesme. Parquoy la ligne pouuant l'espace EG,

94. 10. contenu sous la rationelle EF, & le residu troisiesme EH, c'est à dire AB, egal à iceluy, est residu medial second. Mais si Ek peut plus que Hk, du qu. d'vne ligne incommensur. en longitude à icelle, l'vne ny l'autre Ek, Hk n'estant commens. en longit. à EF rationelle, comme il est demonstré par la def. EH sera residu sixiesme: Donc la ligne pou-

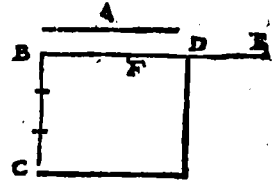
97. 10. uant EG, contenu sous EF rationelle, & EH residu sixiesme; c'est à dire, AB egal à iceluy, est celle laquelle auec vn espace medial, faict vn tout medial. Partant vne superficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 88. PROPO. 112. cxj. cvj.

La ligne appellee Apotome ou Resídu, n'eſt pas la meſme que la ligne de deux noms ou Binome.

Soit A, residu quelconque. Ie dis que A n'eſt pas la meſme que le binome.

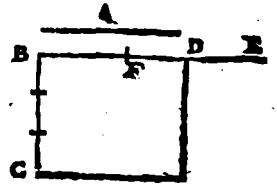
Car ſoit A binome, s'il eſt poſſible, & ayant expoſé la rationelle BC, a ſoit appliqué à BC, le rectangle CD, egal au quarré de A. D'autant donc que A eſt reſidu, b la latitude BD ſera reſidu premier. Soit donc DE conuenable à icelle: donc par la definition du reſidu premier, BE, DE ſeront rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, & BE pourra plus que DE, du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſurable en longitude, & BE ſera commenſurable en longitude à BC rationelle. a 45. 1. b 98. 10.



Derechef, A eſtant auſſi poſee eſtre binome, la meſme latitude B D ſera binome premier. Soit BF ſon plus grand nom. donc par la definition du binome premier BF, FD ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, & BF, pourra plus que FD, du quarré d'vne ligne commenſurable en longitude à icelle, & BF ſera commenſurable en longitude à la rationelle BC. Donc tant BE, que BF, eſtans com- c 61. 10.

d 12.10. mensurables en longitude à BC: [d] BE, BF seront aussi commensurables en longitude entr'elles. Parquoy la toute B E estant commeusurable en longitude à sa partie BF, la mesme BE sera aussi commensurable en longitude à l'autre partie FE: & partant B E estant rationelle, FE sera aussi rationelle.

Cor. 16. 10.



Et d'autant que des deux BE, FE, commẽsurables en longitude, B E est incommensurable en longitude à DE; (BE, DE estant rationelles commen-

e 14.10. surables en puissance seulement,) [e] la restante FE sera incommensurable en longitude à la mesme DE. Mais tant FE que DE est monstree rationelle: Donc FE, DE sont rationelles commensurables en puissance seulement: parquoy la restante FD,

f 74.10. [f] est residu, & partant irratio. mais elle est aussi monstree rationelle. Ce qui est absurde. Donc A estant residu, n'est pas la mesme que binome, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Des choses demonstrees l'on pourra colliger, que le residu, & les autres irrationelles suyuantes icelle residu, ne sont ny mediales, ny mesmes entr'elles.

g 23.10. Car le quarré d'vne mediale appliqué à vne rationelle, [g] fait la latitude rationelle, incommens. en long. à la rationelle proposee.

Mais le quarré du reſidu, appliqué à vne ligne rationelle, [h] faict la latitude, reſidu premier. h 98.10.

Et le quarré du reſidu medial premier, appliqué à vne ligne rationelle, [i] faict la latitude, reſidu ſecond. i 99.10.

Mais le quarré du reſidu medial ſecond, appliqué à vne ligne rationelle, [k] faict la latitude, reſidu troiſieſme. k 100. 10.

En apres, le quarré de la mineure, appliqué à vne ligne rationelle, [l] faict la latitude, reſidu quatrieſme. l 101.10.

Mais le quarré d'vne ligne, laquelle auec vn eſpace rationel, faict vn tout medial, appliqué à vne ligne rationelle, [m] fait la latitude, reſidu cinquieſme. m 102.10.

Finalement, le quarré d'vne ligne, qui auec vn eſpace medial, faict vn tout medial, [n] appliqué à vne ligne rationelle, faict la latitude, reſidu ſixieſme. n 103.10.

Partant, ces latitudes eſtans differentes de la latitude de la mediale, & entr'elles; de la latitude mediale (diſ je) puis que celle-cy eſt rationelle, & celles-là irrationelles: Mais entr'elles; d'autant tant qu'elles ne ſont pas reſidus de meſme ordre: il eſt manifeſte, que le reſidu & les autres irrationelles ſuyuantes, different entr'elles, & de la mediale.

Mais d'autant qu'il eſt monſtré en ce Theoreme, que le reſidu n'eſt la meſme que le binome: Et que les quarrez du reſidu, & des autres 5. irrationelles ſuyuantes appliquees à vne ligne rationelle, ſont les latitudes, reſidu premier, ſecond, troiſieſme, quatrieſme, cinquieſme & ſixieſme:

Mais les quarrez du binome & des autres 5. irrationelles ſuyuantes, appliquez à vne ligne rationelle, font les latitudes binome 1.2.3.4.5.& 6. Il eſt manifeſte, que les latitudes du reſidu, & des autres 5. irrationelles ſuyuantes, ne ſont pas les meſmes que les latitudes, des binomes, & des 5. autres irrationelles ſuyuantes: d'autant qu'aucun reſidu n'eſt la meſme que quelque binome. Donc le reſidu & les ſuyuantes different du binome & de ſes ſuyuantes. Parquoy, tant celles-là, que celles-cy, different de la mediale: De ſorte que quelconque ligne rationelle eſtant propoſee, il y aura 13. lignes irrationelles differentes entr'elles, deſquelles nous auons diſcouru iuſques icy, qui ſont les ſuyuantes.

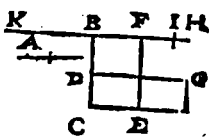
1. La ligne Mediale.
2. La ligne Binome ou de deux noms.
3. La Bimediale premiere.
4. La Bimediale ſeconde.
5. La ligne Majeure.
6. La ligne pouuant vn Rationel & vn Medial.
7. La ligne pouuant deux Mediaux.
8. Le reſidu ou apotome.
9. Le reſidu Medial premier.
10. Le reſidu Medial ſecond.
11. La ligne Mineure.
12. La ligne faiſant auec vne ſuperficie Rationelle vn tout Medial.
13. La ligne faiſant auec vne ſuperficie Mediale, vn tout Medial.

THEOREME 89. PROPO. 113. cxij. c.

Le quarré d'vne ligne Rationelle eſtant appliqué à vne ligne Binome, faict la latitude reſidu, de laquelle les noms ſont commenſurables, & proportionaux aux noms du Binome, & en outre le reſidu eſt de meſme ordre que le Binome.

Soit A rationelle, & BC binome, dont le plus grand nom eſt BD: ° & à BC ſoit appliqué le rectangle BE egal au qu. de A, faiſant BF latitude. Ie dis que BF eſt reſidu, de laquelle les noms, c'eſt à dire la ligne totale & ſa conuenable ſont commenſurables aux noms BD, DC, de BC binome, & en meſme raiſon: & d'auantage B F reſidu, eſt de meſme ordre que B C binome. o 45. 1.

Car p derechef, à DC moindre nom, ſoit appliqué CG egal au quarré de A, & partant à BE, faiſant DG latitude, & ſoit BH, egale à DG. Et B E, CG eſtans egaux, comme BC ſera à DC, ainſi DG, ou ſon egale B H, à B F. Et en diuiſant, comme BD à DC, ainſi HF à FB: mais BD eſt plus grande que D C: Donc HF ſera plus grande que FB. Soit poſee FI, egale à FB: Et ſoit comme HI à IF, ainſi FB, à BK: Donc en compoſant HF, ſera à IF, p 45. 1. 14. ou 16. 6. 12. 6.



ou à ſon egale FB, comme FK à BK. Mais comme HF à BF, ainſi BD eſt monſtree à DC. Donc auſſi comme BD ſera à DC, ainſi Fk à Bk. Mais BD, DC (noms du binome BC) ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement: [q] Donc Fk, Bk ſont commenſurables en puiſſance ſeulement.

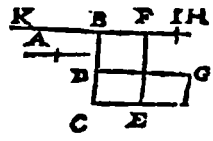
q 19. 10.

[r] Derechef, HF, eſtant à BF, comme Fk à Bk: [r] les antecedentes HF, Fk enſemble, ſçauoir Hk toute, ſera à FB, BK conſequentes: c'eſt à dire, à FK toute, comme FK, à Bk: partant Fk eſt moyenne proportionelle entre Hk, BK. [f] Donc comme Hk premiere, à BK 3. ainſi le quarré de Hk 1. au q. de Fk 2.

r 12. 5.

f Cor. 20. 6

Mais d'autant que CG rationel (eſtant egal au quarré de A rationelle, [t] appliqué à DC rationelle, [t] faict la latitude DG rationelle commenſurable en longitude à DC; HB egale à DG, ſera auſſi rationelle commenſurable en longitude à DC. Et eſtant monſtré que comme BD à DC, ainſi Fk eſt à Bk. Mais comme FK à Bk, ainſi Hk à Fk; auſſi comme BD ſera à DC, ainſi Hk, à Fk: [v] Donc comme le quarré de BD, au quarré de DC, ainſi le quarré de Hk, au quarré de Fk. Mais le quarré de BD, eſt commenſurable au quarré de DC; (BD, DC, noms de BC binome, eſtans rationelles commenſurables en puiſſance) [x] Donc le quarré de Hk ſera auſſi commenſurable au quarré de Fk Mais comme le quarré de Hk, au quarré de Fk, ainſi Hk à Bk; [y] donc Hk eſt



t 21. 10.

v 22. 6.

x 10. 10.

y 10. 10.

eſt commenſurable en longitude à Bk. [a] Et partãt au reſte BH : Mais BH eſt monſtree rationelle: donc HK commenſurable à icelle eſt rationelle: Et partant Bk commenſurable à HK, eſt rationel. Donc Fk eſtant monſtree commenſurable en puiſſance ſeulemẽt à BK; FK ſera auſſi rationelle: donc FK, Bk eſtans ratio. & monſtrees commenſurables en puiſſance ſeulement. [a] Le reſte BF ſera reſidu, & BK ſera conuenable à icelle. Ce qui eſt premierement propoſé. [a] Corol. 16. 10. [a] 74. 10.

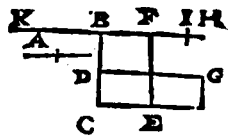
Mais d'autant que la toute HK eſt monſtree commenſurable en longitude à ſa partie BK, [b] BK, BH ſeront commenſurables en longitude: donc BH eſtant monſtree commenſurable en longitude à DC, BK ſera auſſi commenſurable en longitude à DC, comme il appert par la 11. Propoſition du 10. [b] 16. 10.

Et eſtant monſtré que comme BD, à DC, ainſi Fk, à BK, & en permutant comme BD à FK, ainſi DC à BK; mais DC, Bκ ſont monſtrees commenſurables en longitude: Donc BD, Fκ ſeront auſſi commenſurables en longitude: donc Fk eſtãt commenſurable en longitude à BD, & BK à DC; Fκ, Bκ noms du reſidu, BF ſeront commenſurables en longitude à BD, DC, noms de BC binome. Ce qui eſt 2. propoſé. [c] 10. 10.

Item, eſtant demonſtré que comme BD eſt à DC, ainſi Fκ, à Bκ: Fκ, Bκ, noms du reſidu, ſeront en meſme raiſon que BD, DC, noms de BC, binomie. Ce qui eſt tiercement propoſé.

Finalement, BD peut plus que DC, du quarré d'vne ligne commenſurable en longitude à icelle, ou incommenſurable. Si elle peut plus du

quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle, B D estant à D C, comme E K à B K, [d] F K pourra aussi plus que B K, du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longit. Et si B D peut plus que D C, du quarré d'vne ligne incommensurable en longitude à icelle, [e] F K pourra plus que B K, du quarré d'vne ligne incommensurable en longit. à icelle. Et si B D est commens. en longitude à la rationelle exposee, F K monstree commensurable en longitude à B D, sera aussi commensurable en longitude à la mesme rationelle, comme il appert par la 12. Proposition 10. Mais si D C est commensurable en longitude à la rationelle, B k, par la mesme raison sera commensurable en longitude à la mesme ration. Et finalement, si B D, ny D C n'est commensurable en longitude à la rationelle, [f] F k, ny B k ne sera aussi commensurable en longitude à la rationelle proposee. Donc B F residu, est de mesme ordre que B C binome, comme il appert par les secondes & troisiesmes definitions. Ce qui est quartement proposé. Partant la quarré d'vne ligne rationelle appliqué, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



d 15. 10.

e 15. 10.

f 14. 10.

SCHOLIE.

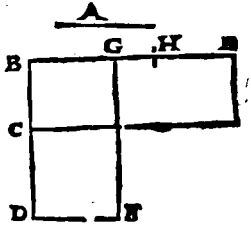
L'on pourra aussi, sans aucune difficulté, appliquer cecy aux nombres, entendant ce qui a esté dit cy-deuant.

THEOREME 90. PROPOSIT. 114. cxiij.

Le quarré d'vne ligne Rationelle appliqué à vn reſidu, faict la latitude binome, dont les noms ſont commenſurables aux noms du reſidu, & en meſme raiſon: & en outre le binome eſt de meſme ordre que le reſidu.

Soit A rationelle, & BC reſidu, à laquelle conuienne CD, [e] & à BC, ſoit appliqué le rectangle CE, egal au quarré de A, faiſant la latitude BE. Ie dis que BE eſt binome, dont les noms ſont commenſurables à BD, CD, noms du reſidu BC, & en meſme raiſon, & BE binome, de meſme ordre que BC reſidu e 43. 1. g

Car ſoit auſſi appliqué à B D totale, le rectangle BF, egal au quarré de A, c'eſt à dire à CE, faiſant B G latitude. D'autant que BF, CE, ſont egaux, [h] comme BE ſera à BG, ainſi BD à BC. & par conuerſion de raiſon, comme BE à GE, ainſi BD à CD.



h 14. ou 16. 6.

Soit auſſi coupee EG [i] à H, ſelon la raiſon de B E, à GE, afin que EH ſoit à HG, comme BE à G E. Mais comme BE toute, à GE toute, ainſi EH retranchee de BE, à HG, retranchee de GE: BH,

i 10. 6.

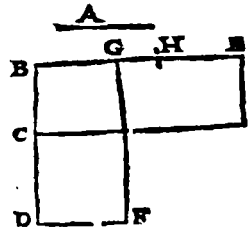
reſte de BE, ſera auſſi à HE, reſte de GE, comme la toute BE, à la toute GE.

Mais comme BE eſtoit à GE, ainſi EH, à HG; donc auſſi comme BH, ſera à HE, ainſi EH, à GH: partant HE eſt moyenne proportionelle entre BH, GH: parquoy comme BH, premiere, à GH troiſieſme, ainſi le quarré de BH premiere, au quarré de HE ſeconde: mais comme BD à CD, ainſi BE à GE: c'eſt à dire BH, à HE: Et BD, CD, noms du reſidu BC, eſtans rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, BH, HE, ſont auſſi commenſurables en puiſſance, & partant les quarrez de BH, HE commenſurables. Donc BH, GH, eſtans en meſme raiſon que les quarrez de BH, HE, comme il eſt demonſtré, ſont commenſurables en longitude. Et la toute BH eſtant commenſurable en longitude à ſa partie GH, elle ſera auſſi commenſurable en *longitude* à l'autre partie BG.

k Cor. 20. 6.

l 10. 10.

m Cor. 16. 10.



Mais BD eſtant rationelle, ſçauoir plus grand nom du reſidu BC, & le rectangle BF rationel, eſtant egal au quarré de A rationelle, ſa latitude BG ſera rationelle commenſurable en *longitude* à BD. Donc BH eſt commenſurable en longitude à la meſme rationelle BD. Et partant eſt rationelle, BH, BG eſtans monſtrees commenſurables en longitude.

n 21. 10.

o 12. 10.

Et puis que BH, HE ſont monſtrees commen-

surables en puissance seulement, & B E rationelle, HE commensurable à icelle, est aussi rationelle. Donc BH, HE, sont rationelles commens. en puissance seulement: [p] donc B E est binome. Ce qui est premier. p 37. 10.

Mais estant monstré que BH, est à HE, comme BD à CD, & en changeant BH à B D, comme HE, à C D, mais BH estant monstree commensurable en longitude à B D: [q] H E sera aussi commensurable en longit. à CD, parquoy BH, HE, noms de BE binome, sont commens. en long. à BD, CD, noms du residu BC. Ce qui est secondement proposé. q 10. 10.

Ils sont aussi en mesme raison, estant demonstré que BH est à HE, comme BD à CD. Ce qui est 3. proposé.

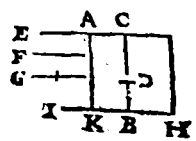
Finalement, ou BD, peut plus que CD, du q. d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude, ou incommensurable: si commensurable, B H pourra aussi plus que H E, du quarré d'vne ligne qui luy sera commensurable en longitude: & si incommensurable, elle pourra plus du q. d'vne ligne qui luy sera incommensurable en longitude: & si BD est commensurable en longitude à la rationelle exposee, [r] BH le sera aussi, estant commensurable en longitude à B D commensurable en longitude à la rationelle. Mais si CD est commensurable en longitude à la rationelle: HE par la mesme raison, le sera aussi. Si l'vne ny l'autre BD, CD, n'est commensurable en longitude à la rationelle, aussi [t] BH, ny HE, ne luy sera commensurable en longitude. Donc par les secondes & troisiesmes definitions, B E est binome de mesme ordre que BC, residu. Ce 15. 10. r 12. 10. t 14. 10.

qui estoit quatriesmement proposé. Donc le quarré d'vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

cxvj. THEOREME 91. PROP. 115.

Si vn espace est contenu sous vn residu, & sous vne ligne appellee Binome, de laquelle les noms sont commensurables aux noms du residu, & en mesme raison; la ligne droicte pouuant iceluy espace est Rationelle.

Soit l'espace AB, contenu sous A C residu, & sous CB binome, dont les noms CD, DB sont commensurables aux noms CE, AE, du residu A C, & en mesme raison, sçauoir CD à DB, comme CE à AE: & que F puisse l'espace AB. Ie dis que F est rationelle.



Car ayant exposé la rationelle G, [c] soit appliqué à CB binome, le rectangle C H, egal au quarré de G: [v] donc la latitude BH sera residu. Dõt les noms HI, BI sont commensurables en longitude aux noms CD, DB, & en mesme raison, sçauoir HI, à BI, comme CD à DB; & partant, comme C E à A E: & en permutant comme la toute HI, à la toute CE: ainsi la retranchee BI, à la retranchee AE: [x] Donc la restante BH, sera la restante AC, com-

[c] 45. 1.
[v] 113. 10.
[x] 19. 5.

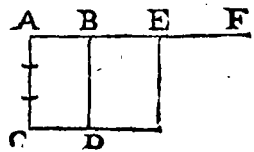
me la toute HI, à la toute CE. [1] Mais HI, est commensurable en longitude à CE; taut HI, que CE estant commensurable en longitude à CD. [2] z10. 10. Donc BH est commensurable en longitude à AC: & partant HC est commensurable à BA: HC estant à BA, comme HB à AC. Mais HC estant egal au quarré de la rationelle G, est rationel. Donc BA commensurable à iceluy, sera rationel. Partant, F pouuant iceluy, sera rationelle. Donc si vn espace est contenu sous vn residu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'vn espace rationel peut estre contenu sous deux lignes irrationelles: Car AB, contenu sous AC, CB, residu & binome, qui sont irrationelles, est monstré rationel.

THEOREME 92. PROP. 116. cxv. cxvij.

De la ligne Mediale se font infinies Irrationelles, & aucune n'est la mesme que quelqu'vne des antecedentes.



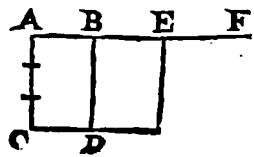
Soit AB mediale. Ie dis que d'icelle sont faictes infinies irrationelles, aucune desquelles n'est la mesme que quelqu'vne des 13. antecedentes, dont est fait mention. Cor. 11. 10.

Car la rationelle AC eſtant propoſee, ſoit l'eſpace AD, contenu ſous AB mediale, & AC rationelle. [a] Donc AD, contenu ſous AC rationelle, & AB irrationelle, eſt irrationel. Soit BE pouuant iceluy eſpace AD: [b] BE ſera irrationelle. Ie dis que BE n'eſt aucune des 13. [c] deuant dites.

a *Lem.* 8. 10.
b 11. d.
c Co. 112. 10.

Car puis que le quarré de la mediale appliqué à AC rationelle, [d] faict la latitude rationelle, incommenſurable en longitude à AC, & les quarrez des autres 12. Irrationelles, appliquez à AC rationel. font les latitudes, ou binomes, ou reſidus, comme il appert par les Propoſitions 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 101. 102. & 103. de ce liure.

d 23. 10.



Mais le quarré de cette irrationelle BE, appliqué à la meſme rationelle AC, faict la latitude, AB mediale. Il eſt manifeſte que BE irrationelle, differe de toutes ces 13. Puis que ſon quarré appliqué à vne ligne rationelle, faict la latitude differente des latitudes faictes par les quarrez de ces 13. lignes, appliquez à la meſme rationelle. Que ſi on accomplit le rectangle DE, contenu ſous BD rationelle, & BE irrationelle, [e] iceluy ſera irrationel. *Soit donc* EF pouuant iceluy, [f] *qui ſera irrationelle.*

e *Lem.* 38. 10.
f 11. d.

Ie dis derechef, que EF n'eſt meſme qu'aucune des 13. ſuſdictes, ny meſme auſſi que BE; ce qui eſt manifeſte, puis que le quarré de EF, appliqué à la rationelle, faict la latitude BE. Mais les quarrez d'icelles 13. & auſſi le quarré de BE, appli-

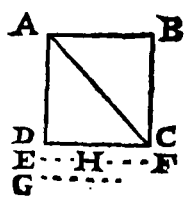
quez à la meſme rationelle, ſont les latitudes differentes à BE, comme il eſt demonſtré. Semblablement, on trouuera infinies autres irrationelles differentes entr'elles, & des ſuſdictes. Partant, de la mediale ſe font infinies irrationelles. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit AC 2. & AB racine qq. 2. AD rectangle, ſera racine qq. 32. Donc BE pouuant iceluy, ſera racine qqq. 32. parquoy le rectangle DE ſera racine qqq. 512. & EF racine qqqq. 512. & ainſi de ſuitte infiniment.

THEOREME 93. PROP. 117. cxviij. vij.

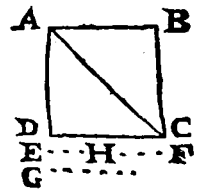
Qu'il nous ſoit propoſé de monſtrer, qu'aux figures quarrees, le diametre eſt incommenſurable en longitude au coſté.



Soit le quarré AB CD, dont le diametre eſt AC. Ie dis que AC diametre, eſt incommenſurable en long. au coſté AB.

Car autrement, il ſeroit commenſ. en longit. à AB: & partant AC, AB ſeroient entr'eux comme nombre à nombre. Soit AC, à AB, comme le nombre EF, au nombre G. Et ſoient EF & G, les plus petits de leur raiſon. Donc AC eſtant à AB, comme EF à G, le quarré de AC, g 5. 10.

sera aussi au q. de AB, comme le nõbre q. de EF au
k 20. 6. nombre q de G: [h] (car les qq. estans en raison
doublee de leurs costez, & les costez ayans egales
11. 8. raisons, les raisons des quarrez seront aussi egales,
47. 1. estans doublees d'egales raisons.) Mais le quarré de AC est double, du quarré de AB: (AB, BC estans egaux.) Donc le quarré du nombre EF, sera double du q. du nombre G. Et partant le q de EF ayant vne moitié, & se pouuant donc diuiser en 2. egalement, sera pair par la defi-
29. 9. nition. Donc EF qui le produit sera aussi pair: (car s'il estoit impair, & se multipliant soy-mesme, il produit son q. iceluy q. seroit aussi impair, puis qu'vn nombre impair multipliant vn nomb. impair, produit vn nombre impair, ce qui est absurde, car il est monstré pair:) Mais EF & G estãs
24. 7. les plus petits de leur raison, sont premiers entr'eux: & EF estant monstré pair, G sera impair: (car s'il estoit aussi pair, le binaire mesureroit EF & G, & partant ne seroient premiers entr'eux: ce qui est absurde.) Maintenant soit diuisé



11. 8. le nomb. pair EF en 2. egalement à H. D'autant donc que EF est double de EH, & les qq. sont *en* raison doublee de leurs costez, le q. de EF sera quadruple du q. de EH. (Car la proportion quadruple est doublee de la proportion double, comme il appert par ces nombres 4. 2. 1.) partant le q. de EF estant double du q. de G, & quadruple du q. de EH, le q. de EF est de quatre telles parties egales, que le q. de G en est 2. & le q. de EH 1. Donc le q. de G est

double du q.de EH, eſtant comme 2.à 1, Et partant comme il a eſté dict du nombre EF, le qu. de G ayant vne moitié ſera pair, & iceluy G auſſi pair. Mais il eſt auſſi monſtré impair: ce qui eſt abſurde. Donc le diametre AC n'eſt commenſurable en longitude au coſté AB Partant incommenſurable en longitude.

Autrement, s'il eſt poſſible, ſoit le diametre AC commenſ. en longit. au coſté AB: & que AC, AB ſoient entr'eux comme les nombres EF & G, qui ſoient les plus petits de leur raiſon; & partant premiers entr'eux. Donc G ne ſera l'vnité: (car le q. de AC eſtant double du q. de AB: & comme le q. de AC au q. de AB, ainſi le q. du nombre EF, au q. du nombre G, comme il eſt dict en la premiere demonſtration, le q. de EF ſera auſſi double du q. de G. Si donc G eſt l'vnité, & partant ſon q. auſſi l'vnité, le q. de EF ſera binaire: ce qui eſt abſurde) partant nombre.

Et d'autant que comme il eſt deſia monſtré, le q. de EF eſtant double du q. de G, le q. de G meſurera le q. de EF: & partant G coſté, meſurera EF coſté. Donc G meſurant auſſi ſoy-meſme, EF & G, ſeront composés entr'eux, ayans G pour commune meſure: mais ils ſont auſſi premiers entr'eux: ce qui eſt abſurde. Donc le diametre AC n'eſt commenſ. en longit. au coſté AB. Partant nous auons monſtré qu'aux figures quarrees le diametre eſt incommenſurable en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. 14. 8.

(·.·) (·.·) (·.·)

SCHOLIE.

Cette propoſition ſe peut auſſi ainſi demonſtrer.

47. 1. *Le quarré de AC, eſtant double du quarré de AB, & vne grandeur double d'vne autre, eſtant à cette autre comme 2. à 1. ou 4. à 2. &c. le quarré de AC, ſera au quarré de AB, com-*
Corol. 24. *me 2. à 1. ou 4. à 2. &c. qui n'eſt comme nombre*
8. *quarré à nombre quarré: parquoy le diametre A*
9. 10. *C, & le coſté AB, ſont incommenſ. en long. Donc, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

Soit AB 1. AC ſera racine quarree 2. Donc
47. 1. *la raiſon du coſté du quarré au diametre ſera comme 1. à 2. ſçauoir incommenſurable en longitude.*

FIN DV DIXIESME LIVRE des Elements d'Euclide.

LIVRE VNZIESME

DES ELEMENTS D'EVCLIDE,

Et le premier des Solides.

DEFINITIONS.

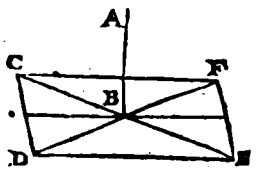
1. SOLIDE, eſt ce qui a longueur, largeur & profondeur.

2. Mais les termes du ſolide ſont ſuperficies.

3. Vne ligne droicte eſt eſleuee à angles droicts ſur vn plan, quand elle faict angles droicts, auec toutes les lignes droictes qui la touchent, au meſme plan propoſé.

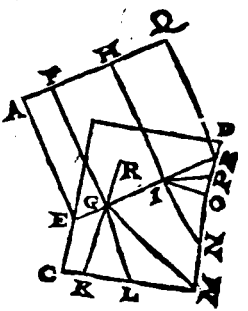
Soit la ligne droicte AB, eſleuee ſur le plan CD EF, & du poinct B ſoient menees tant de lignes

que l'on voudra au meſme plan; B C, B D, B E, B F, faiſans les angles C B A, D B A, E B A, F B A, droits: nous dirons que la ligne droicte A B eſt perpendiculaire, ou eſleuee à angles droicts, au plan propoſé.



4. Vn plan eſt eſleué perpendiculairement ſur vn plan, quand toutes les lignes menees ſur l'vn d'iceux plans à angles droicts, à la ligne de commune ſection, ſont à angles droicts à l'autre plan.

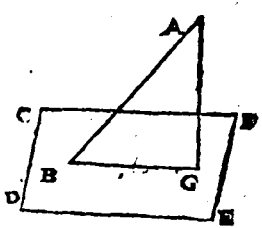
Soit le plan A B, droict eſleué ſur le plan C D, en ſorte que la ligne A Q ſoit en l'air, & ſoit B E leur commune ſection, & en icelle pris les poincts G & I, & menees G F, I K, perpendiculaires à E B commune ſection: ſi F G, H I, ſont perpendiculaires à l'autre plan C D: c'eſt à dire, ſi elles ſont angles droicts, auecque G K, G L, G M, I N,



IO, IP, &c. le plan AB, ſera à angles droicts au plan, CD n'eſtant encliné de part ny d'autre.

Car KG eſtant prolongee à R, & l'angle FGK eſtant poſé droict, FGR ſera droict auſſi: & ainſi des autres, &c. Parquoy le plan AB, ſera à angles droicts au plan CD. Et quand vn plan eſt à angles droicts à quelqu'autre, auſſi les lignes perpendiculaires menees en l'vn d'iceux à la commune ſection, ſeront auſſi perpendiculaires à l'autre plan.

5. L'inclination d'vne ligne droicte à vn plan, eſt l'angle contenu ſous icelle, & vne autre ligne droicte menee au plan de l'inclinante, par le poinct auquel tombe vne ligne droicte perpendiculaire, menee du ſommet de l'inclinante ſur iceluy plan.



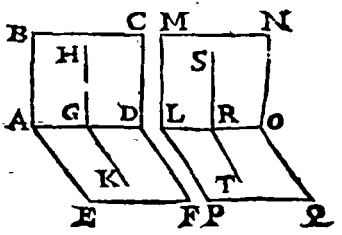
Soit la ligne droicte AB, inclinee au plan CDEF, & du poinct du sõmet A, ſoit menee vne ligne perpendiculaire, ſçauoir AG, & ſoit conioincte BG, l'angle agu ABG, ſera l'inclination de la ligne AB, au plan CDEF.

6. L'inclination d'vn plan à vn autre eſt l'angle agu, contenu ſous les lignes droictes menees ſur l'vn & l'autre plan à angles droicts à la ligne de commune ſection, & à vn poinct d'icelle, leſquelles ne ſont point perpendiculaires entr'elles.

Voyez la figure ſuyuante.

Soient 2. plans inclinez l'vn ſur l'autre A B C D, E A D F, dont la commune ſection eſt A D, & en icelle ayant pris quelconque poinct G, & d'iceluy mené les droictes lignes G H, G K, en l'vn & l'autre plan à angles droicts, à A D; l'angle H G K ſera l'inclination du plan A C, au plan A D E F.

7. Vn plan eſt dict eſtre ſemblablement incliné à vn plan, & vn autre à vn autre, quand les angles ſuſdicts des inclinations ſont egaux entr'eux.



Soient deux plás A B C D, E A D F, inclinez entr'eux; & deux autres L M N O, P L O Q, auſſi inclinez l'vn à l'autre; & que les angles d'inclination H G K, S R T, ſoient

d'inclination HGK, SRT, soient egaux, l'inclination du plan AC, au plan AF, sera dite semblable à l'inclination du plan LN, au plan LQ.

SCHOLIE.

Le Copiste a mis ainsi cette definition: Vn plan est dict estre semblablement incliné à vn plan, lors que les susdicts angles d'inclination sont egaux entr'eux, *laissant ces mots d'Euclide:* καὶ ἑτέρου πρὸς ἑτέρου, *&c. c'est à dire,* & vn autre à vn autre. *Ce qu'il ne deuoit faire, attendu que l'inclination de deux plans n'est pas dite semblable, qu'entant qu'elle est comparee à l'inclination de deux autres.*

8. Plans paralleles, sont ceux lesquels ne se rencontrent point, estans prolongez.

9. Semblables figures solides, sont celles-là lesquelles sont contenuës sous semblables plans, egaux en nombre.

10. Egales & semblables figures solides, sont celles qui sont contenuës de plans semblables, egaux en multitude & grandeur.

11. Angle solide, est la rencontre de plus de deux lignes droictes, se touchantes à vn poinct, & n'estant en vne mes-

me superficie, se faisant inclination à toutes les lignes.

AVTREMENT.

Angle solide, est celuy qui est contenu sous plus de 2. angles plans, se rencontrans à vn mesme poinct, & n'estans en vne mesme superficie.

12. Pyramide est vne figure solide, contenuë de plusieurs plans, se rencontrans ou terminans à vn mesme poinct, estans menez d'vn autre plan, qui est pour la base de la Pyramide.

13. Prisme est vne figure solide contenuë de plans, deux desquels, qui sont opposez, sont egaux, semblables & paralleles, mais les autres sont parallelogrammes.

14. Sphere est vne figure contenuë quand vn demy cercle est mené à l'entour d'vn diametre demeurant fixe, iusques à ce qu'il soit posé derechef, où il a commencé de mouuoir.

C'est à dire, que la Sphere est vne figure solide, contenuë de la superficie descrite, par la reuolution d'vn demy cercle, mené à l'entour d'vn diametre, fixe ou immobile, iusques à ce qu'il soit

retourné au poinct où il a commencé son mouuement.

SCHOLIE.

Le Copiſte a mis ainſi cette definition, qui eſtoit deſia traduite de meſme:. Sphere eſt vne figure cõtenuë par le demy-cercle, lors que ſon diametre, &c. *Ce qui eſt fort mal traduit, puis que le demy-cercle eſt vne figure plane, qui ne contient aucun corps ſolide, comme eſt la Sphere, & ce qui ne correſpond auſſi au texte d'Euclide, qui eſt tel.* Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθὲν, τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ περιενεχθὲν σχῆμα. C'eſt à dire, la Sphere eſt vne figure *ſolide*, cõtenuë *de la ſuperficie deſcrite*, lors qu'vn demy-cercle eſt mené à l'entour d'vn diametre, demeurant immobile iuſques à ce qu'il ſoit reſtitué, ou reuienne derechef où il a commencé de mouuoir.

Et quiconque entendra bien les definitions precedentes, & la ſuitte du diſcours d'Euclide, trouuera qu'il le faut ainſi traduire, & qu'Euclide meſme l'entend ainſi, &c.

15. Laxe de la Sphere, eſt la ligne droite fixe, à l'entour de laquelle ſe meut ou tourne le demy-cercle.

16. Mais le centre de la Sphere eſt le meſme que celuy du demy-cercle.

17. Le Diametre de la Sphere eſt vne ligne droicte menee par le centre, & ſe terminant de part & d'autre en la ſuperficie de la Sphere.

18. Cone eſt la figure qui eſt contenuë, quand l'vn des coſtez qui contiennent l'angle droict d'vn triangle rectangle demeurant fixe, le triangle eſt mené à l'entour, iuſques à ce qu'il retourne au lieu où il a commencé de mouuoir, Et ſi la ligne droicte immobile eſt egale à l'autre coſté, qui eſt meu à l'entour de l'angle droict, le Cone ſera rectangle; ſi elle eſt moindre il ſera Amblygone; & ſi elle eſt plus grande, il ſera Oxygone.

C'eſt à dire, le Cone eſt vn ſolide, contenu ſous la ſuperficie, deſcrite par vn triangle rectangle, quand iceluy triangle eſt mené à l'entour de l'vn des coſtez qui contiennent l'angle droict, iceluy coſté demeurant fixe, iuſques à ce que ledit triangle ſoit reuenu où il a commencé ſon mouuement.

19. L'axe du Cone, eſt la ligne droicte immobile, à l'entour de laquelle tourne ou ſe meut le triangle.

20. Mais la baſe du Cone, eſt le cercle deſcrit par l'autre coſté, mené à l'entour.

Sçauoir par l'autre des deux qui contiennent l'angle droict.

21. Cylindre eſt la figure qui eſt contenuë, quand l'vn des coſtez d'vn parallelogramme rectangle, de ceux qui ſont autour d'vn angle droict, demeurant immobile, le parallelogramme eſt mené à l'entour, iuſques à ce qu'il ſoit conſtitué derechef où il a commencé de mouuoir.

C'eſt à dire, le Cylindre eſt vn ſolide contenu ſous la ſuperficie deſcrite, par la reuolution d'vn parallelogramme rectangle, mené à l'entour de l'vn des coſtez qui contiennent vn angle droict, iceluy coſté demeurant fixé, iuſques à ce qu'il ſoit reuenu où il a commencé ſon mouuement.

22. L'axe du Cylindre, eſt la ligne droicte immobile, à l'entour de laquelle eſt mené le parallelogramme.

23. Mais les baſes du Cylindre ſont les cercles deſcrits des deux coſtez oppoſez, menez à l'entour.

24. Cones & Cylindres ſemblables, ſont ceux, deſquels les axes & les diametres des baſes ont meſme proportion entr'eux.

25. Le Cube eſt vne figure ſolide contenuë ſous ſix quarrez egaux.

26. Le Tetraedre eſt vne figure ſolide contenuë ſous quatre triangles egaux & equilateres.

27. L'Octaedre eſt vne figure ſolide, contenuë ſous huict triangles egaux & equilateres.

28. Le Dodecaedre eſt vne figure ſolide, contenuë ſous douze pentagones egaux, equilateres & equiangles.

29. L'Icoſaedre eſt vne figure ſolide, contenuë ſous vingt triangles egaux & equilateres.

30. Parallelipipede eſt vne figure ſolide, contenuë ſous ſix figures quadrilateres, deſquelles les oppoſees ſont paralleles.

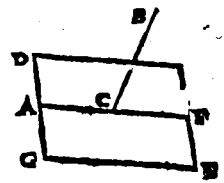
31. Vne figure ſolide eſt dite eſtre inſcrite en vne figure ſolide, quand tous les angles de la figure inſcrite ſont conſtituez, ou aux angles, ou aux coſtez, ou finalement aux plans de la figure, en laquelle elle eſt inſcrite.

32. Reciproquement, vne figure solide est dite estre circonscrite à vne figure solide, quand les angles ou les costez, ou finalement les plans de la figure circonscrite, touchent tous les angles de la figure, à l'entour de laquelle elle est descrite.

THEOREME 1. PROP. 1.

Vne partie d'vne ligne droicte ne peut estre en vn plan proposé, & vne partie en l'air.

Car soit la ligne droicte AB, vne partie de laquelle, sçauoir AC, soit sur le plan DE, & l'autre partie CB soit en l'air, s'il est possible, & soit menee C F.



D'autant donc que AC, partie de AB, ligne droite est posee sur le plan DE, & l'autre partie CB demeure en l'air, la partie du plan DE, sçauoir de C à F, sera plus basse ou plus deprimee que l'autre partie, sçauoir de A à C: partant, la superficie DE, ne sera pas contenuë egalement entre ses lignes. Ce [a] qui est absurde, estant posée DE superficie plane. Donc vne ligne droite n'aura pas vne partie sur vn plan, & l'autre en l'air, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [a] 7.d.1.

Autrement, soit, s'il est possible, vne partie de la

ligne droicte AB, ſçauoir AC, ſur le plan propoſé
14.1. DE, & l'autre partie CB en l'air. Donc au plan DE, il y aura quelque ligne droicte, poſee directement à AC, comme CF. Parquoy les deux li-
b10. c.f.1. gnes droictes AB, AF, ont vn commun ſegment AC: [b] Ce qui eſt abſurde. Donc vne partie d'vne ligne droicte n'eſt pas ſur vn plan, & l'autre en l'air. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

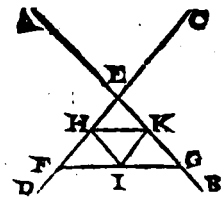
C'eſt icy la commune demonſtration de tous les Interpretes, en laquelle AB eſtant poſee ligne droicte, l'aduerſaire pourra touſiours nier, & à bon droict, que la partie AC, puiſſe eſtre directement prolongee à autre poinct qu'à B. Parquoy l'on ſera contrainct de ſe ſeruir de la definition du plan, comme nous auons faict en noſtre demonſtration.

Le Copiſte dit, que AB, ne ſeroit pas ligne droicte, ſans en donner aucune raiſon.

THEOREME 2. PROP. 2.

Si deux lignes droictes ſe coupent l'vne l'autre, elles ſont en vn meſme plan. Et tout triangle eſt en vn meſme plan.

Que AB, CD, ſe coupent l'vne l'autre à E: & en EB, ED, ayant pris les poincts F & G, comme l'on voudra, ſoit menee FG, pour faire le triangle EFG. Ie dis que le triangle EFG eſt en vn meſme plan. Item, que AB, CD, ſont auſſi en vn meſme plan.



Car si quelque partie du triangle EFG, sçauoir EH IG, est en vn plan, & quelque partie, sçauoir la restante FHI est en l'air; ou au contraire, EH, GI, parties de EF, GF, seront aussi en vn plan: Mais les autres parties HF, IF, seront en l'air; ou au contraire, [c] ce qui est demonstré impossible. Que si EFIK, partie du mesme triangle, est dite estre en vn mesme plan: mais l'autre partie GIK en l'air, ou au contraire, par la mesme raison EK, FI, parties de EGFG, seront en vn plan: mais les parties KG, IG seront en l'air, ou au contraire. [c] I. H.

Finalement, si FHKG, partie du mesme triangle est accordee estre en vn plan; & l'autre partie EHK en l'air, ou au contraire FH, GK parties de FE, GE, seront aussi en vn mesme plan, & les autres parties HE, KE, en l'air, ou au contraire: ce qui est absurde, [d] comme il est demonstré. Partant, le triangle EFG est en vn mesme plan, & ainsi de tout autre triangle. [d] I. II.

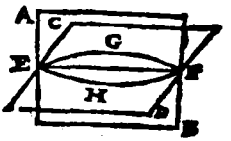
Mais d'autant que EF, EG, costez du triangle EFG, sont au mesme plan qu'iceluy: [e] Mais CD, AB totales, sont au mesme plan que EF, EG: donc AB, CD seront en vn mesme plan, sçauoir en celuy auquel nous auons demonstré estre le triangle EFG. Donc si deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [e] I. II.

(·.·) (·.·) (·.·)

THEOREME 3. PROP. 3.

Si deux plans se coupent l'vn l'autre, la commune section d'iceux est vne ligne droicte.

Que les plans AB, CD, se coupent l'vn l'autre, & soit EF, leur commune section. Ie dis que EF, est ligne droicte.



Car, s'il n'est ainsi, soit menee la droicte ligne EGF, au plan AB; & au plan CD, la droicte ligne EHF. Donc EGF, EHF, lignes droites ayans mesmes termes, E & F encloent vne superficie: [f] Ce qui est absurde. Donc EF commune section, sera ligne droicte. Partant si deux plans se coupent l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

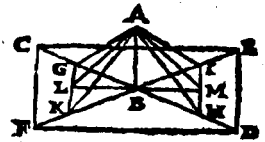
f 12.c.f. 1.

THEOREME 4. PROPO. 4.

Si deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre, & au poinct de leur commune section est menee vne autre ligne droicte à angles droicts, elle sera aussi à angles droicts sur le plan d'icelles.

Soit AB à angles droicts, sur CD, EF, menee du poinct de leur commune section. Ie dit que AB est aussi à angles droicts au plan ou sont menees CD, EF.

Car, puis qu'elles se coupent à B: [g] elles seront en vn mesme plan, qui soit CEDF. Soient prises BG, BH, egales entr'elles, & aussi BI, BK, & menees GK, IH, & au mesme plan soit menee par le poinct B; LM coupans GK, IH à L & M: & du poinct A en l'air, soient menees au mesme plan les lignes droictes A G, A L, A K, A H, A M, A I. g 2. 11.



D'autant donc que les costez BG, GK, du triangle BGK, sont egaux par la constr. à BH, BI, du triangle BHI: [h] & les angles GBK, HBI, contenus d'iceux, sont egaux au sommet B, [i] les bases G K, HI, seront egales entr'elles, & les angles BKG, BIH, egaux aussi entr'eux. h 15. 1. i 4. 1.

Derechef, KBL, IBM, estans egaux au sommet B, les deux angles kBL, BkL, du triangle BkL, seront egaux aux deux IBM, BIM, du triangle BIM, & les costez adjacens Bk, BI, sont aussi egaux par la construction: Donc les deux autres costez kL, LB, sont egaux aux deux autres IM, MB, chacun au sien. 15. 1.

Dauantage, les costez AB, BG, du triangle AB G, estans egaux à AB, BH, du triangle ABH, par la construction, & les angles contenus d'iceux ABG, ABH egaux, estans posez droicts: [k] les bases AG, AH seront egales: & par mesme discours AI, Ak egales. k 4. 1.

En apres, les costez AI, IH, du triangle AIH, estans egaux à Ak, kG, du triangle AkG, & les bases AH, AG, monstrees egales: [l] les angles AIH, l 8. 1.

AKG contenus d'iceux coſtez ; ſeront egaux. Partant les coſtez Ak, kL, eſtans egaux à AI, IM, & les angles AkL, AIM, contenus d'iceux, monſtrez egaux : [m] les baſes AL, AM, ſeront egales.

m 4. 1.

Finalement, les coſtez AB, BL, du triangle AB L, eſtans egaux à AB, BM, du triangle ABM : & les baſes AL, AM, monſtrees egales: [n] les angles ABL, ABM, contenus d'iceux coſtez, ſeront auſſi egaux & droicts [o] eſtans de ſuitte: Donc AB, faict angles droicts auec LM, [p] laquelle touche icelle à B, au plan propoſé.

n 8. 1.

o 10. d. 1.

d 3. d. 11.

Par meſme raiſon on monſtrera que AB, fait angles droicts auec toutes les lignes droictes qui la touchent au poinct B, au meſme plan. Et ainſi on pourra prendre ſur ledit plan tant de lignes qu'on voudra, qui feront angles droicts auec icelle, la rencontrant à B, par les raiſons que deſſus. Partant [q] AB, ſera à angles droicts au plan CEDF, mené par CD, EF. Donc ſi deux lignes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

3. d. 11.

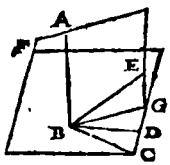
THEOREME 5. PROP. 5.

Si à trois lignes droictes ſe touchantes l'vne l'autre, vne autre ligne droicte eſt conſtituee à angles droicts au poinct de la commune ſection ; Icelles trois lignes droictes ſont en vn meſme plan.

Soit la ligne droicte AB à angles droicts, aux trois BC, BD, BE ſe touchantes à B, & menee du poinct B, qui eſt leur commune ſection. Ie

dis qu'icelles BC, BD, BE ſont en vn meſme plan.

Car [r] puis que deux, quelles que l'on voudra, ſont en vn meſme plan, puis qu'eſtans prolongees de la part de B, elles ſe couperont l'vne l'autre à B: ſoient BC, BD en vn meſme plan FC: &, s'il eſt poſſible, BE ne ſoit au meſme plan, mais eſleuee en l'air: [s] Mais AB, BE eſtans en vn meſme plan, puis qu'elles ſe coupent à B, ſoient toutes deux au plan AE. r 2. II. s 2. II.

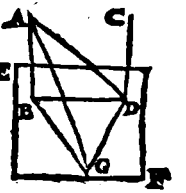


Et d'autant que les plans FC, AE, ſe rencontrent l'vn l'autre à B, eſtans prolongez ils ſe couperont neceſſairement. [t] Soit donc la ligne droicte BG, leur commune ſection: d'autant que AB eſt poſee à angles droicts à BC, BD: [u] elle ſera auſſi à angles droicts au plan FC, mené par icelles: [x] & partant ſera auſſi à angles droicts à BG, qui touche icelle à B. Parquoy les angles droicts ABE, ABG, eſtans au plan AG, mené par AB, BE, ſeront egaux entr'eux, la partie & le tout, ce qui eſt abſurde. Donc les 2. lignes BC, BD, eſtans en vn meſme plan FC; BE, ne ſera eſleuée en l'air: mais en meſme plan qu'icelles: Partant, ſi à trois lignes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. t 3. II. u 4. II. x 3. d. II.

THEOREME 6. PROPO. 6.

Si deux lignes droictes ſont à angles droicts, ſur vn meſme plan; Icelles lignes droictes ſeront paralleles.

Soient les deux lignes droictes AB, CD, à angles droicts, au plan EF, menees de B, & D. Ie dis qu'elles sont paralleles.



a 3. d. 11. Car ayant mené BD, au plan EF, [a] les angles ABD, CDB seront droicts: & au mesme plan EF, soit menee DG, perpendiculaire à BD; & soient posees AB, DG, egales & conioinctes, BG, GA, AD. D'autant donc que les costez AB, DD, du triangle BAD, sont egaux à GD, BD, du triangle GDB, par la construction, & les angles ABD, GDB, cõtenus d'iceux aussi egaux, estans droicts, les bases AD, GB seront egales.

b 4. I. Derechef, [b] les costez AB, BG, du triangle ABG,

c 8. I. estans egaux à GD, DA, du triangle GDA, & la

d 3. d. 11. base AG commune: [c] les angles ABG, GDA seront egaux: [d] mais ABG est droict: donc GDA sera droict. Et l'angle GDC estant droict, aussi GD sera

e 5. 11. à angles droicts aux trois BD, DA, DC. [e] Partant, DB, DA, DC seront en vn mesme plan, c'est à dire, CD sera au plan mené par DB, DA:

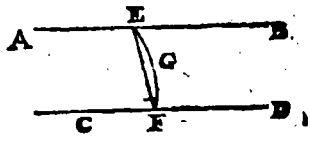
f 2. 11. [f] mais AB est au mesme plan que DB, DA. Donc CD, sera en mesme plan que AB: Parquoy les angles internes ABD, CDB estans droicts: AB, CD, seront paralleles: Donc si deux lignes droictes sont &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 7. PROP. 7.

S'il y a deux lignes droictes paralleles, en l'vne & l'autre desquelles soient pris

des poincts comme l'on voudra: La ligne droicte menee par iceux poincts, eſt en vn meſme plan que les paralleles.

Aux paralleles AB, CD, ſoient pris deux poincts comme l'on voudra, E & F, & ſoit menee EF conioignant iceux. Ie dis que EF eſt au meſme plan que AB, CD paralleles.



Car, ſi EF, n'eſt au meſme plan, ſoit en vn autre, & que cet autre coupe le plan des paralleles par E & F, & que la commune ſection d'iceux plans ſoit EGF, [g] qui ſera ligne droicte. Donc les deux lignes droictes EF, EGF, ayans meſmes termes, E & F encloront vn eſpace: ce qui eſt abſurde; Donc la droicte ligne EF, ne ſera hors le plan de AB, CD paralleles. Partant, s'il y a deux lignes droictes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [g] 11.

SCHOLIE.

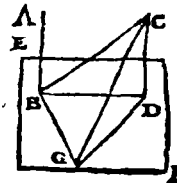
Cette propoſition eſt auſſi veritable, encore que AB, CD, ne ſoient paralleles, pourueu qu'elles ſoient en vn meſme plan, comme il appert par la demonſtration.

THEOREME 8. PROP. 8.

S'il y a deux lignes droictes paralleles, l'vne deſquelles ſoit à angles droicts à

quelque plan : l'autre ſera auſſi à angles droicts au meſme plan.

Soient AB, CD paralleles, & CD à angles droits au plan EF. Ie dis que AB eſt auſſi à angles droicts au plan EF.



Car eſtant menee BD, au plan EF : [h] l'angle CDB ſera droict : [i] mais les deux CDB, ABD ſont egaux à 2. droicts: donc ABD ſera droict. Maintenant ſoit menee BG, au plan EF perpendiculaire à BD : & ſoient poſees egales BG, CD, & conioinctes DG, GC, CB.

h 3. d. 11.
i 29. 1.

D'autant donc que les coſtez CD, DB, du triangle CDB, ſont egaux à GB, BD, du triangle GBD par la conſtruction. & les angles CDB, GDB, contenus d'iceux auſſi egaux, eſtans droicts : [k] les baſes CB GD ſeront egales.

k 4. 1.

Derechef, les coſtez CD, DG, du triangle CDG, eſtans egaux à GB, BC, du triangle GBC ; & la baſe CG commune : [l] les angles CDG, GBC, contenus deſdicts coſtez ſeront egaux: Mais [m] CDG eſt droict; donc GBC ſera auſſi droict. Parquoy GB ſera perpendiculaire à BD, BC ſe coupant l'vne l'autre à B, eſtans prolongees (puis qu'elles font angle à B :) Partant [n] ſera perpendiculaire au plan mené par BD, BC: mais AB eſt auſſi au meſme plan [o] de BD, BC, eſtant au meſme plan que AB, CD, paralleles; les poincts B, C, D, eſtans aux paralleles AB, CD; donc [p] GB ſera auſſi perpendiculaire à BA. Parquoy AB eſtant perpendiculaire à BG, BD ; AB

l 8. 1.
m 3. d. 11.
n 4. 11.
o 7. 11.
p 3. d. 11.
4. 11.

ſera

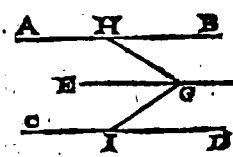
ſera auſſi perpendiculaire au plan mené par B G, BD, c'eſt à dire au plan EF: Donc s'il y a deux lignes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 9. PROPO. 9.

Les lignes droictes paralleles à vne meſme, n'eſtant en vn meſme plan qu'icelle : Icelles ſont auſſi paralleles entr'elles.

Soient AB, CD, paralleles à EF, n'eſtant en meſme plan que EF. Ie dis que AB, CD ſont auſſi paralleles entr'elles.

Car de quel poinct qu'on voudra, de EF, comme de G, ſoient menees deux perpendiculaires à EF, ſçauoir GH, au plan des paralleles AB, EF, & GI au plan des parall. CD, EF. Donc EG eſtant perpendiculaire à GH, GI ſe touchantes l'vne, l'autre à G, elle ſera auſſi perpendiculaire au plan mené par GH, GI. Parquoy AB, EF eſtans paralleles, & EF perpendiculaire au plan mené par GH, GI: AB ſera auſſi perpendiculaire au meſme plan. 8. 11.



4. 11.

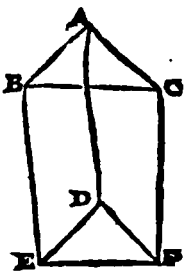
Semblablement, CD, EF eſtans paralleles, & EF perpendiculaire au plan mené par GH GI; CD ſera auſſi perpendiculaire au meſme plan. Donc AB, CD eſtans perpendiculaires au plan mené par GH, GI ſeront paralleles entr'elles. Par- 8. 11. 8. 11.

tant les lignes droictes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 10. PROP. 10.

Si deux lignes droictes ſe touchantes l'vne l'autre, ſont paralleles à deux lignes droictes ſe touchantes l'vne l'autre, & n'eſtans en vn meſme plan : Icelles contiendront angles egaux.

Soient AB, AC, s'entre-touchans à A, paralleles à DE, DF, s'entre-touchans à D; & AB, AC, ne ſoient en meſme plan que DE, DF. Ie dis que les angles BAC, EDF contenus d'icelles, ſont egaux.



Car ſoient poſees AB, DE, egales entr'elles, & auſſi AC, DF entr'elles ; & menees BC, EF, BE, AD, CF. Donc AB, DE eſtans egales & paralleles; [a] BE, AD ſeront auſſi egales & paralleles: par meſme raiſon CF, AD ſeront paralleles & egales. Parquoy BE, CF eſtans egales & paralleles à AD, [b] ſeront paralleles & egales entr'elles : [c] & partant BC, EF paralleles & egales entr'elles. Donc puiſque les coſtez AB, AC, du triangle BAC, ſont egaux à DE, DF, du triangle DEF, par la conſtruction, chacun au ſien, & la baſe BC, monſtree egale à la baſe EF: [d] les angles BAC, EDF ſeront egaux. Donc

a 33. 1.
b 9 11.
c 33. 1.
d 8. 1.

ſi deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

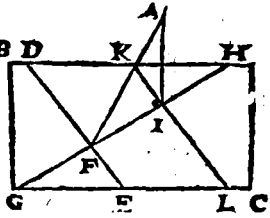
PROBLEME I. PROPO. II.

D'vn poinct donné en l'air, mener vne ligne droicte perpendiculaire ſur le plan qui eſt au deſſous.

Soit le poinct A en l'air, duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire ſur le plan BC. Soit menee DE, audict plan BC, comme l'on voudra, à [e] laquelle ſoit menee A F perpendiculaire : & au plan BC par F, ſoit menee GH, perpendiculaire à DE, [f] à laquelle de A, ſoit menee A I perpendiculaire. Ie dis que AI, eſt perpendiculaire audict plan BC.

e 12. 1.

f 11. 1.



Car [g] au plan BC, ſoit menee KL, parallele à DE par I: puis que D F eſt à angles droicts à F A, & à FH par la conſtruction ; & [h] partant perpendiculaire au plan mené par FA, FH ; [i] auſſi K I ſera perpendiculaire au plan mené par F A, F H. [k] Mais AI, eſtant au meſme plan que FA, FH, & touchant KI à I, l'angle KIA ſera droict : Partant AI ſera à angles droicts à KI, I F. Donc A I ſera perpendiculaire au plan BC : [l] Donc nous auons mené vne ligne perpendic du poinct A, en haut, au plan BC. Ce qu'il falloit faire.

g 31. 1.

h 4. 11.

i 8. 11.

k 2. 11.

3. d. 11.

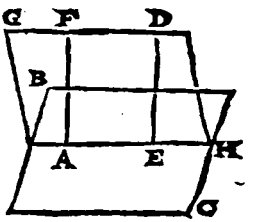
l 4. 11.

PROBLEME 2. PROP. 12.

A vn plan donné, & d'vn poinct donné en iceluy, mener vne ligne droicte, à angles droicts.

Soit le poinct donné A, au plan BC, duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire audict plan BC.

m 11. 11. De quelconque [m] poinct D, donné en haut, soit menee DE perpendiculaire, au plan BC. Que si elle tombe au poinct A, on a le requis. Mais si la poinct E tombe ailleurs, ayant mené vne ligne droicte par E & A, [n] soit menee AF, parallele à DE, au plan GH, mené par DE, EA. Ie dis que AF est perpendiculaire au plan donné BC. Car DE, AF, estans paralleles, & DE perpendiculaire au plan BC par la construction: [o] AF sera aussi perpendiculaire au mesme plan BC. Partant à vn plan donné, & d'vn poinct donné en iceluy, &c. Ce qu'il falloit faire.



n 31. 11.

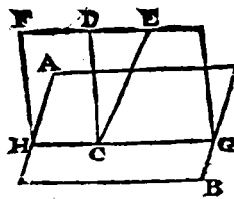
o 8. 1.

THEOREME 11. PROPO. 13.

A vn plan donné, d'vn mesme poinct donné en iceluy, l'on ne pourra pas me-

ner deux lignes droictes en l'air à angles droicts de meſme part.

Soit le plan donné AB. Ie dis que du poinct C donné en iceluy, l'on ne peut leuer deux perpendiculaires au plan AB, de meſme part.



Car, s'il eſt poſſible, ſoient menees deux perpendiculaires CD, CE, [q] au plan AB, & par CD, CE, qui ſont en vn meſme plan, ſoit mené le plan FG, coupãt le plã AB, par la ligne droicte GH. Donc EC, DC eſtans perpendiculaires au plan AB, [r] les angles ECG, DCG ſeront droicts, & partant egaux, la partie & le tout. Ce qui eſt abſurde. Donc à vn meſme plan donné, d'vn poinct, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

q 2. 11.

r 3.d.11.

THEOREME 12. PROPO. 14.

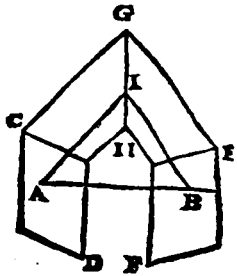
Les plans auſquels vne meſme ligne droicte eſt à angles droicts: Iceux ſont paralleles.

Soit la droicte ligne AB, à angles droicts, aux plans CD, EF. Ie dis que CD, EF, ſont plans paralleles.

Car s'il n'eſt ainſi, eſtans prolongez, ils ſe rencontreront l'vn l'autre. Que ce ſoit de la part de CE, & que GH, ſoit la ligne de leur commune ſection, [s] en laquelle ayant pris le poinct I, com-

s 3.11.

ment que ce soit ; soient menees les droictes lignes IA, IB, aux plans GCD, GEF.



D'autant donc que AB, est posee à angles droicts aux plans GCD, GEF, [t] les deux angles IAB, IBA, seront droicts au triangle ABI. [u] Mais ils sont moindres que deux droicts. Ce qui est absurde. Donc les plans CD, EF prolongez, ne se rencontrent iamais. Ils sont donc paralleles. Partant les plans ausquels, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

t 3. d.

u 17. 1.

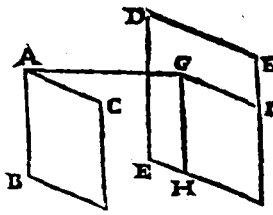
THEOREME 15. PROP. 15.

Si deux lignes droictes se touchantes l'vne l'autre, sont paralleles à deux autres lignes droictes se touchantes pareillement l'vne l'autre ; n'estant pas toutefois en vn mesme plan : Les plans, lesquels sont menez par icelles lignes, sont paralleles.

Soient deux lignes droictes AB, AC, se touchantes à A, paralleles aux 2. DE, DF, se touchantes à D, n'estans en vn mesme plan que les premieres. Ie dis que les plans BC, EF, menez par icelles, sont paralleles.

x 11. 11. Car du poinct A, [x] au plan EF, soit menee la

perpendiculaire AG, rencontrant le plan EF, au poinct G. Puis [y] du poinct G, soient menees GH, GI, au plan EF, parallelles à DE, DF. Donc AB, GH estans parallelles à DE: [z] icelles seront parallelles entr'elles: [a] & partant les angles BAG, AGH, sont egaux à 2. droicts: [b] Mais AGH est droict: donc BAG sera droict aussi. Semblablement, l'on conclura que l'angle CAG est droict. Partant GA, estant à angles droicts aux deux AB, AC, elle [c] sera aussi à angles droicts au plan BC, mené par AB, AC. Mais AG, est aussi à angles droicts au plan EF, par la construction. [d] Donc les plans BC, EF sont parallelles. Partant si deux lignes droictes se touchantes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



y 3. 11.

z 9. 11.

a 29. 1.

b 3. def.

c 4. 11.

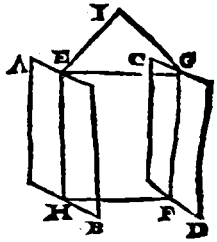
d 14. 11.

THEOREME 14. PROPOSIT. 16.

Si deux plans paralleles, sont coupez par quelqu'autre plan: les lignes de leurs communes sections seront paralleles.

Soient les plans paralleles AB, CD, coupez par le plan EF. Ie dis que leurs communes sections EH, GF, sont lignes paralleles. Car si elles ne sont paralleles, estans prolongees, elles se rencontreront l'vne l'autre, estans au plan coupant EF. Qu'elles se rencontrent donc au poinct I: d'au-

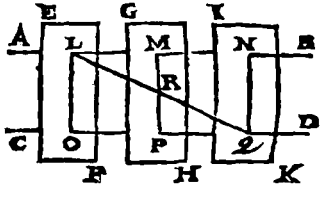
e 11. tant e doncques que toute la ligne droicte H EI, eſt en vn meſme plan, ſçauoir en AB prolongé: Semblablement, toute la ligne droicte FGI, eſt auſſi en vn'méme plã, ſçauoir en CD prolongé; les plans AB, CD, ſe rencontreront auſſi au poinct I, eſtans prolongez. Ce qui eſt abſurde, eſtans poſez paralleles. Donc EH, GF ſont paralleles. Partant, ſi deux plans paralleles ſont coupez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOREME 15. PROP. 17.

Si deux lignes droictes ſont coupees par des plans paralleles : Icelles ſeront coupees proportionellement.

Soient les lignes droictes AB, CD, coupees parles plans paralleles, EF, GH, IK aux poincts L; M. N, O, P, Q. Ie dis que AB, CD, ſont coupees proportionellement, c'eſt à dire, que les ſegmens d'icelles, cõpris entre iceux plans ſont proport. ſçauoir, comme LM. à MN, ainſi OP, à PQ.



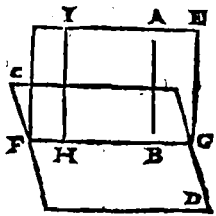
Car ſoient menees les droictes lignes LO,

NQ, aux plans EF, IK, & ſoit conioincte LQ rencontrant le plan GH, au poinct R, duquel aux poincts M, P, ſoient menees RM, RP, au meſme plan GH: [f] le triangle LNQ, ſera en vn meſme plan: Semblablement LOQ, auſſi en vn meſme plan. f 2. 11.

Mais d'autant que les plans paralleles GH, IK ſont couppez par le plan du triangle LNQ, [g] leurs communes ſectiõs, ſçauoir les lignes MR, NQ ſerõt paral. par meſme raiſon RP, LO, ſeront paralleles. [h] Partant, comme LR ſera à RQ, ainſi LM, à MN. Semblablement, comme LR, à RQ, ainſi OP, à PQ: Donc comme LM, à MN, ainſi OP, à PQ. Donc ſi deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. g 16. 11. h 2. 6. 11. 5.

THEOREME 16. PROP. 18.

Si vne ligne droicte, eſt à angles droits à quelque plan: Tous les plans menez par icelle, ſeront auſſi à angles droicts au meſme plan.



Soit la ligne AB, à angles droicts, au plan CD. Ie dis que tous les plans menez par AB, ſont à angles droicts au meſme plan CD.

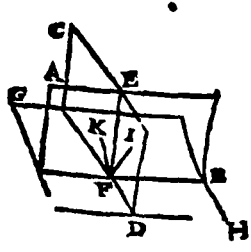
Car par AB, ſoit mené le plan EF, couppant le plan CD, par la ligne droicte FG. Et ayant pris le poinct H, comment

i 31. 1. que ce ſoit, en FG; i ſoit menee HI, au plan EF, parallele à AB. Donc AB, IH, eſtans paralleles, & A
k 8. 11. B poſee à angles droicts au plan CD: k IH ſera
l 3. def. auſſi à angles droicts au meſme plan CD: l partant perpendiculaire à la commune ſection FG: Par meſme raiſon, toutes les lignes qui ſont menees paralleles à AB, au plan EF, ſeront à angles droicts au plan CD: & partant perpendiculaires à
m 4. d. la commune ſection FG. m Donc le plan EF, ſera à angles droicts au plan CD.

Par les meſmes raiſons, on monſtrera que tous les autres plans menez par AB, ſont à angles droicts au plan CD. Donc ſi vne ligne droicte eſt à angles droicts à quelque plan, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 17. PROP. 19.

Si deux plans s'entrecouppans, ſont à angles droicts à quelque plan; leur ligne de commune ſection ſera auſſi à angles droicts au meſme plan.



Soient les deux plans AB, CD, ſe couppans l'vn l'autre, par la ligne droicte EF, à angles droits au plan GH, Ie dis que EF, ligne de leur commune ſection, eſt auſſi à angles droicts au meſme plan GH.

Car, ou EF est à angles droicts à BF, DF, communes sections des plans AB, CD, auec le plan GH, ou non. Que si EF, est à angles droicts à BF, DF, [a] elle le sera aussi au plan GH, mené par icelles. a 4. 11.
Mais si EF, est dite estre à angles droicts à l'vne ou l'autre BF, DF, tant seulement, qu'elle le soit à BF. D'autant donc que le plan AB, est posé à angles droicts au plan GH: [o] la ligne EF, (laquelle au plan AB, est menee perpendiculaire à BF, commune section d'iceluy auec le plan GH) sera à angles droits au plan GH. L'on conclura le mesme, si EF, est concedee à angles droicts à DF: car lors EF sera perpendiculaire au plan GH, estant posee perpendiculaire à DF, commune section du plan CD, auec le plan GH, & menee au plan CD, qui est à angles droicts au plan GH. o 4. def. 4. def.

Finalement, si EF, n'est à angles droicts à BF, ny à DF; soit menee du poinct F, au plan AB, la ligne FI, perpendiculaire à BF commune section, auec le plan GH: semblablement au plan CD, soit menee Fk, perpendiculaire à DF, commune section d'iceluy, auec le plan GH. 11. 1.

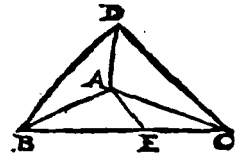
D'autant donc que le plan AB, est posé à angles droicts au plan GH, [p] la ligne IF, (laquelle est menee au plan AB, perpendiculaire à BF, commune section d'iceluy, auec le plan GH,) sera à angles droicts au plan GH. Par mesme raison KF, sera à angles droicts, au mesme plan GH. Partant du poinct F, au plan GH, sont menees deux perpendiculaires: [q] ce qui est absurde. Parquoy EF, sera à angles droicts au plan GH. Donc si deux plans s'entre-ouppans, sont à angles droicts à quelque plan, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. P 4. d. q 13. 11.

THEOREME 18. PROP. 20.

Si vn angle ſolide eſt contenu de trois angles plans: Deux d'iceux, pris de quelque façon que ce ſoit, ſont plus grands que le troiſieſme.

Soit l'angle ſolide A, contenu de trois angles plans BAC, CAD, DAB. Ie dis que deux, leſquels que l'on voudra, ſont plus grands que l'autre.

Car ſoit, s'il eſt poſſible, l'vn d'iceux, comme
r 23. 1. BAC, plus grand que les deux autres BAD, DAC, & au plan mené par AB, AC, [r] ſoit faict l'angle BAE, egal à l'angle BAD, & la droicte ligne AE, egale à AD. Puis du meſme plan mené par E, ſoit menee BC, couppant AB, AC, à B & C, & menees



BD, DC. D'autant donc que les coſtez AD, AB, du triangle BAD, ſont egaux aux coſtez AE, AB, du triangle BAE, chacun au ſien, & les angles
f 4. 1. 20. 1 contenus d'iceux auſſi egaux par la conſtruction, [f] les baſes BD, BE, ſeront egales.

Mais d'autant que les coſtez DB, DC, ſont plus grands que le coſté BC, ſi l'on retranche les lignes droictes egales BD, BE, demeurera CD, plus grande que CE. Puis donc que les coſtez AD, AC, du triangle DAC, ſont egaux aux coſtez AE, AC, du triangle EAC, chacun au ſien; & la

base CD, plus grande que la base CE, l'angle CAD, sera plus grand que l'angle CAE. Adiouſtant donc les angles egaux, BAD, BAE, les deux angles CAD, BAD, ſeront plus grands que les deux CAE, BAE: c'eſt à dire, que l'angle total BAC, qui eſtoit poſé le plus grand de tous. Partant deux, leſquels que l'on voudra, ſont beaucoup plus grands que l'autre. Donc ſi vn angle ſolide, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. t 25. 1.

S'il eſt dict egal, il aduiendra la meſme abſurdité.

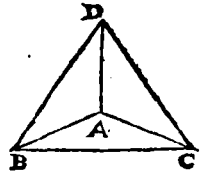
THEOREME 19. PROP. 21.

Tout angle ſolide eſt contenu ſous des angles plans, leſquels ſont plus petits que quatre ang les plans droicts.

C'eſt à dire, que tous les angles plans, ſous leſquels eſt contenu quelconque angle ſolide, ſont moindres que quatre droicts.

Soit l'angle ſolide A, contenu ſous trois angles plans BAC, BAD, DAC. Ie dis que ces trois angles ſont moindres que quatre droicts.

Car, ayant mené les lignes droictes BC, CD, DB, l'on aura conſtitué trois angles ſolides, B, C, D, chacun deſquels eſt cõtenu ſous trois angles plãs, ſçauoir B ſous CBA, ABD, DBC. Mais C, ſous BCA, ACD, DCB: Et D, ſous CDA, ADB, & BDC.



v 20. 11. [v]Mais les deux angles CBA, ABD, eſtans plus grands que l'angle CBD. Et ſemblablement, les deux BCA, ACD, plus grands que BCD, & les deux CDA, ADB, ſont plus grands que CDB: les ſix angles; CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, ſont plus grands que les trois angles, CBD, BCD, CDB.

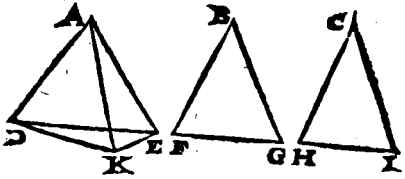
x 32. 1. [x]Mais ces trois ſont egaux à deux droicts: donc ces ſix, ſont plus grands que deux droicts. Donc puis que ces ſix là, auec les trois au poinct A, ſont egaux à ſix droicts, à cauſe des trois angles

y 32. 1. BAC, CAD, DAB; [y] (Car les trois angles de tout triangle, ſont egaux à deux droicts:) ſi l'on oſte ces ſix là, qui ſont plus grands que deux droicts; les trois qui conſtituent l'angle ſolide A, demeureront moindres que quatre droicts. Donc tout angle ſolide, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 20. PROP. 22.

S'il y a trois angles plans, deux deſquels, pris comme l'on voudra, ſont plus grands que l'autre: mais qu'iceux ſoient contenus de lignes droictes egales; il ſe peut faire, que des lignes droictes conioignantes icelles lignes egales, l'on conſtituera vn triangle.

Soient trois angles plans A, B, C, contenus de lignes droictes egales, AD, AE, BF, BG, CH, GI, deux deſquels, pris comme l'on voudra, ſont plus grands que le troiſieſme. Ie dis que des trois



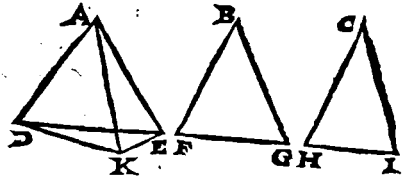
lignes droictes, D E, FG', HI, qui conioignent icelles lignes egales, l'on peut constituer vn triangle: c'est à dire, que des trois DE, FG, HI, deux telles qu'on voudra, sont plus grandes que l'autre; [c] car cela estant, l'on constituera facilement vn triangle. [c] 22. 1.

Si les trois angles A, B, C, sont egaux, [a] les bases DE, FG, HI, sont egales: partant, deux telles qu'on voudra d'icelles plus grandes que la troisiesme: Mais si 2. angles sont seulement egaux, & le troisiesme moindre, [b] deux bases seront seulement egales, & [c] la base du 3. moindre que chacune des autres: partãt, derechefles 2. qu'elles qu'on voudra, sont plus grandes que l'autre. Que si l'vn d'iceux angles, comme A, est plus grand, soit que les 2. autres B & C, soient egaux ou non: [d] la base DE, sera aussi plus grande de toutes. Parquoy DE, FG, seront plus grands que HI: & DE, HI, plus grandes que FG. Ie dis maintenant que FG, HI, sont plus grandes que DE. [a] 4. 1. [b] 4. 1. [c] 24. 1. [d] 24. 1.

[e] Car soit faict l'angle DAK, egal à l'angle B, & soit posee Ak, egale à AD: donc le poinct K, tombera au dessous de DE; d'autant que la circonference du cercle descrit à l'internalle A D, du centre A, passe par les poincts D, K, E, à cause de l'egalité des lignes, AD, Ak, AE: puis soient con- [e] 23. 1.

ioinctes DK, & KE. D'autant donc que les deux angles B & C, ſont poſez plus grands que l'angle DAE, & B, eſt egal à l'angle DAK, par la conſtr. l'angle C, ſera plus grand que l'autre angle kAE, & d'autant que les coſtez AD, Ak, du triangle ADk, ſont egaux aux coſtez BF, BG, du triangle BFG: & les angles contenus d'iceux, DAk, & B, ſont egaux: f la baſe Dk, ſera egale à la baſe FG. Dere-

f 4. 1.



chef, puis que les coſtez CH, CI, du triangle CHI, ſont egaux aux coſtez Ak, AE, du triangle AkE; & l'angle C, monſtré plus grand que l'angle kAE, g la baſe HI, ſera plus grande que la baſe kE, Partant, puis que Dk eſt monſtree egale à FG; FG, HI, ſeront plus grandes que Dk, kE: mais Dk, kE, ſont plus grandes que DE: donc FG, HI, ſeront encore plus grandes que DE. Ce qui eſt propoſé.

g 24. 1.

20. 1.

THEOREME 21. PROP. 23.

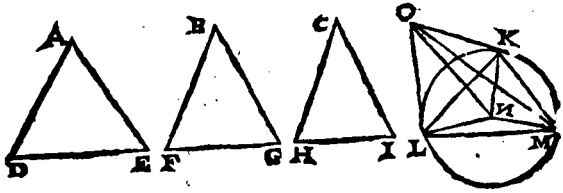
1.

Conſtituer vn angle ſolide *de trois* angles plans, deux deſquels, *pris* comme l'on voudra, ſont plus grands que l'autre: Mais *il faut* que ces trois angles ſoient plus petits que quatre droicts.

Soient les trois angles plans A, B, C, plus petits

tits que quatre droicts, desquels deux pris comme l'on voudra, soient plus grands que l'autre : il faut faire vn angle solide de 3. angles plans, egaux aux 3. A, B, C.

Soient les 6. lignes AD, AE, BF, BG, CH, CI, posees egales, contenans lesdits angles A, B, C, soustenus des bases DE, FG, HI : & pouuant faire vn triangle de DE, FG. HI, soit faict le triangle LMK, ayant les trois costez egaux à DE, FG, HI : à l'entour duquel [b] soit descrit le cercle 22. 11. [c] 22. 11.



KML : & du centre N, soient menees NM, NL, NK : [i] & ayant mené en l'air NO perpendiculaire [k] & retranchee, telle que son quarré, auec le quarré de NL, soient egaux au quarré d'vn des costez desdicts angles plans, & soient menees LO, KO, MO. Ie dis que LMOk, est angle solide, contenu de trois angles plans, egaux à A, B, C. [i] 5. 4. [k] 12. 11. Léme 14. 10.

Car, NL, NM, Nk estans egales; & NO perpendiculaire à icelles; LO, MO, kO, seront egales, [l] pouuant autant l'vne que l'autre. Et d'autant qu'elles peuuent autant que l'vn des costez des angles plans donnez, elles seront egales aux costez d'iceux angles plans; les bases LM, Mk, kL estans egales aux bases des angles donnez, [m] les trois angles au poinct O, seront egaux aux 3. dõnez A, B, C. [l] 47. 1. [m] 8. 1.

SCHOLIE.

Si on obiecte que NO, perpendiculaire, ne peut touſiours eſtre retrãchee, en ſorte que ſon quarré, auec le quarré de NL, ſoient egaux au quarré de l'vn des coſtez des triangles donnez; comme ſi iceluy coſté eſtoit egal ou plus petit que NL. Ie reſponds que cela n'arriue point; non pas ſeulement qu'il ſoit egal à NL, car ſi LN, & NM eſtoient egaux à AD, AE, & la baſe ML, egale à la baſe DE, (& ainſi des autres triangles) [n 8. 1.] les 3. angles au poinct N ſeroient egaux aux trois A, B, C: Ce qui eſt manifeſtement faux: les trois angles A, B, C, eſtans poſez plus petits que quatre droicts, [Co. 15, 1.] & les trois au poinct N, eſtans egaux à quatre droicts.

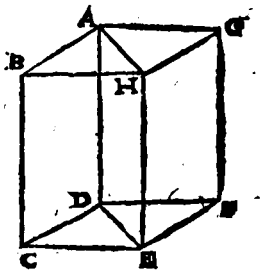
THEOREME 21. PROP. 24.

Si vn ſolide eſt contenu ſous des plans paralleles, les plans oppoſez d'iceluy, ſont parallelogrammes ſemblables & egaux.

Soit le ſolide parallelipipede ABCD, contenu (ſelon la 30. definition, de ſix figures quadrilateres) AC, CF, FH, HA, AF, BE, dont les oppoſees ſont paral. Ie dis que tous ces plans oppoſez deux à deux, ſont parallelogrammes ſemblables & egaux.

Car, puis que les plans paralleles BG, CF, ſont [q 16. 11.] couppez par le plan AC, [p] leurs communes ſe-

ctions AB, CD, seront paralleles. Semblablement les plãs paralleles AF, BE, estans couppez par le plan AC, leurs communes sections AD, BC, seront aussi paralleles: donc la figure quadrilatere ABCD, est parallelogramme. Ainsi l'on monstrera que les autres figures quadrilateres sont parallelogrammes. Ie dis maintenant que les parallelogrammes opposez, sont semblables & egaux.



Car puis que AB, BH, sont paralleles à DC, CE, & non en vn mesme plan, mais en plãs opposez, [q] les angles ABH, DCE, seront egaux. Par mesme raison les autres angles du parallelogramme BG, seront egaux aux autres du parallelogramme CF. [r] q 10. 11. r 34. 1.

Mais d'autant que AB, est egale à DC, au parallelogramme AC, & BH, egale à CE, au parallelogramme BE, comme AB sera à BH, ainsi DC, à CE, &c. Et partant, comme BH, à HG, ainsi CE, à EF, & pour la mesme raison, les costez des parallelogrammes BG, CF, à l'entour des angles egaux, seront proportionaux, parquoy iceux parallelogrammes seront semblables.

Maintenant ayant mené les diametres AH, DE, [s] puis que les costez AB, BH, du triangle ABH, sont egaux à DC CE, du triangle DCE: [t] & l'angle ABH, egal à DCE, comme il est monstré, [u] les triangles ABH, DEC, sont egaux entr'eux. [x] Doc les triangles ABH, DCE, estans moitiez des pa- s 34. 1. t 10. 11. u 4. 1. x 34. 1.

rallelogrammes BG, CF, ils seront egaux entr'eux

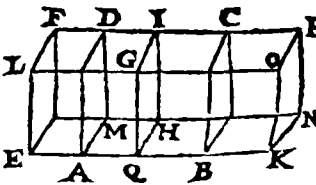
Semblablement, nous demonstrerons que les parallelogrammes oppoſez, AC, GE, & AF, BE, sont semblables & egaux entr'eux. Donc si vn solide est contenu sous les plans paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 28. PROP. 25.

Si vn solide parallelipipede est coupé par vn plan parallele, aux plans oppoſez, comme la baſe sera à la baſe, ainſi le solide sera au solide.

Soit ABCD, solide parallelipipede, coupé par le plã IQ, parallele à AD, BC, plans oppoſez. Ie dis que le solide AI, sera au *solide IB*, comme la baſe AH, à la baſe HB.

Car AB estant prolongee vers E & K, soit poſee AE, egale à AQ, & BK à BQ & acheuez les parallelogrammes EM, BN, & les solides AF, PB. Donc AE, AQ, estãs egales, [y] EM, MQ, parallelogrammes, seront egaux, [z] & LD, DG, plans oppoſez, egaux & semblables. Et ainſi AL, AG, semblables & egaux à MF, MI, qui sont plans oppoſez, & ainſi des autres.



y 1. 6.

z 24. 11.

Et le ſolide AF, eſt egal au ſolide AI, & le ſolide BI, au ſolide BP: parquoy le ſolide EI, eſt autant multiple du ſolide AI, que la baſe EH, de la baſe AH: & QP ſolide, autant multiple de CQ ſolide, que la baſe QN, de la baſe BH. Donc de meſme façon que EH, ſera plus grande, egale, ou moindre que AH, ainſi EI ſolide, ſera plus grand, egal, ou moindre que le ſolide AI. 9. d. 11.

Item, de meſme façon la baſe QN, ſera plus grãde, egale ou moindre que HB, ainſi le ſolide QP ſera plus grand, egal ou moindre, que le ſolide QC.

Soient donc quatre grandeurs AH, HB, baſes, & HI, QC ſolides, (dont de la premiere & troiſieſme, à ſçauoir de AH baſe, & AI ſolide,) on a pris les equimultiples EH baſe, & IE ſolide, Et auſſi de la 2. & 4 (ſçauoir de BH baſe, & BQ ſolide) les equimultiples QN, PQ baſe & ſolide; leſquels ſont monſtrez plus grands, egaux ou moindres en quelconque multiplication qu'on les prenne. Donc, comme la baſe AH, à la baſe HB, ainſi le ſolide AI, au ſolide CQ. Partant ſi vn ſolide parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. b b 6. d. 5.

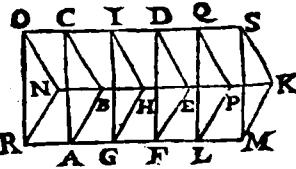
SCHOLIE.

Cette Propoſition conuient à tous Priſmes. Car quelconque Priſme eſtant couppé par vn plan parallele aux oppoſez, comme la baſe ſera à la baſe, ainſi le ſolide au ſolide. Soit le priſme ABCDEF. dont les plans oppoſez ſont les triangles ABC, DEF, couppez par GHI, plan parallele aux oppoſez.

Ie dis, que comme la baſe AI, à IF baſe, ainſi le

ſolide AGHICB, au ſolide GFEDIA. Car ſoit prolongé le priſme ABCDEF, de coſté & d'autre, tant qu'il ſera beſoin, & de AF prolongee, priſe AR, egale à GA; et FL, LM, egales à FG: & par R, L, M, ſoient entendus les plans RNO, LPQ, MKS, paralleles à ABC, GHI, FED.

Donc les plans ABC, GHJ, eſtans couppez par AJ: [c] *AC, GI, communes ſections d'iceux, ſeront paralleles: & AD eſtant parallelogramme, AG, CJ, ſont auſſi paralleles: parquoy AI eſt parallelogramme, & ſemblablement AH, CH, parallelogrammes. Et AC, AB, coſtez du triangle ABC, eſtãs egaux à GJ, GH, du triangle GJH,* [d] *(AC eſtant egal à GJ, & AB à GH:) les angles BAC, HGI, ſont egaux, (AB, AC, eſtans parallel. à GH, IG, non en meſme plan,) les triangles ABC, GHI, ſont equiangles & egaux entr'eux:* [e] *Et auront les coſtez autour des angles egaux proportionaux, partant ſeront ſemblables. Parquoy AGHICB ſolide, contenu des plans oppoſez, ABC, GHI, ſemblables & egaux, & des parallelogrammes AJ, GB, BJ, eſt priſme: & ainſi ARNOCB, FEDIHG, FEDQPL, LMKSQP, ſont priſmes, et les parallelogr. AI, CR, eſtans ſemblables & egaux, et AH, BR, & HC, BO, tous les plans du priſme AGHICB, ſont ſemblables & egaux à tous ceux de ARNOCB:* [f] *donc iceux priſmes ſont egaux. Semblablement, GFEDIH, & les autres ſont egaux. Donc RGHJ*



16. 11.

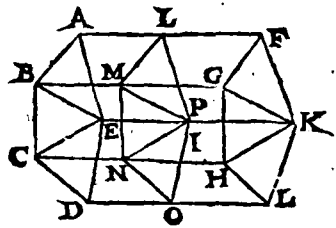
34. 1. 10. 11.

4. 1. e 4. 6.

f 10. d. 11.

ON, eſt autant multiple de AGHJCB, que la baſe RI, de la baſe AJ: & GMRSIH, autãt multiple de GFEDIH, que la baſe GS, de la baſe DG. Et puis que ſi la baſe IR, multiple de AI, premiere grandeur, eſt egale à la baſe GS (multiple de la baſe DG 2. grandeur,) le priſme RGHJON (multiple du priſme AGHICB 3.) ſera egal au priſme GMkSIH (multiple du priſme GFEDIH, 4. grandeur.) Et ſi IR eſt plus grande que GS, le priſme ſera auſſi plus grand que le priſme; & ſi moindre, moindre, les prenant en quelque multiplication que ce ſoit. Comme la baſe AI, premiere grandeur, eſt à la baſe GD, 2. grandeur, ainſi le priſme AGHIB, 3. eſt au priſme GFEDIH, 4. grandeur. Et ainſi on monſtrera que le priſme eſt au priſme, comme la baſe AH, à la baſe EG, &c. Ce qui eſtoit propoſé. 6. def.

Soit derechef ABCDEFG HLK *priſme, dont les plans oppoſez ſoient polygones, ſçauoir eſt pentagones, & ſoit couppé par le plan* LMNOP. *Ie dis que comme la baſe* CM, *eſt à la baſe* NG, *ainſi le ſolide* ABCDELMNOP, *au ſolide* LMNOPFGHIK. *Car les plans paralleles oppoſez eſtans reſolus en triangles, le priſme ſera reduit en autant de priſmes qu'il y a de triangles aux plans oppoſez; Donc comme la baſe* EP, *à la baſe* MK, *ainſi le priſme* ABEPML, *au priſme* LMPkGF, *par ce qui eſt demonſtré. Et par meſme*



me raiſon comme la baſe CP, à la baſe NK : ainſi
2. 6. *le priſme BCEPMN, au priſme MNPKGH, & le priſme CDEPNO, au priſme NOPKHI. Mais comme BP à MK, et CP à NK, ainſi la ligne EP, à la ligne PK, c'eſt à dire, comme CN à NH: & comme CN à NH, ainſi CM à NG. Donc les priſmes ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ont meſme raiſon aux priſmes LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, que CM à NG : & partant meſme raiſon entr'eux. Mais comme vn eſt à vn, ainſi tous en-*
12. 5. *ſemble à tous enſemble. Donc comme le priſme BCEPMN, au priſme MNPKGH, c'eſt à dire comme la baſe CM, à la baſe NG: ainſi le priſme ABCDELMNO, compoſé de trois, ſera au priſme LMNOPFGHIK, compoſé de trois. Ce qui eſt propoſé. Et ainſi de quelconque autre priſme.*

COROLLAIRE.

De ces choſes s'enſuit, que ſi quelconque priſme eſt coupé par vn plan equidiſtant aux plans oppoſez, que la ſection eſt vne figure egale & ſemblable aux plans oppoſez. Ayant eſté demonſtré au premier priſme, que le triangle GHI, eſt egal & ſemblable au triangle ABC: & partant au triangle DEF. Et y a meſme demonſtration en tous. Et faut dire le ſemblable des parallelipipedes.

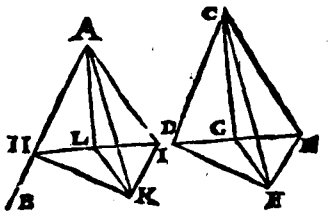
PROBLEME 4. PROP. 16.

A vne ligne droicte donnee, & à vn poinct en icelle, conſtituer vn angle ſolide, egal à vn angle ſolide donné.

Soit le poinct A en AB, auquel il faut constituer vn angle solide, egal à l'angle solide donné C, contenu sous trois angles plans DCE, DCF, FCE n'estans en vn mesme plan.

Soit[g] menee de F, au plan passant par CD, CE, la perpendiculaire FG, & conioinctes DF, DG, EF, FG, &c. Puis soit retranchee AH, egale à CD, & soit faict l'angle HAI, egal à DCE, & AI, egale à CE. g 11. 11. h 23. 1.

Derechef, au plan mené par AH; AI, soit constitué l'angle HAL, egal à DCG, qui est au plan mené par CD, CE, & AL, egale à CG. Et[k] de L, au plan où sont AH, AL. AI, soit menee KL, perpendiculaire, & posee egale à FG, & conioincte KA. Ie dis que l'angle solide A, contenu sous les trois angles plans HAI, HAK, KAI, est egal à C, angle solide donné. k 12. 11.



Car ayant conioinct HK, HL, IK, IL: d'autant que les costez AH, AL du triangle AHL, sont egaux aux costez CD, CG, du triangle CDG, chacun au sien, & les angles HAL, DCG, egaux par la construction, les bases HL, DG, seront egales. l 4. 1.

Derechef ayant osté les angles egaux HAL, DCG, des egaux HAI, DCE, les restans LAI, GCE, sont egaux. Donc puis que les costez AL, AI, du triangle ALI sont egaux à CG, CE, du triangle CGE, chacun au sien, par la construction, LI, GE m 4. 1.

seront egales. D'autant donc que les costez L H, LK, sont egaux aux costez GD, GF, & les angles
n 3. d. HLK, DGF, n droicts, o les bases HK, DF, sont e-
o 4. 1. gales. Partant les costez AH, AK, du triangle A HK, estans egaux à CD, CF, du triangle CDF, par la construction: (car puis que AL, LK, sont egaux
p 3. d. à CG, GF, par la construction; & contiennent an-
q 4. 1. gles egaux, sçauoir p droicts, les bases AK, CF, q
r 8. 1. sont egales,) r les angles HAK, DCF, seront
s 3. d. egaux.
t 4. 1. Finalement, LI, LK, estans egaux à GE, GF, & les angles ILK, EGF droicts, t les bases IK, EF, seront egales. Donc puis que les costez AI, AK, du triangle AIK, sont egaux à CE, CF, du triangle
4. 1. CEF, par la construction: les angles IAk, ECF, seront egaux. Donc les trois angles plans HAI, HAK, KAI, composans l'angle solide A, sont egaux aux trois angles plans DCE, DCF, FCE, composans l'angle solide C: partant l'angle solide A, est egal à l'angle solide C. Donc à vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 5. PROPO. 27.

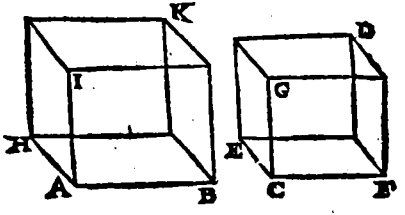
D'vne ligne droicte donnee, descrire vn solide parallelipip. semblable & semblablement posé à vn solide parallelipipede donné.

De la droicte ligne donnee AB, qu'il faille descrire vn solide parallelipipede, semblable, & semblablement posé au parallelipipede CD, donné.

A [t] la ligne AB, & au poinct A, en icelle soit faict vn angle solide, egal à l'angle solide donné C, en sorte que les trois angles plans HAI, IAB, BAH, soient egaux aux 3. ECG, GCF, FCE. [u] Et

t 26. 11.

u 12. 6.



comme CF à CG, soit faicte AB à AI, & comme CG à CE, ainsi AI à AH, & en raison egale, comme CF, sera à CE, ainsi AB à AH : & soit parfaict le parallelipipede Ak, sçauoir estans accõplis les parallelogrammes BH, HI, IB, & par les poincts I, B, H, ayans menés les plans IK, BK, Hk, qui sont paralleles aux parallelogrammes BH, HI, IB. Ie dis que le parallelipip. Ak est semblable, & semblablement posé au paral. CD.

Car puis que les angles BAH, FCE sont egaux, & les costes autour d'iceux proportionaux, sçauoir comme BA, à AH, ainsi FC, à CE par la construction, les parallelogrammes HB, EF, sont semblables, & semblablement posez. Semblablement HI, EG, & IB, GF: donc les 3. plans BH, HI, IB, du solide Ak sont semblables, & semblablement posez aux 3. FE, EG, GF, du solide CD. [x] mais trois lesquels que l'on voudra d'iceux sont egaux, & semblables aux 3. autres opposez. Parquoy les six plans du solide Ak sont semblables, & semblablement posez aux six plans du solide CD : [y] Partant les solides Ak, CD sont semblables, & sem-

x 24. 11.

y 9. def.

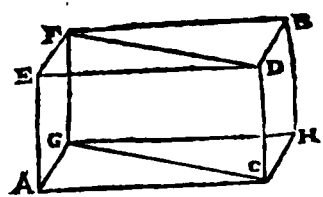
blablement posez. Donc d'vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOREME 25. PROPO. 28.

Si vn solide parallelipipede, est *couppé* par vn plan mené par les lignes *diagonales* des plans oppoſez : Le ſolide ſera couppé par ce plan, en deux egalement.

Soit AB parallelipipede, & aux plans oppoſez A
a 34. 1. H, EB, les diametres CG, DF. Et tant CD que GF,
b 9. 11. eſtant parallele & egale à [a] AE, eſtant CE, GE, pa-
c 33. 1. rallelogramme, [b] CD, GF ſeront egales & paral. entr'elles : [c] & partant CG, DF, qui les conioignent, auſſi egales & paral. & en vn meſme plan. Ie dis que le plan qui paſſe par CG, DF, *couppe* le
d 24. 11. parallelipede AB, en deux egalement.

Car [d] puis que les plans AH, EB ſont parallelogr. egaux & ſéblables, leurs moitiez, ſçauoir les triãgles AGC, GCH, EFD, FDB, *ſeront* egaux entr'eux : mais les coſtez autour des angles egaux



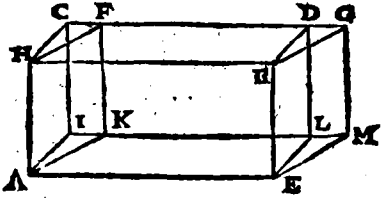
e 6. 6. GAC, CHG, FED, DBF, ſont proportionaux,
f 24. 11. [e] donc leſdicts triangles ſeront auſſi ſemblables. [f] Et le paral. AF, eſtant egal & ſemblable au paral. CB, & AD à GB. & CF commun, les deux triangles AGC, EFD, & les parall. AF, AD, CF, du

prisme ACGFED, sont egaux & semblables aux deux triangles HCG, BDF, & aux parallelogrammes CB, BG, CF, du prisme HGCDBF: & partant g 10. d. iceux prismes seront egaux, lesquels composans le parallelipipede AB, il sera coupé en deux egalement. Donc si vn solide parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 24. PROP. 29.

Les solides parallelipipedes cõstituez sur vne mesme base, & de mesme hauteur, & desquels les lignes insistentes sont colloquees en mesmes lignes droictes, sont egaux entr'eux.

Sur la base AB, & de mesme hauteur, c'est à dire entre mesmes plans paralleles, soient constituez deux parallelipipedes ACDE, AFGE, desquels les lignes insistentes menees des quatre angles de la base, sont colloquees



en mesmes lignes droictes, sçauoir AI, Ak, EL, EM, en la ligne droicte IM; & HC, HF, BD, BG, en la droicte ligne CG. Ie dis que les parallelipipedes ACDE, AFGE, sont egaux entr'eux.

Car, h puisque les parallelogrammes AL, AM, h 35. 1.

constituez sur mesme base AE, & entre mesmes paral. sont egaux entr'eux, ostant le commun trapeze AL, les triangles AIK, ELM, demeureront egaux.[k]

k 34. 1.

Mais d'autant que tous les costez du triangle AIK, sont egaux à tous les costez du triangle *HC*F, chacun au sien, [l] iceux seront equiangles & egaux : [m] & auront les costez autour des angles egaux proportionaux : & partant seront semblables entr'eux: & par mesme raison le triangle E L M, sera semblable & egal au triangle B D G. [n] Derechef, le parallelogramme A C, est egal & semblable au paral. ED; & semblablement le parall. AF, au paral. EG. [o] Mais IF, est egal à LG, les bases IK, LM, estans egales: (car IL, kM estans egales chacune à A E, sont egales entr'elles, & ostant kL commune, demeurent Ik, LM egales.) [p] Donc tous les plans du prisme *AIKFCH*, sont egaux, & semblables à tous les plans du prisme E L MGDB, [q] Donc iceux prismes seront egaux: partant, si on adiouste le commun solide AHFKLD BE, les parall. seront faicts egaux sur mesme base, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

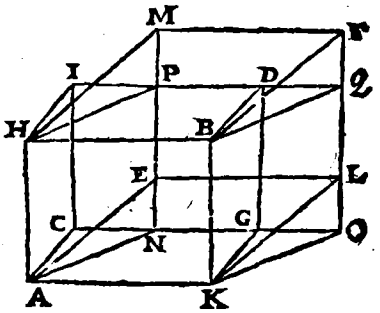
l Cor. 8. 1.
m 4. 6.
n 24. 11.
o 36. 1.
p 34. 1.
q 10. def.

THEOREME 25. PROP. 30.

Les solides parallelipipedes, *constituez* sur vne mesme base, & de *mesme* hauteur, & desquels les lignes insistentes ne sont pas colloquees en mesmes lignes droictes, sont egaux entr'eux.

Sur la base AB, & en mesme hauteur, c'est à dire

entre mesmes plans paralleles, soient constituez les parallelipipedes AIDK, AMFK, desquels les lignes insistentes menees des quatre angles de la base, AC, AE, KG; KL, HI, HM, BD, BF, ne sont pas en mesmes lignes droictes, c'est à dire, CI, GD, estãs



prolongees, ne passent pas par les poincts M, E, F, L; ny CG, ID, prolongees, &c. Ie dis que les parallelipipedes AIDK, AMFK, sont egaux entr'eux.

Car puis que les plans CD, EF, opposez à la base AB, sont en vn mesme plan, à cause de la mesme hauteur des parallelipipedes: soient prolõgees au mesme plan les lignes CG, ID, desquelles CG, couppe EM, LF, prolongees aux poincts N, O, & ID, les mesmes aux poincts P Q: & soient conioinctes les droictes lignes AN, KO, HP, BQ.

D'autant donc que PQ, MF sont egales, estans [r 34.1] oppolees au parallelogramme FP, & MF, est egale à HB, PQ & HB seront egales: mais elles sont paral. HDB estant parallelogramme: Donc HB, [s 33.1.] PQ. sont egales & paral. & partant HPQB, est parallelogramme; par mesme raison, HPNA, ANOk, kOQB, seront parallelogrammes, & NO

QP, eſt auſſi parallelogramme. Donc APQR, eſt parallelipip., t parquoy le parallelipipede AI DK, eſt egal au parallelipip. A PQk, ayant meſme baſe AB, & les lignes inſiſtantes ſont colloquees en meſmes lignes droictes CO, IQ. Semblablemẽt le parallelipipede AMFK, ſera egal au meſme APQk, ayant meſme baſe AB, & les lignes inſiſtantes eſtans aux meſmes droictes lignes NM, OF. Parquoy les parallelipip. AIDk, AM Fk, ſont egaux entr'eux. Donc les ſolides parallelipipedes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

t 29. 1.

SCHOLIE.

Tant cette Propoſition que la precedente, ſe peut ainſi conuertir.

Les ſolides parallelipip. s egaux ſur meſme baſe, ſoit que les lignes inſiſtantes *ſoient* colloquees en meſmes lignes droictes ou non, ſont de meſme hauteur.

Car ſi l'vn eſt dict plus haut, & d'icelny eſtant coupé vn parallelipipede de meſme hauteur que l'autre, v *le couppé & l'autre ſerons egaux: & cet autre eſtant poſé egal au tout, le couppé ſera auſſi egal au tout: ce qui eſt abſurde.*

v 29. ou 30 11.

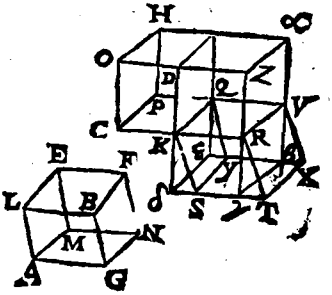
THEOREME 26. PROP. 31.

Les ſolides parallelipipedes, conſtituez ſur baſes egales & de meſme hauteur, ſont egaux entr'eux.

Soient les parallelipipedes AEFG, CHIk, conſtituez

ſtituez ſur baſes egales, AB, CD, & de meſme hauteur. Ie dis qu'iceux ſont égaux entr'eux.

Car ſoient premierement les lignes inſiſtantes AM, GN, LE, BF, perpendiculaires à la baſe AB, & les inſiſtantes CP, kQ, OH, DI, perpendiculaires à la baſe CD. Cela eſtant ainſi, toutes leſdictes perpendiculaires ſeront egales entr'elles, eſtans les parallelipipe. de meſme hauteur. Soit prolongee directement Ck, & poſee κR, egale à LB, & l'angle RκS, au plan prolongé Ok, fait egal à l'angle BLA, & κS, poſee egale à LA, & accomply le parallelogramme kT, ſur lequel ſoit conſtitué le parallelipipedes QSTV; ſelon la hauteur de la perpendiculaire RQ. D'autant que les coſtez κR, kS, ſont egaux à LB, LA, & les ang. Rκs, BLA egaux, les parallel κT, LG, ſont egaux & ſemblables.



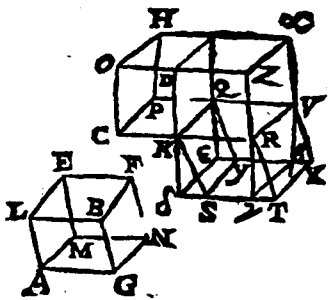
Derechef, d'autant que les coſtez kQ, κS, ſont egaux à LE, LA, [x] & les angles QkS, ELA, droicts, kQ, LE, eſtans poſees à angles droicts aux plans KT, LG, les parallel. QS, EA, ſont egaux & ſemblables. x 3. d. 11.

Semblablement, les coſtez κR, CQ, eſtans egaux à LB, LE, & les angles QκR, ELB, droits, les parall. kV, LF, ſont auſſi egaux & ſemblables. Parquoy, [y] puis que les trois plans KT, QS, KV, du parallelipipede QSTV, ſont egaux & ſembla- y 24. 11.

bles aux trois plans LG, EA, LF, du paral. AEFG: tant ceux-là, que ceux-cy, eſtans egaux aux trois
224.11. autres oppoſez, [a] les parallel. QSTV, EAGF, ſont
10.d. egaux entr'eux.

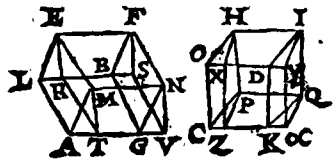
Que DK, TS prolongees, ſe rencontrent à ſ, & IQ, XY, à ſ & ſoit accomply le parallelipipede Q ſ γ V, & HI, βV, prolongees, ſe rencontrent à α & OD, γ R, à Z, & ſoit accomply le parallelipipede IKRγ D'autãt que les parallelipipedes QSTV, Q ſ γ V, ont meſme baſe KV, & meſme hauteur, ſçauoir entre meſmes plans paral. KV, ſX, les lignes d'iceux inſiſtantes KS, Kſ, RT, Rγ, QY, Qα, VX, Vβ, ſont colloquees en meſmes lignes droictes
a 29.11. ſT, ſX, α iceux ſeront egaux entr'eux. Mais le paral. QSTV, eſt egal au paral. EAGF: Donc Q ſ γ V, ſera egal au meſme EAGF.

b 35.1. Mais b d'autant que KT, kγ paral. ſont egaux entr'eux, & KT, egal à LG, kγ, ſera auſſi egal à LG: c'eſt à dire à CD, les baſes LG, CD, eſtans poſees egales: c partant comme
γc 7.5.
d 25.11. CD, à Dk, ainſi kγ, à DR. d Mais comme la baſe CD, à la baſe DR, ainſi le ſolide CHIK, au ſolide KIαR, le paral. CHαR eſtant couppé par le plan IK, paral. aux plans oppoſez CH. αR. Semblablement comme kγ, à DR, ainſi le ſolide Q ſ γ V, au ſolide IkRα; puis que le paral. I ſ γα, eſt couppé par
e 9.5.



le plan KV, paral. aux plans oppoſez Dα, αβ. Donc les paral. CHIK, Qγ V, ayant meſme raiſon au meſme ſolide IKRα, ſçauoir que les baſes egales CD, Kγ, à la baſe DR. Donc puis que le paral. Qγ V, eſt monſtré egal au paral. AEFG, les paral. AEFG, CHIK, ſeront auſſi egaux. Ce qui eſt propoſé.

Maintenant que AM, GN, LE, BF, & CP, KQ, OH, DI, ne ſoient perpendiculaires aux baſes AB, CD: *f* & des poincts E, F, M, N, ſoient menees perpẽdiculaires ER, FS, MT, NV, au plan de la baſe AB; & des poincts H, I, P, Q, au plan où eſt la baſe CD, ſoient menees les perpendiculaires HX, IY, PZ, Qα, icelles ſeront egales, les altitudes deſdits parallelipipedes eſtans egales. Soient menees RS, SV, VT, TR, & XY, Zα, αI, ZX, pour faire le paral. ETVF, HZαI, leſquels eſtans de meſme hauteur, & les lignes inſiſtantes perpend. ils ſeront egaux entr'eux, comme il eſt monſtré. f 11. 11.



Mais *g* ETVF, eſt egal à AEFG, ayant meſme baſe & meſme hauteur. Et le paral. HZαI, eſt egal par meſme raiſon à CHIK. Donc AEFG, CHIK, ſont egaux entr'eux. L'on fera ſemblable demonſtration, ſi les inſiſtantes d'vn parallelipip. ſont perpendiculaires à la baſe, & de l'autre non. Partant les ſolides parallelip. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. g 79. ou 30. 11.

SCHOLIE.

Cette 31. Proposition se peut aussi conuertir ainsi.

Les solides paralle. egaux, constituez sur bases egales, sont de mesme hauteur. Et les parallelipipedes egaux qui sont en mesme hauteur, sont sur bases egales, s'ils n'ont point vne mesme base.

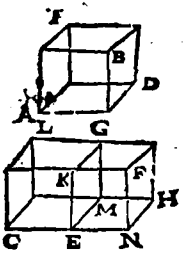
h 31. 11. *Car si l'vn est dit estre plus haut que l'autre, estant retranché d'iceluy vn parallelipip. de mesme hauteur que l'autre*; h *le retranché sera egal. Parquoy le tout estant posé egal à cet autre, le retranché sera egal au tout: ce qui est absurde. Mais s'ils sont de mesme hauteur, & que l'on croye que la base de l'vn, soit plus grande que la base de l'autre, estant retranchee d'icelle vne base egale à l'autre, & entendant sur la retranchee vn parallelipipede de mesme hauteur: on demõstrera semblablement que la partie est egale au tout. Ce qui est absurde.*

THEOREME 27. PROP. 32.

Les solides parallelipipedes de mesme hauteur, sont entr'eux comme leurs bases.

Soient les deux paralellipipedes ABCDIEFGH, de mesme hauteur, constituez sur les bases AB, EF. Ie dis que le solide est au solide, comme la base à la base.

Car, *si* soit faict sur EK, le paral. CK, egal au parall. AB, ayant l'angle CEK, egal à l'angle ENF. Or les parallelogramme EF, CK, constitueront le total parallelogramme FC, comme il est demonstré en la 45. du 1. liure. i 45. 1.



Donc si les autres plans du parallelip. EFGH, sont prolongez de la part de EG, & que l'on accomplisse vn total parallelip. CFLH; & les paralelip ABID, CKLM, seront egaux, estans constituez sur bases egales AB, CK, par la construction, & de mesme hauteur par l'hypothese. / Partant comme le solide CKLM, au solide EFGH, ainsi le solide ABID, au mesme EFGH. *m* Mais CKLM, est à EFGH, comme la base CK, ou la base AB, son egale, à la base EF. Donc le solide ABID, sera aussi solide EFGH, comme la base AB, à la base EF. Donc les solides parallelip. de mesme hauteur sont entr'eux comme leurs bases, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. k 31. 11. l 7. 5. m 25. 11.

SCHOLIE.

On conuertira ainsi cette Proposition.

Si les solides parallelipiped. sont entr'eux comme leurs bases, ils seront de mesme hauteur.

Car si on dict qu'ils ne soient de mesme hauteur: De la plus grande hauteur, ayant retranché vne egale à la moindre, & mené vn plan paral-

lele à la baſe, n comme la baſe ſera à la baſe, ainſi le parallelipip. ſera au parallelipipe. retranché: Mais il eſtoit auſſi de meſme au parallelipipede total. o Donc le retranché eſt egal au tout. Ce qui eſt abſurde.

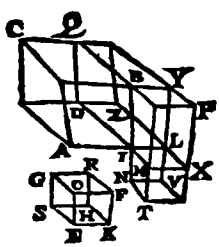
n 32. 11.

o 9. 5.

THEOREME 28. PROP. 33.

Les ſolides ſemblables parallelipipedes, ſont l'vn à l'autre en raiſon triplee de leurs coſtez homologues, ou de meſme raiſon.

Soient les ſemblables parallelipiped. ABCD, EFGH, ſur baſes ſemblables AB, EF, eſquelles les coſtez de meſme raiſon ſont AI, EK. Ie dis que le parallelpiipe. ABCD, eſt au parallelipip. EFGH, en raiſon triplee des coſtez homologues AI, EK.



Car, ſoit prolongee AI, à L, & ſoit IL, egale à EK ou GR: & DI à M, & ſoit IM, egale à HK, ou GO, & BI à N, & ſoit IN, egale à KF, ou GS. Puis ayant accomply les parallelog. LM, NL, IT, ſoit acheué le parallelip. TXIV. D'autant que les coſtez IL, IM, ſont egaux aux coſtez GR, GO & les ang. contenus d'iceux egaux, l'angle LIM, eſtant egal à AID, qui à cauſe des paral. ſemblables, eſt egal à EKH, ou RGO; les parallelogrammes IX, GF, ſe-

p 15. 1.

ront ſemblables & egaux,& ſemblablement LN, RS,& IT,GE.

Donc les 3. plans IX,LN,IT,du parallelipipede TXIV, ſont ſemblables & egaux aux 3 rois plans GF,RS,GE,du parallelipip. EFGH: *q* mais trois plans de chacun ſont ſemblables & egaux aux trois autres oppoſez. *r* Donc les parallelipipedes TXIV ,EFGH,ſont ſemblables &egaux. q 24. 11. r 10. d.

Derechef, ayant accomply les parallelogrammes MB, BL, LM, ſoit acheué le parallelipede MPBL;& les parallelogrammes IY, DL; IQ,accomplis , ſoit auſſi parfaict le parallelipede IYQZ.

D'autant donc, qu'à cauſe des ſemblables parallelipipedes ABCD,EFGH,comme AI, à Ek, c'eſt à dire,à IL, ainſi DI,à Hk, c'eſt à dire à IM, & BI,à Fk,c'eſt à dire à IN. *f* Mais comme AI, à IL,ainſi le parall. AD,à DL,& comme DI à IM, ainſi le paral.DL,à LM;& comme BI, à IN , ainſi le paral.BL,à LN. Donc comme AD,à DL, ainſi DL,à LM;& BL, à LN. *t* Mais comme la baſe AD,à la baſe DL,ainſi le parallelip. ADCB, au parallelip.DLYQ. Et comme la baſe DL , à la baſe LM: ainſi le paral.DLYQ, au parall. LMBP ; & comme la baſe BL,à la baſe LN,ainſi le parallelip. LMBP,au parallelip.LNTX. Partãt cõme ADCB, à DLYQ,ainſi DLYQ,à LMBP,& LMBP, à LNTX. Parquoy les 4.grand. ADCB,DLYQ LMBP, LNTX ſont continuellement proportion. *u* partant la premiere ADCB,eſt à la 4.LNTX : c'eſt à dire à EFGH, en raiſon triplee de ADCB, premiere à DLYQ,2. *x*. f 1. 6. t 32. 11. u 10.d. 5.

Mais comme ADCB , à DLYQ , ainſi la baſe AD,à la baſe DL : *y* & comme AD, à DL, *y* 1. 6. x 32. 11.

ainſi la ligne AI, à IL: c'eſt à dire à EK. Donc le parallelip. ADBC, eſt au parall. EFGH, en raiſon triplee des coſtez homologues: ſçauoir de AI, à EK: Partant, les ſolides ſemblables parallelipipe. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que ſi quatre lignes droictes ſont continuellement proport. comme la 1. eſt à la 4. ainſi le parallelip. deſcrit ſur la 1. ſera au parallelip. ſemblable, & ſemblablement deſcrit ſur la 2. & autant que comme il eſt demonſtré, tant le parallelip. eſt au parallelip. que la 1. ligne à la 4. en raiſon triplee de la premiere ligne à la 2. ſçauoir des coſtez homologues.

a 10. d. 5.

THEOREME 29. PROPOSIT. 34.

Les baſes & les hauteurs des ſolides parallelipipedes egaux, ſont reciproques: Et les ſolides parallelipipedes, deſquels les baſes & les hauteurs ſont reciproques, ſont egaux.

Soient les parallelip. egaux ADCB, EHGF, ſur les baſes AD, EH. Ie dis que leurs baſes & leurs hauteurs ſont reciproques: c'eſt à dire, comme la baſe AD, eſt à la baſe EH, ainſi la hauteur EK, à la hauteur AI.

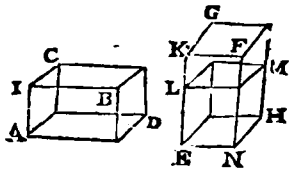
Car ſi les hauteurs ſont egales, eſtans les parallelip. poſez egaux, a les bases ſeront egales. Donc comme la baſe AD, à la baſe EH, ainſi la hauteur

a Sc. 31. 11.

Ek, à la hauteur AI : partant les baſes & les hauteurs ſont reciproques.

Que ſi les hauteurs AI, Ek ſont inegales, ſoit Ek plus grande, de laquelle ſoit retranchee EL, egale à AI, & ſoit entendu le plan LM parallele à la baſe, EH coupant le parallelip.

D'autant donc que les ſolides ADCB, EHGF, ſont egaux; *b* cõme ADCB, à EHML, ainſi EHGF, à EHML : *c* mais comme le ſolide ADCB, au ſolide EHML, ainſi la baſe AD, à la baſe EH, les hauteurs AI, EL, eſtans poſees egales. Et comme le ſolide EHGF, au ſolide EHML, ainſi par la meſme raiſon la baſe kN, à la baſe LN, puis que par cette raiſon, EHGF, EHML, ſolides, ont meſme hauteur, KN, LN, eſtant poſees pour baſes : car ils ſeront, entre meſmes plans paralleles kN, GH. Donc comme la baſe AD, à la baſe EH, ainſi la baſe KN, à la baſe LN : *d* mais comme KN à LN, ainſi la ligne Ek, à la ligne EL : c'eſt à dire à AI, egale à EL. Donc comme la baſe AD, à la baſe EH, ainſi la hauteur Ek. à la hauteur AI. Donc les hauteurs & les baſes ſont reciproques.



b 7. 5.

c 32. 11.

d 1. 6.

Soient maintenant les baſes & les hauteurs reciproques. Ie dis que les parallelip. ſont egaux. Car ſi les hauteurs Ek, AI, ſont egales, la baſe AD eſtãt poſee à la baſe EH, comme la hauteur Ek, à la hauteur AI : les baſes AD, EH ſeront egales: *e* Parquoy les parallelipipedes ADCB, EHGF,

e 31. 11.

ſeront egaux entr'eux, ayans baſes egales & meſme hauteur.

Mais ſi la hauteur EK eſt plus grande, ſoit retranchee EL, egale à AI, & ſoit entendu le plan LM, parallele à EH.

f 32. 11. D'autant donc que comme la baſe AD, eſt à la baſe EH, ainſi la hauteur EK, à la hauteur AI, par l'hypotheſe, c'eſt à dire à EL, egale à AI: *f* Mais comme la baſe AD, à la baſe EH, ainſi le ſolide ADCB, au ſolide EHML, les hauteurs AI, EL,

g 1. 6. eſtans poſees egales: *g* & comme EK à EL, ainſi

h 32. 11. kN, à LN; *h* Mais comme la baſe KN, à la baſe LN, ainſi le ſolide EHGF, au ſolide EHML: les ſolides EHGF, EHML ayans meſme hauteur, ſi on poſe kN, LN, pour baſes: Car ainſi ils ſeront entre plans paralleles KN, GH, comme le ſolide ADCB, ſera au ſolide EHML, ainſi le ſolide EHGF, au meſme ſolide EHML:

i 9. 5. *i* partant les ſolides ADCB, EHGF, ſeront egaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Or l'on doit noter, que les hauteurs des ſolides, doiuent eſtre perpendiculaires: parquoy ne l'eſtant, faudroit faire comme à la fin de la 31. de ce liure. Toutes les choſes demonſtrees aux ſix dernieres propoſitions. ſçauoir 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conuiennent aux priſmes qui ont deux plans oppoſez triangulaires, les hypotheſes ſuſdites eſtans obſeruees.

Car à deux tels priſmes de meſme hauteur, conſtituez ſur meſme baſe ou baſes egales, eſtans appoſez deux autres priſmes egaux & ſemblables à

iceux, on fera deux parallelipip. de meſme hauteur, conſtituez ſur vn meſme baſe, ou ſur egales.

k Donc tels parallelipiped. ſeront egaux; & partant auſſi les priſmes donnez, ſçauoir leurs moitiez. k 29. 30. ou 31. 11.

Derechef, aux deux ſuſdits priſmes de meſme hauteur, conſtituez ſur diuerſes baſes, eſtans adiouſtez deux autres priſmes egaux & ſemblables à iceux, on fera auſſi deux parallelipipedes de meſme hauteur. l Parquoy le parallelipipede ſera au parallelipipede, comme la baſe à la baſe; m et partant, le priſme au priſme, ſçauoir la moitié d'vn des parallelipipedes, à la moitié de l'autre, comme la meſme baſe à la baſe; ſi les baſes des priſmes ſont parallelogrammes, ou comme le triangle au triangle, ſçauoir comme la moitié d'vne des baſes, à la moitié de l'autre, ſi les baſes des priſmes ſont triangles.

l 32. 11. m 15. 5.

Dauantage, ſi aux deux priſmes ſemblables ſuſdits, ſont adiouſtez deux autres priſmes ſemblables & egaux à iceux, deux parallelipipedes ſemblables ſeront conſtituez, o qui ſeront entr'eux en raiſon triplee, de leurs coſtez homologues. Donc leurs priſmes, ſçauoir eſt leurs moitiez, n ayans meſme raiſon que les parallelipipedes, ſeront en raiſon triplee, de la raiſon de leurs coſtez homologues, qui ſont auſſi coſtez homologues des priſmes.

o 33. 11. n 15. 5.

Finalement, ſi auſdicts deux priſmes egaux, ſont adiouſtez deux autres priſmes egaux, & ſemblables à iceux deux parallelip. egaux, de meſme hauteur que les priſmes ſeront compoſez. p Parquoy les baſes & les hauteurs des parallelip. eſtans reciproques, & les baſes des priſmes eſtans les meſmes,

p 34. 11.

915.5. *ou les triangles qui ſont moitiez d'icelles, q ayans meſme raiſon: les baſes des priſmes & leurs hauteurs ſeront reciproques.*

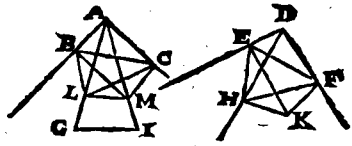
THEOREME 30. PROP. 35.

S'il y a deux angles plans egaux, au ſommet deſquels ſoient eſleuees deux lignes droictes en l'air, contenans angles egaux auec les lignes premierement poſees chacun au ſien : Et aux lignes eſleuees en l'air, l'on prend quelcõques poincts, & d'iceux on mene des lignes perpendiculaires, aux plans où ſont les angles premierement poſez; Mais des poincts qui ſont faicts aux plans par les perpendiculaires, ſont conioinctes des lignes droictes : icelles contiendront angles egaux, auec les lignes menees en l'air.

Soient deux angles egaux BAC, EDF, & des ſommets A & D, ſoient menees en l'air AG, DH, en ſorte que l'angle BAG, ſoit egal à EDH, & CAG, à FDH: & des poincts G & H, pris en AG, DH, ſoient menees GI, Hk, perpendiculaires aux plans des angles BAC, EDF, & conioinctes IA, kD. Ie dis que les angles GAI, HDk, ſont egaux entr'eux.

Car ſi AG, DH, ſont inegales de la plus grande AG, ſoit priſe AL, egale à DH, & de L, ſoit me-

nee LM, parallele à GI, au plan du triangle AGI: d'autant que GI, LM, sont paralleles, &



GI est à angles droicts, au plan de l'angle BAC: r LM sera aussi à angles droicts au mesme plan: des poincts M, k, soient menees les perpendiculaires MB, MC, kE, kF, à AB, AC, DE, DF: & conioinctes BC, BL, LC, EF, EH, HF. r 8. 11.

Et d'autant que LM, est angles droicts au plan BAC, f elle fera angle droict auec AM, menee au mesme plan. t Parquoy le quarré de AL, sera egal aux qq. de AM, ML. u Mais le q de AM, est egal aux qq. de AC, CM, l'angle ACM, estant droict par la construction. Donc le q. de AL, est egal aux qq. de AC, CM, ML: x Mais le q. de CL, est egal aux qq. de CM, ML, y l'angle CML estant droict. Donc le quarré de AL, est egal aux quarrez de AC, CL: z partant, l'angle ACL, sera droict. a f 3. d. t 47. 1. u 47. 1. x 47. 1. y 3 d. z 48. 1. a 47. 1.

Derechef, puis que le quarré de AL, b est egal aux qq. de AM, ML: c mais le q. de AM, est egal aux qq. de AB, BM, l'angle ABM estant droict par la construction; le q. de AL, est egal aux qq. de AB, BM, ML: mais le q. de BL, est egal aux qq. de BM, ML, d l'angle BML estant droict. Donc le q. de AL, est egal aux qq. de AB, BL: e partant, l'angle ABL sera droict: par mesme raison DFH, DEH, seront monstrez droicts. b 47. 1. c 47. 1. d 3. d. e 48. 1.

D'autant donc que les angles ABL, LAB, du triangle LAB, sont egaux à DEH, HDE, du trian-

f 26. 1. gle DEH: & AL, DH ſont egaux: *f* les autres coſtez AB, BL, ſeront egaux aux autres DE, EH. Semblablement AC, CL, ſeront egales à DF, FH. Parquoy les coſtez AB, AC, du triangle ABC, ſont egaux à DE, DF. du triangle DEF; & les angles contenus d'iceux BAC, EDF, egaux par l'hy-
g 4. 1. potheſe: *g* les baſes BC, EF, ſeront egales, & AB C, ACB, egaux à DEF, DFE, chacun au ſien: mais les touts ABM, ACM, ſõt egaux aux touts DEK, DFK, eſtans tous droicts; donc les reſtans MBC, MCB, ſeront egaux aux reſtans KEF, KFE. Partant BC, EF, eſtans monſtrez egaux, les co-
h 26. 1. ſtez *h* BM, CM, ſeront egaux aux coſtez EK, FK.

D'autant donc que AC, CM, du triangle ACM, ſont monſtrez egaux à DF, FK, du triangle DFK, & ACM, DFK, droicts; les *i* baſes AM, DK, ſeront egales entr'elles: & BL, EH eſtans mon-
47. 1. ſtrees egales, leurs quarrez ſeront egaux. *k* Mais d'autant que le quarré de BL, eſt egal aux quar-
l 3. d. rez de BM, ML, & le q. de EH, egal aux qq. de EK, KH: / BML, EKH eſtans droicts, les qq. de BM, ML, ſeront egaux aux qq. de Ek, KH.

Ayant donc oſté les quarrez egaux de BM, Ek, monſtrees egales, les quarrez reſtans de LM, Hk, ſeront egaux: & partant LM, HK, egales, Parquoy puis que les coſtez AL, AM, du triangle ALM, ſont egaux à DH, DK, du triangle DHK, & la baſe LM, egale à la baſe Hk: *m* les angles LAM, HDk ſe-
m 8. 1. ront egaux. Donc ſi deux angles plans, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

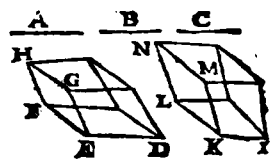
Partant, s'il y a deux angles plans egaux, des sommets desquels l'on ait mené en l'air des lignes droictes egales, contenant angles egaux, auec les lignes premierement posees, chacun au sien. LES perpendiculaires menees des extremitez d'icelles lignes esleuees en l'air sur les plans des angles premierement posez, seront egales entr'elles. Car les angles plans BAC, EDF, estans posez egaux, & AL, DH, esleuees en haut, constituans angles egaux, LAB, HDE, & LAC, HDF, il a esté demonstré que LM, HK, perpendiculaires, sont egales entr'elles.

THEOREME 31. PROP. 36.

S'il y a trois lignes droictes proportionelles; Le solide parallelipipede constitué d'icelles, est egal au solide parallelipipede, descrit de la moyenne, pourueu qu'il soit equilateral; mais equiangle au susdict.

Soient A, B, C, continuellement proportionelles, & soit constitué l'angle solide E, de trois angles plans quelconques, DEF, DEG, FEG, en sorte que DE, soit egale à A; & EF, à B, & EG à C. Et ayant accomply les parallelogrammes DF, FG, GD, soit acheué le parallelipipede DH, qui est dict estre contenu des trois lignes A, B, C, ou faict d'icelles. *n* Puis à la droicte IK, & à vn poinct d'i- *n* 26. 11.

celle k, ſoit faict l'angle ſolide k, egal à l'angle ſolide E, des trois angles plans IkL, Ik M, LkM, qui ſoient egaux aux 3. DEF, DEG, FEG, en ſorte que IK, kL, kM, ſoient egales chacune à la moyenne B. Et ayant accomply les parallelogrammes IL, LM, MI, ſoit acheué le parallelipipede IN, qui eſt dict eſtre contenu ſous la ligne B. ou deſcrit d'icelle. Ie diſque le ſolide DH, eſt egal au ſolide IN.



Car puis que comme DE, à IK, ainſi kM à EG (DE eſtant priſe egale à A, & Ik, kM, à B, & EG, à C,) & les angles DEG, IkM, egaux à B : o les parallelogrammes DG, IM, ſeront egaux, ayans les coſtez autour des angles egaux reciproques: mais d'autant que les angles plans DEG, IkM ſont egaux, du ſommet deſquels ſont menees les lignes EF, KL en l'air, contenant angles egaux, auec les lignes premierement poſees par la conſtruction, chacun au ſien : les perpendiculaires menees de F, L, au plan des baſes DG, IM, ſçauoir les hauteurs des parallelipipedes DH, IN, ſi les baſes DG, IM, ſont p egales entr'elles. q Partant, les parallelipipedes DH, IN, ayans les baſes DG, IM egales, & les hauteurs auſſi egales, ſeront egaux entr'eux. Donc ſi trois lignes droictes ſont proportionelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

o 14. 6.

p Co. 35. 11.

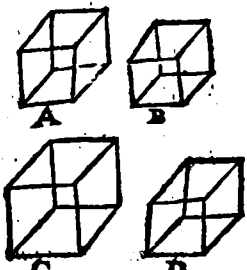
q 31. 11.

THEOREME

THEOREME 32. PROP. 37.

Si quatre lignes droictes ſont proportionelles ; les ſolides parallelipipedes ſemblables, & ſemblablement deſcrits d'icelles, ſeront auſſi proportionaux : Et ſi les ſolides parallelipipedes, leſquels ſont auſſi ſemblables & ſemblablement deſcrits, ſont proportionaux: Icelles lignes droictes ſeront auſſi proportionelles.

Soient quatre lignes proportionelles A, B, C, D, ſçauoir comme A à B, ainſi C à D. Et ſoient conſtituez ſur A & B, deux parallelipipedes A & B ſemblables & ſemblablement deſcrits.



Item, ſur C & D, deux autres C & D, ſemblables & ſemblablement poſez, ſoit que ceux-cy, ſoient ſemblables à ceux-là, ou non. Ie dis que comme le ſolide A, eſt au ſolide B, ainſi le ſolide C, au ſolide D.

Car, puis que le ſolide A, eſt au ſolide B ; en raiſon triplee de la droicte ligne A, à la droicte B. Item, le ſolide C, au ſolide D, en raiſon tri- [a 33. 11.]

plee de la ligne droicte C, à la droicte D : les raisons des solides A à B, & C à D, seront egales, d'autant qu'elles sont triplees des raisons egales, sçauoir de la raison de la ligne droicte A, à la droicte B, & de la ligne droicte C, à la droicte D. Ce qui est premierement proposé.

Secondement, soit comme le solide A, *au solide* B, ainsi le solide C, au solide D. Ie dis que comme la ligne droicte A, est à la ligne *droicte* B, ainsi la droicte ligne C, est à la droicte D.[b]

[b] 33. 11.

Car, puis que le solide A, est au solide B, en raison triplee, de la raison de la ligne A, à la ligne B. Item, le solide C, est au solide D, en raison triplee de celle de la ligne C, à la ligne D : les raisons des lignes A à B, & de C à D, seront egales. D'autant que les raisons d'icelles triplees, sçauoir du solide A, au solide B, & du solide C au solide D ; sont posees egales. Ce qu'il falloit secondement demonstrer.

SCHOLIE.

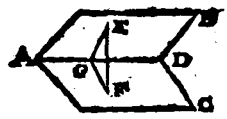
Semblablement, si trois lignes droites sont proportionelles, les parallelipipedes semblables & semblablement decrits d'icelles, seront proportionaux, &c. Car la moyenne estant posee deux fois auec son solide, les quatre solides seront proportionaux, comme il est demonstré. Car le solide de la seconde ligne estant egal au solide de la troisiéme, & la seconde egale à la troisiéme, la propo. est manifeste.

(·) (·) (·)

THEOREME 33. PROPO. 38.

Si vn plan eſt perpendiculaire à vn plan, & de quelque poinct de ceux qui ſont en l'vn des plans, l'on mene vne ligne perpendiculaire à l'autre plan : La perpendiculaire menee tombera ſur la commune ſection des plans.

Soit le plan AB, perpendiculaire au plan AC, & leur commune ſection ſoit AD ; & du poinct E, du plan AB, ſoit menee vne perpendiculaire au plan AC. Ie dis qu'icelle tombera ſur la commune ſection AD.



Car autrement, qu'elle tombe ailleurs, s'il eſt poſſible, comme à F, [c] & de F au plan AC, ſoit menee FG, perpendiculaire à AD, & ſoit conioincte EG, au plan AB. D'autant donc que FG eſt perpendiculaire à la commune ſection AD, [d] elle ſera auſſi perpendiculaire au plan AB. [e] Et partant, perpendiculaire auſſi à GE: mais EF, eſt auſſi perpendiculaire à FG. Donc au triangle EFG, les deux angles EFG, EGF, ſont droicts: ce qui eſt abſurde, [f] eſtans moindres que deux droicts. Donc la perpendiculaire menee de E, au plan AC, ne tombera hors la commune ſection, donc ſur icelle. Partant, ſi vn plan eſt perpendiculaire à vn plan, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 12. 11.

d 4. 11.

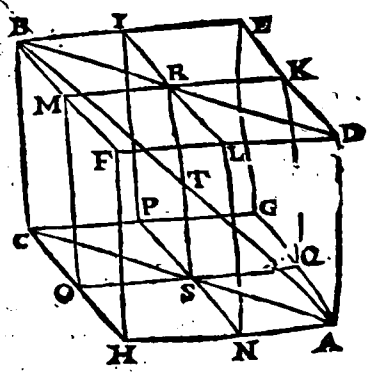
e 3. 11.

f 17. 1.

THEOREME 34. PROP. 39.

Si les coſtez des plans oppoſez d'vn ſolide parallelipipede, ſont couppez en deux egalement; & que par les ſections l'on mene des plans, la commune ſection des plans, & le diametre du ſolide parallelipipede, ſe coupperont egalement l'vn l'autre.

Soient les plans oppoſez AC, BD, du ſolide parallelipide AB, deſquels tous les coſtez ſoient coupez en deux egalement aux poincts I, k, L, M, N, O, P, Q, par leſquels ſoiét menez 2. plans IN, kO, dont la commune ſection ſoit RS, ſoit auſſi mené le diametre AB. Ie dis que



la droicte ligne RS, & le diametre AB, ſe coupent en deux egalement.

Car ayant conioinct RB, RD, SA, SC: ſoient conſiderez deux triangles AQS, COS. D'autant

donc que les costez AQ, QS, du triangle AQS, sont egaux aux costez CO, OS, du triangle COS; (car AQ, CO, sont moitiez des egales AG, CH, & QS, OS, sont egales aux deux egales AN, HN, estans AS, HS, parallelogrammes:) & l'angle AQS, egal à l'alterne COS: les bases AS, CS, seront egales, & les angles ASQ, CSO, egaux; Mais les angles ASQ, ASO, sont egaux à deux droicts: Donc CSO, ASO, sont aussi egaux à deux droicts: partant AS, CS, feront vne seule ligne droicte. Semblablement BR, DR, seront monstrees egales, & faire vne seule ligne droicte.

34. 1. g 29. 1. h 4. 1. k 13. 1. l 14. 1.

Derechef, d'autant que tant AD, que BC, est parallele & egale à FH, à cause des parallelogrammes AF, FC, elles seront aussi paralleles entr'elles & egales. Parquoy AC, BD, qui les conioignent aux extremitez, sont aussi egales & paralleles: Donc leurs moitiez AS, BR, sont egales.

m 9. 11. n 33. 11.

Mais d'autant que AC, BD, sont paralleles, AB, RS, seront en vn mesme plan auec icelles; partant se coupperont l'vne l'autre, sçauoir au poinct T. Mais puis que les deux angles AST, ATS, du triangle AST, sont egaux aux deux BRT, BTR, du triangle BRT, & le costé AS, au costé BR: les autres costez TA, TS, seront egaux aux autres TB, TR: partant AB, RS, se couppent l'vne l'autre en deux egalement au poinct T: parquoy si les costez opposez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

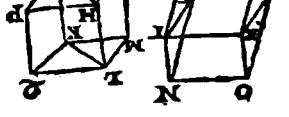
o 7. 11. p 29. & 15. 1. q 26. 1.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cette demonstration, qu'en tout parallelipipede tous les diametres se couppent l'vn l'autre en deux egalement à vn poinct: sçauoir au poinct T, où ils diuisent en deux parties egales (comme il est monstré icy,) la ligne RS. Et tout plan coupant le parallelipipede en deux egalement, passe par le centre d'iceluy, comme par le poinct T.

THEOREME 35. PROP. 40.

Si deux prismes sont de mesme hauteur, desquels l'vn ait vn parallelogramme pour base, & l'autre vn triangle; & que le parallelogramme soit double du triangle, iceux prismes seront egaux.



Soient deux prismes d'egale hauteur, ABCDEF, GHIKLM, dont celuy-là ait pour base le parallelogramme ABCD, & cettuy-cy le triangle GHI, & soit le parallelogramme AC double du triangle GHI. Ie dis qu'iceux prismes sont egaux.

Car soient accomplis les parallelipipedes AN, GQ, prolongeant les plans des triangles, pour faire les parallelogrammes BN, AO, GP, MQ;

Car ayant mené NO, PQ, on aura constitué deux parallelip. AN, GQ, de mesme hauteur que les prismes, & desquels les plans opposez sont paralleles, comme il est facile à colliger de la 15. Propo. de ce liure.[r]

D'autant donc que le parallelogramme GP, est double du triangle GHI, & le parallelog. AC, est posé double du mesme triangle GHI, les paral. AC. GP seront egaux.[s] Partant AN, GQ, de mesme hauteur, & sur bases egales AC, GP, sont egaux entr'eux Donc leurs moitiez, sçauoir les prismes ABCDEF, GHIKLM, ([t] car les parallelip. AN, GQ sont coupez chacun en deux prismes egaux, par les diametres des plans opposés CF, DE, HI, LK) sont aussi egaux entr'eux. Donc si deux prismes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[r] 34. 1.

[s] 31. 11.

[t] 32. 11.

FIN DV VNZIESME LIVRE des Elements d'Euclide.

LIVRE DOVZIESME DES ELEMENTS D'EVCLIDE, Et le ſecond des Solides.

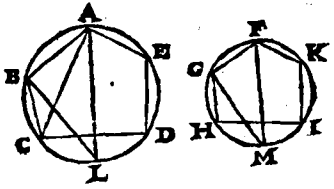
THEOREME 1. PROPO. 1.

Les Polygones ſemblables, inſcrits aux cercles, ſont l'vn à l'autre, comme les quarrez deſcrits des diametres des cercles.

SOIENT deux polygones ſemblables ABCDE, FGH Ik, deſcrits aux cercles, deſquels les diametres ſont AL, FM. Ie dis que le polygone ABCDE, eſt au polygone F G HIK, comme le quarré du diametre AL, au quarré du diamette FM.

Car, ſoient menees AC, FH, ſouſtendantes les angles egaux ABC, FGH, & ſoient conioinctes

(Soit tiree vne ligne de F à H , qui eſt laiſſee en la figure.)



BL, GM. Doc à cauſe de la ſemblance des polygones, AB eſtant à BC, comme FG à GH [v] les triãgles A B C, FGH, ſeront equiangles, ayans les coſtez autour des angles egaux ABC, FGH, proportionaux: [x] mais l'angle ALB, eſt egal à l'angle ACB, & l'angle FMG, egal à FHG; Donc ALB, FMG, ſeront egaux. Parquoy ABL, FGM, eſtans auſſi egaux, [y] ſçauoir droicts aux demy cercles, [z] les reſtans BAL, GFM, ſeront egaux. [a] Donc comme AL, à AB, ainſi FM à FG: & en changeant, comme AL à FM, ainſi AB à FG. Partant, comme le quarré de AL, au quarré de FM, ainſi le polygone ABCDE, deſcrit ſur la droicte ligne AB, au polygone FGHIK, deſcrit ſur FG: puis que tant les quarrez que les polygones ſont figures ſemblables, & ſemblablement deſcrites. Donc les polygones ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

v 6. 6.

x 21. 3.

y 31. 3.

z 32. 1.

a 4. 6. 22. 6.

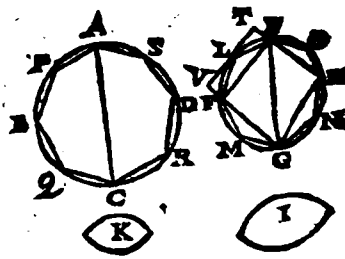
THEOREME 2. PROP. 2.

Les cercles ſont l'vn à l'autre, comme les quarrez de leurs diametres.

Soient les deux cercles ABCD, EFGH, dont les diametres ſont AC, EG. Ie dis que comme le q.

de AC, eſt au q. de EG, ainſi le cercle ABCD, eſt au cercle EFGH: c'eſt à dire, que ſi on entend que comme le quarré de AC, eſt au q. de EG, ainſi le cercle ABC, ſoit à quelqu'autre figure 4. proportionelle, comme à I, que I eſt egale au cercle EFGH.

Car, s'il n'eſt ainſi, I ſera moindre ou plus grande: Que I ſoit donc premierement plus petite, ſi faire ſe peut, & le cercle EFGH, ſoit plus grand que I, de la figure K. [b]



b 10. 10.

Mais pouuãt retrancher plus de la moitié du cercle EFGH, & du reſte plus de la moitié, tant de fois qu'il demeure à la fin vne grandeur moindre que K: ſoit [c] inſcrit en iceluy cercle le q. EFGH, qui ſera plus grand que la moitié du cercle. Siles 4. ſegments du cercle ſont moindres que K, l'on a le requis: ſinó, ſoient couppez les arcs EF, FG, GH, HE, en 2. egalement par L, M, N, O: & ſoit inſcrit l'octogone au cercle, menant EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, OE. Il àppert qu'il y aura quatre triangles egaux, dans les quatre ſegmens egaux, & que chacun comme FLE, excedera la moitié de ſa ſection, le triangle Iſoſcele ELF [d] eſtant moitié du rectangle de meſme hauteur, deſcrit ſur la baſe EF, comme EV, qui eſt plus grand que la ſection FLE.

c 6. 4. Sch. 9. 4.

d 41. 1.

Maintenant ſoient les 8. figures reſtantes FM,

MG, &c. plus petites que k. Car si ainsi n'estoit, il faudroit diuiser les arcs derniers, & tousiours inscrire des polygones, dont le dernier auroit les costez doubles en multitude à ceux de son precedent, & oster tousiours plus de la moitié de chaque segment, à sçauoir son triangle Isoscele. Il est euident que les dernieres sections seront en fin moindres que K.

Finalement, soient donc lesdictes huict sections restantes moindres que K: il est manifeste que ledict octogone sera plus grand que I; I & K ensemble estans egales au cercle E F G H. Soit aussi descrit vn octogone semblable dans le cercle AB CD, couppant en deux egalement chacun des demy-cercles ABC, ADC, par B & D, & chaque partie derechef en deux egalement par P, Q R, S: & ayant conioinct des lignes droictes à tous lesdicts poincts; Il est manifeste que la figure octogone inscrite, sera semblable à l'octogone inscrit au cercle EFGH, [c] & ledict octogone du cercle ABCD, sera à l'octogone du cercle EFGH, comme le q. du diametre AC, au q du diametre EG: mais comme le q. de AC, au q. de EG: ainsi le cercle ABCD, est à I: [f] donc comme le polygone A f Q S, au polygone EMO, ainsi le cercle ABC sera à I. Mais le polygone AQS, est moindre que le cercle ABC, [g] donc le polygone EMO, sera moindre aussi que I, ce qui est absurde, estant monstré plus grand. Donc la figure I ne peut estre moindre que le cercle EFGH.

c 1. 12.

f 11. 5.

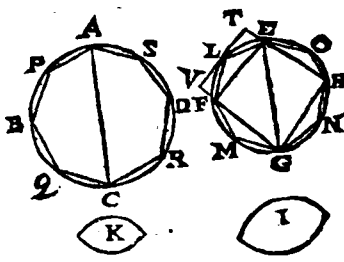
g 14. 5.

Elle ne peut aussi estre plus grande: car le cercle ABC estant à I, comme le q. de A C, au quarré de EG, en changeant I sera au cercle ABC, comme le q. de EG, au q. de AC: mais soit entendu que

comme I est au cercle ABC, ainsi le cercle EFG, à quelque autre, cõme à K: donc [h] cõme I est plus grande que le cercle EFG, ainsi le cercle ABC, [i] sera plus grand que K, & le cercle ABC, sera à K, cõme le q. de AC, au q. de EG: ce qui est contre la premiere partie de cette Proposition, où est monstré qu'vn des cercles estant à vne figure en la raison des quarrez des diametres: que telle figure ne peut estre moindre que l'autre cercle: donc I ne peut estre plus grande que le cercle EFG, ny moindre, comme en la premiere partie: partant egale. Donc les cercles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

h 14. 5.

i 11. 5.



COROLLAIRE.

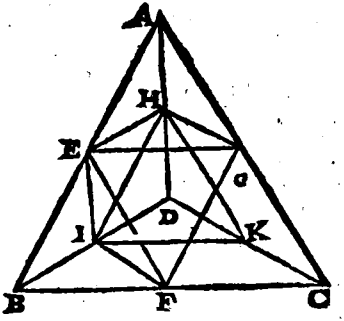
De là s'ensuit, que comme le cercle est au cercle, ainsi le polygone descrit en celuy-là, est au polygone semblable descrit en cettuy-cy: puis que tant le cercle est au cercle, que le polygone au polygone, comme le quarré du diametre au quarré du diametre; comme il est demonstré.

(·.·) (·.·) (·.·)

THEOREME 3. PROP. 3.

Toute Pyramide ayant la baſe triangulaire, ſe peut diuiſer en deux pyramides egales, & ſemblables entr'elles, ayans les baſes triangulaires, & ſemblables à la toute: Et en deux priſmes egaux, leſquels deux priſmes ſont plus grands que la moitié de toute la pyramide.

Soit la pyramide, dont la baſe eſt le triangle A BC, & le ſommet D. Soient couppez tous ſes coſtez en deux egalement par E,F,G,H,I,K,& conioinctes EF,FG,GE, HI,IK,KH,HE,EI,IF. Ainſi elle eſt diuiſee en 4. pyramides AEGH,HIKD: dont les baſes ſont les triangles AEG, HIK, & les ſommets H,D: & en deux ſolides EBFGHI, CFGHIK, dont la baſe de celuy-là eſt le parallelogramme EBFG, & les



triangles EHG,BIF; mais la baſe de celuy-cy eſt le triangle CFG, auquel eſt oppoſé le triangle KIH, leſquels priſmes ont pour terme commun le parallelogramme FGHI, compoſans auec les

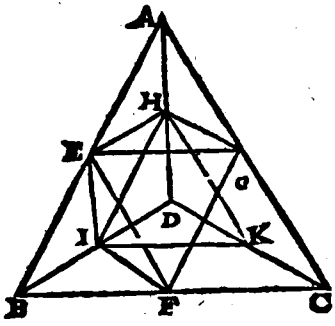
deux pyramides, la pyramide totale. Ie dis que ces deux pyramides ſont egales & ſemblables entr'elles, & ſemblables à la toute, & que ces deux priſmes ſont egaux entr'eux, & plus grands que la moitie de toute la pyramide.

Car AD, DB, coſtez du triangle ADB, eſtans couppez en 2. egalement, & partant proportionnellement [k] HI, AB ſeront paralleles, & auſſi IK, BC, & HK, AC, & EG, BC, & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; EI, AD; & IF, DC: & HG, DC [l] paralleles par meſme raiſon. [l] Mais FG, HI eſtans paralleles à AB, ſont parall. entr'elles, & ainſi GH, FI, eſtans parall. à DC, le ſont auſſi entr'elles: dõc AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI, ſont parallelogr. Mais HE, HG, eſtans parall. à [m] DB, DC, les [m] angles EHG, BDC, ſont egaux: par meſme raiſon HEG, DBC, & HGE, DCB, ſeront egaux. [n] Partant les coſtez du triangle *H E G*, ſont proportionaux aux coſtez du *triangle DBC*, à l'entour des angles egaux: *parquoy le triangle* HEG, eſt ſemblable au triangle DBC. [o] Mais les triangles HAE, HAG, AEG, ſont auſſi ſemblables [p] aux triangles DAB, DAC, ABC. [p] Donc la pyramide AEGH, eſt ſemblable à la pyramide ABCD.

Derechef, HI, HK, eſtans paralleles à *AB*, *AC*: [q] les angles IHK, BAC, ſeront egaux: & *ſemblablement* HIK, ABC, & HKI, ACB, egaux. [r] *Parquoy* les coſtez du triangle HIK, ſont *proportionaux* aux coſtez du triangle ABC, autour des angles egaux, & le triangle HIK, eſt ſemblable au triangle ABC: mais les triangles DHI, DIK, DKH, ſont [t] ſemblables aux triangles DAB, DCB, DCA, donc la pyramide [t] HIKD, eſt auſſi ſemblable

k 2. 6.
l 9. 11.
m 10. 11.
n 4. 6.
o Cor. 4. 6
p 9. d. 11.
q 10. 11.
r 4. 6.
s Co. 4. 6.
t 9. d. 11.

à la pyramide ABCD. Mais les triangles AHE, HDI, eſtans ſemblables au triangle ADB, comme [u] il eſt monſtré, [x] ſeront auſſi ſemblables entr'eux, & eſtans conſtituez ſur AH, HD egales, [y] ils ſeront egaux. par meſme raiſon AHG, HDK, ſeront egaux & ſemblables, eſtans monſtrez ſemblables au triangle ADC, & conſtituez ſur lignes egales AH, HD: & ainſi les triangles AEG, HIK, ſeront egaux & ſemblables, eſtans monſtrez ſemblables au triangle ABC, & poſez ſur AE, HI egales, [z] eſtans les coſtez oppoſez du parallelog. AEHI.



u Cor. 4. 6
x 21. 6.
y Le. 22. 6
z 34. 1.

Item, EHG, IDK, ſeront egaux & ſemblables, eſtans monſtrez ſemblables au triangle BDC, & ayans HE, DI egales [a] au parallelogramme HEID. Doncles pyramides AEGH, HIKD, [b] ſont egales & ſemblables, tous les triangles de l'vne eſtans monſtrez egaux & ſemblables à tous les triangles de l'autre.

a 34. 1.
b 10. d. 11.

Derechef, [c] EH, HG, GE, eſtans egales & paralleles à BI, IF, FB, aux parallelogrãmes EHIB, FGHI, BFGE: les triangles EHG, BFI, [d] ſeront equiangles & egaux entr'eux: & partant ſemblables; mais ils ſont auſſi paralleles, EH, HG, par leſquelles le plan EHG eſt mené, eſtans paralleles à BI, IF, par leſquelles eſt mené le plan BIF.

c 34. 1.
d Co. 8. 1.
15. 11.

Donc le solidé BIFGHE, contenu des 2. triang. EHG, BIF, egaux, semblables & paralleles oppoſez, & des 3. parallelog. EGFB, BEHI, IFGH, eſt
34. 1. prisme par la definition. Ainſi le ſolide CFGHIK ſera monſtré priſme: car FC, CG, GF eſtans egales & paral. à Ik, kH, HI, aux parallelo. CFIk, CGH k, FGHI, les triang. CFG, HIK, ſeront egaux & e-
c 15. 11. quiangles entr'eux, & partant ſemblables: c Mais ils ſont paralleles, CF, CG, par leſquelles eſt mené le plan CFG, eſtans parall. à kI, kH, par leſquelles paſſe le plan kIH. Donc le ſolide CFGHIk, contenu des 2. triang. oppoſez CFG, HIk, egaux, ſemblables & paralleles, & des trois parallelog. CFIk, kHGC, IFGH, eſt priſme: & iceux priſmes EBFGHI, CFGHIK, ſont de meſme hauteur, ſçauoir entre les plans paral. BCGE, HIk, & la baſe
f 40. 11. quadrangulaire eſtant double de la triangulaire: f ils ſeront egaux entr'eux.

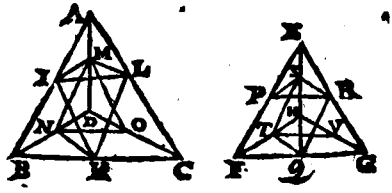
Finalement, le priſme EBFGHI, *eſtant plus* grand que la pyramide EBFI, *le tout que ſa* partie; mais EBFI, pyramide, eſt egale & ſemblable à la pyramide AEGH, & auſſi à la pyramide HIkD, comme il eſt manifeſte par l'egalité & ſimilitude des triang. Les priſmes EBFGHI, CFGHIk ſeront plus grands que les pyram. AEGH, HIkD. Partant iceux priſmes excedent la moitié de la pyramide totale ABCD: mais icelles pyram. *defaillent* de la moitié de la meſme totale. Car *vn tout* eſtant diuiſé en 2. parties inegales, la *plus grande* partie excede la moitié d'iceluy. & la *moindre* defaut d'icelle moitié. Donc toute pyramide ayant la baſe triangulaire, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME

THEOREME 4. PROPO. 4.

S'il y a deux pyramides de meſme hauteur, ayans les baſes triangulaires, & que chacune d'icelles ſoit diuiſee en 2. pyramides egales entr'elles, & ſemblables à la toute, & en deux priſmes egaux: Et que ſemblablement l'vne & l'autre des pyramides prouenuës de cette premiere diuiſion ſoit diuiſee; & que cela ſe faſſe touſiours de meſme façon: comme la baſe de l'vne des pyramides ſera à la baſe de l'autre, ainſi auſſi tous les priſmes qui ſont en l'vne des pyramides, ſeront à tous les priſmes de l'autre, egaux en multitude.

Soient ſur les baſes triangulaires ABC, EFG, deux pyramides ABCD, EFGH, de meſme hauteur, dont les coſtez ſoient diuiſez en deux egalement, & conioinctes des lignes droictes des diuiſions, cõme en la precedente, enſorte que chacune ſoit diuiſee en deux pyramides egales entr'elles, & ſemblables à la



toute, ſçauoir en AILM, MNOD, EPRS, STVH; & en deux priſmes egaux IBkLMN, CkLMNO, PFQRST, GQRSTV; comme veut la precedente: & que les pyramides faictes AILM. MNOD, EPRS, STVH, ſoient entenduës eſtre diuiſees de meſme, & ainſi de ſuitte.

Ie dis que tous les priſmes faicts en la pyramide ABCD, ſont à tous les priſmes faicts en la pyramide EFGH, egaux aux premiers en multitude, comme la baſe ABC, à la baſe EFG.

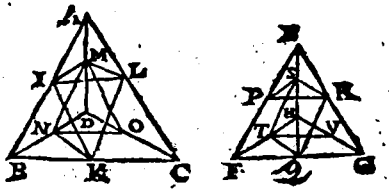
Car, puis que comme BC à Ck, ainſi FG, à GQ. l'vne & l'autre ligne eſtant diuiſee en deux egalement; & les triangles ABC, LkC, eſtans ſemblables, & ſemblablement poſez. [g]

g Co. 4. 6.
h 22. 6.

Item, les ang. EFG, RQG, [h] auſſi cõme le triangle ABC, ſera au triangle LkG, ainſi le triangle EFG, au triangle RQG, & en changeant, comme ABC à EFG ainſi LkC à RQG: mais comme LkC à RQG, ainſi le priſme CkLMNO, au priſme GQRSTV; comme il ſera monſtré incontinent: & partant ainſi le priſme IBkLMN, au priſme PFQRST, ceux-cy eſtãs egaux à ceux-là. Et comme vn priſme ſeul, ſçauoir IBkLMN, à vn ſeul priſme PFQRST: ainſi les deux priſmes IBkLMN, CkLMNO enſemble, ſont aux deux PFQRST, GQRSTV, enſemble. Donc auſſi comme la baſe ABC, à la baſe EFG, ainſi les deux priſmes en la pyramide ABCD, au 2. en la pyramide EFGH; ſemblablement on monſtrera que les deux priſmes qui ſont aux pyramides AILM, MNOD, faictes en la pyramide ABCD, ſont aux deux priſmes qui ſont aux pyramides EPRS, STVH, faictes en

12. 5.

la pyramide EFGH, cõme les baſes AIL, MNO, de ces pyramides là, ſont aux baſes EPR, STV, de celles-cy, & ainſi de ſuitte, faiſans touſiours la meſme diuiſion. Mais comme ces baſes là à celles-cy, ainſi LKC, baſe, qui eſt egale à celles-là, & ſemblable, eſt à la baſe RQG, qui eſt egale & ſemblable à celles cy, comme il eſt demonſtré en la precedente, c'eſt à dire, ainſi la baſe ABC, à la baſe EFG. Donc auſſi comme la baſe ABC, à la baſe EFG: ainſi les priſmes de chaque pyramide, faicte en la pyramide de ABCD, ſeront aux priſmes de chaque pyramide, faicte en la pyramide EFGH: partant auſſi comme les priſmes de la pyramide ABCD, aux priſmes de la pyram. EFGH, ainſi les priſmes tant de la pyram. AILM, ſont aux priſmes de la pyram. EPRS, que ceux de la pyram. MNOD, à ceux de STVH, & ainſi de ſuitte.



Parquoy, puis que comme deux priſmes de la pyram. ABCD, ſont à 2. priſmes de la pyramide EFGH, [k] ainſi tous les priſmes qui ſont aux pyramides ABCD, AILM, MNOD, &c. enſemble, ſont à tous les priſmes enſemble, qui ſont aux pyramides EFGH, EPRS, STVH, &c. Si ceux cy ſont egaux en mult. à ceux là. Pareillement, cõme la baſe ABC, à la baſe EFG: ainſi tous les priſmes de la pyramide ABCD, à tous les priſmes de la pyramide EFGH. Partant, ſi deux pyramides de [k] 12. 15.

meſme hauteur, ayans les baſes triangulaires, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

LEMME.

Or que comme LKC, eſt à RQG, ainſi le priſme CKLMNO, au priſme GQRSTV, on le demonſtrera ainſi: ſoient entendues des perpendiculaires menees des ſommets D, H, ſur les baſes ABC, EFG, leſquelles ſeront les hauteurs egales des pyramides ABCD, EFGH. D'autant donc que les
117. 11. *plans paralleles ABC, MNO, [l] couppent deux lignes droites, ſçauoir DC, & la perpendiculaire menee de D, proportionellement: mais DC eſt couppee en deux egalement à O, la perpendiculaire menee de D, ſera auſſi couppee en deux egalement, au poinct où elle rencontre le plan MNO: par meſme raiſon la perpendiculaire menee de H, ſera couppee en deux egalement, par le plan STV: parquoy les perpendic. totales eſtans poſees egales, leurs moitiez, ſçauoir la hauteur des priſmes, ſeront egales: donc les priſmes CKLMNO, GQRS*
[m] 34. 11. *TV, ayans hauteurs egales; [m] ſeront entr'eux, comme les baſes LKC, RQG.*

SCHOLIE.

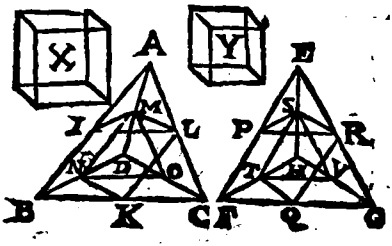
Le Copiſte a pris la demonſtration de cette Propoſition de Clauius, mot pour mot, où eſt cité le Corollaire de la 4. Propoſition du 6. liure: lequel Corollaire il n'a pas mis en ſon liure, encore qu'il le cite auſſi à l'autres Propoſitions cy-apres comme à la 4. du 15. liure, &c. tellement que ceux qui auront ſon li. auront auſſi beſoin d'auoir celuy de Clauius.

THEOREME 5. PROP. 5.

Les Pyramides qui ſont de meſme hauteur, & ayans les baſes triangulaires, ſont l'vne à l'autre comme leurs baſes.

Soient ABCD, EFGH pyramides de meſme hauteur, dont les baſes ſont les triangles ABC, EFG. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe à la baſe.

Car, s'il n'eſt ainſi, ſoit poſé comme la baſe ABC, à la baſe EFG: ainſi la pyramide ABCD, au ſolide X, qui ſera moindre ou plus grand que la pyramide EFGH.

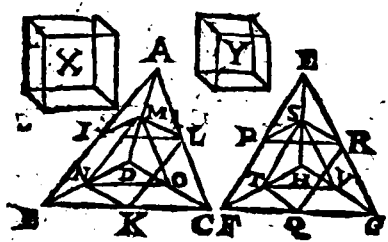


Soit premierement plus grande de Y, & ſoit diuiſee la pyramide EFGH, en deux pyramides egales, & en deux priſmes egaux, ſelon la 3. Prop. 12. Derechef, les deux pyramides faictes en EFGH, ſoiét pareillemét diuiſees en deux pyramides egales, & en deux priſmes egaux, & ainſi de ſuitte. D'autant donc que ſi de la pyramide EFGH, on oſte plus de la moitié, ſçauoir les deux priſmes, PFQRST, GQRSTV, plus grands que la moi- n 3. 12.

tié de la pyramide EFGH. Item, des pyramides restantes EPRS, STVH, plus de la moitié, sçauoir leur prismes, & ainsi de suitte: Il° restera enfin v-
¶ 1.10. ne moindre grandeur que Y, excez de EFGK, sur le solide X. Soit donc maintenant la grandeur restante moindre: mais la pyramide EFGH estant posee egale aux solides X, Y, les prismes restans en la pyramide EFGH, seront plus grands que X.

Soit diuisee la pyramide ABCD en deux pyramides egales, & en deux prismes egaux: & aussi semblablement les pyramides faictes, AILM, MNOD, en deux pyramides egales, & en 2. prismes egaux; & cela soit faict autant de fois qu'en la pyramide EFGH.[P]

¶ 4. 12. D'autant donc que tous les prismes en la pyramide ABCD, sont à tous ceux de la pyramide EFGH, egaux en nombre, comme la base ABC, à la base EFG, c'est à dire, comme la pyramide ABCD



à X. Mais tous les prismes en la pyramide ABCD
¶ 14. 5. estans moindres que la toute ABCD; ¶ aussi tous les prismes en la pyramide EFGH, seront moindres que le solide X. Mais ils sont aussi monstrez plus gands. Ce qui est absurde. Donc X n'est moindre que EFGH.

Soit en apres le solide X, plus grand que la pyramide EFGH. Donc la pyramide A B C D estant posee à X comme la base ABC, à la base EFG: par conuersion de raison X sera à ABCD, comme la base EFG, à la base ABC. Comme X est à ABCD pyramide, ainsi la pyramide EFGH, soit posee au solide Y. Et X estant posé plus grand que EFGH, [f] la pyramide ABCD, sera plus grande que Y. [f 14. 5.] Donc comme la base EFG, est à la base ABC, ainsi la pyramide EFGH à Y, qui est moindre que la pyramide ABCD. Ce qui est absurde. Estant desia monstré que comme la base est à la base, ainsi la pyramide ne peut estre à vn solide moindre que la pyramide. Donc le solide X, n'est plus grand que la pyramide EFGH, & aussi est monstré n'estre moindre, partant egal. Parquoy, puis que comme la base ABC, est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD, est posee à X. [t] Mais ABCD pyramide, est à X, comme à la pyramide EFGH, egale à X solide. Aussi comme la base ABC, à la base EFH, ainsi la pyramide ABCD, à la pyramide EFGH. Donc les pyramides de mesme hauteur, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [t 9. 5.]

SCHOLIE.

En conuertissant. Si les pyramides triangulaires sont l'vne à l'autre comme leurs bases, elles seront de mesme hauteur. Car si on croit l'vne plus haute que l'autre, de la plus haute en soit couppé vne egale à la moindre. Et menees des lignes droictes à tous les angles de la base, du poinct de la section comme la base à la base, ainsi la pyramide à la pyramide lors constituee; mais elle estoit aussi ainsi

19.5. *à toute la pyramide, parquoy la pyramide conſtituee ſera egale à la toute, la partie à ſon tout. Ce qui eſt impoſſible.*

COROLLAIRE.

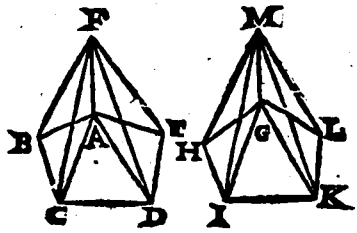
D'icy il aduient, que les pyramides de meſme hauteur conſtituees ſur meſme baſe, ou baſes egales triangulaires, ſont egales entr'elles, ayans meſme raiſon que leurs baſes qui ſont poſees egales, ou vne meſme.

Il s'enſuit au contraire, que les pyramides triangulaires egales, conſtituees ſur vne meſme baſe ou baſes egales, ſont de meſme hauteur. Et que les pyramides triangulaires egales ayans meſme hauteur, ont baſes egales, ou vne meſme, leſquelles deux choſes on monſtrera par *la premiere* partie de ce Corollaire, par meſme *diſcours* dont on a vſé en la demoſtration de la conuerſe de la Propoſition 30. & 31. liure 11. Si vne autre pyramide eſt conſtituee, tant en la hauteur, que ſur la baſe retranchee.

THEOREME 6. PROP. 6.

Les Pyramides qui ſont de meſme hauteur, & ayans les baſes Polygones, ſont l'vne à l'autre comme leurs baſes.

Soient les pyramides ABCDEF, GHIKLM. Dont les baſes ABCDE, GHIKL, ont les coſtez egaux en multitude. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe à la baſe.



Car, ayant reduict les baſes en triang. egaux en nõbre, chacune pyramide ſera diuiſee en autant de pyramides triangulaires. [v] Mais puis que comme la baſe ABC, eſt à la baſe ACD, ainſi la pyramide ABCF, à la pyramide ACDF, en compoſant comme la baſe ABCD, à la baſe ACD, ainſi la pyramide ABCDF, à la pyramide ACDF. [x] Mais derechef, comme la baſe ACD, à la baſe ADE, ainſi la pyramide ACDF, à la pyramide ADEF. Donc en raiſon egale, comme la baſe ABCD, à la baſe ADE, ainſi la py. ABCDF, à la pyra. ADEF: donc en compoſant comme la baſe ABCDE, à la baſe ADE: ainſi la pyramide ABCDEF, ſera à la pyramide ADEF. Par meſme raiſon, comme la baſe GHIKL, ſera à la baſe GKL, ainſi la pyramide GHIkLM, à la pyramide GkLM: & par raiſon conuerſe, comme la baſe GkL, à la baſe GHIkL, ainſi la pyramide GkLM, à la pyramide GHIkLM. [y]

v 5.12.

x 5.12.

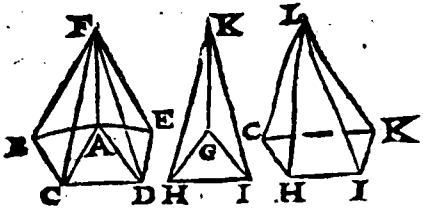
Derechef, d'autant que comme la baſe ADE, eſt à la baſe GkL, ainſi la pyramide ADEF, à la pyramide GkLM: Il y aura 4. baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIkL, en meſme raiſon que les 4. pyramides ABCDEF, ADEF, GkLM, GHIkLM. Donc en raiſon egale, comme la baſe ABCDE, à à la baſe GHIkL, ainſi la pyramide ABCDEF, à la ypram. GHIkLM. Et partant les pyram. qui ont, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

y 5.12.

SCHOLIE.

Combien qu'il ſoit parlé en la demonſtration de cette Propoſition des Pyramides de meſme hauteur ſeulement, ſelon les interp. dont les baſes Polygones ont les coſtez egaux en multitude. Neantmoins le meſme eſt demonſtré des pyramides de meſme hauteur, dont la baſe de l'vne a plus de coſtés que celle de l'autre.

Car en premier lieu, ſoient deux pyramides de meſme hauteur, ABCDEF, GHIK, & la baſe de la premiere ſoit polygone, ſçauoir pentagene, & celle de la 2. triangulaire. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe à la baſe: car
2 5. 12. *ayant reduit le pentagone en triangles, la pyram. ſera diuiſee en autant de pyramides.* [2] *Et puis que*



comme la baſe ABC premiere grandeur, à la baſe GHI 2. grandeur, ainſi la pyramide ABCF, 3. à la pyramide GHIK 4. Et ſemblablement, comme la baſe ACD 5. grandeur, à la baſe GHI 2. ainſi la pyramide ACDF 6. à la pyram. GHIK 5. gr.
[a] *Comme la baſe ABCD premiere, &c. enſemble,*
24. 5. *ſera à la baſe GHI 2. ainſi la pyramide ABCDF 3. & 6. ſera à la pyram. GHIK 4. grandeur.*

Derechef, d'autant que comme la baſe ABCD,

eſt à la baſe GHJ, ainſi la pyramide ABCDF, eſt à la pyr. GHIK, comme il eſt demonſtré, [b] *& que comme la baſe ADE 5. grand. eſt à la baſe GHJ 2. ainſi la pyr. ADEF 6. à la pyr. GHIK 4.* [c] *La baſe ABCDE, ſera à la baſe GHI, comme la pyr. ABC DEF; eſt à la pyr. GHIK. Ce qui eſt proposé. Et faut faire ainſi touſiours, s'il y a d'auantage de triangles en la baſe polygone, &c.* b 5. 12. c 24. 5.

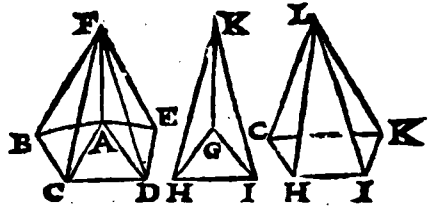
Or la pyram. ABCDEF, eſtant à la pyram. GHJK (comme eſt demonſtré,) comme la baſe polygone ABCDE, eſt à la baſe triangulaire GHI: ainſi en changeant comme GHJ, ſera à ABCDE, ainſi GHIK, ſera à ABCDEF. pyr. Partant 2. quelconques pyra. dont l'vne la baſe polygone, & l'autre triangulaire, ſont touſiours comme leurs baſes, de quelque façon que l'on commence. Car ſoit que la demonſtration commence au polygone & à ſa pyr. comme appert par la demonſtration, toutefois en changeant on peut commencer au triangle & à ſa pyramide, comme dit eſt.

Secondement, ſoient deux pyramides de meſme hauteur ABCDEF, GHJKL, dont les baſes ſont polygones, & y a plus de coſtez en vne baſe qu'en l'autre. Ie dis que la pyr. eſt à la pyram. comme la baſe à la baſe.

Car ayant reduict le polygone ABCDE en triangles, ABC, ACD, ADE, la pyramide ſera diuiſée en autant de pyr. Et puis que comme la baſe triang. ABC 1. gra. eſt à la baſe polygone GHIK 2. gran. ainſi la pyr. ABCF 3. eſt à la pyram. GHIKL 4. Et comme la baſe ACD 5. eſt à la baſe GHIK 2. gr. ainſi la pyram. ACDF 6. eſt à la pyra. GHJKL 4. Auſſi comme la baſe ABCD 1. gr. auec la 5. ſera à la baſe GHIK 2. ainſi la pyr. ABCDEF 3. & 6. 24. 5.

grandeur, ſera à la pyramide GHIKL 4. grandeur.

Derechef, d'autant que comme la baſe ABCD 1 grandeur, à la baſe GHIK 2. ainſi la pyramide ABCDEF 3. à la pyramide GHIKL 4. comme nous venons de demonſtrer: & auſſi comme la baſe



ADE 5. grandeur, à la baſe GHIK 2. ainſi la pyramide ADEF 6. à la pyramide GHIKL 4. comme
d24.5. *il eſt monſtré auparauant, & auſſi comme la baſe ABCDE 1. grandeur, auec la 5. à la baſe GHIK 2. ainſi la pyramide ABCDEF 3. grandeur, auec la 6. à la pyramide GHIKL 4. grandeur. Ce qui eſt propoſé. On procedera de meſme s'il y a pluſieurs triangles en la baſe ABCDE. Or cette 6. Propoſition, & ce qui eſt demonſtré en ce Scholie, ſe conuertit ainſi.*

Les pyramides de quelconques baſes, qui ſont entr'elles comme leurs baſes, ſont de meſme hauteur.

Ce qui ſera demonſtré tout de meſme que les choſes qui ont eſté dites au Scholie de la 5. Propoſition de ce liure, ont eſté demonſtrees.

COROLLAIRE.

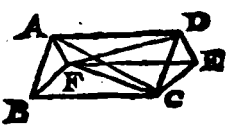
Il eſt auſſi manifeſte de là, que les pyramides de

meſme hauteur conſtituees ſur baſes egales multilateres, ou ſur vne meſme, ſont egales entr'elles, ayans meſme proportion que leurs baſes qui ſont poſees egales ou vne meſme.

Derechef, il s'enſuit au contraire que les pyramides multilateres egales, & conſtituees ſur baſes egales ou vne meſme, ont meſme hauteur. Et que les pyramides multilateres egales ayans meſme hauteur, ont les baſes egales, ſi elles ne ſont ſur vne meſme. Ces deux choſes ſeront demonſtrees comme nous auons dict au Corollaire de la 5. Propoſition de ce liure.

THEOREME 7. PROP. 7.

Tout priſme ayant la baſe triangulaire, peut eſtre diuiſé en trois pyramides egales entr'elles, ayans les baſes triangulaires.



Soit le priſme A B C D E F, dont les deux triangles opposez ſont egaux & ſemblables A B F, D C E. Ie dis qu'iceluy priſme peut eſtre diuiſé en 3 py. triang. egales entr'elles.

Car aux trois parallelogrammes ſoient menez trois diametres, ſçauoir A C, au parall. A B C D: C F, au parall. B C E F, & F D, au parall. A D E F, [c] D'autant que les triangles A B C, A D C, ſont egaux, [f] & que comme la baſe A B C, eſt à la baſe A D C, ainſi la pyramide A B C F, à la pyr. A D C F: ces pyr ayans meſme hauteur, ſçauoir la perpendicu-

[c] 34. 1.
[f] 5. 12.

laire menee du ſommet F, au plan ABCD; les pyram. ABCF, ADCF, ſeront egales entr'elles: ſemblablement les pyram. ADFC, EFDC, conſtituees ſur les baſes egales ADF, EFD, & en meſme hauteur, ſçauoir de la perpendiculaire menee du ſommet C, ſur le plan ADEF, ſeront egales: mais la pyram. ADCF, eſt la meſme que la pyram. ADFC, celle-là eſtant contenuë de quatre plans, ſçauoir de la baſe ADC, & des triã. ADF, ACF, DCF, & celle-cy des meſmes 4. plans. Doncles 3. pyr. ABCF, ADCF, EFDC, ou CDEF (qui eſt la meſme que EFCD) compoſans tout le priſme, ſont egales entr'elles. Partant tout priſme ayant la baſe triangulaire, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

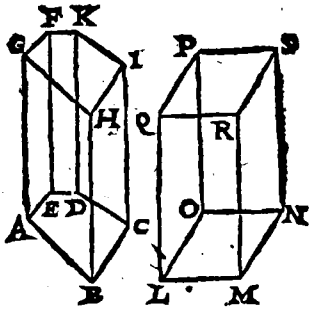
Il s'enſuit de cecy, que toute pyramide eſt la tierce partie du priſme, qui a meſme hauteur, & meſme baſe qu'icelle, ou egales, ou bien tout priſme eſt triple de la pyramide qui a meſme hauteur qu'iceluy, & meſme baſe, ou egales.

SCHOLIE.

Les priſmes qui ſont ſous meſme hauteur, quelconques ſoient les baſes, ſont entr'eux comme leurs baſes.

Soient deux priſmes de meſme hauteur ABCDE FGHIK, LMNOPQRS, dont les baſes ſont multilateres. Ie dis que comme la baſe AC eſt à la baſe LN, ainſi le priſme eſt au priſme.

Car si de tous les angles de l'vne & l'autre, on mene des lignes à vn poinct du plan superieur, opposé à la base, l'on fera deux pyramides de mesme hauteur que les prismes, ayans mesmes bases: donc par le Corollaire de cette Proposition, chacune de ces pyr. sera la tierce partie de son prisme. [g] *Partant, comme la pyr. à la pyr.* [h] *ainsi le prisme sera au prisme: mais la pyr. est à la pyram. comme la base à la base,* [h] *comme il est demonstré. Donc comme la base à la base, ainsi le prisme au prisme. Ce qui est proposé.*



g 15. 5.

h 6. 12.

COROLLAIRE.

D'où il s'ensuit, que les prismes de mesme hauteur sur vne mesme base, ou bases egales quelconques, sont egaux entr'eux: puis qu'ils ont mesme raison que leurs bases, qui sont posees egales ou vne mesme: Au contraire les prismes egaux, sur bases egales, ou vne mesme sont de mesme hauteur, & les prismes egaux de mesme hauteur ont les bases egales ou vne mesme. Ce qui sera demonstré, comme à la conuerse de la 31. Prop. 11.

Le Copiste (selon sa coustume) a copié cette Pro-

position tout de mesme qu'elle estoit desia traduite, sans considerer si elle est conforme au texte d'Euclide, ny à la demoustration: ainsi. Tout prisme est diuisé en 3. pyr. egales, ayans les bases triangul. *Ce qui n'est pas vray, comme il est manifeste, par ce qui a esté dict cy-dessus, et mesme par le Corell. qu'il a pris de Clauius, où il dict.* Il s'ensuit de cecy, que toute pyr. est la tierce partie de tout prisme, qui a la mesme hauteur & mesme base qu'icelle, &c.

Donc si vne pyramide a pour exemple la base quadr. elle sera aussi la 3. partie d'vn prisme, qui aura aussi la base quadr. & mesme hauteur qu'icelle, et iceluy pourra estre diuisé en 3. telles pyr. qui auront les bases quadrilat. & non triangulaires. Et aussi Euclide ne l'a pas ainsi proposé; mais comme il s'ensuit.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν, διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. *C'est à dire.* Tout prisme ayant la base triangulaire, se diuise en trois pyramides egales entr'elles, ayans les bases triangulaires.

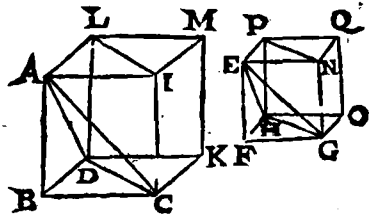
Or tout prisme qui a la base quadrilataire est diuisé en deux prismes ayans les bases triangulaires, chacun desquels est diuisé en 3. pyram. egales ayant les bases triangulaires, comme il est monstré, & 2. d'icelles prises ensemble font vne seule pyramide, ayant la base quadrilataire, laquelle est la tierce partie de tout le prisme. Donc tout prisme n'est pas diuisé en 3. pyramides egales entr'elles, ayant les bases triangulaires: mais bien tout prisme ayant la base triangulaire, comme dict Euclide, &c.

THEOREME

THEOREME 8. PROP. 8.

Les pyramides semblables, & qui ont les bases triangulaires, sont en raison triplee de leurs costez homologues.

Soient ABCD, EFGH, pyramides semblables, ayans les bases triangulaires ABC, EFG. Ie dis qu'elles sont en raison triplee des costez de mesme raison, BC, FG.



Car soient acheuez les parallelipip. BM, FQ, les pyramides estans semblables, les angles plans ABC, EFG, sont egaux, & comme AB à BC, ainsi EF à FG, les parallelogrammes BI, FN, seront semblables. Semblablement les angles ABD, EFH estans egaux, & comme AB à BD, ainsi EF à FH. Item, les angles DBC, HFG egaux, & comme DB à BC, ainsi HF à FG: les parallelog. AL, BK, seront semblables aux parallelogrammes FP, FO. [k] Mais tant les trois BI, BK, BL, du parallelipipede BM, sont egaux & semblables aux trois opposez DM, AM, CM, que les trois FN. FO, FP, du parallelip. FQ, le sont aux trois opposez HQ. EQ, GQ. Dõc les six plans contenans le solide BM, sont egaux [k] 14. 11.

l 9.d. 1. aux 6.du ſolide FQ. l Parquoy les parallelipipedes BM, FQ ſont ſemblables : mais d'autant que les
m 15.5. lignes LI, PN, eſtans menees, les m priſmes DBC ILA, HFGNPE, ont meſme raiſon que les parallelip. BM, FQ. leurs doubles, & les pyram. ABC
n 11. 5. D, EFGH, meſme raiſon que leſdicts priſmes triples d'icelles; n les pyr. auront auſſi meſme raiſon
o 33.11. que les parallelipipedes. o

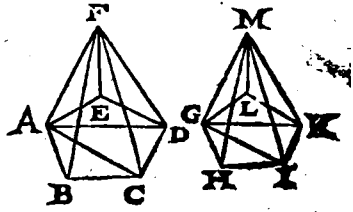
Mais les paral. BM, FQ, eſtãs en raiſon triplee de leurs coſtez homologues BC, FG; les pyramides ABCD, EFGH, ſeront auſſi en raiſon triplee de BC, à FG. Donc les pyramides, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il eſt auſſi manifeſte, que les pyramides ſemblables, dont les baſes ont *plus* de trois coſtez, ſont en *raiſon* triplee de leurs coſtez homologues.

Car ſoient ABCDEF, GHIKLM, pyramides ſemblables, ayans rectilignes ſemblables de pluſieurs coſtez pour baſes. Ie dis que ces pyr. ſont en raiſon triplee des coſtez homologues AB, GH. Car de A & G, ayant mené les lig. AC; AD, GI,
p 20. 6. GK, aux angles oppoſez; p les baſes ſemblables ſeront diuiſees en nombre egal de triangles ſembl. ſçauoir ABC, ACD, ADE, ſeront ſemblables à GHI, GIK GKL. Donc les pyra. eſtans ſemblables les triangles AFB, GMH ſont ſemblables, & l'angle FAB, egal à MGH, & comme FA à AB, ainſi MG à GH : mais comme AB à AC, ainſi GH à

GI, les triang. ABC, GHI, eſtans ſembl. Partant en raiſon egale, cõme FA à AC, ainſi M G à GI.



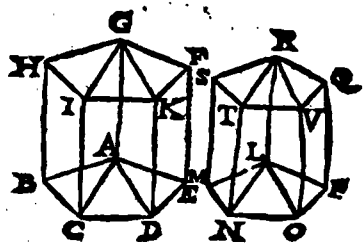
Derechef, d'autant que comme AC à CB, ainſi GI à IH, ABC, GIH, eſtans ſemblables; & comme GB à CF, ainſi IH à IM: BCF, HIM, triang. eſtans ſembl. à cauſe des pyr. ſembl. & en raiſon egale, comme AC à CF, ainſi GI à IM: donc eſtant comme FA à AC, ainſi MG à GI, & comme AC à CF, ainſi GI à IM: auſſi en raiſon egale comme FA à FC, ainſi MG à MI. [q] Donc AFC, GMI ſeront equiangles, partant ſemblables. [q] 5.6.

Mais AFB, BFC, ABC, ſont auſſi ſemblab. aux triang. GMH; HMI, GHI: Donc [r] les pyr. ABCF, GHIM, ſont ſemb. & ſemblablement auſſi ACDF, GHIKM: & ADEF, GKLM. [t] Donc les pyr. ABCF, ACDF, ACDEF, ſeront à GHIM, GIkM, GKLM, chacune à la ſienne en raiſon triplee des coſtez homologues AB, CD, DE, GH, IK, KL, chacun au ſien: y ayant donc vne meſme raiſon de AB, CD, DE, à GH, IK, KL, les pyram. ABCF, ACDF, ADEF, auront vne meſme raiſon, ſçauoir triplee, à GHIM, GIKM, GKLM. Donc [t] comme vne ſeule ABCF, à vne ſeule GHIM, ainſi toutes enſemble, ſçauoir la toute ABCDEF, à toutes, ſçauoir à la toute GHIKLM. [v] Donc la pyramide ABEF, eſtant à la pyramide GHIM, en raiſon triplee, des coſtez homologues AB, GH, [r] 8.d.12. [t] 8. 12. [t] 12. f. [v] 8. 12.

la pyramide ABCDEF, ſera auſſi à la pyramide GHIKLM, en raiſon triplee de AB à GH. Ce qui eſtoit propoſé.

SCHOLIE.

Par meſme raiſon, les priſmes ſemb. ſeröt en raiſö triple de leurs coſtez homolog. Car ſoient ABCDEF GHIK, LMNOPQRSTV, *priſmes ſemb. ie dis qu'ils ſont en raiſon triplee de leurs coſtez homologues.*



Car ſi de A & L, on mene AC, AD, LN, LO, [2] *les triang. ABC, CAD, DEA, ſeröt ſemblab. aux triang.* LMO, LNO, OPL; *& ſi de G & k, on mene auſſi* GI, Gk, RT, RV, *les triang.* GHJ, GIk, GkF, *ſeront ſemb. à* RST, RTV: RVQ, *& aux deuant dicts, tous les plans oppoſez des priſmes eſtans ſemb. par la definition du priſme. Et les parallelogrammes* CH, NS, *eſtans ſemb. par la ſimilitude des priſmes, comme* CJ *à* CB; *ainſi* TN *à* NM: *mais comme* BC *à* CA; *ainſi* NM *à* NL, *les triang. eſtans ſemb. Donc en raiſon egale comme* CI *à* CA, *ainſi* TN *à* NL.

Derechef, l'angle ſolide N, *eſtant egal à l'angle ſolide* C, *par la ſimilitude des priſmes, l'vn eſtant poſé ſur l'autre, l'angle* MNO, *conuiendra ſur l'angle* BCD, *&* TNM, *ſur* ICB, *&* TNO, *ſur*

[2] 10. 6.

ICD: mais la ligne NL, conuient auſſi ſur CA, les angles LMN, BCA eſtans egaux: Donc IAC, TNL ſont egaux, et les coſtez autour d'iceux eſtãs monſtrez proport. les parallelog. CG, NR, ſeront ſemb. mais les parall. CH, HA, ſont ſemb. à NS, SL, & les triang. ABC, GHI, à LMN, RST. y Partant les priſmes ABCIGH, LMNTRS ſont ſemb. Ainſi les priſmes CDAGIk, NOLRTU ſeront monſtrez ſemb. & auſſi AEDkGF, LPOVRQ. Donc les priſmes ABCIGH, CDAGIk, AED kGF ſont à LMNTRS; NGLRTU, LPOVRQ, chacun au ſien, en raiſon triplee des coſtez homologues BC, CD, DE, à MN, NO, OP, chacun au ſien; z comme il appert. y 8. d. 11. z 34. 11.

Parquoy on demonſtrera en la meſme maniere, que les priſmes ABCDEFGHIk, LMNOPQRSTU, ſont en raiſon triplee des coſtez homologues BC, MN, tout ainſi qu'il a eſté demonſtré cy-deuant aux pyram. de pluſieurs angles.

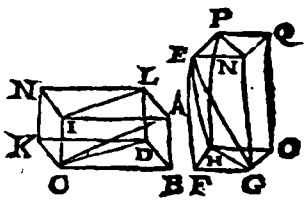
D'où l'on collige que les pyram. multangles ſemblables, ſe diuiſent en pyram. triangulaires ſemblables, et egales en nombre, & homologues à leurs touts. Ce qui eſt manifeſte de la demonſtration du precedent Corollaire.

Il s'enſuit auſſi que les priſmes multangles ſemblables, ſe diuiſent en priſmes ſemblables, ayans les baſes triangul. & egaux en nombre, & homologues à leurs touts, comme il appert de la demonſtration de ce Scholie.

THEOREME 9. PROPOSIT. 9.

Les baſes & les hauteurs des pyramides egales, ayans les baſes triangulaires ſont reciproques : Et les pyramides ayans les baſes triangulaires, deſquelles les baſes & les hauteurs ſont reciproques, ſont egales.

Soient les pyramides ABCD, EFGH, egales, ayans les baſes triangulaires. Ie dis que les baſes ABC, EFG, & les hauteurs ſont reciproques: c'eſt à dire, comme ABC, à EFG: ainſi la hauteur de la pyramide EFGH, à la hauteur de la pyramide ABCD.



Car ayant acheué les parallelip. BM, FQ, de meſme hauteur que les pyramides, & ayant mené LI, PN, les priſmes DBCILA, HFGNPE, (eſtans triples des pyram. poſees egales) ſeront egaux entr'eux, & partant *les* parallelip. BM, FQ auſſi egaux, eſtans *doubles des* priſmes, a & partant leurs baſes & leurs *hauteurs* ſeront reciproques, c'eſt à dire, comme *la* baſe BI, à la baſe FN, ainſi la hauteur du *ſolide* FQ, à la haureur du ſolide BM. b

a 34. 11.

b 15. 5.

Mais comme la baſe BI, à la baſe FN, ainſi le triang. ABC, au triang. EFG. Donc auſſi comme la baſe ABC, à la baſe EFG, ainſi la hauteur de

la pyramide EFGH, à la hauteur de la pyramide A B C D, puis que les hauteurs des pyramides ſont meſmes que celles des parallelipi. Donc les baſes & les hauteurs des pyram. egales ſont reciproques.

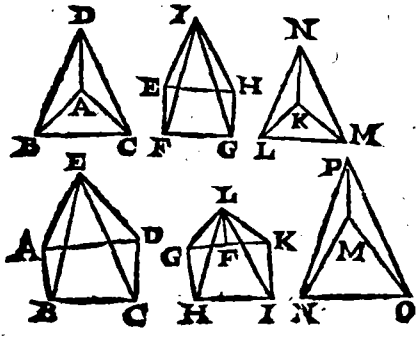
Soient maintenant les baſes & les hauteurs reciproques. Ie dis que les pyram. ſont egales. Car ayant faict la conſtruction, comme auparauant: c D'autant que comme ABC, eſt à EFG, ainſi le parall. BI, au parallelog. FN, & les hauteurs des parallelip. & des pyram. eſtans meſmes, les baſes des parall. & leurs hauteurs ſeront auſſi reciproques. d Partãt les parallelipiped. BM, FQ, ſeront egaux; Donc les priſmes DBCILA; HFGNPE, leurs moitiez, ſont auſſi egaux: & partant auſſi les pyramides, tierces parties des priſmes auſſi egales. Donc les baſes & les hauteurs des pyramides, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer,

c 15. 5.

d 34. 11.

SCHOLIE.

Semblablement, les baſes, & les hauteurs des pyramides egales (dont les baſes ne ſont triangulai-



res) ſont reciproques: & les pyramides (dont les

baſes ne ſont triangulaires) ayans les baſes & les hauteurs reciproques, ſont egales.

Car ſoient premierement deux pyram. egales, l'vne deſquelles, ſçauoir A B C D, ait la baſe triangulaire, & EFGH non. Et ſoit faict KLM, tri. egal à la baſe EFGH non triang. & ſur iceluy la pyramide KLMN, de meſme hauteur que la pyrame de F I. Donc les pyramides EFGHI, KLMN, ayans baſes egales & meſme hauteur, a ſeront egales. Mais EEGHI, pyramide, a eſté poſee egale à ABCD pyramide. Donc ABCD, KLMN, ſeront auſſi égales, & ayans les baſes triangulaires b comme la baſe ABC, à la baſe KLM, ou à EFGH ſon egale, ainſi la hauteur de la pyramide KLMN, c'eſt à dire la hauteur de EFGH, ſera à la hauteur de ABCD. Donc les pyramides egales ABCD, EFGHI, ont les baſes & les hauteurs reciproques.

a Sc. 6. 12.

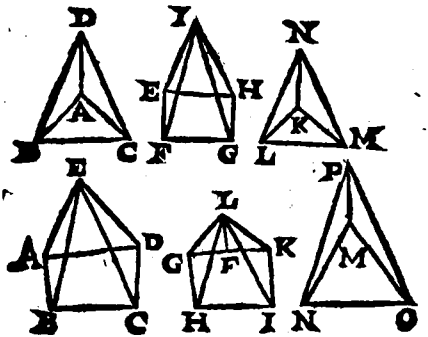
b 9. 12.

Soient maintenant leurs baſes & leurs hauteurs reciproques. Ie dis que ces pyramides ſont egales. Car (demeurant la meſme conſtruction) la baſe ABC, eſtant poſee à la baſe EFGH, comme la hauteur de la pyramide EFGHI, à la hauteur de la pyramide ABCD, auſſi la baſe ABC, ſera à la baſe KLM, comme la hauteur de la pyramide KLMN, ſera à la hauteur de la pyramide ABCD. c Donc les pyramides ADCD, KLMN, ſont egales. Mais comme il eſt demonſtré, d la pyramide KLMN, eſt egale à la pyramide EFGHI. Donc ABCD, ſera auſſi egale à EFGHI: ce qui eſt propoſé.

c 9. 12.

d Sc. 6. 12.

Soient en apres les pyramides egales ABCDE, FGHIKL, dont les baſes ayent pluſieurs angles: & derechef ſoit faict le trian. MNO, egal à la baſe



ABCD, & MNOP, pyr. ſoit faicte de meſme hauteur que ABCDE: *donc comme il eſt demonſtré, MNOP, ſera egale à* ABCDE, *laquelle a eſté poſee egale à FGHIKL, pyr. Donc la pyr. MNOP, ſera auſſi egale a FGHIKL; donc comme il eſt demonſtré cy-deuant, comme la baſe MNO, c'eſt à dire, la baſe* ABCD: *ſera à la baſe FGHIK, ainſi la hauteur de* FGHIKL, *pyr. ſera à la hauteur de MNOP: c'eſt à dire, à la hauteur de ABCDE (car ces hauteurs ſont poſees egales.) Parant les pyr. ABCDE, FGHIKL, ont les baſes & les hauteurs reciproques.* Sc.6.12.

Mais ſoient les baſes & les hauteurs d'icelles pyr. reciproques. Ie dis qu'elles ſont egales: Ce que l'on demonſtrera comme auparauant.

Or on demonſtrera que toutes ces choſes conuiennent auſſi à tout priſme: car ſi les priſmes ſõt egaux, les pyr. de meſme haut. qu'iceux ayans meſme baſe, ſeront egales entr'elles, a eſtãs les tier. part. des priſmes, b ou les 2. tierces part. ſi les baſes ſont parallelogr. Donc, comme nous venons de demonſt. les baſes & haut. d'icelles pyr. ſeront recip. & ces baſes & hauteurs eſtans les meſmes que des priſmes, les ba-

a Co.7.12.
b Sch.7.

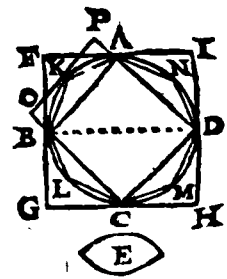
ſes & les hauteurs des priſmes ſeront reciproques.

Derechef, ſi les baſes & les hauteurs des priſmes ſont reciproques, les baſes & hauteurs des pyr. ayans meſmes baſes & hauteurs que les priſmes, ſeront auſſi reciproques. Donc, comme a eſté demonſtré, les pyramides ſont egales: & partant auſſi les priſmes eſtans triples ou eſquialteres d'icelles pyramides. Ce qui eſt propoſé.

THEOREME 10. PROP. 10.

Tout Cone eſt la tierce partie du Cylindre, qui a meſme baſe qu'iceluy, & la hauteur egale.

Soit vn Cone & vn Cylindre ayans meſme baſe, ſçauoir le cercle ABCD, & de meſme hauteur. Ie dis que le Cone eſt le tiers du Cylindre.



Car autrement le cylindre ſera plus grand ou moindre que le triple du cone, Soit premieremẽt plus grand, s'il eſt poſſible, comme de la grandeur du ſolide E. C'eſt à dire, que du cylindre, (dont le cercle ABCD, eſt la baſe) eſtant retranché E, le reſte ſera triple du cone, dont le meſme cercle A C eſt la baſe. En iceluy cercle ſoit inſcrit le quarré ABCD, & diuiſé en deux triang. par BD diametre, ſur leſquels triang. ſoient entendus eſtre conſtituez deux priſmes de meſme hau-

teur que le cylindre. Et le quarré estant plus grand que la moitié du cercle *a*, comme il appert, il est euident que ces 2. prismes excederont la moitié du cylindre: mais si (les deux prismes ostez) les restez du cylindre sont plus grands encore que E, sur les bases desdicts restes ou segments, soient faicts les 4. triang. Isosceles AKB, BLC, CMD, DNA. sur lesquels soient imaginez 4. prismes de mesme hauteur que le cone ou cylindre, duquel le cercle ABCD est la base; a Sc. 9. 4.

Il est manifeste que ces triangles Isosceles sont plus de la moitié des bases des segmens restans du cylindre, estans moitiez des rectangles de mesme hauteur, comme BP. Parquoy ces quatre prismes seront plus de la moitié des quatre segments: mais si les 8. petits segments restans du cylindre ne sont plus petits que E, soit tousiours ainsi soustraict plus de la moitié de ce qui reste, *b* & en fin il restera vne grandeur moindre que E: & pour abreger soient ces 8. segments plus petits que E. b 1. 10.

Il est donc euident que la colomne composee de ces 6. prismes, ayans pour base le polygone inscrit au cercle AC, & de mesme hauteur que le cylindre donné, sera plus que triple de ce cone, selon ce qui est dict cy-dessus. Mais chacun prisme estant triple de sa pyramide de mesme hauteur, & qui a base egale, *c* pouuant estre diuisé en trois telles pyramides egales. Il s'ensuit que tous ces prismes faisans la colomne qui a pour base le polygone inscrit au cercle AC, c'est à dire, cette colomne de mesme hauteur, que le cylindre est triple de ces 6. pyram. qui font la pyramide seule, ayant le mesme polygone pour base, & de mesme hauteur qu'icelle colomne. Donc ladicte py- c 7. 12.

ram. ſera plus grande que le cone de meſme hauteur, ayant le cercle AC pour baſe. Ce qui eſt abſurde, la pyramide n'eſtant que partie du cone. Partant le cylindre n'eſt plus grand que le triple du cone.

Soit donc plus petit, s'il eſt poſſible, de la quantité de E: c'eſt à dire, qu'oſtant E du cone que le reſte ſoit le tiers du cylindre. Maintenant du cone, dont le cercle AC eſt la baſe, ſoit oſté plus de la moitié, ſçauoir la pyr. de meſme hauteur, dont la baſe eſt le quarré ABCD, & du reſte, ſçauoir des 4. ſegments K, L, M, N, ſoit oſté plus de la moitié, ſçauoir la pyr. de chacun ſegment, de meſme hauteur qu'iceluy ſegment, & ayant pour baſe le triang. Iſoſcele en iceluy ſegment: & ſoit continué ce retranchement iuſques à ce que les ſegmẽts
e1, e0. reſtans ſoient plus petits que E, *e* ce qui aduiendra. Et pour abreger ſoient ces 8. petits ſegments plus petits que E.

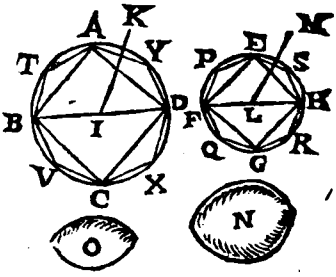
Il eſt donc manifeſte que la pyramide de meſme hauteur que le cone, ayant cet octogone pour baſe, eſt plus grande que le tiers du cylindre donné, eſtant plus grande que le cone, ayant retranché d'iceluy E. Mais ce cone ainſi retranché, eſt le tiers du cylindre donné, & la pyramide auſſi le tiers de la colomne de meſme hauteur, ayant pour baſe le meſme octogone, comme il a eſté dict cy-deſſus. Donc icelle colomne ſeroit plus grande que le cylindre donné: dont elle eſt partie. Ce qui eſt abſurde. Partant le cylindre donné n'eſt plus petit ny plus grand que le triple du cone. Donc egale. Partant tout cone eſt la tierce partie du cylindre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 11. PROP. 11.

Les Cones & les Cylindres qui ſont de meſme hauteur, ſont l'vn à l'autre comme leurs baſes.

Soient les cones & les cylindres de meſme hauteur, dont les baſes ſont ABC, EFG, & les hauteurs ou axes IK, LM. Ie dis que comme la baſe eſt à la baſe, ainſi le cone eſt au cone, & le cylindre au cylindre : c'eſt à dire, que ſi on entend que comme le cercle ou baſe A B C, eſt au cercle E F G, ainſi le cone B I K, eſt à quelque autre ſolide, comme N, que N, ſera egal à F L M.

Car s'il n'eſt ainſi, il ſera plus grand ou moindre, ſoit premierement plus petit, & de la quantité de O, s'il eſt poſſible : partant N & O, ſeront egaux au cone FLM, & du cone FLM, comme en la 10 Propoſition, ſoit oſté plus de la moitié, à ſçauoir vne pyramide de meſme hauteur que le cone, dont la baſe ſoit le quarré EF GH, & du reſte auſſi plus de la moitié, à ſçauoir quatre pyramides de meſme hauteur, ayant pour baſes les quatre triangles Iſoſceles EPF, FQG, GRH, HSE, & ainſi de ſuitte : Il reſtera en fin, vne grandeur moindre que O, laquelle pour abbreger, ſoit les huict petits ſegments : Il s'enſuit que la pyramide FM, de meſme hauteur que le cone FM, dont la baſe eſt l'octogone EPFQGRHS, ſera plus grande que N. 1.10.



Dedans le cercle ABCD, ſoit inſcrit vn polygone ſemblable, au polygone inſcrit en la baſe circulaire EFGH, & ſur iceluy ſoit entendu eſtre vne pyra-

a Co. 2. 12. de meſme hauteur que le cone BIK. *a* Mais comme le cercle ABC, eſt au cercle EFG, ainſi le polygone TVXY: eſt au polygone PQRS, mais comme

b 6. 12. le cercle ABC, au cercle EFG, ainſi le cone BK à N: *b* & comme le polygone au polygone,

c 11. 5. ainſi la pyr. à la pyr. de meſme hauteur que les cones. *c* Donc la pyr. ATBVCXDYK, ſera à la pyr. EPFQGKHSM, comme le cone BIK, au ſolide N; mais ATBVCXDYG, eſtant moindre que le

d 14. 5. cone BIK, la partie que le tout: *d* auſſi la pyramide EPFQGRHSM, ſera moindre que N; mais elle a eſté monſtree plus grande. Ce qui eſt abſurde. Donc N, n'eſt moindre que le cone EFGHM.

Secondement, que N ſoit plus grand que EFGHM: Donc eſtant poſé comme le cercle ABC, au cercle EFG, ainſi le cone BK à N, par conuerſion de raiſon, comme le cercle EFG, au cercle ABC, ainſi N, au cone BK: & comme N à BK: ainſi le cone EFGHM, ſoit poſé à O. Et N eſtant

e 14. 5. poſé plus grand que le cone FM, *e* le cone BK, ſera auſſi plus grand que O. Partant puis que comme le cercle EFG, eſt au cercle ABC, ainſi N

au cone BK : *f* comme le cercle EFGH, au cercle ABC, ainsi le cone FM à O, plus petit que le cone BK. Ce qui est absurde, estant desia monstré que le cone ne peut estre à vne autre grandeur moindre que l'autre cone, comme la base de celuy-là, à la base de celuy cy. Dõc N n'est plus grand ny plus petit que le cone FM, partant egal. Donc estant posé comme la base ABCD, à la base EFGH, ainsi le cone BK à N, *g* Mais comme le cone BK est à N, ainsi le mesme cone Bk, au cone FM : aussi comme la base ABCD, à la base EFGH, ainsi le cone ABCDK, au cone EFGHM.

f 11. 5.

g 7. 5.

Mais d'autant que comme le cone ABCDk, *h* au cone EFGHM, ainsi le cylindre ABCDK, (qui est triple du cone ABCDk) au cylindre EFGHM, (qui est triple du cone EFGHM,) aussi comme la base ABCD, sera à la base EFGH, ainsi le cylindre ABCDk, sera au cylindre EFGHM. Ce qui se peut aussi demonstrer ainsi que des cones, si au lieu des cones & des pyramides, on entend des cylindres & des prismes. Donc les cones & les cylindres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

h 15. 5.

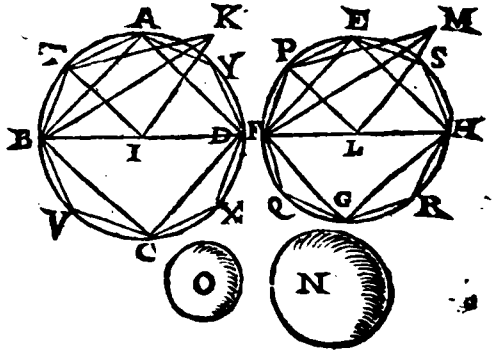
COROLLAIRE.

D'où il s'ensuit, que les cones & cylindres constituez sur mesme base, ou bases egales, & de mesme hauteur sont egaux; & au contraire les cones & cylindres egaux constituez sur mesme base, ou sur egales, sont de mesme hauteur, & les cones & cylindres egaux de mesme hauteur, sont aussi sur bases egales, ou vne mesme: ce qui sera demonstré, comme en la conuerse de la 31. Prop. 11.

THEOREME 11. PROP. 12.

Les Cones & les Cylindres ſemblables, ſont l'vn à l'autre en raiſon triplee des diametres de leurs baſes.

Soient les cones & cylindres ſemblables, dont les baſes ſont les cercles ABC, EFG, & les axes Ik, LM, & les diametres des baſes BD, FH. Ie dis que le cone eſt au cone, & le cylindre au cylindre, en raiſon triplee du diametre au diametre.



S'il n'eſt ainſi, ſoit le cone ABCDK, à *quelque* autre grandeur N, plus grande ou *moindre que le* cone EFGHM, en raiſon triplee *du diametre* BD, au diametre FH.

Et ſoit premierement N, moindre que le cone EFGHM, de O: & ſoit faicte la meſme conſtruction qu'en la precedente Propoſition, de ſorte que la pyramide EPFQGRHM, ſoit derechef monſtree

monstree plus grãde que N, & menees les droictes lignes KB, KT, MF, MP, pour auoir deux triang. BKT, EMP, des pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM: & soient conioinctes TI, PL.

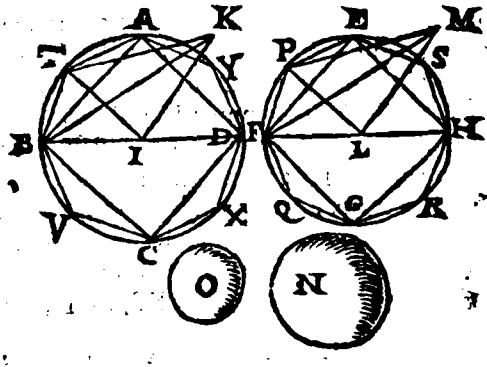
D'autant donc que les cones ABCDK, EFGHM, sont posez semblables, *a* l'axe Ik, sera à l'axe LM, comme le diametre BD, au diametre FH: partant comme le semy diametre BI, au semy diametre FL, ainsi l'axe IK, à l'axe LM: & en changeant, comme BI à Ik, ainsi FL à LM. a 24.d.11. 15. 5.

Donc puis que les angles BIk, *b* FLM, sont droicts, les cones estans posez droicts: partant les axes perpendic. à leurs bases, *c* les triangles BIK, FLM, seront equiangles; Donc comme kB, à BI, ainsi MF, à PL. Mais comme BI à BT, ainsi FL à FP, à cause de la semblance des triang. BIT à FLP: (car puisque BIT, FLP, appuyez sur arcs semblables, *d* sont egaux: & que comme BI, est à IT, ainsi FL, à LP, tant par l'egalité des lignes BI, IT, que FL, LP *e* les triangles BIT, FLP, sont semblables) & en raison egale comme KB, à BT, ainsi MF à FP. b 3.d.11. c 6.6. 4. 6. dSc.3.6. e 6. 6.

Derechef, d'autant que les costez KI, IB, du triangle KIB, sont egaux à KI, IT, du triang. KIT, & les angles contenus d'iceux *f* droicts, l'axe IK, estant posé perpendic. au cercle ABC, *g* les bases kB, KT, seront egales. Et semblablement MF, MP, egales: partant KB, KT propott. à MF, MP, y ayant proportion d'egalité de part & d'autre. Mais d'autant que comme KB à BT, ainsi KT, à la mesme BT. Item, comme MF à FP, ainsi MP à la mesme FP: mais comme KB, estoit à BT, ainsi MF à FP: pareillement, comme KT, sera à BT, f 3.d.11. g 4. 1.

ainſi MP à FP, & par conuerſion, comme BT à TK, ainſi FP à PM: partant, puis que comme TK, eſt à kB, ainſi PM à MF, & comme kB à BT, ainſi MF à FP, & comme BT à TK, ainſi FP à PM, cõme il eſt monſtré. Les triangles BFT, FMP, auront les coſtez proport. *b* partant equiangles: & *i* ſemblables. Et ſemblablement les autres triang. à l'entour des pyr. ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, ſeront ſemblables entr'eux: leſquels eſtans egaux en multitude, icelles pyr. ſeront ſemblables, *l* & ſeront en raiſon triplee de leurs coſtez homolo-

h 6. 6.
i 11. d. 6.
k 9 d. 11.
l Co. 8. 12.



gues BT, FP: mais comme BT à FP, ainſi BI à FL, par la ſimilitude des triang. BIT, FLP, *m* & comme BI à FL, ainſi BD à FH. Donc la pyr. ſera à la pyr. en raiſon triplee des diametres BD, FH: mais le cone ABCDK, eſtoit poſé à N, en raiſon triplee des meſmes diametres. Donc comme la pyramide ATBVCXDYK à la pyr. EPFQGRHSM, ainſi le cone ABCDK à N. Parquoy puis que la pyramide ATBVCXDYK, eſt moindre que le cone ABCDK, la partie que le tout: *n* la pyra-

m 11. 5.
n 14. 5.

mide EPFQGRHSM, ſera moindre que N. Mais elle eſt monſtree plus grande. Ce qui eſt abſurde. Donc N, n'eſt plus grande que le cone EFGHM.

Secondement, ſoit N, plus grande que le cone EFGHM. Donc le cone ABCDk, eſtant poſé à N, en raiſon triplee du diametre BD à FH, & la pyr. ATBVCXDYk, eſtant à la pyr. EPFQGRHSM, en raiſon triplee des meſmes diametres, comme il eſt monſtré: comme le cone ABCDk, ſera à N, ainſi la pyr. ATBVCXDYk, à la pyramide EPFQGRHSM: & en changeant comme N, au cone ABCDk, ainſi la pyr. EPFQGRHSM, à la pyra. ATBVCXDYk.

Partant, la pyr. EPFQGRHSM, eſtant à la pyramide ATBVCXDYk, en raiſon triplee des coſtez homolog. PF, TB, c'eſt à dire, du dia. FH, au dia. BD: N ſera auſſi au cone ABCDk, en raiſon triplee du diametre FH, au diametre BD. Comme N, eſt au cone ABCDk, ainſi le cone EFGHM, ſoit poſé à O. Donc le cone EFGHM, ſera auſſi à O, en raiſon triplee du diametre FH, au diametre BD, & N eſtant poſee plus grande que le cone EFGHk, le cone ABCDk, ſera auſſi plus grand que O. Partant le cone EFGHM, ſera à O, moindre que le cone ABCDk, en raiſon triplee du diametre FH, au diametre BD: Ce qui eſt abſurde; car il eſt monſtré que le cone ne peut eſtre en raiſon triplee des diametres des baſes, à vne autre grandeur moindre que l'autre cone. Donc N n'eſt plus grande que le cone EFGHM, & eſt monſtree n'eſtre moindre, partant egale. Parquoy le cone ABCDk, a meſme raiſon au cone EFGHM, que à N.

o Co. 8. 12.

p 14. &

q 17. &

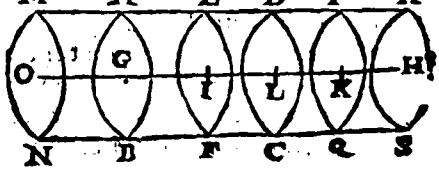
Donc puis que le cone ACBDk, est à N, en raison triplee des diametres BD, FH, le cone ABCDk, sera aussi au cone EFGHM, en raison triplee des mesmes diametres.

15. 5. r Mais r d'autant que les cylindres sont en mesme raison que les cones dont ils sont triples, le cylindre sera au cylindre en mesme raison triplee des diametres des bases. Ce qui sera demonstré comme aux cones, si au lieu des cones & des pyramides, on prend des cylindres & des prismes. Donc les cones & les cylindres semblables sont en raison triplee, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 13. PROP. 13.

Si vn cylindre est couppé par vn plan parallele aux plans oppoſez: Comme le cylindre sera au cylindre, *ainsi l'axe* sera à l'axe.

Soit le cylindre ABCD, couppé par le plan EF, qui soit parallele aux plans oppoſez AB, CD, & couppant l'axe à I. Ie dis que comme le cylindre AF, est au cylindre EC, ainsi l'axe GI, à l'axe IL.



Qu'ainsi ne soit, ayant prolongé l'axe GL de part & d'autre, soit posee GO, egale à GI; & LK,

KH, chacune egale à IL; & soit entendu le cylindre estre prolongé de part & d'autre à O & H. Cela estant, il est manifeste que les cylindres AN, AF, EC, CP, QR, sont tous sur bases egales. Et partant AN, AF, ayant mesme hauteur, c'est à dire les axes egaux, IG, GO, sont egaux entr'eux. Semblablement FD, DQ, QR, estans de mesme hauteur, sont aussi egaux entr'eux; parquoy l'axe IO, est autant multiple de l'axe GI, que le cylindre EN, du cylindre AF, & l'axe IH, autant multiple de l'axe IL, que le cylindre FR, du cylindre FD, comme il est manifeste. [f] (Co. 11. 12.

Donc si l'axe QI, multiple de GI, premiere grandeur, est egal, plus grand ou moindre que IH, multiple de IL, 2. grandeur: aussi le cylindre EN, multiple du cylindre EB, 3. grandeur, sera plus grand, egal ou moindre, que le cylindre FR, multiple du cylindre FD, 4. grandeur, en quelconque multiplication que ce soit: parquoy comme l'axe à l'axe, ainsi le cylindre sera au cylindre. Donc si vn cylindre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [t] 6. d. 5.

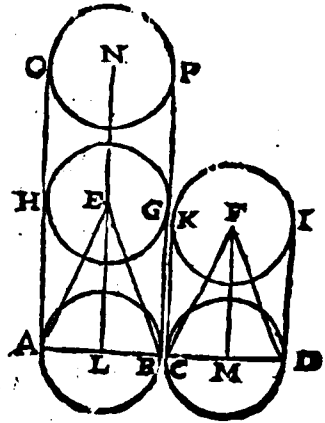
THEOREME 14. PROPO. 14.

Les cones & les cylindres constituez sur bases egales; sont entr'eux comme leurs hauteurs.

Soient sur les bases egales AB, CD, deux cones ABE, CDF, & deux cylindres ABGH, CDIK, dont les axes ou hauteurs (car aux cones & cylindres, les axes qui sont à angles droicts, sont leurs hauteurs) sont LE, ME. Ie dis que le cone ABE, est

au cone CFD, & le cylindre AG, au cylindre CI, comme la hauteur LE, à la hauteur MF.

Car ſoit prolongé le cylindre AG, de la part de GH, auec ſon axe LE, & le rect. AG, & ſoit priſe l'axe EN, egal à l'axe MF, & à l'entour du centre N, ſoit entendu le cercle O P, egal & parallel. à GH, afin que le cylindre G O, ſoit faict de meſme hauteur que le cylindre CI.



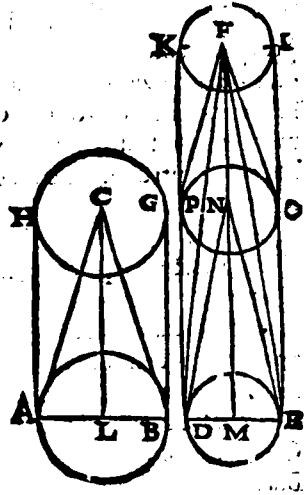
D'autant donc que les cylindres HP, CI, ayans
u Co.11.12 baſes & hauteurs egales, u ſont egaux: le cylindre
7. 5. AG, aura meſme raiſon à iceux: x mais le cylindre
x 13.12. AG, eſt au cylindre HP, comme l'axe ou hauteur LE, à l'axe ou hauteur EN, c'eſt à dire, à la hauteur MF ſon egale. Donc le cylindre AG, ſera auſſi au cylindre CI, comme la hauteur LE, à la hauteur MF.

y 10.12. Mais y d'autant que les cones ABE, CDF, ſont
z 15. 5. les tierces parties des cylindres AG, CI: z ils ſeront en meſme raiſon que les cylindres: partant le cone ABE, ſera au cone CDF, comme la hauteur LE, à la hauteur MF. Donc les cones & les cylindres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 15. PROP. 15.

Les baſes & les hauteurs des cones & des cylindres egaux, ſont reciproques: Et les cones & les cylindres, deſquels les baſes & les hauteurs ſont reciproques, ſont egaux.

Soient les cones ABC, DEF egaux & les cylindres AG, DI, auſſi egaux, dont les baſes ſont AB, DE, & les axes ou hauteurs LC, MF. Ie dis que les baſes & les hauteurs ſont reciproques; c'eſt à dire, comme AB. eſt à DE, ainſi MF, à LC.



Car ſi les hauteurs LC, MF, ſont egales, les cylindres eſtans poſez egaux, a les baſes ſeront egales: Donc comme AB à DE, ainſi MF à LC. Donc les baſes & les hauteurs ſont reciproques. a Co. 11. 12

Que ſi l'vne eſt plus grande, comme FM, ſoit retranchee MN, egale à LC; & ſoit entendu le plan PO, par N, & parallele à DE, couppant le cylindre DI en deux

Donc les deux cylindres AG, DI, eſtans poſez egaux *b* comme AG, ſera à DO, ainſi DI à DO: *c* mais comme le cylindre AG, au cylindre DO, ainſi la baſe AB, à la baſe DE, les hauteurs CL, MN, eſtans egales. *d*

b 7. 5.
c 11. 12.
d 14. 12.

Item, cõme DI à DO, ainſi la haut. MF à MN, eſtans les bſes egal. ſçauoir vne meſme DE. Donc auſſi comme la baſe AB, à la baſe DE, ainſi la hauteur MF, à la hauteur MN: c'eſt à dire, à ſon egale LC. Donc les baſes & les hauteurs ſont reciproques.

Et ſi les cones ABC, DEF, ſont egaux, les cylindres AG, DI ſeront egaux, *e* les cones eſtans les tiers des cylindres, donc de l'egalité des cylindres il s'enſuit que les baſes & les hauteurs ſont reciproques, comme il eſt monſtré: & partant de l'egalité des cones il s'eſuiura auſſi que les baſes & les hauteurs ſont reciproques. Ce qui ſe peut auſſi demonſtrer par le diſcours dont *on s'eſt ſeruy* aux cylindres, conſtruiſans 2. cones, comme appert en la figure.

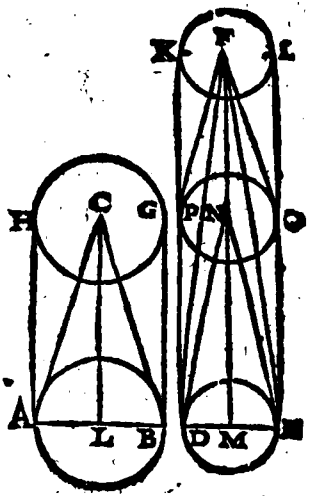
e 10. 12.

Maintenant ſoient les baſes & les hauteurs reciproques. Ie dis que les cones & les cylindres ſont egaux. Si les hauteurs ſont egales eſtans entr'elles comme les baſes, icelles baſes ſeront auſſi egales: *f* partant les cylindres ſeront egaux. Si inegales, ſoit faicte la conſtruction comme auparauant. Donc la hauteur MF, eſtant poſee à la hauteur LC: c'eſt à dire à MN ſon egale, comme la baſe AB, à la baſe DE: *g* mais comme AB à DE, ainſi le cylindre AG, au cylindre DO, de meſme hauteur. *h*

f Co. 11. 12
g 11. 12.
h 14. 12.

Item, comme la hauteur MF, à la hauteur MN, ainſi le cylindre DI, au cylindre DO, les baſes

eſtans egales: comme le cylindre A G, au cylindre D O, ainſi D I, au meſme cylindre D O: *i* partant le cylindre A G, ſera egal au cylindre D I.



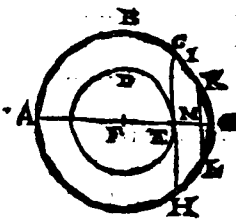
i 9.5.

Et ſi les baſes & les hauteurs des cones A B C, D E F, ſont reciproques, les baſes & les hauteurs des cylindres A G, D I, eſtans les meſmes baſes & hauteurs des cones ſeront reciproques: Donc comme il a eſté monſtré, les cylindres; & partant les cones tierces parties d'iceux, ſeront egaux. L'on peut toutefois faire la meſme demonſtration aux cones, qui a eſté faicte au cylindres. Donc les baſes & les hauteurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBLEME 1. PROP. 16.

Deux cercles eſtans à l'entour d'vn meſme centre, inſcrite au plus grand cercle vn polygone equilateral, & pair en nombre de coſtez, lequel ne touche point le moindre cercle.

Soient deux cercles ABC, DE, à l'entour d'vn mesme centre F, & il faut inscrire au plus grand vn polygone equilateral, ne touchant le moindre DE, & duquel les costez soient en nombre pair.



Soit menee AC, par le centre F, couppant le cercle DE, en E, & par E, soit menee GH, perpendiculaire à AC, & qui touchera le cercle DE: D'autant donc que l'arc AGC, est plus grand que l'arc GC, si de AGC, on oste la moitié AB, & du reste BC, la moitié BI; & du reste IC, la moitié IK, & ainsi de suitte: il restera en fin vn arc moindre que CG. Soit maintenant l'arc CK, moindre que CG, & soit CK sous-tendante. Ie dis que CK, est vn *costé du polygone* qui doit estre inscrit.

k Co. 16. 3

l 1. 10.

Car si l'arc BI, est diuisé en parties egales en nombre & grandeur, aux parties de l'arc CI: & le quart du cercle AB, soit diuisé en autant de parties egales, qu'il y a de parties egales en l'arc BC, & aussi le demy cercle AHC, en autant de parties qu'en contient le demy-cercle ABC: puis soient menees les lignes droictes sous-tendantes tous les arcs *m* lesquelles seront egales à la droicte ligne CK, d'autant qu'elles sous-tendent arcs egaux, à l'arc CK, & on aura descrit vn polygone au cercle ABC, equilateral, & en nombre pair des costez, lequel ne touchera le moindre cercle DE.

m 29. 3.

Car de K à AC, soit menee vne perpendiculaire

KL, couppant AC à M. D'autant que les angles GEM, KME, sont droicts, n HG, κL, seront parralleles. Partant GH, touchant le cercle DE, au poinct E, la droicte ligne KL, sera toute hors ledict cercle, & ne l'atteindra iamais, ne rencontrant iamais GH: donc la droicte ligne Ck, qui est plus esloignee du cercle DE, touchera encore moins le cercle DE, que κL; & partant ny les autres costez du polygone inscrit, estans egaux au costé Cκ, & partant seront autant esloignez du centre F, que C κ, ne toucheront le cercle DE. o Donc deux cercles estans. Ce qu'il falloit demonstrer. n 29. 1. o 14. 3.

COROLLAIRE.

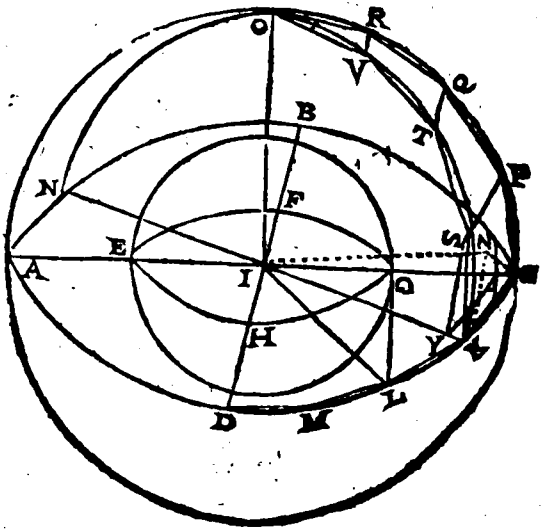
Il est d'icy manifeste, que si de l'extremité du costé du polygone inscrit, lequel rencontre le diametre, est menee vne ligne perpendiculaire au diametre: icelle ne pourra aucunement toucher le moindre cercle; mais tombera toute hors iceluy. Car telle est la ligne κL, laquelle menee de l'extremité k, du costé Ck, rencontrant le diametre AC, perpendiculaire au diametre AC, est monstree ne toucher le cercle DE.

PROBLEME 2. PROP. 17.

Deux spheres estans à l'entour d'vn mesme centre, inscrire en la plus grande sphere vn solide polyedre, lequel ne touche point la superficie de la plus petite sphere.

Soient deux spheres ABCD, EFGH, à l'entour

d'vn meſme centre I, & en la plus grande ABCD. il faut inſcrire vn ſolide polyedre, c'eſt à dire, de pluſieurs coſtez, lequel ne touche point la ſuperficie de la moindre ſphere EFGH.



Soient couppees les deux ſpheres par quelque plan mené par le centre I, & ſoient les communes ſections faictes és deux ſpheres les plans ABCD, EFGH, leſquelles ſeront cercles par la *definition* de la ſphere, ayant meſme centre I, que *les* ſpheres: car les demy-cercles, par la reuolutiõ deſquels ſont deſcrites lès ſpheres, conuiendront auec les ſections ABCD, EFGH, parquoy leſdictes ſections ſeront cercles, ou d'autant que toutes les lignes droictes menees du centre I, aux circonferences des ſections, ſont egales. Et en iceux ſoient

menez les diametres AC, BD, se couppans au centre I, à angles droicts: *a* Puis au plus grand cercle ABCD, soit inscrit vn polygone, ne touchant point le moindre EFGH, & soient CK, KL, LM, MD, costez du quart CD; & soit menee KN, par le centre I, & *b* de I soit menee IO, perpendiculaire au plan des cercles ABCD, EFGH, rencontrant à O, la superficie de la plus grande sphere. Et par AC, IO, & NK, IO, soient menez les plans AOC, NOK: ils seront demy-cercles, les plus grands entre ceux de la sphere, ayans mesme centre, comme dict est, & IO, ligne de commune section des plans des demy-cercles NOK, AOC, estant perpendiculaire au plan du cercle ABCD. *c* Iceux demy-cercles seront aussi perpendiculaires au plan du cercle ABCD: & les trois demy-cercles ADC, AOC, NOK estans egaux, estans leurs diametres egaux, leurs moitiez, sçauoir les quartes OC, OK, DC, seront egales: parquoy OC, OK, contiendront chacune autant des costez du polygone que DC.

a 16. 12.

b 12. 11.

c 18. 11.

Soient iceux costez CP, PQ, QR, RO, KS, ST, TV, VQ, & menees SP, TQ, VR, & de P, S, les perpend PX, SY. *d* elles tomberont sur IC, Ik, communes sect. des quartes IOC, IOK, & le plan ICD, esleuees perpend. sur iceluy plan, *e* icelles seront aussi parall. & soit aussi menee XY.

d 38. 11.

e 6. 11.

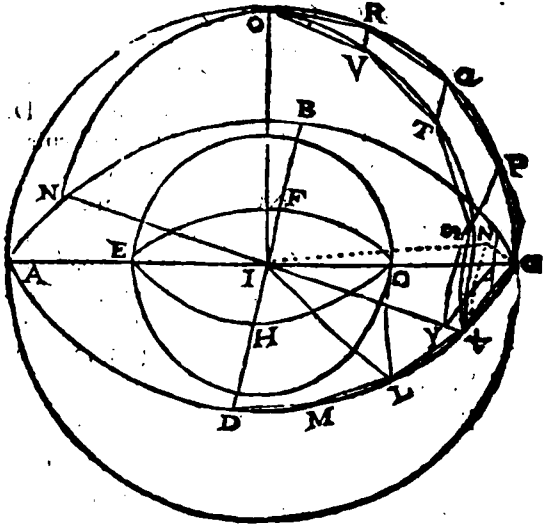
Maintenant les arcs PC, Sk, estans egaux, *f* & les lignes droictes sous-tendantes PC, Sk aussi egales, les angles PXC, SYk droicts: *g* & les angles PCX, SkY egaux, estans appuyez sur circonferences egales AOP, NOS; les 2. angles PCX, PXC, du triang. PXC, sont egaux aux 2. angles SkY, SYk, & les costez PC, Sk, egaux, *h* les deux

f 29. 3.

g 27. 3.

h 26. 5.

autres costez PX, XC, seront egaux aux deux autres costez SY, Yk, chacun au sien. Donc les diametres AC, Nx estans egaux, & les segments CX, kY aussi egaux, AX, NY seront aussi egaux : & IX, IY egales. Parquoy comme IX à XC, ainsi
a 2. 6. IY à Yk. a Donc XY, est parallele à KC, & PX, SY, estans monstrees egales & paralleles SP, YX,
b 33. 1. b seront aussi egales & paralleles. Et c SP, kC, se-
c 9. 11. ront paral. d & Sk, PC, en vn mesme plan aues
d 7. 11. icelles.



Donc toute la figure quadrilatere SkCP, est en vn mesme plan : ainsi on monstrera que chacun des quadrilateres TP, VQ, a toutes ses parties en vn mesme plan, & le triangle ORV semblablement : & si des poincts P, Q, R, S, T, V, on mene des lignes au centre I, on se pourra imaginer vne figure solide composee de 4. pyram. entre OC, &

Ok, desquelles le sommet est au centre I, & leurs baſes ſont les quadrilateres CS, PT, QV, & le triangle OVR: & faiſant ſur les autres coſtez κL, LM, MD, ainſi que ſur Cκ, & auſſi ſur les trois autres quartes BC, BA, AD. l'on aura inſcrit vn polyedre en la ſphere propoſee. Ie dis qu'il ne touche la moindre ſphere EFGH.

Car ayant mené la ligne IZ, du centre I, perpendiculaire au plan CS, elle ſera plus grande que IG, demy-diametre de la moindre ſphere. Car pour inſcrire le polygone, eſtant menee GL, perpend. à AC, du poinct G, laquelle eſtant plus grande que Ck, coſté dudict polygone inſcrit, comme il eſt manifeſte, ſoit menee IL, & auſſi CZ, kZ. e Les angles IZC, IZκ eſtans droicts: f le q. de IC, ſera egal aux 2. qq. de IZ, CZ, & le q. de Ik, egal aux qq. de IZ, Zk; parquoy les qq des diam. eſtãs egaux, les qq de IZ, Zk, ſeront egaux aux qq. de IZ, CZ: dõc ſi on oſte le commun q. de IZ, les qq. de CZ, kZ, demeureront egaux: & partant kZ, CZ, egales. Et ayant mené des lignes de Z à S, & P, on monſtrera par les meſmes raiſons qu'elles ſeront egales, tant entr'elles qu'à CZ, Zk: partant ſi de Z. pris pour centre, l'on deſcrit vn cercle à l'internalle de l'vne d'icelles, il paſſera par tous les poincts C, k, S, P: & partãt ſera deſcrit à l'entour dudict quadrilatere, dont les 3. coſtez CP, Cκ, κS, ſont egaux, g ſouſtendans arcs egaux, de cercles egaux, & le 4 SP, plus petit.

e 2. II.
f 47. I.
g 29. 3.

Car puis que les triangles ICκ, IXY, ſont ſemblables, & le coſté IC, plus grand que le coſté IX, h Ck ſera auſſi plus grand que YX, c'eſt à dire, que SP, monſtré egal à YX, l'angle CZk, ſera plus grand qu'vn droict: (car les quatre lignes menees

h 14. 5.

du poinct Z, aux poincts K, C, P, S, eſtans monſtrees egales, les 4. triangles qui ſe font, dont les ſommets ſont au poinct Z, auront les 4. angles à Z, egaux à 4. droicts: & les baſes des 3. triangles SZK, KZC, CZP, eſtans monſtrees egales, les 3. angles oppoſez à icelles ſeront egaux, parquoy chacun ſera plus grand qu'vn droict, puis que la baſe Ck, eſt monſtree plus grande que SP, & l'angle CZK, plus grand que l'angle SZP; partant plus grãd qu'vn droit: & par ainſi le plus grand du triã. CZk: donc le coſté CK, ſera plus grand que CZ, & GL eſtant plus grande que CK, ſera auſſi plus grande que CZ: parquoy le quarré de GL, ſera plus grand que le quarré de CZ: & les quarrez de IG, GL, eſtans egaux aux quarrez de IZ, CZ, (tant ces deux-là, que ces deux-cy, eſtans egaux au quarré du demy-diametre, puis que les triangles IGL, ICZ, ſont rectangles) & le quarré de GL, eſtant plus grand que le quarré de CZ, le quarré de IZ, ſera auſſi plus grand que le quarré de IG: & partant IZ, plus grande que IG. Donc le plan CK SP, ne touchera la moindre ſphere EFGH: & ainſi on monſtrera que tous les autres plans du polyedre inſcrit en la plus grande ſphere, ne toucheront la ſuperficie de la moindre ſphere EFGH: partant deux ſpheres eſtans à l'entour d'vn meſme centre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

14. 1.

19. 1.

m 47. 1.

COROLLAIRE.

De cette demõſtration s'enſuit, que ſi en vne autre ſphere eſt deſcrit vn ſolide polyedre ſẽblable au ſuſdict, qu'iceux ſeront en raiſon triplee des diametres des ſpheres, dans leſquelles ils ſont inſcrits:

ferits : car eſtans ſemblables par la definition des ſolides ſemblables, ils contiendront en leur conuexité autant de plans ſemblables l'vn que l'autre : parquoy ſe pourront diuiſer en autant de pyramides ſemblables l'vn que l'autre, ayans toutes le demy-diametre de leurs ſpheres, pour vn de leurs coſtez : donc eſtans priſes vne à vne, ſeront en raiſon triplee de leurs *a* coſtez homologues, qui ſont les demy-diametres des ſpheres, *b* & les toutes aux toutes, auſſi en raiſon triplee des demy-diametres : *c* & partant auſſi en raiſon triplee des diametres entiers,

a Co. 8. 12.
b 12. 5.
c 15. 5.

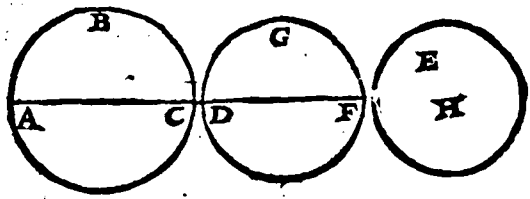
LEMME.

Or que la perpendiculaire menee du centre I, au plan CPSK, tombe ſur le milieu d'iceluy, comme au poinct Z, il eſt manifeſte. Car l'angle ICP, eſtant agu, comme il appert par la 16. du 3. la perpendiculaire menee du centre I, tombera de la part de l'angle agu ICP: & ſi on entend vne ligne menee de I à P, elle fera auſſi angle agu, auec la ligne droicte IC, qui ſeroit IPC, de la part duquel tomberoit la meſme perpendiculaire; & partant, entre C & P. Ce que l'on peut demonſtrer de toute autre, menant des lignes & circonferences entre PS, & KC : parquoy la perpend IZ, tombera ſur ledit plan. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 16. PROP. 18.

Les ſpheres ſont l'vne à l'autre en raiſon triplee de leurs diametres.

Soient les spheres ABC, DGF, dont les diametres sont AC, DF. Ie dis que ABC, est à DGF, en raison triplee du diametre AC, au diametre DF: c'est à dire, que si on entend que comme la raison triplee de AC à DF, ainsi la sphere ABC, est à quelqu'autre sphere, comme à E, qu'icelle sera egale à la sphere DGF.



Car s'il n'est ainsi, elle sera plus grande ou plus petite; soit E, premierement moindre que DEF, s'il se peut faire. Donc E, pourra estre enclose dans DGF, les mettans toutes 2. à l'entour d'vn mesme centre. *d* Parquoy en DGF, pourra *estre inscrit* vn solide polyedre, qui ne touchera *la moindre* E. *e* Et par mesme raison on pourra aussi descrire vn solide polyedre en l'autre, qui sera à celuy qui est descrit en DGF, en raison triplee du diametre AC, au diametre DF: mais la sphere ABC, est posee en telle raison à la sphere E; *f* donc comme la sphere ABC, à la sphere E, ainsi le polyedre de ABC, sera à celuy de DGF: Mais ABC, est plus *grande* que son polyedre, le tout que sa partie: *g* donc E, sera plus grande que le polyedre de DGF, *la partie* que le tout: ce qui est absurde: parquoy ABC, n'est pas à vne autre sphere moindre que DGF, en raison triplee du diametre AC, au diametre DF.

d 17. 12.

e Co. 17. 12.

f 11. 5.

g 14. 5.

Maintenant soit E, plus grande que DGF, s'il est possible: & estant posé que comme la sphere

ABC, est à la sphere E, ainsi la raison triple du diametre AC; au diametre DF: en changeant E, sera à ABC, en raison triplee de DF, à AC. Pareillement, l'on peut entendre que cõme E est à ABC, ainsi DGF, est à vne 4. proport. *b* qui sera moindre que ABC: E, estant posee plus grande que DGF: parquoy cette quatriesme pourra estre inscrite en ABC: *b* & DGF, sera à icelle 4. inscrite en ABC, en raison triplee de DF à AC. Ce qui est monstré absurde. Donc E n'est plus grande ny moindre que DGF, partant egale. Partant les spheres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

b 14. 5.

h 11. 5.

COROLLAIRE.

Il est manifeste de cette demonstration, qu'vne sphere est à vne autre sphere, comme le polyedre inscrit en celle-là, au polyedre semblable, & semblablement inscrit en cette-cy: estant demonstré, que tant les spheres que les polyedres inscrits en icelles, sont en raison triplee de leurs diametres.

FIN DV DOVZIESME LIVRE des Elements d'Euclide.

LIVRE TREZIESME

DES ELEMENTS D'EVCLIDE,

Et le troiſieſme des Solides.

THEOREME 1. PROPO. 1.

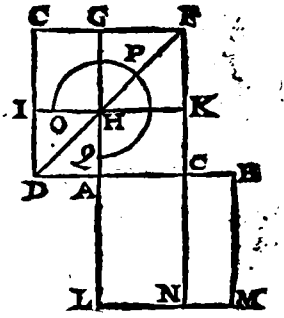
Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon ; le plus grand ſegment compris auec la moitié de la toure, peut le quintuple du quarré de la moitié de la toute.

C'eſt à dire, que le quarré du plus grand ſegment, & de la moitié de la toute, comme d'vne ſeule ligne, eſt quintuple du quarré de la moitié de la toute.

SOit la ligne droicte AB, couppee à C, en la moyenne & extreme raiſon, dont AC, eſt le plus grand ſegment, & ſoit prolongee B A à D, & poſee A D, egale à la

moitié de la toute AB. Ie dis que le q. de CD, eſt quintuple du q. de AD.

Car ſur CD, ſoit deſcrit le q. DF, & ayant mené le diametre DF, ſoient menees AG, Ik, couppant iceluy par H, paral. à DC, CF, & prolongeant GA, ſoit accomply le q. AM: & prolongee FC à N, *a* AI, kG, ſeront les quarrez de AD, AC, *b* & d'autant que comme AB à AC, ainſi AC à CB, *c* le rectangle CM, contenu ſous AB, CB, ſera egal à kG, q. de AC: & AB eſtant poſee double de AD. & AL, egale à AB & AH, & AD: AL, ſera auſſi doublee de AH: *d* mais comme AL, à AH, ainſi le rectangle AN, au rectangle Ak: donc AN, eſt double de Ak: *e* mais d'autant que Ak, eſt egal à IG: AN, ſera egal aux deux Ak, IG.



a Co. 4. 2.
b 3. d. 6.
c 17. 6.
d 1. 6.
e 43. 1.

Adiouſtant donc les egaux CM, kG, le quarré AM, ſera egal au Gnomon OPQ: *f* partant le q. AM, eſtant quadruple du quarré AI, puis que DA, eſt poſee moitié de AB, le Gnomon OPQ, ſera quadruple du meſme AI: parquoy ſi à OPQ on adiouſte AI, le quarré FD, ſera faict quintuple du quarré AI. Donc ſi vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

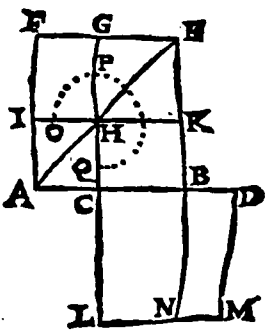
f Sc 4. 2.

THEOREME 2. PROP. 2.

Si vne ligne droicte peut le quintuple de son segment, la ligne double dudict segment, estant couppee selon la moyenne & extreme raison: l'autre partie est le plus grand segment de la ligne premierement couppee.

C'est à dire, si le quarré d'vne ligne droicte est quintuple du quarré d'vne partie d'icelle, le double de cette partie estant couppé en la moyenne & extreme raison, le plus grand segment est l'autre partie de ladicte ligne.

9. 12.



Soit la ligne droicte AB, diuisee par C, & qu'elle puisse le quintuple de AC, & soit prise CD, double de AC. Ie dis que CD, estant couppee selon la moyenne & extreme raison, CB sera le plus grand segment de la toute CD, partie restante de la premiere

g Co. 4. 2. AB. g Car ayant acheué la const. cõme en la prec. CI, K G, seront les qq. de AC, CB: & d'autant que le q. BF, est posé quintuple du q. CI, si on oste le q. CI, demeurera le gnomon OPQ, quadru-

ple du mesme q. CI. *b* Mais le q. CM, est quadru- h Sc. 4. 2.
ple du quarré CI, puis que CD, est double de AC: Donc le gnomon OPQ, sera egal à CM.

Derechef, d'autant que CD, est posee double de AC, & LC, est egale à CD, & CH à AC: AC, sera double de CH. Donc puis que comme LC, est CH, ainsi le rectangle LB, au rectangle CK: celuy-là sera aussi double de cettuy-cy: *i* mais CK, est egal à HF. Donc LB, est egal à GK, HF; & partant le quarré restant KG, au rectangle restant BM. 1. 6. i 43. 1.

D'autant donc que le rectangle BM, contenu sous CD, BD, est egal à KG, quarré de CB, *l* comme CD, sera à CB, ainsi CB, à BD. Partant CD, est couppee à B, en la moyenne & extreme raison, & CB, est le plus grand segment. &c. Ce qu'il falloit demonstrer. l 17. 6.

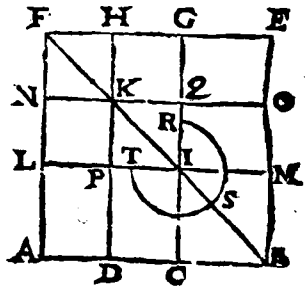
THEOREME 3. PROPOSIT. 3.

Si vne ligne droicte est couppee, selon la moyenne & extreme raison; la ligne faite du moindre segment, & de la moitié du plus grand, peut le quintuple du quarré descrit de la moitié du plus grand segment.

C'est à dire, le quarré du moindre segment auec la moitié du plus grand, comme d'vne seule ligne, est quintuple du quarré de la moitié du plus grand.

Soit la droicte ligne AB, diuisee par C, selon

la moyenne & extreme raiſon, dont AC, eſt le plus grand ſegment, lequel ſoit diuiſé à D, en 2. egalement. Ie dis que le q. de BD, eſt quintuple du q. de CD.



Car ſur AB, ſoit deſcrit le q. AE, dont le diametre ſoit BF: puis par C & D, ſoient menees CG, DH, parall. à AF, BE, & couppant BF, par I & K, par leſquels ſoient menees L M, NO, parall. à AB, EF, couppantes CG, DH, à P & Q, a LG, PQ. NH, DO, ſont les qq. de AC, CD, BD.

a Co. 4. 2.

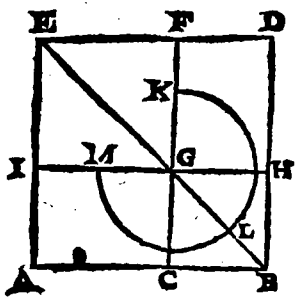
b Sc. 4. 2. D'autant donc que AC, eſt double de CD, b le q. LG, ſera quadruple du q. PQ. Mais le rect. CE, eſt egal au q. LG: (car puis que comme AB à AC, c 17. 6. ainſi AC, à CB, c le rect. ſous AB, CB, ſçauoir CE, eſt egal au q. de AC, ſçauoir à LG,) donc CE ſera auſſi quadruple de PQ.

Mais d'autant que les qq. NH, PQ ſont egaux, AD. CD eſtans egales, leurs coſtez HK, IQ ſeront d 34. 1. egaux: d & partant EO, OM, oppoſez à iceux, e e 36. 1. donc les rect. IO, QE, ſeront egaux: f mais IO, eſt f 43. 1. egal à ID:: donc QE, ſera egal au meſme ID: adiouſtant donc le cõmun rect. CO, tout le gnomon RST, ſera egal au rect. CE. Et CE eſtant monſtré quadr. du q. PQ. le gnomon RST, ſera auſſi quadr. du meſme q. PQ. adiouſtant le cõmun q. PQ. le q. DO, deſcrit de BD, ſera quintup. du q. PQ. deſcrit de ED: donc &c. une ligne, &c. Ce qu'il falloit demonſt.

PROBLEME 4. PROPO. 4.

Si vne ligne droicte eſt couppee ſelon la moyenne & extreme raiſon, l'vn & l'autre quarré, ſçauoir celuy de la toute, & celuy du moindre ſegment enſemble, ſont triples du quarré deſcrit du plus grand ſegment.

Soit la droite ligne AB, couppe à C, en la moyéne & extreme raiſon, & ſoit AC, le plus grand ſegment CB, moindre. Ie dis que les qq. de AB, & de BC enſemble, ſont triples du quarré de AC.



Car ſur AB, ſoit deſcrit le q. AD, & ayant mené BE, diametre, & par C, ſoit menee CF, parallele à BD, & HI, à AB, couppantes le diametre à G, *g* CH; IF, ſeront les qq. de BC, AC. Et d'autant que comme AB à AC, ainſi AC, à CB: *h* le rect. AH, contenu ſous AB, BC, eſt egal à IF, q. de AC. Donc AH, eſtant egal à CD, le gnomon KLM, auec le q. CH, ſera double du q. IF. Parquoy adiouſtant IF, AD, qu. de AB, auec CH, q. de BC, ſera triple de IF, q. de AC. Donc ſi vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

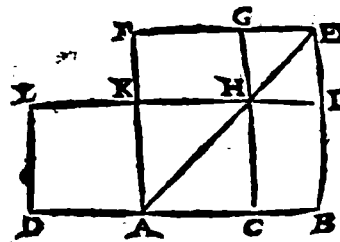
g Co. 4. 2.

h 17. 6.

THEOREME 5. PROP. 5.

Si vne ligne droicte eſt couppee ſelon la moyenne & extreme raiſon, & que l'on adiouſte à icelle vne ligne egale au plus grand ſegment: la ligne droicte totale eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon; & le plus grand ſegment eſt la ligne droicte, qui eſtoit au commencement.

Soit AB, couppee à C, en la moyenne & extreme raiſon, & ſoit AC, plus grand ſegment, & à iceluy ſoit adiouſté directement AD, egale au plus grand ſegment AC. Ie dis que BD, eſt couppee à A, en la moyenne & extreme raiſon, & que le plus grand ſegment eſt AB.



Car ſur AB, ſoit deſcrit le q. BF; & mené AE, diametre, & CG, parallele à BE, couppant AE, au poinct H, par lequel ſoit menee Ik, parallele à BD, & par D, DL, parallele à AF, rencontrant Ik, prolongee à L: a & Ck, IG, ſeront les qq. de AC, BC.

a Co. 4. 2.

D'autant donc que comme AB, eſt à AC, ainſi AC, à CB, b le rect. IF, contenu ſous AB, BC, ſera egal à Ck, q. de AC: c mais Ck, eſt egal à AL: dõc

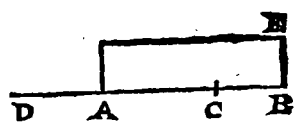
b 17. 6.

IF, est aussi egal à AL: adiouſtant donc le commun BK, le rect. BL, contenu ſous BD, DA, ſera egal à BF, q. de AB: d partant comme BD, ſera à AB, ainſi AB à AD. Parquoy BD eſt couppé à A, en la d moyenne & extreme raiſon, & AB, eſt le plus grand ſegment. Ce qu'il falloit demonſtrer. c 36. 1. d 17. 6.

THEOREME 6. PROP. 6.

Si vne ligne droicte rationelle, eſt couppee ſelon la moyenne & extreme raiſon; l'vn & l'autre des ſegmens eſt ligne irrationelle, laquelle eſt appellee apotome ou reſidu.

Soit la ligne droicte rationelle AB, couppee à C, en la moyenne & extreme raiſon. Ie dis que tant l'vn que l'autre des ſegments AC, CB, eſt ligne irrationelle, appellee reſidu.



Car ſoit adiouſté au plus grand ſegment AC, la ligne droicte AD, egale à la moitié de la toute AB. c D'autant donc que le q. de CD, eſt quintuple du q. de AD, le q. de CD, ſera au q. de AD, comme nombre à nombre. f Parquoy les qq. de CD, AD, ſeront commenſurables, & partant les lignes CD, AD, commenſurables; au moins en puiſſance: Mais AD, eſt rationelle, eſtant moitié de AB, ration. Donc CD, ſera auſſi rationelle. g

c 1. 13. f 6. 10. g Co. 24. 8

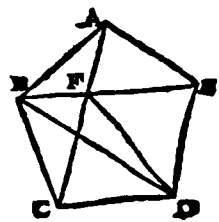
Mais d'autant que les quarrez de CD, AD, ne

sont l'vn à l'autre, comme nombre q. à nombre
a 9.10. q. (estant comme 5. à 1. ou 25. à 5.) a CD, AD, serõt incommens. en longit. & partant rationelles commens. en puissance seulement. Parquoy si de CD rationelle, on oste AD, rationelle, commensur. en
b 74.10. puissance seulement: b la restante AC, sera irrationelle, qui est appellee residu.

Derechef, le rect. AE, estant appliqué à AB, cõtenu sous AB, CB, puis que comme AB à AC, ainsi
c 17.6. AC à CB, c le rect. AE, sera egal au q. de AC:
d 98.10. parquoy le q. du residu AC, c'est à dire, le rect. AE, appliqué selon la rationelle AB, d faict l'autre coste BE: c'est à dire CB, egale à icelle, residu premier. Donc si vne ligne droicte rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 7. PROPO. 7.

Si trois angles d'vn *pentagone* equilateral, soit qu'ils soient d'ordre ou non d'ordre, sont egaux: iceluy pentagone sera equiangle.



Au pentagone ABC DE equilateral, soient trois angles egaux, premierement d'ordre A, B, C. Ie dis qu'il est equiangle.

Car à iceux angles egaux soiẽt soustendantes BE, AC, BD, & de F, où s'entre-couppent BE, AC, soit menee FD. D'autant que les costez AB, AE, du triangle ABE, sont

egaux à CB,CD,du triangle CDB, & les angles contenus d'iceux posez egaux:e les bases BE,BD, e 4. 1.
& les angles AEB,CDB ,sont egaux. f Mais les f 5. 1.
angles BED,BDE,sont aussi egaux,les costez BE, BD, estans monstrez egaux: donc les touts AED, CDE,seront egaux.

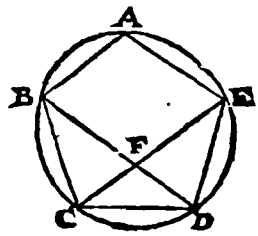
Derechef,les costez AB,AE, du triangle ABE, estans egaux à BA, BC, du triangle BAC, & les angles contenus d'iceux egaux, par l'hypothese,g g 4. 1.
la base BE,sera egale à AC,& les angles ABE,AE B, egaux à BAC,BCA,chacun au sien.Donc puis que les angles ABE,BAC,du triang.ABF,sont egaux:h les costez BF, AF, sont aussi egaux:donc h 6. 1.
s'ils sont ostez des egales BE,AC,les restes FE,F C,seront egales.Partant les costez FE,ED,du triangle FED,estans egaux à FC,CD,du triang.FCD, & FD,commune;i FED,FCD,contenus d'iceux i 8.1.
costez seront egaux:mais AEB, BCA, sont monstrez egaux:donc les touts AED,BCD,sont egaux, partant CDE,estant monstré egal à AED, & les angles ABC,BAE,& BCD, estans posez egaux, iceluy pentagone sera equiangle.

Soient secondement les 3. angles A,C,D, non d'ordre egaux:d'autant donc que les costez AB, AE,du triang.ABE,sont egaux aux costez CB, C D,du triang.CBD,& les angles contenus d'iceux l 4.1.
posez egaux:l les bases BE,BD,& les ang. AEB, m 5. 1.
CDB seront egaux:m mais les angles BED, BDE, sont aussi egaux,les costez BE.BD,estans monstrés egaux:donc les touts AED,CDE sont egaux, dóc BAE,CDE,estans posez egaux,les 3.angles de suitte A,E,D,seront egaux:dóc comme il est desia monstré,le pentagone sera equiangle. Donc si 3. angles d'vn pentagone, Ce qu'il falloit demonster.

THEOREME 8. PROP. 8.

Si deux lignes droictes ſouſtendent deux angles d'vn pentagone equiangle & equilateral, leſquels ſont d'ordre, icelles ſe couppent l'vne l'autre en la moyenne & extreme raiſon, & les plus grands ſegments d'icelles ſont egaux au coſté du pentagone.

Soient deux lignes droictes DB, CE, ſouſtendantes les 2. angles C & D, au pentagone equiangle & equilateral ABCDE, & ſe couppantes l'vne l'autre au poinct F. Ie dis qu'elles ſe couppent en la moyenne & extreme raiſon, & que leurs plus grands ſegments FB, FE, ſont egaux à chacun coſté du pentagone.



a 14. 4. Car *a* ayant deſcrit vn cercle à l'entour du pentagone, *b* les 5. arcs AB, BC, CD, DE, EA, ſeront egaux.

b 28. 3. Et d'autant que les coſtez CD, CB, du triangle CDB, ſont egaux aux coſtez DC, DE, du triangle DCE: & les angles contenus d'iceux poſez egaux: les baſes DB, CE, & les angles CDB, DCE ſeront egaux: *c* parquoy au triangle CDF, les deux angles FCD, FDC, eſtans egaux: *d* & BFC, exterieur, egal à iceux, BFC; ſera double de DCE: *e* mais l'angle BCE, eſt auſſi double du meſme DCE: d'autant

c 4. 1.
d 32. 1.
e 33. 6.

que l'arc BAE, est double de l'arc DE. Donc les angles BFC, BCF sont egaux: *f* & partant BF, egale au costé du pentagone BC. *g* f 6. 1. g 17. 3.

Mais d'autant que les angles BDC, ECD, appuyez sur arcs egaux, sont egaux: les deux angles DBC, CDB, du triangle BCD, sont egaux aux 2. DCF, FDC, du triangle CFD: *b* partant les triangles BCD, CFD, sont equiangles; *i* partant comme BD, à DC: c'est à dire, à BF, egale à DC, ainsi CD, c'est à dire, BF, son egale, est à FD: Donc BD est couppee à F, en la moyenne & extreme raison, & le plus grand segment BF, est monstré egal au costé du pentagone. h 32. 1. i 4. 6.

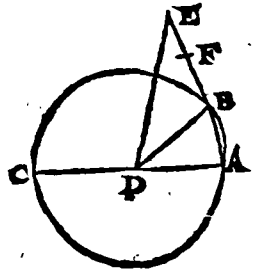
Semblablement on monstrera que CE, est couppee à F, selon la moynne & extreme raison, & que son plus grand segment EF, est egal au costé du pentagone. Donc si, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 9. PROPO. 9.

Si le costé de l'hexagone, & le costé du decagone, inscrits en vn mesme cercle, sont composez: La ligne droicte totale est couppee en la moyenne & extreme raison, & le plus grand segment d'icelle est le costé de l'hexagone.

Au cercle ABC, soit la droicte ligne AB, costé du decagone, à laquelle soit adiousté BE, directement, egale au demy-diametre du cercle; & partant au costé de l'hexagone inscrit au mesme cercle.

Ie *dis* que E A eſt couppée à B, en la moyenne & extreme raiſon, & que le plus grand ſegment E B, eſt le coſté de l'hexagone.



Car de A, ſoit mené le diametre AC, & du centre D, ſoient conioinctes DB, DE. D'autant que l'arc AB, eſt la dixieſme partie de toute la circonference du cercle : l'arc du demy-cercle contiendra l'arc AB, cinq fois. Partant l'arc BC, ſera quadruple de l'arc AB : *l* parquoy l'angle BDC, ſera auſſi quadr. de l'angle ADB.

l 33. 6.

m Co. 15. 4. Derechef, d'autant que les coſtez BD, BE, ſont egaux, ſçauoir coſtez de l'hexagone: (*m* car BE, coſté de l'hexagone, eſt egal au demy diametre *BD.*)

n 5. 1. 032. 1, *n* Les angles BDE, BED, ſeront egaux, *o* auſquels l'externe ABD, eſtant egal, ABD, ſera double de

p 5. 1. BED : *p* mais BAD, eſt egal à ABD, les coſtez DA; DB eſtans egaux: donc BAD, ſera auſſi double de BED: partant les deux DAB, DBA enſemble,

q 32. 1. ſeront quadruples de BED. *q*

Donc puis que l'angle extérne BDC, eſt *egal* aux deux DAB, DBA, l'angle externe BDC, ſera quadruple du meſme BED; mais le *meſme angle* BDC, a eſté monſtré quadruple de *ADB.* Donc les angles AED, ADB ſont egaux: partant les deux angles AED, DAE, du triangle ABE, eſtans egaux

r 32. 11. 6. 6. angles AED, ADB ſont egaux : partant les deux aux deux ADB, BAD, du triangle ABD, *r* les triangles ADE, ABD, ſeront equiangles. Partant, comme

comme EA, sera à AD, ou à EB, egale à AD: ainsi AD, c'est à dire EB, son egale, à BA : Donc EA est couppee à B, en la moyenne & extreme raison, & EB est le costé de l'hexagone. Donc si le costé, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De cette demonstration il est manifeste, que si le costé de l'hexagone est couppé en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment sera le costé du decagone descrit au mesme cercle. Car du costé de l'hexagone BE, estant prise BF, partie egale à AB, comme la toute AE, sera à la toute BF, partie egale à AB ; comme la toute AE, sera à la toute BE, ainsi la retranchee BE, à la retranchee BF: *a* donc le reste AB, c'est à dire, BF, sera au reste FE, comme la toute AE, à la toute BE, ou BE, retranché de AE, à BF, retranchee de BF; *b* partant BE, sera couppee comme AE, en la moyenne & extreme raison à F, & BF, plus grand segment, est egal à AB, costé du decagone.

a 19. 5.

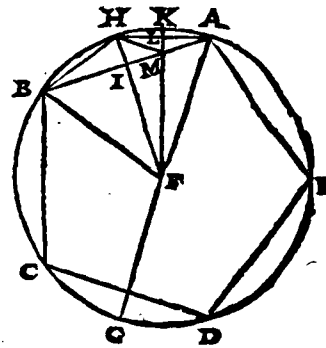
b 3. d. 6.

PROBLEME 10. PROP. 10.

Si vn pentagone equilateral est inscrit au cercle, le costé du pentagone, peut le costé de l'hexagone, & le costé du decagone, inscrits au mesme cercle.

C'est à dire, que le quarré du costé du pentagone equilateral inscrit au cercle, est egal aux deux quarrez ensemble, du costé de l'hexagone, & du decagone inscrits au mesme cercle.

Au cercle ABCD, dont le centre est F, soit inscrit le pentagone equilateral ABCDE. Ie dis que le q. de AB, costé du pentagone, est egal au q. du costé de l'hexagone, & au q. du costé du decagone du mesme cercle.



Car soit mené le diametre AFG, & cõiointe FB, puis ayant diuisé l'arc AB, en deux egalement à H, soient conioinctes les lignes droictes AH, BH, & FH, coupant la droicte ligne AB, à I: la ligne droite AH, sera le costé du decagone, & BF, costé de l'hexagone.

Derechef, ayant diuisé l'arc AH, en deux egalement à K, soit conioincte FK, couppant la droicte ligne AH, au poinct L, & la droicte AB, par le poinct M, auquel soit menee HM. D'autant donc
c 27.3. que les arcs AH, BH, sont egaux *c*, les angles AFH, BFH, appuyez sur iceux, seront egaux. Parquoy les costez AF, FI, du triangle AFI, estans egaux à BF, FI, du triangle BFI, & les angles *contenus*
d 4.1. d'iceux aussi egaux, *d* les bases AI, BI, *seront* egales, & les angles AIF, BIF egaux, & *partant* droits. Par mesme raison, les droictes lignes AL, HL, seront egales, & les angles ALF, HLF droicts.

Puis si des demy-cercles egaux ABCG, AEDG, on oste les arcs egaux ABC, AED, demeureront les

arcs CG, DG, egaux entr'eux: partãt l'arc CG, sera moitié de l'arc CD. Mais l'arc AH, est moitié de l'arc AB: donc les arcs AB, CD estans egaux, leurs moitiez qui sont les arcs CG, AH seront egaux: donc puis que l'arc AH est double de l'arc HK, l'arc CG, sera aussi double de l'arc HK.

Semblablement, d'autant que les arcs AB, BC, sont egaux, & l'arc AB, est double de l'arc BH, l'arc BC, sera aussi double du mesme BH. Parquoy les arcs CG, BC, sont equimultiples, sçauoir doubles des arcs HK, BH. *a* Et partant tout l'arc BG, sera aussi double de tout l'arc BK: *b* & partant l'angle BFG, double de l'angle BFK, *c* mais d'autant que le mesme angle BFG, au centre, est aussi double de l'angle FAB: les angles BFM, & FAB seront egaux: *d* & partant les triangles ABF, FBM: ayans les angles FAB, MFB egaux, & l'angle ABF commun, seront equiangles: *e* partant comme AB, à BF, ainsi BF à BM: *f* donc le rect. contenu sous AB, BM, sera egal au q. de la droicte ligne BF.

a 1. 5.
b 33. 6.
c 20. 3.
d 32. 2.
e 4. 6.
f 17. 6.

Derechef, d'autant que les costez AL, LM, du triangle ALM, sont egaux à HL, LM, du triangle HLM, & les angles contenus d'iceux egaux; sçauoir droicts: *g* les bases AM, HM, & les angles LAM, LHM seront egaux: *h* mais l'angle LAM, est egal à l'angle HBA: d'autant que les costez HA, HB sont egaux. Donc l'angle LHM, sera aussi egal au mesme HBA: *i* partant les triangles ABH, AHM, ayans les angles ABH, AHM egaux, & HAM commun, seront equiangles. *m* Parquoy comme AB, à AH, ainsi AH à AM. *n* Donc le rect. sous AB, AM, sera egal au q. de AH: mais le rect. sous AB, BM, est monstré egal au q de BF: donc les rect.

g 4. 1.
h 5. 1.
i 32. 1.
m 4. 6.
n 17. 6.

sous AB,BM,& sous AB,AM, ensemble, sont egaux aux quarrez de BF, AH. o Mais les rect. sous AB, BM,& sous AB,AM,sont egaux au q. de AB : donc le quarré de AB,sçauoir du costé du pentagone, est egal aux quarrez de BF,AH, costé de l'hexagone, & costé du decagone. Donc si au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste de cette demonstration, que la ligne droicte menee du centre qui diuise vn arc en deux egalement, diuise aussi la ligne droicte soustendante iceluy, à angles droicts en deux egalement, estant monstré que FH diuisant l'arc AB,en deux, egalement diuisé, aussi la ligne droicte AB, en deux egalement, & angles droicts à I, & est la mesme demonstration de tous les autres.

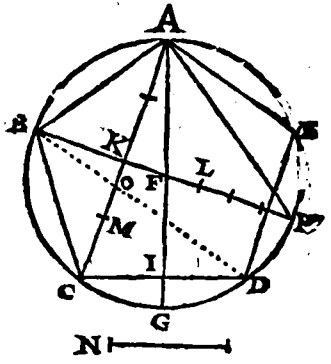
Il est aussi manifeste, que *le diametre du* cercle mené de l'angle du pentagone, diuise aussi l'arc soustendant le costé oppose à iceluy angle en deux egalement, & aussi ledict costé en deux egalement& à angles droits: estant demõstré que le diametre A G, diuise en deux egalement l'arc CD, soustendu du costé CD. Donc par ce qui est demonstré, il couppe aussi en deux egalement, & à angles droicts, ledict costé CD : *On fera la* mesme demonstration de tout polygone equilateral inscrit au cercle ; le nombre des costez estant impair.

(·.·) (·.·) (·.·)

THEOREME II. PROP. II.

Si au cercle duquel le diametre eſt rationel, eſt inſcrit vn pentagone equilateral, le coſté du pentagone eſt ligne irrationelle, appellee mineure.

Au cercle ABCD, ayant le diametre rationel, ſoit inſcrit vn pentagone equilateral ABCDE. Ie dis que le coſté AB, eſt ligne irrationelle, appellee mineure.



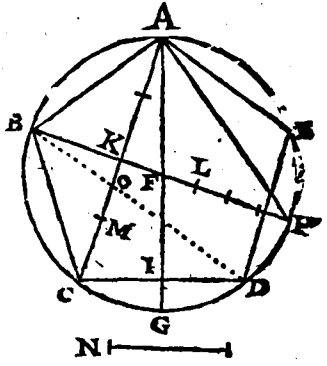
Car ſoient menez les diametres AG, BH, ſe coupans au centre F, & que AG, coupe CD à I, & ſoiét conioinctes AC, AH, dont AC coupe BH à K, & ſoit priſe FL, quarte partie de FH, & CM, quarte partie de AC: d'autant que BH eſt poſee rationelle FL, BF, parties aliquotes d'iceluy, ſeront rationelles, luy eſtant commenſurables: & partant la toute BL, compoſee d'icelles *p* eſtant commenſurable à chacune d'icelles FL, BF ſera rationelle. p 16. 10.

Derechef, FB, menee du centre couppant l'arc ABC, en deux egalement à B, *q* elle couppera la droicte ligne AC, auſſi en deux egalement à K, & q cor. 10. 12

a Co.10.13 à angles droicts: *a* mais AG, couppe CD à I, en deux egalement, & à angles droicts. Donc les triangles ACI, AFK, ayans les angles CIA, AKF, b 32. 1. droicts, & CAI commun, *b* ſeront equiangles. *c* c 3.6. Donc comme CI à CA, ainſi FK à FA: & en chãgeant, comme CI à FK, ainſi CA à FA, ou à *FH*, d 15.5. egale à FA. *d* Mais comme CA à FH, ainſi CM, quarte partie de CA à FL, quarte partie de FH. Donc comme CI à FK, ainſi CM à *FL*, & en changeant, comme CI à CM: c'eſt à dire, comme CD, double de CI à CK, double de CM, ainſi FK à FL, & en compoſant comme CD, CK, enſemble à CK, ainſi FK, FL enſemble, ſçauoir KL à e 23.6. FL, & *e* partant comme le quarré de la compoſee de CD, CK, au q. de CK, ainſi le q. de KL, au q. de FL.

Mais d'autant que ſi AC, eſt couppee en la 8. 13. moyenne & extreme raiſon (eſtant menee BD) g 1. 13. *f* ſon plus grand ſegment OA, ſera egal au *coſté du* pentagone, ſçauoir à CD: *g* le q. de la compoſee de CD, ou OA, plus grand ſegment, & de CK, moitié de la toute, ſera quintuple du qu. de CK, moitié de la toute. Parquoy le quarré de kL, ſera auſſi quintuple du quarré de FL, *b* donc le q. de kL, ſera commenſurable au quarré de FL: & partant kL, FL, auſſi commenſurables au moins *en* puiſſance, &c. Mais FL eſt monſtree *rationelle*, donc kL, ſera auſſi rationelle.

En apres, d'autant que BF, eſt quatre *telles* parties que FL 1 & telles 5. parties qu'eſt *BL*: FL en h 20.6. eſt 1. le q de BL, ſera 25. telles parties que le qu. de FL 1. (comme appert par ces nombres 1. 5. 25. *b* car les quarrez ſont en raiſon doublee de leurs coſtez.)



Mais le qu. de kL, eſt, monſtré eſtre 5. telles parties que le qu. de FL eſt 1. Donc le qu. de BL ſera 25. telles parties que le qurré de kL en eſt 5. dõc le q. de BL, ſera quintuple du q. de kL. i

D'autant donc que les quarrez de BL, kL, ne ſont entr'eux comme nombre q. à nombre quarré (eſtant comme 25. à 5. ou 5. à 1.) l BL, kL, ſeront incommenſ. en long. & eſtans monſtrees ration. elles ſeront ration. commenſ. en puiſſ. ſeulement. Donc ſi de la ration. BL, on oſte la rationelle kL, commenſ. en puiſſ. ſeulement, m la reſtante Bk, ſera irratio. dite reſidu, & ſa conuenable ſera kL. i Co. 24. 8. l 9. 10. m 74. 10.

Mais maintenant que BL, puiſſe plus que kL, du quarré de N. D'autant que le quarré de BL eſt egal aux quarrez de kL, & N. Mais le quarré de BL eſtoit 5. telles parties que le quarré de kL, i. le reſte quarré de N, ſera 4. telles part. que le qu. de BL en eſt 5. o Dõc les quarrez de BL & N, ſeront entr'eux comme nombre à nombre. n Partant commenſ. & BL & N, cõmenſ. au moins en puiſſ. Mais BL eſt monſtree ration. donc N le ſera auſſi, o & les qq. de BL & N, n'eſtans entr'eux comme nomb. q. à nomb. q. (eſtant comme 5. à 4.) BL & N ſeront incommenſ. en longit. partant rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. n 6. 10. o Cor. 24. 8. 9. 10.

Parquoy la toute BL, eſtant rationelle, commenſurable en longitude à la rationelle BH: (car BL eſt 5 telles parties que BH 8.) & pouuant plus que ſa conuenable KL, du qu.de N, monſtrec incommenſ.en longit.à icelle, BK ſera reſidu 4. par la definition.

a Co. 8. 6. Finalement, *a* d'autant que AB eſt moyenne proportionelle entre BH, BK (le triangle ABH, b 31. 3. ayant l'angle BAH droict, dont eſt mené AK, perpendiculaire à la baſe) *b* le quarré de AB, ſera egal au rectang. ſous BH, Bk. Partant AB, pouuãt la ſuperficie contenuë ſous la rationelle BH, & c 17. 6. le reſidu quatrieſme BK; *c* AB, ſera ligne mi- 95. 10. neure. Donc ſi au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 12. PROP. 12.

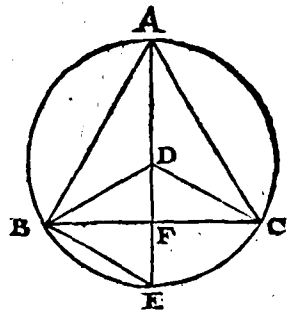
Si vn triangle equilateral eſt *inſcrit* au cercle, le coſté du triangle eſt triple en puiſſance à la ligne menee du centre du cercle à la circonference.

C'eſt à dire, que le quarré du coſté du triangle equilateral, inſcrit au cercle, eſt triple du quarré de ſon demy-diametre.

Au cercle ABC, dont le centre eſt D, ſoit inſcrit le triangle equilateral ABC. Ie dis que le qu. du coſté AB, eſt triple du quarré du demy-diametre.

Car ayant mené le diametre AE, couppant l'arc d Co. 10. 13 BC en deux egalement à E, *d* & la droicte ligne

BC, auſſi en deux egalement, & à angles droicts à F: l'arc BC, eſtant la 3. partie de la circonference: l'arc BE, ſera la 6. & BE ligne droicte, eſtãt menee, ſera le coſté de l'hexagone, e & egale au demy diametre. D'autant donc que le quarré de AE, eſt egal aux qq. de AB, BE, f eſtant l'angle ABE droict au demy-cercle, g Mais le q. de AE, eſt quadruple du q. de BE: puis que AE, eſt double de EB: les qq. de AB, BE enſemble, ſeront pareillement quadruples du meſme q. de BE: & partant telles 4. parties que ſont les qq. de AB, BE, le q. de BE, en ſera 1. & par ainſi le q. de AB, ſera 3. telles parties. Donc le qu. de AB, eſt triple du quarré de BE, laquelle eſt egale au demy-diametre. Donc ſi vn triangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



e Co. 15. 4

f 47. 1.

g 31. 3. Sch. 4. 2.

COROLLAIRE.

De ces choſes il s'enſuit, que le diametre du cercle eſt ſeſquitiers en puiſſance, au coſté du triang. equilateral inſcrit au meſme cercle. C'eſt à dire, que le q. du diametre eſt en raiſon ſeſquitierce, ou comme 4. à 3. au q. du coſté du triangle equilateral inſcrit au meſme cercle. Car le q. de AB, eſtant monſtré triple du q. du demy-diametre AD, le q.

de AB, estant posé de 3. le quarré de AD sera 1. & partant le q. de AE, *a* quadruple du quarré de AD sera 4, Parquoy le quarré de AE est sesquitiers, du quarré de AB: c'est à dire, comme 4. à 3. *b* Et d'autant que comme AF à AB, ainsi AB à AF, perpendiculaire menee d'vn angle sur le costé. Le quarré de AB, sera aussi comme 4. à 3. *au quarré* de AF.

a Sc. 4. 2.

b Co. 8. 6.

Secondement, l'on peut colliger que DE, demy-diametre, est couppé en deux egalement à F, par le costé BC, du triangle ABC, Car le q. de AB estant triple du q. de BE: si on pose ledict q. de AB, de 12. le q. de BE, sera 4. *c* Mais le q. de BE, est egal aux qq. de BF, FE: donc les qq. de BF, FE, seront 4. mais le q. de BF est 3. (le *d* q. de AB estant quadruple du q. de BF; car AB est double de BF) donc le q. de FE sera 1. Partant le q. de BE, quadruple du q. de FE. Donc DE sera double de FE: parquoy DE est couppee en deux egalement à F.

c 47. 1.

d Sc. 4. 2.

PROBLEME 1. PROPO. 13.

Constituer vne pyramide, & l'enuironner d'vne sphere donnee, & monstrer que le diam. de la sphere, est sesquialtere en puissance au costé de la pyramide.

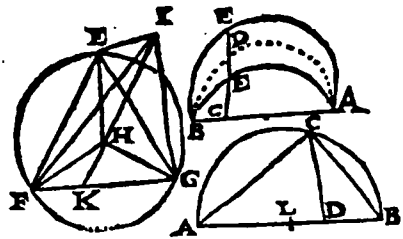
Soit AB, diametre de la sphere donnee, à l'entour duquel soit descrit ACB demy-cercle: & soit prise BD, tierce partie de AB, de sorte que AD, soit double de DB, & AB, triple de la mesme DB, & sequialtere de AD, & ayant mené CD, perp. à AB, soiét iointes AC, CB. Et soit descrit le cer-

cle FEG, de l'interualle HE, posee egale à DC, du centre H, auquel soit inscrit le triangle equilateral EFG, & conioinctes HF, HG, chacune desquelles sera egale à DC, estans egales à HE, & de H soit leuee HI, à angles droicts au plan du cercle, & posee egale à AD, & de I, menees IE, IF, IG. Ie dis que le solide, contenu des 4. triangles FEG, IEF, IFG, IEG, est pyramide ou tetraedre.

Car d'autant que les costez DA, DC, du triang. ADC, sont egaux à HI, HE, du triangle IHE, *a* & les angles contenus d'iceux posez droicts. *b* La base AC, sera egale à la base IE. Semblablement AC, sera monstree egale à IF, IG. *a* 23. d. 11. *b* 4. 1.

Derechef, d'autant que les 3. lignes AD, DC, DB sont proportionelles, comme AD à DB, ainsi le quarré de AD, au quarré de DC: & en componsant, comme AB, à DB, ainsi les quarrez de AD, DC ensemble, au quarré de DC: mais les quarrez de AD, DC, sont egaux, au quarré de AC. Donc aussi comme AB, à DB, ainsi le quarré de AC, au quarré de DC: partant AB, estant triple de DB, aussi le quarré de AC, sera triple du q. HE, estant HE, egale à DC. Or le q. de EF, est aussi triple du mesme quarré de HE. Donc le quarré de AC, sera egal au quarré de EF: & partant AC, egale à EF. Par quoy AC, estant monstree aussi egale à IE, IF, IG, les 4. triangles EFG, EFI, FGI, GEI, seront equilateraux & equiangles entr'eux L'on a donc constitué vne pyramide ou tetraedre: dont la base est EFG, & le sommet I. Ie dis qu'icelle pyramide est comprise en la sphere donnee: dont le diametre est AB, & le diametre de la sphere AB, est sesquialtere en puissance au costé FE, ou AC. Cor. 8. 6. Co. 20. 6. 47. 1. 12. 13.

Soit prolongee IH, perpendiculaire à K, de ſorte que HK, ſoit egale à DB, & la toute IK, à la toute AB. D'autant donc que les 3. AD, DC, DB, ſont proportionelles, auſquelles IH, HE, HK ſont egales, IH, HE, HK ſeront auſſi proportionelles. Parquoy HE, eſtant perpendic. à IK, & moyenne proportionelle entre IH HK, le demy-cercle deſcrit à l'entour de IK, au plan de IK, HF, paſſera par E, comme il ſera monſtré incontinent. Semblablement, tant le demy-cercle deſcrit à l'entour de Ik, au plan de IK, HF, paſſera par F, que le demy-cercle deſcrit à l'entour de IK, au plan de IK, HG, par G. Donc chacun d'iceux demy cercles mené à l'entour le diametre demeurant fixe, deſcrira vne ſphere, laquelle comprendra le tetraedre conſtitué, puis qu'elle paſſe par tous les angles d'iceluy E, F; G, I: & icelle eſtãt egale à la donnee, le diametre IK, eſtant poſé egal au diametre AB, la ſphere donnee comprendra le meſme tetraedre.



a Co. 8. 6. b Co. 20. 6

Mais d'autant a que AB, AC, AD ſont proportionelles, comme AB à AD, b ainſi le quarré de AB, ſera au quarré de AC: mais AB, eſt poſee ſeſquialtere du quarré de AD. Donc le quarré de AB, ſera ſeſquialtere du quarré de AC: & partant, puis que AB, eſt le diametre de la ſphere, & AC, egale à EF, coſté de la pyramide. Il eſt manifeſte

que le diametre de la ſphere eſt ſeſquialtere en puiſſance, au coſté du tetraedre ou pyramide. Donc nous auons conſtitué, &c. Ce qu'il falloit faire.

LEMME.

Or que le demy-cercle deſcrit à l'entour de Ik, au plan de JK, HE, paſſe par E: il ſera demonſtré par ce Theoreme.

Si à vne ligne droicte on mene vne perpendiculaire, qui ſoit moyenne proportionelle entre les ſegments de la ligne, le demy-cercle deſcrit à l'entour d'icelle ligne, paſſera par l'extremité de la perpendiculaire.

Car ſoit CD, perpendiculaire à AB, & moyenne proportionelle entre AC, & CB. Ie dis que le demy-cercle deſcrit à l'entour de AB, paſſera par D: car s'il paſſoit au deſſus ou au deſſous, ſçauoir par E, c CE ſera auſſi moyenne proportionelle entre AC, & CB. d Donc tant le quarré de CD, que le q. de CE, ſera egal au rectangle ſous AC, CB. Partant, les qq. de CD, CE ſont egaux entr'eux, & CD, CE, la partie et le tout: ce qui eſt abſurde. Donc le demy-cercle paſſera par D. D'où il s'enſuit que le demy-cercle deſcrit à l'entour de Jk, au plan de IK, HE, paſſera par E: HE eſtant perpendiculaire à Jk, & moyenne proportionelle entre IH, HK.

c Co. 13. 6.
d 17. 9.

COROLLAIRE.

De cecy on peut colliger, que le diametre de la ſphere, eſt quadruple ſeſquialtere en puiſſan-

ce au demy-diametre du cercle descrit autour de la base de la pyramide. Car le diametre de la sphere AB, estant monstré sesquialtere en puissance au costé de la pyramide EF: le quarré de EF, sera de 6. telles parties que le quarré de AB, en est 9. Mais le quarré de HE, est deux telles parties que le q. de
a 12. 13. EF, en est 6. a Icelluy quarré de EF, estant triple du quarré de HE: Donc le quarré de HE, sera de 2. telles parties que le quarré de AB en est 9. Partant le diametre de la sphere AB, est quadruple sesquialtere en puissance au demi-diametre HE, les qq. estans comme 9. à 2.

Derechef, la perpendiculaire menee du centre de la sphere au plan de la base de la pyramide, sera la 6. partie du diametre de la sphere, & la tierce partie du demy-diametre. Car soit L, le centre du demy-cercle ABC. il sera aussi le centre de la sphere. Ie dis que LD (laquelle est menee du centre de la sphere à la base EFG, perp. AD estant egale à IH, & partant le poinct D, mesme que le poinct H, tout ainsi que L, est le mesme que le centre de la sphere) est la 6. partie du diametre de la sphere; sçauoir de AB, & la tierce partie du demy-diametre AL. Car AD estant double de DB, DB sera 2. telles parties que AD en est 4. & partant la toute AB, 6. telles parties, & le semy-diametre 3. telles parties. Donc si AD est 4. & AL 3. LD sera 1. Parquoy LD sera la 6. par. de AB, qui estoit de 6. telles parties, & la tierce partie de AL, qui estoit de trois telles parties.

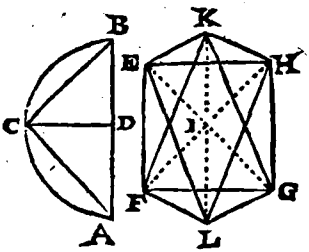
Semblablement, la hauteur de la pyramide HI, sera deux tierces parties du mesme diametre: car HI est la mesme que AD, contenant $\frac{2}{3}$. du diametre par la construction.

Derechef, le quarré de la hauteur de la pyramide sera de 4. telles parties, que le quarré du diametre est posé en estre 9. Car la raison de 9. à 4. est doublee de la raison de 3. à 2. comme il appert icy 9. 6. 4.

PROBLEME 2. PROP. 14.

Constituer vn octaedre, & l'enuironner d'vne mesme sphere que la pyramide, & monstrer que le diametre de la sphere est double en puissance, du costé d'iceluy octaedre.

Soit AB, le diametre de la sphere, comprenant la pyramide constituee, à l'entour duquel soit descrit le demy-cercle ACB, & du centre D, soit menee DC, perpendiculaire à AB, & conioinctes AC, BC, *a* qui seront egales entr'elles. Et prenant EF, egale à AC, ou BC, soit descrit sur icelle le quarré EFGH, auquel soient menez les diametres EG, FH, se coupans à I: Et IE, IF, IG, IH, seront egales, *b* estans demy-diametres du cercle descrit à l'entour du quarré.



a 4. 1.

b 9. 4.

Puis de I, ſoit menee KL, de part & d'autre; perpendiculaire au plan du quarré: Et IK, IL, poſees egales à E : & de K à L, ſoient menees KE, KF, KG, KH, LF, LE LH, LG.

Ie dis que le ſolide contenu des huict triangles, KEF, KFG, KGH KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, eſt l'octaedre demandé. Car d'autant que les coſtez EI, IK, du triangle EIK, ſont egaux à EI, IH, du triangle EIH : & les angles contenus d'iceux droicts, (ſçauoir EIK, *a* droict, & EIG, *b* eſtant egal à GIH de ſuitte, pour l'egalité des coſtez EI, IH, & GI, IH, & des baſes EH, GH) *c* la baſe EK, ſera egale à la baſe EH.

a 3. d. 11.
b 8. 1.
c 4. 1.

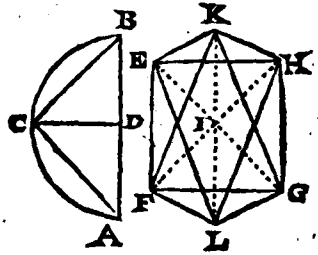
Semblablement KH, ſera egale à EH, partant KEH, ſera triangle equilateral : Et ainſi nous conclurons que les autres triangles ſeront equilateraux, & par ainſi egaux au triangle KEH, eſtans leurs coſtez egaux au coſtez du q. EFGH, chacun à chacun. Donc l'octaedre eſt conſtitué de *huict* triangles equilateres & egaux. *Lequel* ie dis eſtre contenu de la ſphere, dont le diametre eſt AB, & de laquelle la pyramide conſtruite eſt contenuë, & le diametre de la ſphere AB, eſt double en puiſſ. au coſte EF, ou AC.

Car d'autant *d* que IE, eſt perpendiculaire à KL, & moyenne proportionelle entre les ſegments KI, IL, (eſtant KI, IE, IL egales, & partant *en meſme* proportion) le demy-cercle deſcrit à *l'entour* de KL, au plan de KL, IE, *e* paſſera par E. Semblablement le demy-cercle deſcrit à l'entour de KL, au plan de KL, IF, paſſera par F: & de meſme des poincts G & H. Donc chacun de ces demy-cercles mené à l'entour du diametre fixe KL, deſcrira vne ſphere: laquelle comprend l'octaedre cõſtitué,

d 3. d. 11.
e Lem. pr.

puis

puis qu'elle passe par tous les angles d'iceluy. Donc cette sphere estant egale à la donnee dont le diametre est AB: (car AC, EF, estans egales, & partant leurs qq,



egaux; & tant le quarré de AC, double du quarré de AD, que le quarré de FE, du q. de EI: AD, EI, c'est à dire, KI, demy-diametres, seront egaux: donc les toutes AB, KL diametres, seront egales; & partant leurs spheres egales) le mesme octaedre sera contenu de la sphere donnee.

Mais d'autant que le quarré de AB, est egal aux quarrez egaux de AC, BC; le quarré de AB, sera double du q. de AC, Parquoy AB estant le diametre de la sphere, & AC, egale au costé de l'octaedre EF, il est manifeste que le diametre de la sphere est double en puissance du costé de l'octaedre. Partant nous auons constitué, &c. Ce qu'il falloit faire. 47. 1.

COROLLAIRE.

D'icy il est manifeste qu'en l'octaedre les trois diametres se couppent à angles droicts au centre de la sphere, comme KL, EG, FG à I, tous les angles à I estans monstrez droicts: donc KI, estant perpendiculaire à EG, FH, le sera aussi au plan par EG, FH: partant les plans KFLH, ELGK, menez par KI, seront à angles droicts à EFGH. Et par mesme raison se couppperont à angles droicts, les- 4. 11. 8. 11.

quels ſont auſſi qurarez, ayãs pour coſtez ceux de l'octaedre, qui ſont egaux, & les angles droicts. D'autant (le qu. du diametre de la ſphere eſtant double du q. du coſté de l'octaedre, comme il eſt monſtré) que le q. du diam. H F, eſt egal aux qq.
a 48.1. des coſtez de l'octaedre Fk, kH, a l'angle FkH ſera droict: & ainſi des autres.

Il eſt auſſi euident que l'octaedre peut eſtre diuiſé en deux pyramides ſemblables & egales, ayans pour baſe commune le q. EFGH, & quatre triangles egaux & ſemblables tant de part que d'autre, &c.

Il s'enſuit auſſi que ſi le tetraedre & l'octaedre ſont deſcrits en vne meſme ſphere: le coſté du tetraedre ſera ſeſquialtere en puiſſance au coſté de l'octaedre. Car poſant que le qu. du diametre de la
b 13.13. ſphere ſoit diuiſé en 6. parties. b Donc le diametre de la ſphere eſtant ſeſquialtere en puiſſance au coſté du tetraedre, le q. du coſté du tetraedre ſera 4. telles parties que le qu. du diametre de la ſphere en eſt ſix.

Derechef, c le diametre de la ſphere eſtant
c 14. 13. double en puiſſ. au coſté de l'octaed. le q. du coſté de l'octae. ſera de 3. telles parties, que le q. du dia. de la ſphere en eſt 6. Dõc le q. du coſté du tetraedre eſtant 4. telles parties que le q. du coſté de l'octaedre en eſt 3. Il eſt manifeſte que le qu. du coſté du tetraedre eſt ſeſquialtere au qu. du coſté de l'octaedre.

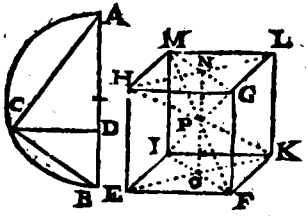
Finalement, puis au q. EFGH, EH, eſt parallele
d 15.11. à FG, & au q. ELGK, Ek eſt parallele à GL: d le plan EHK, mené par EH, Ek, ſera parallele au plan FGL, mené par FG, GL; & y ayant meſme raiſon des autres baſes de l'octaedre, il s'enſuit que

les baſes oppoſees de l'octaedre, ſont paralleles entr'elles.

PROBLEME 3. PROPOSIT. 15.

Conſtituer vn cube, & l'enuironner d'vne meſme ſphere que les precedentes figures; & demonſtrer que le diametre de la ſphere eſt triple en puiſſanee du coſté d'iceluy cube.

Soit AB, diametre de la ſphere qui contient les precedentes figures, à l'entour duquel ſoit deſcrit ACB, demy-cercle: & de AB ſoit priſe DB, tierce partie: puis ayant mené DC, perpendicul. à AB, ſoient coniointes AC, BC. Et ſoit deſcrit EFGH, q. de EF, qui ſoit priſe egale à BC: ſur lequel ſoient menees à angles droicts EI, Fk, GL, HM, auſſi egales à BC, aux extremitez deſquelles ſoient coniointes Ik, kL, LM, MI. D'autant donc que EI, Fk ſont à angles droits au plan EFGH; a EI, Fk ſeront parall. mais elles ſont egales, chacune eſtãt poſee egale à BC: c'eſt à dire à EF. b Dõc EF, Ik, ſont parall. & egales: partant EFkI, parallelogramme, auquel EI, Ik, kF, eſtant chacune egales à EF, toutes les 4. ſont egales. c Mais tous les 4. angles ſont droicts, eſtans EIk, FkI

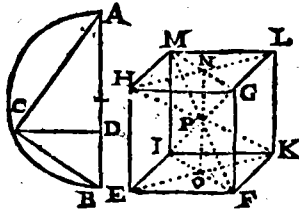


a 6. 11.
b 33. 1.
c 34. 1.

egaux aux droits opposez KFE, IEF. Donc EFKI est q. par mesme raison FKLG, GLMH, HMIE, seront quarrez : par ainsi IKLM sera quarré,
a 24.11. a estãt semblable & egal au quarré opposé EFGH:
b 15.11. car EL est b solide parallelipipede, ayant les plans opposez paralleles, sçauoir est, menez par des lignes paralleles se touchant l'vne l'autre. Parquoy EL sera cube, lequel ie dy estre cõpris de la sphere dont AB est le diametre : Car soient EK, FI, GM, HL, diametres des plans opposez EFKI, GHML, par lesquels soient menez les plans EKLH,
c 28.11. FIMG.

c D'autant que tant le plan EKLH, que FIMG, couppe le cube en deux egalement: l'vn & l'autre
d corol. passera par le centre du cube, sçauoir par P. Auquel
39.11. d se diuisent aussi tous les diametres du cube entr'eux egalement : partant la commune section des plans, sçauoir NO, passera par le mesme poinct P. Mais d'autant que les plans EKLH, FIMG,
e 4.11. sont rectangles (car HE, estant perpendiculaire à
f 3.d-11. EI, EF, à cause des quarrez EM, EK; e elle sera aussi perpendiculaire au plan EK, f & partant à la ligne EK, donc l'angle HEK est droit, par mesme raison les autres angles au plan EKLH seront droits, & au plan FIMG aussi. Donc les plans EKLH, FIMG, sont rectangles) & egaux, les costez de l'vn estans esgaux aux costez de l'autre; & leurs diametres EL, HK, FM, GI, sont egaux; comme il est manifeste de la 34.du 1. Partãt PE, PL, PH, Pk, PF, PM, PG, PI, seront egaux. Parquoy le demy cercle à l'entour de EL, descrit du centre P, & mené à l'entour, le diametre EL demeurant fixe, descrira vne sphere passant par tous les angles du cube qui sera demon-
g 47.1. strée egale, à la sphere dont le diametre est AB.

Car puis que le quarré de Ek eſt egal *a* aux quarrez egaux de EF, FK, & partant double du qu. de EF: c'eſt à dire, du quarré de KL;



a 47. 1.

les quarrez de Ek, KL, ſeront triples du quarré de KL. *b* Mais le quarré de EL, eſt egal aux quarrez de Ek, KL, l'angle EkL, eſtant droict, au rectangle EkLH: donc le quarré de EL, ſera triple du quarré de *k*L, c'eſt à dire, du quarré de BC: mais le quarré de AB eſt triple du meſme quarré de BC: *c* (car AB, BC, BD, ſont proportionelles: *d* partant comme à AB, BD, ainſi le quarré de AB, au quarré de BC.

b 47. 1

c Co. 8. 6.

d Co. 20. 6

Donc puis que AB, eſt triple de BD, le quarré de AB, ſera auſſi triple du quarré de BC.) Donc les quarrez de EL, AB, ſont egaux: parquoy EL, AB, diametres des ſpheres ſeront egaux, & partant icelles ſpheres auſſi egales.

Mais d'autant que le quarré du diametre EL, eſt monſtré triple du q. du coſté du cube KL: il eſt manifeſte, que le diametre de la ſphere eſt triple en puiſſance au coſté du cube. Partant nous auons, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE 1.

De cecy eſt manifeſte, que tous les diametres du cube ſont egaux entr'eux, & ſe couppent en deux egalement au centre de la ſphere : & par meſme raiſon, que les lignes droictes conioignantes les centres des quarrez oppoſez, ſe diuiſent en 2. egalement au meſme centre. Car il eſt demonſtré que les diametres du cube, EL, Hk, FM, GI, ſont egaux, & ſe couppent en deux egalement au centre P.

Que NO, conioignant les centres N & O, des quarrez oppoſez, ſoit auſſi couppee egalement en deux au meſme centre : nous le monſtrerons ; les deux angles OFP, OPF, du triangle OPF, ſont egaux à NMP, NPM, du triangle NMP : (car *a* OFP, eſt egal à NMP, alterne, *entre FI*, GM, *b* paralleles, eſtans *communes ſections* des plans paralleles Ek, GM, *c* & OPF, egal à NPM, oppoſé au ſommet.) Mais les coſtez adjacens PF, PM, ſont egaux, eſtans demy-diametres. Donc PO, PN, ſeront auſſi egaux : partant NO ſera couppee en deux egalement à P. Et ainſi des autres lignes conioignans les centres des qq. oppoſez.

a 29. 1.
b 16. 11.
c 15. 1.

COROLLAIRE 2.

Derechef, la puiſſance du diametre de la ſphere, ou du cube, eſt egale aux puiſſances des coſtez du tetraedre & du cube enſemble : *d* Car le quarré du diametre eſt 9. telles parties que le q. du coſté du tetraedre en eſt 6. *e* Mais iceluy quarré du diametre eſt de 9. telles parties que le quarré du

d 13. 13.
e 15. 13.

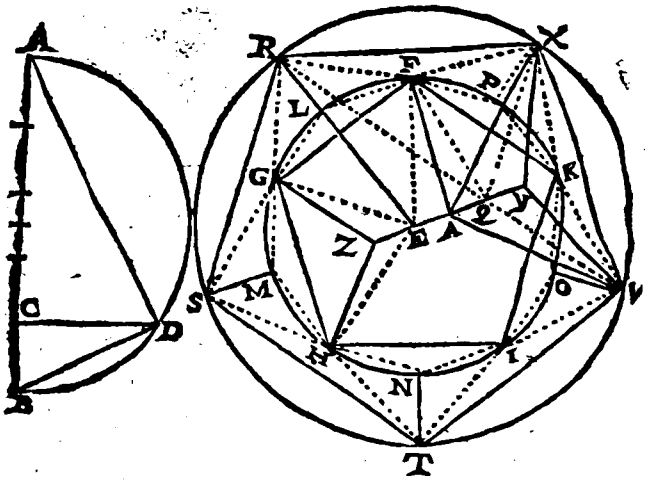
coſté du cube en eſt trois. Donc le qu. du coſté du tetraedre, & le q. du coſté du cube enſéble, sõt de 9. part. tout ainſi que le q. du diam. partãt le q. du dia. eſt egal aux qq. deſdits coſtez: cela eſt auſſi manifeſte du demy-cercle deſcrit à l'entour du diame. de la ſphere, où le coſté du tetraedre eſt AC, & du cube eſt BC; Mais il appert que le diametre de la ſphere AB, peut la ligne AC, & BC, puis que ACB, eſt angle droict. 47. I.

PROBLEME 4. PROP. 16.

Conſtituer vn Icoſaedre, & l'enuironner d'vne meſme ſphere que les figures deuant dites; & monſtrer que le coſté de l'Icoſaedre, eſt ligne irrationelle, laquelle eſt appellee mineure.

Soit AB, diametre de la ſphere, contenant les precedentes figures, à l'entour duquel ſoit deſcrit le demy-cercle ADB, & ſoit priſe BC, cinquieſme partie de AB; afin que AB ſoit quincuple de BC, & de AC ſeſquiquarte; mais AC quadruple de BC. Puis ayant mené DC, perpen. à AB, ſoient menees AD, BD. Et à l'interualle de EF, qui ſoit egale à BD, ſoit deſcrit vn cercle du centre E, auquel ſoit deſcrit vn pentagone equilatere FGHIk. II. 4.

En apres, ayant diuiſé les arcs FG, GH, HI, Ik, KF, en 2. egal. par L, M, N, O, P, ſoient conioinctes les droictes lignes FL, LG, GM, MH, &c. à ſçauoir les coſtez du decagone, Puis du centre E, & des poincts LMNOP, ſoient erigees des perp. au plan du cercle FGHIk: ſçauoir EQ, LR, MS,



NT, OV, PX, lesquelles soient posees egales au demy-diametre EF, ou à CD, & elles seront toutes egales entr'elles : *a* mais *elles sont paralleles.*

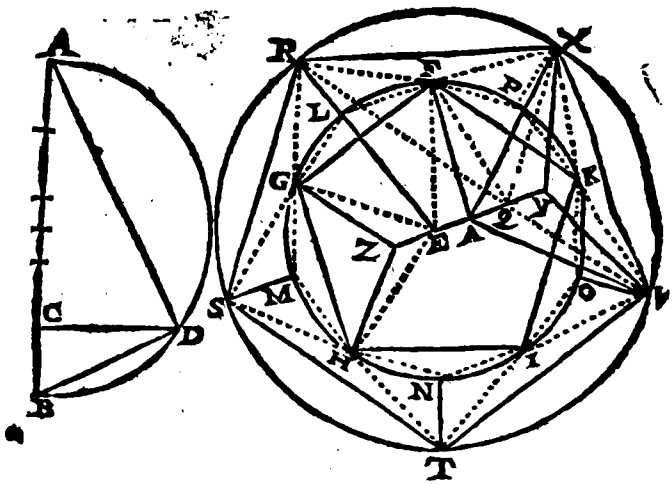
a 6. 11. Donc les lignes droictes qui les conioignent, sçauoir EL, QR, EM, QS, EN, QT: EO, QV, EP, QX, (lesquelles toutesfois nous n'auons toutes menees pour euiter confusion) *b* seront egales

b 33. 1. entr'elles deux à deux: & partant EL, EM, estans egales au demy-diametre EF, QR, QS, QT, QV, QX, seront aussi egales, & entr'elles, & au demy-diametre EF, ou à CD. *c*

c 15. 1. Mais d'autant que le plan mené par QR, QS; est parallele au plan FGHIK, mené par EL, EM: par mesme raison le plan mené par QS, QT, est parallele au mesme plan FGHIK, mené par EM, EN: mais le plan mené par QR, QS, cõuient auec le plan par QS, QT, à la ligne droite QS, donc

ces deux plans feront ensemble vn seul plan, comme il sera incontinent demonstré. Semblablement le plan par QT, QV, & cettuy-cy feront vn seul plan, & aussi le plan par QV, QX, & le plan aussi par QX QR. Il y a donc cinq lignes egales en vn mesme plan QR, QS, QT, QV, QX. Partant si de Q, à l'interuale QR, on descrit vn cercle en iceluy plan, il passera par les autres poincts R, S, T, V, x, & sera egal au cercle FGHIK. Soient conioinctes par R, S, TV, x, les lignes RS, ST, TV, Vx, xR. *a* D'autant que LR, Px, sont egales & paralleles, si on entend vne ligne droite menee de L à P, *b* LP, Rx, seront aussi egales & paralleles: partant en *c* cercles egaux, elles osteront arcs egaux: mais LP, prend la 5. partie du cercle FGHIK, sçauoir les ⅖ FL, FP. Donc Rx, prendra aussi la 5. partie du cercle RSTVx. [a 6. 11.] [b 33. 1.] [c 28. 3.]

Tout de mesme nous concluërons que les autres lignes droites RS, ST, TV, Vx, prennent les cinquiesmes parties. Parquoy RSTVx, est pentagone equilatere, ayant tous les costez egaux au pentagone FGHIK. Car des angles du pentagone RSTVx, soient menees aux angles du pentagone FGHIK, les lignes droites RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, xk, xF. D'autant donc que Lk perpend. est posee egale au demy diametre EF, c'est à dire, au costé de l'exagone du cercle FGHIK, & LF estant costé du decagone, *d* le quarré du costé du pentagone du mesme cercle, sera egal aux quarrez de LR, LF: *e* mais le quarré de FR, est egal aux mesmes quarrez: *f* l'angle FLR estant droict: Donc le quarré de FR, est egal au quarré du costé du pentagone, donc FR, sera egale au costé du pentagone LP, ou FG, c'est à dire, à Kx. [d 10. 13.] [e 47. 1.] [f 3. d. 11.]



Et par meſme raiſon, les autres lignes RG, SG, SH, &c. ſeront egales aux autres coſtez de l'vn & l'autre pentagone: & partant les 10. triangles RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, ſeront equilateres entr'eux & egaux, leurs coſtez eſtans egaux à ceux du pentagone equilateral: puis apres ſoit prolongée la perpendiculaire EQ, de part & d'autre, en ſorte que QY, EZ, ſoient egales chacune au coſté du decagone du cercle FGHIK, ou RSTVX, & ſoient conioinctes VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. D'autant que QX, eſt demy diametre du cercle RSTVX; c'eſt à dire, coſté de l'hexago. & QY, eſt coſté du decagone du meſme cercle, a le q. du coſté du pétagone XV, eſt egal aux qq. de QX, QY: b mais le q. de XY, eſt egal aux meſmes qq. l'angle XQY, c eſtant droict. (Car les plans des cercles FGHIK,

a 10. 13.
b 47. 1.
c 3. d. 11.

RSTVX, estans monstrés paralleles, & EQ, estant perpen. au plan de celuy-là par la constructi. EQ. sera aussi perpen. au plan de cettuy-cy, comme il appert. & partant perpen. à QX, au mesme plan.) Donc le q. de XY, est egal au qu. de XV, donc XY, sera egale à XV: ainsi XV sera monstree egale à VY: partant le triangle VYX, est equilateral. a 14. 11.

Ainsi on demonstrera, si on mene les lignes droictes RY, SY, TY, (lesquelles toutefois n'ont esté menees pour euiter confusion,) que les quatre triangles RYX, RYS, SYT, TYV, sont equilateres & egaux au triangle VYX, c'est à dire, aux 10. premiers, tous leurs costez estans egaux au costé du pentagone. Semblablement, GzH, sera equilatere, (puis que EG est le costé de l'hexagone, sçauoir le demy-diametre, & Ez costé du decagone, & l'angle GEz *b* droict;) & aussi les quatre triangles HzI, Izk, kzF, FzG (desquels nous n'auons mené les lignes pour euiter confusion) tous lesquels seront egaux aux 15. premiers, chacun au sien pour la mesme cause. Donc ces 20. triangles estans equilateres & egaux, & chacun soit conioinct à chacun par des lignes droictes, sçauoir leurs costez; l'on aura constitué d'iceux vn Icosaedre, lequel ie dis estre compris de la sphere dont AB est le diametre. b 3. d. 11.

Car soit diuisee EQ en deux egalement par α, & menees αF, αY, αV. D'autant que les costez αQ, QV, du triangle αQV, sont egaux à αQ, QX, du triangle αQX, puisque QV, QX, sont demy-diametres du cercle αSTVX: mais les angles αQV. αQX, sont *c* egaux, sçauoir droicts, *d* les bases αV, αX, seront egales. c 3. d. 11. d 4. 1.

Semblablement ſi on mene les lignes droictes de α, Q, à R, S, T, les droictes lignes α R, α S; α T, ſeront monſtrees egales & entr'elles & à α V, α X. Derechef d'autant que les coſtez α Q, QX, du triangle α QX, ſont egaux à α E, EF du triangle α EF, puis que QX, EF, ſont demy diametres de cercles egaux, & que E Q, eſt diuiſee en deux egalement par α. Mais les angles α
a 3.d.11. QX, α EF ſont egaux, a ſçauoir droits, les baſes
b 4.1. α X, α F b ſont egales: Semblablement ſi de α E, on mene des lignes droictes à G, H, I, K, on monſtrera α G, α H, α I, α K, egales à α X: & partant les 10. lignes menees aux 10. angles F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, ſont eſgales. Mais d'autant que QE, eſt demy diametre, c'eſt à dire, coſté de l'hexagone du cercle FGHIK, & EZ, co-
c 9.13. ſté du decagone du meſme cercle, c QZ, ſera diuiſee en E, en la moyenne & extreme raiſon, & le plus grand ſegment ſera QE. Parquoy le moindre ſegment ZE, prenant Eα, moitié du plus
d 3.13. grand, c'eſt à dire, α Z, d peut le quintuple du quarré deſcrit de Eα: Mais α F, peut auſſi le quintuple du meſme quarré de Eα (car le quarré de
e ſchol. 4. EF, e eſtant quadruple du quarré de α E, eſtant
2. EF, double de Eα, les quarrez de EF, Eα enſemble ſeront quintuples du quarré de Eα. f Et le
f 47.1. quarré de AF, eſtant egal aux quarrez de EF, Eα: le quarré de α F, ſera auſſi quintuple du quarré de Eα) Donc les quarrez de α Z, α F ſeront egaux, & partant α Z, α F egales: donc puis que ZY, eſt couppee en 2. egalement à α (d'autant que ſi on adiouſte aux egales α E, α Q, les egales EZ, QY, les toutes Z a, Y α, ſont faites egales) toutes les gnes droites menees de α, à tous les angles de

l'Icosaëdre seront egales. Parquoy la sphere descrite à l'entour du diametre ZY, du centre a, passera par tous les angles de l'Icosaëdre constitué. Ie dy qu'elle est egale à la sphere du diametre AB.

Car a puis que comme αZ, à αE, ainsi YZ, a 15.5.
double de αZ, à QE, double de αE : b par ainsi b 22.6.
comme le q. de αZ, au q. de αE, ainsi le q. de YZ, au q. de QE, & le q. de αZ estant monstré quintuple du quarré de αE, aussi le q. de YZ, sera quintuple du quarré de QE, c'est à dire, du q. de BC: QE, estant posee esgale au demy diametre EF, c'est à dire, à BC : c mais le q. de AB, est aussi c Co.8.6.
quintuple du mesme q. de BC (car AB estant à Co.20.6.
BC, comme BC, à BD, d comme AB sera à BD; ainsi le q. de AB, au q. de BC: & partant estant AB quintuple de BD, le quarré de AB, sera aussi quintuple du q. de BC.) Donc les qu. de YZ, AB, sõt egaux: parquoy XZ, AB aussi esgales, & partãt les spheres descrites à l'étour d'icelles serõt egales.

Finalement d'autant que le diametre de la sphere AB, est posé Rationel (car en comparaison d'iceluy il faut monstrer que le costé de l'Icosaëdre est ligne Irrationelle appellee ligne mineure) & peut le quintuple du quarré de BC, ou de EF son egale; EF demy diametre du cercle FGHIK, sera aussi rationelle (car e les quarrez de AB, EF, estant d 6.10
entr'eux comme nombre à nombre, sçauoir cõme 5. à 1. ou 10. à 2. seront commens. Partant AB, EF. commens. au moins en puiss. Donc puis que AB, est rationelle, EF le sera aussi.) Parquoy tout le diametre du cercle FGHIK, sera rationel. Parquoy FG, costé du pentagone, c'est à dire de l'Icosaëdre, g 11.13.
sera ligne Irrationelle, appellee mineure. Donc nous auons constitué, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy l'on peut conclure, que le diametre de la sphere est quintuple en puissan. au demy-diametre du cercle, qui enuironne les cinq costez de l'Icosaedre, sçauoir de celuy duquel l'Icosaedre est constitué, & qui passe par les cinq angles de l'Icosaedre. Car il est monstré que le q. du diametre AB, est quintuple du q. de BC; c'est à dire, du demy-diametre EF.

2. Pareillement, il est manifeste, que le diametre de la sphere, est composé du costé de l'hexagone, c'est à dire du demy diametre, & de deux costez du decagone d'vn mesme cercle: car Yz, diametre de la sphere, est composé de EQ, costé de l'hexagone, & de QY, Ez, costez du decagone FGHIK.

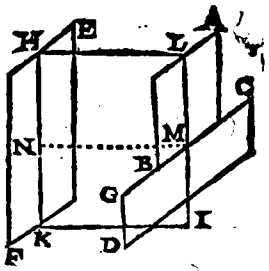
3. Il appert finalement, que les costez de l'Icosaedre opposez, comme RX, HI, sont paralleles: car RX, est monstree parallele à la droicte ligne, qui seroit menee de L à P. Donc HI, estant aussi parallele à la mesme LP (les angles alternes HIL, & ILP, faicts de la droicte menee de L à P, a estans egaux; soustendans arcs egaux, sçauoir chacun ⅓. de la circonference.) Il est manifeste que RX, HI sont paralleles, & ainsi des autres costez opposez,

a 27.3.

LEMME.

Or que deux plans paralleles à vn autre, lesquels conuiennent à vne mesme ligne, fussent vn seul plan, il sera ainsi demonstré. Soient les plans AB, CD; *paralleles au plan* EF, *& se rencontrans selon*

la ligne CG. Ie dis AB, CD, *sont vn seul plan: car que le plan HF, couppe les trois plans AB, CD, EF, par* Hk, LN, *MI. D'autant que AB, EF, sont paralleles, a leurs communes sections LM, Hk seront paralleles, & par mesme raison IM, Hk, aussi paralleles: parquoy LM, IM, estans paralleles à Hk, & en vn mesme plan HI, & se rencontrans à M, elles se rencontreront directement (car les deux angles LMN, IMN, b seront egaux aux 2. au poinct N, chacun à b 29. 1. son alterne: partant à 2. droicts, c donc LMI se- c 14. 1. ra ligne droicte,) partant les plans AB, CD, en font vn seul, d d'autant que la ligne LI, est toute en d 1.11. vn seul plan. Ce qui est proposé.*



a 16.11.

SCHOLIE.

Le Copiste ayant pris la demonstration de cette Proposition de Clauius mot pour mot, dict en icelle, sçauoir au commencement de la pag. 802.

Mais que le plan tiré par les lignes QR, QS, conuient auec le plan mené par les lignes QS, QT, en la ligne droicte QS: il est euident par les choses demonstrees à la 16. Prop. du 11. liu. que ces 2, plans en font vn seul, &c.

Mais il ne considere pas que Clauius a demon-

ſtré enſuitte de la 16. Propoſition du 11. liure, que 2. plans paralleles à vn autre, ſe rencontrans en vne meſme ligne, font vn ſeul plan. Mais luy (Henrion diſie) ne l'ayant pas demonſtré en ſon liure à la meſme 16. il ſe meſprend fort, & monſtre manifeſtement qu'il coppie les Propoſitions de Clauius ſans les entendre.

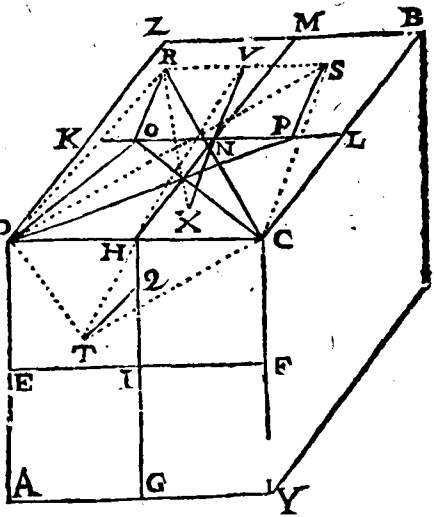
D'auantage, ce bon Docteur à la 5. Prop. du 14. liure, coppiant ces meſmes mots de Donnot, prenant la demonſtration dudit Donnot. (Ce que nous auons monſtré eſtre poſſible par la 2. Prop. 14. qu'vn meſme cercle comprend, & le triangle de l'icoſaedre, & le pentagone du decagone,) *n'a pas eu l'eſprit de voir que l'ordre des Propoſitions de Donnot & des ſiennes, eſt changé: car il a pris la 4. de Donnot, & l'a miſe pour 2. en ſon liure: donc au lieu de la 2. de Donnot, qu'il penſe citer, il cite la 4. où ce qu'il veut dire n'eſt pas demonſtré: en quoy il eſt manifeſte qu'il coppie ſeulement ce qu'il trouue eſcrit, ſans auoir eſgard à autre choſe.*

PROBLEME 5. PROP. 17.

Conſtituer vn Dodecaedre, & l'enuironner d'vne meſme ſphere que les figures deuant dites: & monſtrer que le coſté du Dodecaedre eſt ligne irrationelle, laquelle eſt appellee reſidu.

Soient poſez deux plans du cube deuant dict à angles droicts l'vn à l'autre AC, BD, dont les coſtez ſoient couppez chacun en deux egalement par E, G, F, H, K, L, M, & menees les lignes EF, GH,

GH,KL,HM, s'entre-couppantes aux poincts I & N; puis IH,KN,NL, soient a couppees en la moyenne & extreme raison par O,P, Q, dont les plus grands segments sont IQ,PN,NO. b Et aux a 30.6. b 12.11.



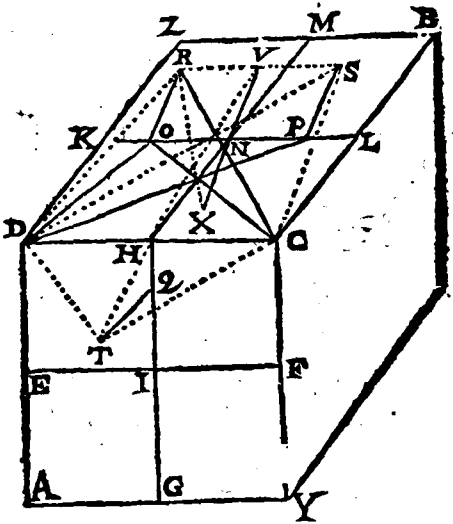
parties exterieures des plans BD,CA, soient menees OR, PS, QT, perpendiculaires, egales à PN,NO,IQ, & conjointes DT,DR,SR,CT, CS. Ie dis que DRSCT, est pentagone equilatere & equiangle, & est sur vn mesme plan.

Qu'il ne soit ainsi, soient conjointes DP, DO,DS, au plan DB, & DS: puis que NK, est couppee en la moyenne & extreme raison à O, & NO est le plus grand segment, c les quarrez de NK, & de KO, seront triples du q. de NO. Et NK, KD, estans egales, & ON,OR, aussi egales par la construction, les quarrez de DK,KO, seront aussi tri- c 4. 13

ples du q.de NO, c'eſt à dire, du q.de OR: mais le
a 47.1. q.de DO, eſt egal aux deux quarrez de DK, KO, a (l'angle OKD eſtant droict) donc le q.de DO, eſt auſſi triple du q. de OR. Parquoy adiouſtant ledict q.de OR, les 2, qq de DO, OR, ſeront quadruples du q.de OR: mais le q.de DR, eſt egal aux
b 47.1. 2.qq. de DO, OR: (b l'angle DOR eſtant droit) il ſera donc auſſi quadruple du q. de OR. Et RS
c Sch.4.2. eſtant double de RO, c ſon q.ſera auſſi quadruple du q.de RO: parquoy DR, RS ſeront egales. Par la meſme raiſon les trois autres coſtez DT, TC, CS, ſeront monſtrez egaux entr'eux, & à DR, RS, partant le pentagone eſt equilateral.

Il eſt auſſi en vn meſme plan: car ſoit menee NV, parallele à OR, & ſoient auſſi menees VH, TH, icelles ſe rencontreront directement, & VHT
d 3.d.6. ſera vne ſeule ligne droicte. Car HI, eſtant couppee ſelon la moyenne & extreme raiſon à Q, d IH ſera à IQ, comme IQ à QH. Et IH, HN ſont egales, & NV, IQ, & QT, QI auſſi egales: parquoy comme HN à NV, ainſi QT à QH. Dóc les triãgles VNH, HQT, ayans deux coſtez proportionaux à deux coſtez, & eſtans conioincts à l'angle H, en ſorte que les coſtez de meſme raiſon NH,
e 6.11. QT, & NV, QH, e ſont paralleles eſtans perpend.
f 32.6. aux plans AC, DB, f la ligne VHT, ſera vne ſeule
1. 11. ligne droicte, g laquelle eſtant en vn meſme *plan.* Il s'enſuit que tout le pentagone DTCSVR, *mené* par icelle, eſt en vn meſme plan.

Il eſt auſſi equiangle. Car KN eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, & ON, plus grand ſegment, ſi on adiouſte KN à NP, egale au plus grand ſegment NO, la toute KP ſera



couppee en la moyenne & extreme raiſon à N, & kN ſera le plus grand ſegment: *a* donc les qq. de kP, & NP, ou de PS, egale à NP, ſont triples du quarré de KN, ou du quarré de K D, egale à K N. *a* 5. 13. *a* 4. 13.

Et adiouſtant le quarré de kD, auec les 2. qq. de KP, & PS: ces trois quarrez ſeront quadruples du q. de KD: mais le q. de PD, *b* eſt egal aux deux quarrez de PK, KD: donc les 2. qq. de DP, PS, ſeront quadruples du q, de KD. *c* Mais le quarré de DS, eſt egal aux deux qq. de DP, PS: donc le qu. de DS, ſera auſſi quadruple du quarré de KD: & le q. de DC *d*, eſt auſſi quadruple du qu. de DK (DC eſtant double de Dk: parquoy DC DS, ſeront egales. *b* 47. 1. *c* 47. 1. *d* Sc. 4. 2.

Et tous les coſtez du pentagone eſtans egaux, les deux triangles DRS, DTC, auront les coſtez
a 8. 1. DR, RS egaux à DT, TC, chacun au ſien, & les baſes DS, DC, egales: *a* donc l'angle DRS, ſera egal à DTC, ainſi ſera monſtré que l'angle RSC,
b 7. 13. eſt egal à l'angle DTC : parquoy trois angles du pentagone eſtans egaux, *b* il ſera equiangle, & eſtant equilatere ſur DC, l'vn des 12. coſtez egaux du cube.

Et ſi ſur chaque coſté des 11. reſtans, eſt conſtruict vn pentagone, l'on aura vne figure ſolide, contenuë de douze pentagones equilateres & equiangles, laquelle ſera dodecaedre par la definition.

Il peut auſſi eſtre inſcrit en la ſphere propoſee: car VN eſtant perpendiculaire au plan BD, menee de N, centre d'iceluy plan, eſtant prolongee
c 39. 11. *c* elle couppera la diagonale du cube en deux egad ∅ 0. 15. 13 lement à X, *d* qui ſera le centre de la ſphere *enuironnant* le cube; & XN eſt *egale à la moitié du coſté* du cube.

Soit menee XR, les quarrez de kP, NP, eſtans
c 4. 13. *e* monſtrez triples du q. de kN: & vx, eſtant egale à kP, & RV à NP, (NX eſtant egale à kN, & VN à NP.) Parquoy les qq. de RV, vx, ſont triples du
f 47. 1. q. de kN: mais le q. de Rx, *f* eſt egal aux deux qq. de RV, vx, parquoy le q. de Rx, ſera auſſi *triple*
g 15. 13. du q. de kN. *g* Mais le q. du diametre de *la ſphere* deſcrite à l'entour du cube, eſt triple *du quarré* du
h 15. 5. coſté du meſme cube: & les parties *eſtans* en meſme raiſon que leurs equimultiples, *h* le q. du demi-diametre ſera triple au q. du demy coſté: mais XN eſt moitié du coſté du cube: Donc RX ſera demy-diametre de la ſphere deſcrite autour du cube AB.

dont le centre est x. Semblablement on monstrera que toutes les lignes droictes menees de x, aux autres angles du dodecaedre, sont egales aux demy-diametres de la sphere descrite autour du cube: Donc vne mesme sphere peut estre circonscrite au cube & au dodecaedre.

Finalement, le costé du dodecaedre est ligne irrationelle appellee residu. Car les 2. demy-costez du cube kN, NL estans coupez en la moyenne & extreme raison: *a* la toute xL, sera aux deux plus grands segmens ensemble, sçauoir à OP, comme OP, qui sont les deux mesmes plus grands segments, aux 2. moindres, sçauoir à la ligne composee de PL, kO. Donc si kL, costé du cube, est couppee en la moyenne & extreme raison, OP sera le plus grand segment: mais kL, couppee de cette maniere est rationelle, (son qu. estant comms. au q. du diametre de la sphere, posé rationel: *b* estant le tiers d'iceluy) parquoy OP plus grand segment, ou RS costé du dodecaedre, son egale sera ligne irrationelle, appellee residu. Partant nous auous faict le requis. Ce qu'il falloit faire. a 15. 5. b 15. 13. 6. 13.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cette demonstration, que le costé du cube estant couppé en la moyenne & extreme raison, que le plus graud segment est le costé du dodecaedre inscrit en la mesme sphere.

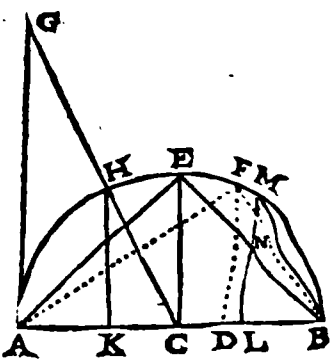
Et le costé du cube est egal à la droicte ligne soustendante l'angle du pentagone du dodecaedre. Mais d'autant qu'icelle estant couppee en la moyenne & extreme raison, *c* le plus grand segment est costé du pentagone: *d* la ligne droicte c 8. 13. d 5. 13.

compoſee de ladite ſouſtendante l'angle du pentagone, c'eſt à dire, du coſté du cube, & du plus grand ſegment, ſçauoir du coſté du dodecaedre eſt ſemblablement diuiſee; & le moindre ſegment eſt coſté du dodecaedre, & le plus grand ſegment eſt le coſté du cube: Il s'enſuit qu'vne ligne droicte eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, le moindre ſegment ſera le coſté du dodecaedre, & le plus grand ſera le coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere.

PROBLEME 6. PROPOSIT. 18.

Expoſer les coſtez des cinq figures precedentes, & les comparer entr'eux.

C'eſt à dire, trouuer les coſtez des cinq figures inſcrites en vne ſphere, & leur raiſon, le diametre eſtant donné.



Soit expoſé le diametre de la ſphere AB, & ſoit couppé à C en 2. egalement, & à D, en ſorte que AD ſoit double de DB: & deſcrit le demy-cercle AEB, & menees CE, DF, à angles droicts à AB, de C & D, & conioinctes AF, FB, EB. Partant, d'autant que AD, eſt

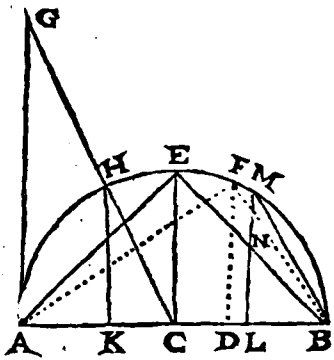
double de DB, AB sera triple de BD : & par conuer. de raison BA, sesquialtere de AD : mais cõme BA à AD, ainsi le qu. de BA, au qu. de AF: *a* car le triang AFB, est equiangle au triang. AFD, Donc le q. de BA, est sesquial. du q. de AF: mais le diam. de la sphere est aussi sesquial. en puiss. au costé de la pyramide : & AB est le diametre de la sphere, donc AF est egal au costé de la pyramide. a 8.6. 13. 13.

Derechef, d'autant que AD est double de DB; AB sera triple de BD: mais comme AB à BD, ainsi le q. de AB, au q. de FB. donc le q. de AB est triple de q. de BF. *b* Mais le diam de la sphere est triple en puiss. au costé du cube, & AB est le diamet. de la sphere : Donc BF est le costé du cube. Et AC, estant egale à CB, AB sera double de BC, : mais comme AB à BC, ainsi le qu. de AB, au qu. de BE. Donc le q. de AB, est double du q. de BE, *c* & le diam. de la sphere est double en puiss. du costé de l'octaedre: & AB est le diam. de la sphere donnee: parquoy BE est costé de l'octaedre. b 15. 13. c 14. 13.

De A, soit menee AG, à angles droicts à AB, & posee egale à icelle AB. Et ayant conioinct GC, couppant la circonference à H, de H soit menee *Hk*, perpend. à AB : D'autant que AG est double de AC: (car GA est egale à AB:) *d* mais comme GA à AC, ainsi HK à KC : HK sera double de KC. *e* Donc le q. de HK est quadruple du qu. de KC: Donc les qq. de HK, KC, c'est à dire le qu. de HC, est quintuple du q. de KC: mais HC, est egale à CB: Donc le q. de BC, est quintuple du q. de CK. d 4 6. e Sc. 4. 2.

Et d'autant que AB est double de BC, desquelles AD est double de DB, la restante BD, sera double de CD : parquoy BC est triple de CD. Donc le quarré de BC, est noncuple du q. de CD; mais 19. 5. 20. 6.

le quarré de BC, est quintuple du quarré de Cx: Donc le q de Ck, est plus grand que le q. de CD, & kC plus grand que CD. Soit posee CL, egale à KC, & de L, menee LM à angles droicts à AB, & iointe MB.



Et d'autant que le q. de BC, est quintuple du qu. de KC: & BA double de CB, & KL double de CK, a le qu. de AB sera quintuple du qu. de K L. b Mais le diametre de la sphere est quintuple en puissance, du demy-diametre du cercle duquel l'Icosaedre est descrit, & AB est le diametre de la sphere, donc KL est costé de l'hexagone dudit cercle.

a 15. 5.

b Co. 16. 13.

D'auantage, d'autant que le diametre de la sphere est composé du costé de l'hexagone, & des deux costez du decagone descrits au mesme cercle, & AB est le diametre de la sphere, KL, costé de l'hexagone, & AK egal à LB: l'vne & l'autre Ak, LB, sera costé du decagone descrit au mesme cercle, duquel est descrit l'Icosaedre: & d'autant que le costé du decagone est LB, & celuy de l'hexagone ML: car il est egal à kL, l'estant aussi à HK: car elles sont egalement distantes du centre: & l'vne & l'autre Hk, kL, est double de KC: MB sera le costé du pentagone: car ce qui est du pentagone, est le

Co. 16. 13.

14. 13.

10. 13.

meſme que de l'Icoſaedre. Donc MB eſt coſté de l'Icoſaedre. 16.13.

Et d'autant que FB eſt coſté du cube, ſoit coupee en la moyenne & extreme raiſon à N, & BN ſoit le plus grand ſegment: NB ſera le coſté du dodecaedre, & le diametre de la ſphere eſtant monſtré ſeſquialtere en puiſſance au coſté de la pyramide AF, & double en puiſſance à BE, coſté de l'octaedre, & triple en puiſſance à FB, coſté du cube: deſquelles parties le diametre de la ſphere eſt ſix en puiſſance des meſmes parties, le coſté de la pyramide ſera 4. de l'octaedre 3. & du cube 2. Dõc le coſté de la pyramide eſt ſeſquitiers en puiſſance du coſté de l'octaedre, & du coſté du cube double en puiſſance. Et le coſté de l'octaedre eſt ſeſquialtere en puiſſance, au coſté du cube: donc les coſtez ſuſdicts des trois figures, ſçauoir de la pyramide, de l'octaedre, & du cube, ſont entr'eux en proport rationelle; mais les 2. autres, ſçauoir de l'Icoſaedre, & du Dodecaedre, ne ſont en proport. rationelles, ny entr'eux, ny aux ſuſdicts, ſçauoir la Mineure & Reſidu. Co.17. 13.

Mais nous demonſtrerons ainſi, que le coſté BM de l'Icoſaedre, eſt plus qne le coſté BN, du Dodecaedre.

Car d'autant que le triangle FDB, eſt equiangle à FAB: comme DB ſera à BF, ainſi FB à BA: & y ayant trois lignes proportionelles, comme la premiere ſera à la troiſieſme, ainſi le q. de la premiere au q. de la ſeconde. 8. 6. Co.20. 6.

Donc comme DB à BA, ainſi le quarré de DB, au quarré de BF, & par conuerſion de raiſon, comme AB à BD, ainſi le quarré de FB, au quarré de BD. Mais AB eſt triple de BD. Donc le quarré

20. 6. de FB, eſt triple du quarré de BD. Mais le quarré de AD, eſt quadruple du q. de DB: car AD eſt double de DB: donc le qu. de AD, eſt plus grand que le
9. 13. q. de FB: d'autant que AD eſt plus grande que FB: partant AL, bien plus grande que FB. Et AL eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, la plus grande portion eſt LK, d'autant que kL eſt coſté de l'hexagone, & kA du decagone, & FB eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, la plus grande portion eſt BN: donc KL eſt plus grande que BN: mais K L eſt egale à LM, donc LM eſt plus grande que BN, Mais BM eſt plus
19. 1. grande que M L.: Donc M B coſté de l'Icoſaedre, ſera plus grande que BN coſté du Dodecaedre.

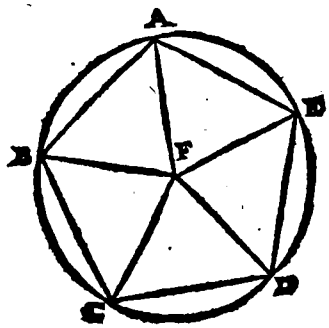
Co. 20. 6. S. 6. Autrement, d'autant que AD eſt double de DB, AB ſera triple de BD: mais comme AB à BD, ainſi le quarré de AB, au quarré de BF: d'autant que le triangle FAB, eſt equiangle au triangle FBD: donc le quarré de AB, *eſt triple du quarré* de BF; mais le quarré de AB, eſt monſtré quintuple du quarré de kL: donc cinq quarrez de KL ſont egaux à trois de BF: mais trois de BF, ſont plus grands que 6. de ceux qui ſont faicts de BN, donc auſſi 5 de KL ſont plus grands que 6. de BN. Donc vn de kL eſt plus grand qu'vn de BN, partant KL eſt plus grande que BN: mais KL eſt egale à LM. Donc LM eſt plus grande que BN: *parquoy* MB, eſt encore bien plus grande que BN. *Ce* qu'il falloit demonſtrer.

Mais nous demonſtrerons ainſi, *que* 3. de FB, ſont plus grands que 6. de ceux de BN.

D'autant que BN eſt plus grande que NF, le rectangle ſous FB, BN, ſera plus grand que le re-

ctangle ſous BF, FN: donc celuy qui eſt contenu de FB, BN, auec celuy de BF, FN, eſt plus grand que le double de celuy qui eſt contenu ſous BF, FN: mais celuy qui eſt contenn de FB. BN. auec le contenu ſous BF, FN, eſt le quarré de FB. Mais celuy qui eſt contenu ſous BF, FN eſt egal au quarré de BN. Car FB eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon à N, & le rectangle contenu ſous les extremes, eſt egal au quarré de la moyenne. Donc le quarré de FB, eſt plus grand que le double du q. de BN: parquoy vn quarré de FB, eſt plus grand que deux de BN: & partant trois de FB, ſont plus grands que 6. de ceux qui ſont faicts de BN. Ce qu'il falloit demonſtrer. 2. 2. 17. 6.

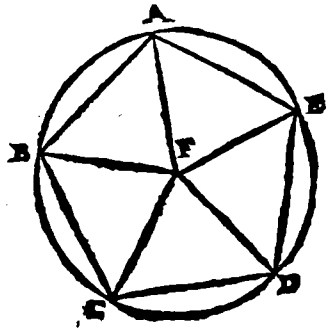
SCHOLIE.



Ie dis qu'outre les 5. figures deſja dites, que l'on ne peut cõſtituer d'autre figure, laquelle ſoit cõtenue de figures equila. et equiã. egales entr'elles.

Car de 2. triã. ou de 2. autres plans l'on ne cõſtituera pas vn angle ſolide; mais de 3. triangles on conſtitue l'angle de la pyramide: de 4. celuy de l'octaedre: de 5. celuy de l'icoſaedre: mais de 6. triangles equilateres & equiangles conſtituez à vn poinct, vn angle ſolide n'eſt faict. 22. 11.

Car l'angle d'vn triangle equilatere eſtant les $\frac{2}{3}$ d'vn droict, 6. ſeront egaux à 4. droits: ce qui ne ſe peut faire.



Car tout angle ſolide eſt contenu de 3. angles moindres que 4. droicts: par meſme raiſon l'angle ſolide, n'eſt conſtitué de plus de ſix angles plans. Partant l'angle du cube eſt contenu de 3. quarrez, & ne ſe peut faire qu'il ſoit contenu de 4. car il y auroit derechef 4. angles droicts. L'angle du dodecaedre eſt contenu de 3. pentagones equiangles & equilateres: mais il ne peut eſtre contenu de quatre.

Car l'angle du pentagone equilatere eſtant faict d'vn droit, & de la cinquieſme partie d'vn droit, ce ſeront 4. angles plus grands que 4. droicts: ce qui ne ſe peut faire, & des autres figures polygones ne peut eſtre conſtitué vn angle ſolide, pour les abſurditez qui s'en enſuyuent. Donc outre les figures deſia dites, n'eſt conſtituee d'autre figure ſolide, contenue de figures equilateres et equiangles. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Or nous demonſtrerons en cette maniere, que l'angle du pentagone equilatere & equiangle, eſt faict d'vn droict; & de la cinquieſme partie d'vn droict.

Soit le pentagone equilateral & equiangle

ABCDE, à l'entour duquel soit descrit le cercle ABCDE, et soit pris le centre d'iceluy, lequel soit F, & soient conioinctes FA, FB, FC, FD, FE, qui coupperont les angles du pentagone ABCDE, en 2. egalement.

Et d'autant que les cinq angles au poinct F, sont egaux à 4. droicts, & sont egaux entr'eux, vn d'iceux, comme AFB, sera contenu d'vn droict, moins la cinquiesme partie: donc les deux autres FAB, ABF, vallent vn droict, et la cinquiesme partie: mais l'angle FBA, est egal à l'angle FBC: donc le tout ABC, angle du pentagone, est contenu d'vn droict, & de la cinquiesme partie d'vn droict. Ce qu'il falloit demonstrer.

FIN DV TREZIESME LIVRE des Elements d'Euclide.



LIVRE QVATORZIESME DES ELEMENTS D'EVCLIDE,

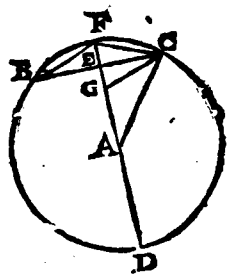
Et le quatrieſme des Solides.

THEOREME 1. PROPO. 1.

La ligne droicte perpendiculaire menee du centre, au coſté du pentagone inſcrit au cercle, eſt la moitié de l'vn & l'autre coſté, ſçauoir de celuy de l'hexagone & du decagone enſemble, inſcrits au meſme cercle.



SOIT le cercle BCD, dont le centre eſt A, d'où ſoit menee AE, perpendiculaire à BC, coſté du pentagone inſcrit au meſme cercle. Ie dis que AE, eſt moitié du coſté de l'hexagone, & du decagone enſemble, inſcrits au meſme cercle.



Car ayant mené AE de part & d'autre, pour parfaire le diametre DF, & pris EG, egale à EF, soient conioinctes AC, CG, CF, BF. *a* D'autant que AE couppe BC en 2. egalemẽt, les 2. costez BE, EF, du triangle BEF seront egaux à CE, EF, du triangle CEF : & les angles contenus d'iceux estans egaux, sçauoir, droicts *b* les bases CF, BF seront egales, *c* & les arcs BF, CF egaux. Donc BFC estant la cinquiesme partie de toute la circonference, CF sera la 10. partant CF, ligne droicte, est costé du Decagone.

a 3. 3.

b 4. 1.

c 28. 3.

Derechef, les costez CE, EF, du triangle CEF, estans egaux à CE, EG, du triangle CEG, & les angles contenus d'iceux droicts, *d* les bases CF, CG seront egales, & les angles CFG, CGF egaux, & l'arc CF estant la cinquiesme partie de la demye circonference DCF, estant la dixiesme partie de la toute ; l'arc DC sera quadruple de CF. *e* Parquoy l'angle DAC, le sera aussi de CAF. *f*

d 4. 1.

e 33. 6.

f 20. 3.

Mais l'angle CFD, à la circonference est moitié de DAC au centre. Donc CFD ; & partant CGF monstré egal à iceluy, sera double de CAF. *g* Or g 32. 1. CGF externe, est egal aux deux internes GAC, GCA, au triangle GAC, & GAC, estant monstré moitié de CGF : GCA, sera moitié du mesme CGF : & partant GAC, & GCA egaux, & GA, GC egales. 6. 1.

Mais CG eſt monſtree egale à CF, donc AG ſera auſſi egale à CF. Donc adiouſtant les egales GE, EF; AE ſera egale à CF, FE enſemble : Donc les 3. enſemble AE, EF, FC: c'eſt à dire les deux enſemble AF, FC ſeront doubles de AE: & au contraire AE, perpendiculaire au coſté du pentagone, ſera moitié des deux enſemble, AF, FC, ſçauoir du coſté de l'hexagone & du decagone. Donc la ligne droicte, &c Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

D'où il s'enſuit que la perpendiculaire menee du centre à la droicte ligne accommodee au cercle, couppe l'arc ſouſtendant icelle ligne en deux egalement, eſtant demonſtré que AE, menee du centre A, perpendiculaire à CB, diuiſe l'arc BC en deux egalement à F.

2. Que la perpendicul. du centre au coſté dudict pétagone, eſt egale à la *perpendic. du meſme* centre menee ſur le coſté du triangle equilateral, & à la moitié du coſté du decagone, inſcrit au meſme cercle.

Car comme il eſt icy demonſtré, la perpendicul. menee du centre au coſté du pentagone, eſt egale à la moitié du coſté de l'hexagone & du decagone enſemble: mais la perpend. menee du centre ſur *le* coſté du triangle equilateral, a eſt egale à la *moitié* du demy-diametre, ou coſté de l'hexagone. Donc il eſt manifeſte que la meſme perpend. menee du centre au coſté du pentagone, eſt *egale* à la perpendiculaire menee au coſté du triangle equilateral, & à la moitié du coſté du decagone enſemble.

a Co. 12. 13

THEOREME

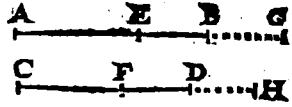
THEOREME 2. PROP. 2.

Si deux lignes droictes ſont couppees en la moyenne & extreme raiſon : elles ſeront ſemblablement couppees, ſcauoir en meſmes proportions.

Soient AB, CD, couppees en la moyenne & extreme raiſon à E & F. Ie dis qu'elles ſont ſemblablement couppees, c'eſt à dire, comme AB, à CD, ainſi AE à CF, & EB à FD. Item, comme AE à EB, ainſi CF à FD, &c.

Car puis que comme AB eſt à AE, ainſi AE à EB, & comme CD à CF, ainſi CF, à FD, *a* le rect. ſous AB, EB, ſera egal au q. de AE, & le rectangle ſous CD FD, egal au q. de CF. a 17. 6.

Donc comme le rect. ſous AB, EB, ſera au qu. de AE, ainſi le rect. ſous CD, FD, au q. de CF (y ayant proportion d'egalité de part & d'autre.) *b* Parquoy comme le quadruple du rect. ſous AB, EB, au q. de AE, ainſi le quad. du rect. ſous CD, FD, au q. de CF: & en compoſant comme le quadr. du rect ſous AB, EB, & le q. de AE, à iceluy q. de AE: ainſi le quadr. du rectangle ſous CD, FD, & le q. de CF, au q. de CF: *c* mais 4. fois le rect. ſous AB, EB, auec le qu de AE, eſt egal aux qu. de AG, compoſee de AB, EB.



b Sc. 22. 5.

c S. 2.

Et quatre fois le rectang. ſous CD, FD, auec le

q. de CF, eſt egal au q. de CH, compoſee de C D, FD. Donc comme le q. de AG compoſee de A B, EB, au q. de AE, ainſi le q. de CH, comp. de CD, FD, au q. de CF; *d* Partant comme AG, à AE, ainſi CH, à CF: Et en compoſant, comme AG, & AE, c'eſt à dire la double de AB, eſt à AE: ainſi CH, & CF, c'eſt à dire, la double de CD, eſt à CF: & en permutant comme la double de AB, à la double de CD, ainſi AE à CF. *e* Mais comme la double de AB, à la double de CD, ainſi AB, à CD: Donc comme AB, ſera à CD, ainſi AE, à CF: partant puis que comme la toute AB, eſt à la toute CD, ainſi la retranchee AE, à la retranchee CF; *f* auſſi la reſtante EB, ſera à la reſtante FD, comme la toute à la toute: *g* donc comme AE, à CF, ainſi EB, à FD, & en changeant comme AE, à EB, ainſi CF, à FD: & ainſi ſelon toute autre maniere d'argumenter és proportions, on monſtrera que les lignes totales & leurs parties ſont proportionelles entr'elles. Donc ſi deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

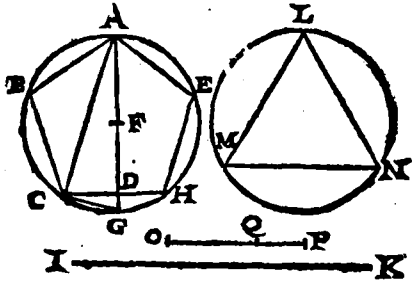
d 22. 6.
e 15. 5.
f 19. 5.
g 11. 5.

THEOREME 3. PROP. 3.

Vn meſme cercle contient le pentagone du Dodecaedre, & le triangle de l'Icoſaedre inſcrits en vne meſme ſphere.

Premier que demonſtrer ceſte propoſition, il faut monſtrer que le quarré du coſté du pentagone auec le quarré de la ligne ſouſtendante vn angle

d'iceluy, eſt quintuple du q. du demy diametre du cercle, où eſt inſcrit ledit pentagone.



Soit C H, coſté du pentagone inſcrit en vn cercle, C A, la ligne qui ſouſtend vn des angles du pentagone, & F G, demy diametre, *a* couppant C H, & l'arc C G H, en 2. egalement. Ie dis que les quarrez de C A, & C H enſemble, ſont quintuples du quarré de F G. a Co. 10. 13

Car la ligne droicte C G, eſtant menee ſera le coſté du decagone, *b* & le q. de A G, ſera quadruple du q. de F G demy diametre: parquoy les 2. qq. de A C, C G, *c* egaux audit quarré de A G, ſeront auſſi quadruples du q. de F G. Donc les trois qq. de A C, C G, G F enſemble ſeront quintuples du quarré de G F: mais les qq. de C G, & de G F, enſemble coſtez de l'hexagone & du decagone, *d* ſont egaux au q. de C H coſté du pentagone: donc les qq. de A C, & de C H, ſont quintuples du q. de G F. Ce qui eſt propoſé. *Maintenant.* b ſcho. 4. c 47. 1. d 10. 13.

Soit I K, le diametre de la ſphere contenant le dodecaedre & l'Icoſaedre, & ſoit A B C H E, vn pentagone d'iceluy dodecaedre, & L M N, triangle de l'Icoſaedre. Ie dis qu'vn meſme cercle contient le pentagone A B C H E, & le triangle L M N, c'eſt à dire, que les cercles qui les circonſcriuent A B C H E, L M N ſont egaux,

& que ce n'eſt qu'vn meſme. Car ayant mené AC, ſouſtendant l'angle B du pentagone, [a] AC, ſera le coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere.

a corol. 17. 13.

Soit priſe OP, telle que le q. de IK, diametre de la ſphere ſoit quintuple du q. de OP, & OP, ſera egale au demy diametre du cercle où eſt inſcrit l'Icoſaedre. Et OP, [b] ſoit couppee en la moyenne & extreme raiſon à Q; OQ plus grand ſegment ſera coſté du decagone inſcrit au meſme cercle, duquel OP, [c] eſt le demy diametre ou coſté de l'hexagone: mais [d] CA eſtant diuiſee en la moyenne & extreme raiſon, ſon plus grand ſegment eſt AB, coſté du pentagone. [e] Donc comme AC toute, à OP, toute, ainſi le plus grand ſegment AB, au plus grand ſegment OQ. [f] Donc comme le quarré de AC, au q. de OP, ainſi le quarré de AB, au q. de OQ. [g] Et comme le triple du quarré de AC, au quintuple du quarré de OP, ainſi le triple du quarré de AB, au quintuple du q. de OQ: mais le *triple du q. de AC*, eſt egal au quintuple du quarré de OP ([h] le q. de Ik, diametre de la ſphere eſtant poſé egal tant au triple du q. de AC coſté du cube, qu'au quintuple du quarré de OP.) Parquoy le triple du q. de AB, ſera auſſi egal au quintuple du q. de OQ. [i] Mais ML, coſté du triangle de l'Iſoſaedre eſt egal au coſté du pentagone inſcrit au cercle duquel OP eſt demy diametre. Donc le q. dudit coſté eſtant egal aux qq. de OP, OQ coſtez du decagone & de l'hexagone, 5. fois le q. de ML, ſera egal à 5. fois le q. de OP, & à 5. fois celuy de OQ: ou à 3. fois le q. de BA, & à 3. fois le q. de AC. Donc les qq. de BA, AC, eſtant quintuples du q. du demy diametre FA (comme il eſt demonſtré)

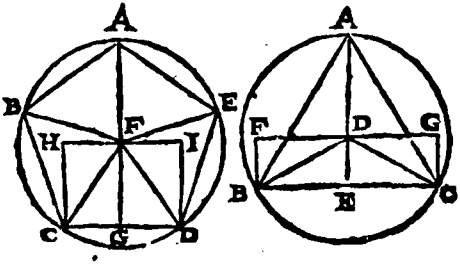
b corol. 16. 13.
c corol. 9. 13.
d 7. 13.
e 2. 14.
f 22. 6.
g 4. 5.
h 15. 13.
i corol. 16. 13.
k 10. 13.

5. fois le quarré de AB, & 3. fois le q de AC, seront egaux à 15. fois le q de FA, demy diametre. Mais 5. fois le q. de ML, costé du triangle equilateral est egal à 15. fois le q. du demy diametre du cercle LMN (chacun [l] q. de ML, estant triple du q. du demy diametre) parquoy les 3. q. de BA, AC, estans egaux aux 5. de ML, les 15. de FA, demy diametre seront egaux aux 15. du demy diametre du cercle LMN. Parquoy chacun q. d'iceux sera egal à chacun q. & le demy diametre au demy dia. Donc les cercles seront egaux ABC LMN. Partant vn mesme cercle &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [l] 12. 13.

THEOREME 4. PROP. 4.

iij vj

Si du centre du cercle circonscriuant le pentagone du dodecaedre, est menee vne ligne droicte perpendiculaire à vn costé d'iceluy pentagone : trente fois le rectangle contenu sous ledit costé & la perpendiculaire, sera egal à la superficie du dodecaedre.



Du centre F, du cercle circõscriuãt le pentagone du dodecaedre ABCDE, soit menee FG, perpend. sur

le coſté CD. Ie dis que trente fois le rect. contenu ſous FG, CD, eſt egal à toute la ſuperficie du dodecaedre.

Car du centre F, ayant mené les lignes droictes à tous les angles du pentagone, FA, FB, FC, FD, FE, le pentagone ſera diuiſé en 5. triangles egaux, comme il appert, tous les coſtez eſtans egaux, & toutes les baſes: Soit conſtitué le rect. CI, contenu ſous CD, FG. D'autant que le rect. CI, eſt double du triangle FCD, & par conſequent double de chacun des 4. triangles reſtans egaux à FCD, le rectangle CI, pris 5. fois ſera egal à 10 tels triangles, c'eſt à dire à 2. pentagones du dodecaedre (5. triangles eſtans egaux à vn pentagone) partant le ſextuple du rect. CI. (c'eſt à dire, 6. rect. tels que CI) pris 5. fois, ſçauoir trente fois le rect. CI, ſera auſſi egal au ſextuple de 2. pentagones, (c'eſt à dire, à 12. pentagones) ſçauoir à toute la ſuperficie du dodecaedre. Donc ſi du centre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a Cor. 8. 1.

b 41. 1.

Semblablement on demonſtrera que ſi du centre du cercle circonſcriuant le triangle de l'Icoſaedre ABC, on mene vne perpendiculaire DE, ſur vn coſté, ſçauoir ſur BC, le rectangle BG, contenu ſous BC, DE, pris 30. fois, ſera egal à la ſuperficie de l'Icoſaedre.

Car le rect. BG, eſtant double du triangle DBC, c'eſt à dire, egal audit triang. pris 2. fois; le rect. BG, pris 30. fois ſera egal au triangle DBC, pris 60. fois: mais 60. tels triangles que DBC, font 20. triangles de l'Icoſaedre, puis que 3. en font vn, comme il appert au triangle ABC, où les coſtez DA, DB, DC ſont egaux, & les 3. baſes AB, BC, CA egales par l'hypotheſe. Donc B

41. 1.

G, pris 30. fois sera egal à toute la superficie de l'Icosaedre.

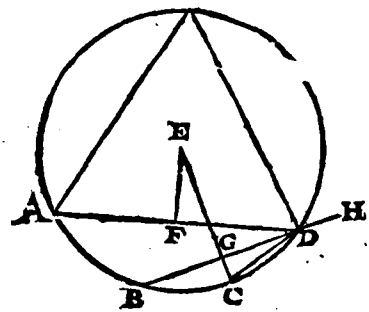
COROLLAIRE.

D'où il s'ensuit que comme le rect. C I, est au rect. B G, ainsi toute la superficie du dodecaedre à la superficie de l'Icosaedre. 15. 5.

THEOREME 5. PROP. 5.

Comme la superficie du dodecaedre est à la superficie de l'Icosaedre, ainsi le costé du cube est au costé de l'Icosaedre, inscrits en vne mesme sphere.

Au cercle ABCD, *a* enuironnant le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'Icosaedre, soit BD, costé du pentagone, & AD, costé du triangle; & du centre E, soient menees EF, EG, perpendiculaires à AD, BD, & soit FG, prolongee à la circonference au poinct C, & menee CD; EC couppera l'arc BCD, en 2. egalement, & CD sera costé du decagone *b* comme nous auons monstré. a 3. 14. b 1. 14.



Et soit prolongé BD, à H en sorte que BH, soit egale au costé du cube inscrit en la mesme sphere.

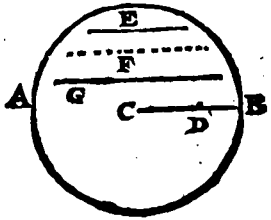
Ie dis mainte nant que la ſuperficie du dodecaedre, eſt à la ſuperficie de l'Icoſaedre, comme BH, coſté du cube eſt à AD, coſté de l'Icoſaedre.

Car EC, eſtant coſté de l'hexagone, & CD, coſté du decagone inſcrits en vn meſme cercle, EC, CD, priſe comme vne ſeule, *c* ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon, & EC, le *plus* grand ſegment, *d* & EG eſt moitié de la toute compoſee de EC, CD, & EF, eſt moitié du plus grand ſegment EC (le *e* demy diametre eſtant couppé en deux egalement par AD.) Et EC, eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, la moitié EF, ſera le plus grand ſegment, comme il eſt manifeſte,: car la moitié du plus grand ſegment, & la moitié du moindre, faict la moitié de la toute: *f* les toutes eſtant entr'elles comme leurs parties: mais BH, coſté du cube eſtant couppee en la moyenne & extréme raiſon, *g* BD coſté du dodecaedre ſera ſon plus grand ſegment; partant comme la toute BH, à BD *ſon plus grand ſegment*, ainſi la toute EG, ſera à EF ſon plus grand ſegment: *i* Donc le rect. ſous BH, EF extremes, ſera egal au rectangle ſous BD, EG moyennes: & le rect. ſous BH, EF, l eſtant au rectangle ſous AD, EF, comme BH eſt à AD, comme BH ſera à AD, ainſi le rectan. ſous BD, EG (monſtré egal au rect. ſous BH, EF) ſera au rectangle ſous AD, EF. Partant le rectan. ſous *m* BD, EG, *eſtant au* rect. ſous AD, EF, comme la ſuperficie *du* dodecaedre à celle de l'Icoſaedre: auſſi comme BH, coſté du cube ſera à AD, coſté de l'Icoſaedre, ainſi la ſuperficie du dodecaedre, ſera à la ſuperficie de l'Icoſaedre. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 9. 13.
d 1. 14.
e Co. 12. 13
f 15. 5.
g Corol. 17. 13.
h 2. 14.
i 16. 6.
l 1. 6.
m Corol. 4. 14.

THEOREME 6. PROPO. 6.

Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon ; comme le quarré de la toute, & le quarré du plus grand ſegment, ſont aux quarrez de la toute & du plus petit ſegment: Ainſi le quarré du coſté du cube, eſt au quarré du coſté de l'Icoſaedre, inſcrit en vne meſme ſphere que le cube.



Soit le cercle A B, contenant le triangle de l'Icoſaedre, & le pentagone du dodecaedre, dont le demy diametre C B, ſoit couppé en la moyenne & extreme raiſon à D, & ſon plus grand ſegment ſoit C D, *a* qui ſera le coſté du decagone inſcrit au meſme cercle. Et ſoit poſee E, coſté du dodecaedre, F, coſté de l'Icoſaedre, & G, coſté du cube. Ie dis que le quarré de G, eſt au quarré de F, comme les deux quarrez de C B, CD, ſont aux deux quarrez de CB, DB.

a Cor. 9. 13

Car E, eſtant coſté du pentagone, & F, coſté du triangle inſcrit au cercle propoſé : Si G, coſté du cube eſt couppé en la moyenne & extreme raiſon, *b* E, ſera ſon plus grand ſegment : parquoy F, eſtant coſté du triangle inſcrit au cercle donné, *c* ſon quarré ſera triple du quarré du demy diame-

b Corol. 17. 13.

c 12. 13.

d 4. 13. tre CB, *d* & les quarrez de CB, DB, ſont triples du quarré de CD. Donc le quarré de F, eſt au quarré de CB, comme les deux quarrez de CB, DB, ſont au quarré de CD: Et en permutant, le quarré de F, ſera aux deux quarrez de CB, DB, comme le quarré de CB, au quarré de CD. Or comme le quarré de CB, eſt au quarré de CD, ainſi le quarré de G, au quarré de E (puiſque *e* comme CB, toute eſt à ſon plus grand ſegment CD, ainſi G, toute eſt à E, ſon plus grand ſegment. *f* Donc comme le quarré de CB, ſera au quarré de CD, ainſi le quarré de G, au quarré de E:) *g* Partant comme le quarré de F, eſt aux qq. de CB, DB, ainſi le quarré de G, au quarré de E: & en changeant comme le quarré de F, au quarré de G, ainſi les quarrez de CB, DB, ſont au quarré de E, qui eſt le coſté du pentagone, *h* egal aux quarrez de CB, CD, coſtez de l'hexagone & du decagone qui ſont inſcrits en vn meſme cercle: partant le quarré de G, coſté du cube eſt au quarré de F, coſté de l'Icoſaedre, comme les quarrez de CB, CD, ſont aux quarrez de CB, DB. Parquoy ſi vne ligne droicte, &c, Ce qu'il falloit demonſtrer.

e 2. 14.

f 22. 6.

g 11. 5.

h 10. 13.

THEOREME 7. PROP. 7.

Comme le coſté du cube eſt au coſté de l'Icoſaedre: Ainſi le ſolide du Dodecaedre eſt au ſolide de l'Icoſaedre inſcrits en vne meſme ſphere.

D'autant que le pentagone du Dodecaedre, &

le triangle de l'Icoſaedre inſcrits en vne meſme ſphere, *a* ſont inſcrits en vn meſme cercle ou cercles egaux. Et qu'en *b* la ſphere les cercles egaux ſont egalement diſtans du centre : car les perpendiculaires menees du centre de la ſphere au plan des cercles, *c* ſont egales & tombent aux centres d'iceux cercles : Donc les perpendiculaires menees du centre de la ſphere au centre du cercle cõtenant le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'Icoſaedre ſont egales : Parquoy les pyramides ayans pour baſes les pentagones du Dodecaedre, & les triangles de l'Icoſaedre ſont de meſme hauteur : *d* mais les pyramides de meſme hauteur ſont entr'elles comme leurs baſes: Donc comme le pentagone au triangle, ainſi la pyramide qui a pour baſe le pentagone du dodecaedre, & le centre de la ſphere pour ſommet, eſt à la pyramide dont la baſe eſt le triangle de l'Icoſaedre, & le centre de la ſphere eſt le ſommet.

a 3. 14. b 6. ſph. theod. c Corol. 1. th. d 5. & 6. 12.

Donc auſſi comme 12. pentagones ſont à 20. triangles, ainſi 12. pyramides ayans les baſes pentagonales ſont à 20. pyramides ayans les baſes triangulaires: mais 12. pentagones ſont la ſuperficie du Dodecaedre, & 20. triangles ſont la ſuperficie de l'Icoſaedre : Donc comme la ſuperficie du dodecaedre à la ſuperficie de l'Icoſaedre, ainſi 12. pyramides ayans les baſes pentagonales à 20. pyramides qui ont les baſes triangulaires : Et 12. pyramides ayans les baſes pentagonales, ſont le ſolide du dodecaedre ; & 20. pyramides ayans les baſes triangulaires ſont le ſolide de l'Icoſaedre.

e 5. 14.

Donc comme la ſuperficie du Dodecaedre à la ſuperficie de l'Icoſaedre, ainſi le ſolide du Dodecaedre, au ſolide de l'Icoſaedre, mais comme la
M. 5. ſuperficie du Dodecaedre, à la ſuperficie de l'Icoſaedre, ainſi eſt monſtré le coſté du cube, au coſté de l'Icoſaedre, donc comme le coſté du cube au coſté de l'Icoſaedre, ainſi le ſolide du Dodecaedre, au ſolide de l'Icoſaedre. Ce qu'il falloit demonſtre.

FIN DV QVATORZIESME LIVRE
des Elements d'Euclide.



LIVRE QVINZIESME

DES ELEMENTS D'EVCLIDE,

Et le cinquiesme des Solides.

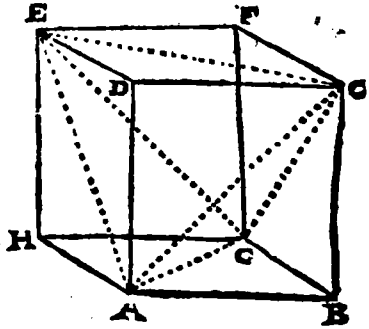
PROBLEME 1. PROPO. 1.

En vn cube donné, inscrire vne Pyramide.

SOIT le cube donné ABC DFFGH. Il faut inscrire en iceluy vne pyramide ou tetraedre: D'vn angle d'iceluy E, soient menees aux bases constituans iceluy, trois diametres EA, EG, EC, de l'extremité desquelles A, G, C, soient aussi menez les diametres AG, GC, CA, aux autres 3. bases qui cõioignent les extremitez des trois premiers diametres: D'autãt que les diametres des quarrez egaux sont egaux entr'eux, estans doubles en puissance des a costez des quarrez egaux. a 47. 1.

Il est manifeste que les quatre triangles ACE,

GAC, GAE, GCE, compoſez deſdits diametres ſont equilateres & egaux entr'eux, partant conſtituét vne pyramide : &



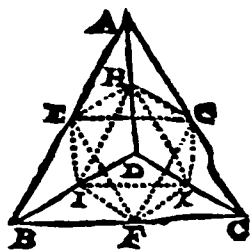
tous les angles de la pyramide eſtans colloquez aux angles du cube, *b* il eſt manifeſte, qu'elle eſt inſcrite dans le cube. Donc en vn cube donné nous auons inſcrit vne pyramide. Ce qu'il falloit faire.

b 31.d.11.

PROBLEME 2. PROP. 2.

En vne Pyramide donnee, inſcrire vn Octaedre.

Soit la pyramide donnee ABCD, où il faut inſcrire vn octaedre. Ayant diuiſé tous les coſtez en deux egalement à E, F, G, H, I, K, & mené EF, FG, GE, HI, IK, kH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, on aura conſtitué 8. triangles,



4. deſquels EHI, IHk kHG, HGE, ſont ſur le plan

EIKG; mais les 4. autres IFE, EFG, GFK, KFI, au dessous du mesme plan. Mais d'autant que les costez AE, AH, du triangle AEH, sont egaux à AG, AH, du triangle AGH, estans moitiez des egales AB, AD, AC, & les angles contenus d'icelles EAH, GAH egaux, estans angles de triangles equilateres A B D, A C D. *a* Les bases EH, GH, seront egales: & par mesme raison EH, HI, & les autres pareillement, parquoy iceux 8. triangles sont equilateres & egaux entr'eux: & partant composent l'octaedre EIGHF, *b* lequel est inscrit en la pyramide, puis que tous les angles touchent tous les costez de la pyramide, par la construction. Donc en vne pyramide nous auons inscrit vn octaedre. Ce qu'il falloit faire.

a 4. 1.

b 31. d. 11.

COROLLAIRE.

Or d'autant que les trois plans EIKG, GHIF, FKHE, *a* sont quarrez egaux, se couppans à angles droicts: chacun desquels couppe la pyramide A B C D, en 2. egalement. (car le quarré EK, la diuise en la pyramide H I K D, & au prisme HIK GAE: & aussi en la pyramide EBFI, & au prisme EFCGKI: mais il appert que la pyramide est egale à la pyramide, & le prisme au prisme: semblablement les autres quarrez G I, & F H, diuisent en deux egalement la mesme pyramide A B C D.) Il est manifeste que si au tetraedre on inscrit vn octaedre, que le tetraedre sera couppé en deux egalement par 3. quarrez egaux, lesquels se couppent entr'eux à angles droicts, & le tetraedre en deux egalement.

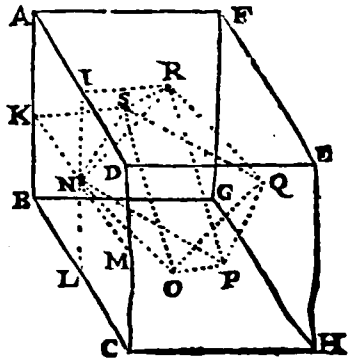
a Corol. 1. 14. 13.

b 8. 12.

PROBLEME 3. PROPO. 3.

En vn cube donné, inscrire vn Octaedre.

Soit le cube donné AH, auquel il faut inscrire vn octaedre. Soiét diuisez les costez de la base AB CD, en deux egalement par I, k, L, M, lesquels soient conioincts par I L, kM, se couppantes l'vne l'autre par M, qui est le cétre du quarré B D, comme il appert de la demóstration de la 8. du 4. Et ainsi on trouuera les centres des autres bases O, P, Q, R, S, donc toutes les droictes lignes menees desdits cétres au milieu des bases, comme sont NI, RI, Nk, Sk, &c. sont egales aux moitiez des costez du cube, ou des quarrez, comme il appert par la demonstration 8. 4.



Finalement, si lesdits centres sont conioincts par NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ: QS, on aura constitué 8. triangles, quatre desquels NSR, RSQ, QSO, OSN, sont sur le plan NOQR, & les autres quatre OPQ, QPR, RPN, NPO, au dessous du mesme plan.

Mais d'autant que les costez IN, NR, du triangle

gle INR, ſont egaux à KN, RS, du triangle KN S, eſtans tous moitiez des coſtez egaux du cube, comme il eſt dict: Item les angles contenus d'iceux ſont egaux: car NI, IR, eſtant paralleles à BA, AF; *a* l'angle NIR, eſt egal au droict KAF, au qu. AG: par meſme raiſon NRS egal au droict IAF, au quarré AE; les baſes NR, NS, ſeront egales. Ainſi nous demonſtrerons toutes les autres lignes egales, & entr'elles & à ces deux. Si des centres on mene des lignes droictes au milieu des coſtez, en ſorte que chaque deux ſoient menees au milieu du coſté commun à deux quarrez du cube, deſquels ces deux poincts d'où viennent les lignes droictes ſont les centres: ainſi que NI, & RI, qui ſont menees à I, moitié du coſté AD, commun aux quarrez AC, AE, dont les centres ſont N, & R: Pareillement NK, SK, ſont menees à K, milieu de AB, commun aux quarrez AC; AG, dont les centres ſont N, & S, &c. Partant on a conſtitué 8. triangles equilateres & equiangles entr'eux, qui conſtituent l'octaedre NOQRSP; *c* Qui eſt inſcrit au cube, puis que tous ſes 6. angles touchét toutes les 6. baſes dũ cube, à leurs centres. Donc au cube donné nous auons inſcrit vn octaedre. Ce qu'il falloit faire.

a 10. 11.

b 4. 1.

c d. 31. 11.

Autrement. *d* Au cube ſoit inſcrit vne pyramide *e* & en icelle pyramide ſoit inſcrit vn octaedre, & on aura faict ce qui eſt propoſé. Car puis que ſelon la demonſtration de la 2. propoſ. de ce l. les angles de l'octaedre, touchent les coſtez de la pyramide; mais les coſtez de la pyramide, par la demonſtration de la 1. prop. de ce l. ſont aux plans des baſes du cube, eſtant les diametres d'icelles baſes: Il eſt manifeſte, que les angles de l'octae-

d 1. 15.

e 2. 15.

dre, touchent pareillement les baſes du cube: & partant que l'octaedre eſt inſcrit au cube.

COROLLAIRE.

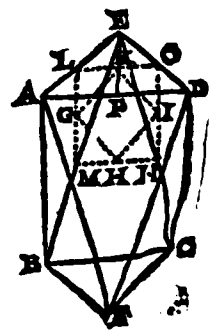
Or d'autant que les diametres de l'octaedre inſcrits au cube, NQ, RO (s'ils eſtoient menez) *f* ſe couppent l'vn l'autre à angles droits, & conioignent les centres des baſes du cube oppoſees; Il eſt manifeſte, que les lignes droictes qui conioignent les centres des baſes oppoſees du cube, ſe diuiſent non ſeulement en 2. egalement, *g* comme il eſt monſtré: mais auſſi à angles droicts, comme nous monſtrons icy.

f Corol. 1.14.13.

g Corol. 1.15.13.

PROBLEME 4. PROP. 4.

iv **En vn octaedre donné inſcrire vn cube.**



Soit ABCDEF, l'octaedre donné, où il faut inſcrire vn cube. D'autant que 6. pyramides quadrangles ſõt contenuës en l'octaedre, dont les ſommets ſont les 6. angles de l'octaedre, & chaque 2. conſtituent vn octaedre: Soit vne d'icelles, ſçauoir la pyramide ABCDE, dont la baſe eſt le quarré ABCD; & les triangles equilateres ABE, EBC, CED, DEA, dont les centres ſont G, H, I, K, par leſquels ſoient menees LM, MN, NO, OL pa-

ralleles à AB, BC, CD, DA, les triangles LME, EMN, NEO, OEL, seront equilateres, a estans semblables aux triangles equilateres susdicts. Et partant egaux entr'eux, ayans les costez communs, & les bases LM, MN, NO, par consequent egales. Et si de E, par le centre K, est menee EP, elle diuisera l'angle à E, en 2. egalement, donc LK, sera egale à KO, c'est à dire, que LO, est diuisee en 2. egalement par K, centre; Et semblablement L M, M N, N O, seront couppees chacune en 2. egalement par les centres G, H, I. Partant les quatre triangles GLK, KOI, GMH, HNI, sont Isoscheles (b les angles GLK, KOI, NH, HMG, estans egaux aux angles droicts du qu. GKIH,) Donc les bases G K, KI, IH, HG, seront egales & contiendront angles droicts: parquoy GHIK, est quarré. Que si en la mesme maniere aux autres cinq pyramides de l'octaedre, les centres des triangles sont conioints par des lignes droictes, on descrira semblablement 5. quarrez, lesquels seront egaux entr'eux ayant les costez communs. Parquoy 6. tels quarrez composeront vn cube c lequel sera descrit en l'octaedre, puis que les huict angles d'iceluy touchent les 8. bases de l'octaedre à leurs centres. Partant en l'octaedre donné nous auons inscrit vn cube. Ce qu'il falloit faire.

a Cor. 4. 6

b 10. 11.

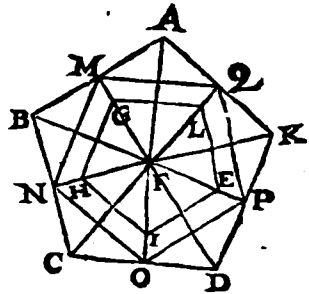
c 31. d. 11.

PROBLEME 5. PROPOSIT. 5.

Dedans vn Icosaedre donné inscrire vn Dodecaedre.

Soit vne des 12. pyramides de l'Icosaedre, dont les bases sont pentagones ABCDEF, & la base le pentagone ABCDE, & les triangles equilateres

ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, & leurs centres G, H, I, K, L, conioincts par GH, HI, IK, KL, LG. Derechef du ſommet F, par les centres des triangles ſoient menees FM, FN, FO, FP, FQ; couppans *a* AB, BC, CD, DE, EA, à M, N, O, P, Q, en ſorte que MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, ſoient egales, & comprenant angles egaux, ſçauoir du pentagone, *b* MN, NO, OP, PQ, QM, conioignant les poincts, M, N, O, P, Q, ſont auſſi egales; *c* partãt les angles MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM ſont egaux, les coſtez FM, FN, FO, FP, FQ eſtans egaux, ſçauoir perpendiculaires des angles des triangles equilateres menees aux baſes oppoſees.



Car FB, BM, du triangle FBM, eſtans egaux à FB, BN, du triangle FBN, & contenant angles egaux, ſçauoir de triangles equilateres; *d* les baſes, FN, FM ſeront egales, & ainſi des autres. Mais d'autant que FG, FH, FI, FK, FL, demy diametres des cercles egaux, circonſcriuans les triangles equilateres, ſont egales, & contiennent angles egaux, comme il eſt demonſtré; *e* 6 H, HI, IK, KL, LG, ſeront egales. *f* Et puiſque tant AMQ, QMN, MNB, que BNM, NMO, ONC, ſont egaux à deux droicts. *g* Mais AMQ, NMB, ſont egaux à BNM, ONC, les reſtans QM

a Corol. 10. 13.
b 4. 1.
c 8. 1.
d 4. 1.
e 4. 1.
f 13. 1.
g 4. 1.

N, MNO seront egaux. Par mesme raison les autres angles NO P, O PQ, P QM, seront egaux entr'eux & à ceux cy : parquoy le pentagone MN OPQ. sera equilatere & equiangle, au plan du pentagone ABCDE. Finalement FM, FN, FO, FP, FQ egales estans couppees proportionellement à G, H, I, K, L, d'autant aussi que FG, F H, FI, FK, FL, sont egales menees du centre. *b* G h 2. 6. H, HI, IK, KL, LG, seront paralleles à MN, NO, OP, PQ, QM, *i* & partant les angles LGH, GHI, i 10. 11. HIk, IkL. kLG, egaux aux egaux QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, donc aussi egaux entr'eux. *k* k 15. 11. Et les plans menez par GH, HI, & H I, Ik, estant paralleles au plan du pentagone MNOPQ, mené par MN, NO, OP, & se rencontrans à HI, feront *a* vn seul plan. Semblablement on monstrera que a lemm. les plans par Ik, kL, & kL, LG, & LG, GE, feront 16. 13. vn mesme plan auec le plan mené par GH, HI, Ik; Parquoy GHIKL, est pentagone equilatere & equiangle, ayant les angles & les costez egaux. Que si en la mesme maniere, aux autres 11. pyramides de l'Icosaedre, on conioinct des lignes droictes aux centres des triangles, on descrira semblablement des triangles equilateres & equiangles : lesquels ayans les costez communs seront egaux entr'eux. Parquoy 12. tels pentagones constitueront vn dodecaedre, lequel / sera inscrit en l'Icosaedre, l 31. d. 11. les 20. angles du dodecaedre estans constituez aux centres des 20. bases de l'Icosaedre. Donc en l'Icosaedre donné nous auons inscrit vn Dodecaedre. Ce qu'il falloit faire.

Fin du quinziesme & dernier liure des Elements d'Euclide.