ELEMENTA
GEOMETRIÆ PLANÆ
SEU
ELEMENTORUM EUCLIDIS
PRIORES SEX LIBRI

OPERA, AC STUDIO

NICOLAI DE MARTINO

In Illuſtri Lycco Neapolitano
MATHEMATUM PROFESSORIS

Recogniti, ac Illuſtrati.

Excudebat Neapoli Petrus Palumbo
Superioribus annuenti bus.
ANNO M. DCC. XLVI.

Expenſis Stephani Elia.

GEOMETRIÆ STUDIOSÆ JUVENTUTI.

Elementa Geometriæ Planæ in Tui commodum, & usum edituri, non alia forma, ac methodo illa Tibi sistimus, quam prout in prioribus sex libris Elementorum Euclidis continentur. Id autem nemo nobis vitio vertat. Primò, quia mutato ordine Euclideo perdifficilis evadit lectio Archimedis, Apollonii, Theodosii, aliorumque priscæ ætatis Geometrarum, in quibus elementares propositiones laudantur eo ordine, quo extant in Euclidis Elementis. Et deinde quia experientia edocti sumus, longè uberiorem fructum percipere Juventutem ex sola Euclidis lectione, quam si omnia illa Geometriæ Elementa perlustraret, quæ ætate nostra Viri alioquin doctissimi methodo alia adornare conati sunt. Interim priores illos sex libros Euclidis, Geometriæ Planæ Elementa continentes, non ita rudes, ac nudos Tibi exhibemus, quemadmodum Majores Nostri in hac nostra Urbe facere con-

sueverunt, sed nonnihil recognitos, ac illustratos; quandoquidem & definitiones singulis libris præfixas brevibus quibusdam notis explicuimus, & demonstrationes ipsas propositionum paulò nitidiores reddere curavimus. Quin etiam, ne accedens ad hæc studia, Geometriæ penetralia statim ingredi cogaris, ad rem visum est, præliminarem quamdam dissertationem præmittere, quæ ostenderet tum naturam quantitatum, quas Geometria considerat, tum differentias principiorum, quæ in ea velut indubitata adhibentur, tum denique discrimina ipsarum propositionum, quæ ex iis principiis per demonstrationes deducuntur. Cæterum, quod de Geometriæ utilitate tum ad mentem perficiendam, cum ad sanioris Physices intellectum in eadem dissertatione nihil adjecerim, non est, quod Exteros offendat, si ad eorum forte manus Opusculum istud, studiosæ nostræ Juventuti dumtaxat destinatum, pervenerit. Enimverò veritas ista in hac nostra Civitate adeo cunctis nota est ac explorata, ut nec ipse sexus muliebris, qui dici vix potest, quantam disciplinis adipiscendis operam impendat, à Geometriæ studio arceri patiatur. Vale.

DIS-

DISSERTATIO PRÆLIMINARIS.

GEometriæ nomine intelligitur pars illa Matheseos, quæ circa extensionem, seu quantitatem continuam occupatur: eaque tale nomen sortita est à Terræ dimensione; quia, si Proclo præstanda fides, ad campos dimetiendos, quorum limites Nili alluvione confundebantur, primùm fuit ab Ægyptiis adhibita. Vocatur autem extensum, seu continuum omne id, quod tribus dimensionibus constat, longitudine, latitudine, & profunditate: cujusmodi sunt corpora omnia, quæ in hac rerum universitate existunt; quum nullum eorum sit, quod tribus iis dimensionibus non gaudeat.

Tres istæ dimensiones, ex quibus constat extensio, seu quantitas continua, semper quidem in hoc mundo simul conjunctæ reperiuntur: nec certè res perlustranti occurret ulla, quæ vel unica dumtaxat dimensione, vel etiam duabus tantum sit referta. Interim eo mentis concipiendi modo, quem Scholæ abstractionem appellant, possunt tres illæ dimensiones à se mutuo separari. Atque hac ratione non modò corpora, verum etiam lineas, superficies, & puncta Geometræ considerant.

 Ubi

Ubi enim à corpore profunditatem separant, id, quod remanet, vocant superficiem, quæ proinde longitudine, & latitudine referta, omnino profunditate caret. Quotiescumque verò a superficie amovent latitudinem, gradum faciunt ad lineam, quæ idcirco dumtaxat longitudinem habens, caret tam latitudine, quàm profunditate. Denique, quum à linea auferunt longitudinem, & attendunt tantum ad ejus extrema, puncta eis suboriuntur; quorum propterea nulla est pars, nulla dimensio.

Vicissim autem à puncto ad corpus ascendunt in hunc modum. Primò concipiunt, punctum fluere per planum aliquod: & quoniam puncti nulla est pars, nulla dimensio, relinquetur fluxu ipsius in plano vestigium, solam longitudinem habens; atque adeo linea describetur. Deinde lineam istam intelligunt moveri lateraliter: & quia motu isto laterali, accedit ei latitudo, orietur superficies, quæ longitudinem, & latitudinem habet. Denique superficiem istam concipiunt moveri, vel in altum, vel in profundum: & quia hac ratione adjungitur ei altitudo, seu profunditas, nascetur corpus, quod longitudine, latitudine, & profunditate refertur.

Ex quo patet, inanes, & ridiculas esse Scepticorum argutias, dum ipsam Geometriæ certitudinem in dubium revocare conantur ex eo, quod Geometriæ præter corpora supponant dari puncta, lineas, & superficies, quæ nusquam sunt. Neque enim assumptum est unquam a Geometris, ut detur, aut dari possit punctum separatum a linea, linea se-

jun-

juncta a superficie, & superficies a corpore avulsa. Sed quod supponunt, huc redit, ut tres corporis dimensiones, longitudo, latitudo, & profunditas possint, tum simul, cum separatim considerari: quod extra omnem dubitationis aleam est; nam in dimetiendo intervallo, quo Urbs ab Urbe distat, ipsam tantum viarum longitudinem metimur, nihil omnino solliciti de earumdem latitudine.

Sed deinde etsi puncta, lineæ, & superficies nec existant, nec existere possint à corpore separata, nihil tamen vetat, quominus dicamus, ea omnia verè, ac realiter existere in ipso corpore. Quum enim corpus non sit infinitum, suos habere debet terminos veros, ac reales: qui quidem, quum profunditate careant oportet, habebunt tantum longitudinem, & latitudinem: proindeque non corpora, sed superficies erunt. Et quoniam istarum superficierum unaquæque nec etiam est infinita, sui in ea pariter erunt termini veri, ac reales: qui, quum latitudinis expertes esse debeant, habebunt dumtaxat longitudinem; atque adeo meræ lineæ erunt. Quumque demum quælibet harum linearum finita sit, ei quoque sui competent termini veri, ac reales: quibus quum nec longitudo, nec latitudo, nec profunditas inesse possint, non aliud erunt, quàm puncta.

Hinc itaque perspicuum est, quod etsi puncta, lineæ, & superficies abstractione mentis à Geometris considerentur, in ipso tamen corpore verè, ac realiter existant. Sed exinde liquet etiam, ea omnia existere in corpore, non velut ejus partes physicas, sed tantum ut partes modales, quum suboriatur eorum omnium consideratio non ex ipsa corporis substantia, sed ex eo, quod corpus sit magnitudine finitum, ac terminatum adeo nempe, ut si adesset corpus aliquod omni ex parte infinitum, in eo nec puncta, nec lineæ, nec superficies possent considerari; quam velut undique infinitum nullos terminos, seu fines admittat.

Sed licet puncta, lineæ, & superficies, prout à Geometris considerantur, ad physicam corporis compositionem non pertineant, quum solam habeant rationem terminorum; extitere tamen nonnulli, qui vi suæ imaginationis concedentes punctis, lineis, & superficiebus existentiam realem, & omnino distinctam à corporibus, ea omnia ut physicas corporis partes habuere, nec asserere veriti sunt, lineas quidem ex punctis, superficies verò ex lineis, ac denique corpora ex superficiebus proximè coalescere: ea fortasse decepti ratione, quod ipsi etiam Geometræ, ut paulò ante dictum est, ex motu puncti lineam, ex motu lineæ superficiem, & ex motu denique superficiei oriri corpus tradiderint.

Qui istam opinionem amplectuntur, non possunt in gravissima absurda non impingere. Nam primò, si lineæ constarent ex punctis, sequeretur, lineam majorem quamcunque minorem adæquare. Si enim circa idem centrum duas quascumque circumferentias, seu lineas circulares describamus, & ex centro illo intelligamus ductas ad puncta omnia circumferentia majoris rectas totidem; transibunt rectæ istæ per puncta totidem diversa

cir-

circumferentiæ minoris. Unde, quum in utraque circumferentia sit idem punctorum numerus, constabit ex eodem numero partium utraque circumferentia: & propterea, quum earum circumferentiarum inæqualitas nec ex diverso partium numero, nec ex diversa partium mole repeti possit, eas inter se æquales esse oportebit.

Similiter autem, si superficies constarent ex lineis, ostendi posset, superficiem majorem aliam minorem adæquare. Constituantur etenim duo triangula, quorum bases sint æquales, altitudines autem utcumque inæquales. Hæc inter se altitudinum rationem habere, à Geometris demonstratur. Veruntamen, quia quælibet recta, quæ in uno triangulo aptari potest basi æquidistanter, duci etiam potest in altero similiter basi parallela: eædem lineæ, quæ erunt in uno triangulo, reperientur etiam in altero: & propterea, si lineæ forent partes superficierum, constaret utrumque triangulum eodem numero partium, atque adeo unum alterum adæquaret.

Nec aliter liceret ostendere, solidum majus alterum minus adæquare, si utique solida seu corpora ex superficiebus coalescerent. Fiant etenim duo coni, quorum bases sint æquales, sed non item altitudines. Jam demonstrant Geometræ, conos istos habere inter se eamdem cum suis altitudinibus rationem. Sed quoniam quilibet circulus, qui oritur, secando conum unum plano æquidistante basi, erui quoque potest ex cono altero cum plano alio similiter secando, iidem circuli, qui erunt in uno cono, reperientur etiam in altero. Quocirca, si superficies essent partes solidorum, constaret uterque conus iisdem omnino partibus; proindeque unus alterum adæquaret.

Ne igitur in hæc labamur absurda, dicendum est, nec lineas ex punctis, nec superficies ex lineis, nec corpora demum ex superficiebus constare. Quod adeò quidem Euclidi innotuit, ut inter axiomata posuerit, quod duæ lineæ non habeant segmentum commune, sed in unico puncto se secent. Neque dicas, in indivisibilium methodo a Cavalerio tradita id velut fundamentum assumi, ut omnis quantitas ex suis indivisibilibus constet; hoc est, ut lineæ quidem ex punctis, superficies verò ex lineis, ac denique corpora ex superficiebus coalescant. Nam in methodi hujus applicatione aliud etiam adhibetur, quod falsum illud assumptum corrigit, ipsamque methodum verissimam reddit.

Ut enim per hanc methodum inter duas lineas, aut duas superficies, vel etiam duo solida æqualitas adstruatur, haud quidem satis est ostendere, in utraque earum quantitatum eadem semper indivisibilia capi posse, sed necesse est ulterius, ut ostendatur, inter ipsa illa indivisibilia adesse quoque eadem intervalla. Indeque est, ut nec inter duas illas circumferentias, nec inter duo illa triangula, nec inter duos illos conos, de quibus modò locuti sumus, æqualitas consistat; quia etsi eadem indivisibilia sumi possint in utraque quantitate, attamen intervalla indivisibilium unius intervallis indivisibilium alterius nequaquam sunt æqualia.

Jam horum intervallorum consideratio,

quæ

quæ indivisibilium contemplationi superadditur, hypothesim ipsam indivisibilium corrigit, eamdemque veritati suæ restituit. Nam semper ac in quantitatum compositione, non modò ad ea indivisibilia, verum etiam ad eorumdem intervalla debeat attendi; vera quantitatum componentia erunt illa, quæ ex iis indivisibilibus per sua respectivè intervalla latis oriuntur. Quare lineæ, non quidem ex punctis, sed ex aliis lineolis; superficies, non jam ex lineis, sed ex aliis exiguis superficiebus; & corpora demum, non jam ex superficiebus, sed ex aliis corpusculis coalescent.

Hanc autem esse veram harum omnium quantitatum compositionem, facilè sibi quisque in animum inducet, si sedulò consideret, in omni quantitatum genere partem debere esse *semper ejusdem naturæ* cum toto, ad quod refertur. Hinc etenim fit, ut pars corporis debeat esse similiter corpus, pars superficiei similiter superficies, & pars denique lineæ similiter linea. Quare corpus quidem constabit ex aliis corpusculis, superficies verò coalescet ex aliis exiguis superficiebus, & linea demum ex aliis lineolis componetur.

Nec ad rem facit, quod ipsi etiam Geometræ accipiant puncta in lineis, lineas in superficiebus, & superficies in corporibus. Hinc enim non sequitur, lineas ex punctis, superficies ex lineis, & corpora ex superficiebus constare. Nam in lineis accipiunt Geometræ puncta illa, quæ velut termini referuntur ad eas lineolas, ex quibus lineæ componuntur. Quare adsunt quidem puncta

A 6 per

per totam cujusque lineæ longitudinem, sed linea ipsa ex punctis nequaquam composita erit. Et par est ratio de superficie relatè ad lineas, nec non de corpore relatè ad superficies.

Versatur itaque Geometria circa lineas, superficies, & corpora, nec aliud in iis considerat, quàm magnitudinem, seu quantitatem. Propositum est autem Geometris, nihil prorsus asserere, cui possit contradici. Quem in finem omnes suas propositiones ex certis, indubitatisque principiis deducunt. Principia ista sunt triplicis generis: nempe definitiones, postulata, & axiomata. Definitiones sunt explicationes terminorum, quibus utuntur. Postulata autem, & axiomata sunt propositiones, in quibus nihil, quod difficultatem faciat, reperitur; & distinguuntur à se mutuò perinde, ac problemata, & theoremata à se invicem differunt.

Hinc, ut rectiùs discrimen intelligatur; quod inest inter postulata, & axiomata, sciendum est prius, propositiones illas, quas ex principiis antea positis colligunt Geometræ, esse duplicis speciei. Quædam etenim quidpiam faciendum docent; & dicuntur problemata; quædam verò quidpiam nobis ostendunt, & theoremata appellantur. Hæc autem differentia deprehenditur etiam inter eas propositiones, in quibus nihil occurrit, quod difficultatem faciat, quæque velut principia indubitata ponuntur. Sed ut diversis nominibus distinguerentur, eæ, quæ opus respiciunt, dicuntur postulata; illæ verò, quæ veritatem aliquam continent, axiomata vocitantur.

Ex

Ex quo patet, postulatum non aliud esse, quàm problema facile; pariterque axioma non aliud, quàm facile theorema. Jam, ut aliquod problema possit velut postulatum assumi, debet esse adeo facile, ut id, quod in problemate quæritur, unico mentis conceptu possit absolvi. Sic, à puncto ad punctum rectam lineam ducere, est problema, quod ultro velut postulatum habendum; quia ut id perficiatur, satis est concipere, ut unum punctum directè fluat versus aliud. Et similiter, rectam lineam terminatam in directum, & continuum protendere, est problema, quod à postulati natura non excidit; quia ut illud fiat, non aliud concipi debet, quàm ut punctum, quod fluxu suo datam rectam lineam describit, directè fluere pergat.

Præter duo ista postulata, aliud etiam apud Euclidem reperitur; nempe quovis centro, & quovis intervallo circulum describere. Interim de sensu ejus non satis conveniunt Geometræ. Quidam etenim adeo latè illud assumunt, ut etiamsi intervallum non sit prope centrum, adhuc tamen possit vi ejus postulati circulus describi. Alii vero paulò strictiùs illud accipiunt; scilicet, ut tunc demum liceat, dato centro, datoque intervallo circulum describere, quum datum centrum est in extremitate una dati intervalli.

Quin secundo hoc sensu tale postulatum Euclides admiserit, non est dubitandum; quia aliter frustra posuisset inter problemata propositiones illas; ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere; datis duabus rectis lineis inæqualibus, de majore minori partem æqualem abscindere: ut

quæ

quæ in illo postulato continerentur. Sed num possit etiam admitti priore sensu, id ex tradita postulati natura dijudicandum. Itaque quia in illo sensu duo concipi debent; primum, ut intervallum transferatur prope centrum; & deinde, ut circa idem centrum revolvatur: dicendum est, excidere a natura postulati, quod unicum mentis conceptum debet involvere.

Quod autem illud tantum problema velut postulatum haberi debeat, cui ut satisfiat, unicus mentis conceptus exigitur; id extra omnem dubitationis aleam esse videtur. Nam semper ae in constructione alicujus problematis plura a nobis concipi debent, facilè fieri potest, ut pluralitate eorum conceptuum mens distrahatur, nec satis attendat, num plura illa, quæ concipi debent, pugnent inter se. Quare, ut omnis errandi suspicio arceatur, necesse est ostendere, posse inter se mutuò convenire ea omnia, quæ ad ejus problematis constructionem concipi debent: proindeque tale problema velut postulatum haberi non poterit.

Quantum ad axiomata, sciendum est, illud tantum theorema poni posse velut axioma, cujus veritas a nemine sanæ mentis in dubium vertitur; quodque proinde demonstratione ulla non eget. Id autem contingit, quum connexio idearum subjecti, & attributi innotescit nobis sola earum idearum consideratione, absque eo, quod ideæ aliæ in subsidium advocentur. Nam semper, ac constat nobis ideam attributi contineri in idea subjecti sine subsidio alterius ideæ, sed iis solis inspectis; nulla equidem adhibenda demonstra-

tio,

tio, ut quæ non aliud præstat, quam aliis in subsidium accersitis ideis connexionem idearum subjecti, & attributi in propatulo ponere.

Sed quod vulgò dici solet, axiomata demonstratione non indigere, id non ita intelligendum est, quasi omnis ratiocinatio procul ab axiomatibus esse debeat. Sunt enim nonnulla axiomata, quæ explicari debent, ut meliùs intelligantur. At hæc explicatio naturam eorum axiomatum non evertit; quum non sit eorum demonstratio, sed tantum expositio clarior eorumdem aliis, uberioribusque verbis concepta. Id cernere licet in illo axiomate, quod enunciat, æqualia esse, quæ inter se mutuò congruunt. Neque enim hoc axioma rectè intelligi potest, nisi prius explicetur, quæ dicantur congruere inter se.

Notetur etiam hoc loco velim, fieri facilè posse, ut aliquod theorema, quod uno loco positum sua eget demonstratione, si locò alio ponatur, ex se sit evidens, ac apertum, atque adeo velut merum axioma possit admitti. Tale est Euclidis axioma decimum tertium: si in duas rectas lineas tertia incidat recta linea, & efficiat angulos internos ad eamdem partem duobus rectis minores; duæ illæ rectæ lineæ non erunt parallelæ, sed convenient versus eam partem, in qua anguli duobus rectis minores fiunt. Nam istud axioma non quidem in principio poni debet, sed meretur locum suum post propositionem vicesimam octavam libri primi; quum eo in loco omnem suam evidentiam, ac certitudinem nanciscatur.

Hujus igitur indolis sunt principia, ex quibus

bus Geometræ omnes suas deducunt propositiones, sive sint problemata, sive theoremata. Jam quantum ad problemata, sciendum est in quolibet ipsorum, præter id, quod quæritur, contineri etiam quasdam conditiones, quibus quæsitum ipsum determinatur: ex quo fit, ut in omni problemate duo sedulò sint distinguenda, nempe datum, & quæsitum. Sic in primo problemate, quod in data recta linea terminata triangulum æquilaterum faciendum proponit, datum quidem est ipsa recta linea terminata, quæsitum verò est triangulum æquilaterum in ea describendum. Atque ita quoque in secundo problemate, ubi ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam oportet applicare; data quidem sunt duo, scilicet punctum, & recta linea, quæsitum verò est, ut ad datum punctum ponatur recta, quæ alteri datæ sit æqualis.

Et puncta quidem, velut omnis magnitudinis expertia, non aliter, quàm positione, dari possunt; sed lineæ, superficies, & corpora dari queunt non modò positione, verùm etiam magnitudine. Sic in quinto problemate, in quo, data recta linea terminata, bifariam proponitur dividenda, recta illa linea terminata magnitudine datur. Vicissim autem in sexto problemate, ubi ex puncto in recta linea dato oportet perpendicularem ad rectam illam erigere, datur positione, tàm punctum in recta linea, quàm ipsa recta, cui perpendicularis ex puncto illo est erigenda.

Datum autem problematis quandoque determinat id, quod in problemate quæritur, interdum verò illud indeterminatum relinquit:

quit: indeque oritur vulgata problematum distinctio in determinata, & indeterminata. Sic problema, quod dato triangulo æquale parallelogrammum faciendum proponit in dato angulo rectilineo, indeterminatum est; quia per duo illa data problematis quæsitum parallelogrammum nequaquam determinatur, sed possunt infinita exhiberi, quæ iisdem datis correspondeant. Vicissim verò, quum ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum oportet applicare in dato angulo rectilineo, problema determinatum est, quia tribus iis datis determinatur parallelogrammum, quod quæritur.

Ne autem quisquam decipiatur, notetur hic velim, quod ut problema dicatur determinatum, haud quidem opus sit, unicam tantum solutionem habere. Fieri enim potest, ut problema sit determinatum, & tamen ut duas plures ve solutiones admittat: quod quidem contingit, quum aliquod ex datis varios casus suscipere potest. Sic problema de describenda circuli portione super data recta linea, quæ suscipiat angulum æqualem dato angulo rectilineo, determinatum quidem est. Sed nihilominus, quia angulus datus potest esse, vel rectus, vel acutus, vel obtusus; hinc est, ut ob tres hosce casus, tres quoque problematis ejus solutiones afferantur. Atque ita quoque, quum data circuli portione, inveniendum est centrum ejus, problema tametsi determinatum tribus solutionibus gaudet: quia nempe data circuli portio potest esse, vel æqualis, vel minor, vel major semicirculo.

Itaque tunc demum problema dici debet,

inde-

indeterminatum, quum defectu alicujus conditionis id, quod in problemate quæritur, infinitis planè modis potest exhiberi. Sed fieri quoq; potest, ut problema sit plusquam determinatum: nempe si plures habeat conditiones appositas, quàm quæ ad quæsiti determinationem requiruntur. Atque hoc casu problema dicetur impossibile, si superfluæ conditiones pugnent cum necessariis; dicetur verò redundans, si vicissim cum iis conveniant. Sic problema de constituendo triangulo æquilatero in data recta linea, cujus omnes anguli sint æquales, redundans dicendum esset; quia æqualitas angulorum pro trianguli æquilateri constitutione est quidem conditio superflua, sed non pugnat cum natura ejus trianguli. Per contrarium autem, si triangulum æquilaterum constituendum deberet habere duos, aut omnes angulos inæquales, problema foret impossibile; quia inæqualitas ista pugnat cum natura trianguli æquilateri.

Quantum ad theoremata, in iis quoque duo sunt sedulò distinguenda; scilicet hypothesis, & conclusio. Hypothesis est id, quod in theoremate assumitur, seu supponitur. Conclusio autem est id, quod ex suppositione, seu assumpto deducitur. Sic, quod duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, itemque æquales angulos sub æqualibus lateribus contentos; id in primo theoremate horum Elementorum hypothesis quidem est. Quod autem sit basis basi æqualis, triangulum æquale triangulo, & reliqui anguli unius æquales reliquis angulis alterius, alter alteri, quibus æqualia latera

sub-

subtenduntur; id quum ex hypothesi illa consequatur, pro conclusione ejus theorematis haberi debet.

Quum theoremata conditionali particula sunt concepta, facile erit in iis tum hypothesim, cum conclusionem distinguere. Sic in tertio theoremate horum Elementorum nemo non videt, hypothesim esse, quod triangulum habeat duos angulos æquales; conclusionem verò, quòd æqualia sint latera angulos illos subtendentia. Veruntamen, quum theoremata absolutè proposita sunt, tunc facile erit, ut in distinguenda hypothesi hæreant Tyrones. Sic quum ostendit Euclides, angulos ad basim trianguli isoscelis æquales esse inter se; nulli quoque non constat, hypothesim hujus theorematis esse, quòd triangulum sit isosceles. Sed in eo theoremate, in quo idem Euclides ostendit, angulos omnes cujuscumque trianguli simul esse duobus rectis æquales, quid pro hypothesi haberi debeat, non omnes peræquè percipiunt.

Jam omnis difficultas in distinguenda hypothesi theorematis absolutè propositi oritur ex eo, quod subjectum ejus non semper est complexum, hoc est duobus, aut pluribus terminis circumscriptum, sed quandoque incomplexum, ac unico tantùm termino definitum. Neque enim aliunde evenit, ut in theoremate proprietatem trianguli isoscelis ostendente, hypothesim quisque distinguat; quàm quia subjectum illius theorematis est triangulum isosceles, quod duobus terminis designatur; atque adeo nemo non videt posse idem theorema conditionali particula in hunc modum efferri: si triangulum sit isosceles,

les, erunt anguli ad basim æquales. Neque etiam alia de causa accidit, ut in altero theoremate, quod ostendit æqualitatem angulorum cujuscumque trianguli duobus rectis; non ita facile sit hypothesim discernere, quàm quia ejus subjectum est triangulum, quod unico tantum termino exprimitur, nec apparet, quo pacto tale theorema possit conditionaliter concipi.

Id quum ita sit, licebit in unoquoque theoremate hypothesim nullo negotio distinguere, si subjectum ex incomplexo fieri possit complexum. Fiet id autem, si loco termini, subjectum exprimentis, substituamus definitionem suam plures semper terminos involventem. Qua ratione in eo theoremate, in quo ostendit Euclides, omnes angulos cujuscumque trianguli simul duos rectos adæquare, cognoscetur hypothesis, si loco trianguli definitionem suam, hoc est figuram tribus lateribus contentam, subrogemus. Sic enim perspicuum est, subjectum theorematis evadere complexum, ipsumque adeo theorema posse conditionali particula in hunc modum concipi: si figura tribus lateribus sit contenta, erunt ejus anguli omnes simul duobus rectis æquales.

Theorema porro, vel est simplex, vel compositum. Simplex dicitur theorema, quum vel unica res in theoremate demonstratur, vel plures illæ, quæ ostenduntur, ex una eademque hypothesi descendunt. Sic simplex est, tum illud theorema; si trianguli duo anguli æquales fuerint, & latera angulos illos subtendentia pariter æqualia erunt; cum hoc aliud: si in duas rectas parallelas tertia incidat

dat recta linea, hæc efficiet, & angulos alternos æquales, & exteriorem æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem, & internos ad eamdem partem duobus rectis æquales. Nam in illo unicà tantum res demonstratur; in isto autem ostenduntur quidem res plures, sed omnes ex una eademque hypothesi deducuntur.

Vicissim autem vocatur theorema compositum, quum plura illa, quæ in eo ostenduntur, non descendunt ex una, eademque hypothesi; cujusmodi est illud; si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima, & secunda erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores tertia, & quarta. Patet namque, conclusionem illius theorematis tripartitam esse, ut quæ asserit secundam magnitudinem posse, vel quartam adæquare, vel eam excedere, vel ab illa deficere. Sed perspicuum est quoque, tres illas Conclusionis partes ex una, eademque hypothesi non fluere. Nam etsi in singulis partibus quatuor magnitudines semper proportionales supponantur; prima tamen magnitudo respectu tertiæ non semper ponitur in eodem statu manere, sed modò fingitur illam adæquare, modò eam excedere, modò demum ab illa deficere.

Sed simplex theorema subdividitur rursus in complexum, & incomplexum. Vocatur theorema incomplexum, quum unicam rem continet, tum ejus hypothesis, cum ejusdem conclusio; veluti est illud theorema, quod ostendit, duo latera cujuscumque trianguli simul reliquo majora esse, quomodocumque sumpta. Per contrarium verò vocatur complexum, quum vel sola hypothesis, vel sola

con-

conclusio, vel denique tàm hypothesis, quàm conclusio res plures involvit: adeo nempe ut theorema dicendum erit complexum, vel ratione solius hypothesis, vel ratione solius conclusionis, vel demum ratione tam hypothesis, quàm conclusionis.

Et ratione quidem solius hypothesis complexa sunt omnia illa theoremata, quæ ostendunt æqualitatem parallelogrammorum, & triangulorum, eamdem vel æquales bases habentium, & in iisdem parallelis positorum. Ratione autem solius conclusionis complexum est illud, quod ostendit æquales angulos tam supra, quàm infra basim isoscelium triangulorum. Ac denique ratione tam hypothesis, quàm conclusionis complexum est primum theorema horum Elementorum; si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulos sub æqualibus lateribus contentos pariter æquales; habebunt & basim basi æqualem, erit triangulum æquale triangulo, & erunt reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur.

Ulterius circa theoremata notare etiam oportet, quòd quum duo ex iis ejusmodi sunt, ut hypothesis unius sit conclusio alterius, & vicissim conclusio unius sit hypothesi alterius, tunc duo illa theoremata se mutuò convertere dicantur. Sic, quum ostenditur, in omni triangulo majus latus majorem angulum subtendere; hypothesis quidem est, quod unum trianguli latus sit altero majus; conclusio autem, quod majori lateri major quoque angulus

oppo-

opponatur. At verò, quum demonstratur, in omni triangulo majorem angulum majus latus subtendere; tunc hypothesis est, quod unus angulus trianguli sit altero major; conclusio autem, quod majori angulo majus quoque latus sit oppositum. Quocirca, quum duo ista theoremata talia sint, ut hypothesis unius sit conclusio alterius; & per contrarium conclusio unius sit hypothesis alterius; alterum alterius conversum appellabitur.

Sed præter istam conversionis speciem, in qua theoremata hypotheses, & conclusiones suas perfectè convertunt, alia quoque notari potest, in qua conclusio, quæ integra in hypothesim vertitur, aliquid retinet prioris hypothesis, & tantum id, quod relinquitur, conversi theorematis conclusio evadit. Id cernere licet in eo theoremate, in quo Euclides ostendit, triangula æqualia, & in eadem basi constituta, esse etiam in iisdem parallelis. Neque enim hoc theorema perfectè convertit illud, in quo idem Euclides ostenderat, æqualia esse triangula illa, quæ sunt in eadem basi, & in iisdem parallelis; sed adsciscens ejus conclusionem, quod triangula sint æqualia, retinet adhuc eam partem hypothesis, quod triangula habeant eamdem basem, tantumque infert partem alteram, quod eadem triangula debeant esse in iisdem parallelis.

Perspicuum est autem, hanc aliam conversionis speciem, quam imperfectam licebit appellare, non posse locum habere, nisi theorema saltem ratione hypothesis sit com-

ple-

plexum. Sed manifestum est quoque, quod quum sic theoremata convertuntur, possint unius ejusdemque theorematis plures esse conversiones. Sic theorema, quod perpendicularis ex extremitate diametri ducta circulum contingat, non modò convertitur per illud, quod diameter, ducta ad punctum contactus, sit perpendicularis ad tangentem, verum etiam per hoc aliud, quod perpendicularis, erecta ad contingentem ex puncto contactus, sit circuli diameter.

Problemata quoque suas conversiones patiuntur; quod quidem contingit, quotiescunque datum alicujus problematis mutatur in quæsitum, & vicissim quæsitum mutatur in datum. Hujusmodi sunt duo illa problemata, in quorum altero describenda est in data recta linea circuli portio, quæ suscipiat angulum, æqualem angulo dato; in altero abscindenda ex dato circulo portio, quæ angulum, dato angulo æqualem, assumat. In illo enim quæritur circulus, in quo si data recta ponatur, abscindat ex eo portionem, quæ suscipiat angulum, æqualem angulo dato. In isto autem quæritur per contrarium recta, quæ posita in dato circulo, abscindat ex eo portionem, quæ dati anguli sit capax.

Tam constructiones problematum, quàm theorematum conclusiones ex principiis antea positis per suas demonstrationes Geometræ deducunt. Est autem demonstratio duplicis speciei, una quidem directa, seu positiva, altera indirecta, seu negativa. Vocatur demonstratio directa, seu positiva, quum quid ostenditur per ipsa rei principia, hoc

est

est quum inter demonstrandum tales adhibentur propositiones, ut ex iis directè fluat id, quod opportet ostendere. Vocatur verò demonstratio indirecta, seu negativa, aut etiam per impossibile, quum demonstratur per aliquod inde subsequuturum absurdum, si res aliter sese haberet.

Utraque demonstrationis species in his Geometriæ planæ Elementis adhibetur: Sic, quum ostendimus: isoscelium triangulorum angulos tum supra, cum infra basim æquales esse inter se, demonstratione utimur directa, ac positiva; quandoquidem ex iis triangulorum comparationibus, quas inter demonstrandum instituimus, proprietatem illam isoscelium triangulorum directè deducimus. At ubi per contrarium ostendimus, quod si trianguli duo anguli æquales fuerint inter se, & latera angulos illos subtendentia pariter æqualia sint, demonstrationem adhibemus indirectam, ac negativam; quum ostendamus, fore totum suæ parti æquale, si utique latera non essent æqualia.

Innititur autem demonstratio indirecta, ac negativa huic quidem principio, quod etsi ex hypothesi falsa possit quandoque colligi verum, ex hypothesi tamen vera nunquam falsum possit inferri. Hinc enim fit, ut semper ac quidpiam supponitur, & ex ea suppositione absurdum aliquod infertur, ipsam illam suppositionem falsam esse dicendum sit. Non posse autem ex hypothesi vera unquam falsum inferri, nemo non videt. Neque enim aliter esse possunt vitiosæ demonstrationes, hoc est consequentium ex antecedentibus deductiones, quàm quia, vel antecedentia seorsim considerata vera non sunt, vel consequentia non sunt legitimè ex antecedentibus deducta. Quocirca semper ac ex aliqua hypothesi legitimè quidpiam deducitur; hoc quod infertur, non alia ratione falsum esse poterit, quàm si ipsa hypothesis sit falsa.

GEOMETRIÆ PLANÆ ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

I.

Punctum est id, cujus nulla est pars, seu quod magnitudinem nullam habet. *Vel clariùs, est signum in extensione, seu quantitate continua, quod concipitur expers longitudinis, latitudinis, & profunditatis.*

II.

Linea verò est longitudo latitudinis expers. *Sive etiam, est quantitas, quæ longitudinem, seu unam tantùm dimensionem habere concipitur. Unde ex fluxu puncti vulgò dicitur oriri.*

III.

Lineæ fines sunt puncta. *Nam non modò latitudine, & profunditate, ad instar ipsius lineæ, verùm etiam longitudine carent. Unde punctum definiri quoque potest, terminus lineæ.*

IV.

Superficies autem est id, quod longitudinem, & latitudinem tantùm habet. *Sive* *etiam est quantitas, quæ duas tantùm dimensiones, longitudinem, & latitudinem, habere concipitur. Unde ex motu lineæ laterali vulgò ... itur oriri.*

V.

Superficiei verò fines sunt lineæ. *Nam longitudinem, seu unicam tantùm dimensionem habentes, tum latitudine, cum profunditate carent. Unde linea definiri quoque potest, terminus superficiei.*

Cæterùm quantitas, in qua omnes tres dimensiones considerantur, corpus, seu solidum appellatur; & generari intelligitur ex motu superficiei vel in altum, vel in profundum. Quumque quantitas ista superficiebus terminetur; fit hinc, ut definiri quoque possit superficies, terminus corporis.

Linea duplex est, una recta, & altera curva.

VI.

Linea recta est, quæ ex æquali suis interficitur punctis. *Hoc est, quæ ex æquo jacet inter sua extrema, ita ut ad neutram partem annuat. Unde linea curva erit illa, quæ inter sua puncta, seu extrema, ex æquo non jacet.*

Linea recta definiri quoque potest cum Archimede, quod sit brevissima omnium linearum, quæ duci possunt à puncto ad punctum. Atque hac ratione, quæ earum linearum brevissima non est, linea curva dicetur.

Similiter superficies duplex est, una plana, seu recta, & altera curva.

VII.

Superficies plana est, quæ ex æquali suis interjicitur lineis. *Hoc est, quæ ex æquo jacet inter sua extrema, ita ut nec sursùm ascendat, nec descendat deorsum. Unde superficies cur-*

curva erit illa, quæ inter suas lineas ex æquo non jacet.

Superficies plana definiri quoque potest cum Herone, quod sit illa, cui omni ex parte potest aptari recta linea. Atque hac ratione ea, cui non omni ex parte aptari potest recta linea, superficies curva dicetur.

Angulus planus est duarum linearum in plano [*hoc est in superficie plana*] se mutuò tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio. *Unde ejus quantitas, seu magnitudo, non in longitudine, sed inclinatione linearum consistit.*

Dividitur angulus ratione linearum, quæ ipsum continent, in rectilineum, curvilineum, & mixtilineum.

IX.

Quando lineæ, quæ angulum continent, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus dicetur. *Quum verò fuerint curvæ, dicetur curvilineus. Et denique, quum sub una recta, & altera curva continetur, mixtilineus appellabitur.*

Angulus rectilineus ratione inclinationis dividitur in rectum, acutum, & obtusum.

X.

Quum recta linea super aliam insistens rectam lineam efficit angulos deinceps [*hoc est hinc inde existentes*] æquales; rectus erit uterque æqualium angulorum; & linea insistens dicetur perpendicularis ad eam, cui insistit. *Unde definiri potest angulus rectus, quod sit ille, cui, uno latere producto, alter æqualis ex parte altera oritur.*

XI.

Angulus acutus est recto minor. *Sive*

etiam, cui, si unum latus produxeris, alter oritur ex parte altera major.

XII.

Angulus obtusus est recto major. *Sive etiam, cui, uno latere producto, alter nascitur ex parte altera minor.*

XIII.

Terminus est, quod alicujus est extremum. *Sic punctum est terminus lineæ; linea est terminus superficiei; superficies verò est terminus corporis.*

XIV.

Figura est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur. *Sive clariùs, est superficies uno, vel pluribus terminis comprehensa.*

XV.

Circulus est figura plana unius lineæ circuitu comprehensa, quæ circumferentia dicitur, ad quam omnes ab uno punctorum intra figuram existentium cadentes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

XVI.

Hoc verò punctum centrum circuli dicitur. *Unde circuli proprietas hæc est, ut æquales sint omnes rectæ lineæ, quæ ducuntur à centro ad circumferentiam.*

Circulus generari intelligitur ex revolutione rectæ lineæ circa unum ejus extremum fixum, & immobile, usque donec redeat ad eum locum, unde cæperat moveri.

Cujuscumque circuli circumferentia dividitur in tercentum sexaginta partes æquales, quæ gradus dicuntur. Unusquisque gradus in sexaginta minuta prima. Unumquodque minutum primum in sexaginta minuta secunda. Atque ita deinceps.

XVII.

XVII.

Diameter circuli est recta linea, quæ ducta per centrum, utrimque ad circumferentiam terminatur. *Dicitur autem diameter, quia transit per medium circuli, eumque secat in duas partes æquales. Hinc.*

XVIII.

Semicirculus est figura plana contenta sub diametro, & dimidia circuli circumferentia.

XIX.

Portio, seu segmentum circuli est figura plana contenta sub qualibet alia recta linea, intra circulum ducta, & portione circumferentiæ, per eam abscissa.

Generaliter autem figuræ omnes ratione linearum, quibus continentur, dividuntur in rectilineas, curvilineas, & mixtilineas.

XX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur. *Qua ratione curvilineæ erunt, quæ comprehenduntur sub lineis curvis. Mixtilineæ verò, quæ rectis, & curvis clauduntur.*

Insuper rectilineæ figuræ pro numero laterum, quibus continentur, dividuntur in trilateras, quadrilateras, & multilateras.

XXI.

Trilateræ sunt, quæ sub tribus lateribus continentur; *quæque, quum tres angulos pariter contineant, dici possunt quoque triangula.*

XXII.

Quadrilateræ verò, quæ quatuor lateribus clauduntur; *quæque dici possunt etiam quadrangula, quia quatuor angulis sunt refertæ.*

XXIII.

Ac denique multilateræ, quæ sub pluribus, quàm quatuor, lateribus comprehenduntur; *quæque dici possunt quoque multangula, quia plures, quàm quatuor, angulos habent.*

Triangulum porrò considerari potest vel quo ad latera, vel quo ad angulos. Ratione laterum dividitur in æquilaterum, isosceles, & scalenum

XXIV.

Triangulum æquilaterum est illud, cujus omnia latera sunt æqualia.

XXV.

Triangulum isosceles, seu æquicrure, cujus duo tantum latera sunt æqualia.

XXVI.

Ac denique triangulum scalenum, quod omnia latera inæqualia habet.

Ratione autem angulorum dividitur triangulum in rectangulum, obtusangulum, & acutangulum.

XXVII.

Triangulum rectangulum, seu orthogonium, est illud, quod habet unum angulum rectum.

XXVIII.

Triangulum obtusangulum, seu ambligonium, quod habet unum angulum obtusum.

XXIX.

Ac denique triangulnm acutangulum, seu oxygonium, cujus omnes anguli sunt acuti.

Quantum ad figuras quadrilateras, eæ multiplicis etiam speciei sunt, quas sequenti ordine recenset Euclides.

XXX.

Quadratum eſt figura quadrilatera, rectangula ſimul, & æquilatera. *Hoc eſt, quæ latera omnia æqualia habet, & omnes angulos rectos.*

XXXI.

Quæ autem rectangula quidem eſt, ſed non æquilatera, [*hoc eſt angulos habet rectos, ſed non latera æqualia*] figura altera parte longior appellatur.

XXXII.

Rhombus porro eſt figura æquilatera, ſed non rectangula. *Hoc eſt habet latera omnia æqualia, ſed non item angulos rectos.*

XXXIII.

Quæ verò nec æquilatera eſt, nec rectangula, ſed tantùm habet latera oppoſita æqualia, Rhomboides appellatur.

XXXIV.

Omnis autem alia figura quadrilatera, quæ ad quatuor ſpecies recenſitas non refertur, Trapetium dicitur.

XXXV.

Parallelæ, ſeu æquidiſtantes rectæ lineæ ſunt, quæ in eodem plano exiſtentes, & in infinitum utrimque productæ, in neutram partem conveniunt.

Hec definitio parallelarum, ubi lineæ ſunt rectæ, nullo vitio laborat; ſecus verò, ſi ad omnes lineas ſit extendenda, quia dantur quamplures lineæ, quæ exiſtentes in eodem plano, accedunt ſemper ad ſe mutuò, nec umquam conveniunt.

XXXVI.

Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera ſunt parallela. *Ejus autem ſpecies ſunt quadratum, figura* *altera parte longior, rhombus, & rhomboides.*

Hinc figurarum quadrilaterarum duo sunt summa genera, parallelogrammum & trapetium. Nam vel habent latera opposita parallela, & dicuntur parallelogramma; vel non habent, & trapetia appellantur.

Parallelogrammi porro vel omnia latera sunt æqualia, vel tantùm opposita. Si primum; vel est rectangulum, & dicitur quadratum; vel non est rectangulum, & vocatur rhombus. Si secundum; similiter vel ejus anguli omnes sunt recti, & dicitur figura altera parte longior; vel non sunt recti, & rhomboides appellatur.

POSTULATA.

I.

APuncto ad punctum rectam lineam ducere. *Perficitur in praxi hoc postulatum ope regulæ, una sui parte iis punctis applicanda.*

II.

Rectam lineam terminatam in directum, & continuum protendere. *Quod ope ejusdem regulæ, una sui parte ad datam rectam lineam applicatæ, in praxi peragitur.*

III.

Quovis centro, & quovis intervallo circulum describere. *Quod perficitur in praxi ope circini, cujus pes alter ponitur in centro, alter in extremo altero dati intervalli, & fixo illo manente, iste in gyrum agitur.*

AXIOMATA.

I.

QUæ eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia. Et quod uno æqualium majus

jus est, aut minus, erit etiam majus, aut minus altero æqualium.

II.

Si æqualibus æqualia addas, quæ fiunt sunt æqualia.

III.

Si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanent sunt æqualia.

IV.

Si inæqualibus æqualia addas, quæ fiunt sunt etiam inæqualia.

V.

Si ab inæqualibus æqualia demas, quæ remanent sunt adhuc inæqualia.

VI.

Quæ ejusdem sunt dupla, tripla, aut quadrupla, inter se sunt æqualia.

VII.

Quæ ejusdem sunt dimidia, tertia, aut quarta pars, inter se sunt æqualia.

VIII.

Totum sua parte majus est; *omnibus autem suis partibus simul sumptis est æquale.*

IX.

Quæ congruunt, sunt æqualia. *Congruere autem dicuntur, quorum unum alteri superimpositum, nec illud excedit, nec ab eo deficit.*

X.

Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt. *Unde figura rectilinea omnium simplicissima triangulum est.*

XI.

Duæ lineæ non habent segmentum commune, sed unico puncto se secant. *Hoc est, ubi duarum linearum fit intersectio, ibi li-*

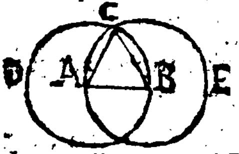
neæ ipsæ nihil habent commune, præter punctum.

XII.

Omnes anguli recti sunt æquales; *quia nempe anguli magnitudo consistit non in longitudine, sed in inclinatione linearum, quæ est eadem in omnibus angulis rectis.*

PROP. I. PROBL. I.

In data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.



Sit data recta linea terminata AB. Oportet, in ipsa triangulum æquilaterum constituere.

Centro quidem A, intervallo autem AB describatur [1] circulus BCD. Rursus centro quidem B, intervallo autem BA describatur alter circulus ACE. Tum ex puncto C, in quo se secant circumferentiæ horum circulorum, ad puncta A, & B ducantur [2] rectæ CA, CB. Dico, triangulum ACB æquilaterum esse.

Quoniam enim A centrum est circuli BCD, erit [3] AB æquali AC. Et similiter, quoniam B centrum est circuli ACE, erit BA æqualis BC. Eidem itaque AB est æqualis, tum AC, cùm BC. Quare & AC ipsi BC [4] æqualis erit; atque adeò triangulum ACB [5] æquilaterum erit.

In

(1) *Post.* 3. (2) *Post.* 1. (3) *Def.* 15.
(4) *Axi.* 1. (5) *Def.* 24.

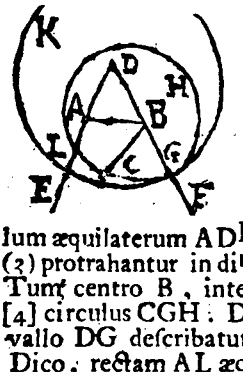
In data igitur recta linea terminata AB descriptum est triangulum æquilaterum ACB. Quod fecisse oportebat.

SCHOLIUM.

Non dissimili ratione in data recta terminata AB fiet triangulum isosceles, seu æquicrure: nempe si intervalla æqualium circulorum sumantur vel æquè majora, vel æquè minora, quàm AB.

PROP. II. PROBL. II.

Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.



Datum sit punctum A, data verò recta BC. Oportet, ad datum punctum A ponere rectam lineam æqualem ipsi BC.

Ab A ad B ducatur (1) AB, super qua constituatur [2] triangulum æquilaterum ADB; cujus latera DA, DB (3) protrahantur in directum versus E, & F. Tum centro B, intervallo BC describatur, [4] circulus CGH. Denique centro D, intervallo DG describatur alter circulus GLK, Dico, rectam AL æqualem esse ipsi BC.

Quoniam enim D centrum est circuli GLK erit

(1) *Post.1.* [2] *Prop.1.*
(3) *Post.2.* (4) *Post.3.*

erit (1) DG æqualis DL. Sed, ob triangulum æquilaterum ADB, est etiam DB æqualis DA. Itaque si ex DG auferatur DB, & ex DL auferatur DA remanebit [2] BG æqualis AL: Est autem B centrum circuli CGH; adeòque (3) BG æqualis est ipsi BC. Quare & AL [4] eidem BC æqualis erit.

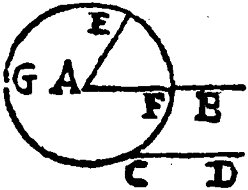
Ad datum igitur punctum A posita est recta AL æqualis datæ BC. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Nonnulli problemati huic satisfieri posse sibi persuadent, si per postulatum tertium centro A, intervallo datæ rectæ BC circulus describatur. Sed perperam; quia tunc demum quovis centro, & quovis intervallo circulum describere licet, quum centrum est in una extremitate intervalli.

PROP. III. PROBL. III.

Datis duabus rectis lineis inæqualibus, de majore minori partem æqualem abscindere.



Datæ sint duæ rectæ inæquales, AB quidem major, CD verò minor. Oportet, ex majore AB abscindere portionem æqualem minori CD.

Po-

(1) *Def.* 15. (2) *Axi.* 3.
(3) *Def.* 15. [4] *Axi.* 1.

Ponatur (1) ad punctum A recta AE æqualis ipsi CD. Tum centro A, intervallo AE describatur circulus (2) EFG. Dico, portionem abscissam AF æqualem esse ipsi CD.

Quoniam enim A centrum est circuli EFG, erit (3) AE æqualis ipsi AF. Est autem ex constructione AE æqualis CD. Quare & AF, ipsi CD (4) æqualis erit.

Ex majore itaque AB abscissa est portio AF æqualis minori CD. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Hoc etiam problema resolvi posse nonnullis visum est, si per tertium postulatum centro A, intervallo rectæ minoris CD statim circulus describatur. Sed falluntur ob eamdem rationem, quam paulò superiùs indicavimus.

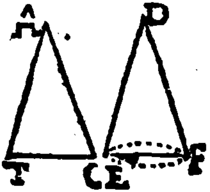
PROP. IV. THEOR. I.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, & angulos sub iis lateribus contentos æquales; habebunt & basim basi æqualem, erit triangulum æquale triangulo, & erunt reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF, quæ habeant duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE, DF, alterum alteri: nempe latus

tus

(1) *Prop.2.* (2) *Post.3.*
[3] *Def.15.* (4) *Axi.1.*



tus AB æquale lateri DE, & latus AC æquale lateri DF. Habeant quoque æquales angulos BAC, EDF, sub iis lateribus contentos. Dico, fore basim BC æqualem basi EF, triangulum ABC æquale triangulo DEF, angulum CBA æqualem angulo FED, & angulum BCA æqualem angulo EFD.

Concipiatur etenim triangulum ABC mente superimpositum triangulo DEF hac lege, ut punctum A incidat in punctum D, latus autem AB in latus DE. Et quoniam æquales ponuntur anguli BAC, EDF, incidet quoque latus AC in latus DF. Quumque ex hypothesi latera AB, AC æqualia sint lateribus DE, DF, alterum alteri; incidet etiam & punctum B in punctum E, & punctum C in punctum F. Quare & basis BC incidet in basim EF; quia aliter duæ rectæ lineæ clauderent spatium, quod planè (1) repugnat. Quum igitur congruant inter se tum bases, tum triangula, tum reliqui anguli; consequens est, ut (2) basis BC æqualis sit basi EF, triangulum ABC æquale triangulo DEF, angulus CBA æqualis angulo FED, & angulus BCA æqualis angulo EFD. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Sedulò autem notetur hoc loco velim, ex reliquis triangulorum angulis eos quidem inter se æqua-

[1] *Axi.*10. [2] *Axi.*9.

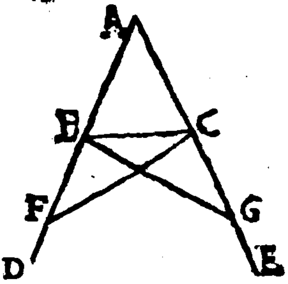
æquales fieri, quibus æqualia latera subtenduntur. Sic æquales ostensi sunt anguli CBA, FED, quibus opponuntur latera æqualia AC, DF; pariterque æquales anguli BCA, EFD, qui habent sibi ipsis opposita latera æqualia AB, DE. Hinc verò liquet, quod si triancula ABC, DEF fuerint isoscelia, ita ut quatuor latera ipsorum AB, AC, DE, DF æqualia sint inter se; tunc quia latus AC est æquale tum DF, cum DE, erit angulus CBA æqualis tam angulo FED, quàm angulo EFD; pariterque, quia latus AB æquale est tum DE, cùm DF, erit angulus BCA æqualis tam angulo EFD, quàm angulo EFD. Unde jam liquet veritas primæ partis theorematis subsequentis: nempe, quod isoscelium triangulorum anguli, qui supra basim sunt, inter se sint æquales. Nam *semper ac eidem angulo CBA æqualis est tam angulus FED, quàm angulus EFD, per axioma primum æquales erunt inter se duo anguli FED, EFD, qui sunt supra basim trianguli isoscelis DEF.*

PROP. V. THEOR. II.

Isoscelium triangulorum anguli ad basim inter se sunt æquales, & productis æqualibus lateribus, anguli infra basim etiam inter se æquales erunt.

SIt triangulum isosceles ABC, habens latus AB æquale lateri AC, & producantur (1) latera æqualia AB, AC in directum versus D, & E. Dico æquales esse inter se, tam angulos

[1] *Post.2.*



gulos supra basim ABC, ACB, quàm angulos infra basim CBD, BCE.

Sumatur in BD quodvis punctum F, tum ex majore AE abscindatur (1) portio AG æqualis minori AF, junganturque [2] BG CF.

Et quoniam ex hypothesi latus AB est æquale lateri AC, ex constructione autem latus AG æquatur lateri AF; erunt duo latera AB, AG trianguli BAG æqualia duobus lateribus AC, AF trianguli CAF, alterum alteri. Est verò angulus BAG, contentus sub lateribus illius, æqualis angulo CAF, contento sub lateribus istius; quum sit unus idemque angulus A. Quare erit [3] basis BG æqualis basi CF, angulus ABG æqualis angulo ACF, & angulus BGA æqualis angulo CFA.

Et quoniam tota AF est æqualis toti AG, pars verò AB æqualis parti AC; erit etiam [4) reliqua BF æqualis reliquæ CG. Ostensa est autem CF æqualis BG. Itaque duo latera BF, CF trianguli BFC æqualia erunt duobus lateribus CG, BG trianguli CGB, alterum alteri. Est verò ex ostensis angulus BFC, contentus sub lateribus illius, æqualis angulo CGB, contento sub lateribus istius. Quare erit [5] angulus FBC æqualis angulo GCB, (qui

[1] *Prop.3.* [2] *Post.1.* [3] *Prop.4.*
[4] *Axi.3.* [5] *Prop.4.*

(qui quidem anguli sunt infra basim trianguli isoscelis,) & angulus FCB æqualis angulo GBC.

Quum igitur angulus ABG ostensus sit æqualis angulo ACF, & angulus GBC æqualis angulo FCB; fit hinc, ut si ex angulo ABG auferatur angulus GBC, & ex angulo ACF auferatur angulus FCB, reliqui anguli ABC, ACB etiam inter se (1) sint æquales. Hi autem sunt supra basim trianguli isoscelis ABC; qui verò sunt infra basim. jam ostensi sunt æquales. Quare isoscelium triangulorum tam anguli supra basim, quàm anguli infra basim inter se æquales sunt. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

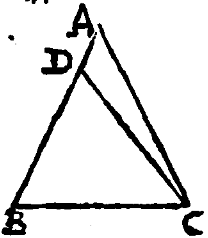
Hinc patet, triangulum æquilaterum esse etiam æquiangulum, hoc est non modò latera omnia æqualia habere, verùm etiam angulos omnes. Nam triangulum æquilaterum, nihil obstat, quominùs velut isosceles consideretur: quod utique si fiat, quodlibet ejus latus velut basis sumi poterit.

PROP. VI. THEOR. III.

Si trianguli duo anguli æquales fuerint, & latera eos angulos subtendentia pariter æqualia erunt.

SIt triangulum ABC, in quo angulus CBA æqualis sit angulo BCA. Dico latera AB, AC

(1) *Axi.3.*



AC angulos illos ſubtendentia etiam æqualia eſſe.

Si enim non ſint æqualia, alterum ipſorum majus erit. Sit itaque majus AB, ex quo abſcindatur [1] portio BD æquali minori AC, & jungatur [2] CD.

Quoniam igitur BD eſt æqualis AC, BC verò communis; erunt duo latera BD, BC trianguli DBC æqualia duobus lateribus AC, BC trianguli ACB, alterum alteri. Eſt autem ex hypotheſi angulus DBC, contentus ſub lateribus illius, æqualis angulo ACB, contento ſub lateribus iſtius. Quare (3) triangulum DBC triangulo ACB æquale erit, hoc eſt pars æqualis toti, quod fieri (4) nequit.

Non itaque latus AB majus eſt latere AC. Sed ob eamdem rationem nec minus eſſe poteſt. Quare ei æquale erit: & propterea ſi trianguli duo anguli æquales fuerint, & latera eos angulos ſubtendentia pariter æqualia erunt. Quod demonſtrare oportebat.

COROLLARIUM.

Ex quo patet, triangulum æquiangulum eſſe etiam æquilaterum, hoc eſt non modò angulos omnes, ſed & latera omnia inter ſe æqualia habere.

SCHO-

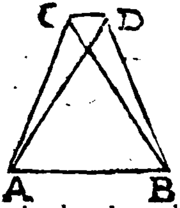
(1) *Prop.3.* (2) *Poſt.1.*
(3) *Prop.4.* [4] *Axi.8.*

SCHOLIUM.

Cæterum hoc theorema convertit primam partem theorematis præcedentis. Nam quemadmodum ibi ex æqualitate laterum deducta est æqualitas angulorum; sic per contrarium in theoremate isto ex æqualitate angulorum ostensa est æqualitas laterum.

PROP. VII. THEOR. IV.

Ad eamdem rectam lineam duabus eisdem rectis lineis non constituentur aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad eamdem partem, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.



Sit recta linea AB, ex cujus extremis A, & B ducantur duæ rectæ lineæ AC; BC, quæ conveniant in puncto C. Dico, ex iisdem extremis non posse duci alias duas rectas lineas ipsis AC, BC æquales, alteram alteri, ad eamdem partem, nisi conveniant in eodem puncto C.

Si enim fieri potest, ducatur AD æqualis AC, & BD æqualis BC, quæ conveniant in puncto D alio, quàm C; & jungatur (1) CD.

Quia igitur ex hypothesi AC est æqualis AD, isosceles erit triangulum CAD; proindeque angulus ACD (2) æqualis erit angulo ADC.

(1) *Post.1.* (2) *Prop.5.*

ADC. Jam verò angulus BDC major est angulo ADC. Quare idem angulus BDC erit etiam (1) major angulo ACD, & consequenter multò major angulo BCD.

Et quoniam ex hypothesi BC est æqualis BD, isosceles erit quoque triangulum CBD; adeòque angulus BDC æqualis erit (2) angulo BCD. Ostensus est autem major. Itaque idem angulus BDC erit simul major, & æqualis angulo BCD, quod fieri nequit.

Ad eamdem igitur rectam lineam duabus eisdem rectis non constituentur aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad eamdem partem, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

Hoc theorema est lemma theorematis sequentis: nam ei ostendendo unicè inservit, & de cætero alium usum non habet in his Elementis.

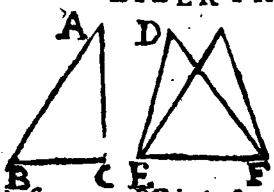
PROP. VIII. THEOR. V.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & basim basi æqualem; & angulos sub æqualibus lateribus contentos pariter æquales habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quæ habeant duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE, DF, alterum alteri, & basim BC æqualem basi EF. Dico, angulum BAC æqualem esse angulo EDF.

Con

(1) *Axi.1.* (2) *Prop.5.*



Concipiatur etenim triangulum ABC mente superimpositum triangulo DEF hac lege, ut punctum B incidat in punctum E, basis autem BC in basim EF. Et quoniam ex hypothesi æquales sunt bases BC, EF, incidet etiam punctum C in punctum F. Quumque latera AB, AC posita sint æqualia lateribus DE, DF, alterum alteri; necesse est, ut incidat quoque punctum A in punctum D; quia aliter in eadem recta linea EF duabus iisdem rectis lineis DE, DF constituerentur duæ aliæ æquales, altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad eamdem partem, eosdem, quos primæ, terminos habentes: quod fieri (1) nequit.

Quum igitur puncta A, B, C incidant in puncta D, E, F, incident etiam latera AB, AC in latera DE, DF; atque adeo angulus BAC in angulum EDF. Unde quum congruant inter se duo isti anguli, erunt iidem inter se (2) æquales: & propterea, si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & basim basi æqualem; & angulos sub æqualibus lateribus contentos pariter æquales habebunt. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

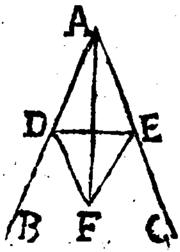
Hoc theorema priorem tantum partem convertit propositionis quartæ. In utroque enim

(1) *Prop.* 7. (2) *Axi.* 9.

enim Theoremate supponitur, quod duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri. Sed ibi ex æqualitate angulorum sub æqualibus lateribus contentorum ostensa est æqualitas basium; hic verò per contrarium ex æqualitate basium deducta est prædictorum angulorum æqualitas.

PROP. IX. PROBL. IV.

Datum angulum rectilineum bifariam dividere.



Esto angulus rectilineus BAC. Oportet, éum bifariam dividere.

Sumatur in AB quodvis punctum D. Tum ex majore AC abscindatur (1) portio AE æqualis minori AD. Jungatur porrò (2) DE, super qua constituatur (3) triangulum æquilaterum DEF. Denique ab A ad F ducatur (4) recta AF. Dico, rectam AF dividere angulum BAC bifariam.

Quoniam enim ex constructione AD est æqualis AE, communis autem AF; erunt duo latera AD, AF trianguli DAF æqualia duobus lateribus AE, AF trianguli EAF. Jam verò æquales etiam sunt bases eorumdem triangulorum DF, EF, utpote latera trianguli æquilateri DEF. Quare erit (5) angulus DAF æqua-

(1) *Prop.*3. (2) *Post.*1. (3) *Prop.*1.
(4) *Post.*1. (5) *Prop.*8.

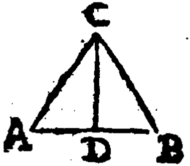
æqualis angulo EAF. Et propterea angulus BAC bifariam sectus est per rectam AF. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Ex ipsa hujus problematis demonstratione patet, super recta DE non alia ratione constituendum esse triangulum æquilaterum, quàm ut triangulorum DAF, EAF æquales oriantur bases DF, EF. Unde perinde res erit, si loco trianguli æquilateri constituatur super eadem recta DE per scholium propositionis primæ triangulum isosceles.

PROP. X. PROBL. V.

Datam rectam lineam terminatam bifariam dividere.



Sit data recta linea terminata AB. Oportet, eam dividere bifariam.

Constituatur super AB (1) triangulum æquilaterum ACB. Tum angulus ejus ACB secetur (2) bifariam per rectam CD. Dico, rectam CD dividere quoque ipsam AB bifariam in puncto D.

Quoniam enim ex constructione triangulum ACB est æquilaterum, erit latus CA æquale lateri CB. Est autem CD commune. Quare duo latera CA, CD trianguli ACD

C æqua-

(1) *Prop.1.* (2) *Prop.9.*

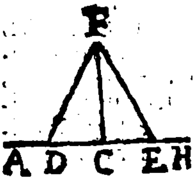
æqualia erunt duobus lateribus CB, CD trianguli BCD, alterum alteri. Jam verò ex constructione angulus ACD, contentus sub lateribus illius, æqualis est angulo BCD, qui sub istius lateribus continetur. Itaque erit (1) basis AD æqualis basi BD. Et propterea recta AB secta est bifariam in D. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Hic quoque perspicuum est, non alia ratione constitui super AB triangulum æquilaterum ACB, quàm ut latus CA æquale fiat lateri CB, Unde quod præstat triangulum æquilaterum, poterit etiam per triangulum isosceles obtineri.

PROP. XI. PROBL. VI.

Ex puncto in recta linea dato perpendicularem rectam lineam excitare.



Data sit recta AB, & datum in ea punctum C. Oportet, ex puncto isto C erigere perpendicularem super AB.

Sumatur in CA quodvis punctum D. Tum ex majore CB abscindatur portio CE æqualis (2) minori CD. Porro super DE constituatur (3) triangulum æquilaterum

(1) *Prop.* 4. (2) *Prop.* 3.
(3) *Prop.* 1.

rum DFE. Ac demum a C ad F ducatur (1) recta CF. Dico, rectam CF perpendicularem esse super AB.

Quoniam enim ex constructione recta CD æqualis est rectæ CE, communis autem CF; erunt duo latera CD, CF trianguli DCF æqualia duobus lateribus CE, CF trianguli ECF; alterum alteri. Jam verò æquales sunt etiam inter se eorumdem triangulorum bases DF, EF, utpote latera trianguli æquilateri DEF. Quare angulus DCF, contentus sub lateribus illius, [2] æqualis erit angulo ECF, qui sub istius lateribus continetur. Unde, quum recta CF subinde incidat super AB, ut efficiat angulos deinceps æquales, ea perpendicularis erit (3) ad AB. Et propterea ex puncto C erecta est super AB perpendicularis CF. Quod erat faciendum.

S C H O L I U M.

In hujus etiam problematis constructione præstat observare, triangulum æquilaterum DFE non alia ratione constitui super recta DE, quàm ut triangulorum DCF, ECF æquales oriantur bases DF, EF. Unde perinde res erit, si loco trianguli æquilateri describatur super eadem recta DE triangulum isosceles.

PROP. XII. PROBL. VII.

Super rectam infinitam ex puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam demittere.

DAta sit recta infinita AB, & datum extra eam punctum C. Oportet, ex puncto

(1) *Post.* 1. (2) *Prop.* 8. [3] *Def.* 10.

isto C perpendicularem demittere super AB.

Respectu puncti C ad alteram partem ipsius AB capiatur punctum aliquod G. Tum centro C, intervallo CG describatur [1] circulus GEF, qui secabit rectam AB in punctis E, & F. Secetur porro recta EF [2] bifariam in H. Ac demum jungatur [3] CH. Dico, rectam CH perpendicularem esse super AB.

Nam ductis rectis CE, CF, quia ex constructione EH est æqualis FH communis verò CH; erunt duo latera EH, CH trianguli CHE æqualia duobus lateribus FH, CH trianguli CHF, alterum alteri. Sunt autem æquales etiam inter se eorumdem triangulorum bases CE, CF, utpote lineæ ductæ à centro ad circumferentiam. Quare æquales quoque erunt (4) anguli CHE, CHF. Unde, quum recta CH subinde incidat super AB, ut angulos deinceps efficiat æquales; ea erit perpendicularis AB. Et propterea ex puncto C, dato extra rectam infinitam AB, demissa est recta CH perpendicularis ad ipsam AB. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

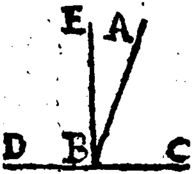
Appositè autem dicitur super rectam infinitam AB; quia si sit finita, fieri potest, ut pro-

(1) *Post.*3. (2) *Prop.*10.
(3) *Post.*1. (4) *Prop.*8.

producta transeat per datum punctum C: *quo casu nulla perpendicularis exinde demitti potest super AB, quia punctum datum in ipsa producta reperitur.*

PROP. XIII. THEOR. VI.

Recta linea insistens super aliam rectam lineam efficit angulos deinceps, vel rectos, vel duobus rectis æquales.



Recta AB insistat super rectam CD. Dico, angulos deinceps ABC, ABD vel esse rectos, vel simul sumptos duobus rectis æquales.

Nam, vel anguli deinceps ABC, ABD sunt æquales, & rectus erit (1) uterque eorum angulorum; vel non sunt æquales, & erigatur ex puncto B recta BE (2) perpendicularis ad CD, ita ut anguli deinceps EBC, EBD sint recti.

Quoniam itaque angulus EBC æqualis est duobus angulis EBA, ABC simul sumptis; apposito comuni EBD, erunt (3) duo anguli EBC, EBD æquales tribus angulis ABC, EBA, EBD. Jam verò duo anguli EBA, EBD æquales sunt simul angulo ABD; adeoque apposito communi ABC, fiunt tres anguli ABC, EBA, EBD æquales [4) duobus angulis ABC, ABD. Quare erunt duo anguli ABC, ABD [5] æquales duobus angulis

C 3 EBC

[1] *Def.* 10. [2] *Prop.* 11.
[3] *Axi.* 2. [4] *Axi.* 2. (5) *Axi.* 1.

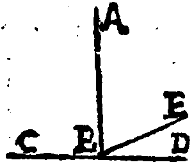
EBC, EBD. Unde, quum uterque istorum sit rectus, erunt illi simul duobus rectis æquales. Et propterea recta linea, insistens super aliam rectam lineam, efficiet angulos deinceps, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Quod erat ostendendum.

S C H O L I U M.

Alternativa est ista propositio, ob duplicem modum, quo recta AB insistere potest super aliam CD. Vel enim insistit perpendiculariter, & tunc efficiet angulos deinceps ABC, ABD æquales, adeoque rectos. Vel insistit obliquè, & tunc unum ex iis angulis efficiet acutum, alterum obtusum. Verum, quia erecta perpendiculari BE, quantum angulus acutus ABC deficit à recto EBC, tantumdem obtusus ABD excedit rectum alium EBD; fit hinc, ut duo anguli deinceps ABC, ABD, etsi unus acutus, alter obtusus, simul tamen æquivaleant duobus rectis EBC, EBD.

PROP. XIV. THEOR. VII.

Si è puncto unius rectæ lineæ ducantur ad partes oppositas duæ aliæ rectæ lineæ, quæ constituant cum illa angulos deinceps duobus rectis æquales, in directum erunt duæ illæ rectæ lineæ.



Sit recta aliqua AB, ex cujus puncto B ducantur ad partes oppositas aliæ duæ rectæ lineæ BC, BD, quæ constituant cum ipsa AB angulos deinceps ABC, ABD, duobus rectis æquales: Dico, BD ipsi BC in directum esse.

Si

Si enim ipsi BC non sit BD in directum, ponatur ei in directum BE. Et quoniam super rectam CBE insistit AB, erunt anguli deinceps ABC, ABE (1) duobus rectis æquales. Sed ex hypothesi anguli ABC, ABD sunt etiam æquales duobus rectis. Quare erunt (2) duo anguli ABC, ABE æquales duobus angulis ABC, ABD: proindeque ablato communi ABC, supererit [3] angulus minor ABE æqualis majori ABD, quod fieri [4] non potest. Non igitur BE in directum est ipsi BC. Quare erit ei in directum recta BD. Et propterea, si è puncto unius rectæ lineæ ducantur ad partes oppositas duæ aliæ rectæ lineæ, quæ constituant cum illa angulos deinceps duobus rectis æquales, in directum erunt duæ istæ rectæ lineæ. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

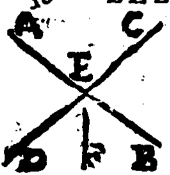
Hoc theorema est conversum præcedentis. In illo enim ex eo, quod rectæ BC, BD sint in directum, hoc est unicam rectam lineam constituant; ostensum est, angulos deinceps ABC, ABD duobus rectis æquales esse. Vicissim autem in isto ex eo, quod anguli deinceps ABC, ABD sint æquales duobus rectis, ostenditur rectas BC, BD in directum esse.

PROP. XV. THEOR. VIII.

Si duæ rectæ lineæ se mutuò secent, anguli, quos ad verticem faciunt, inter se sunt æquales.

Rectæ duæ AB, CD se mutuò secent in E. Dico, angulos, qui ad verticem sunt,

(1) *Prop.*13. [2] *Axi.*1. (3) *Axi.*3. [4] *Axi.*8.



sunt, inter se æquales esse; hoc est angulum AEC æqualem esse angulo BED, & angulum AED æqualem angulo BEC.

Nam anguli AEC, AED, velut anguli deinceps, sunt [1] æquales duobus rectis; & ob eamdem rationem duobus etiam rectis æquales sunt anguli DEB, DEA. Quare duo anguli AEC, AED sunt æquales [2] duobus angulis DEB, DEA: & propterea ablato communi AED, supererit (3) angulus AEC æqualis angulo BED.

Simili modo ostendetur, angulum AED æqualem esse angulo CEB: nempe, quia duobus rectis æquales sunt, tam anguli DEA, DEB, quàm anguli BEC, BED. Quare, si duæ rectæ lineæ se mutuò secent, anguli, quos ad verticem faciunt, inter se æquales sunt. Quod demonstrare oportebat.

S C H O L I U M.

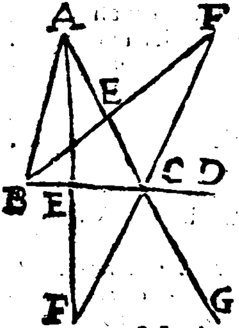
Conversum hujus theorematis etiam obtinet: nempe, quod si in recta AB sumatur punctum aliquod E, ex quo ducantur ad partes oppositas duæ aliæ rectæ lineæ EC, ED, quæ efficiant cum priori angulos ad verticem æquales, in directum sint ipsæ EC, ED. Nam si ipsi EC non sit in directum ED, sit ei in directum EF. Quare per ostensum theorema erit angulus AEC æqualis angulo BEF. Ponitur autem angulus AEC æqualis angulo BED. Quare erit angulus BEF æqualis angulo BED: quod fieri non potest.

PROP.

(1) *Prop.*13. (2) *Axi.*1. [3] *Axi.*3.

PROP. XVI. THEOR. IX.

Omnis trianguli, uno latere producto; exterior angulus est major utroque interiore, & opposito.



Sit triangulum ABC, & producatur unum ejus latus BC versus D. Dico, angulum exteriorem ACD majorem esse utroque interiore, & opposito, hoc est majorem, tum angulo CAB, cum angulo CBA.

Secetur namque latus AC (1) bifariam in E, & juncta [2] BE, producatur [3] ad F, ponatur ipsi BE (4) æqualis EF. Jungatur porro [5] CF, & AC producatur [6] ad G,

Quoniam igitur ex constructione AE est æqualis EC, & BE æqualis EF; erunt duo latera EA, EB trianguli AEB æqualia duobus lateribus EC, EF trianguli CEF. Sed angulus AEB, contentus sub lateribus illius, æqualis est [7] angulo CEF, qui sub istius lateribus continetur; quum sint anguli ad verticem. Quare & anguli BAE, ECF, oppo-

 siti

[1] *Prop.* 10. [2] *Post.* 1.
(3) *Post.* 2. [4] *Prop.* 3.
(5) *Post.* 1. (6) *Post.* 2.
[7] *Prop.* 15.

siti lateribus æqualibus BE, EF, similiter (1) æquales erunt; adeoque, quum angulus ACD major sit angulo ACF, erit etiam (2) major angulo CAB.

Quemadmodum autem ostensus est angulus ACD major angulo CAB, ita quoque ostendetur, angulum BCG majorem esse angulo CBA. Sed angulus BCG æqualis est [3] angulo ACD; quum sint anguli ad verticem. Itaque erit idem angulus ACD major quoque angulo CBA. Et propterea omnis trianguli, uno latere producto, exterior angulus est major utroque interiore, & opposito. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

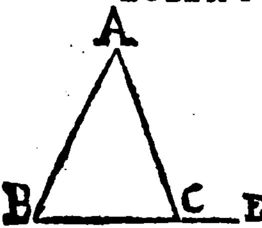
De angulo ACB, qui respectu exterioris ACD dici potest interior deinceps, nihil quidem determinari potest; quum ipse exterior ACD possit esse major, minor, & æqualis angulo ACB. quum enim duo anguli ACD, ACB, velut hinc inde existentes, sint æquales duobus rectis; fit hinc, ut si ACD sit rectus, rectus sit etiam ACB, si verò ACD acutus, obtusus sit ACB; & si demum ACD obtusus, acutus sit ACF.

PROP. XVII. THEOR. X.

Omnis trianguli duo anguli simul duobus rectis minores sunt, quomodocumque sumpti.

SIt triangulum ABC. Dico, duos ejus angulos, quomodocumque sumptos, puta CBA,

[1] *Prop.4.* (2) *Axi.1.* [3] *Prop.15.*



CBA, BCA, simul duobus rectis minores esse. Producatur etenim latus BC in directum versus D. Et quoniam angulus exterior ACD est major (1) interiore, & opposito CBA, apposito communi BCA, erunt duo anguli ACD, ACB majores (2) duobus angulis CBA, BCA. Jam verò duo anguli ACD, ACB, velut hinc inde existentes, sunt æquales (3) duobus rectis, Quare duo anguli CBA, BCA simul duobus rectis minores erunt. Et propterea omnis trianguli duo anguli simul duobus rectis minores sunt, quomodocumque sumpti. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

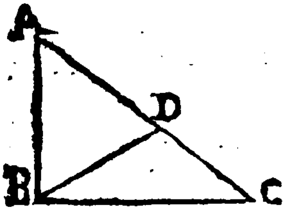
Hinc patet, ex puncto A ad lineam BC unicam tantùm perpendicularem duci posse. Nam *si duci possent duæ perpendiculares AB, AC, forent in triangulo ABC duo anguli CBA, BCA duobus rectis æquales: quod est absurdum. Et ob eamdem rationem, si, ex duobus punctis B, & C unius ejusdemque rectæ BC erigantur ad rectam istam duæ perpendiculares, hæ numquam inter se convenient, atque adeo parallelæ erunt.*

C 6 PROP.

(1) *Prop.16.* (2) *Axi.4.*
[3] *Prop.13.*

PROP. XVIII. THEOR. XI.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.



Sit triangulum ABC, in quo latus AC majus sit latere AB. Dico, angulum ABC, oppositum majori lateri, majorem esse angulo ACB, qui opponitur lateri minori.

Quoniam enim latus AC majus est latere AB, abscindatur ex eo (1) portio AD æqualis minori AB, jungaturque [2] BD.

Quia igitur AD est æqualis AB, erit triangulum BAD isosceles, adeoque angulus ABD æqualis [3] angulo ADB. Sed angulus ABC major est angulo ABD. Quare idem angulus ABC erit etiam [4] major angulo ADB.

Et quoniam in triangulo BDC latus CD productum est in A, erit angulus exterior ADB (5) major interiori, & opposito ACB. Ostensus est autem angulus ABC major angulo ADB. Quare idem angulus ABC multò major erit angulo ACB. Et propterea omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit. Quod demonstrare oportebat.

SCHO-

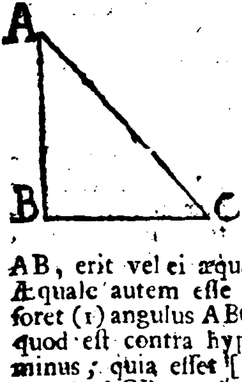
(1) *Prop.3.* (2) *Post.1.*
[3] *Prop.5.* (4) *Axi.1.*
[5] *Prop.16.*

SCHOLIUM.

Hoc theorema supplet casum omissum in theoremate quintæ propositionis. Ibi enim ostensum est, quod si triangulum sit isosceles, hoc est habeat duo latera æqualia, anguli, iis lateribus oppositi, sint etiam æquales. Hìc autem ostenditur, quod si unum ex iis lateribus sit altero majus, major sit angulus ille, qui majori lateri opponitur.

PROP. XIX. THEOR. XII.

Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.



Sit triangulum ABC, habens angulum ABC majorem angulo ACB. Dico, latus AC, oppositum angulo majori, majus esse latere AB, quod opponitur angulo minori.

Si enim latus AC non est majus latere AB, erit vel ei æquale, vel eodem minus. Æquale autem esse non potest, quia aliter foret (1) angulus ABC æqualis angulo ACB, quod est contra hypothesim. Neque etiam minus; quia esset [2] angulus ABC minor angulo ACB, quod est etiam contra hypothesim. Quare erit latus AC majus latere AB.

Et

(1) *Prop.* 5. (2) *Prop.* 18.

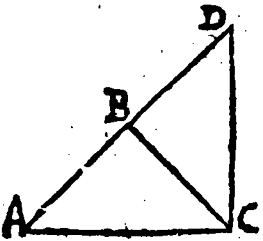
Et propterea in omni triangulo majori angulo majus latus opponitur. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Hoc theorema est conversum præcedentis. Nam quemadmodum in eo ostensum est, majori lateri majorem angulum opponi; sic vicissim in isto ostenditur, quod majori angulo majus semper latus sit oppositum. Sed idem theorema supplet quoque casum omissum in theoremate propositionis sextæ. In eo enim ostensum est, æquales angulos trianguli æqualia quoque latera subtendere; in isto autem demonstratur, majori angulo majus semper latus opponi.

PROP. XX. THEOR. XIII.

In omni triangulo duo latera simul majora sunt reliquo, quomodocumque sumpta.



Sit triangulum ABC. Dico, duo quælibet ipsius latera simul, puta AB, BC, majora esse reliquo AC.

Protrahatur AB (1) versus D, & fiat [2] BD æqualis BC, jungaturque (3) CD.

Et

[1) *Post.2.* [2] *Prop.3.* (3) *Post.1.*

Et quoniam BD est æqualis BC, erit BCD triangulum isosceles; adeoque angulus BCD [1] æqualis angulo BDC. Est autem angulus ACD major angulo BCD. Quare idem angulus ACD erit etiam [2] major angulo BDC: atque adeo, quia majori angulo (3) majus semper latus opponitur, erit AD majus, quàm AC in triangulo ADC. Sed ex constructione AD est æquale ipsis AB, BC simul sumptis. Duo igitur latera AB, BC simul sumpta reliquo AC majora sunt. Et propterea in omni triangulo duo latera simul majora sunt reliquo, quomodocumque sumpta. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

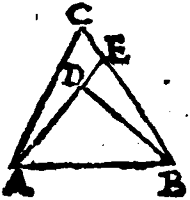
Hoc theorema nulla eget demonstratione, & velut axioma ultro ab omnibus concedi debet, si lineæ rectæ Archimedeam definitionem admittamus. Definitur etenim ab Archimede linea recta, quod sit brevissima omnium linearum, quæ duci possunt à puncto ad punctum. Itàque, quia AC est linea recta, AB verò, & BC simul unicam rectam non constituunt, sed angulum continent; erit AC minor ipsis AB, BC simul sumptis.

PROP. XXI. THEOR. XIV.

Si ex terminis unius lateris trianguli ducantur intra triangulum duæ rectæ lineæ; eæ simul minores erunt duobus aliis lateribus trian-

(1) *Prop.* 5. (2) *Axi.* 1.
[3] *Prop.* 19.

trianguli, angulum verò majorem continebunt.



Sit triangulum ABC, & ex punctis A, & B ducantur intra triangulum rectæ duæ AD, BD. Dico, rectas istas AD, BD simul minores esse ipsis AC, BC simul sumptis; at verò angulum ADB majorem esse angulo ACB.

Protrahatur etenim (1) AD usque donec cum BC conveniat in E. Et quoniam in triangulo ACE duo latera AC, CE simul (2) majora sunt reliquo AE; addito communi EB, erunt duo latera AC, CB (3) majora quoque duobus AE, EB.

Rursus, quoniam in triangulo DEB duo latera DE, EB simul (4) majora sunt reliquo DB; apposito communi AD, erunt duo latera AE, EB [5] majora etiam duobus AD, DB. Ostensum est autem, latera duo AC, CB majora esse duobus AE, EB. Quare eadem AC, CB ipsis AD, DB multò majora erunt.

Deinde, quoniam in triangulo BED latus ED productum est in A, erit angulus exterior ADB (6) major interiore, & opposito BED, Atque ita quoque, quoniam in triangulo ACE latus CE productum est in B, erit angulus exterior BED major interiore, & opposito ACE.

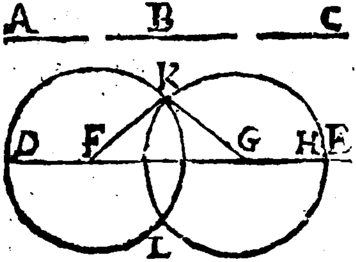
Quum

[1] *Post*.2. (2) *Prop*.20.
(3) *Axi*.4. (4) *Prop*.20.
(5) *Axi*.4. [6] *Prop*.16.

Quum itaque angulus ADB major sit angulo BED, & angulus BED major angulo ACB, erit idem angulus ADB multò major angulo ACB. Quare, si ex terminis unius lateris trianguli ducantur intra triangulum duæ rectæ lineæ, eæ simul minores erunt duobus aliis lateribus trianguli, angulum verò majorem continebunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXII. PROBL. VIII.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus aliis datis sint æquales, triangulum constituere. Oportet autem, ut ex tribus datis duæ simul reliqua majores sint, quomodocumque sumptæ.



Datæ sint tres rectæ lineæ A, B, C, quæ ejusmodi sint, ut duæ simul majores sint reliqua, quomodocumque sumantur. Oportet, ex tribus rectis lineis, quæ tribus iis datis æquales sint, triangulum constituere.

Exponatur recta quævis DE, terminata versus D, & indefinita ver sus E, ex qua (1) abscindatur primò DF æqualis A, tum FG æqua-

(1) *Prop*.3.

æqualis B, ac denique GH æqualis C. Deinde centro F, & intervallo FD describatur (1) circulus DKL; nec non centro G, & intervallo GH alter circulus HKL. Demum ex puncto K, in quo se secant circumferentiæ horum circulorum ducantur [2] ad puncta F, & G rectæ KF, KG. Dico, FKG esse triangulum quæsitum.

Quoniam enim F centrum est circuli DKL, erit [3] FD æqualis FK. Sed ex constructione FD est æqualis A. Quare & FK [4] ipsi A æqualis erit. Similiter, quoniam G centrum est circuli HKL, erit GH [5] æqualis GK. Sed ex constructione GH est æqualis C. Quare & GK (6) ipsi C æqualis erit.

Sunt itaque trianguli FKG latera duo FK GK æqualia rectis datis A, & C. Sed & latus FG ex constructione æquale est alteri B. Constitutum est igitur triangulum FKG, cujus latera FK, FG, GK æqualia sunt tribus rectis datis A, B, C. Quod erat faciendum.

S C H O L I U M.

Hoc problema majorem extensionem habet, quàm problema primæ propositionis. Ibi enim agebatur de construendo triangulo æquilatero, cujus latera æqualia datæ essent longitudinis. Hic verò agitur de construendo quolibet triangulo, cujus latera singula datam habeant longitudinem. Necesse *est autem, ut datæ tres rectæ lineæ, quibus æqualia esse debent tria latera*

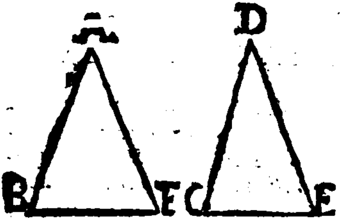
---

[1] *Post.*3. (2) *Post.*1.
(3) *Def.*15. (4) *Axi.* 1.
(5) *Def.*15. (6) *Axi.*1.

tera trianguli constituendi, ejusmodi sint, ut duæ simul reliqua majores sint, quomodocumque sumptæ; quia, ut superiùs ostensum est, hæc est proprietas essentialis trianguli, ut duo latera simul majora sint reliquo, quomodocumque sumpta.

PROP. XXIII. PROBL. IX.

Ad datam rectam lineam, atque ad datum in ea punctum angulum dato angulo rectilinea æqualem constituere.



Data sit recta AB,& datum in ea punctum A; datus verò angulus rectilineus CDE.. Oportet ad datã rectam AB, atque ad datum in ea punctum A constituere angulum æqualem angulo rectilineo dato CDE.

In lateribus anguli dati DC, DE sumantur duo quævis puncta C, & E, quæ jungantur [1] per rectam CE. Itaque, quia tres rectæ lineæ DC, DE, CE constituunt triangulum DCE, eæ ejusmodi erunt [2], ut duæ simul majores sint reliqua, quomodocumque sumptæ. Quare ad rectam datam AB constituatur (3) aliud triangulum ABF, cujus latera tria

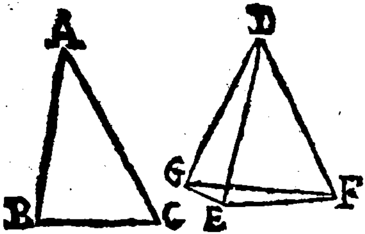
[1] *Post.1.* (2) *Prop.20.*
(3) *Prop.22.*

tria AB, AF, BF æqualia ſint tribus rectis DC, DE, CE, Dico, angulum BAF æqualem eſſe angulo CDE.

Quoniam enim ex conſtructione AB eſt æqualis DC, & AF æqualis DE; erunt duo latera AB, AF trianguli BAF æqualia duobus lateribus DC, DE trianguli CDE, alterum alteri. Eſt etiam ex conſtructione baſis illius BF æqualis baſi iſtius CE. Quare erit [1] angulus BAF æqualis angulo CDE. Et propterea ad datam rectam AB, atque ad datum in ea punctum A conſtitutus eſt angulus BAF æqualis angulo dato CDE. Quod erat faciendum.

PROP. XXIV. THEOR. XV.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulum ſub iis lateribus contentum angulo majorem; & baſim baſi majorem pariter habebunt.



Sint duo triangula ABC, DEF quæ habeant duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE DF, alterum alteri, angulum verò BAC majorem angulo EDF.

(1) *Prop.8.*

EDF. Dico, habere quoque basim BC majorem basi EF.

Quoniam enim angulo BAC minor est angulus EDF; fiat ad lineam DF, atque ad datum in ea punctum D (1) angulus FDG æqualis angulo BAC. Tum fiat quoque (2) DG æqualis ipsi AB. Ac denique jungantur [3] GE, GF.

Et quoniam ex constructione AB est æqualis DG, ex hypothesi autem AC est æqualis DF; erunt duo latera AB, AC trianguli ABC æqualia duobus lateribus DG, DF trianguli DGF, alterum alteri. Est etiam ex constructione angulus BAC, contentus sub lateribus illius, æqualis angulo GDF, qui sub istius lateribus continetur. Quare & basis BC (4) basi GF pariter æqualis erit.

Rursus, quoniam ex constructione DG est æqualis AB, ex hypothesi autem eidem AB æqualis est etiam DE, erit (5) DE æqualis DG: atque adeo, quum isosceles sit triangulum GDE, erit [6] angulus DGE æqualis angulo DEG. Est autem angulus FEG major angulo DEG. Quare idem angulus FEG (7) major quoque erit angulo DGE; ac propterea multò major angulo FGE.

Quum igitur in triangulo GEF angulus FEG major sit angulo FGE, erit (8) latus GF, oppositum majori angulo, majus latere EF, quod opponitur angulo minori. Ipsi autem GF ostensa est æqualis BC. Quare & BC eadem

[1] *Prop*.23. [2] *Prop*.3.
[3] *Post*.1. (4) *Prop*.4.
(5) *Axi*.1. (6) *Prop*.5.
(7] *Axi*.1. [8] *Prop*.19.

eadem EF major quoque erit. Et propterea, si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulum sub lateribus iis contentum angulo majorem; & basim basi majorem pariter habebunt. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Hoc theorema supplet casum omissum in theoremate propositionis quartæ. Ibi enim ostensum est, quod duorum triangulorum, duo latera duobus lateribus æqualia habentium, alterum alteri, si æquales fuerint anguli sub lateribus iis contenti, bases etiam sint æquales. In hoc autem ostenditur, quod eorumdem triangulorum si angulus angulo major sit, & basis basi etiam major erit.

PROP. XXV. THEOR. XVI.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & basim basi majorem; habebunt & angulum, sub iis lateribus contentum, angulo quoque majorem.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ habeant duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE, DF alterum alteri; habeant verò basim BC majorem basi EF. Dico, habere quoque angulum BAC majorem angulo EDF.

Si

Si enim angulus BAC major non ſit angulo EDF, erit vel ei æqualis, vel eodem minor. Æqualis autem eſſe non poteſt, quia aliter foret (1) baſis BC æqualis baſi EF, quod eſt contra hypotheſim. Neque etiam minor, quia eſſet [2) baſis BC minor baſi EF, quod eſt etiam contra hypotheſim. Quare conſequens eſt, ut angulus BAC major ſit angulo EDF. Et propterea, ſi duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & baſim baſi majorem; habebunt & angulum, ſub iis lateribus contentum, angulo quoque majorem. Quod demonſtrare oportebat.

SCHOLIUM.

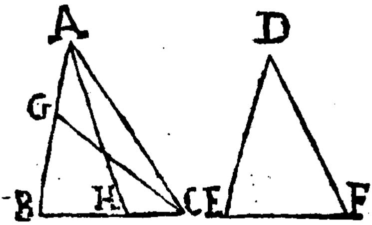
Hoc theorema convertit, quod præcedenti propoſitione poſitum eſt. In utroque enim ſupponitur, quod duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; ſed in illo ex eo, quod angulus, ſub æqualibus lateribus contentus, ſit angulo major, oſtenſum eſt, & baſim baſi majorem eſſe: in iſto verò viciſſim ex eo, quod baſis ſit major baſi, oſtenditur, angulum angulo majorem eſſe. Idem etiam theorema ſupplet caſum omiſſum in theoremate propoſitionis octavæ: quum oſtenſum ſit in illo, quod ſi duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & baſim baſi æqualem, angulos ſub æqualibus lateribus contentos etiam æquales ſint habitura.

PROP.

(1) *Prop.* 4. [2] *Prop.* 24.

PROP. XXVI. THEOR. XVII.

Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis, sive quod uni æqualium angulorum opponitur; omnia alia etiam æqualia habebunt.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ habeant duos angulos CBA, BCA æquales duobus ãgulis FED EFD, alterum alteri. Et habeant primùm æqualia quoque latera BC, EF, quæ adjacent æqualibus angulis. Dico, omnia alia æqualia esse, nempe latus AB æquale lateri DE, latus AC æquale lateri DF, angulum BAC æqualem angulo EDF, ipsumque triangulum ABC æquale triangulo DEF.

Si enim latus AB æquale non sit lateri DE, alterum ipsorum majus erit. Sit itaque majus latus AB, ex quo abscindatur [1] portio BG æqualis minori DE, & jungatur [2] CG.

Quoniam itaque ex constructione GB est æqualis DE, ex hypothesi verò BC æquali EF; erunt duo latera BG, BC trianguli GBC æqua-

[1] *Prop.3.* (2) *Post.1.*

æqualia duobus lateribus DE, EF trianguli DEF, alterum alteri. Est etiam angulus GBC, sub illius lateribus contentus, æqualis ex hypothesi angulo DEF, qui sub lateribus istius continetur. Quare erit (1) angulus BCG æqualis quoque angulo EFD. Sed angulo EFD æqualis est ex hypothesi angulus BCA. Itaque erit angulus BCG (2) æqualis angulo BCA: quod planè [3] repugnat.

Non igitur latus AB majus est latere DE. Sed ob eamdem rationem nec etiam minus esse potest. Quare consequens est, ut latus AB æquale sit lateri DE. Quumque ex hypothesi latus BC æquale sit lateri EF, & angulus CBA æqualis angulo FED; habebunt duo triangula ABC, DEF duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulos sub æqualibus lateribus contentos æquales. Unde omnia alia etiam (4) æqualia erunt.

Sed eadem triangula ABC, DEF habeant secundò æqualia latera duo AB, DE, quæ opponuntur angulis æqualibus BCA, EFD. Dico quoque, omnia alia æqualia esse; scilicet latus AC æquale lateri DF, latus BC æquale lateri EF, angulum BAC æqualem angulo EFD, ipsumque triangulum ABC æquale triangulo DEF.

Si enim latus BC non sit æquale lateri EF, alterum ipsorum majus erit. Sit itaque majus latus BC, ex quo abscindatur (5) portio BH æqualis minori EF, & jungatur (6) AH.

Quoniam itaque ex hypothesi AB est æ-

D qua-

(1) *Prop.4.* [2] *Axi.1.*
[3] *Axi.8.* (4) *Prop.4.*
[5] *Prop.3.* (6) *Post.1.*

qualis DE, ex constructione autem BH est æqualis EF, erunt duo latera AB, BH trianguli ABH æqualia duobus lateribus DE, EF trianguli DEF, alterum alteri. Est etiam ex hypothesi angulus ABH, contentus sub lateribus illius, æqualis angulo DEF, qui sub istius lateribus continetur. Quare erit (1) angulus BHA æqualis angulo EFD. Sed ex hypothesi angulo EFD æqualis est angulus BCA. Itaque erit angulus BHA (2) æqualis angulo BCA, hoc est exterior æqualis interiori, & opposito: quod planè [3] repugnat.

Non igitur latus BC majus est latere EF. Sed ob eamdem rationem neque etiam minus esse potest. Quare consequens est, ut latus BC æquale sit lateri EF. Quumque ex hypothesi latus AB æquale sit lateri DE, & angulus CBA æqualis angulo FED; habebunt triangula duo ABC, DEF duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulos sub æqualibus lateribus contentos pariter æquales. Quare omnia alia (4) etiam æqualia erunt.

Itaque, si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis, sive quod uni æqualium angulorum opponitur; & omnia alia æqualia pariter habebunt. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

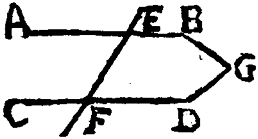
(1) *Prop.4.* [2] *Axi.1.*
(3) *Prop.16.* (4) *Prop.4.*

SCHOLIUM.

Theorematis hujus pars prior perfectè convertit id, quod propositione quarta positum est, Nam quemadmodum ibi ex eo, quod triangula duo ABC, DEF habeant duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE, DF, alterum alteri, & angulum BAC æqualem angulo EDF, ostensum est, basim BC æqualem esse basi EF, angulum CBA æqualem angulo FED, & angulum BCA æqualem angulo EFD; sic vicissim in theorematis hujus parte priore ex eo, quod triangula duo ABC, DEF habeant duos angulos CBA, BCA æquales duobus angulis FED, EFD, alterum alteri, & basim BC æqualem basi EF, ostenditur, latus AB æquale esse lateri DE, latus AC æquale lateri DF, & angulum BAC æqualem angulo EDF.

PROP. XXVII. THEOR. XVIII.

Si in duas rectas lineas, in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat angulos alternos æquales; parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ.



Sint duæ rectæ lineæ AB, CD, quæ existant in uno, eodemque plano, & in eas incidat tertia recta linea EF, quæ efficiat angulos alternos æquales, hoc est angulum AEF æqualem angulo EFD. Dico, rectas duas AB, CD parallelas esse inter se.

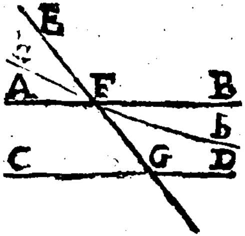
Si enim non ſint parallelæ, eæ productæ verſus aliquam partem convenient. Producantur itaque, & conveniant in G. Figura igitur EFG, velut contenta ſub tribus rectis lineis, triangulum eſt. Unde, quum latus GE productum ſit in A, erit [1] angulus exterior major utroque interiore, & oppoſito, hoc eſt angulus AEF major tam angulo EGF, quàm angulo EFG. Eſt autem ex hypotheſi angulus AEF æqualis angulo EFG. Idem igitur angulus AEF eſt major ſimul, & æqualis angulo EFG: quod fieri non poteſt. Non igitur rectæ duæ AB, CD productæ convenient inter ſe. Quare, quum in eodem conſiſtant plano, [2] eædem parallelæ erunt. Et propterea, ſi in duas rectas lineas, in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat angulos alternos æquales; parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XXVIII. THEOR. XIX.

Si in duas rectas lineas, in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat, vel angulum exteriorem æqualem interiori, & oppoſito ad eamdem partem, vel duos angulos interiores ad eamdem partem poſitos, duobus rectis æquales; parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ.

Sint duæ rectæ lineæ AB, CD, quæ exiſtant in uno, eodemque plano, & in eas incidat tertia recta linea EFG. Dico primò, quod

[1] *Prop.*16. [2] *Def.*35.



quod si angulus exterior EFB sit æqualis interiori, & opposito ad eamdem partem FGD, duæ illæ rectæ lineæ AB, CD inter se sint parallelæ.

Anguli enim AFG, EFB, velut ad verticem positi, inter se (1) sunt æquales. Unde semper ac angulus EFB æqualis ponitur angulo FGD; erit etiam (2) angulus AFG æqualis angulo FGD. Jam vero isti duo anguli sunt alterni. Itaque lineæ AB, CD [3] parallelæ erunt inter se.

Dico secundò, quod si duo anguli interiores, ad eamdem partem positi, BFG, FGD sint simul duobus rectis æquales, duæ illæ rectæ lineæ AB, CD etiam inter se sint parallelæ.

Nam anguli AFG, BFG, velut hinc inde positi, sunt simul (4) duobus rectis æquales. Sed ex hypothesi æquales sunt etiam duobus rectis anguli duo BFG, FGD. Quare erunt duo anguli AFG, BFG æquales [5] duobus angulis BFG, FGD; & propterea, ablato communi BFG, supererit [6] angulus AFG æqualis angulo FGD. Sunt autem anguli isti alterni. Itaque lineæ AB, CD (7) parallelæ erunt inter se. Et propterea, si in duas, re-

 ctas

(1) *Prop.*15. (2) *Axi.*1.
(3) *Prop.*27. (4) *Prop.*13.
(5) *Axi.*1. (6) *Axi.*3.
(7) *Prop.*27.

ctas lineas, in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat vel angulum exteriorem æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem, vel duos angulos interiores, ad eamdem partem positos, duobus rectis æquales; duæ illæ rectæ lineæ parallelæ erunt inter se. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM I.

Ex duabus propositionibus præcedentibus perspicuum fit, parallelismum linearum tripliciter cognosci posse. Primò nempe, si in iis anguli alterni sint æquales. Secundò, si angulus exterior sit æqualis interiori, & opposito ad eamdem partem. Ac tertiò demum, si duo anguli interiores, ad eamdem partem positi, sint simul duobus rectis æquales.

SCHOLIUM II.

Rectæ igitur AB, CD, parallelæ sunt inter se, siquidem duo anguli BFG, FGD simul sint duobus rectis æquales. Revolvatur jam recta AB circa punctum F, ita ut positionem acquirat rectæ ab: *& perspicuum est, revolutione ista nec rectas* ab, *CD esse amplius parallelas, utpote convenientes versus* b *D, nec angulos* bFG, *FGD æquales esse simul duobus rectis, utpote minores. Unde nihil obstat, quominus hoc loco tamquam verum agnoscamus sequens axioma Euclideum.*

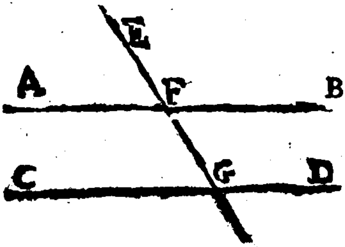
AXIOMA XIII.

Si in duas rectas lineas, in eodem plano ja-

jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat duos angulos interiores, ad eamdem partem positos, duobus rectis minores; duæ illæ. rectæ lineæ non erunt parallelæ, sed convenient versus eam partem, in qua fiunt duo illi anguli, qui simul duobus rectis minores sunt.

PROP. XXIX. THEOR. XX.

Si in duas rectas lineas parallelas tertia incidat recta linea; hæc efficiet & angulos alternos æquales; & angulum exteriorem æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem; & duos angulos interiores, ad eamdem partem positos, duobus rectis æquales.



Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, in quas incidat tertia EFG. Dico primò, angulos alternos AFG FGD æquales esse inter se.

Si enim non sint æquales, alter ipsorum major erit. Sit itaque angulus AFG major angulo FGD. Quare apposito communi BFG, erunt (1) duo anguli AFG, BFG majores duobus angulis BFG, FGD. Sunt autem duo anguli AFG, BFG [2] æquales duobus re-

(1) *Axi.4.* [2] *Prop.13.*

rectis. Itaque anguli duo BFG, FGD, qui sunt interiores ad eamdem partem positi, duobus rectis minores erunt; & propterea rectæ AB, CD [1] non erunt parallelæ: quod est contra hypothesim. Non itaque angulus AFG major est angulo FGD. Et quoniam ob eamdem rationem nec minor etiam esse potest, concludendum est, angulum AFG æqualem esse angulo FGD.

Dico secundò, angulum exteriorem EFB æqualem esse interiori, & opposito ad eamdem partem FGD.

Angulus enim AFG ostensus est æqualis angulo FGD. Jam verò idem angulus AFG [2] æqualis est etiam angulo EFB. Quare erit [3] angulus EFB æqualis angulo FGD.

Dico tertiò, duos angulos BFG, FGD, qui sunt interiores, ad eamdem partem positi, esse simul duobus rectis æquales.

Nam quum angulus AFG ostensus sit æqualis angulo FGD; apposito communi BFG, erunt [4] duo anguli AFG, BFG æquales duobus angulis BFG, FGD. Sed duo anguli AFG, BFG simul (5) sunt æquales duobus rectis. Quare etiam (6) duobus rectis æquales erunt duo anguli BFG, FGD.

Igitur, si in duas rectas lineas parallelas tertia incidat recta linea, hæc efficiet & angulos alternos æquales; & angulum exteriorem æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem; & duos angulos interiores, ad eamdem partem positos, duobus rectis æqua-

(1) *Axi.* 13. [2] *Prop.* 15.
(3) *Axi.* 1. [4] *Axi.* 2.
(5) *Prop.* 13. [6] *Axi.* 1.

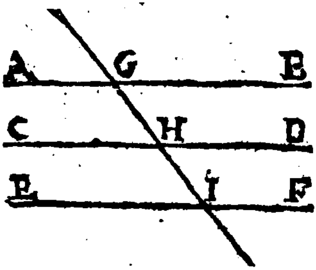
æquales. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

Convertit hæc propositio utramque propositionum præcedentium. In iis enim ex hypothesi, quod vel anguli alterni sint æquales, vel angulus exterior æqualis sit interiori & opposito ad eamdem partem, vel duo anguli interiores, ad eamdem partem positi, sint æquales duobus rectis, colligitur semper lineas esse parallelas. Vicissim autem in ista, ex supposito parallelismo linearum tria illa necessariò consequi, demonstratur.

PROP. XXX. THEOR. XXI.

Quæ eidem sunt parallelæ, inter se sunt parallelæ.



Eidem rectæ lineæ EF parallela sit tam recta AB, quam recta CD. Dico, rectas AB, CD parallelas esse inter se.

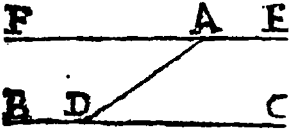
Ducatur enim recta alia, GHI, quæ eas utcumque secet in tribus punctis G, H, I. Et quoniam ex hypothesi rectæ AB, EF, sunt parallelæ; erunt (1) anguli alterni AGI, GIF æquales in-

(1) *Prop.* 29.

inter se. Pariterque quoniam ex hypothesi parallelæ sunt rectæ CD, EF; erit (1) angulus exterior GHD æqualis interiori, & opposito ad eamdem partem GIF. Eidem igitur angulo GIF æqualis est tam angulus AGH, quàm angulus GHD. Quare erit (2) angulus AGH æqualis angulo GHD: qui quum sint alterni, erunt lineæ AB, CD [3] inter se parallelæ. Et propterea, quæ eidem sunt parallelæ, inter se parallelæ sunt. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXXI. PROBL. X.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.



Datum sit punctum A, data verò recta BC. Oportet, per datum punctum A ducere rectam parallelam datæ BC.

Capiatur in BC punctum quodvis D, & juncta (4) AD, fiat (5) ad rectam istam AD, atque ad datum in ea punctum A angulus DAE æqualis angulo ADB, & extendatur (6) EA versus F. Dico, rectam EF parallelam esse ipsi BC.

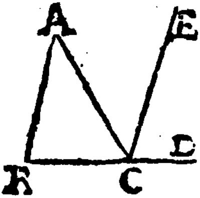
Sunt enim ex constructione æquales inter se anguli DAE, ADB. Sed isti anguli sunt al-

(1) *Prop.29.* (2) *Axi.1.*
(3) *Prop.27.* [4] *Post.1.*
(5) *Prop.23.* [6] *Post.2.*

alterni. Quare rectæ EF, CB [1] parallelæ erunt inter se. Et propterea per datum punctum A ducta est recta EF parallela datæ BC. Quod erat faciendum.

PROP. XXXII. THEOR. XXII.

Cujuscumque trianguli, uno latere producto, angulus exterior est æqualis duobus interioribus, & oppositis simul sumptis; & anguli omnes simul duobus rectis sunt æquales.



Sit triangulum ABC, & unum ejus latus BC extendatur versus D. Dico, angulum exteriorem ACD æqualem esse duobus interioribus, & oppositis simul sumptis, CAB, ABC.

Per punctum C ducatur (2) recta CE ipsi AB parallela. Et quoniam parallelæ sunt rectæ lineæ AB, CE, & in ipsas incidit AC; erit [3] angulus ACE æqualis angulo CAB. Similiter, quoniam rectæ AB, CE sunt parallelæ, & in ipsas incidit BD, erit [4] angulus exterior DCE æqualis interiori, & opposito ad eamdem partem ABC. Ostensus est autem angulus ACE æqualis angulo CAB. Itaque erit totus angulus ACD æqualis duobus angulis simul sumptis CAB, ABC.

Dico etiam, omnes angulos ejusdem trianguli ABC simul duobus rectis æquales esse

 Osten-

(1) *Prop. 27.* (2) *Prop. 31.*
[3] *Prop. 29.* (4) *Prop. 29.*

Ostensum est enim, angulum ACD æqualem esse duobus angulis CAB, ABC. Quare apposito communi BCA, erunt [1] duo anguli BCA, ACD æquales tribus angulis CAB, ABC, BCA. Sed duo anguli BCA, ACD simul (2) sunt æquales duobus rectis. Itaque tres anguli CAB, ABC, BCA simul etiam duobus rectis æquales erunt. Et propterea cujuscumque trianguli, non modo uno latere producto angulus exterior est æqualis duobus interioribus, & oppositis simul sumptis, sed & anguli omnes simul duobus rectis æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I U M.

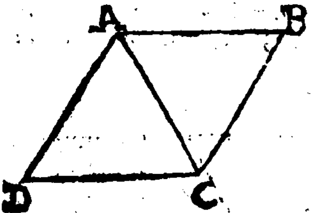
Theorematis hujus duæ sunt partes, quarum altera paullò specialiùs determinat id, quod propositione XVI. *positum est; altera specialiorem continet determinationem ejus, quod propositione* XVII. *posuimus. In iis enim ostensum est, cujuscumque trianguli, uno latere producto, angulum exteriorem majorem esse unoquoque ex duobus interioribus, & oppositis; necnon duos angulos simul duobus rectis minores esse. Hìc autem ostenditur, cujuscumque trianguli angulum exteriorem æqualem esse duobus interioribus, & oppositis simul sumptis, omnesque angulos internos simul duos rectos adæquare.*

PROP.

[1] *Axi.*2. (2) *Prop.*13.

PROP. XXXIII. THEOR. XXIII.

Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectas lineas, sunt etiam æquales, & parallelæ.



Sint rectæ duæ AB, DC æquales, & parallelæ, quæ conjungantur ad easdem partes per duas alias rectas lineas AD, BC. Dico, rectas istas AD, BC, illas conjungentes ad easdem partes, esse etiam æquales, & parallelas.

Ducatur etenim (1) recta AC. Et quoniam AB, DC sunt parallelæ, & in ipsas incidit AC; erit [2] angulus BAC æqualis angulo ACD. Unde, quum duo triangula BAC, DCA habeant duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus CD, CA alterum alteri, nec non æquales angulos, sub iis lateribus contentos; habebunt (3) & basim BC æqualem basi AD, & angulum ACB æqualem angulo DAC. Quare, quum in duas rectas AD, BC incidat tertia AC, & efficiat angulos alternos æquales; eæ erunt [4] inter se parallelæ. Ostensæ sunt autem æquales. Erunt igitur æ-

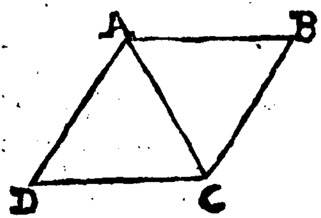
qua-

(1) *Post.1.* [2] *Prop.29.*
(3) *Prop.4.* (4) *Prop.27.*

quales, & parallelæ. Et propterea, quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectas lineas, sunt etiam æquales, & parallelæ. Quod erat ostendendum.

PROP. XXXIV. THEOR. XXIV.

Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex adverso sunt, inter se sunt æqualia; similiter autem & anguli; diagonalis verò ea bifariam dividit.



Sit parallelogrammum ABCD. Dico, latera opposita inter se æqualia esse, hoc est latus AB æquale esse lateri DC, & latus AD æquale lateri BC; similiter æquales esse inter se angulos oppositos, hoc est angulum BAD æqualem esse angulo BCD, & angulum ABC æqualem angulo ADC; ac denique diagonalem AC ipsum bifariam, hoc est in duo triangula æqualia, dividere.

Quoniam enim ABCD parallelogrammum est, erunt (1) latera ejus opposita inter se parallela: proindeque erit (2) tam angulus BAC æqualis angulo ACD, quàm angulus DAC æqualis angulo ACB. Unde, quum duo triangula ABC, CDA habeant duos angulos BAC, ACB æquales duobus angulis ACD, DAC, alterum alteri, & latus AC, quod

(1) *Def.* 36. [2] *Prop.* 29.

quod æqualibus adjacet angulis, commune; omnia alia ſimiliter æqualia (1) habebunt. Quare erit latus AB æquale lateri DC, latus BC æquale lateri AD, angulus ABC æqualis angulo ADC, ipſumque triangulum ABC ipſi triangulo CDA æquale erit. Sed & angulus BAD æqualis etiam eſt angulo BCD, quum partes illius oſtenſæ ſint æquales partibus iſtius. Itaque parallelogrammorum ſpatiorum latera, quæ ex adverſo ſunt, inter ſe ſunt æqualia; ſimiliter autem & anguli; diagonalis verò ea biſariam dividit. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIUM.

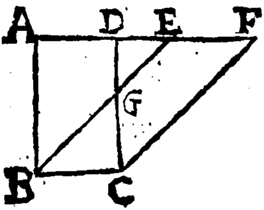
Quemadmodum autem, ſi figura ABCD ſit parallelogramma, habebit ea latera, quæ ex adverſo ſunt, inter ſe æqualia. Sic viciſſim oſtendere licet, quod ſi figuræ ABCD oppoſita latera ſint æqualia, ea ſit parallelogramma. Nam ſemper ac figuræ ABCD oppoſita latera ſunt æqualia, habebunt triangula ABC, CDA ſingula latera ſingulis lateribus æqualia. Quare per octavam hujus habebunt etiam ſingulos angulos ſingulis angulis æquales; atque adeo per vigeſimam ſeptimam erit tam recta AB parallela ipſi DC, quam recta AD parallela ipſi BC.

PROP. XXXV. THEOR. XXV.

Parallelogramma in eadem baſi, & in iiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia.

SInt duo parallelogramma ABCD, EBCF, quæ habeant eamdem baſim BC, & ſint con-

[1] *Prop.26.*



constituta in iisdem parallelis BC, AF. Dico, ista duo parallelogramma inter se æqualia esse.

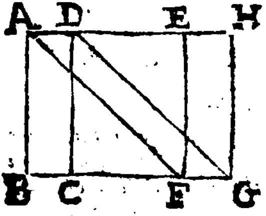
Quoniam enim ABCD parallelogrammum est, erit (1) latus AD æquale lateri BC. Et similiter, quoniam EBCF est parallelogrammum, erunt ejus latera opposita EF, BC inter se æqualia. Eidem itaque BC æqualis est, tam recta AD, quàm recta EF. Quare erit (2) AD æqualis EF: & propterea addita communi DE, erit [3] AE æqualis DF, Est autem, propter parallelogrammum ABCD, AB æqualis etiam DC. Quare latera duo AE, AB trianguli BAE æqualia erunt lateribus duobus DF, DC trianguli CDF, alterum alteri. Est etiam propter parallelas AB, DC angulus BAE, contentus sub lateribus illius, æqualis angulo CDF, qui sub istius lateribus continetur. Quare erit [4] triangulum BAE æquale triangulo CDF; atque adeo, ablato communi triangulo DGE, erit (5) trapetium BADG æquale trapetio CGEF; additoque triangulo communi BGC, fiet (6) parallelogrammum ABCD æquale parallelogrammo EBCF. Parallelogramma igitur in eadem basi, & in iisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod erat ostendendum.

PROP.

[1] *Prop.34.* (2] *Axi.1.*
(3) *Axi.2.* [4] *Prop.4.*
(5) *Axi.3.* [6] *Axi.2.*

PROP. XXXVI. THEOR. XXVI.

Parallelogramma in æqualibus basibus, & in iisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.



Sint duo parallelogramma ABCD, EFGH, quæ constituta in eisdem parallelis AH, BG habeant bases æquales BC, FG. Dico, ista duo parallelogramma inter se æqualia esse.

Ducantur etenim rectæ [1] AF, DG. Et quoniam ABCD est parallelogrammum, erunt (2) latera ejus opposita AD, BC inter se æqualia. Est autem ex hypothesi BC æqualis FG. Quare & AD [3] ipsi FG æqualis erit. Quum igitur rectæ duæ AD, FG sint æquales, & parallelæ; erunt etiam [4] æquales, & parallelæ rectæ AF, DG, quæ illas conjungunt ad easdem partes: & propterea ADGF parallelogrammum erit. Et quoniam parallelogramma duo ABCD, ADGF habent eamdem basim AD, & sunt in iisdem parallelis, erunt ea (5) æqualia inter se. Paritérque, quoniã parallelogramma duo EFGH, ADGF habent eamdem basim FG, & sunt in iisdem parallelis, erunt ea inter se æqualia. Eidem igi-

(1) *Post.*1. [2] *Prop.*34.
(3) *Axi.*1. (4) *Prop.*33. (5) *Prop.*35.

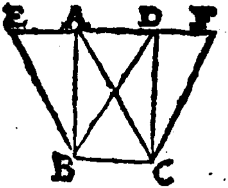
igitur parallelogrammo ADGF æquale est tam parallelogrammum ABCD, quàm parallelogrammum EFGH. Quare erit (1) parallelogrammum ABCD æquale parallelogrammo EFGH. Et propterea parallelogramma in æqualibus basibus, & in iisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Perspicuum est igitur ex duabus præcedentibus propositionibus, parallelogramma, quæ in iisdem parallelis sunt constituta, æqualia esse inter se, sive habeant eamdem basim, sive bases æquales. Sed hoc idem in duabus sequentibus propositionibus de triangulis etiam ostenditur.

PROP. XXXVII. THEOR. XXVII.

Triangula in eadem basi, & in iisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.



Sint duo triangula ABC, DBC, quæ habeant eamdem basim BC, & sint constituta in iisdem parallelis AD, BC. Dico, ista duo triangula inter se æqualia esse.

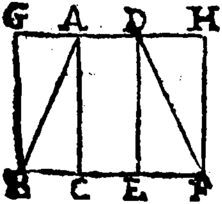
Producatur enim AD (2) utrimque versus E, & F; tum per puncta B, & C (3) ducantur rectæ

(1) *Axi.*1. [2] *Post.*2. (3) *Prop.*31.

rectæ BE, CF parallelæ ipsis CA, BD. Sunt igitur ACBE, DBCF parallelogramma duo, quæ quum habeant eamdem basim BC, & constituta sint in iisdem parallelis, æqualia ea erunt (1) inter se. Jam verò diagonalis dividit [2] parallelogrammum bifariam; atque adeo triangula ABC, DBC semisses sunt eorum parallelogrammorum. Itaque triangula ABC, DBC similiter inter se sunt [3] æqualia. Et propterea triangula in eadem basi, & in iisdem parallelis constituta æqualia sunt inter se. Quod erat demonstrandum.

PROP.XXXVIII. THEOR.XXVIII.

Triangula in æqualibus basibus, & in iisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ constituta in iisdem parallelis AD, BF, habeant æquales bases BC, EF. Dico, ista duo triangula inter se æqualia esse.

Producatur etenim AD (4) utrimque versus puncta G, & H. Tum per punctum B agatur [5] recta BG parallela ipsi AC, & per punctum F recta FH parallela ipsi DE. Sunt igitur ACBG, DEFH parallelogramma duo, quæ quum habeant bases

---

[1] *Prop.*35. [2] *Prop.*34.
[3] *Axi.*7. (4) *Post.*2.
(5) *Prop.*31.

ſes æquales BC, EF, & ſint conſtituta in iiſdem parallelis, æqualia ea erunt (1) inter ſe. Jam verò diagonalis dividit [2] parallelogrammum bifariam, atque adeo triangula ABC, DEF ſemiſſes ſunt eorum parallelogrammorum. Itaque triangula ABC, DEF ſimiliter inter ſe ſunt [3] æqualia. Et propterea triangula in æqualibus baſibus, & in iiſdem parallelis conſtituta æqualia ſunt inter ſe. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIUM.

Non ſolum igitur parallelogramma, verùm etiam triangula, quæ in iiſdem parallelis ſunt conſtituta, æqualia inter ſe ſunt, ſive habeant eamdem baſim, ſive baſes æquales. Unde quatuor præcedentes propoſitiones ſic poterunt in unum contrahi: triangula, & parallelogramma in iiſdem parallelis, & in eadem, vel æqualibus baſibus conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

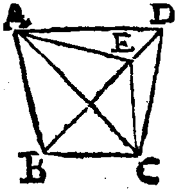
PROP. XXXIX. THEOR. XXIX.

Triangula æqualia, in eadem baſi & ad eamdem partem conſtituta, ſunt etiam in iiſdem parallelis.

SInt duo triangula æqualia ABC, DBC, quæ conſtituta ſint ad eamdem partem in eadem baſi BC. Dico, duo iſta triangula eſſe etiam

---

(1) *Prop.36.* (2) *Prop.34.*
[3] *Axi.7.*



etiam in iisdem parallelis, hoc est rectam AD parallelam esse ipsi BC.

Si enim recta AD non sit parallela ipsi BC, huic BC per punctum A parallela agatur (1) AE, quæ conveniat cum DB in puncto E, & jungatur (2) CE.

Quoniam igitur triangula duo ABC, EBC, habent eamdem basim BC, & sunt constituta in iisdem parallelis AE, BC, æqualia ea erunt [3] inter se. Sed ex hypothesi triangulum ABC æquale est triangulo DBC. Quare erit (4) triangulum EBC æquale triangulo DBC, quod fieri non potest. Non igitur AE, sed AD parallela est ipsi BC. Et propterea triangula æqualia in eadem basi, & ad eamdem partem constituta, sunt etiam in iisdem parallelis. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

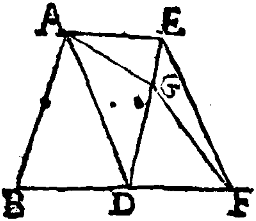
Hoc theorema, licet non omni ex parte, convertit id, quod propositione trigesima septima positum est. Nimirum ibi ex eo, quod triangula duo habeant eamdem basim, & constituta sint in iisdem parallelis, deducitur æqualitas eorum triangulorum. Hic autem ex eo, quod duo triangula sint æqualia, & ad eamdem partem in eadem basi sint constituta, colligitur vicissim, ea triangula esse in iisdem parallelis.

PROP.

[1] *Prop.* 31. (2) *Post.* 1.
(3) *Prop.* 37. (4) *Axi.* 1.

PROP. XL. THEOR. XXX.

Triangula æqualia, in æqualibus basibus, ac in directum jacentibus ad eamdem partem constituta, sunt etiam in iisdem parallelis.



Sint duo triangula æqualia ABD, DEF, quæ constituta sint ad eamdem partem in basibus BD, DF, quæ æquales sint, & in directum jaceant. Dico, duo ista triangula esse etiam in iisdem parallelis, hoc est rectam AE parallelam esse ipsi BF.

Si enim recta AE non sit parallela ipsi BF, huic BF per punctum A parallela [1] ducatur AG, quæ conveniat cum DE in puncto G, & jungatur (2) FG.

Et quoniam triangula duo ABD, GDF habent æquales bases BD, DF, & constituta sunt in iisdem parallelis AG, BF; erunt ea [3] æqualia inter se. Sed ex hypothesi triangulum ABD est æquale triangulo DEF. Quare erit (4) triangulum DEF æquale triangulo GDF, quod est absurdum. Non igitur AG, sed AE parallela est ipsi BF. Et propterea triangula æqualia in æqualibus basibus, & in dire-

(1) *Prop.*31. (2) *Post.*1.
(3) *Prop.*38. [4] *Axi.*1.

directum jacentibus ad eamdem partem constituta, sunt etiam in iisdem parallelis. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Hoc theorema, licet non omni ex parte, convertit id, quod propositione trigesima octava positum est. Ibi enim ex eo, quod triangula duo habeant bases æquales, & constituta sint in iisdem parallelis, deducitur æqualitas eorum triangulorum. Hic autem ex eo, quod duo triangula sint æqualia, & ad eamdem partem in basibus æqualibus, ac in directum jacentibus sint constituta, colligitur vicissim, ea triangula in iisdem esse parallelis.

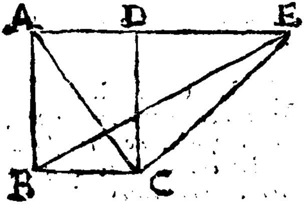
SCHOLIUM.

Ex duabus autem præcedentibus propositionibus liquet, triangula, quæ æqualia sunt, esse quoque in iisdem parallelis, si constituta ad eamdem partem habeant, vel eamdem basim, vel bases æquales, ac in directum positas. Quod quidem verum est etiam de parallelogrammis; ut cuilibet demonstrationes à præcedentibus non dissimiles instituenti notum fiet.

PROP. XLI. THEOR. XXXI.

Si parallelogrammum, & triangulum habeant eamdem basim, & sint in iisdem parallelis constituta, erit parallelogrammum duplum trianguli.

Sit parallelogrammum ABCD, sitque triangulum EBC, quæ constituta in iisdem paralle-



rallelis AE, BC habeant eamdẽ basim BC. Dico, parallelogrammum ABCD duplum esse trianguli EBC.

Ducatur etenim [1] AC. Et quoniam diagonalis dividit (2) parallelogrammum bifariam, erit parallelogrammum ABCD duplum triãguli ABC. Sed triangulum ABC [3] est æquale triangulo EBC, quum sint constituta in eadem basi, & in iisdem parallelis. Quare erit parallelogrammum ABCD duplum quoque trianguli EBC. Et propterea, si parallelogrammum, & triangulum habeant eamdem basim, & constituta sint in iisdem parallelis, erit parallelogrammum duplum trianguli. Quod demonstrare oportebat.

S C H O L I U M.

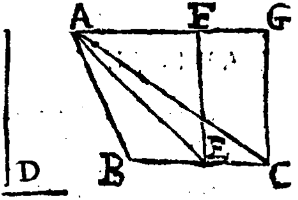
Non dissimiliter ostendetur parallelogrammum duplum esse trianguli, si constituta in iisdem parallelis, habuerint non eamdem, sed æquales bases. Sed tam hujus, quàm præcedentis conversum pariter etiam obtinet: nempe, si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, & constituta ad eamdem partem habuerint, vel eamdem basim, vel bases æquales, ac in directum positas, ea erunt etiam in iisdem parallelis.

PROP.

(1) *Post.*1. (2) *Prop.*34. [3] *Prop.*37.

PROP. XLII. PROBL. XI.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.



Datum sit triangulum ABC, datus verò angulus rectilineus D. Oportet, constituere parallelogrammum, quod sit æquale dato triangulo ABC, habeatque angulum, æqualem dato angulo rectilineo D.

Secetur BC [1] bifariam in E; tum ad lineam CE, atque ad datum in ea punctum E constituatur (2) angulus CEF æqualis angulo D. Agatur deinde (3) tam per punctum A recta AG ipsi BC parallela, quàm per punctum C recta CG parallela ipsi EF, eæque conveniant in G. Dico, CEFG esse parallelogrammum quæsitum.

Jungatur enim [4] AE. Et quoniam triangula duo ABE, ACE habent bases æquales BE, CE, & constituta sunt in iisdem parallelis BC, AG; erunt ea (5) æqualia inter se: proindeque triangulum totum ABC duplum erit ipsius ACE. Sed ejusdem trianguli ACE duplum est [6] etiam parallelogrammũ CEFG.

E Qua-

(1) *Prop.*10. [2] *Prop.*23.
(3) *Prop.*31. (4) *Post.*1.
[5] *Prop.*38. (6) *Prop.*41.

Quare erit (1) parallelogrammum CEFG æquale triangulo ABC. Habet autem idem parallelogrammum ex constructione angulum CEF æqualem angulo dato D. Constitutum est igitur parallelogrammum CEFG, æquale triangulo ABC, habens angulum æqualem dato angulo D. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Ex ipsa autem problematis hujus demonstratione inferre licet, quod si triangulum, & parallelogrammum sint in iisdem parallelis, & basis trianguli dupla sit basis parallelogrammi, ea æqualia sint inter se. Ostensum est enim, triangulum ABC æquale esse parallelogrammo CEFG, quæ quidem non modò sunt in iisdem parallelis BC, AG, verùm etiam bases habent tales, ut quæ triangulo competit, dupla sit ejus, quæ ad parallelogrammum refertur.

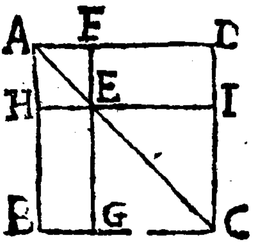
PROP. XLIII. THEOR. XXXIII.

Parallelogrammorum spatiorum, eorum, quæ circa diametrum sunt, complementa, inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum ABCD, in cujus diagonali AC sumpto puncto quovis E, agantur per illud (2) rectæ FG, HI parallelæ lateribus AB, BC. Dico, æqualia esse parallelogramma BGEH, EFDI, quæ sunt supplementa eorum, quæ sunt circa diametrum, seu diagonalem AC.

Quo-

(1) *Axi.6.* [2] *Prop.31.*



Quoniam diagonalis dividit (1) parallelogrammum in duo triangula æqualia, erit tum triangulum ABC æquale triangulo ADC, cùm triangulum AHE æquale triãgulo AFE, cum denique triangulum CGE æquale triangulo CIE. Quocirca, si ex triangulo ABC auferantur triangula AHE, CGE, & ex triangulo ADC auferantur triangula AFE, CIE; quia ex æqualibus æqualia auferuntur, remanebit [2] parallelogrammum BGEH æquale parallelogrammo EFDI. Et propterea in parallelogrammis spatiis eorum, quæ circa diametrum sunt, complementa, inter se æqualia sunt. Quod demonstrare oportebat.

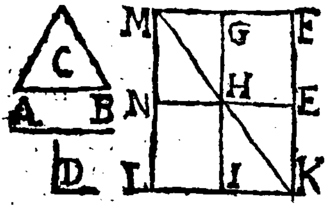
PROP. XLIV. PROBL. XII.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo.

DAta quidem sit recta AB, datum verò triangulum C, & datus demum angulus D. Oportet, ad rectam ipsi AB æqualem constituere parallelogrammum, æquale triangulo C, habens angulum æqualem angulo D.

E 2 Con-

[1] *Prop.34.* [2] *Axi.3.*



Constituatur parallelogrammum (1) EFGH æquale triangulo C, habens angulum GHE æqualem angulo D; tum extendatur (2) GH versus I, & ponatur [3] HI æqualis ipsi AB. Ducatur deinde per punctum I (4) recta KL ipsis EH, FG parallela, quæ conveniat cum FE producta in K.

Et quoniam parallelæ sunt rectæ FG, KI, & in ipsas incidit FK, erunt (5) duo anguli GFK, FKI duobus rectis æquales: & propterea, quia, juncta KH, fiunt duo anguli GFK, FKH duobus rectis minores, conveniet (6) KH producta cum FG similiter producta in puncto aliquo. Conveniant itaque in puncto M, per quod agatur recta ML ipsi FK parallela, quæ conveniat cum EH in N, & cum KI in L. Dico, HILN esse parallelogrammum quæsitum.

Nam parallelogramma duo EFGH, HILN velut supplementa eorum, quæ sunt circa diametrum, æqualia sunt [7] inter se. Sed ex constructione parallelogrammum EFGH est æquale triangulo C. Quare eidem triangulo

C erit

(1) *Prop.42.* (2) *Post.2.*
[3] *Prop.2.* (4) *Prop.31.*
(5) *Prop.29.* (6) *Axi.13.*
[7] *Prop.43.*

C erit etiam æquale [1] parallelogrammum HILN. Eſt autem HI æqualis AB, & angulus NHI, velut æqualis angulo EHG, adæquat angulum D, cui ipſe EHG ex conſtructione æqualis eſt, Conſtitutum eſt igitur ſuper rectam HI, ipſi AB æqualem, parallelogrammũ HILN, æquale triangulo C, habens angulum NHI æqualem angulo D. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Hoc problema determinat magis id, quod propoſitione quadrageſima ſecunda poſitum eſt. Ibi enim quærebatur parallelogrammum duplici conditione refertum; una, ut æquale eſſet dato triangulo; altera, ut angulum haberet dato angulo æqualem. Hìc autem quæritur parallelogrammum, quod præter duas illas conditiones debet quoque tertiam habere: ſcilicet, ut conſtitutum ſit ſuper rectam, alteri datæ rectæ lineæ æqualem.

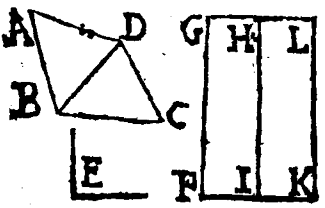
PROP. XLV. PROBL. XIII.

Dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo.

DAta ſit figura quævis rectilinea ABCD, datus verò angulus E. Oportet, conſtituere parallelogrammum, quod æquale ipſi ABCD, habeat angulum æqualem angulo E.

Dividatur figura ABCD per rectam AC

(1) *Axi.* 1.



in duo triangula ABD, BCD. Tum constituatur parallelogrammũ FGHI [1] æquale triãgulo ABD, habens angulum GFI æqualem angulo E. Constituatur porro super rectam HI parallelogrammum aliud [2] HIKL, quod æquale alteri triangulo BCD, habeat quoque angulum HIK æqualem eidem angulo E. Dico, FGLK esse parallelogrammum quæsitum.

Quoniam enim ex constructione eidem angulo E æqualis est tum angulus GFI, cùm angulus HIK, erit (3) angulus GFI æqualis angulo HIK. Quare, apposito communi HIF, erunt (4) duo anguli GFI, HIF æquales duobus angulis HIK, HIF. Sunt autem propter parallelas GF, HI duo anguli GFI, HIF [5] duobus rectis æquales. Erunt igitur æquales etiam duobus rectis duo anguli HIK, HIF: & propterea rectæ duæ IF, IK (6) erunt in directum.

Simili modo ostendetur in directum esse rectas duas GH, HL: quandoquidem anguli GHI, HLK, velut æquales [7] angulis GFI, HIK, æquales sunt inter se. Unde quum sit ex

(1) *Prop*.42. (2) *Prop*.44.
(3) *Axi*.1. (4) *Axi*.2.
[5] *Prop*.19. [6] *Prop*.14.
(7) *Prop*.34.

ex constructione GH parallela ipsi FI, erit tota GL toti FK pariter parallela. Est autem GF ipsi LK [1] etiam parallela, quum utraque ex constructione parallela sit eidem HI. Parallelogrammum est igitur FGLK, quod quum æquale sit rectilineo ABCD, habeatque angulum GFK æqualem angulo E, ipsum erit illud, quod quæritur. Constitutum est itaque parallelogrammum FGLK, æquale rectilineo ABCD, habens angulum æqualem angulo E. Quod facere oportebat.

SCHOLIUM I.

Hoc problema paulò generalius est illo, quod propositum est propositione quadragesima secunda. Ibi enim quærebatur parallelogrammum, quod habens angulum, dato angulo æqualem, æquale esset dato triangulo. Hic verò quæritur parallelogrammum, quod habeat quidem angulum æqualem dato angulo, sed æquale sit ipsum datæ cuilibet figuræ rectilineæ.

SCHOLIUM II.

Cæterùm si figura rectilinea data plura habeat latera, quàm quatuor; atque adeo dividenda esset in plura triangula, quàm duo; tum oportet super rectam LK constituere aliud parallelogrammum æquale tertio triangulo, habens in K angulum æqualem angulo E; sicque pergendum erit in infinitum. Demonstratio autem semper est eadem, ut rem attentè consideranti liquidò patet.

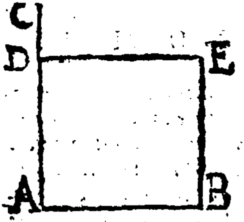
[1] *Prop.*30.

SCHOLIUM III.

Sed quemadmodum in propositione quadragesima quarta ex tradita ratione constituendi parallelogrammum, quod æquale dato triangulo habeat angulum dato angulo æqualem, licuit nobis ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo; ita quoque ex tradita ratione construendi parallelogrammum, quod æquale dato rectilineo habeat angulum æqualem angulo dato, licebit nobis methodo non dissimili ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere in angulo dato.

PROP. XLVI. PROBL. XIV.

In data recta linea terminata quadratum constituere.



Sit data recta linea terminata AB. Oportet, in ipsa quadratum constituere. Ipsi AB ex puncto A [1] perpendicularis erigatur AC, ex qua abscindatur (2) portio AD eidem AB æqualis. Ducantur deinde (3) per puncta B, & D rectæ BE, DE ipsis AD, AB respe-

[1] *Prop.11.* [2] *Prop.3.*
[3] *Prop.31.*

ſpectivè æquidiſtantes. Dico, ABED eſſe quadratum quæſitum.

Eſt enim ABED ex conſtructione parallelogrammum. Quare, quum in parallelogrammo latera (1) oppoſita ſint æqualia, erit, tum AB æqualis ipſi DE, cum AD æqualis ipſi BE. Eſt autem ex conſtructione & AB ipſi AD æqualis. Quatuor itaque AB, AD, DE, BE æquales ſunt inter ſe: proindeque figura ABED æquilatera erit.

Et quoniam ex conſtructione rectus eſt angulus BAD, ob parallelas verò AD, BE duo anguli BAD, ABE (2) duobus rectis æquales ſunt; erit etiam rectus angulus ABE. Jam verò in parallelogrammis anguli oppoſiti (3) æquales ſunt inter ſe. Itaque anguli ADE, BED, velut æquales angulis ABE, BAD, recti pariter erunt: proindeque eadem figura ABED non ſolum æquilatera, verùm etiam rectangula erit; & conſequenter erit [4] quadratum. Conſtitutum eſt igitur in data recta linea terminata AB quadratum ABED. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM I.

Ex ipſa autem problematis hujus demonſtratione colligere licet, quod ſi in parallelogrammo unus angulorum ſit rectus, reliqui etiam recti ſint. Ex eo enim, quod in parallelogrammo ABED rectus ſit ex conſtructione angulus BAD, oſtenſum eſt, reliquos quoque angulos rectos eſſe.

E 5 CO-

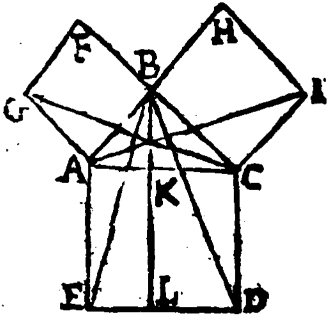
[1] *Prop.*34. [2] *Prop.*29. (3) *Prop.*34. [4] *Def.*30.

COROLLARIUM II.

Sed ex definitione quadrati, vel etiam ex ipsa problematis constructione perspicuum est quoque, quadrata, super æqualibus rectis lineis descripta, æqualia esse inter se. Unde & illud facilè consequitur, quod si vicissim æqualia sint quadrata, æquales etiam esse debeant rectæ lineæ, super quibus quadrata illa sunt descripta.

PROP. XLVII. THEOR. XXXIII.

In triangulis rectangulis quadratum, quod fit ex latere, rectum angulum subtendente, æquale est quadratis laterum, rectum angulum continentium.



Sit triangulũ ABC rectum habens angulum in B. Dico, quadratum ex latere AC, subtendente angulũ rectum, æquale esse quadratis, quæ fiunt ex lateribus BA, BC, eundem angulum rectum continentibus.

De-

Describantur (1) ex singulis trianguli lateribus quadrata. Deinde ducta (2) BL ipsis AE, CD parallela, jungantur tum rectæ BE, BD, cum rectæ CG, AI [3].

Et quoniam ex hypothesi rectus est angulus ABC, & ABF, velut angulus quadrati, similiter est rectus; erunt duo anguli ABC, ABF duobus rectis æquales; & propterea in directum erunt [4] rectæ duæ BC, BF. Unde non modo BF, sed & tota CF ipsi AG parallela erit. Simili ratione ostendetur, in directum esse rectas duas AB, BH, atque adeo non modò BH, sed & totam AH ipsi CI parallelam esse.

Rursus, quia, propter quadrata ABFG, AE, DG, æqualia sunt inter se, tum latera AB, AG, cum latera AC, AE; erunt duo latera AB, AE trianguli BAE æqualia duobus lateribus AG, AC trianguli GAC, alterum alteri. Jam verò æquales sunt etiam anguli BAE, GAC, sub lateribus illis comprehensi; quum uterque ipsorum CAE, BAG ex constructione sit rectus, & utrique communis sit angulus BAC. Erit igitur triangulum BAE æquale (5) triangulo GAC. Est autem [6] trianguli BAE duplum parallelogrammum AELK, & trianguli CAG duplum parallelogrammum, seu quadratum ABFG. Quare erit (7) parallelogrammum AELK æquale quadrato ABFG.

Simili modo, ope triangulorum DCB, ACI ostendetur, parallelogrammum CDLK æ-

[1] *Prop.46.* [2] *Prop.31.*
(3) *Post.1.* (4) *Prop.14.*
(5) *Prop.4.* (6) *Prop.41.*
(7) *Axi.6.*

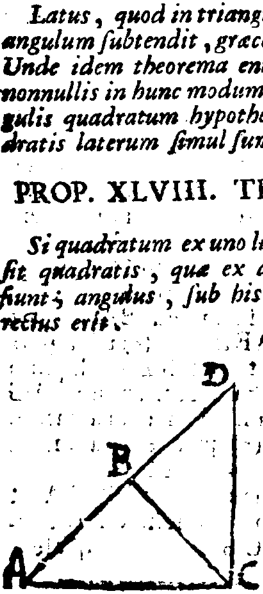
quale esse quadrato BCIH: Unde erit quadratum totum ACDE, æquale duobus quadratis simul sumptis ABFG, BCIH. Et propterea in triangulis rectangulis quadratum ex latere, rectum angulum subtendente, æquale est quadratis, quæ fiunt ex lateribus rectum angulum continentibus. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Latus, quod in triangulis rectangulis rectum angulum subtendit, græcè dicitur hypothenusa. Unde idem theorema enunciari quoque solet à nonnullis in hunc modum: in triangulis rectangulis quadratum hypothenusæ æquale est quadratis laterum simul sumptis.

PROP. XLVIII. THEOR. XXXIV.

Si quadratum ex uno latere trianguli æquale sit quadratis, quæ ex aliis duobus lateribus fiunt; angulus, sub his lateribus contentus, rectus erit.



Sit triangulum ABC, & in eo quadratum ex latere AC æquale sit quadratis, quæ fiunt ex lateribus AB, BC. Dico, angulum ABC rectum esse.

Erigatur [1] ex puncto B, super BC per-

(1) *Prop.* 11.

perpendicularis BD, quæ constituatur [1] ipsi AB æqualis, & jungatur [2] DC.

Quoniam igitur ex constructione AB est æqualis BD, erit etiam quadratum ex AB æquale quadrato ex BD. Quare apposito communi quadrato ex BC, erunt quadrata duo; alterum ex AB, alterum ex BC, æqualia [3] duobus quadratis, quæ fiunt ex BD, & BC. Est autem ex hypothesi quadratum lateris AC æquale quadratis laterum AB, BC; & ob triangulum DBC, rectum habens angulum in B, quadratum hypothenusæ DC est æquale (4) quadratis laterum BD, BC. Itaque erit [5] quadratum ex AC æquale quadrato ex DC: & propterea AC ipsi DC æqualis erit.

Quum igitur triangula duo ABC, DBC habeant duo latera BA, BC æqualia duobus lateribus BD, BC, alterum alteri, itemque basim AC æqualem basi DC; habebunt quoque [6] angulum ABC æqualem angulo DBC. Est autem angulus DBC ex constructione rectus: itaque rectus quoque erit angulus ABC. Et propterea, si quadratum ex uno latere trianguli æquale sit quadratis, quæ ex aliis duobus lateribus fiunt, angulus, sub his lateribus contentus, rectus erit. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Hoc theorema est conversum præcedentis. Ibi enim ex eo, quod triangulum sit rectangulum, osten-

---

[1] *Prop.*3. [2] *Post.*1.
(3) *Axi.*2. (4) *Prop.*47.
[5] *Axi.*1. [6] *Prop.*8.

ostensum est, quadratum lateris, rectum angulum subtendentis, æquale esse quadratis, quæ fiunt ex lateribus rectum angulum continentibus. Hîc verò per contrarium ex eo, quod quadratum lateris unius æquale sit quadratis, quæ fiunt ex aliis duobus lateribus, ostenditur, triangulum esse rectangulum, & rectum esse angulum illum, quem latus illud subtendit.

GEO-

GEOMETRIÆ PLANÆ ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

I.

OMne parallelogrammum rectangulum dicitur factum, seu contentum sub duobus lateribus, quæ rectum angulum comprehendunt. *Nempe quia alterum ex iis lateribus designat longitudinem, alterum latitudinem parallelogrammi rectanguli. Quod de parallelogrammo obliquangulo dici non potest, quia ex duobus lateribus, quæ sunt circa ipsius angulum aliquem, etsi unum designet longitudinem ejus, alterum tamen, velut inclinatum ad primum, ejusdem latitudinem nequaquam ostendit.*

Parallelogrammum rectangulum vocabitur in posterum simpliciter rectangulum, ejusque contentum habebitur, multiplicando inter se mutuò latera, quæ rectum angulum comprehendunt. Unde, si fuerit quadratum, propter æqualitatem laterum, satis erit, unum ex ejus lateribus in se ipsum ducere, ut quadrati area, seu contentum habeatur.

Sed notandum hoc loco est aream rectanguli *oriri quidem ex multiplicatione laterum, quæ sunt circa angulum rectum, eamque quadrati ex multiplicatione unius ex ejus lateribus per seipsum; verum aliam esse mensuram laterum, aliam mensuram rectangulorum, vel quadratorum: nempe longitudines laterum mensurantur per pedes lineares, areas verò rectangulorum, vel quadratorum per pedes quadratos, hoc est per quadrata, super pedibus linearibus descripta.*

Itaque si ex lateribus, quæ sunt circa angulum rectum alicujus parallelogrammi rectanguli, unum quidem sit pedum trium, alterum pedum quinque, area rectanguli erit pedum quadratorum 15. quia multiplicando 3. per 5. producitur 15. Et similiter si latus quadrati sit pedum sex, quadrati area erit pedum quadratorum 36. quia multiplicando numerum 6. per se ipsum, producitur 36.

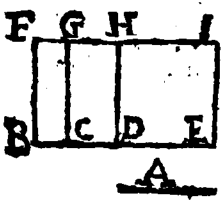
I.

Unumquodque parallelogrammorum circa diametrum una cum duobus supplementis, Gnomon vocetur. *Unde si Gnomoni addatur parallelogrammum alterum circa diametrum exsistens, figura tota orietur.*

PROP. I. THEOR. I.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, una quidem secta in quotcumque partes, altera verò insecta, rectangulum, quod fit ex tota, & insecta æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex partibus totius, & eadem insecta.

Sint duæ rectæ lineæ A quidem insecta, BE, verò secta in tres partes BC, CD, DE. Di-



Dico, rectangulum, quod fit ex BE in A; æquale esse tribus rectangulis, uni ex BC in A, alteri ex CD in A, tertio ex DE in A.

Erigatur [1] ex puncto B super BE perpendicularis BF, quæ ipsi A (2) constituatur æqualis. Tum ducta per punctum F recta FI ipsi BE parallela [3], excitentur ex punctis C,D,E perpendiculares aliæ CG, DH, EI, quæ conveniant cum FI in punctis G, H, I.

Et quoniam rectæ BF, CG, DH (4) æquales sunt inter se, estque BF ipsi A æqualis ex constructione; erit eidem A æqualis, tam recta CG, quàm recta DH. Jam verò ex quatuor rectangulis EF, CF, DG, EH primum quidem continetur sub lateribus BE, BF, secundum sub lateribus BC, BF, tertium sub lateribus CD, CG, & quartum sub lateribus DE, DH. Quare ex iisdem quatuor rectangulis EF, CF, DG, EH primum quidem fiet ex BE in A, secundum ex BC in A, tertium ex CD in A, & quartum ex DE in A. Est autem rectangulum EF ipsis CF, DG, EH simul sumptis æquale: totum enim omnes suas partes simul sumptas adæquat. Itaque rectangulum, quod fit ex tota BE in A, æquale erit tribus rectangulis, uni ex BC in A, alteri ex CD in A, & tertio ex DE in A. Ac propterea, si duæ fuerint rectæ lineæ, una quidem

secta

[1] *Prop.*11.*lib.*1. (2) *Prop.*3.*lib.*1.
(3) *Prop.*31.*lib.*1. [4] *Prop.*34.*lib.*1.

secta in quotcumque partes, altera verò insecta, rectangulum, quod fit ex tota, & insecta, æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex partibus totius, & eadem insecta. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Hac cum sequentibus novem propositionibus potest numeris illustrari. Nempe si A sit quatuor pedum, & BE pedum quatuordecim, subinde divisa in punctis C, & D, ut BC sit pedum duorum, CD quinque, & DE semptem; erit rectangulum ex BE in A pedum quadratorum 56; rectangulum ex BC in A pedum quadratorum 8; rectangulum ex CD in A pedum quadratorum 20; & rectangulum ex DE in A pedum quadratorum 28. Unde quia postremi isti tres numeri 8, 20, & 28 simul sumpti adæquant priorem numerum 56; liquet, rectangulum ex tota BE in A æquale esse tribus rectangulis, uni ex BC in A, alteri ex CD in A, & tertio ex DE in A.

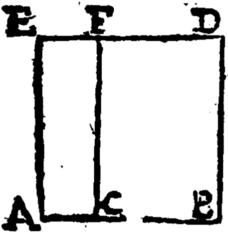
PROP. II. THEOR. II.

Si recta linea secta fuerit utcumque, quadratum, quod fit à tota, æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex tota, & partibus.

Sit recta AB, secta utcumque in C. Dico, quadratum ex AB æquale esse duobus rectangulis, uni ex AB in AC, alteri ex AB in BC.

Describatur [1] super AB quadratū ABDE, & du-

(1) *Prop.46. lib.1.*



& ducatur (1) per punctum C recta CF ipsis AE, BD parallella.

Quoniã igitur ABDE quadratum est, erit ipsi AB æqualis, tum AE, cum BD. Jam verò ex duobus rectangulis CE, CD primum quidem continetur sub lateribus AE, AC; alterum sub lateribus BD, BC. Quare ex iisdem duobus rectangulis CE, CD primum quidem fiet ex AB in AC, alterum ex AB in BC. Est autem quadratum totũ ABDE rectangulis CE, CD simul sumptis æquale: totum enim omnes suas partes simul sumptas adæquat. Itaque quadratum, quod fit ex tota AB, æquale erit duobus rectangulis, uni ex AB in AC, alteri ex AB in BC. Et propterea, si recta linea secta fuerit utcumque, quadratum, quod fit à tota, æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex tota, & partibus. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

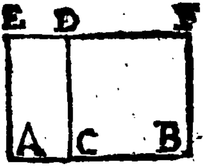
Sit AB pedum decem, subinde divisa in C, ut AC sit pedum quatuor, BC pedum sex. Erit igitur quadratum ex AB pedum quadratorum 100; *rectangulum ex AB in AC pedum quadratorum* 40; *& rectangulum ex AB, in BC pedum quadratorum* 60. *Duo autem isti numeri* 40, *&* 60 *simul conficiunt* 100. *Itaque quadratum ex AB æquale est rectangulis duobus, uni ex AB in AC, alteri ex AB in BC.*

PROP.

[1] *Prop.*31. *lib.*1.

PROP. III. THEOR. III.

Si recta linea secta fuerit utcumque, rectangulum ex tota, & parte una æquale erit rectangulo sub partibus, una cum quadrato quod fit ex parte prædicta.



Sit recta AB secta utcumque in C. Dico, rectangulum ex tota AB, & parte una BC æquale esse rectangulo sub ipsis partibus AC, BC, una cum quadrato, quod fit ex parte illa BC.

Describatur (1) etenim super BC quadratum BCDF, & ducatur per punctum A recta AE [2] ipsis CD, BF parallela, quæ conveniat cum FD producta in E.

Quoniam igitur BCDF ex constructione quadratum est, erit ipsi BC æqualis tum recta BF, cùm recta CD. Unde, quum rectangulum AF contineatur sub lateribus AB, BF, & rectangulum AD sub lateribus AC, CD; fiet rectangulum quidem AF ex tota AB, & parte una BC, rectangulum verò AD ex ipsis partibus AC, BC. Est autem rectangulum AF ipsis AD, CF simul sumptis æquale. Rectangulum igitur ex tota AB, & parte una BC æquale erit rectangulo sub ipsis partibus AC, BC, una cum quadrato, quod fit ex parte illa BC. Et propterea, si recta linea secetur ut-

(1) *Prop.46.lib.*1. [2] *Prop.31.lib.*1.

utcumque, rectangulum, quod fiet ex tota, & parte una, æquale erit rectangulo sub partibus, una cum quadrato, quod fit ex parte prædicta. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Sit recta tota AB pedum octo, secta subinde in puncto C, ut AC sit pedum trium, BC pedum quinque. Erit igitur rectangulum ex tota AB, & parte una BC pedum quadratorum 40; rectangulum sub ipsis partibus AC, BC pedum quadratorum 15; & quadratum ex parte BC pedum quadratorum 25. Unde, quum duo isti posteriores numeri 15, & 25 simul additi conficiant priorem 40; erit rectangulum ex tota AB, & parte una BC æquale rectangulo sub ipsis partibus AC, BC, una cum quadrato ex parte illa BC.

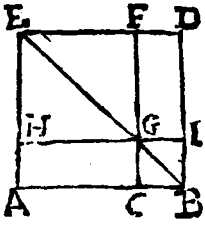
PROP. IV. THEOR. IV.

Si recta linea secetur utcumque, quadratum, quod fit à tota; æquale erit quadratis partium, una cum rectangulo, bis sub partibus contento.

Sit recta AB secta utcumque in C. Dico, quadratum ex AB æquale esse quadratis partium AC, BC, una cum rectangulo, quod bis sub ipsis partibus AC, BC continetur.

Describatur etenim [1] super AB quadratum ABDE, & juncta BE, agatur [2] per punctum C recta CF ipsis AE, BD parallela, quæ

(1) *Prop.46.lib.1.* (2) *Prop.31.lib.1.*



quæ ſecet ipſam BE in G. Denique per punctum G ducatur recta HI parallela ipſis AB, ED.

Et quoniam propter quadratum ABDE æqualia ſunt latera AB, AE, erit triangulum BAE iſoſceles; adeoque [1] angulus ABE æqualis erit angulo AEB. Eſt autem, propter parallelas AE, CF, angulus AEB (2) æqualis angulo CGB. Itaque erit [3] angulus ABE æqualis angulo CGB; atque adeo latera CB, CG, quæ in triangulo BCG angulos illos ſubtendunt, inter ſe (4) æqualia erunt. Unde, quum ſit [5] CB æqualis GI, & CG æqualis BI, erunt quatuor lineæ BC, CG, GI, IB inter ſe æquales; & conſequenter figura BCGI æquilatera erit. Sed eſt etiam rectangula: habet enim, propter quadratum ABDE, angulum CBI rectũ; & in parallelogrammis ubi unus angulorum eſt rectus, reliqui etiam recti eſſe debent. Eſt igitur figura BCGI æquilatera, & rectangula; adeoque quadratum, & quadratum, quod fit ex parte BC.

Simili ratione oſtendetur, figuram EFGH quadratum eſſe ex HG, ſeu AC. Nam, propter quadratum ABDE. æqualia ſunt latera DB, DE. Quare triangulum BDE iſoſceles erit; adeoque angulus DBE æqualis erit angulo

gulo

(1) *Prop.5. lib.1.* (2) *Prop.29. lib.1.*
[3) *Axi.1.* [4] *Prop.6 lib.1.*
[5] *Prop.34. lib.1.*

gulo DEB. Sed, propter parallelas BD, CF, idem angulus DBE æqualis est angulo FGE: & propterea latera FE, FG, quæ in triangulo, EFG angulos illos subtendunt, pariter æqualia erunt. Est autem EF æqualis HG, & FG æqualis EH. Quatuor igitur EF, FG, GH, HE inter se æquales erunt; atque adeo figura EFGH æquilatera erit. Estque etiam rectangula, quum propter quadratum ABDE habeat angulum FEH rectum. Itaque quadratum erit; & quadratum, quod fit ex parte AC, quæ est æqualis ipsi HG.

Sunt igitur FH, CI quadrata partium AC, BC. Sed rectangulum AG, velut contentum sub lateribus AC, CG, fit ex ipsis partibus AC, BC. Et rectangulum DG, velut æquale (1) ipsi AG, fit similiter ex ipsis partibus AC, BC. Quare, quum quadratum totum ABDE ipsis FH, CI, AG, DG simul sumptis æquale sit; erit quadratum ex tota AB æquale quadratis partium AC, BC, una cum rectangulo, quod bis sub ipsis partibus AC, BC continetur. Et propterea, si recta linea secetur utcumque, quod à tota fit quadratum, æquale erit quadratis partium, una cum rectangulo bis sub partibus contento. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Ex ipsa autem hujus theorematis demonstratione perspicuum est, parallelogramma, quæ sunt circa diagonalem quadrati, esse etiam quadrata. Sunt enim FH, CI parallelogramma, exsi-

[1] *Prop.43.lib.*1.

exsistentia circa diagonalem quadrati ABDE, quorum utrumque ostensum est, quadratum esse.

SCHOLIUM.

Sit recta AB pedum octo, secta subinde in C, ut AC sit pedum quinque, BC pedum trium. Erit igitur quadratum ex tota AB pedum quadratorum 64; quadratum ex parte AC pedum quadratorum 25; quadratum ex parte alia BC pedum quadratorum 9; & rectangulum bis contentum sub ipsis partibus AC, BC pedum quadratorum 30. Unde, quia tres isti posteriores numeri 25, 9, 30 simul additi dant priorem 64; liquidò patet, quadratum ex tota AB æquale esse quadratis partium AC, BC, una cum rectangulo, quod bis sub ipsis partibus AC, BC continetur.

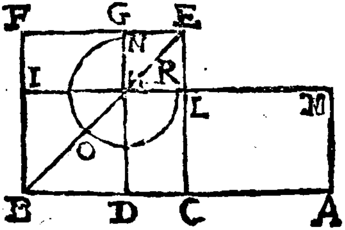
PROP. V. THEOR. V.

Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam, erit rectangulum ex partibus inæqualibus, una cum quadrato portionis, quæ inter utramque sectionem interjicitur, æquale ei, quod à dimidia describitur quadrato.

SIt recta AB secta bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, rectangulum ex partibus inæqualibus AD, DB, una cum quadrato portionis CD, inter utramque sectionem interjectæ, æquale esse quadrato ex dimidia BC.

Describatur etenim [1] super BC quadratum

[1] *Prop, 46. lib. 1.*



tum BCEF; & compleatur figura, prout eam schema repræsentat.

Quoniam igitur CH, HF sūt supplemēta eorum, quæ sunt circa diametrum, erunt ea (1) æqualia inter se. Quare, addito communi DI, erit [2] CI æquale ipsi DF. Est autem [3] CI æquale CM: sunt enim parallelogramma, quæ habent bases æquales, & sunt in iisdem parallelis constituta. Et igitur (4) DF ipsi CM æquale erit; adeoque apposito rursus communi CH, erit rectangulum totum AH æquale gnomoni NOR.

Jam rectangulū istud AH continetur sub lateribus AD, DH. Sed parallelogrammum DI, quum existat circa diagonalem quadrati, est etiam quadratum; adeoque DH est æqualis DB. Fiet igitur rectangulum idem AH ex partibus AD, DB; & consequenter rectangulū ex partibus AD, DB æquale erit gnomoni NOR. Addatur cōmune GL, quod est quadratum ex parte intermedia CD; & erit rectangulum ex partibus inæqualibus AD, DB, una cum quadrato portionis intermediæ CD æquale gnomoni NOR, una cum GL. Gnomon autem NOR, una cum GL, est

F qua-

(1) *Prop.43. lib.1.* (2) *Axi.2.*
(3) *Prop.36. lib.1.* (4) *Axi.1.*

quadratum totum BGEF. Itaque rectangulum sub partibus inæqualibus AD, DB una cum quadrato portionis CD, inter utramque sectionem interjectæ, æquale erit quadrato, quod fit ex dimidia BC. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Ex quo patet, rectangulum ADB æquale esse differentiæ quadratorum BC, CD. Ostensum est enim, rectangulum ADB, hoc est sub partibus AD, DB, una cum quadrato ex CD, æquale esse quadrato ex CB. Quare dempto communi quadrato ex CD, fiet rectangulum ADB æquale differentiæ quadratorum, quæ sunt ex BC, & CD.

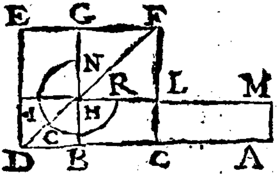
SCHOLIUM.

Sit recta AB pedum decem, quæ quum secta sit bifariam in C, erit tam AC, quàm BC pedum quinque. Sit autem eadem AB subinde secta non bifariam in D, ut AD sit pedum septem, DB pedum trium: adeo ut portio inter utramque sectionem interjecta CD sit pedum duorum. Erit igitur rectangulum ADB pedum quadratorum 21; quadratum ex CD pedum quadratorum 4; & quadratum ex BC pedum quadratorum 25. Unde, quum priores duo numeri 21, & 4 simul additi dent postremum 25; erit rectangulum ADB, una cum quadrato portionis intermediæ CD, æquale quadrato ex dimidia BC.

PROP.

PROP. VI. THEOR. VI.

Si recta linea secetur bifariam, eique alia in directum adjiciatur; erit rectangulum, quod fit ex tota, & adjecta, velut ex unica linea, in ipsam adjectam, una cum quadrato dimidiæ, æquale quadrato, quod fit ex dimidia, & adjecta, similiter tamquam ex unica linea.



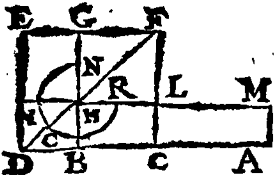
Sit recta AB secta bifariam in C, eique in directum sit adjecta alia BD. Dico, rectangulum, quod fit ex AD in DB, una cum quadrato dimidiæ BC, æquale esse quadrato, quod fit ex GD.

Describatur etenim super CD (1) quadratum CDEF, & compleatur figura, quam schema repræsentat.

Et quoniam AL, CH sunt parallelogramma duo, quæ habent bases æquales, & sunt in iisdem parallelis constituta, ea æqualia (2) erunt inter se. Est autem [3] CH æquale ipsi HE, quum sint supplementa eorum, quæ sunt circa diametrum. Quare erit AL ipsi HE æquale [4]; & consequenter apposito communi CI, erit rectangulum totum AI (5) æquale gnomoni NOR.

 Jam

[1] *Prop.46.lib.1.* (2) *Prop.36.lib.1.*
[3] *Prop.43.lib.1.* [4] *Axi.1.*
(5) *Axi 2.*



Jam rectangulum AI continetur sub lateribus AD, DI. Sed parallelogrammum BI, quum existat circa diagonalem quadrati, est etiam quadratum; adeoque DI est æqualis DB. Fiet igitur rectangulum idem AI ex AD in DB; & consequenter rectangulum ex AD in DB æquale erit gnomoni NOR. Addatur commune GL, quod est quadratum, quod fit ex BC. Itaque erit rectangulum ex AD in DB, una cum quadrato ex BC, æquale gnomoni NOR, una cum GL. Gnomon autem NOR, una cum GL, constituit quadratum totum CDEF. Idem igitur rectangulum ex AD in BD, una cum quadrato dimidiæ BC, æquale erit quadrato, quod fit ex CD. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Unde patet, rectangulum ADB æquale esse differentiæ quadratorum BC, CD. Ostensum est enim, rectangulum ADB, una cum quadrato ex BC, æquale esse quadrato, quod fit ex CD. Quare dempto communi quadrato ex BC, supererit rectangulum ADB æquale differentiæ quadratorum BC, CD.

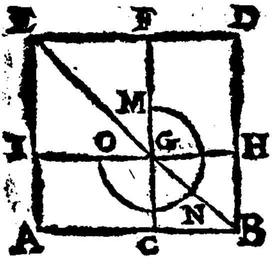
SCHOLIUM.

Sit recta AB pedum decem, quæ quum secta sit bifariam in C, erit tam AC, quàm BC pedum

dum quinque. Sit portio BD pedum duorum, ita ut ipsa AD, quæ componitur ex tota AB, & adjecta BD, sit pedum duodecim, & ipsa CD, quæ componitur ex dimidia AC, & adjecta BD, sit pedum septem. Erit igitur rectangulum ADB pedum quadratorum 24; quadratum ex BC pedum quadratorum 25; & quadratum ex CD pedum quadratorum 49. Unde, quia priores duo numeri 24, & 25 simul additi constituunt postremum 49.; dicendum est, rectangulum ADB, una cum quadrato ex BC, æquale esse quadrato ex CD.

PROP. VII. THEOR. VII.

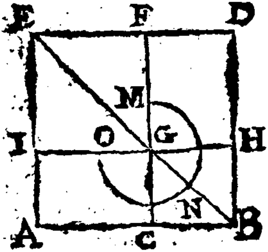
Si recta linea secetur utcumque, quadrata, quæ fiunt ex tota, & parte una, æqualia erunt rectangulo bis contento sub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius.



Sit recta AB, secta utcumque in C. Dico, quadrata duo, alterum ex tota AB, alterum ex parte BC, simul sumpta, æqualia esse rectangulo bis contento sub tota AB, & dicta parte BC, una cum quadrato, quod fit ex parte altera AC.

Describatur etenim (1) super AB quadratum

[1] *Prop. 46. lib. 1.*



tum ABDE, & compleatur figura, prout eam schema repræsentat.

Quoniam igitur parallelogramma duo AG, DG, velut supplementa eorum, quæ circa diametrum sunt, inter se sunt (1) æqualia; addito communi CH, erit totum AH toti CD [2] pariter æquale; adeoque utraque simul AH, CD dupla erunt unius AH. Sed AH, CD simul constituunt gnomonem MNO, una cum CH, quod est quadratum ex BC; & rectangulum AH, velut contentum sub lateribus AB, BH, fit ex tota AB, & parte BC. Gnomon igitur MNO, una cum quadrato ex BC, æqualis erit rectangulo bis contento sub tota AB, & parte BC. Addatur rursus IF, quod est quadratum ex AC. Et erit quadratum ex tota AB una cum quadrato ex parte BC æquale rectangulo bis contento sub tota AB, & dicta parte BC, una cum quadrato partis alterius AC. Proindeque, si recta linea secetur utcumque, quæ à tota, & parte una describuntur quadrata, æqualia erunt rectangulo bis contento sub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

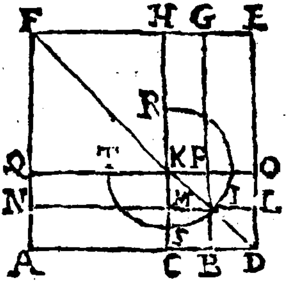
[1] *Prop.43.lib.1.* [2] *Axi.2.*

SCHOLIUM

Sit recta AB pedum decem, secta subinde in C, ut AC sit pedum septem, BC pedum trium. Erit igitur quadratum ex tota AB pedum quadratorum 100; quadratum ex parte BC pedum quadratorum 9; rectangulum bis contentum sub tota AB, & dicta parte BC pedum quadratorum 60; & quadratum ex parte altera AC pedum quadratorum 49. Unde, quia priores duo numeri 100, & 9 simul tantundem constituunt, quantum posteriores duo 60, & 49; liquet, quadrata, quæ fiunt ex tota AB, & parte una BC, æqualia esse rectangulo bis contento sub tota AB, & dicta parte BC, una cum quadrato partis alterius AC.

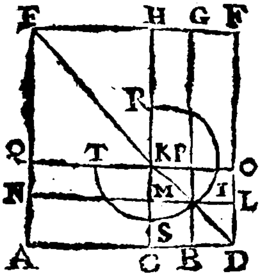
PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si recta linea secetur utcumque, quadratum, quod fit ex tota, & parte una, velut ex unica linea, æquale erit rectangulo quater contento sub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius.



Sit recta AB, secta utcumque in C, extendaturque usque in D, ut sit BD æqualis BC. Dico, quadratum ex AD, quæ componitur ex tota AB, & parte una BC, æquale esse rectangulo quater contento

 tento



tento sub tota AB, & dicta parte BC, una cum quadrato partis alterius AC.

Describatur etenim [1] super AD quadratum ADEF, & compleatur figura, prout eam schema exhibet.

Quoniam igitur ex constructione BC est æqualis BD, erit q uoque IM æqualis IL, & PK æqualis PO: unde erit, tum BM æquale BL, cum PM æquale PL (2). Est autem BM [3[æquale PL. Quatuor igitur BM, PM, PL, BL inter se mutuò æqualia erunt: & propterea omnia simul, constituentia quadratum CDOK, æqualia erunt quadruplo unius BM.

Rursus, quia BL quadratum est, erit BD ipsi DL, seu CM æqualis. Est autem BD æqualis BC, seu PK; & propter quadratum PM est PK æqualis KM. Itaque erit CM ipsi KM æqualis: proindeque parallelogramma duo CN, MQ, velut constituta in æqualib us basibus, & in iisdem parallelis, inter se æqualia erunt.

Jam ob eamdem rationem æqualia sunt quoque parallelogramma PE, PH. Quum igitur duo MQ, PH, velut supplementa eorum, quæ circa diametrum sunt, inter se sint æqualia; erunt quatuor CN, MQ, PE, PH æqua-

(1) *Prop.46.lib.1.* [2] *Prop.36.lib.1.*
(3) *Prop.43.lib.1.*

qualia inter se mutuò; & propterea omnia simul æqualia erunt quadruplo unius CN.

Ostensum est autem, quatuor BM, PM, PL, BL simul esse etiam quadrupla unius BM, Octo igitur BM, PM, PL, BL, CN, MQ, PE, PH, constituentia gnomonem RST, quadrupla erunt ipsius AI: atque adeo, quia AI rectangulum est ex AB, & BC, quum BI sit æqualis ipsi BD, seu BC, erit gnomon RST æqualis rectangulo quater contento sub AB, & BC.

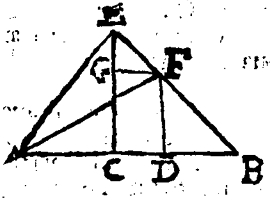
Addatur jam commune QH, quod est quadratum ex AC; & erit gnomon RST una cum QH, hoc est quadratum totum ADEF æquale rectangulo quater contento sub AB, & BC, una cum quadrato ipsius AC. Proindeque, si recta secetur utcumque, erit quadratum; quod fit ex tota, & parte una velut ex unica linea, æquale rectangulo quater contento sub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Sit recta AB pedum octo, secta subinde in C, ut AC sit pedum sex, BC pedum duorum. Itaque quia AD sit pedum decem, erit quadratum ex AD pedum quadratorum 100. *Est autem rectangulum quater contentum sub AB, & BC pedum quadratorum* 64, *& quadratum ex AC pedum quadratorum* 36. *Quum igitur duo isti numeri* 64, *&* 36 *simul additi constituant priorem* 100; *evidens est, quadratum ex AD æquale esse rectangulo quater contento sub tota AB, & parte una BC, una cum quadrato alterius partis AC.*

PROP. IX. THEOR. IX.

Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam, quadrata partium inæqualium dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & portione inter utramque sectionem interjecta.



Sit recta AB, secta bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata, quæ fiunt ex partibus inæqualibus AD, BD, dupla esse quadratorum, quæ fiunt ex dimidia AC, & portione inter utramque sectionem interjecta CD.

Erigatur [1] etenim ex puncto C perpendicularis CE, quæ ipsi AC, seu BC constituatur (2) æqualis. Jungantur deinde rectæ AE BE, & erecta ex puncto D perpendiculari alia DF, agatur (3) per punctum F recta FG parellela ipsi AB, jungaturque AF.

Quia igitur ex constructione AC est æqualis CE, isosceles est triangulum ACE, adeoque angulus CAE æqualis [4] erit angulo CEA. Est autem angulus ACE rectus. Itaque, quum omnes anguli cujuscumque trianguli duobus rectis æquales [5] esse debeant, semirectus erit tam angulus CAE, quàm angulus CEA. Eadem ratione ostendetur, semire-

[1] *Propp.*11.*lib.*1. (2) *Prop.*3. *lib.*1. (3) *Prop.*31.*lib.*1. [4] *Prop.*5. *lib.*1. [5] *Prop.*32. *lib.*1.

rectum esse, tum angulum CBE, cum angulum CEB: ex quo sequitur, totum angulum AEF rectum esse.

Rursus, quoniam in triangulo BDF, rectangulo in D, angulus DBF; velut æqualis angulo CBE, semirectus est, erit alter angulus DFB pariter semirectus. Quare latera BD, DF, angulos illos subtendentia, etiam (1) æqualia erunt. Atque ita quoque, quoniam in triangulo EGF, rectangulo in G, semirectus est angulus GFE, erit itidem semirectus angulus alter GEF; proindeque latera EG, GF, quæ subtendunt angulos illos, inter se pariter æqualia erunt.

Præterea, quia triangulum ACE est rectangulum in C; erit (2) quadratum ex AE æquale quadratis, quæ fiunt ex AC, & CE. Sed duo ista quadrata sunt æqualia, quum ex constructione æquales sint ipsæ AC, CE. Itaque erit quadratum ex AE duplum quadrati ex AC. Eadem ratione, quia triangulum EGF est rectangulum in G, erit quadratum ex EF æquale quadratis, quæ fiunt ex EG, & GF; atque adeo, quum æqualia sint duo ista quadrata, erit quadratum ex EF duplum quadrati ex GF, seu CD.

Quum igitur ostensum sit, quadratum ex AE duplum esse quadrati ex AC, & quadratum ex EF duplum quadrati ex CD; erunt quadrata ex AE, & EF dupla quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CD. Jam verò propter triangulum AEF, rectangulum in E, quadrata ex AE, & EF æqualia sunt quadrato ex

(1) *Prop.6. lib.2.*
(3) *Prop.47. lib.1.*

AF; quod rursus propter triangulum ADF, rectangulum in D, æquale est quadratis ex AD, & DF, sive etiam ex AD, & DB. Quadrata igitur ex AD, & DB dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CD. Proindeque, si recta linea secta fuerit bifariam, & non bifariam, quadrata partium inæqualium dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & portione inter utramque sectionem interjecta. Quod demonstrare oportebat.

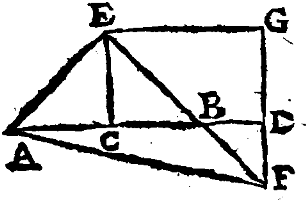
SCHOLIUM.

Sit recta AB pedum decem, quæ quum secta sit bifariam in C, erit tam AC, quam BC pedum quinque. Secetur autem eadem AB subinde non bifariam in D, ut AD sit pedum septem, & DB pedum trium, adeo ut portio inter utramque sectionem interjecta CD sit pedum duorum. Erit igitur quadratum ex AD pedum quadratorum 49; quadratum ex DB pedum quadratorum 9: quadratum ex AC pedum quadratorum 25; & quadratum ex CD pedum quadratorum 4. Unde, quia priores duo numeri 49, & 9 simul additi conficiunt 58, posteriores autem 25, & 4 simul conjuncti dant 29, estque numerus 58 duplus ipsius 29; liquet, quadrata partium inæqualium AD, BD dupla esse quadratorum, quæ fiunt ex dimidia AC, & portione intermedia CD.

PROP. X. THEOR. X.

Si recta linea secetur bifariam, eique alia in directum adjiciatur; quadrata duo, unum ex tota, & adjecta, velut ex unica linea, alterum ex ipsa adjecta, dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & ea, quæ componitur ex dimidia, & adjecta.

Sit

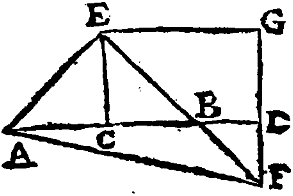


Sit recta AB, secta bifariam in C, eique in directū sit adjecta alia BD. Dico, quadrata duo, alterum ex AD, quæ componitur ex tota AB, & adjecta BD, alterum ex ipsa adjecta BD, dupla esse quadratorum, quæ fiunt ex AC dimidia, & ex CD, quæ componitur ex dimidia BC, & adjecta BD.

Erigatur etenim (1) ex puncto C perpendicularis CE, quæ ipsi AC, seu CB constituatur (2) æqualis. Jungantur deinde rectæ AE, BE; & erecta ex punto D perpendiculari alia DF, quæ conveniat cum EB producta in F, jungatur AF; & ducatur (3) per punctum E recta EG, ipsi AB parallela, quæ cum FD producta conveniat in G.

Quia igitur ex constructione AC est æqualis CE, isosceles est triangulum ACE; adeoque angulus CAE æqualis (4) erit angulo CEA. Est autem angulus ACE rectus. Itaque, quum omnes anguli cujuscumque trianguli simul duobus rectis æquales (5) esse debeant, semirectus erit, tam angulus CAE, quàm angulus CEA. Eadem ratione ostendetur, semirectum esse, tum angulum CBE, cum an-

(1) *Prop.*11. *lib.*1. (2) *Prop.*3. *lib.*1.
(3) *Prop.*31. *lib.*1. (4) *Prop.*5. *lib.*1.
(5) *Prop.*32. *lib.*1.



angulum CEB: ex quo sequitur, totum angulum AEF rectum esse.

Rursus, quoniam in triangulo BDF, rectangulo in D, angulus DBF, velut [1] æqualis angulo CBE, semirectus est, erit alter angulus DFB pariter semirectus. Quare latera DB, DF, angulos illos subtendentia, etiam (2) æqualia erunt. Atque ita quoque quoniam in triangulo EGF, rectangulo in G, semirectus est angulus GFE, erit itidem semirectus angulus alter GEF; proindeque latera EG, GF, quæ subtendunt angulos illos, inter se pariter æqualia erunt.

Præterea, quia triangulum ACE est rectangulum in C, erit [3] quadratum ex AE æquale quadratis, quæ fiunt ex AC, & CE. Sunt autem duo ista quadrata æqualia inter se, quum ex constructione æquales sint ipsæ AC, CE. Itaque erit quadratum ex AE duplum quadrati ex AC. Eadem ratione, quia triangulum EGF est rectangulum in G, erit quadratum ex EF æquale quadratis, quæ fiunt ex EG, & GF; atque adeo, quum æqualia sint duo ista quadrata, erit quadratum ex EF duplum quadrati ex EG, seu CD.

Quum igitur ostensum sit, quadratum ex AE duplum esse quadrati ex AC, & quadratum

---

[1] *Prop.15.lib.1.* [2] *Prop.6.l.1.*
[3] *Prop.47.l.1.*

tum ex EF duplum quadrati ex CD; erunt quadrata ex AE, & EF simul dupla quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CD. Jam verò propter triangulum AEF, rectangulum in E, quadrata ex AE, & EF simul æqualia sunt quadrato ex AF; quod rursus propter triangulum ADF, rectangulum in D, æquale est quadratis ex AD, & DF, sive etiam ex AD, & DB. Quadrata igitur ex AD, & BD dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CD. Proindeque, si recta linea secetur bifariam, eique alia in directum adjiciatur: quadrata duo, unum ex tota, & adjecta, velut ex unica linea, alterum ex ipsa adjecta, dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & ex ea, quæ componitur ex dimidia, & adjecta. Quod demonstrare oportebat.

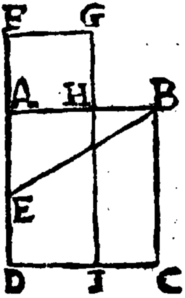
SCHOLIUM.

Sit recta AB pedum octo, quæ quum secta sit bifariam in C, *erit tam AC, quàm BC pedum quatuor. Sit autem adjecta BD pedum duorum; ita, ut AD, quæ componitur ex tota, & adjecta, sit pedum decem; & CD, quæ componitur ex dimidia, & adjecta, sit pedum sex. Erit igitur quadratum ex AD pedum quadratorum* 100, *quadratum ex BD pedum quadratorum* 4; *quadratum ex AC pedum quadratorum* 16, *& quadratum ex CD pedum quadratorum* 36. *Unde, quia priores duo numeri* 100, *&* 4 *simul additi conficiunt* 104, *posteriores autem* 16, *&* 36 *simul conjuncti dant* 52, *estque numerus* 104 *duplus ipsius* 52; *liquet, quadrata ex AD, & BD dupla esse quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CD.*

PROP.

PROP. XI. PROBL. I.

Datam rectam lineam subinde dividere, ut rectangulum, quod fit ex tota, & parte una, æquale sit quadrato partis alterius.



Data sit recta AB. Oportet, eam subinde dividere in puncto aliquo, ut rectangulum, sub tota, & parte una contentum, adæquet quadratum, quod describitur ex parte altera.

Describatur (1) super AB quadratum ABCD, & secetur [2] latus AD bifariam in E. Jungatur deinde BE, & extendatur DA usque in F, ut sit EF ipsi BE æqualis. Denique super AF describatur quadratum AFGH. Dico, rectam AB subinde divisam esse in H, ut rectangulum ex tota AB, & parte una BH æquale sit quadrato alterius partis AH.

Quoniam enim recta AD secta est bifariam in E, eique in directum est adjecta alia AF, erit rectangulum ex DF in FA, una cum quadrato ex AE æquale (3) quadrato ex EF. Est autem quadratum ex EF æquale quadrato ex EB, quum ex constructione æquales sint ipsæ EB, EF. Itaque erit rectangulum ex DF in FA, una cum quadrato ex AE æquale quadrato, quod fit ex BE.

Jam

[1] *Prop.46.lib.1.* (2) *Prop.10.lib.1.*
[3] *Prop.6. hujus.*

Jam quadratum ex BE, propter triangulum BAE, rectangulum in A, est æquale (1) quadratis, quæ fiunt ex AB, & AE. Idem igitur rectangulum ex DF in FA, una cum quadrato ex AE, æquale erit quadratis, quæ fiunt ex AB, & AE. Quare ablato communi quadrato ex AE, supererit rectangulum ex DF in FA æquale quadrato ex AB.

Porro, quia AFGH quadratum est, erit FA ipsi FG æqualis; adeoque rectangulum DG, velut contentum sub lateribus DF, FG, illud erit, quod fit ex DF in FA. Est autem ABCD quadratum ex AB. Erit igitur rectangulum DG æquale ipsi ABCD. Unde ablato communi DH, fiet AG æquale ipsi BI.

Quum itaque AG sit quadratum ex AH, & rectangulum BI, velut contentum sub lateribus CB, BH, fiat ex AB in BH; erit rectangulum ex AB in BH æquale quadrato ex AH. Et propterea recta data AB subinde secta est in puncto H, ut rectangulum, quod fit ex tota AB, & parte una BH, æquale sit quadrato alterius partis AH. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

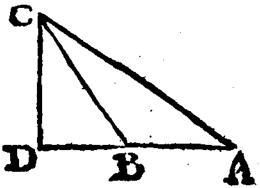
Hæc propositio nullis numeris potest illustrari. Neque enim duos numeros licet reperire, qui hujusmodi sint; ut id, quod oritur, multiplicando summam ipsorum per unum eorumdem, æquale sit quadrato alterius numeri.

PROP. XI. THEOR. XI.

In triangulis obtusangulis, quadratum, quod fit

(1) *Prop.47. lib.1.*

fit ex latere, obtusum angulum subtendente, majus est quadratis; quæ fiunt ex lateribus, obtusum angulum continentibus, rectangulo bis contento sub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum obtusum adjungit ei perpendicularis ex opposito angulo demissa.



Sit triangulum ABC, quod habeat in B angulum obtusum. Dico, quadratum ex latere AC, subtendente angulũ obtusum, majus esse quadratis, quæ fiunt ex lateribus AB, BC, angulum obtusum continentibus, rectangulo bis contento sub uno eorum laterum AB, & portione BD, quam prope angulum obtusum adjungit ei perpendicularis CD, quæ demittitur ex angulo opposito.

Quoniam enim recta AD secta est utcumque in B, erit (1) quadratum ex tota AD æquale quadratis partium AB, BD, una cum rectangulo bis contento sub ipsis partibus AB, BD. Apponatur commune quadratum ex DC. Et erunt quadrata ex AD, & DC æqualia quadratis ex AB, BD, & DC, una cum rectangulo bis contento sub AB, & BD.

Jam duo quadrata AD, DC, propter triangulum ADC, rectangulum in D, æqualia sunt [2] quadrato ex AC. Itaque erit quadratum ex AC æquale quadratis ex AB, BD, & DC, una cum rectangulo bis contento sub AB, & BD.

(1) *Prop.4. hujus.* [2] *Prop.47. lib.1.*

BD. Sunt autem propter triangulum BDC, rectangulum in D, quadrata ex BD, & DC æqualia quadrato ex BC. Quare erit quadratum ex AC æquale quadratis ex AB, & BC, una cum rectangulo bis contento sub AB, & BD.

Quum igitur quadratum ex AC æquale sit quadratis ex AB, & BC, una cum rectangulo bis contento sub ipsis AB, BD; erit quadratum ex AC majus quadratis ex AB, & BC eodem illo rectangulo bis contento sub AB, & BD. Proindeque in triangulis obtusangulis quadratum ex latere, obtusum angulum subtendente, majus est quadratis laterum, obtusum angulum comprehendentium, rectangulo bis contento sub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum obtusum adjungit ei perpendicularis ex opposito angulo demissa. Quod erat demonstrandum.

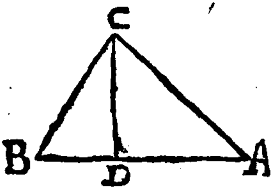
COROLLARIUM.

Si perpendiculari CD in infinitum diminuta, vertex trianguli C ad basim accedat, fiet AC æqualis AD, & BC æqualis BD; proindeque propositio ista in quartam hujus vertetur. Nam, quum ostensum sit, quadratum ex AC æquale esse quadratis ex AB, & BC una cum rectangulo bis contento sub ipsis AB, BD; subrogatis loco ipsarum AC, BC lineis AD, BD, fiet quadratum totius AD æquale quadratis partium AB, BD, una cum rectangulo bis contento sub ipsis partibus AB, BD.

PROP. XIII. THEOR. XII.

In triangulis acutangulis quadratum, quod fit ex latere, acutum angulum subtendente, mi-

minus est quadratis, quæ fiunt ex lateribus, acutum angulum continentibus, rectangulo iis contento sub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum acutum abscindit ex eo perpendicularis ex opposito angulo demissa.



Sit triangulũ ABC, habens angulum acutum in B. Dico, quadratum ex latere AC, subtendente angulum acutum B, minus esse quadratis laterum AB, BC, eumdem angulum acutum comprehendentium, rectangulo bis contento sub uno eorum laterum AB, & portione BD, quam prope angulum acutum abscindit ex eo perpendicularis CD ex opposito angulo demissa.

Quoniam enim recta AB secta est utcumque in D, erunt [1] quadrata duo, unum ex tota AB, alterum ex parte BD æqualia rectangulo bis contento sub tota AB, & dicta parte BD, una cum quadrato alterius partis AD. Quare apposito communi quadrato ex CD, erunt quadrata tria, unum ex AB, alterum ex BD, tertium ex DC, æqualia rectangulo bis contento sub AB, & BD, una cum quadratis ipsarum AD, CD. Sunt autem duo ista quadrata, propter triangulum ADC, rectangulum in D, æqualia (2) quadrato ex AC. Itaque eadem tria quadrata ex AB, BD, & CD æqualia erunt rectangulo bis contento sub

(1) *Prop.7. hujus.* (2) *Prop.47. lib.1.*

ſub AB, & BD, una cum quadrato ex AC.

Quadratum igitur ex AC una cum rectangulo bis contento ſub AB, & BD æquale eſt quadratí, quæ fiunt ex AB, BD, & CD. Jam verò quadrata ex BD, & CD, ob triangulum BDC, rectangulum in D, æqualia ſunt quadrato ex BC. Quare erit quadratum ex AC; una cum rectangulo bis contento ſub AB, & BD æquale quadratis, quæ fiunt ex AB, & BC: proindeque quadratum ex AC minus erit quadratis, quæ fiunt ex AB, & BC rectangulo bis contento ſub AB, & BD. In triangulis igitur acutangulis quadratum ex latere, acutum angulum ſubtendente, minus eſt quadratis laterum, acutum angulum comprehendentium, rectangulo bis contento ſub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum acutum abſcindit ex eo perpendicularis ex oppoſito angulo demiſſa. Quod erat oſtendendum.

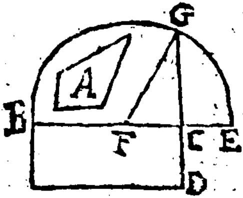
COROLLARIUM.

Si perpendiculari CD in infinitum diminuta, accedat trianguli vertex ad baſim, cadet AC ſuper AD, & BC ſuper BD: quare propoſitio iſta vertetur in ſeptimam hujus. Oſtenſum eſt enim, quadrata ex AB, & BC æqualia eſſe rectangulo bis contento ſub AB, & BD, una cum quadrato ex AC. Itaque ſubſtitutis loco ipſarum AC, BC portionibus AD, BD, fient quadrata duo, alterum ex tota AB, alterum ex parte BD, æqualia rectangulo bis contento ſub tota AB, & dicta parte BD, una cum quadrata alterius partis AD.

PROP.

PROP. XIV. PROBL. II.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.



Data sit figura quævis rectilinea A. Oportet, ei æquale quadratum constituere.

Describatur parallelogrammum BCD æquale (1) datæ figuræ rectilineæ A, habens angulum BCD rectum. Tum siquidem BC æqualis sit ipsi CD, erit eadem figura non solum rectangula, verum etiam æquilatera; adeoque, quum quadratum sit; ea problemati satisfaciet. Si verò BC non sit æqualis CD, extendatur BC versus E, & constituatur CE æqualis [2] CD. Porro secetur BE [3] bifariam in F, & descripto centro F, intervalloque FB, seu FE semicirculo BGE, extendatur DC usque in G. Dico, quadratum ex CG æquale esse figuræ rectilineæ datæ A.

Jungatur enim FG. Et quoniam recta BE secta est bifariam in F, & non bifariam in C, erit (a) rectangulum ex partibus inæqualibus BC, CE, una cum quadrato portionis intermediæ CF, æquale quadrato dimidiæ FE. Est autem FE æqualis FG, quum sint lineæ ductæ à centro ad circumferentiam: Idem igitur re-

[1) *Prop.45.lib.1.* (2) *Prop.3.lib.1.*
(3) *Prop.10.lib.1.* [4] *Prop.5. hujus.*

rectangulum ex BC in CE, una cum quadrato ex CF, æquale est quadrato ex FG. Sed, propter triangulum FCG, rectangulum in C, quadratum ex FG æquale est quadratis, quæ fiunt ex CF, & CG. Itaque rectangulum ex BC in CE, una cum quadrato ex CF, æquale erit quadratis, quæ fiunt ex CF, & CG. Auferatur commune quadratum ex CF, & remanebit [1] rectangulum ex BC in CE æquale quadrato ex CG. Est autem BD rectangulum ex BC in CE, quum ex constructione sit CD æqualis CE. Rectangulum igitur BD æquale est quadrato ex CG. Unde, quum idem rectangulum BD factum sit æquale figuræ A, erit eidem A æquale quoque quadratum ex CG. Et propterea datæ figuræ rectilineæ A constitutum est æquale quadratum ex CG. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM. I.

Ex ipsa autem problematis hujus demonstratione liquet, quod si ex puncto aliquo, in circuli circumferentia sumpto, perpendicularis ad diametrum demittatur, quadratum ejus æquale sit rectangulo, sub diametri segmentis comprehenso. Ostensum est enim, quadratum, quod fit ex CG, æquale esse rectangulo, quod fit ex BC in CE.

COROLLARIUM. II.

Vicissim verò, si quadratum ex CG æquale sit rectangulo ex BC in CE, locabitur punctum

G, *in*

[1] *Axi.3.*

G in circumferentia circuli, quæ refertur ad diametrum BE. Nam, quum quadratum ex CG æquale ſit rectangulo BCE, appoſito communi quadrato ex CF, erunt quadrata ex CG, & CF æqualia rectangulo BCE, una cum CF quadrato. Sed quadrata ex CG, & CF æqualia ſunt quadrato ex FG, & rectangulum BCE, una cum CF quadrato, æquale eſt quadrato ex FE. Quare erit quadratum ex FG æquale quadrato ex FE: & propterea, quum FG æqualis ſit ipſi FE, locabitur punctum G in circumferentia circuli, quæ deſcribitur centro F, intervalloque FE.

GEOMETRIÆ PLANÆ ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

I.

Circuli æquales dicuntur illi, quorum radii, vel diametri sunt æquales. *Oritur namque circulus ex revolutione radii circa suum centrum. Quare semper ac radii sunt æquales, æquales etiam necesse est, ut sint circuli, qui ex eorum radiorum revolutione describuntur.*

II.

Recta linea dicitur tangere circulum, quum ei ita quidem occurrit, ut producta eum non secet. *Quod si autem recta linea subindè circulum offendat, ut producta illum secet, tunc recta illa dicetur circulum secare.*

III.

Circulus circulum contingere dicitur, quãdo ita quidem sibi mutuò occurrunt, ut portio unius non cadat intra portionem alterius: *Quod si autem occurrant sibi invicem circuli duo, sed portio unius cadat intra portionem alterius, tunc dicentur duo illi circuli se mutuò secare.*

IV.

Duæ rectæ lineæ dicuntur æqualiter distare à centro circuli, quum perpendiculares, quæ à centro super iis demittuntur, inter se sunt æquales. *Dimetiendæ sunt enim distantiæ per rectas omnium brevissimas, cujusmodi non aliæ sunt, quàm perpendiculares.*

V.

Quod si autem perpendicularis, quæ à centro super unam demittitur, major sit perpendiculari, quæ ab eodem centro ducitur super aliam, tunc illa dicetur magis à centro distare, quàm ista.

VI.

Angulus ad centrum vocatur ille, qui habet verticem in ipso centro. Is verò, cujus vertex est in circumferentia, angulus ad circumferentiam vocitatur. *Ostendetur autem in hoc libro, quod quum duo isti anguli super eumdem arcum insistunt, angulus ad centrum duplus sit anguli ad circumferentiam.*

VII.

Angulus in portione est angulus rectilineus, cujus vertex est in portione, latera verò transeunt per extremitates portionis. *Patebit autem ex inferius ostendendis, eos, qui in eadem portione sunt, angulos inter se æquales esse.*

VIII.

Angulus portionis est angulus mixtilineus, quem arcus ejus portionis constituit cum recta, quæ arcum illum subtendit. *Recta autem, quæ in circulo arcum aliquem subtendit, chorda ejus arcus vocitatur.*

IX.

Similes circulorum portiones dicuntur illæ,

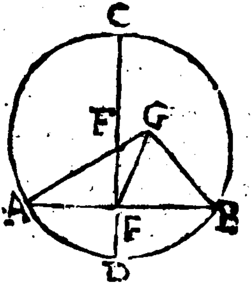
illæ, quæ suscipiunt angulos æquales: *hoc est, quando anguli in iis portionibus existentes sunt æquales inter se. In quo autem consistat hæc similitudo, libro sexto ostendetur.*

X.

Sector circuli est portio ejus, quam duæ rectæ lineæ, è centro egredientes, & angulum ibidem constituentes, continent cum arcu, quem intercipiunt. *Unde si duæ rectæ lineæ non egrediantur è centro, aut etiam angulum ibidem non constituant, portio circuli iis rectis, & intercepto arcu contenta, nequaquam sector appellabitur.*

PROP. I. PROBL. I.

Dati circuli centrum invenire.

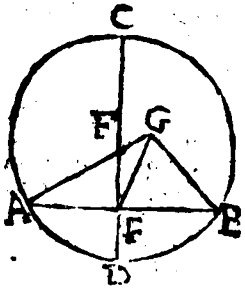


Datus sit circulus ABC. Oportet, centrum ejus invenire.

Sumantur in ejus circumferentia duo quælibet puncta A, & B, quæ jungantur per rectam AB. Tum secetur(1) AB bifariam in puncto E, ex quo perpendicularis(2) erigatur EF, eaque extendatur usque donec circuli circumferentiam utrimque secet in C, & in D. Denique secetur ipsa CD bifariam quoque in puncto F. Dico, in CD esse centrum circuli,

G 2 & esse

[1] *Prop.* 10 *lib.* 1. (2) *Prop.* 11 *lib.* 1.



& esse propriè punctum F.

Si enim fieri potest, sit centrum circuli extra rectam CD in G, & jungantur AG, EG, BG. Quia igitur ex constructione AE est æqualis BE, communis verò GE, erunt duo latera AE, GE trianguli GEA æqualia duobus lateribus BE, GE trianguli GEB, alterum alteri. Est etiam basis unius GA æqualis basi alterius GB, quum sint ductæ à puncto G, quod supponitur esse centrum circuli, ad circumferentiam ipsius. Quare erit (1) angulus GEA æqualis angulo GEB. Unde, quum recta GE efficiat cum AB angulos deinceps æquales, rectus erit (2) uterque æqualium angulorum. Rectus igitur est angulus GEA: Sed ex constructione rectus est angulus FEA. Quare erit angulus GEA æqualis angulo FEA: quod fieri non potest. Non igitur centrum circuli est extra rectam CD; proindeque erit in ipsa CD, eritque propriè punctum F, quod eam dividit bifariam. Et propterea dati circuli ABC inventum est centrum F. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

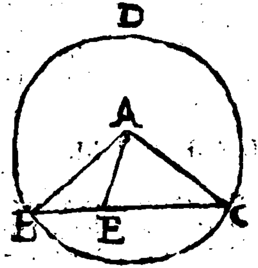
Ex hoc perspicuum est, quod si in circulo re- *cta*

[1] *Prop.8.lib.1.* [2] *Def.10.lib.1.*

cta quædam linea secet aliam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos, in secante sit centrum circuli. Ostensum est enim, centrum dati circuli ABC esse in recta CD, quæ dividit ex constructione ipsam AB bifariam, & ad angulos rectos in E.

PROP. II. THEOR. I.

Si in circuli circumferentia duo puncta sumantur: quæ puncta ista conjungit recta linea, intra circulum cadet.

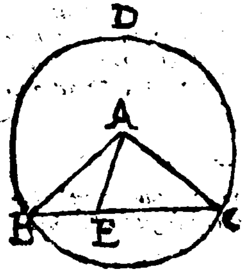


In circumferentia circuli BCD sumantur duo quævis puncta B, & C, quæ jungantur per rectam BC. Dico, rectam istam BC intra circulum cadere.

Sumatur etenim in ipsa BC punctum aliquod E, & reperto (1) centro circuli A, jungantur AB, AE, AC.

Quia igitur AB est æqualis AC, erit triangulum BAC isosceles; adeoque angulus ABC æqualis erit (2) angulo ACB. Jam autem in triangulo ABE latus BE productum est in C, atque adeo angulus AEC [3] major est angulo ABE. Idem igitur angulus AEC major erit quoque angulo ACE: & propterea, quia majori lateri [4] major angulus opponitur, erit

[1] *Prop.1.hujus.* [2] *Prop.5.lib.1.*
[3] *Prop.16.lib.1.* [4] *Prop.19.lib.1.*



erit AC major, quam AE. Unde, quum AC pertingat ad circuli circumferentiam, AE ad eam usque pertingere nequit. Cadit igitur punctum E intra circulum. Sed eadem est demonstratio de omnibus aliis punctis ipsius BC. Tota igitur BC intra circulum cadit. Et propterea, si in circuli circumferentia duo puncta sumantur, quæ puncta ista conjungit recta linea, intra circulum cadet. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Liquet autem ex hoc theoremate, circuli circumferentiam concavitate sua centrum respicere. Nam omnis curva linea ad eam semper partem est concava, ad quam cadit recta linea, quæ duo ejus puncta contingit: Id, quod ex ipsa circuli generatione liquet etiam abundè.

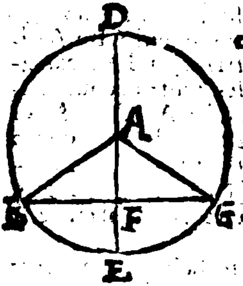
COROLLARIUM II.

Sed illud etiam ex hoc theoremate licet inferre, tangentem in unico tantùm puncto circuli circumferentiæ occurrere. Nam, si ei occurreret in duobus punctis, caderet intra circulum; adeoque non tangens, sed secans esset.

PROP. III.

PROP. III. THEOR. II.

Si recta linea per centrum ducta aliam rectam lineam non ductam per centrum bifariam secet, secabit ad angulos rectos; & si secet ad angulos rectos, secabit bifariam.



Per centrum circuli A ducatur recta DE, quæ secet aliam BG non ductam per centrum bifariam in F. Dico, secare quoque eam ad angulos rectos.

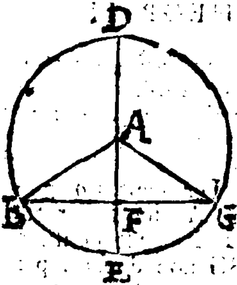
Jungantur enim rectæ AB, AG. Et quoniam ex hypothesi BF est æqualis GF, communis verò AF; erunt duo latera AF, BF trianguli AFB æqualia duobus lateribus AF, GF trianguli AFG, alterum alteri. Est etiam basis unius AB æqualis basi alterius AG, quum sint lineæ ductæ à centro ad circumferentiam. Quare erit (1) angulus AFB æqualis angulo AFG: & propterea, quum recta DE secet ipsam BG ad angulos æquales, secabit eamdem ad angulos rectos (2).

Sed eadem recta DE, ducta per centrum circuli A, secet aliam BG ad angulos rectos in F. Dico, secare quoque eam bifariam.

Nam junctis adhuc rectis AB, AG, ob istarum æqualitatem, isosceles erit triangulum

G 4 BAG,

[1] *Prop.8.lib.1.* [2] *Def.10.lib.1.*



BAG; adeoque angulus ABG æqualis erit angulo AGB. Est autem angulus AFB æqualis quoque angulo AFG, quum uterque ex hypothesi sit rectus. Duo igitur anguli ABF, AFB trianguli BAF æquales sunt duobus angulis AGF, AFG trianguli GAF, alter alteri. Unde, quum eadem triangula habeant latus AF commune, habebunt quoque [1] latus BF æquale lateri GF: & propterea recta BG secta erit bifariam in F.

Itaque, si in circulo recta linea, per centrum ducta, secet aliam non ductam per centrum bifariam, secabit eam ad angulos rectos; & si secet ad angulos rectos, secabit bifariam. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I U M.

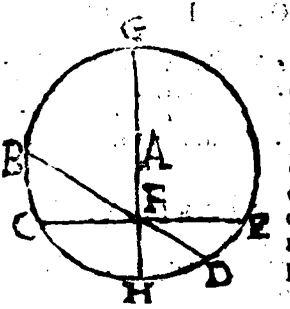
Hujus theorematis, ut vides, duæ sunt partes; quarum altera alteram convertit. Sed utraque convertit quoque id, quod in Corollario primæ hujus ostensum est. Unde non ab re erit hic advertere, quod quum in circulo aliqua recta linea secat aliam non ductam per centrum, tria contingere possint; primum, ut linea secans transeat per centrum circuli; alte-

[1] *Prop. 26. lib. 1.*

terum, ut secet aliam bifariam; & tertium, ut eamdem secet ad angulos rectos. Ex his autem tribus si duo quælibet ponantur, tertium quoque necessariò poni debet. Nempe primò, si transeat per centrum circuli, & secet aliam non transeuntem per centrum bifariam, secabit eam ad angulos rectos. Secundò, si transeat per centrum circuli, & secet aliam ad angulos rectos, secabit bifariam. Et tertiò, si secet aliam cùm bifariam, tum ad angulos rectos, transibit per centrum circuli.

PROP. IV. THEOR. III.

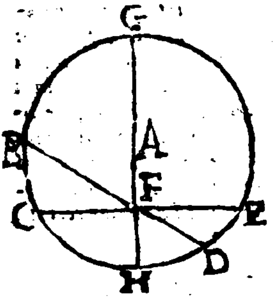
In circulo si duæ rectæ lineæ sese in centro non secent, utraque bifariam non secabitur.



In circulo BCDE, cujus centrum sit punctum A, rectæ duæ BD, CE se mutuò secent in puncto F, quod diversum sit à puncto A, Dico, utramque earum rectarum bifariam non posse secari.

Si enim fieri potest, secetur utraque ipsarum BD, CE bifariam in F, jungaturque AF. Quia igitur recta AF per centrum ducta secat ipsas BD, CE non ductas per centrum bifariam in F, secabit quoque eas [a] ad angulos rectos. Rectus itaque erit,

[a] *Prop. 3. hujus.*



tum angulus AFB cum angulus AFC. Quod, quum fieri non possit, dicendum est, utramque ipsarum BD, CE non posse bifariam secari. Et propterea, si in circulo duæ rectæ lineæ sese in centro non secent, utraque bifariam non secabitur. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

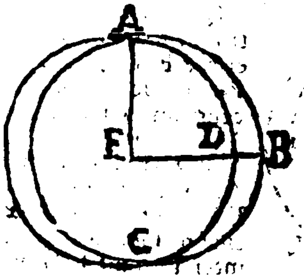
In hac propositione sedulò notare oportet; duarum linearum, quæ in circulo sese in centro non secant, utramque quidem bifariam non secari. Nam, quin una secari queat bifariam, nulli dubium esse potest.

PROP. V. PROBL. IV.

Circuli, qui se mutuò secant, non possint unum, idemque centrum habere.

Sint duo circuli ABC, ADC, qui se mutuò secent in punctis A, & C. Dico, duos istos circulos non posse unum, idemque centrum habere.

Si enim fieri potest, habeant unum, idemque centrum, & sit punctum E. Tum juncta AE, ducatur utcumque recta EDB, quæ utrius-



utriusque circumferentiam secet in punctis D, & B.

Quia igitur E centrum est circuli ABC, erit AE æqualis EB. Et similiter, quia E centrum est circuli ADC, erit AE æqualis ED. Eidem igitur AE æqualis est tum EB, tum ED. Sed Quæ eidem sunt æqualia inter se sunt (1) æqualia. Erit igitur EB æqualis ED, quod fieri non potest. Non igitur duo circuli, qui se mutuò secant, possunt unum idemque centrum habere. Quod erat ostendendum.

PROP. VI. THEOR. V.

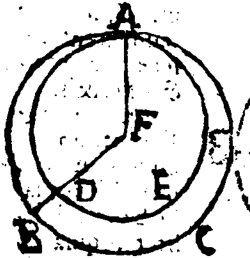
Si duo circuli sese intus contingant, non possunt unum, idemque centrum habere.

Sint duo circuli ABC, ADE, qui sese intus contingant in A. Dico, duos istos circulos non posse unum, idemque centrum habere.

Si enim fieri potest, habeant unum, idemque centrum, quod sit punctum F. Tum juncta AF, ducatur utcumque recta FDB, quæ secet utriusque circumferentiam in punctis D, & B.

 Quia

(1) *Axi.1.*



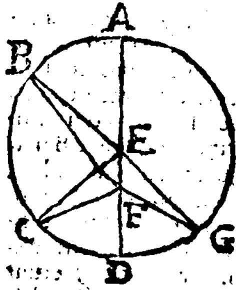
Quia igitur F centrum est circuli ABC, erit AF æqualis FB. Pariterque, quia F centrum est circuli ADE, erit AF æqualis FD. Eidem igitur AF æqualis est, tum FB cùm FD. Sed quæ eidem sunt æqualia, inter se sunt [1] æqualia. Erit igitur FB æqualis FD, quod fieri non potest. Non igitur duo circuli, qui intus sese contingunt, possunt unum, idemque centrum habere. Quod erat ostendendum.

PROP. VII. THEOR. VI.

Si in circuli diametro capiatur punctum aliquod, quod non sit centrum, & ex eo ducantur ad circumferentiam plures aliæ rectæ lineæ; earum omnium maxima quidem erit illa, quæ transit per centrum; minima verò reliqua portio diametri; aliarum autem, quæ maximæ propinquiores sunt, majores erunt semper remotioribus; & ab illo eodem puncto, nonnisi duæ rectæ lineæ æquales duci poterunt.

SIt circulus ABCD, cujus diameter recta AD, centrum punctum E. Sumatur in diametro AD punctum quodvis aliud F, ex quo ducantur ad circumferentiam plures aliæ

[1] *Axio.1.*



liæ rectæ lineæ, ut FB, FC. Dico primò, omnium illarum linearum maximam esse rectam FA, quæ transit per centrum circuli E.

Jungantur enim EB, EC. Et quoniam EB est æqualis EA, addita communi EF, erunt duæ EF, EB æquales (1) ipsi FA. Sunt autem duæ EF, EB majores (2) quàm FB: nempe, quia in omni triangulo duo latera sunt reliquo majora. Quare EA eadem FB etiam major erit. Simili ratiocinio, ostendetur FA majorem esse quacumque alia recta linea, quæ à puncto F cadit ad circumferentiam. Igitur FA erit omnium maxima.

Dico secundò, reliquam portionem diametri FD esse omnium minimam.

Nam in triangulo CEF duo latera, EF, FC majora sunt reliquo EC. Sed propter circulum EC est æqualis ED. Duæ igitur EF, FC majores erunt ipsa ED: proindeque ablata communi EF, erit FC major quoque quàm FD (3). Est igitur FD minor, quàm FC. Unde, quum simili ratiocinio ostendatur, FD minorem esse quacumque alia recta linea, quæ à puncto F cadit ad circumferentiam, erit FD omnium minima.

Dico

[1] *Axi.2.* [2] *Prop.20.lib.1.*
[3] *Axi.3.*

Dico tertiò, aliarum linearum, quæ ipsi FA propinquiores sunt, majores esse semper remotioribus, nempe FB majorem esse, quàm FC.

Nam quum propter circulum EB sit æqualis EC, communis verò EF; erunt duo latera EB, EF trianguli BEF æqualia duobus lateribus EC, EF trianguli CEF, alterum alteri. Est autem angulus BEF, contentus sub lateribus illius major angulo CEF, qui sub illius lateribus continetur. Itaque erit basis FB major quoque [1] basi FC. Quumque eadem sit demonstratio de omnibus aliis rectis lineis, quæ à puncto F cadunt ad circumferentiam, dicendum est, rectas ipsi FA propinquiores majores esse remotioribus.

Dico denique, ab eodem puncto F nonnisi duas rectas æquales duci posse: nempe ipsi FC unicam tantum ex parte altera duci posse æqualem, & non plures.

Fiat enim ad rectam AD, atque ad datum in ea punctum E angulus FEG æqualis [2] angulo FEC, & jungatur FG. Quia igitur duo latera EC, EF trianguli CEF æqualia sunt duobus lateribus EG, EF trianguli GEF, alterum alteri, & anguli sub lateribus illis comprehensi ex constructione pariter

riter

[1] *Prop.24.lib.1.* [2] *Prop.23.lib.1.*

riter sunt æquales; erunt quoque æquales [1] bases eorumdem triangulorum FC, FG. Ipsi igitur FC ducta est ex parte altera alia æqualis FG. Plures autem duci non possunt. Nam, vel cadunt supernè, & velut ipsi FA propinquiores majores sunt, quàm FG, atque adeò majores quoque, quam FC; vel cadunt infernà, & per contrarium velut magis distantes ab FA minores sunt, quàm FG, ac propterea minores quoque, quam FC.

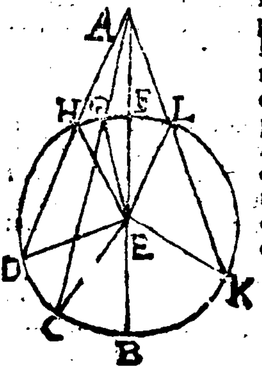
Concludamus igitur, quod si in circuli diametro sumatur punctum aliquod, quod non sit centrum, & ab eo ducantur ad circumferentiam plures aliæ rectæ lineæ; omnium istarum linearum maxima quidem sit illa, quæ transit per centrum circuli; minima verò reliqua portio diametri; aliarum autem, quæ maximæ sunt propinquiores, majores sint semper remotioribus; & ab illo eodem puncto nonnisi duæ rectæ lineæ æquales duci possint. Quod erat demonstrandum.

PROP. VIII. THEOR. VII.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ex quo ducantur plures rectæ lineæ, tum ad concavam, cùm ad convexam circuli circumferentiam; earum utique, quæ pertingunt ad concavam, maxima quidem erit illa, quæ transit per centrum, aliarum verò, quæ maximæ sunt propinquiores, majores erunt semper remotioribus; vicissim autem illarum, quæ pertingunt ad convexam, minima quidem erit illa,

[5] *Prop.4.lib.1.*

illa, quæ producta transit per centrum, aliarum verò, quæ minimæ sunt propinquiores, minores erunt semper remotioribus; & ab illo eodem puncto, tum ad concavam, cùm ad convexam circuli circumferentiam nonnisi duæ rectæ lineæ æquales duci poterunt.



Ex puncto A, fumpto extra circulum BCD, ducantur primò ad concavam ejus circumferentiã plures rectæ lineæ AB, AC, AD, quarum prior AB tranfeat per centrũ circuli E. Dico, omnium iftarum linearum maximam quidem effe ipfam AB, aliarum verò, quæ ipfi AB propinquiores funt, majores effe femper remotioribus, nempe AC majorem effe, quàm AD.

Jungantur enim rectæ EC, ED. Et quoniam propter circulum EB eft æqualis EC, communis verò AE, erit tota AB æqualis duabus AE, EC. Sed duæ iftæ AE, EC majores funt ipfa AC: in omni enim triangulo (1.) duo latera fimul reliquo majora funt, quomodocumque fumpta. Igitur AB major quoque erit, quàm AC. Et quum eadem ratione oftendatur major quacumque alia recta

(1) *Prop.20. lib.1.*

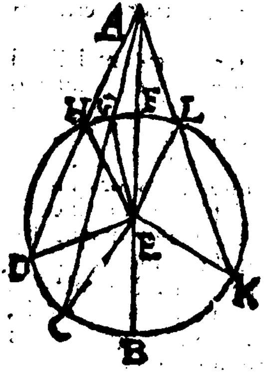
cta linea, quæ ab assumpto puncto A cadit ad concavam circuli circumferentiam, erit AB omnium maxima.

Deinde, quia propter circulum EC est æqualis ED, communis verò AE, erunt duo latera AE, EC trianguli AEC æqualia duobus lateribus AE, ED trianguli AED, alterum alteri. Est autem angulus AEC, contentus sub lateribus illius, major angulo AED, qui sub istius lateribus continetur. Itaque erit [1] basis AC major quoque basi AD. Quumque eadem sit demonstratio de omnibus aliis rectis lineis, quæ à puncto A cadunt ad concavam circuli circumferentiã, dicendum est, rectas ipsi AB propinquiores majores esse semper remotioribus.

Ex eodem puncto A ducantur secundò ad convexam circuli circumferentiam plures rectæ lineæ AF, AG, AH, quarum prior AF transeat producta per centrum E. Dico, omnium aliarum istarum linearum minimam esse rectam AF, reliquarum verò, quæ ipsi AF propinquiores sunt, minores esse semper remotioribus, nempe AG minorem esse, quàm AH.

Jungantur enim rectæ EG, EH. Et quoniam, propter triangulum AGE, duo latera AG, GE majora sunt [2] reliquo AE, estque, propter circulum, GE æqualis FE; erit AG major etiam, quam AF. Pariterque, quia, propter triangulum AHE, duo latera AH, HE majora sunt reliquo AE, estque propter circulum HE æqualis FE; erit AH major etiam, quàm AF. Quumque eadem ratione

[1] *Prop.24.lib.1.* [2] *Prop.20.lib.1.*



ostendatur, omnem aliam rectam lineam, quæ ab assumpto puncto A cadit ad convexam circuli circumferentiam, majorem esse, quàm AF, erit AF omnium minima.

Deinde quia propter circulum EH est æqualis EG cõmunis verò AE; erunt duo latera AE, EH trianguli AEH æqualia duobus lateribus AE, EG trianguli AEG, alterum alteri. Est autem angulus AEH, contentus sub lateribus illius, major angulo AEG, qui sub istius lateribus continetur. Itaque erit basis AH major quoque [1] basi AG. Quumque eadem sit demonstratio de omnibus aliis rectis lineis, quæ à puncto A cadunt ad convexam circuli circumferentiam dicendum est, rectas ipsi AF propinquiores minores esse semper remotioribus.

Dico demum, ab eodem puncto A, tum ad concavam, cum ad convexam circuli circumferentiam nonnisi duas rectas æquales duci posse: nempe cuique ipsarum AD, AH unicam tantùm ex parte altera duci posse æqualem, & non plures.

Fiat enim ad rectam AB, atque ad datum in

[1] *Prop. 24. lib. 1.*

in ea punctum E Angulus AEK æqualis [1] angulo AED, & jungatur EK. Quia igitur duo latera AE, ED trianguli AED æqualia sunt duobus lateribus AE, EK trianguli AEK, alterum alteri, & anguli sub lateribus illis comprehensi ex constructione pariter sunt æquales; erunt quoque æquales (2) bases eorumdem triangulorum AD, AK. Ipsi igitur AD ducta est ex parte altera alia æqualis AK. Plures autem duci non possunt; Nam vel cadunt infernè, & velut ipsi AB propinquiores, majores sunt, quàm AK, atque adeò majores quoque, quàm AD; vel cadunt supernè, & per contrarium velut magis distantes ab eadem AB, minores sunt, quàm Ak, & consequenter minores quoque, quàm AD.

Simili ratione hoc idem ostendetur relatè ad rectam AH. Nam siquidem ad rectam AB, atque ad datum in ea punctum E constituatur angulus AEL æqualis angulo AEH, jungaturque AL, æquales erunt inter se rectæ duæ AH, AL; adeoque ipsi AH ducta est ex parte altera alia æqualis AL. Plures autem duci non possunt. Nam eadem omnino ratione vel accedunt ad AF, & velut minores, quàm AL, minores quoque erunt, quàm AH; vel recedunt ab eadem AF, & quia majores sunt, quàm AL, majores etiam erunt, quàm AH.

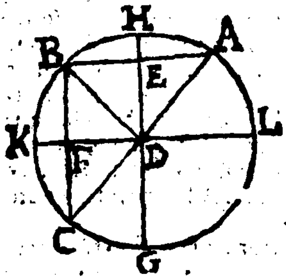
Concludamus igitur, quod si extra circulum sumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur, tum ad concavam, cùm ad convexam circuli circumferentiam plures rectæ lineæ,

[1] *Prop.23.lib.1.* (2) *Prop.4.lib.1.*

neæ, earum quidem, quæ pertingunt ad concavam, maxima sit illa, quæ transit per centrum; aliarum verò, quæ maximæ propinquiores sunt, majores sint semper remotioribus; vicissim autem illarum, quæ pertingunt ad convexam, minima sit illa, quæ producta transit per centrum, aliarum verò, quæ minimæ propinquiores sunt, minores sint semper remotioribus; & ab illo eodem puncto, tam ad concavam, quàm ad convexam circuli circumferentiam nonnisi duæ rectæ lineæ æquales duci possint. Quod erat demonstrandum.

PROP. IX. THEOR. VIII.

Si è puncto, intra circulum sumpto, cadant ad ejus circumferentiam plures, quàm duæ, rectæ lineæ æquales; assumptum punctum erit centrum circuli.



Intra circulum ABC capiatur punctum aliquod D, ex quo cadant ad ejus circumferentiam tres rectæ lineæ æquales DA, DB, DC. Dico, assumptum punctum D esse centrum circuli.

Jungantur enim rectæ AB, BC, quæ secentur [1] bifariam in punctis E, & F, jungan-

[1] *Prop.* 10. *lib.* 1.

ganturque DE, DF, quarum utraque extendatur ulteriùs, illa quidem versus G, & H, ista autem versus k, & L.

Et quoniam ex constructione AE est æqualis BE, communis verò DE; erunt duo latera AE, DE trianguli ADE æqualia duobus lateribus BE, DE trianguli BDE, alterum alteri. Est autem ex hypothesi basis illius DA æqualis basi istius DB. Itaque erit quoque (1) angulus DEA æqualis angulo DEB: & propterea, quum GH secet ipsam AB bifariam, & ad angulos rectos in E, in recta GH erit (2) centrum circuli.

Eadem ratione, quoniam ex constructione BF est æqualis CF, communis verò DF, erunt duo latera BF, DF trianguli BDF æqualia duobus lateribus CF, DF trianguli CDF, alterum alteri. Est autem ex hypothesi basis illius DB æqualis basi istius DC. Erit igitur angulus DFB æqualis quoque angulo DFC; atque adeo, quum recta KL secet ipsam BC bifariam, & ad angulos rectos in F, in recta kL erit centrum circuli.

Est igitur centrum circuli ABC, tam in recta GH, quàm in recta KL. Quare erit in puncto, quod utrique earum linearum commune sit. Jam verò rectæ duæ GH, KL non aliud punctum commune habent, quàm D; quandoquidem duæ rectæ lineæ in unico puncto se secant. Punctum igitur D centrum est circuli ABC. Et propterea, si è puncto, intra circulum sumpto, cadant ad ejus circumferentiam plures, quàm duæ, rectæ lineæ æquales, assumptum punctum erit cen-

[1] *Prop.8. lib.1.* [2] *Corol.1.hujus.*

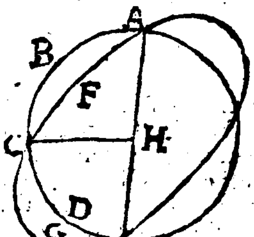
centrum circuli. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

Poterat hoc idem ostendi per septimam hujus. Quum enim in ea ostensum sit, duas tantùm rectas lineas æquales duci posse ad circumferentiam circuli è puncto, quod non sit centrum ejus; liquidò patet, debere esse centrum circuli punctum illud, ex quo cadunt ad ejus circumferentiam plures, quàm duæ, rectæ lineæ æquales.

PROP. X. THEOR. IX.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus, punctis non secat.



Sint duo circuli ABCDE, AFCGE, qui se mutuò intersecent. Dico, eos in pluribus, quàm duobus, punctis non posse secari.

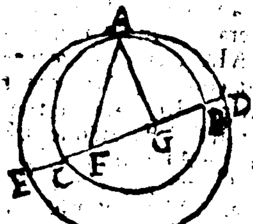
Si enim fieri potest, se mutuò secent in tribus punctis A, C, E. Et invento circuli ABCDE [1] centro H, jungantur rectæ HA, HC, HE, quæ quum ductæ sint à centro ad circumferentiam ipsius ABCDE, erunt eæ æquales inter se.

[1] *Prop.* 1. *hujus*.

ſe. Et quoniam intra circulum AFCGE ſumptum eſt punctum H, & ab eo cadunt ad ejus circumferentiam tres rectæ lineæ æquales HA, HC, HE, erit idem punctum H [1] centrum quoque circuli AFCGE, Duo igitur circuli ABCDE, AFCGE, qui ſe mutuò ſecant, habent unum idemque centrum H. Hoc autem fieri non poteſt: oſtenſum eſt enim circulos, qui ſe mutuò ſecant, non poſſe unum, idemque centrum habere [2]. Non igitur duo circuli ABCDE, AFCGE ſe ſecant in tribus punctis A, C, E. Proindeque circulus circulum in pluribus, quàm duobus, punctis non ſecat. Quod erat oſtendendum.

PROP. XI. THEOR. X.

Si duo circuli ſeſe intus contingant, recta conjungens centra ipſorum tranſibit per punctum contactus.

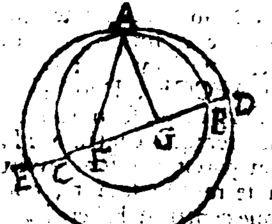


Sint duo circuli ABC, ADE, qui ſeſe intus contingant in A. Sit autem F centrũ circuli ABC & G centrum alterius ADE. Dico, rectam FG, conjungentem centra illa, tranſire per punctũ contactus A.

Si enim fieri poteſt, non tranſeat per punctum

---

[1] *Prop.9. hujus.* [2] *Prop.5. hujus.*



ctum A, sed secet circulum quidem ABC in punctis B, & C, circulum verò ADE in punctis D, & E. Jungantur rectæ AF, AG.

Quia igitur F centrum est circuli ABC, erit AF æqualis CF. Quare apposita communi FG, erunt duæ AF, FG simul [1] æquales toti CG; Duæ autem AF, FG majores sunt ipsa AG. in triangulo enim [2] duo latera simul reliquo majora sunt, quomodocumque sumpta. Itaque CG major quoque erit, quàm AG. Jam verò, quum G centrum sit circuli ADE, AG est æqualis GE. Eadem igitur CG erit etiam major, quàm GE. Quod fieri non potest.

Quod si ponatur, G esse centrum circuli ABC, F verò centrum alterius ADE, demonstratio fiet ex parte altera. Nimirum, quum G centrum sit circuli ABC, erit AG æqualis BG. Quare apposita communi GF, erunt duæ AG, GF æquales toti BF. Sunt autem duæ AG, GF majores ipsa AF. Itaque BF major quoque erit, quàm AF: atque adeò, quum rectæ duæ AF, DF velut ductæ à centro F ad circumferentiam ADC inter se sint æquales, erit eadem BF major etiam, quàm DF. Quod adhuc fieri non potest. Igitur si duo circuli sese intus contingant, recta con-

[1] *Axi. e.* [2] *Prop. 20. lib. 1.*

conjungens centra ipsorum transibit per punctum contactus. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XII. THEOR. XI.

Si duo circuli sese extra contingant; recta, conjungens centra ipsorum, transibit per punctum contactus.

Sint duo circuli ABC, ADE, qui se extra contingant in A. Sit autem F centrum circuli ABC, G verò centrum alterius ADE. Dico rectam FG, conjungentem centra illa, transire per punctum contactus A.

Si enim fieri potest, non transeat per punctum A, sed secet circulum quidem ABC in puncto B, circulum verò ADE in puncto D. Jungantur rectæ AF, AG.

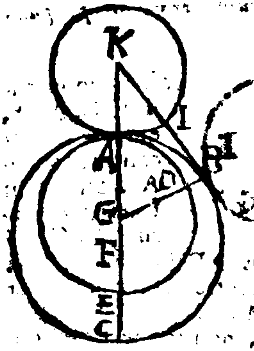
Et quoniam in omni triangulo duo latera simul (1) sunt reliquo majora, quomodocumque sumpta; erunt duæ AF, AG majores ipsa FG. Sunt autem puncta F, & G centra circulorum, atque adeo rectæ AF, AG æquales ipsis BF, DG. Duæ igitur BF, DG, simul majores sunt quoque ipsa FG: quod quum falsum sit, dicendum est, rectam FG transire per punctum A. Et propterea, si duo circuli sese extra contingant, recta conjungens ipsorum centra per punctum contactus transibit. Quod erat demonstrandum.

H PROP.

(1) *Prop.* 20. *lib.* 1.

PROP. XIII. THEOR. XII.

Circulus circulum in pluribus, quàm uno puncto, non contingit, sive intra, sive extra eum contingat.



Circulum ABC contingat primo intra in puncto A circulus alter ADE. Dico, in solo puncto A eum contingere.

Esto etenim F centrum circuli ABC, & G centrum alterius ADE. Recta igitur FG, conjungens centra illa, transibit per punctum contactus A. (1) Producatur eadem usque ad C, & ex G ducatur utcumque recta GDB, quæ secet circulum quidem ABC in puncto B, circulum verò ADE in puncto D.

Et quoniam in AC diametro circuli ABC sumptum est punctum G, quod non est centrum, & ab eo cadunt ad circumferentiam plures rectæ lineæ GA, GB, GC, erit [2] omnium istarum linearum maxima quidem GC, quæ transit per centrum F, minima verò reliqua portio diametri GA. Est igitur GA minor, quàm GB. Jam verò G centrum est circuli ADE, adeoque GA est æqualis GD. Itaque GD minor quoque erit, quàm GB, & propterea punctum B erit ultra punctum D.

Simi-

[1] *Prop.11.hujus.* [2] *Prop.7.hujus.*

Simili ratione ostendetur, omnia alia puncta circuli ABC esse ultra puncta correspondentia alterius circuli ADE: Quare circulus ADE, contingens circulum ABC intra in puncto A, in solo hoc puncto eum continget.

Sed eumdem circulum ABC contingat secundò extra circulus alter AHI in eodem puncto A. Dico quoque, in solo puncto A eum contingere.

Esto etenim F centrum circuli ABC, & K centrum alterius AHI. Recta igitur KF, conjungens centra illa, transibit per punctum contactus A (1). Ducatur autem ex K utcumque recta KHB, quæ secet circulum quidem AHI in puncto H, circulum verò ABC in puncto B.

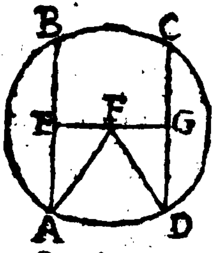
Et quoniam extra circulum ABC sumptū est punctum K, & ab eo ductæ sunt ad convexam circuli circumferentiam plures rectæ lineæ KA, KB; erit [2] omnium istarum linearum minima recta KA, quæ producta transit per centrum circuli F. Est igitur KA minor, quàm KB. Jam verò punctum K centrum est circuli AHI, adeoque KA est æqualis KH: Itaque KH minor quoque erit, quàm KB: & proptereà punctum B erit infra punctum H: Simili ratione ostendetur, omnia alia puncta circuli ABC esse infra puncta correspondentia alterius circuli AHI. Duo igitur circuli ABC, AHI, sese extra contingentes in A, in solo isto puncto A sese mutuò contingent: Et propterea circulus circulum in pluribus, quàm uno puncto, non contingit, sive

(1) *Prop.12.hujus.* [2] *Prop.8.hujus.*

intra, sive extra eum contingat. Quod erat demonstrandum.

PROP. XIV. THEOR. XIII.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant; & quæ æqualiter a centro distant, inter se sunt æquales.



In circulo ABCD, cujus centrum est punctum F, constituantur primò duæ rectæ lineæ æquales AB, DC. Dico, eas æqualiter distare a centro F, hoc est æqualia esse perpendicula FE, FG, quæ a centro super iis demittuntur.

Quoniam enim rectæ FE, FG transeunt per centrum, & secant alias AB, DC non transeuntes per centrum ad rectos angulos, secabunt eas (1) bifariam. Sunt igitur AE, DG semisses ipsarum AB, DC: & propterea, quum ex hypothesi duæ AB, DC inter se sint æquales, erunt etiam (2) æquales inter se duæ AE, DG. Jungantur AF, DF.

Et quoniam triangulum AFE rectum habet angulum in E, erit quadratum ex AF æquale (3) quadratis, quæ fiunt ex AE, & EF. Pariterque, quia triangulum DGE rectum habet angulum in G, erit quadratum ex DF æquale quadratis, quæ fiunt ex DG, & FG. Sunt

(1) *Prop.3.hujus.* (2) *Axi.7.*
(3) *Prop.47.lib.1.*

Sunt autem æqualia inter ſe quadrata ex AF, & DF, quum ipſæ AF, DF, velut ductæ à centro ad circumferentiam, inter ſe ſint æquales: Quadrata igitur, quæ fiunt ex AE, & EF, æqualia quoque erunt quadratis ex DG, & GF: adeoque, quum AE quadratum æquale ſit DG quadrato, erit etiam EF quadratum æquale GF quadrato; & conſequenter EF, GF æquales erunt inter ſe.

Sint ſecundò rectæ duæ AB, DC æqualiter diſtantes à centro circuli F, ita nempe, ut æqualia ſint perpendicula FE, FG, quæ à centro ſuper iis demittuntur. Dico, & ipſas AB, DC etiam inter ſe æquales eſſe.

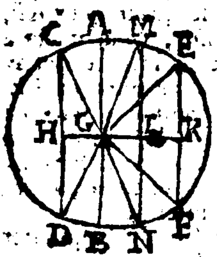
Ob triangula etenim AFE, DFG rectangula in E, & G, oſtendetur rurſus, quadrata ex AE, & EF æqualia eſſe quadratis ex DG, & GF. Eſt autem modò EF quadratum æquale GF quadrato. Itaque quadratum ex AE etiam æquale erit quadrato ex DG: & propterea, quum æquales ſint ipſæ AE, DG, erunt quoque æquales rectæ AB, DC, quæ illarum ſunt duplæ.

In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter a centro diſtant; & per contrarium, quæ æqualiter a centro diſtant, inter ſe ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XV. THEOR. XIV.

In circulo maxima linearum in ipſo ductarum eſt diameter, ſeu quæ tranſit per centrum; aliarum autem, quæ centro ſunt propinquiores majores ſunt ſemper remotioribus.

INtra circulum ABC ducantur plures rectæ lineæ AB, CD, EF, quarum quidem



AB transeat per centrum G. Dico primò, rectam AB esse omniũ maximam.

Jungantur etenim, tum rectæ CG, DG, cũ rectæ EG, FG. Et quoniam propter circulum CG est æqualis AG, & DG æqualis BG, erunt duæ CG, DG æquales toti AB. Jam verò propter triangulum CGD duæ CG, DG simul majores sunt ipsa CD [1]. Erit igitur AB major quoque, quàm CD. Simili ratione ostendetur, eamdem AB majorem esse, quàm EF. Nempe, quum propter circulum sit AG æqualis EG, & BG æqualis FG, erit tota AB æqualis duabus EG, FG. Sed propter triangulum EGF duæ EG, FG simul majores sunt ipsa EF. Erit igitur & AB major quoque, quàm EF: & propterea AB erit omnium maxima.

Dico secundò, quod si CD propinquior sit centro G, quàm EF, CD major sit, quàm EF.

Nam, si ex centro G super ipsis CD, EF perpendicula demittantur GH, GK, quia ex hypothesi EF magis distat à centro G, quàm CD, erit GK major, quàm GH. Quocirca, si ex GK abscindatur portio GL [2] æqualis GH, & per punctum L ducatur recta MN ipsi EF parallela [3]; rectæ duæ CD, MN, ve-

[1] *Prop.20.lib. 1.* (2) *Prop.3.lib.1.*
[3] *Prop.30.lib. 1.*

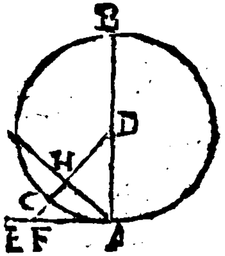
velut æqualiter distantes a centro G, æquales erunt (1) inter se. Est autem MN major, quàm EF [2]: sunt enim bases triangulorum MGN, EGF, quæ habent duo latera MG, NG æqualia duobus lateribus EG, FG alterum alteri, & angulum MGN majorem angulo EGF: quare CD major quoque erit, quàm EF: Et propterea in circulo maxima linearum, intra ipsum ductarum, est diameter, seu quæ transit per centrum; aliarum autem, quæ centro propinquiores sunt, majores sunt semper remotioribus. Quod erat ostendendum.

PROP. XVI. THEOR. XV.

Si ex extremitate diametri perpendicularis ad eam erigatur, hæc tota cadet extra circulum; & in locum ipsa, & circuli circumferentiam contentum nulla alia recta linea duci poterit.

Sit circulus ABC, cujus centrum sit punctū D, diameter recta AB. Erigatur ex extremitate diametri A perpendicularis ad eam AE. Dico, rectam istā AE cadere totā extra circulum, adeoque in solo puncto A circulum ipsum contingere. Capiatur etenim in AE punctum quodvis

[1] *Prop.* 14. *hujus.* [2] *Prop.* 24. *lib.* 1.



vis F, & jungatur DF. Quia igitur in triangulo DAF angulus DAF est rectus, & duo anguli ejusdem trianguli simul duobus rectis minores sunt [1]; erit angulus DFA recto minor. In omni autem triangulo (2) majori angulo majus latus opponitur. Latus igitur DF, oppositum angulo majori DAF, majus erit latere DA, quod opponitur angulo minori DFA. Sed propter circulum DA est æqualis DC. Itaque DF major quoque erit, quàm DC: & propterea punctum F erit extra circulum. Quumque eadem sit demonstratio de omnibus aliis punctis rectæ AE; consequens est, ut recta AE tota cadat extra circulum: atque adeo, ut in solo puncto A eum contingat.

Dico secundò, in locum contentum tangente AE, & circuli circumferentia ex eodem puncto A aliam rectam lineam duci non posse.

Ducatur etenim ex puncto A supra ipsam AE alia quævis recta linea AH. Et quoniam angulus DAE rectus est, erit angulus DAH recto minor: proindeque, quum DA non sit perpendicularis ad AH, demittatur ex centro D super AH [3] perpendicularis DH. Quia igitur in triangulo DAH angulus DHA

ma-

(1) *Prop.17 lib.1.* [2] *Prop.19 lib.1.*
(3) *Prop.12 lib.1.*

major est angulo DAH, erit latus DA, oppositum angulo majori, majus latere DH, quod opponitur angulo minori. Est autem propter circulum DA æqualis DC. Itaque DC major quoque erit, quàm DH: & propterea punctum H erit intra circuli circumferentiam. Non igitur recta AH cadit in locum contentum tangente AE, & circuli circumferentia. Quumque eadem sit demonstratio de qualibet alia recta linea; consequens est, ut in locum contentum tangente AE, & circuli circumferentia nulla recta linea duci possit ex puncto A.

Igitur, si ex extremitate diametri perpendicularis ad eam erigatur, hæc tota extra circulum cadet; & in locum ipsa, & circuli circumferentia contentum nulla alia recta linea duci poterit. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Atque hinc nullo negotio ducetur tangens ad punctum in circuli circumferentia datum. Si enim A sit punctum datum, satis erit ex eo per Centrum ducere rectam ADB, & ad istam perpendicularem erigere ex eodem puncto A. Quod si autem ducenda sit tangens ad circulum ex puncto dato extra ipsum, id sequens propositio, quo pacto fieri possit, nobis ostendet.

SCHOLIUM.

In hac propositione, præter ea, quæ posuimus, adjungi solent hæc alia duo: unum, quod angulus contactus, hoc est tangente, & circuli *circumferentia contentus, minor sit quocumque angulo acuto rectilineo: alterum, quod angulus semicirculi, hoc est diametro, & circuli circumferentia comprehensus, quocumque angulo acuto rectilineo sit major. Horum autem utrumque exinde deducitur, quod in locum tangente, & circuli circumferentia contentum alia recta linea ex puncto contactus duci non possit. Nam profecto semper ac ex puncto A non potest duci alia recta linea inter tangentem AE, & circuli circumferentiam AC; necesse est, ut tam angulus, contentus sub tangente AE, & circuli circumferentia, minor sit quocumque angulo acuto rectilineo, quàm angulus, contentus sub diametro AB, & eadem circuli circumferentia major sit quocumque angulo acuto rectilineo.*

SCHOLIUM.

Inde verò nolim inferatur, angulum contactus nullius esse quantitatis. Etsi enim angulus ille, velut minor quocumque angulo acuto rectilineo, sit indefinitè parvus respectu anguli BAE, usque adeo, ut angulus semicirculi BAC considerari possit tamquam sensibiliter non differens ab ipso angulo BAE; attamen, quin suam is habeat quantitatem, nemo ibit inficias, si sedulò attendat ad hæc duo. Primò, quod quantitatis nomine veniat apud Mathematicos id omne, quod plus, minusve suscipiens, augeri potest, ac minui. Et deinde, quod angulus contactus, etsi minui nequeat per rectam lineam, minui tamen optimè possit per aliam circuli circumferentiam descriptam per punctum A intervallo majore, quàm AD.

PROP.

PROP. XVII PROBL. II.

Ex dato extra circulum puncto tangentem ad circulum ducere.

Sit punctum A datum extra circulum BC. Oportet, ex puncto A ducere tangentem ad ipsum circulum BC.

Circuli BC inveniatur [1] centrum, & sit punctum D. Tum juncta DA, describatur centro D, intervalloque DA circulus alter AF. Porro ex puncto B, in quo recta DA secat circulum BC, erigatur (2) super DA perpendicularis BF, quæ secet circulum AF in puncto F. Denique, ducta recta DF quæ secet circulum BC in C, jungatur AC. Dico, rectam istam AC esse tangentem quæsitam.

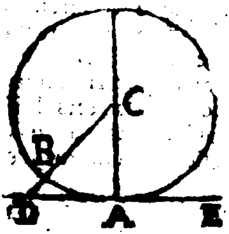
Quoniam enim punctum D centrum est, tam circuli BC, quàm circuli AF; erit tum DC æqualis DB, tum DF æqualis DA. Quare duo latera DA, DC trianguli ADC æqualia sunt duobus lateribus DF, DB alterius trianguli FDB, alterum alteri. Est autem utrique triangulo communis angulus D, qui sub æqualibus ipsorum lateribus continetur. Itaque erit [3] angulus DBF æqualis angulo DCA: adeoque, quum ex constructione rectus sit angulus DBF, erit etiam rectus an-

[1] Prop. 1. hujus. (2) Prop. 11. lib. 1.
(3) Prop. 4. lib. 1.

gulus DCA. Unde, quum ex puncto C, extremitate semidiametri DC, erecta sit perpendicularis CA, hæc tota extra circulum (1) cadet; & consequenter tangens erit. Quare ex puncto A, dato extra circulum BC, ducta est ad circulum ipsum tangens AC. Quod erat faciendum.

PROP. XVIII. THEOR. XVI.

Si circulum recta contingat linea; quæ centrum cum puncto contactus conjungit, perpendicularis erit ad tangentem.



Sit circulus AB, cujus centrum sit punctum C, eumque contingat in A recta DE. Dico, lineam CA, conjungentem centrum C cum puncto contactus A, perpendicularem esse ad tangentem DE.

Si enim CA non sit perpendicularis super DE, demittatur (2) ex centro C perpendicularis ad ipsam DE, & sit CD, quæ secabit circulum in puncto aliquo B, propterea quod recta DE, velut tangens, tota cadit extra circulum.

Quia igitur angulus CDA rectus est, & duo anguli cujusque trianguli simul duobus rectis (3) minores sunt; erit angulus CAD recto

(1) *Prop.16. hujus.* [2] *Prop.12. lib.1.*
[3] *Prop.17. lib.1.*

recto minor. Jam autem majori angulo majus quoque latus (1) opponitur. Latus itaque CA, oppositum angulo majori CDA, majus est latere CD, quod opponitur angulo minori CAD. Est autem propter circulum CA æqualis CB. Itaque CB major quoque erit, quàm CD. Quod, quum fieri non possit, consequens est, ut non quidem CD, sed CA perpendicularis sit super DE. Et propterea, si circulum recta contingat linea, quæ centrum cum puncto contactus conjungit, perpendicularis erit ad tangentem. Quod erat ostendendum.

PROP. XIX. THEOR. XVII.

Si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus perpendicularis ad tangentem erigatur, hæc transibit per centrum circuli.

Circulum AB contingat in puncto A recta DE, ex quo erigatur ad ipsam DE perpendicularis AB. Dico, lineam istam AB transire per centrum circuli: adeo ut si ea secetur bifariam in C, erit punctum C centrum ipsius circuli.

Sit enim, si fieri potest, centrum circuli extra rectam AB, velut in F, & ducatur ex F ad A recta FA. Quia igitur FA conjungit cen-

(1) Prop. 19. lib. 1.

centrum circuli cum puncto contactus, ea erit (1) perpendicularis ad rectam DE. Quare rectus erit angulus FAD. Ex hypothesi autem rectus est angulus BAD. Itaque angulus FAD æqualis erit (2) angulo BAD. Quod quum fieri non possit, consequens est, ut in ipsa AB sit centrum circuli. Et propterea si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus perpendicularis ad tangentem erigatur; hæc transibit per centrum circuli. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

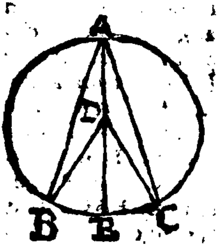
Si intra circulum ponatur aliqua recta linea, & ex uno ejus extremo alia extra circulum ducatur; tria contingere possunt: primò, ut linea intra circulum posita sit diameter, seu transeat per centrum: secundò, ut ea, quæ ducitur extra circulum, sit tangens: ac tertiò demum, ut una alteri ad angulos rectos insistat. Jam per ea, quæ ostensa sunt in propositione decimasexta, & duabus præcedentibus, si duo ex hisce tribus supponantur, tertium etiam habebitur. Nempe primò, si una earum linearum sit diameter, & altera ei insistat ad angulos rectos; erit ista tangens. Secundò, si una sit diameter, & altera tangens, hæc illi ad rectos angulos insistet. Et denique, si secunda sit tangens, eique prior insistat ad angulos rectos, erit hæc altera diameter.

PROP.

[1] *Prop.*18. *hujus.* (2) [illegible]

PROP. XX. THEOR. XVIII.

Angulus ad centrum duplus est anguli ad circumferentiam, quum super eodem arcu insistunt.

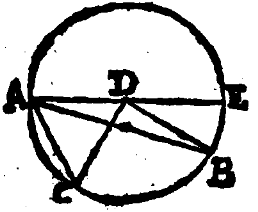


Esto circulus ABC, ejusque centrum sit punctum D. Ad centrum hujus circuli D constituatur angulus BDC, ponaturque angulus alter ad circumferentiam BAC, qui insistant super eodem arcu BC. Dico, angulum ad centrum BDC duplum esse anguli ad circumferentiam BAC.

Jungatur recta AD, quæ producta versus E cadat primò intra angulum BDC. Quia igitur AD est æqualis DB, erit triangulum ADB *isosceles*; adeoque angulus DAB (1) æqualis erit angulo DBA. Jam verò in triangulo ADB latus AD productum est in E; atque adeo angulus exterior BDE (2) æqualis est duobus interioribus, & oppositis DAB, DBA. Quum igitur duo anguli DAB, DBA æquales sint inter se, erit angulus BDE duplus unius DAB. Simili ratione ostendetur, angulum CDE duplum esse anguli DAC: ex quo sequitur, totum angulum ad centrum BDC duplum esse totius anguli ad circumferentiam BAC.

Ca-

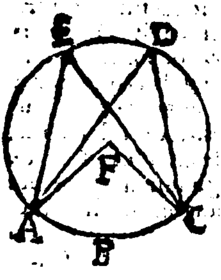
[1] *Prop.5. lib.1.* [2] *Prop.32. lib.1.*



Cadat secundò recta AD producta versus E extra angulum BDC. Et eadem omnino ratione ostendetur, tum angulum BDE duplum esse anguli DAB, cum angulum CDE duplum anguli DAC. Quare, si ex angulo CDE auferatur angulus BDE, & ex angulo DAC auferatur angulus DAB, remanebit angulus ad centrum BDC duplus quoque anguli ad circumferentiam BAC. Erit igitur in omni casu angulus ad centrum duplus anguli ad circumferentiam, quum super eodem arcu insistunt. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXI. THEOR. XIX.

Qui in eadem portione sunt anguli, inter se sunt æquales.



Esto circulus ABCDE, in quo capiatur portio aliqua AEDC. Ponantur autem in ista portione duo anguli AEC, ADC. Dico, angulos istos æquales esse inter se.

Inveniatur etenim (1) centrū circuli, cujus sit

(1) Prop. 1. hujus.

sit punctum F, junganturque rectæ AF, CF. Quia igitur AFC est angulus ad centrum, & AEC est angulus ad circumferentiam, quorum uterque insistit super eodem arcu ABC; erit angulus ad centrum AFC (1) duplus anguli ad circumferentiam AEC. Similiter, quia AFC est angulus ad centrum, & ADC est angulus ad circumferentiam, quorum uterque insistit super eodem arcu ABC; erit angulus ad centrum AFC duplus anguli ad circumferentiam ADC. Ejusdem igitur anguli AFC semissis est tum angulus AEC, cum angulus ADC. Sed quæ ejusdem sunt dimidia, inter se sunt (2) æqualia. Erit igitur angulus AEC æqualis angulo ADC. Et propterea qui in eadem portione sunt anguli, inter se æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

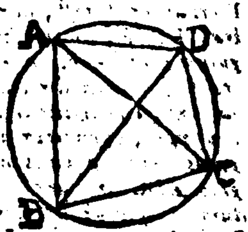
Fieri autem potest, ut rectæ AF, CF, nullum angulum constituant in centro F, sed in directum jaceant. Hoc igitur quum contingit, ostendetur angulus AEC æqualis angulo ADC in hunc modum. Capiatur in altera portione ABC punctum aliquod B, & jungantur rectæ BF, BD, BE. Quia igitur angulus AFB est ad centrum, & angulus ADB est ad circumferentiam; erit angulus ad centrum AFB

[1] *Prop.20.hujus.* (2) *Axi.7.*

AFB duplus anguli ad circumferentiam ADB. Unde duo anguli AFB, BFC simul dupli erunt totius anguli ADC. Simili ratiocinio ostendetur, eosdem angulos AFB, BFC simul duplos esse anguli AEC: ex quo sequitur, angulum ADC æqualem esse angulo AEC. Sed fieri quoque potest, ut eadem rectæ AF, CF constituant quidem angulum in centro F, sed versus eam partem, in qua sunt ipsi anguli AED, ADC. Quo rursus in casu, poterit eadem, ac præcedentis casus, demonstratio adhiberi.

PROP. XXII. THEOR. XX.

Quadrilaterorum in circulo inscriptorum anguli oppositi duobus rectis sunt æquales.



Esto circulus ABCD, in quo inscribatur figura aliqua quadrilatera ABCD. Dico, angulos ejus oppositos duobus rectis æquales esse.

Jungantur etenim rectæ AC, BD. Et quoniam anguli ABD, ACD sunt in eadem portione, erunt ii [1] æquales inter se. Paritérque, quia anguli ADB, ACB sunt in eadem por-

(1) *Prop. 21. hujus.*

portione, isti etiam inter se æquales erunt. Est igitur angulus ABD æqualis angulo ACD, & angulus ADB æqualis angulo ACB. Quare erunt duo anguli ABD, ADB simul æquales toti angulo BCD: & propterea apposito communi BAD, erunt tres anguli ABD, ADB, BAD æquales duobus angulis BCD, BAD. Sunt autem tres anguli ABD, ADB, BAD [1] æquales duobus rectis. Erunt igitur duobus rectis pariter æquales anguli duo BCD, BAD. Simili ratione ostendetur, duobus rectis æquales esse duos angulos ABC, ADC. Quare quadrilaterorum in circulo inscriptorum anguli oppositi duobus rectis æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

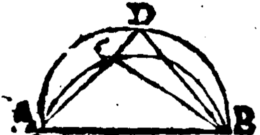
PROP. XXIII. THEOR. XXI.

In eadem recta linea duæ circulorum portiones similes, & inæquales constitui non possunt.

Sit recta AB, in qua constituatur aliqua circuli portio ACB. Dico, in eadem recta AB non posse constitui aliam circuli portionem, quæ sit similis ipsi ACB, eidem autem inæqualis.

Si enim fieri potest, constituatur hæc altera portio circuli, & sit ADB Ducatur autem ex puncto A recta ACD quæ utramque

(1) *Prop. 32. lib. 1.*

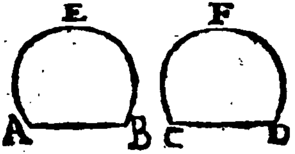


que portionem secet in punctis C & D; junganturque rectæ BC, BD.

Quia igitur portiones ACB, ADB ponuntur similes, & similes circulorum portiones sunt illæ, quæ suscipiunt angulos æquales; erit angulus ACB, quem suscipit portio ACB, æqualis angulo ADB quem suscipit altera portio ADB. Hoc autem fieri non potest: in triangulo enim BDC latus DC productum est in A, adeoque angulus exterior ACB major est [1] interiore, & opposito ADB. Non igitur portio ADB similis est portioni ACB. Et propterea in eadem recta linea duæ circulorum portiones similes, & inæquales constitui non possunt. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXIV. THEOR. XXII.

In æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones constitutæ, sunt etiam æquales.



Sint duæ rectæ lineæ æquales AB, CD, in quibus constitutæ sint duæ circulorum portiones AEB, CFD similes inter se. Dico, easdem portiones esse etiam æquales.

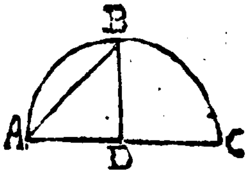
Ca-

(1) *Prop. 16. lib. 1.*

Capiatur etenim cogitatione portio AEB, & ponatur super portione CFD hac lege, ut punctum A incidat in punctum C, recta verò AB in rectam CD. Et quoniam ex hypothesi æquales sunt rectæ AB, CD, incidet quoque punctum B in punctum D. Unde necesse est, ut ipsa portio AEB incidat in portionem CFD: aliter enim in eadem recta linea constitui possent duæ circulorum portiones similes, & inæquales: quod fieri (1) nequit. Congruit itaque portio AEB cùm portione CFD. Quæ autem congruunt, inter se [2] sunt æqualia. Æqualis est igitur portio AEB portioni CFD. Et propterea in æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones constitutæ, sunt etiam æquales. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXV. PROBL. III.

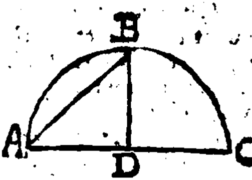
Circuli portione data, invenire centrum circuli, cujus ea est portio, & circulum perficere.



Data sit circuli portio ABC. Oportet, invenire centrum circuli, cujus ea est portio, ipsumq; circulum, perficere.

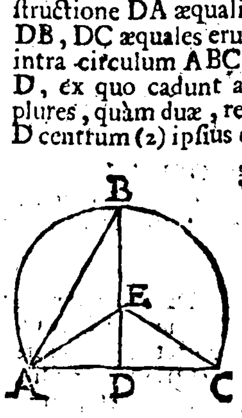
Ex puncto A ad punctum C ducatur recta AC, quæ secetur [3] bifariam in D. Excitetur porro super AC (4) perpendicularis DB, & jungatur AB. Et siqui-

(1) *Prop.23. hujus.* [2] *Axi.8.*
(3) *Prop.10. lib.1.* [4] *Prop. 11. lib.1.*



siquidē angulus ABD æqualis sit angulo DAB. Erit D centrum circuli, cujus ABC est portio.

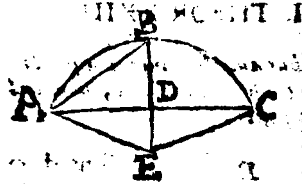
Nam semper ac angulus ABD æqualis est angulo DAB, erit etiam (1) DA æqualis DB. Est autem ex constructione DA æqualis DC. Tres igitur DA, DB, DC æquales erunt inter se. Unde, quum intra circulum ABC sumptum sit punctum D, ex quo cadunt ad ejus circumferentiam plures, quàm duæ, rectæ lineæ æquales, erit D centrum (2) ipsius circuli.



Quod si autem angulus ABD non sit æqualis angulo DAB; tunc fiat ad lineam AB, atque ad datum in ea punctum A angulus BAE æqualis angulo ABD, & punctum E, in quo recta AE ipsi BD occurrit, centrum erit circuli, cujus ABC est portio.

Nam, quum ex constructione æquales sint anguli ABE, BAE; erunt etiam æqualia latera EA, EB, quæ in triangulo AEB angulos illos subtendunt: Sunt autem duo latera AD, DE trianguli ADE æqualia duobus late-

[1] *Prop.6.lib*1. (2) *Prop.9. hujus.*



teribus CD, DE alterius trianguli CDE, alterum alteri, itemque angulus ADE, contentus sub lateribus illius, æqualis est angulo CDE, qui sub istius lateribus continetur, quum uterque ex constructione sit rectus. Itaque erit EA æqualis [1] etiam ipsi EC: & propterea tres EA, EB, EC æquales erunt inter se. Unde rursus, quum intra circulum ABC sumptum sit punctum E, ex quo cadunt ad ejus circumferentiam plures quam duæ, rectæ lineæ æquales, erit E centrum ipsius circuli.

Data itaque circuli portione ABC, inventum est centrum circuli, cujus ea est portio. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

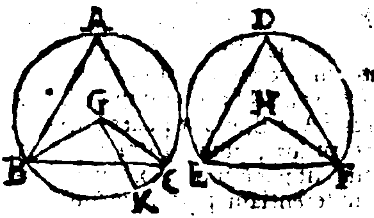
Patet igitur, problematis hujus tres esse casus. Vel enim angulus ABD æqualis est angulo DAB, & tunc centrum circuli erit in recta AC, datam circuli portionem subtendente. Vel angulus ABD minor est angulo DAB; & in isto casu locabitur centrum circuli intra datam portionem. Vel denique angulus ABD major est angulo DAB; & quum id contingit, extra datam portionem circuli centrum reperietur. Distinguendi sunt autem tres isti casus, quia data circuli portio ABC potest esse vel semicirculus, vel semicirculo major, vel denique semicirculo minor.

PROP.

[1] *Prop.4. lib.1.*

PROP. XXVI. THEOR. XXIII.

In circulis æqualibus æquales anguli æqualibus arcubus insistunt, sive ad centra, sive ad Circumferentias sint positi.



Sint duo circuli æquales ABC, DEF, quorum centra sint puncta G, & H, Ponantur autem ad centra istorum circulorum duo anguli æquales BGC, EHF; vel etiam ponantur ad circumferentias, & sint BAC, EDF. Dico, arcus BC, EF, quibus anguli isti insistunt, esse etiam æquales inter se.

Jungantur etenim rectæ BC, EF. Et quoniam propter æqualitatem circulorum ABC, DEF duo latera BG, CG trianguli BGC sunt æqualia duobus lateribus EH, FH alterius trianguli EHF, alterum alteri, suntque etiam ex hypothesi æquales anguli BGC, EHF sub iis lateribus contenti; erit quoque [1] basis BC æqualis basi EF. Jam vero portiones BAC, EDF sunt similes inter se, quia ex hypothesi æquales sunt anguli BAC, EDF, quos illæ suscipiunt. Quum igitur eædem illæ portiones constitutæ sint in rectis æqualibus BC, EF, eæ non modò similes, verùm etiam

[1] *Prop. 4. lib. 1.*

etiam æquales(1) erunt inter se: adeoque, quia integræ circulorum circumferentiæ positæ sunt inter se æquales, erunt & reliquæ portiones BC, EF (2) pariter æquales inter se. Et propterea in circulis æqualibus æquales anguli æqualibus arcubus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias sint positi. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

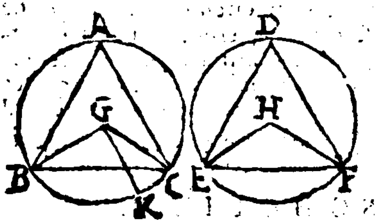
Notetur autem hoc loco velim, quod etsi propositio disjunctiva sit, & loquatur vel de angulis positis ad centra circulorum æqualium, vel de angulis constitutis ad circumferentias eorumdem circulorum; attamen si æquales ponantur illi, æquales quoque sint isti, & vicissim si isti ponantur æquales, illi etiam æquales esse debeant: quum ostensum sit superius, angulum ad centrum duplum esse anguli ad circumferentiam, quotiescumque super eodem arcu insistunt. Id verò notare sedulò oportet, quia in demonstratione tum angulorum ad centra, cum eorum, qui sunt ad circumferentias, æqualitas adhibetur.

PROP. XXVII. THEOR. XXIV.

In circulis æqualibus anguli, qui sive ad centra, sive ad circumferentias positi, æqualibus arcubus insistunt, sunt etiam æquales inter se.

Sint duo circuli æquales ABC, DEF, quorum centra sint puncta G, & H. Capiantur

[1] *Prop. 24. hujus.* [2] *Axi. 3.*



tur autem in circumferẽtiis eorum circulorum duo arcus æquales BC, EF, quibus insistant tum anguli BGC, EHF constituti ad centra, cum anguli BAC, EDF positi ad circumferentias eorum circulorum. Dico, æquales esse inter se, tam angulos BGC, EHF, quàm angulos BAC, EDF.

Si enim anguli BGC, EHF non sint æquales inter se, alter ipsorum major erit. Sit itaque major angulus BGC, & fiat ad rectam BG, atque ad datum in ea punctum G (1) angulus BGK æqualis angulo EHF. Quia igitur anguli BGK, EHF, constituti ad centra circulorum æqualium, inter se ex constructione sunt æquales, erunt etiam æquales [2] arcus BK, EF, quibus ii insistunt. Est autem ex hypothesi arcus EF æqualis arcui BC. Itaque erit BC (3) æqualis BK. Quod quum fieri non possit, dicendum est, angulum BGC æqualem esse angulo EHF. Est autem angulus BGC duplus [4] anguli BAC, itemque angulus EHF duplus anguli EDF. Quare erit angulus BAC (5) æqualis quoque angulo EDF. Et propterea in circulis æqualibus,

[1] *Prop.23 lib.1.* (2) *Prop.26. hujus.*
(3) *Axi.1.* (4) *Prop.20. hujus.*
[5] *Axi.7.*

libus anguli, qui sive ad centra, sive ad circumferentias positi, æqualibus arcubus insistunt, sunt etiam æquales inter se. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

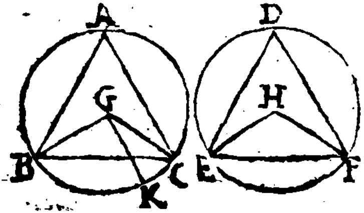
Hæc propositio est conversa præcedentis. Ibi enim ostensum est, in circulis æqualibus æquales angulos æqualibus arcubus insistere, sive ad centra, sive ad circumferentias sint positi. Hic verò per contrarium demonstratur, in circulis æqualibus angulos, qui sive ad centra, sive ad circumferentias positi, æqualibus arcubus insistunt, æquales etiam esse inter se.

PROP. XXVIII. THEOR. XXV.

In circulis æqualibus æquales rectæ lineæ æquales arcus abscindunt, majorem quidem æqualem majori, minorem verò minori. Vide eamdem Figuram.

SInt duo circuli æquales ABC, DEF, quorum centra sint puncta G, & H. Ponantur autem in iis duæ rectæ BC, EF æquales inter se. Dico, rectas istas æquales abscindere etiam arcus æquales, nempe majorem ABC æqualem majori DEF, minorem verò BC æqualem minori EF.

Jungantur etenim tum rectæ BG, CG, cum rectæ EH, FH. Et quoniam ex hypothesi æquales sunt circuli ABC, DEF, erunt duo latera BG, CG trianguli BGC æqualia duobus lateribus EH, FH alterius trianguli EHF, alterum alteri. Sunt autem bases eorumdem triangulorum BC, EF ex hypothesi



etiam æquales inter se. Itaque erit (1) angulus BGC æqualis angulo EHF. Jam verò in circulis æqualibus æquales anguli [2] æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad circumferentias, sive ad centra sint positi. Erit igitur arcus BC æqualis arcui EF; atque adeo, quum æquales sint integræ circulorum circumferentiæ, erit quoque arcus BAC æqualis arcui EDF. Et propterea in circulis æqualibus æquales rectæ lineæ æquales arcus abscindunt, majorem quidem majori, minorem verò minori. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXIX. THEOR. XXVI.

In circulis æqualibus æquales arcus æquales rectæ lineæ subtendunt. Vide supra positam Figuram.

SInt duo circuli æquales ABC, DEF, quorum centra sint puncta G, & H. Abscindantur autem ex iis duo arcus æquales BC, EF. Dico, rectas BC, EF arcus illos æquales subtendentes esse etiam æquales inter se.

Jungantur etenim, tum rectæ BG, CG, cùm rectæ EH, FH. Et quoniam ex hypothesi arcus BC æqualis est arcui EF, & in cir-

[1] *Prop.8.lib.1.* (2) *Prop.26. hujus.*

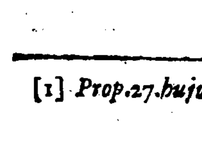
circulis æqualibus anguli, qui ſive ad centra, ſive ad circumferentias poſiti, æqualibus arcubus inſiſtunt, æquales (1) ſunt etiam inter ſe; erit angulus BGC æqualis angulo EHF. Unde, quum duo triangula BGC, EHF habeant duo latera BG, CG æqualia duobus lateribus EH, FH, alterum alteri, itemque æquales angulos ſub lateribus illis comprehenſos; habebunt quoque [2] baſim BC æqualem baſi EF. Et propterea in circulis æqualibus æquales arcus æquales rectæ lineæ ſubtendunt. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I U M.

Hæc propoſitio eſt converſa præcedentis. Ibi enim oſtenſum eſt, in circulis æqualibus æquales rectas lineas æquales quoque arcus abſcindere. Hìc verò per contrarium demonſtratur, in circulis æqualibus æquales arcus æquales quoque rectas ſubtendere.

PROP. XXX. PROBL. IV.

Datam circuli portionem biſariam dividere.

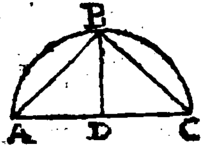


Data ſit circuli portio ABC. Oportet, portionem iſtam biſariam dividere.

Ex puncto A ad punctum C ducatur recta AC, quæ ſecetur biſa-

 riam

[1] *Prop.27.hujus.* [2] *Prop.4. lib.1.*



riam [1] in D. Erigatur deinde (2) super AC perpendicularis DB, quæ secet datam circuli portionem in B. Dico, portionem ABC sectam esse bifariam in B.

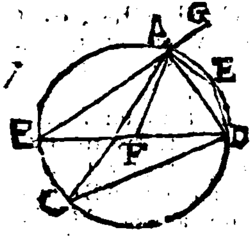
Jungantur enim rectæ AB, CB. Et quoniam ex constructione AD est æqualis CD, communis verò DB; erunt duo latera AD, DB trianguli ADB æqualia duobus lateribus CD, DB alterius trianguli CDB. Est etiam angulus ADB, contentus sub lateribus illius, æqualis angulo CDB, qui sub lateribus istius continetur, quum uterque ex constructione sit rectus. Itaque erit basis unius AB (3) æqualis quoque basi alterius CB. Ostensum est autem, in æqualibus circulis, & consequenter eò magis in eodem circulo, æquales rectas lineas æquales quoque arcus abscindere [4]. Erit igitur arcus AB æqualis arcui CB. Et propterea data circuli portio ABC secta est bifariam in B. Quod erat faciendum.

PROP. XXXI. THEOR. XXVII.

Angulus in semicirculo est rectus; qui verò est in portione majore, est recto minor; & qui in portione minore, est recto major.

Esto circulus ABCDE, habens pro centro punctum F. Ducatur in eo diameter BD,

(1) *Prop.* 10. *lib.* 1. [2] *Prop.* 11. *lib.* 1.
[3] *Prop.* 4. *lib.* 1. (4) *Prop.* 28. *hujus.*



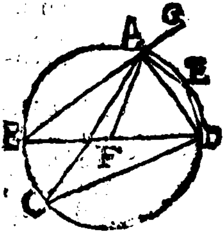
BD, quæ eumdem dividat in duos semicirculos; & in altero eorum, ut BAED, ponatur angulus BAD. Dico, angulum istum BAD rectum esse.

Jungatur etenim AF, & extendatur BA versus G. Quia igitur propter circulum AF est æqualis BF, triangulum AFB isosceles erit; atque adeo angulus BAF æqualis erit (1) angulo ABF. Simili ratione, quia propter circulum AF est æqualis DF, erit triangulum AFD isosceles; & consequenter angulus DAF æqualis erit angulo ADF. Quum itaque sit angulus quidem BAF æqualis angulo ABF, angulus verò DAF æqualis angulo ADF; erit totus angulus BAD æqualis duobus ABF, ADF. Sed, quum in triangulo BAD latus BA productum sit in G, iisdem duobus angulis ABF, ADF æqualis est etiam [2] angulus DAG. Erit igitur (3) angulus BAD æqualis angulo DAG: & propterea, quum sint deinceps, uterque rectus erit. Rectus itaque est angulus BAD, qui existit in semicirculo BAED.

Ponatur secundò in portione ABCD, semicirculo majore, angulus alter ACD. Dico, angulum istum ACD esse acutum, seu minorem recto.

Quoniam enim in triangulo ABD angulus

[1] *Prop.5.lib.1.* (2) *Prop.32.lib.1.* (3) *Ax.*1.



BAD est rectus, erit alter ABD acutus, seu recto minor; quum in omni triangulo duo quilibet anguli simul duobus rectis minores sint (1). Est autem angulus ABD æqualis angulo ACD, quum sint in eadem portione ABCD (2). Quale erit angulus ACD etiam acutus, seu recto minor.

Denique in portione AED, semicirculo minore, ponatur angulus AED. Dico, angulum istum AED esse obtusum, seu majorem recto.

Quoniam enim quadrilaterorum in circulo inscriptorum anguli oppositi sunt [3] æquales duobus rectis, & ACDE est figura quadrilatera inscripta in circulo ABCDE, erunt anguli ejus oppositi ACD, AED simul æquales duobus rectis. Ostensum est autem, angulum ACD esse acutum, seu minorem recto. Erit igitur alter AED obtusus, seu recto major.

Quo circa angulus in semicirculo est rectus; qui verò est in portione majore, est recto minor; & qui in portione minore, est recto major. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

[1] *Prop.17.lib.1.* (2) *Prop.21. hujus.*
[3] *Prop.22. hujus.*

SCHOLIUM I.

In hac propositione solent etiam apponi hæc alia duo. Primum, quod majoris quidem portionis angulus sit recto major. Et alterum, quod angulus minoris portionis sit recto minor. Horum autem utrumque ex eo vulgò deduci solet, quòd anguli deinceps, quos recta AD facit cum BG, prout ostensum est in prima parte hujus propositionis, sint recti. Inde enim sequitur, angulum, quem ipsa AD constituit cum portione ABCD, semicircula majore, esse recto majorem; angulum verò, quem eadem AD constituit cum portione AED, semicirculo minore, esse recto minorem. Quorsum autem hæc adjiciantur, & ostendantur nescio, num omnibus perequè notum sit. Nimirum, quum alibi ostensum sit, angulum contactus minorem esse quocumque angulo acuto rectilineo; sequitur exinde, angulum portionis, quæ semicirculum adæquat, majorem esse omni angulo acuto rectilineo, atque adeo posse velut angulum rectum considerari. At verò, quum ostenditur hìc, majoris quidem portionis angulum esse recto majorem, angulum autem minoris portionis esse recto minorem; ostenduntur hæc in hunc finem, ut sciamus, utrumque eorum angulorum ita quidem differre ab angulo recto, ut neuter possit unquam velut rectus considerari.

SCHOLIUM II.

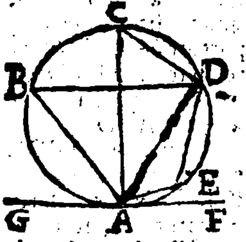
Hinc ea, de quibus est quæstio, congruentius ostendentur in hunc modum. Esto circulus ABCDE, qui dividatur per rectam AD in

duas portiones inæquales, quarum altera ABCD sit semicirculo major, altera AED semicirculo minor. Ducatur ad punctum A tangens FG, cui perpendicularis erigatur AC, quæ quũ transeat per centrum circuli, erit diameter, dividetque adeo eumdem circulum in duos semicirculos. Itaque, quia ex A duci possunt intra angulum CAD, non una, sed infinitæ rectæ lineæ; multum abest, ut ipse angulus CAD minor sit quocumque angulo acuto rectilineo: proindeque angulus majoris portionis DAB sensibiliter major erit angulo semicirculi CAB. Quare etsi, ob angulum contactus BAF omni angulo acuto rectilineo minorem, angulus semicirculi CAB non differat sensibiliter ab angulo recto CAF; ipse tamen majoris portionis angulus DAB sensibiliter major erit angulo recto CAF. Simili ratione angulus minoris portionis DAE sensibiliter minor est angulo semicirculi CAE. Itaque etsi, ob angulum contactus EAG omni angulo acuto rectilineo minorem, angulus semicirculi CAE non differat sensibiliter ab angulo recto CAG; ipse tamen minoris portionis angulus DAE sensibiliter minor erit angulo recto CAG.

PROP. XXXII. THEOR. XXVIII.

Si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus alia utcumque circulum secans duca-

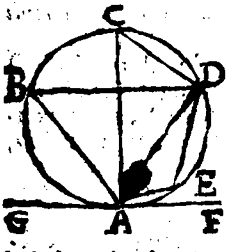
ducatur; anguli sub tangente, & secante contenti æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus constituuntur.



Circulum ABCD contingat recta FG in puncto A, ex quo ducatur recta, alia AD, quæ dividat circulum in duas portiones ABCD, AED. Dico, angulos tangente, & secante contentos æquales esse eis, qui in iis circuli portionibus alternatim constituuntur: nempe angulum DAF æqualem esse angulo ABD constituto in portione ABCD; & angulum DAG æqualem angulo AED constituto in portione AED.

Ex puncto etenim contactus A erigatur [1] super FG perpendicularis AC, quæ quum [2] transeat per centrum circuli, erit diameter, atque adeo dividet circulum in duos semicirculos. Quia igitur CDEA semicirculus est, juncta CD, erit (3) angulus CDA rectus. Sunt autem cujuscumque trianguli anguli omnes simul (4) duobus rectis æquales. Erunt itaque alii duo anguli ACD, DAC simul uni recto æquales; & propterea, quum rectus sit ex constructione angulus CAF, erit angulus CAF æqualis duobus angulis ACD, DAC; & consequenter, ablato communi DAC, erit angulus DAF [5] æqualis angu-

(1) *Prop.11.lib.1.* [2] *Prop.19.hujus.*
(3) *Prop.31.hujus.* [4] *Prop.32.lib.1.*
[5] *Axi.3.*



lo ACD. Jam verò angulus ACD æqualis est [1] angulo ABD, quum sit in eadem portione ABCD. Quare idem angulus DAF æqualis quoque erit angulo ABD.

Rursus, quia ABDE est figura quadrilatera inscripta in circulo ABCDE, & quadrilaterorum in circulo inscriptorum anguli oppositi simul (2) duobus rectis sunt æquales; erunt duo anguli ABD, AED simul duobus rectis æquales. Sunt autem duo anguli DAF, DAG simul etiam (3) æquales duobus rectis. Erunt igitur duo anguli DAF, DAG æquales duobus angulis ABD, AED: & propterea, quum ostensum sit, angulum DAF æqualem esse angulo ABD, erit alter angulus DAG æqualis alteri angulo AED. Quocirca, si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus alia utcumque circulum secans ducatur; anguli tangente, & secante contenti æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus constituuntur. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Fieri autem potest, ut recta, quæ circulum secat, sit perpendicularis ipsa AC, quo casu, *an-*

[1] *Prop. 21 hujus.* [2] *Prop. 22 hujus.*
(3) *Prop. 13 lib. 1.*

angulos tangente, & secante contentos æquales esse iis, qui in alternis circuli portionibus constituuntur, nullo negotio ostendetur. Est enim uterque eorum angulorum rectus ex hypothesi, & profecto recti sunt etiam anguli, qui constituuntur in portionibus ABC, ADC: quandoquidem recta AC, velut perpendicularis ad tangentem FG, transibit per centrum circuli; adeoque, tamquam diameter, dividet circulum in duos semicirculos, in quibus angulos, qui constituuntur, rectos esse, jam superius ostensum fuit.

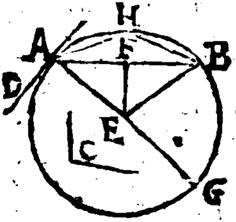
PROP. XXXIII. PROBL. V.

In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum æqualem angulo dato.

Data sit recta AB, datus verò angulus C. Oportet, in data recta AB describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum, æqualem dato angulo C.

Ad rectam AB, atque ad datum in ea punctum A constituatur [1] angulus BAD æqualis angulo C. Tum super AD erigatur (2) ex puncto A perpendicularis AE; & secta AB [3] bifariam in F, erigatur super AB perpendicularis altera FE,

(1) *Prop. 23. lib. 1.* [2] *Pop. 11. lib. 1.*
(3) *Prop. 10. lib. 1.*



FE, conveniens cum AE in puncto E, jungaturque BE.

Quia igitur ex constructione AF est æqualis BF, communis verò FE; erunt duo latera AF, FE trianguli AFE æqualia duobus lateribus BF, FE trianguli BFE, alterum alteri. Sunt etiam æquales anguli, qui sub lateribus iis continentur, quum uterque ex constructione sit rectus. Erit igitur basis unius AE (1) æqualis basi alterius BE: & proptérea si centro E, intervalloque EA circulus describatur AGH, transibit circulus iste per punctum B. Sed descripto hoc circulo, dico, portionem ejus AHB suscipere angulum æqualem dato angulo C.

Quoniam enim AE est circuli semidiameter, eique ad rectos angulos insistit AD, erit AD circuli tangens [2]. Est autem AB secans. Quare angulus tangente, & secante contentus BAD æqualis [3] erit ei, qui constituitur in alterna circuli portione AHB. Jam verò ex constructione angulus BAD æqualis est angulo C. Angulus igitur, qui constituitur in portione AHB, æqualis quoque erit angulo C. Et proptérea in data recta AB descripta est circuli portio AHB, quæ suscipit angulum, æqualem dato angulo C. Quod erat faciendum.

SCHO-

[1] *Prop.4.lib.1.* (2) *Prop.16.hujus.*
[3] *Prop.32. hujus.*

SCHOLIUM.

Quia recta AE, perpendiculariter erecta super AD, cadit intra angulum BAD, quum est obtusus, & extra eumdem angulum, quum est acutus; liquet, centrum descripti circuli E esse extra portionem AHB, quotiescumque datus angulus C est obtusus, & intra portionem, ubi idem angulus C est acutus. Quod si autem angulus C fuerit rectus, tunc, quia rectus est etiam angulus BAD, cadet AE super AB, & concidentibus punctis E, & F, fiet F centrum circuli, quod proinde erit in ipsa recta AB, quæ subtendit portionem AHB. Unde hoc casu, ut problemati fiat satis, satis erit, rectam AB dividere bifariam in F, & centro F, intervalloque FA, vel FB describere semicirculum AHB. Nam, quum angulus in semicirculo sit rectus, suscipiet semicirculus iste angulum æqualem dato angulo C.

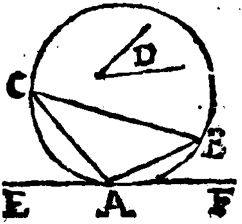
PROP. XXXIV. PROBL. VI.

Ex dato circulo abscindere portionem, quæ suscipiat angulum æqualem angulo dato.

DAtus sit circulus ABC, datus verò angulus D. Oportet, ex circulo ABC abscindere portionem, quæ suscipiat angulum, æqualem dato angulo D.

Ducatur recta EF, [1] quæ circulum contingat in puncto aliquo A. Tum ad rectam AF, atque ad datum in ea punctum A constituatur (2) angulus EAC æqualis angulo D. Dico,

(1) *Prop.17.hujus.* (2) *Prop.23. lib.1.*



Dico, portionem ABC, abſciſſam ex circulo per rectam AC ad partem alteram anguli EAC, ſuſcipere angulum æqualem angulo D.

Quoniam enim ex conſtructione EF eſt tangens circuli, AC verò ſecans, erit angulus EAC tangente, & ſecante contentus æqualis [1] angulo, qui conſtituitur in alterna circuli portione, ABC. Eſt autem ex conſtructione angulus EAC æqualis angulo D. Angulus igitur, qui conſtituitur in portione ABC, æqualis eſt quoque angulo D. Et propterea ex dato circulo abſciſſa eſt portio, quæ ſuſcipit angulum æqualem angulo dato D. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

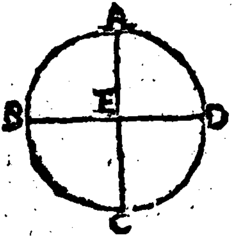
Hoc problema eſt converſum præcedentis. Ibi enim quærebatur circulus, in quo ſi data recta ponatur, abſcindat ex eo portionem, quæ ſuſcipiat angulum, æqualem angulo dato. Hìc verò quæritur per contrarium recta, quæ poſita in dato circulo, abſcindat ex eo portionem, quæ dati anguli ſit capax.

PROP.

[1] *Prop.32. hujus.*

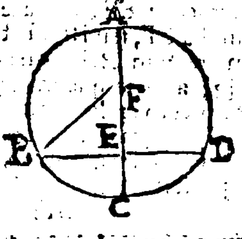
PROP. XXXV. THEOR. XXIX.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se mutuò secent; erit rectangulum sub segmentis unius æquale rectangulo sub segmentis alterius.



In circulo ABCD rectæ duæ AC, BD se secent in E. Dico, rectangulum contentum sub segmentis unius AE, EC æquale esse ei, quod sub segmentis alterius BE, ED continetur.

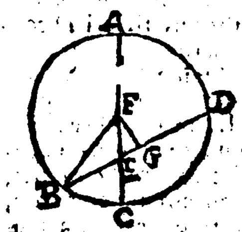
Transeat primò utraque linearum per centrum circuli, vel quod idem est, sit punctum E, in quo duæ rectæ AC, BD se mutuò secant, ipsius circuli centrum. Et quoniam æquales sunt rectæ omnes, quæ ducuntur a centro ad circumferentiam, æqualia erunt inter se earum rectarum segmenta omnia: & propterea rectangulum contentum sub segmentis unius AE, EC æquale erit quoque rectangulo, quod sub segmentis alterius BE, ED continetur.



Transeat secundò earum linearum una quidem AC per centrum circuli F, altera verò BD nequaquam. Et siquidem AC secat BD ad angulos rectos, secabit [1] eamdem bifariam: adeoque, quum rectangulum sub ipsis BE,

(1) *Prop. 3. hujus.*

BE, ED idem sit, ac BE quadratum; eò res redit, ut ostendamus, BE quadratum æquale esse rectangulo, quod sit ex AE in EC. Id, quod jam alibi a nobis ostensum est: nempe, quum ex ultima propositione libri præcedentis velut corollarium deduximus, quod si ex puncto aliquo in circuli circumferentia sumpto perpendicularis ad diametrum demittatur, quadratum ejus æquale sit rectangulo sub diametri segmentis comprehenso.

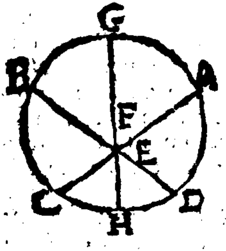


Quod si verò recta AC transiens per centrum circuli F non secet ad angulos rectos aliam BD non transeuntem per centrum; tum ex centro F super BD (1) perpendicularis demittatur FG, quæ eamdem secabit bifariam in G, & jungatur BF. Quia igitur recta AC secta est bifariam in F, & non bifariam in E; erit [2] rectangulum sub partibus inæqualibus AE, EC, una cum quadrato portionis intermediæ EF, æquale quadrato, quod fit ex dimidia CF, seu BF. Est autem propter angulum rectum BGF quadratum quidem ex EF [3] æquale quadratis ex EG, & GF, quadratum verò ex BF æquale quadratis ex BG, & GF. Quare erit rectangulum ex AE in EC, una cum quadratis ex EG, & GF, æquale quadratis ex BG, &

GF:

(1) *Prop.12.lib.1.*
(2) *Prop.5.lib.2.*
(3) *Prop.47.lib.1.*

GF: propter eaque dempto communi quadrato ex GF, erit rectangulum ex AE in EC, una cum EG quadrato, æquale quadrato ex BG. Jam verò, quum recta BD secta sit bifariam in G, & non bifariam in E, quadratum ex BG æquale est rectangulo ex BE in ED, una cum EG quadrato. Itaque erit rectangulum ex AE in EC, una cum EG quadrato, æquale rectangulo ex BE in ED, una cum eodem quadrato, quod fit ex EG. Auferatur commune istud quadratum. Et erit rectangulum ex AE in EC æquale rectangulo ex BE in ED.

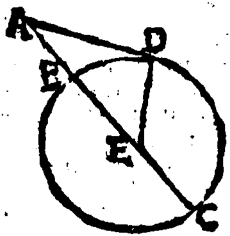


Denique, si neutra linearū AC, BD transeat per centrum circuli F, tunc jungatur EF, quæ extendatur usque donec circumferentiam secet in punctis G, & H. Quia igitur recta GH transit per centrum circuli F, & secat in E aliam AC non transeuntem per centrum; erit rectangulum ex GE in EH æquale rectangulo ex AE in EC. Et similiter, quia recta GH transiens per centrum circuli F secat in E aliam BD non transeuntem per centrum, erit rectangulum ex GE in EH æquale rectangulo ex BE in ED. Eidem igitur rectangulo ex GE in EH æquale est, tum rectangulum ex AE in EC, cum rectangulum ex BE in ED. Sed quæ eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia. Rectangulum igitur ex AE in EC æquale est rectangulo ex BE in ED. Et propterea

pterea ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecent, erit rectangulum ſub ſegmentis unius æquale rectangulo ſub ſegmentis alterius. Quod erat oſtendendum.

PROP. XXXVI. THEOR. XXX.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum contingat, altera eumdem utcumque ſecet; rectangulum ſub ſecante tota, & portione extra circulum exiſtente contentum æquale erit quadrato, quod fit ex tangente.

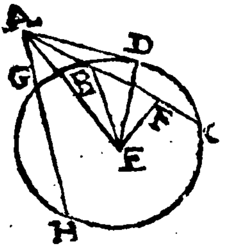


Extra circulũ BCD, cujus centrũ eſt punctum E, ſumatur punctum aliquod A, ex quò ducantur duæ rectæ lineæ AC, AD, quarum iſta circulum tangat in D, illa verò circulum utcumque ſecet in punctis B, & C. Dico, rectangulum, quod fit ex AC in AB, æquale eſſe quadrato tangentis AD.

Tranſeat namque primò ſecans AC per centrum circuli E, & jungatur DE. Quia igitur BC ſecta eſt bifariam in E, eique in directum adjecta alia AB, erit rectangulum ex AC in AB, una cum quadrato ex BE, æquale (1) quadrato ex AE. Eſt autem ob tangentem [2] AD angulus ADE rectus; adeoque quadratum ex AE æquale (3) quadratis, quæ fiunt

(1) *Prop.6.lib.2.* [2] *Prop.18.hujus.*
[3] *Prop.47.lib.2.*

fiunt ex AD, & DE. Quare erit rectangulum ex AC in AB, una cum quadrato ex BE, æquale quadratis, quæ fiunt ex AD, & DE. Unde, quum propter circulum BE quadratum æquale sit DE quadrato, iis ablatis, supererit rectangulum ex AC in AB æquale quadrato tangentis AD.



Quod si verò secans AC non transeat per cētrum circuli E, tunc demittatur super AC (1) perpendicularis EF, quæ secabit BC [2] bifariam in F, junganturque AE, BE, DE. Et quoniam BC secta est bifariam in F, eique in directum adjecta alia AB; erit rursus rectangulum ex AC in AB, una cum BF quadrato, æquale quadrato, quod fit ex AF: proindeque apposito communi quadrato ex EF, erit rectangulum ex AC in AB, una cum quadratis ex BF, & EF, æquale quadratis, quæ fiunt ex AF, & EF. Sunt autem propter angulum rectum AFE quadrata quidem ex BF, & FE æqualia quadrato ex BE, quadrata vero ex AF, & FE æqualia quadrato ex AE, Erit igitur rectangulum ex AC in AB, una cum BE quadrato, æquale quadrato, quod fit ex AE. Jam verò propter tangentem AD angulus ADE est rectus; adeoque quadratum ex AE æquale est quadratis, quæ fiunt ex AD, & DE. Quare erit rectangulum ex AC in AB, una cum BE qua-

(1) *Prop.12 lib.1.* [2] *Prop.3 hujus.*

quadrato, æquale quadratis, quæ fiunt ex AD, & DE. Unde rursus, quum propter circulum BE quadratum æquale sit DE quadrato; his ablatis, supererit rectangulum ex AC in AB æquale quadrato tangentis AD. Et propterea, si extra circulum capiatur punctum aliquod, ex quo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum contingat, altera eum utcumque secet; rectangulum subsecante tota, & portione extra circulum existente contentum æquale erit quadrato, quod fit ex tangente. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc si extra circulum BCD capiatur punctum aliquod A, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ AC, AH, quæ circulum secent; erit rectangulum ex AC in AB æquale rectangulo ex AH in AG. Nam, si ex eodem puncto A ducatur recta AD, quæ circulum contingat in D; erit per istam propositionem quadrato ex AD æquale, tum rectangulum ex AC in AB, cum rectangulum ex AH in AG. Jam verò æqualia sunt inter se, quæ eidem sunt æqualia. Rectangulum igitur ex AC in AB æquale erit rectangulo ex AH in AG.

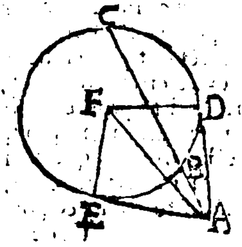
SCHOLIUM.

Unde non abs re erit hoc loco animadvertere id, quod propositione antecedenti ostensum est de rectis, quæ intra circulum se mutuò secant, Verum esse etiam de rectis, quæ extra circulum sibi invicem occurrunt. Nempe, quum-

quemadmodum quum duæ rectæ lineæ se mutuò intra circulum secant, & utrimque ad circumferentiam terminantur, æqualia sunt rectangula, quæ fiunt ex earum segmentis, hoc est ex partibus puncto sectionis, & circuli circumferentia interceptis; ita quoque si rectæ duæ utrimque ad circumferentiam circuli terminatæ, sibi mutuò extra circulum occurrant, æqualia erunt rectangula, quæ fiunt ex earum portionibus, sumptis a puncto occursis, & ad circuli circumferentiam terminatis.

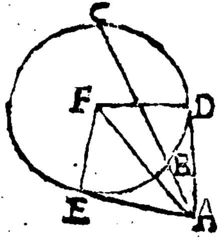
PROP.XXXVII. THEOR.XXXI.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum secet, altera incidat in eum, sitque rectangulum sub secante tota, & portione extra circulum existente contentum æquale quadrato incidentis; incidens ista recta linea tangens erit.



Extra circulum BCD capiatur punctũ aliquod A, ex quo ducantur duæ rectæ lineæ AC, AD, quarum illa circulum secet in punctis B, & C, ista incidat in eum, ipsi occurrens in D. Dico, quod si rectangulum ex AC in AB æquale sit quadrato ipsius AD, recta ista AD circulum contingat in D.

Ducatur etenim ex puncto A recta AE, quæ



quæ circulum contingat in E (1). Tum invento centro circuli F [2] jungantur DF, AF, EF. Quia igitur AE est tangens, erit (3) rectangulum ex AC in AB æquale quadrato ipsius AE. Est autem ex hypothesi idem rectangulum ex AC in AB æquale quadrato rectæ AD. Itaque erit AE quadratum æquale AD quadrato, & propterea erit AE æqualis AD. Unde, quum propter circulum æquales fiant EF, DF, erunt duo latera AE, EF trianguli AEF æqualia duobus lateribus AD, DF trianguli ADF, alterum alteri. Est verò basis AF communis. Quare erit angulus AEF contentus sub lateribus illius æqualis [4] angulo ADF, qui sub istius lateribus continetur. Quumque propter tangentem AE rectus sit (5) angulus AEF, erit quoque rectus angulus alter ADF. Unde, quum ex puncto D, extremitate semidiametri DF, erecta sit perpendicularis DA, hæc tota [6] extra circulum cadet, atque adeo tangens erit. Et propterea si extra circulum capiatur punctum aliquod, ex quo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum secet, altera incidat in eum, sitque rectangulum ex secante tota, & portione

[1] *Prop. 17. hujus.* (2) *Prop. 1. hujus.*
[3] *Prop. 36. hujus.* [4] *Prop. 8. lib. 1.*
[5] *Prop. 18. hujus.* (6) *Prop. 16. hujus.*

tione extra circulum existente, æquale quadrato incidentis; incidens ista recta linea tangens erit. Quod demonstrare oportebat.

COROLLARIUM.

Patet autem ex hac propositione, æquales esse tangentes, quæ ex eodem puncto ad circulum ducuntur. Ostensum est enim, æquales esse rectas AD, AE, quarum utraque circulum contingit: id, quod etiam ostendi potest in hunc modum. Quoniam AD, AE sunt tangentes, rectus erit uterque angulorum ADF, AEF. Unde, quum sit AF quadratum æquale tum quadratis, quæ fiunt ex AD, & DF, cum quadratis, quæ fiunt ex AE, & EF; erunt quadrata ex AD, & DF æqualia quadratis ex AE, & EF. Est verò propter circulum DF quadratum æquale EF quadrato. His igitur ablatis, supererit AD quadratum æquale AE quadrato: & propterea AD ipsi AE æqualis erit.

SCHOLIUM.

Cæterum hæc propositio est conversa præcedentis. Quemadmodum enim ibi ex eo, quod AD sit tangens, ostensum est, rectangulum ex AC in AB æquale esse quadrato, quod fit ex AD; ita hìc per contrarium ex eo, quod rectangulum ex AC in AB æquale sit quadrato ex AD, ostenditur, ipsam AD circulum contingere in puncto D.

GEOMETRIÆ PLANÆ ELEMENTORUM

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

I.

Figura rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando unusquisque figuræ, quæ describitur, angulus unumquodque figuræ, in qua describitur, latus contingit.

II.

Viciſſim verò figura rectilinea circa figuram rectilineam describi dicitur, quando unumquodque figuræ, quæ describitur, latus unumquemque figuræ, circa quam describitur, angulum contingit.

III.

Similiter autem figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando unusquisque figuræ, quæ describitur, angulus contingit circumferentiam circuli, in quo describitur.

IV.

Atque ita quoque figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando unumquodque figuræ, quæ describitur, latus contingit circumferentiam circuli, circa quem describitur.

V.

Ad hæc: circulus in figura rectilinea describi dicitur, quando circumferentiam ejus con-

contingit unumquodque latus figuræ, in qua describitur.

VI.

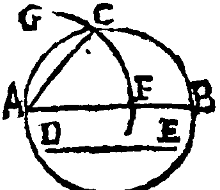
Viciſſim verò circulus circa figuram rectilineam deſcribi dicitur, quando circumferentiam ejus contingit unuſquiſque angulus figuræ, circa quam deſcribitur.

VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ita quidem ponitur intra circulum, ut extrema ejus in circuli circumferentia reperiantur.

PROP. I. PROBL. I.

In dato circulo aptare rectam lineam, quæ alteri datæ ſit æqualis. Oportet autem, ut data recta linea non ſit major diametro dati circuli.



Datus ſit circulus ABC, data verò recta DE, non major diametro dati circuli. Oportet, in circulo ABC aptare rectam lineam, quæ ſit æqualis ipſi DE.

Ducatur in circulo diameter AB. Et ſiquidem AB ſit æqualis datæ DE, quoniam extrema ipſius AB ſunt in circuli circumferentia, ea problemati ſatisfaciet. Quod ſi verò illa non ſit æqualis, abſcindatur ex AB portio AF [1] æqualis DE. Tum centro A, intervalloque AF circulus deſcribatur FCG, qui alium ſecet in C, jungaturque AC. Dico, AC eſſe rectam quæſitam.

(1) *Prop.3.lib.1.*

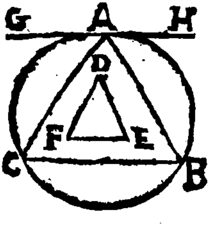
Quum enim A centrum sit circuli FCG, erit AF æqualis AC. Est autem ex constructione AF æqualis DE. Erit igitur AC æqualis DE. Sunt verò extrema ejusdem AC in circumferentia circuli ABC. Aptata est igitur in circulo ABC recta AC æqualis datæ DE. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Necesse est autem, ut data recta linea, cui æqualis altera aptari debet in dato circulo, major non sit diametro dati circuli, ob id, quod ostensum est propositione decima quinta libri præcedentis, nempe quod diameter sit maxima omnium rectarum, quæ intra circulum aptari possunt.

PROP. II. PROBL. II.

In dato circulo describere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato.



Datus sit circulus ABC, datum verò triãgulum DEF. Oportet, in circulo ABC describere triangulum, quod ipsi DEF sit æquiangulum, ita nempe, ut singuli anguli unius æquales sint singulis angulis alterius.

Ducatur [1] GH, quæ circulum contingat

[1] *Prop.17.lib.3.*

gat in A. Tum ad rectam GH, atque ad datum in ea punctum A constituatur (1) primò angulus GAC æqualis angulo DEF, deinde angulus HAB æqualis angulo DFE. Denique jungantur puncta B, & C, in quibus rectæ AB, AC secant circumferentiam dati circuli, per rectam BC. Dico, ABC esse triangulum quæsitum.

Quoniam enim GH est tangens, AC verò secans, erit [2] angulus GAC tangente, & secante contentus æqualis angulo ABC, constituto in alterna circuli portione. Est autem ex constructione angulus GAC æqualis angulo DEF. Erit igitur angulus ABC æqualis quoque angulo DEF.

Simili ratione, quoniam GH est tangens, AB verò secans, erit angulus BAH tangente, & secante contentus æqualis angulo ACB, constituto in alterna circuli portione. Est autem ex constructione angulus BAH æqualis angulo DFE. Itaque erit angulus ACB æqualis quoque angulo DFE.

Rursus, quia omnes anguli cujuscumque trianguli simul [3] duobus rectis æquales sunt; erunt anguli omnes simul sumpti trianguli ABC æquales angulis omnibus simul sumptis trianguli DEF. Ostensum est autem, angulum quidem ABC æqualem esse angulo DEF, angulum verò ACB æqualem angulo DFE. Erit igitur reliquus angulus BAC æqualis reliquo angulo EDF.

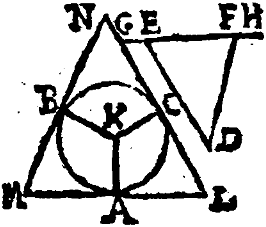
Est itaque triangulum ABC æquiangulum triangulo DEF. Estque etiam descriptum

(1) *Prop.23.lib.1.* [2] *Prop.32.lib.3.*
[3] *Prop.32.lib.1.*

in dato circulo: omnes etenim anguli ejus circumferentiam dati circuli contingunt. In dato igitur circulo ABC descriptum est triangulum ABC æquiangulum dato triangulo DEF. Quod erat faciendum.

PROP. III. PROBL. III.

Circa datum circulum describere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato.



Datus sit circulus ABC, datum verò triangulum DEF. Oportet, circa datũ circulum ABC describere triangulum, quod ipsi DEF sit æquiãgulum; ita nempe, ut singuli unius anguli æquales sint singulis angulis alterius.

Extendatur EF utrimque versus G, & H. Tum invento [1] circuli centro K, actoque radio KA, fiat (2) tam angulus AKB æqualis angulo DEG, quàm angulus BKC æqualis angulo DFH. Deinde ex punctis A, B, C ipsis KA, KB, KC perpendiculares respectivè erigantur [3] LM, MN, NL convenientes in punctis L, M, N. Dico, LMN esse triangulum quæsitum.

Quoniam enim quadrilaterum AKBM per diagonalem AB, vel KM dividitur in duo trian-

[1] *Prop.1.lib.3.* (2) *Prop.23.lib.1.*
(3) *Prop.11.lib.1.*

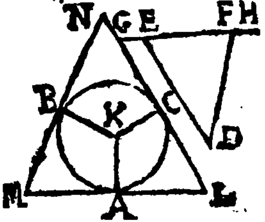
triangula, erunt quatuor ejus anguli simul sumpti rectis totidem æquales, quum omnes anguli cujuscumque trianguli simul duos rectos (1) adæquent. Est autem ex constructione rectus; tum angulus KAM, cum angulus KBM. Itaque alii duo anguli AKB, AMB simul duobus rectis æquales erunt: & propterea, quum duo anguli DEG, DEF pariter duobus rectis æquales sint; erunt duo anguli AKB, AMB æquales duobus angulis DEG, DEF: atque adeo, quia ex constructione angulus AKB æqualis est angulo DEG, erit alter angulus AMB æqualis alteri angulo DEF. Simili ratione, ope quadrilateri KBNC, ostendetur angulus BNC æqualis angulo DFE: ex quo fit, ut tertius angulus EDF etiam sit æqualis tertio angulo ALC. Quare triangulum LMN æquiangulum erit triangulo DEF. Est autem idem triangulum LMN descriptum circa circulum ABC; quandoquidem latera ejus LM, MN, NL contingunt ejus circuli circumferentiam, propterea quod ex constructione radiis KA, KB, KC ad rectos angulos insistunt. Circa datum itaque circulum ABC descriptum est triangulum LMN æquiangulum dato triangulo DEF. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Perpendiculares LM, MN, NL, quæ ex punctis A, B, C super radiis KA. KB, KC respectivè eriguntur, debere sibi mutuò occurrere, haud difficile erit ostendere. Quum enim ex constructione recti sint anguli KAM, KBM, si jungantur puncta A, & B per rectam AB,

K 4 an-

(1) *Prop. 32. lib. 1.*



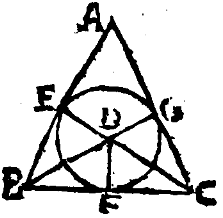
anguli, quos perpendicula AM, BM cum recta ista AB constituunt, erunt simul duobus rectis minores; atque adeo per axioma decimum tertium eadem perpendicula producta convenient tandem in puncto aliquo M, similiter, quum rectus sit ex constructione uterque angulorum KBN, KCN, junctis punctis B, & C per rectam BC, erunt anguli, quos perpendicula BN, CN constituunt cum recta ista BC, simul duobus rectis minores; adeoque per idem axioma decimum tertium eadem perpendicula producta convenient tandem in puncto aliquo N. Major est difficultas de perpendicularibus ML, NL. Verum, quum ostensum sit, angulum AMB æqualem esse angulo DEF, & angulum BNC æqualem angulo DFE; erunt duo anguli AMB, BNC æquales duobus angulis DEF, DFE. Sunt autem per decimam septimam primi duo anguli DEF, DFE simul duobus rectis minores. Quare erunt etiam minores duobus rectis anguli duo AMB, BNC: propterea que per axioma decimum tertium perpendiculares ML, NL productæ convenient, tandem in puncto aliquo L. Quum igitur perpendicula tria LM, MN, NL sibi mutuo occurrant, eadem mutuo ipsorum occursu quæsitum triangulum constituere, nemo non videt.

PROP. IV. PROBL. IV.

In dato triangulo circulum describere.

ESto triangulum ABC. Oportet, in triangulo isto ABC describere circulum.

Se-



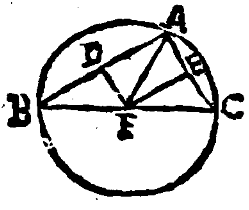
Secentur anguli ABC, BCA (1) bifariam per rectas BD, CD, quæ occurrant sibi mutuò in D. Tum ex puncto D ipsis AB, BC, CA perpendiculares respectivè [2] demittantur DE, DF, DG. Dico, circulum, qui describitur centro D, intervalloque DE, esse circulum quæsitum,

Quoniam enim ex constructione æquales sunt tum anguli DEB, DFB, cum anguli DBE, DBF; erunt duo anguli DEB, DBE trianguli BDE, æquales duobus angulis DFB, DBF trianguli BDF, alter alteri. Est autem latus BD utrique triangulo commune. Itaque æqualia quoque erunt (3) latera DE, DF. Simili ratione, ope triangulorum CDF, CDG, ostendentur æqualia latera DF, DG. Tres igitur DE, DF, DG æquales sunt inter se. Et propterea circulus, qui describitur centro D, intervalloque DE, transibit etiam per puncta F, & G. Contingunt autem circuli hujus circumferentiam latera trianguli AB, BC, CA: idem igitur circulus descriptus erit in triangulo ABC. Adeoque in dato triangulo ABC descriptus est circulus EFG. Quod erat faciendum.

(1) *Prop.9.lib.1.* [2] *Prop.12.lib.1.*
(3) *Prop.26.lib.1.*

PROP. V. PROBL. V.

Circa datum triangulum circulum describere.



Esto triangulũ ABC. Oportet, circa triãgulũ istud ABC describere circulum.

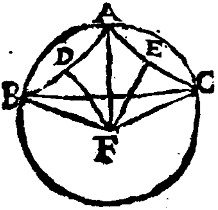
Secentur latera AB, AC [1] bifariam in punctis D, & E, ex quibus erigantur (2) super iisdem AB, AC perpendiculares DF, EF, sibi mutuò occurrentes in F. Dico, circulum, qui describitur centro F, intervalloque FA, esse circulum quæsitum.

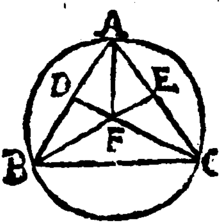
Jungantur etenim rectæ FA, FB, FC. Et quoniam ex constructione AD est æqualis BD, communis verò DF; erunt duo latera AD, DF trianguli ADF æqualia duobus lateribus BD, DF trianguli BDF, alterum alteri. Sunt antem æquales quoque anguli sub lateribus iis comprehensi, quum uterque ex constructione sit rectus. Quare erit (3) basis unius FA æqualis basi alterius FB. Simili ratione, ope triangulorum AEF, CEF, ostendetur FA æqualis FC. Tres igitur FA, FB, FC æquales sunt inter se: & propterea circulus, qui describitur centro F, intervalloque FA, quum transeat quoque per puncta B, & C, descriptus erit circa triangulum ABC. Quod erat faciendum.

SCHO-

[1] *Prop.10.lib.1.* [2] *Prop.11.lib.1.*
(3) *Prop.4.lib.1.*

SCHOLIUM.





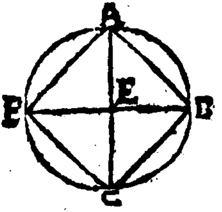
Perpendiculares DF, EF, quæ ex punctis D, & E super ipsis AB, AC eriguntur, debere si mutuò occurrere in puncto aliquo F, nemo non videt. Sunt enim anguli ADF, AEF recti. Quare si jungantur puncta D, & E per rectam DE, anguli, quos cum recta ista DE eadem perpendiculares efficiunt, erunt duobus rectis minores: atque adeo per axioma decimum tertium productæ tandem convenient inter se. Jam punctum F, in quo perpendiculares illæ sibi mutuò occurrunt, potest esse vel intra triangulum, vel in basi ipsius, vel denique extra triangulum: nempe prout angulus BAC vel est acutus, vel rectus, vel obtusus.

PROP. VI. PROBL. VI.

In dato circulo quadratum describere.

DAtus sit circulus ABCD. Oportet, in eo quadratum describere.

Ducantur in circulo duæ diametri AC, BD, quæ in centro E se secent ad angulos rectos.



Tum jungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico, ABCD esse quadratum quæsitum.

Quoniam enim E centrum est circuli ABCD, erit AE æqualis CE. Est autem BE communis. Erunt igitur duo latera AE, BE trianguli AEB æqualia duobus lateribus CE, BE trianguli CEB, alterum alteri. Sunt etiam æquales anguli sub lateribus iis contenti, quum uterque ipsorum ex constructione sit rectus. Quare erit [1] basis unius AB æqualis basi alterius BC. Simili ratione ostendetur & BC æqualis CD, & CD æqualis DA. Quatuor igitur AB, BC, CD, DA æquales erunt inter se: propévereaque figura ABCD æquilatera erit. Est etiam rectangula. Sunt enim AC, BD diametri; adeoque quum unaquæque ipsarum dividat circulum in duos semicirculos, erit quilibet angulus figuræ ABCD in semicirculo, & consequenter (2) rectus. Figura igitur ABCD, quum æquilatera sit, & rectangula, quadratum erit. Proindeque in dato circulo descriptum est quadratum ABCD. Quod erat faciendum.

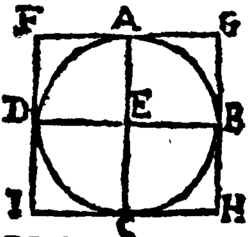
PROP. VII. PROBL. VII.

Circa datum circulum quadratum describere.

Esto circulus ABCD. Oportet, circa ipsum quadratum describere.

Du-

[1] *Prop.4.lib.1.* [2] *Prop.31.lib.3.*



Ducantur etiam binæ diametri AC, BD, quæ in centro E se secent ad angulos rectos. Tum ex punctis A, B, C, D ipsis AC, BD perpendiculares [1] respectivè erigantur FG, GH, HI, IF, quæ conveniant in punctis F, G, H, I. Dico, FGHI esse quadratum quæsitum.

Quoniam enim rectæ GF, BD, HI insistunt ad angulos rectos super AC, eæ parallelæ erunt inter se. Et similiter quoniam rectæ FI, AC, GH insistunt ad angulos rectos super BD, istę quoque inter se parallelæ erunt. Quum igitur CF, CG parallelogramma sint, erit (2) ipsi AC æqualis tam FI, quàm GH. Quumque similiter parallelogramma sint BF, BI, erit ipsi BD æqualis utraque ipsarum GF, HI. Sunt autem AC, BD, tanquam diametri ejusdem circuli, æquales inter se. Quatuor itaque FG, GH, HI, IF etiam inter se æquales erunt: proptereaque figura FGHI æquilatera erit. Est etiam rectangula, quum propter parallelogramma EF, EG, EH, EI anguli ejus æquales sint iis, quos binæ diametri AC, BD mutua sectione constituunt in centro E. Erit igitur figura FGHI æquilatera simul, & rectangula; adeoque quadratum erit. Itaque circa datum circulum descriptum est quadratum FGHI. Quod erat faciendum.

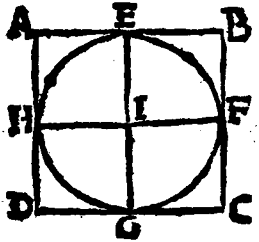
PROP.

---

[1] *Prop.* 12 *lib.* 1. (2). *Prop.* 34 *lib.* 1.

PROP. VIII. PROBL. VIII.

In dato quadrato circulum describere.



Datum sit quadratum ABCD. Oportet, in ipso circulum describere.

Secentur latera AB, BC bifariam[1] in E, & F, ex quibus super iisdem AB, BC perpendiculares excitentur [2]EG, FH, se mutuò secantes in I. Dico, circulum, qui describitur centro I, intervalloque IE, esse circulum quæsitum.

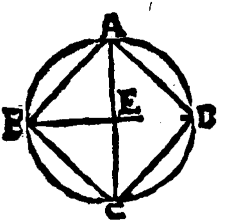
Quoniam enim ABCD quadratum est, erit AB æqualis BC. Sunt autem ex constructione duæ AB, BC sectæ bifariam in E, & F. Quatuor igitur AE, EB, BF, FC æquales erunt inter se. Jam verò unumquodque ipsorum AI, BI, CI, DI parallelogrammum est; adeoque[3] AE est æqualis HI, EB æqualis IF, BF æqualis EI, & FC æqualis IG. Itaque quatuor HI, IF, EI, IG etiam inter se æquales erunt. Et propterea circulus, qui describitur centro I, intervalloque IE, transibit etiam per puncta F, G, H. Contingunt autem circuli hujus circumferentiam latera dati quadrati AB, BC, CD, DA, quum diametris EG, FH ad rectos angulos insistant. Quare in dato quadrato ABCD descriptus est circulus EFGH. Quod erat faciendum.

PROP.

(1) *Prop.10.lib.1.* [2] *Prop.11.lib.1.*
[3] *Prop.34.lib.1.*

PROP. IX. PROBL. IX.

Circa datum quadratum circulum describere.



Esto quadratum ABCD. Oportet, circa ipsum describere circulum.

Ducantur diagonales AC, BD, se mutuò secantes in E. Dico, circulum, qui describitur centro E, intervalloque EA, esse circulum quæsitum.

Quoniam enim ABCD quadratum est, erit AB æqualis BC; adeoque, quum isosceles sit triangulum ABC, erit (1) angulus BAC æqualis angulo BCA. Sunt autem anguli omnes cujuscumque trianguli simul [2] duobus rectis æquales. Quum igitur propter quadratum rectus sit angulus ABC, semirectus erit tum angulus BAC, cum angulus BCA. Simili ratione ostendetur semirectos esse angulos ABD, ADB: ex quo sequitur, angulos quadrati sectos esse bifariam per diagonales AC, BD; adeoque non modò ipsos, verùm etiam & eos, in quos secti sunt, æquales esse inter se. Quum igitur anguli BAE, ABE æquales inter se sint, erunt etiam (3) æqualia latera EA, EB, quæ angulos illos

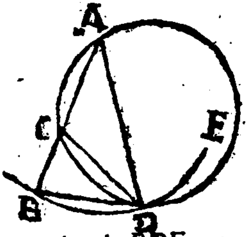
---

[1] *Prop.5.lib.1.* (2) *Prop.32.lib.1.*
[3] *Prop.6.lib.1.*

los subtendunt. Quumque eadem ratione ostendatur EB æqualis EC, & EC æqualis ED; erunt quatuor EA, EB, EC, ED æquales inter se; atque adeo circulus, qui describitur centro E, intervalloque EA, transibit etiam per puncta B, C, D. Unde, quum anguli dati quadrati contingant circuli hujus circumferentiam, idem descriptus erit circa quadratum. Quod erat faciendum.

PROP. X. PROBL. X.

Æquicrure triangulum constituere, cujus uterque angulorum ad basim duplus sit anguli verticalis.



Exponatur recta quævis AB, quæ secetur subinde in C, [1] ut rectangulum ex AB in BC æquale sit quadrato ex AC. Tum centro A, intervalloque AB descripto circulo BDE, applicetur (2) in circulo isto recta BD æqualis ipsi AC, jungaturque AD. Dico, ABD esse triangulum isosceles, seu æquicrure quæsitum.

Jungatur etenim CD, & circa triangulum ACD (3) circulus describatur. Quia igitur rectangulum ex AB in BC æquale est quadrato ex AC, estque ex constructione AC æqualis

---

[1] *Prop.11.lib.2.* [2] *Prop.1.hujus.*
[3] *Prop.5.hujus.*

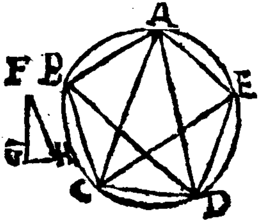
lis BD; erit idem rectangulum ex AB in BC æquale quadrato ex BD. Unde, quum extra circulum ACD sumptum sit punctum B, ex quo cadunt ad ejus circumferentiam duæ rectæ lineæ BA, BD, & rectangulum ex AB in BC æquale sit quadrato ex BD; erit recta ista BD (1) tangens ejus circuli: adeoque angulus BDC, tangente, & secante contentus, æqualis erit [2] angulus CAD, in alterna circuli portione constituto; & consequenter apposito communi CDA, erit totus angulus BDA, sive etiam DBA, æqualis duobus angulis CAD, CDA. Jam verò in triangulo ACD latus AC productum est in B; atque adeo iisdem duobus angulis CAD, CDA æqualis est etiam angulus exterior BCD (3). Itaque erit angulus DBA æqualis angulo BCD. Et propterea latera BD, CD, quæ subtendunt angulos illos, æqualia erunt [4] inter se. Est verò BD æqualis AC. Quare & CD ipsi CA æqualis erit. Unde, quum isosceles sit triangulum ACD, erit angulus CDA æqualis angulo CAD. Ostensus est autem angulus CDB æqualis eidem angulo CAD. Totus itaque angulus BDA, sive DBA duplus erit ipsius CAD. Et propterea constitutum est triangulum isosceles BAD, cujus uterque angulorum ad basim duplus est anguli verticalis. Quod erat faciendum.

PROP.

[1] *Prop.37.lib.3.* (2) *Prop.32.lib.3.*
(3) *Prop.32.lib.1.* [4] *Prop.6.lib.1.*

PROP. XI. PROBL. XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.



Datus sit circulus ABCDE. Oportet, in eo describere pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc est figuram, quæ habeat tum quinque latera, ex quibus constet, æqualia, cum angulos, quos latera illa mutuo occursu constituunt, æquales.

Constituatur triangulum iscosceles GFH, cujus uterque angulorum ad basim duplus sit anguli verticalis (1). Tum in dato circulo ABCDE describatur (2] triangulum CAD æquiangulum ipsi GFH, quod proinde similiter isosceles erit, eritque etiam in eo uterque angulorum ad basim duplus anguli verticalis. Deinde secentur anguli ACD, ADC bifariam (3) per rectas CE, DB, junganturque puncta A, B, C, D, E per rectas, AB, BC, CD, DE, EA. Dico, ABCDE esse figuram quæsitam.

Quoniam enim uterque angulorum ACD, ADC duplus est anguli CAD, iidemque anguli

(1) *Prop.10.hujus.* [2] *Prop.2.hujus.*
[3] *Prop.9.lib.1.*

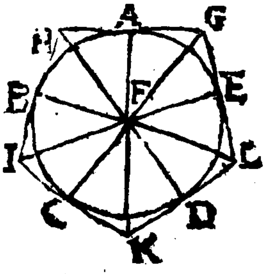
guli ACD, ADC secti sunt bifariam per rectas CE, DB; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA æquales inter se. Sed in æqualibus circulis, atque adeo eò magis in eodem circulo, æquales anguli æqualibus arcubus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias sint positi [1]. Quinque igitur arcus AB, BC, CD, DE, EA, quibus insistunt ii quinque anguli, æquales erunt inter se. Quare æqualia quoque erunt inter se ipsa quinque figuræ latera AB, BC, CD, DE, EA; quum in æqualibus circulis, & consequenter eò magis in eodem circulo, æquales arcus æquales quoque rectæ subtendant (2). Est igitur figura ABCDE æquilatera. Sed est etiam æquiangula. Quum enim arcus BC æqualis sit arcui EA, apposito communi CDE, erit arcus BCDE æqualis quoque arcui CDEA. In æqualibus autem circulis anguli, qui sive ad centra, sive ad circumferentias positi, æqualibus arcubus insistunt, æquales (3) sunt inter se. Erit igitur angulus BAE æqualis angulo CBA. Eademque ratione & reliqui figuræ anguli inter se æquales ostendentur. In dato itaque circulo ABCDE descriptum est pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod erat faciendum.

PROP. XII. PROBL. XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Datus sit circulus ABCDE. Oportet, circa eum pentagonum æquilaterum, & æquian-

(1) *Prop.26 lib.3.* (2) *Prop.29 lib.3.*
[3] *Prop.27 lib.3.*



& æquiangulum describere.

Describatur (1) primum in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum; sintque A, B, C, D, E puncta circũferentiæ, quæ illud determinant, ita, ut æquales sint arcus AB, BC, CD, DE, EA. Tum invento [2] circuli centro F, ducantur radii AF, BF, CF, DF, EF, quibus ex punctis A, B, C, D, E perpendiculares (3) respectivè erigantur GH, HI, IK, KL, LG, quæ conveniant inter se in punctis G, H, I, K, L. Dico GHIKL esse figuram quæsitam.

Jungantur etenim rectæ FG, FH, FI, FK, FL. Et quoniam triangula FAH, FBH sunt rectangula ex constructione, erit [4] quadratum ex FH æquale, tum quadratis, quæ fiunt ex AF, & AH, cum quadratis, quæ fiunt ex BF, & BH. Quare quadrata ex AF, & AH æqualia erunt quadratis ex BF, & BH. Est autem AF quadratum æquale BF quadrato. His igitur demptis, supererit AH quadratum æquale BH quadrato. Et propterea AH ipsi BH æqualis erit. Unde, quum sint duo latera AF, AH trianguli FAH æqualia duobus lateribus BF, BH trianguli FBH, alterum alteri, & æquales quoque anguli sub iis

[1] *Prop.* 11. *hujus.* (2) *Prop.* 1. *lib.* 3.
[3] *Prop.* 11. *lib.* 1. [4] *Prop.* 74. *lib.* 1.

iis lateribus contenti, utpote recti ex constructione; erit (1) tum angulus AFH æqualis angulo BFH, cum angulus AHF æqualis angulo BHF: adeoque uterque ipsorum AFB, AHB sectus erit bifariam per rectam FH. Nec dissimiliter ostendetur, sectum esse bifariam per rectam FI utrumque angulorum BFC, BIC.

Et quoniam æquales sunt arcus AB, BC, erunt (2) etiam æquales anguli AFB, BFC, qui arcubus illis insistunt. Ex ostensis autem anguli illi secti sunt bifariam per rectas FH, FI. Erit igitur angulus BFH æqualis angulo BFI. Sed æquales pariter sunt anguli FBH, FBI, quum uterque ex constructione sit rectus. Duo igitur triangula BFH, BFI habent duos angulos duobus angulis æquales, alterum alteri. Unde, quum habeant latus BF commune, habebunt quoque [3] latus BH æquale lateri BI, & latus FH æquale lateri FI. Est igitur HI secta bifariam in B. Similiter autem ostendetur, & GH sectam esse bifariam in A. Quare, quum sit AH æqualis BH, erit tota GH toti HI pariter æqualis. Quumque eadem ratione ostendantur æqualia inter se reliqua figuræ latera; figura GHIKL æquilatera erit.

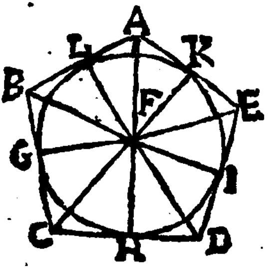
Rursus, quum duæ FH, FI ostensæ sint æquales inter se, triangulum HFI isosceles erit. Quare angulus FHI æqualis erit (4) angulo FIH. Ostensum est autem, angulos AHB, BIC sectos esse bifariam per rectas FH, FI, atque adeo duplos esse angulorũ FHI, FIH. Itaque

[1] *Prop.4.lib.1.* [2] *Prop.27.lib.3.*
(3) *Prop.26.lib.1.* (4) *Prop.5.lib.1.*

Itaque & ipsi anguli AHB, BIC inter se æquales erunt. Quumque eadem ratione ostendantur æquales inter se reliqui figuræ anguli; erit figura GHIKL æquiangula. Ostensum autem est, eamdem figuram esse etiam æquilateram. Erit igitur figura GHIKL æquilatera simul, & æquiangula. Et propterea circa datum circulum ABCDE descriptum est pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod erat faciendum.

PROP. XIII. PROBL. XIII.

In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum describere.



Datum sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE. Oportet, in eo circulum describere.

Secentur (1) anguli ABC, BCD bifariam per rectas BF, CF, quæ inter se conveniant in F, & super BC perpendicularis (2) demittatur FG. Dico, circulum, qui describitur centro F, intervalloque FG, esse circulum quæsitum.

Jungantur etenim rectæ AF, EF, DF, & super aliis pentagoni lateribus CD, DE, EA, AB perpendicula respectivè demittantur FH, FI, FK, FL. Quia igitur ex hypothesi pentagonum est æquilaterum, erit AB æqualis

(1) *Prop. 9. lib. 1.* [2] *Prop. 12. lib. 1.*

sis BC. Est verò communis BF. Quare duo latera BA, BF trianguli ABF æqualia erunt duobus lateribus BC, BF trianguli CBF, alterum alteri. Sunt autem æquales quoque anguli sub iis lateribus contenti, quum ex constructione angulus ABC sectus sit bifariam per rectam BF. Erit igitur [1] angulus BAF æqualis angulo BCF. Et propterea, quemadmodum angulus BCF semissis est ipsius BCD, ita quoque erit angulus BAF semissis ipsius BAE; quum propter pentagonum æquilaterum simul, & æquiangulum æquales sint anguli BDC, BAE. Ex quo sequitur, angulum BAE etiam sectum esse bifariam per rectam AF.

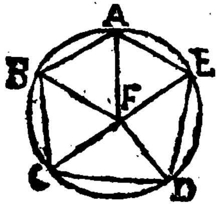
Simili autem ratiocinio ostendetur, sectos esse quoque bifariam per rectas EF, DF angulos AED, CDE. Unde facile erit ostendere, æqualia esse inter se demissa perpendicula FG, FH, FI, FK, FL. Si enim considerentur, exempli gratia, triangula duo CGF, CHF, hæc habere comperientur duos angulos duobus angulis æquales, alterum alteri, & latus CF commune. Quare erit etiam (2) FG æqualis FH. Ita igitur quoque ostendetur FH æqualis FI, FI æqualis FK, & FK æqualis FL: proindeque, quum omnes FG, FH, FI, FK, FL inter se sint æquales; circulus, qui describitur centro F, intervalloque FG, transibit non modò per punctum G. verum etiam per puncta H, I, K, L. Contingunt autem circuli hujus circumferentiam latera BC, CD, DE, EA, AB, quum radiis FG, FH, FI, FK, FL ad rectos

[1] *Prop.4. lib.1.* [2] *Prop.26.lib.1.*

rectos angulos insistant. Itaque circulus GHIKL descriptus erit in dato pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE. Quod erat faciendum.

PROP. XIV. PROBL. XIV.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere,



Datum sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulũ ABCDE. Oportet, circa ipsum circulum describere.

Secentur anguli (1) ABC, BCD bifariam per rectas BF, CF, quæ inter se conveniant in F. Dico, circulum, qui describitur centro F, intervalloque FB, esse circulum quæsitum.

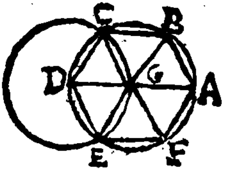
Jungantur etenim rectæ AF, EF, DF. Et perinde, ac in antecedente, ostendetur quoque sectos esse bifariam per rectas istas angulos BAE, AED, EDC. Ex quo sequitur, æquales esse inter se, non modo angulos pentagoni dati, verum etiam eos, in quos ii secti sunt. Unde facile erit ostendere, æquales esse inter se rectas AF, BF, CF, DF, EF: nempe, quia triangula AFB, BFC, CFD, DFE, EFA ob angulos, quos ad bases habent æquales, fiunt [2] isosceli. Quum autem æquales sint rectæ AF, BF, CF, DF, EF, circulus, qui describitur centro F, inter-

(1) *Prop.9.lib.1.* (2) *Prop.6.lib.1.*

tervalloque FB, transibit non modò per punctum B, verum etiam per puncta C, D, E, A; & consequenter descriptus erit circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod erat faciendum.

PROP. XV. PROBL. XV.

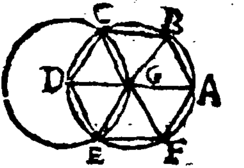
In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.



Datus sit circulus ABCDEF. Oportet, in eo describere hexagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc est figuram, quæ habeat æqualia, tum sex latera, ex quibus constat, cum sex angulos, quos latera illa mutuo occursu constituunt.

Per centrum circuli G ducatur diameter AD. Tum centro D, intervalloque DG describatur circulus alius GCE, priorem secans in punctis C, & E. Jungantur porro rectæ CG, EG, quæ producantur usque donec dati circuli circumferentiam secent in F, & B. Denique puncta A, B, C, D, E, F jungantur per rectas totidem AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico, figuram ABCDEF, his rectis comprehensam, esse hexagonum quæsitum.

Quum enim G centrum sit circuli ACE, rectæ GC, GD, GE, velut ductæ à centro ad circumferentiam, æquales erunt inter se. Et similiter, quia D centrum est circuli CGE, erunt rectæ DC, DG, DE etiam ductæ a centro ad circumferentiam, atque adeo pariter



æquales inter se. Eidem igitur DG æqualis est tam utraque ipsarum GC, GE, quā utraque ipsarum DC, DE. Quare & omnes DC, CG, GD, GE, DE inter se æquales erunt. Et propterea utrumque triangulorum CDG, DEG æquilaterum erit.

Jam triangulum æquilaterum est etiam æquiangulum; adeoque, quum omnes anguli cujuscumque trianguli simul [1] duos rectos adæquent, uterque angulorum CGD, DGE duorum rectorum tertia pars erit. Sunt autem duo anguli BGC, CGE simul (2) duobus rectis æquales. Quare duorum rectorum tertia quoque pars erit angulus BGC. Et propterea tres anguli BGC, CGD, DGE æquales erunt inter se, quibus quum sint æquales [3] totidem alii anguli EGF, FGA, AGB, velut ad verticem cum iis constituti; erunt sex anguli AGB, BGC, CGD, DGE, EGF, FGA omnes inter se æquales: & consequenter æquales quoque erunt inter se, tum arcus AB, BC, CD, DE, EF, FA (4), quibus insistunt anguli illi; cum rectæ AB, BC. CD, DE, EF, FA, quæ [5] arcus illos subtendunt.

Est igitur figura ABCDEF æquilatera. Sed est etiam æquiangula. Nam quum arcus CD

(1) *Prop.32.lib.1.* (2) *Prop.13.lib.1.*
(3) *Prop.15.lib.1.* [4] *Prop.26.lib.3.*
(5) *Prop.29.lib.3.*

æqualis ſit arcui AB; appoſito communi DEFA, erit arcus CDEFA æqualis arcui DEFAB. Et propterea, quia æqualibus arcubus (1) æquales quoque anguli inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias ſint poſiti; erit angulus ABC æqualis angulo BCD. Nec diſſimiliter oſtendetur, æquales eſſe inter ſe reliquos figuræ angulos. Itaque in dato circulo deſcriptum eſt hexagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDEF. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Patet autem, latus prædicti hexagoni CD æquale eſſe radio ipſius circuli DG; atque adeo in praxi longe faciliùs deſcribi poſſe in dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum: nempe, ſi ſumpto radio circuli, is circino ex uno circumferentiæ puncto eouſque intra circumferentiam aptetur, donec ad primum illud punctum perveniatur. Sed liquet etiam, circuli circumferentiam magis, quàm ter, diametrum continere. Sex enim latera hexagoni triplum diametri conſtituunt, quæ tamen ſimul minora ſunt circumferentia circuli.

SCHOLIUM.

Quemadmodum poſt problema de deſcribendo pentagono æquilatero, & æquiangulo in dato circulo ſubjunxit Euclides tria alia problemata, unum de eo deſcribendo circa datum cir-

(1) *Prop.27.lib.3.*

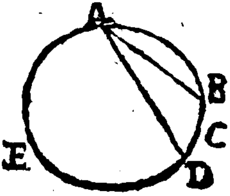
circulum; alterum de circulo in ipso describendo; & tertium de circulo circa idem describendo: ita quoque post appositum problema de describendo hexagono æquilatero, & æquiangulo in dato circulo, subnectenda erant tria alia ejusdem generis problemata; hoc est unum de descriptione ejus circa datum circulum; alterum de descriptione circuli in data illa figura; & tertium de descriptione circuli circa eamdem datam figuram. At hæc omisit Euclides, non quod de iis non cogitaverit, sed fortè quia novit, ea facili negotio solvi posse eadem omnino ratione, qua eadem soluta sunt, quum de pentagono æquilatero, & æquiangulo quæstio erat. Unde monitum Lectorem hìc velim, in hac materia problema, quod omnem involuit difficultatem, esse de describenda figura, quæ æquilatera, & æquiangula sit, in dato circulo. Nam quantum ad problemata de descriptione ejusdem figuræ circa datum circulum, vel de descriptione circuli in ipsa, vel circa ipsam, hæc nullam habent difficultatem; quum methodus ea solvendi sit ipsissima illa, qua soluta fuerunt, quum de pentagono agebatur.

PROP. XVI. PROBL. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

DAtus sit circulus ABCDE. Oportet, in eo describere quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc est figuram quindecim laterum æqualium, & totidem angulorum similiter æqualium.

Res



Res igitur eo redit, ut datam circumferentiã in quindecim partes æquales dividamus. Quod quidem obtinebimus hac ratione. Describatur primò in dato circulo (1) triangulum æquilaterum, sitque AD unum ex ejus lateribus. Quindecim itaque partium, in quas dividenda est tota circuli circumferentia, quinque continebit arcus AD. Describatur deinde in eodem circulo dato (2) pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, sitque AB unum ex ejus lateribus. Et earumdem quindecim partium tres erunt in arcu AB; atque adeo duæ in arcu reliquo BD. Et propterea, si arcus iste BD (3) secetur bifariam in C, erit BC, aut CD una ex quindecim illis partibus. Unde, si cœteræ omnes capiantur, & in iis subtensæ ducantur, figura subtensis istis contenta erit quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum quæsitum.

(1) *Prop.2.hujus.* (2) *Prop.11.hujus.*
(3) *Prop.30.lib.3.*

GEOMETRIÆ PLANÆ ELEMENTORUM LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

I.

Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur; hoc est, quando minor aliquoties sumpta majorem adæquat. Sic numerus 2 est pars numeri 10; quia quinquies sumptus, conficit 10. Et numerus 3 est pars numeri 12; quia quater acceptus adæquat 12.

Hujuscemodi pars, quæ totum, ad quod refertur, exacte metitur, vocatur speciatim pars aliquota: idque ad differentiam partis aliquantæ, quæ totum suum nequaquam metitur exacte, sed aliquoties sumpta, vel illud excedit, vel ab eo deficit; veluti est numerus 2 respectu alterius 9; vel numerus 3 relate ad alium 13.

Quod si contingat; magnitudinem aliquam minorem duas, aut plures alias majores metiri; tunc magnitudo illa minor vocabitur pars communis aliarum. Sic numerus 2 est pars communis numerorum 6, 8, 10; quia unumquemque istorum exacte metitur.

Sed si fuerint duæ magnitudines minores, quæ æque metiantur duas alia majores; tunc

tunc eæ dicentur partes similes, aut æquæ partes istarum; veluti sunt numeri 2, & 3 respectu numerorum 8, & 12: nam sicuti 2 quater metitur 8, ita 3 quater etiam metitur 12.

II.

Multiplex verò est magnitudo magnitudinis, major minoris, quando majorem metitur minor; hoc est, quando majorem adæquat minor aliquoties sumpta. Sic numerus 10 est multiplex numeri 2; quia si iste quinquies sumatur, prodibit 10. Atque ita quoque numerus 12 est multiplex numeri 3; quia iste quater acceptus conficit 12.

Hujusmodi totum, quod a parte, ad quam refertur, exacte mensuratur, vocari quoque potest totum aliquorum: idque ad differentiam alterius totius, quod a parte sua nequaquam mensuratur exacte, quodque proinde totum aliquantum potest appellari; veluti est numerus 9 respectu alterius 2; vel numerus 13 relate ad alium 3.

Quod si contingat, magnitudinem aliquam majorem a duabus, aut pluribus aliis minoribus mensurari; tunc magnitudo illa major vocabitur multiplex communis aliarum. Sic numerus 12 est multiplex communis numerorum 2, 3, 4, 6; quia ab horum unoquoque exacte mensuratur.

Sed si fuerint duæ magnitudines majores, quas æque metiantur duæ aliæ magnitudines minores; tunc illæ dicentur multiplices similes, aut æque multiplices istarum; velut sunt numeri 8. & 12 respectu numerorum 2, & 3: nam sicuti 2 quater metitur 8, sic 3 quater etiam metitur 12.

III.

Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam secundum quantitatem habitudo. Nempe, si comparentur inter se magnitudines duæ ejusdem generis, & in earum comparatione non ad aliud attendatur, quàm ad ipsarum quantitates; ejuscemodi comparatio rationis vocabulo appellabitur.

Ex quo colliges, comparationem duarum magnitudinum vocandam esse rationem, quotiescumque habentur hæc duo. Primum, ut magnitudines, quæ comparantur inter se, sint ejusdem generis: quæ quidem quales sint, sequens ostendet definitio. Et deinde, ut in iis comparandis non ad aliud, quàm ad proprias ipsarum quantitates attendatur.

Cœterum ex magnitudinibus, inter quas ratio subsistit, ea, quæ confertur, vocatur antecedens; illa verò, cum qua confertur, consequens rationis nuncupatur. Ita si ratio sit inter duas magnitudines, quas voco A, & B, conferaturque A cum B; dicetur A antecedens rationis, & B consequens appellabitur.

IV.

Magnitudines dicuntur esse ejusdem generis, quum multiplicatæ [hoc est aliquoties acceptæ,] *possunt se mutuò superare*. Unde non inter alias magnitudines ratio subsistere potest, quàm inter eas, quæ ejusmodi sunt, ut si minor ipsarum aliquoties capiatur, valeat tandem majorem superare.

Linea igitur est ejusdem generis cum alia linea, & consequenter comparatæ inter se ratione quantitatis, possunt rationem habere: quandoquidem linea minor, si aliquoties

su-

sumatur, hoc est bis, ter, quater, &c. poterit tandem lineam majorem superare. Et eadem ratione, tam duæ superficies, quàm corpora duo dici debent magnitudines ejusdem generis.

Linea autem cum superficie nequaquam est ejusdem generis, nec proinde comparatæ inter se mutuò ratione quantitatis, possunt inter se rationem habere: nam tantum abest, ut linea aliquoties sumpta superficiem excedat, ut neque etiam in superficiem verti possit. Atque ita quoque nec linea, nec superficies est ejusdem generis cum corpore.

V.

Proportio autem est duarum rationum æqualitas, seu identitas. Nempe, si habeantur duæ rationes, quæ sint eædem, seu æquales inter se; æqualitas, seu identitas ista earum rationum proportionis vocabulo appellabitur. Quæ verò rationes dicendæ sint eædem, seu æquales inter se, sequens definitio nobis explicabit.

Ex eo autem, quod proportio sit æqualitas, seu identitas duarum rationum, fit, ut in omni proportione sint duo antecedentes, & duo consequentes. Ita si ratio, quam habet A ad B, æqualis sit rationi, quam habet C ad D; adeo, ut A sit ad B, veluti est C ad D: erunt A, & C duo antecedentes, B autem, & D duo consequentes.

VI.

Duæ rationes dicuntur eadem, seu æquales inter se, quum antecedentium æque multiplicia quavis vel una deficiunt, vel una adæquant, vel una superant æque multiplicia consequen-

tium utcumque sumpta. Sic ratio, quam habet A ad B, dicetur æqualis rationi, quam habet C ad D, si antecedentium A, & C æquemultiplicia quælibet M, & N vel una deficiant, vel una adæquent, vel una superent consequentium B, & D æquemultiplicia ut cumque sumpta P, & Q.

Sedulo autem notare hoc loco oportet, quod ut duæ rationes juxta hanc definitionem dicantur eædem, seu æquales inter se; haud quidem satis sit, aliqua antecedentium æquemultiplicia, vel una deficere, vel una adæquare, vel una excedere aliqua consequentium æquemultiplicia: sed necesse sit, ut id de omnibus omnino æquemultiplicibus, quæ sumi possunt, tam respectu antecedentium, quàm respectu consequentium, verum sit. Nam si utique vel in uno casu id locum non habuerit, procul est, ut duæ rationes dici possint eædem, seu æquales inter se.

VII.

Una ratio dicitur altera major, quum talia reperire licet æquemultiplicia antecedentium, & consequentium, ut multiplex antecedentis prioris rationis excedat multiplex sui consequentis, sed multiplex antecedentis alterius rationis non excedat multiplex sui consequentis. Ita ratio, quām habet A ad B, dicetur major ratione, quam habet C ad D, si utique reperiri possint antecedentium A, & C talia æquemultiplicia M, & N, nec non & consequentium B, & D talia æquemultiplicia, P, & Q, ut M superet P, sed N non superet Q.

Atque hìc quoque notare sedulò oportet, quod,

quod, ut una ratio juxta hanc definitionem dicatur altera major, haud quidem necesse sit, omnia, tum antecedentium, cum consequentium æquemultiplicia esse talis naturæ, ut multiplex antecedentis prioris rationis excedat multiplex sui consequentis, multiplex verò antecedentis alterius rationis non excedat multiplex sui consequentis; sed satis sit, si id vel in uno tantum casu reperiatur.

VIII.

Magnitudines, quæ eamdem rationem inter se habent, dicuntur proportionales. Ita si ratio, quam habet A ad B, æqualis sit rationi, quam habet C ad D; quatuor magnitudines A, B, C, D dicentur proportionales. Quod si autem ratio, quæ est inter A, & B, non sit æqualis rationi, quæ est inter C, & D; tunc quatuor magnitudines A, B, C, D nequaquam dicendæ sunt proportionales.

IX.

Proportio autem in tribus paucissimis terminis consistit. Etsi enim proportio, velut duarum rationum æqualitas, natura sua quatuor terminos exigat, hoc est duos antecedentes, & duos consequentes; attamen, ut ista docet definitio, potest in tribus quoque consistere: scilicet, quum terminus medius fungitur munere consequentis in prima ratione, & munere antecedentis in secunda.

Ita, si ratio, quam habet A ad B, æqualis sit rationi, quam habet B ad C; harum rationum æqualitas consistet in tribus terminis, qui sunt A, B, C. Sed perspicuum est, id exinde contingere, quia terminus medius B tenet locum consequentis in prima ratione, & viciscissim locum antecedentis in secunda.

Hinc autem colliges, proportionem duplicem esse posse, discretam unam, continuam alteram. Erit enim proportio discreta, quæ quatuor habet terminos distinctos; veluti, si ratio, quam habet A ad B, æqualis fuerit rationi, quæ est inter C, & D. Erit verò proportio continua, quæ in tribus tantum terminis subsistit; ut, si ratio, quam habet A ad B, æqualis sit ei, quæ est inter B, & C.

X.

Homologæ, seu similes ratione magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, & consequentes consequentibus. Ita, si quatuor magnitudines A, B, C, D proportionales fuerint, adeo ut A ad B habeat eamdem rationem, quam C ad D; dicentur magnitudines homologæ, seu similes ratione, tum antecedentes A, & C, cum consequentes B, & D.

XI.

Permutata ratio est sumptio antecedentis cum antecedente, & consequentis cum consequente. Ita, si A ad B habeat eamdem rationem, quam C ad D; erit *permutando*, ut A ad C, ita B ad D.

XII.

Inversa ratio est sumptio antecedentis ut consequentis, consequentis verò ut antecedentis. Ita, si A sit ad B, ut est C ad D; erit *invertendo*, ut B ad A, ita D ad C.

XIII.

Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente ad ipsam consequentem. Ita, si A ad B habeat eamdem rationem, quam C ad D; erit *componendo*, ut A & B simul ad B, ita C & D simul ad D.

XIV.

XIV.

Divisio rationis est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem ad ipsam consequentem. Ita, si A sit ad B, ut est C ad D; erit *dividendo*, ut excessus, quo A superat B, ad B, ita excessus, quo C superat D. ad D.

XV.

Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens superat consequentem. Ita, si A ad B habeat eamdem rationem, quam C ad D; erit *convertendo*, ut A ad excessum, quo C superat D.

XVI.

Plures magnitudines dicuntur esse in ordinata ratione cum aliis totidem magnitudinibus, quum illarum rationes directè correspondent rationibus istarum. Ita magnitudines A, B, C, D dicentur esse in ordinata ratione cum magnitudinibus E, F, G, H, si fuerit, ut A ad B, ita E, ad F; ut B ad C, ita F ad G; & ut C ad D, ita G ad H.

XVII.

Vicissim verò plures magnitudines dicuntur esse in perturbata ratione cum aliis totidem magnitudinibus, quum rationes illarum inverse correspondent rationibus istarum. Qua ratione eædem magnitudines A, B, C, D dicentur esse in perturbata ratione cum iisdem magnitudinibus E, F, G, H si fuerit, ut A ad B, ita G ad H; ut B ad C; ita F ad G; & ut C ad D, ita E ad F.

XVIII.

Quum plures magnitudines sunt in eadem, sive ordinata, sive perturbata ratione cum aliis totidem magnitudinibus, sumptio extremarum per subductionem mediarum dicetur

æqua-

æqualitas rationis. Ita, si magnitudines A, B, C, D sint in eadem, sive ordinata, sive perturbata ratione cum magnitudinibus E, F, G, H; erit *ex æquali*, sive *ordinando*, sive *perturbando*, ut A ad D, ita E ad H.

PROP. I. THEOR. I.

Si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æquemultiplices; quotuplex est una unius, totuplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcumque magnitudines AB, CD æquemultiplices totidem magnitudinum E, F. Dico, magnitudines AB, CD simul tam esse multiplices magnitudinum E, F simul, quàm est multiplex AB ipsius E, vel CD ipsius F.

Quum enim AB, CD sint ex hypothesi æquemultiplices ipsarum E, F, quoties E metitur AB, toties F metietur CD. Et propterea quot partes sunt in AB æquales ipsi E, totidem erunt in CD æquales ipsi F. Dividatur itaque AB in partes AG, GB, æquales ipsi E; pariterque CD dividatur in partes CH, HD æquales ipsi F. Et quoniam multitudo partium, quæ sunt in AB æquales ipsi E. est æqualis multitudini partium, quæ sunt in CD æquales ipsi F; erunt etiam in ipsis AB, CD simul tot partes æquales ipsis E, & F simul, quot sunt in AB æquales ipsi E, vel in CD æquales ipsi F. Quare E, & F simul toties metientur AB, & CD simul, quoties E

me-

metitur AB, vel F metitur CD. Et propterea magnitudines AB, CD simul tam multiplices erunt magnitudinum E, F simul, quàm est multiplex AB ipsius E, vel CD ipsius F. Quod erat demonstrandum.

PROP. II. THEOR. II.

Si prima secundæ fuerit tam multiplex, quàm tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ tam multiplex, quàm sexta quartæ; erit composita ex prima, & quinta tam multiplex secundæ, quàm composita ex tertia, & sexta multiplex quartæ.

Sit prima AB tam multiplex secundæ C, quàm est tertia DE multiplex quartæ F. Rursus quinta BG sit etiam tam multiplex secundæ C, quàm est sexta EH multiplex quartæ F. Dico, compositam ex prima, & quinta AG tam multiplicem esse secundæ C, quàm est composita ex tertia, & sexta DH multiplex quartæ F.

Quoniam enim ex hypothesi AB, DE sunt æquemultiplices ipsarum C, F; erunt in AB tot partes æquales ipsi C, quot sunt in DE æquales ipsi F. Et similiter, quoniam ex hypothesi earumdem C, F sunt etiam æquemultiplices BG, EH; erunt in BG tot partes æquales ipsi C, quot sunt in EH æquales ipsi F, Unde etiam in tota AG erunt tot partes æquales ipsi C, quot sunt in DH æquales ipsi F. Et propterea AG tam multiplex erit ipsius C, quàm est DH multiplex ipsius F. Quod erat demonstrandum.

PROP.

PROP. III. THEOR. III.

Si prima secundæ tam multiplex fuerit, quàm tertia quartæ; æquemultiplices primæ, & tertiæ erunt etiam æquemultiplices secundæ & quartæ.

Prima A secundæ B tam multiplex sit, quàm tertia C quartæ D. Sint autem EF, GH æquemultiplices primæ A, & tertiæ C. Dico, easdem EF, GH esse quoque æquemultiplices secundæ B, & quartæ D.

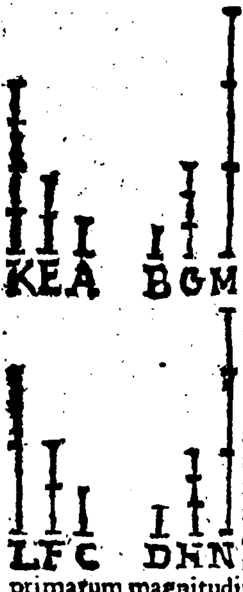
Quoniam enim EF, GH sunt æquemultiplices ipsarum A, & C; erunt in EF tot partes æquales ipsi A, quot sunt in GH æquales ipsi C. Dividatur itaque tam EF in partes EK, KF æquales ipsi A, quam GH in partes GL, LH æquales ipsi C. Et quoniam KF, LH æquales sunt ipsis A, & C; atque sunt A, & C æquemultiplices ipsarum B, & D; erunt KF, LH earumdem B, & D etiam æquemultiplices. Pariterque, quia EK, GL æquales sunt ipsis A, & C, quæ sunt æquemultiplices ipsarum B, & D; erunt EK, GL earumdem B, & D similiter æquemultiplices. Et propterea (1) tota EF tam multiplex erit ipsius B, quàm est tota GH multiplex ipsius D. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

[1] *Prop.2. hujus.*

PROP. IV. THEOR. IV.

Si prima ad secundam eamdem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; æquemultiplices primæ, & tertiæ ad æquemultiplices secundæ, & quartæ eamdem quoque rationem habebunt.



Prima A ad secundam B habeat eamdem rationem, quam tertia C ad quartam D. Sint autem E, & F æquemultiplices primæ A, & tertiæ C; atq; G, & H æquemultiplices secundæ B, & quartæ D. Dico, E ad G habere quoque eamdem rationem, quam F ad H.

Sumantur etenim ipsarum E, & F æquemultiplices K, & L; nec non ipsarum G, & H æquemultiplices M, & N. Et quoniam E, & F sunt æquemultiplices magnitudinum A, & C; sumptæ sunt autem K, & L æquemultiplices ipsarum E, & F: erunt K & L æquemultiplices quoque [1] primarum magnitudinum A, & C. Atque ita quoque, quia G, & H sunt æquemultiplices magnitudinum B, & D; sumptæ sunt autem M & N æquemultiplices ipsarum G, & H: erunt M, & N æquemultiplices etiam primarum magnitudinum B, & D. Et

[1] *Prop. 3. hujus.*

Et quoniam ex hypothesi prima A est ad secundam B, ut est tertia C ad quartam D; suntque K, & L æquemultiplices primæ, & tertiæ; itemque M, & N æquemultiplices secundæ, & quartæ: fiet hinc (1) ut si K superet M, etiam L superet N; vel si K deficiat ab M, etiam L deficiat ab N; vel denique si K sit æqualis M, etiam L sit æqualis N. Unde, quum habeantur quatuor magnitudines E, G, F, H, & ostensum sit K, & L, quæ sunt æquemultiplices primæ, & tertiæ, vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare M & N, quæ sunt æquemultiplices secundæ, & quartæ: habebit (2) E ad G eamdem rationem, quam F ad H. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex hac propositione manifestum est, quod si quatuor magnitudines A, B, C, D proportionales sint, eædem invertendo etiam sint proportionales. Nam, quemadmodum K, & L, quæ sunt æquemultiplices primæ A, & tertiæ C, vel una superant, vel una deficiunt, vel una adæquant M, & N, quæ sunt æquemultiplices secundæ B, & quartæ D; sic per contrarium M, & N vel una majores, vel una minores, vel una æquales erunt ipsis K, & L: proindeque erit, ut B ad A ita D ad C.

PROP.

[1] *Def.6.hujus.* (2) *Def.6.hujus.*

PROP. V. THEOR. V.

Si tota totius tam multiplex sit, quàm ablata ablatæ; erit reliqua reliquæ tam multiplex; quàm tota totius.

Tota AB tam multiplex sit totius CD, quàm ablata AE est multiplex ablatæ CF. Dico, reliquam EB reliquæ FD esse quoque tam multiplicem, quàm tota AB, est multiplex totius CD.

Ponatur enim EB tam multiplex ipsius CG, quàm est AB ipsius CD, vel AE ipsius CF. Et quoniam AE, EB æquemultiplices sunt ipsarum CF, CG; erit [1] tota AB totius FG tam multiplex, quàm est AE ipsius CF. Ex hypothesi autem AE est tam multiplex ipsius CF, quàm tota AB totius CD. Quare eadem AB tam erit multiplex ipsius FG, quam est ipsius CD: atque idcirco æquales erunt CD, FG. Unde ablata communi CF, æquales quoque erunt CG, FD. Posita est autem EB tam multiplex ipsius CG, quàm est AB ipsius CD. Erit igitur eadem EB tam multiplex quoque ipsius FD, quàm est AB ipsius CD. Quod demonstrare oportebat.

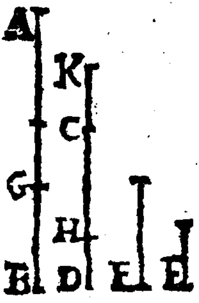
PROP.

---

[1] *Prop. 1 hujus.*

PROP. VI. THEOR. VI.

Si duæ magnitudines æquemultiplices fuerint duarum magnitudinum, & ex iis ablatæ quædam sint earumdem æquemultiplices: erunt & reliquæ, vel iisdem æquales, vel earumdem æquemultiplices.



Sint AB, CD æquemultiplices ipsarum E, F, quarum quoque æquemultiplices sint detractæ quædam ex iis AG, CH. Dico, reliquas GB, HD, vel esse æquales ipsis E, F; vel esse earumdem æquem ultiplices.

Quoniam enim ejusdem E multiplex est tam tota AB, quàm ablata AG; erit reliqua GB, vel æqualis ipsi E, vel multiplex ejusdem. Sit itaque primum GB æqualis E. Dico, & HD esse etiam æqualem F.

Ponatur namque CK æqualis F. Et quoniam ex hypothesi AG, CH sunt æquemultiplices ipsarum E, F, quibus quoque æquales sunt GB, CK; erunt AB, KH earumdem E, F etiam æquemultiplices. Erit igitur AB tam multiplex ipsius E, quàm est KH ipsius F. Ex hypothesi autem AB tam est multiplex ipsius E, quàm est CD ipsius F. Quare ejusdem F æquemultiplices erunt CD, KH; ideòque æquales erunt inter se. Unde ablata communi CH, remanebunt HD, CK etiam inter se

æqua-

æquales. Posita est autem CK æqualis F. Quare & HD eidem F pariter æqualis erit.

Sit secundò GB multiplex ipsius E. Dico, & HD esse æquemultiplicem ipsius F.

Ponatur namque CK tam multiplex ipsius F, quàm est GB ipsius E. Et quoniam ipsarum E, F æquemultiplices sunt tam AG, CH, quàm GB, CK; erunt [1] AB, KH earumdem E, F etiam æquemultiplices. Unde, quum adhuc oriantur æquales CD, KH, ablata rursus communi CH, remanebit quoque HD æqualis CK. Posita est autem CK tam multiplex ipsius F, quàm est GB ipsius E. Quare & HD ipsius F erit quoque tam multiplex, quàm est GB ipsius E.

Si igitur duæ magnitudines æquemultiplices fuerint duarum magnitudinum, & ex iis ablatæ quædam sint earumdem æquemultiplices; erunt & reliquæ, vel iisdem æquales, vel earumdem æquemultiplices. Quod erat demonstrandum.

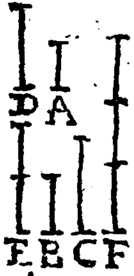
PROP. VII. THEOR. VII.

Æquales ad eamdem eamdem habent rationem: & eadem ad æquales.

Sint A, & B duæ æquales magnitudines, sitque tertia quævis C. Dico primò, quod A ad C habeat eamdem rationem, quam B ad C.

Sumantur enim ipsarum A, & B æquemultiplices D, & E; ipsius verò C multiplex utcumque capiatur, & sit F. Quia igitur A, & B po-

(1) *Prop. 2. hujus.*



B ponuntur æquales inter se; ipsarum æquemultiplices D, & E inter se etiam æquales erunt. Et propterea vel una excedent, vel una deficient, vel una adæquabunt F. Quum ergo habeantur quatuor magnitudines. A prima, C secunda, B tertia, C quarta, & æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una excedant, vel una deficiant, vel una adæquent æquemultiplices secundæ, & quartæ; habebit [1] A ad C eamdem rationem, quam B ad C.

Dico secundò, quod C ad A habeat quoque eamdem rationem, quam C ad B.

Nam sumptis rursus, tum ipsarum A, & B æquemultiplicibus D, & E, cum ipsius C multiplice quovis F; quia propter æquales A, & B, æquales sunt etiam D, & E, perspicuum est, F vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare ipsas D, & E. Unde, quum etiam habeantur quatuor magnitudines, C prima, A secunda, C tertia, B quarta, & æquemultiplices primæ & tertiæ, vel una excedant, vel una deficiant, vel una adæquent æquemultiplices secundæ, & quartæ; habebit (2) C ad A eamdem rationem, quàm C ad B.

Æquales igitur ad eamdem eamdem habent rationem: & eadem ad æquales. Quod erat demonstrandum.

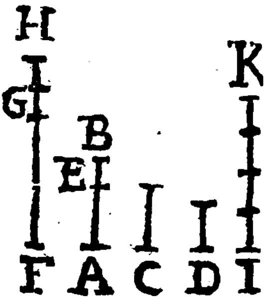
PROP.

---

(1) *Def. 6. hujus.* [2] *Def. 6. hujus.*

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Inæqualium magnitudinum major ad eamdem majorem habet rationem : & eadem ad minorem.

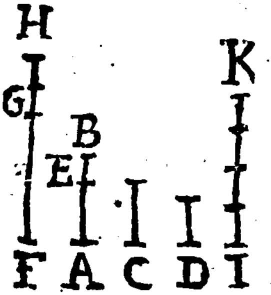


Sint AB, & C duæ magnitudines inæquales, AB major, & C minor ; sitque D tertia quævis magnitudo. Dico primò, quòd AB ad D majorem habeat rationem, quàm C ad D.

Quoniã enim AB major eſt, quàm C, abſcindatur ex AB portio aliqua AE, ita ut reliqua EB ſit æqualis ipſi C. Tum ipſarum AE, EB æquemultiplices capiantur FG, GH hac lege, ut FG multiplex ipſius AE major ſit, quàm D. Ipſius vero D multiplex ſumatur IK, excedens GH magnitudine non majore, quàm D.

Et quoniam FG, GH æquemultiplices ſunt ipſarum AE, EB; erit (1) FH tam multiplex ipſius AB, quàm eſt GH multiplex ipſius EB, ſeu C. Et rurſus, quoniam IK excedit GH magnitudine non majore, quàm D, atque eſt FG major, quàm D; erit FH major, quàm IK. Quum ergo habeantur quatuor magnitudines, AB prima, D ſecunda, C ter-

(1) *Prop.1.hujus.*



C tertia, D quarta; & sumptæ sint tales æquemultiplices primæ, & tertiæ, & tales secundæ, & quartæ, ut *multiplex primæ* superet *multiplicem* secundæ, at multiplex tertiæ non superet multiplicem quartæ; habebit (1) AB ad D majorem rationem, quàm C ad D.

Dico secundò, quòd D ad C *majorem* habeat rationem, quàm D ad AB.

Fiat etenim eadem constructio, & rursus ostendetur, quòd IK multiplex ipsius D excedat quidem GH multiplicem ipsius C, sed non excedat FH multiplicem ipsius AB. Unde, quum habeantur quatuor magnitudines, D prima, C secunda, D tertia, AB quarta; & sumptæ sint tales æquemultiplices primæ, & tertiæ, & tales secundæ, & quartæ, ut multiplex primæ superet multiplicem secundæ, at multiplex tertiæ non superet multiplicem quartæ; habebit (2) D ad C majorem rationem, quàm D ad AB.

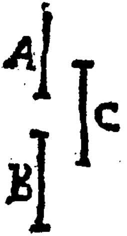
Inæqualium igitur magnitudinum major ad eamdem majorem habet rationem; & eadem ad minorem. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

[1] *Def. 7. hujus.* [2] *Def. 7. hujus.*

PROP. IX. THEOR. IX.

Quæ ad eamdem eamdem habent rationem, inter se sunt æquales: & ad quas eadem eamdem rationem habet, etiam inter se æquales sunt.



Habeat primò A ad C eamdem rationem, quam B ad C. Dico, A, & B æquales esse in inter se.

Si enim inter se non sint æquales, altera ipsarum major erit. Sit igitur A major. Et quoniam inæqualium magnitudinum major ad eamdem majorem (1) habet rationem; habebit A ad C majorem rationem, quam B ad C. Sed hoc est contra hypothesim: positum est enim, quod A ad C habeat eamdem rationem, quam B ad C. Non igitur A, & B inter se sunt inæquales, sed æquales.

Habeat secundò C ad B eamdem rationem, quam C ad B. Dico, A, & B esse etiam æquales inter se.

Si enim inter se non sint æquales, altera ipsarum minor erit. Sit igitur A minor. Et quoniam eadem majorem habet rationem (2) ad minorem, quàm ad majorem; habebit C ad A majorem rationem, quam C ad B. Sed hoc est contra hypothesim: positum est enim, quòd C ad A habeat eamdem rationem, quàm C ad B. Non igitur A, & B inter se sunt inæquales, sed æquales.

(1) *Propr. 8. hujus.* (2) *Prop. 8. hujus.*

Quæ igitur ad eamdem eamdem habent rationem inter se sunt æquales, & ad quas eadem eamdem rationem habet, etiam inter se æquales sunt. Quod erat ostendendum.

PROP. X. THEOR. X.

Ad eamdem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est: ad quam verò eadem majorem habet rationem, illa est minor.

Habeat primò A ad C majorem rationem, quàm B ad C. Dico, A majorem esse, quàm B.

Si enim non est major, erit vel ei æqualis, vel eadem minor. Sit igitur primò A æqualis B. Et quoniam æquales [1] ad eamdem eamdem habent rationem; habebit A ad C eamdem rationem, quàm B ad C; quod est contra hypothesim. Sit deinde A minor, quàm B. Et quoniam [2] minor ad eamdem minorem habet rationem; habebit A ad C minorem rationem, quàm B ad C: quod etiam est contra hypothesim. Quare reliquum est, ut A major sit, quàm B.

Habeat secundò C ad B majorem rationem, quàm C ad A. Dico, B minorem esse, quàm A.

Si enim non est minor, erit vel ei æqualis, vel eadem major. Sit igitur primò B æqualis A. Et quoniam eadem ad æquales (3) eam-

(1) *Prop.7.hujus.* (2) *Prop.8.hujus.*
(3) *Prop.7.hujus.*

eamdem habet rationem; habebit C ad B eamdem rationem, quàm C ad A: quod est contra hypothesim. Sit deinde B major, quàm A. Et quoniam eadem ad majorem (1) minorem habet rationem; habebit C ad B minorem rationem, quàm C ad A: quod etiam est contra hypothesim. Quare reliquum est, ut B minor sit, quàm A.

Ad eamdem itaque magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est: ad quàm verò eadem majorem habet rationem, illa est minor. Quod erat demonstrandum.

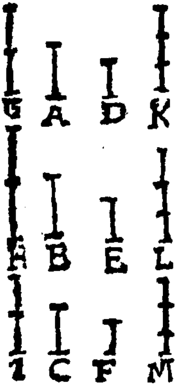
PROP. XI. THEOR. XI.

Rationes, quæ eidem sunt æquales, inter se sunt etiam æquales.

Rationi, quæ est inter B, & E, æqualis sit, tum ea, quæ est inter A, & D, cum illa, quæ est inter C, & F: adeò nempe, ut A sit ad D; veluti est B ad E; & B sit ad E, ut est C ad F. Dico, rationem, quæ est inter A, & D esse æqualem rationi, quæ est inter C & F; hoc est A esse ad D, ut est C ad F.

Sumantur etenim æquemultiplices, tum antecedentium A, B, C, quæ sint G, H, I; cum consequentium D, E, F, quæ sint K, L, M. Et quoniam

(1) *Prop.8.hujus.*



A est ad D, ut B ad E; fiet hinc (1), ut G, & H, æquemultiplices ipsarum A, & B, vel una superent, vel una deficiant, vel una adæquent K, & L, æquemultiplices ipsarum D, & E. Atque ita quoque, quia B est ad E, ut C ad F; fiet hinc, ut H, & I, æquemultiplices ipsarum B, & C, vel una majores, vel una minores, vel una æquales sint L, & M, æquemultiplicibus ipsarum E, & F. Unde etiam, sublatis mediis H, & L, erunt G, & I vel una majores, vel una minores, vel una æquales K, & M. Quum ergo habeantur quatuor magnitudines, A prima, D secunda, C tertia, F quarta, & ostensum sit, æquemultiplices primæ, & tertiæ, vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices secundæ, & quartæ; erit (2) ut A ad D, ita C ad F. Quod erat demonstrandum.

PROP. XII. THEOR. XII.

Si fuerint quotcumque magnitudines proportionales; erit, ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcumque magnitudines proportionales A, D, B, E, C, F: ita nempe, ut A sit

(1) *Def.6.hujus.* (2) *Def.6.hujus.*

A sit ad D, veluti est B ad E. & B sit ad E, ut est C ad F. Dico omnes antecedentes A, B, C ad omnes consequentes D, E, F habere eamdem rationem, quàm habet una antecedentium ad unam consequentium, hoc est vel A ad D vel B ad E, vel C ad F.

Capiantur etenim æquemultiplices tam antecedentium A,B,C, quæ sint G,H, I, quàm consequentium D, E, F, quæ sint K, L, M. Et quoniam A est ad D, ut B ad E; æquemultiplices ipsarum A, & B, quæ sunt G, & H, erunt (1) vel una majores, vel una minores, vel una æquales æquemultiplicibus ipsarum D, & E, quæ sunt K, & L. Atque ita quoque, quia B est ad E, ut C ad F; æquemultiplices ipsarum B, & C, quæ sunt H, & I, erunt vel una majores, vel una minores, vel una æquales æquemultiplicibus ipsarum E. & F, quæ sunt L, & M. Unde etiam omnes G, H, I perinde excedent, deficient, vel adæquabunt omnes K, L, M, ac una G excedit, deficit, vel adæquat unam K.

. Rursus, quia G, H, I sunt æquemultiplices ipsarum A, B, C; erunt omnes G, H, I tam multiplices omnium A,B,C quàm est [2] una G multiplex unius A. Atque ita quoque, quia K, L, M sunt æquemultiplices ipsarum D, E, F; erunt omnes K, L, M tam multiplices omnium D, E, F, quàm est una K multiplex unius D. Unde quum habeantur quatuor magnitudines, prima, quæ componitur ex A, B, C, secunda, quæ componitur ex D, E, F, tertia A, & quarta D, & ostensum sit æquemultiplices primæ, & ter-

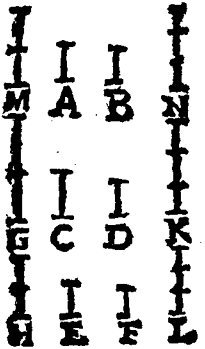
M 3 tiæ

(1) *Def.6.hujus.* [2] *Prop.1.hujus.*

tiæ vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices secundæ, & quartæ; habebunt omnes A, B, C [1] ad omnes D, E, F eamdem rationem, quàm habet una A ad unam D. Quod erat ostendendum.

PROP. XIII. THEOR. XIII.

Si prima habuerit ad secundam eamdem rationem, quam tertia ad quartam: tertia autem ad quartam habuerit rationem majorem, quam quinta ad sextam; & prima ad secundam majorem quoque rationem habebit; quam quinta ad sextam.



Prima A ad secundam B habeat eamdem rationem, quam tertia C ad quartam D. Tertia verò C ad quartam D habeat majorem rationem, quàm quinta E ad sextam F. Dico, & primam A ad secundam B habere quoque rationem majorem, quàm quinta E ad sextam F.

Quoniam enim C ad D habet majorem rationem, quàm E ad F; sumi poterunt (2) tales æquemultiplices ipsarum C, & E, & tales ipsarum D, & F, ut si ea, quæ refertur ad C, excedat illam, quæ refertur ad D, vicissim ea, quæ refertur ad E, non exce-

(1) *Def.6.hujus.* [2] *Def.7.hujus.*

excedat illam, quæ refertur ad F. Sumantur itaque hujusmodi æquemultiplices; & ipsarum quidem C, & E sint G, & H; ipsarum verò D, & F sint K, & L. Deinde fiat, ut M tam multiplex sit ipsius A, quàm est multiplex G ipsius C vel H ipsius E; & ut N tam sit multiplex ipsius B, quàm est K ipsius D, vel L ipsius F.

Ex constructione igitur G superat K, sed H non superat L. Jam vero ex hypothesi C est ad D, ut A ad B; atque adeò [1] si G superat K, etiam M superat N. Quare M superante N, H non superat L. Quum ergo habeantur quatuor magnitudines A prima, B secunda, E tertia, F quarta; & sumptæ sint tales æquemultiplices primæ, & tertiæ, & tales secundæ, & quartæ, ut multiplex primæ superet multiplicem secundæ, sed multiplex tertiæ non superet multiplicem quartæ; habebit A ad B majorem [2] rationem, quàm E ad F. Quod erat ostendendum.

PROP. XIV. THEOR. XIV.

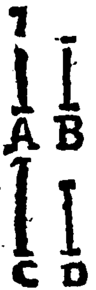
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima, & secunda erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores tertia, & quarta.

SInt A, B, C, D quatuor magnitudines proportionales. Dico primò, quòd si A sit æqualis C, etiam B sit æqualis D.

Quum enim A sit æqualis C, habebit (3)

M 4 A ad

(1) *Def.6.hujus.* (2) *Def.7.hujus.*
(3) *Prop.7.hujus.*



A ad B eamdem rationem, quam C ad B. Sed A est ad B, ut C ad D. Quare C ad B habebit (1) eamdem rationem, quàm C ad D: proindeque B [2] æqualis erit D.

Dico secundo, quòd si A major sit, quàm C, etiam B major sit, quàm D.

Quoniam enim A major est, quàm C; habebit (3) A ad B majorem rationem, quàm C ad B. Sed A est ad B, ut C ad D. Quare C ad D majorem quoque [4] habebit rationem, quàm C ad B: proindeque B (5) major erit, quàm D.

Dico denique, quòd si A minor sit, quàm C, etiam B minor sit, quàm D.

Quoniam enim A minor est quàm C; habebit C ad B [6] majorem rationem, quàm A ad B. Sed A est ad B, ut C ad D. Quare C ad B (7) majorem quoque rationem habebit, quàm C ad D: proindeque B (8) minor erit, quàm D.

Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima, & secunda erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores tertia, & quarta. Quod erat ostendendum.

PROP.

---

(1) *Prop.11.hujus.* (2) *Prop.9.hujus.*
(3) *Prop.8. hujus.* [4] *Prop.12.hujus.*
[5] *Prop.10.hujus.* (6) *Prop.8.hujus.*
[7] *Prop.13.hujus.* [8] *Prop.10.hujus.*

PROP. XV. THEOR. XV.

Partes cum suis æquemultiplicibus comparatæ eamdem cum iis servant rationem.

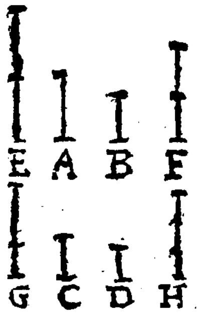
Partium A, B æquemultiplices sint CF, GK. Dico, A esse ad B, ut est CF ad GK.

Quoniam enim CF, GK sunt æquemultiplices ipsarum A, B; quot partes sunt in CF æquales A, tot erunt in GK æquales B. Dividatur ergo tàm CF in partes CD, DE, EF æquales A, quàm GK in partes GH, HL, LK æquales B. Et quoniam æquales [1] ad eamdem, vel etiam ad æquales eamdem habent rationem; erit ut CD ad GH, ita DE ad HL; & ut DE ad HL, ita EF ad LK. Et propterea omnes CD, DE, EF ad omnes GH, HL, LK habebunt (2) eamdem rationem, quàm una CD ad unam GH. Est igitur, ut CF ad GF, ita CD ad GH. Sed CD est æqualis A, & GH æqualis B. Quare erit etiam, ut CF ad GH, ita A ad B. Quod erat demonstrandum.

(1) *Propr.7.hujus.* (2) *Prop.12.hujus.*

PROP. XVI. THEOR. XVI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; & permutando etiam proportionales erunt.



Sit A ad B, ut C ad D: Dico, permutando A esse ad C, ut est B ad D.

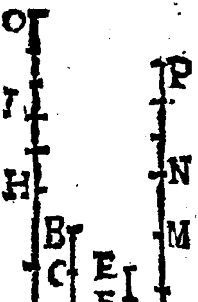
Sumantur enim ipsarum A, & B æquemultiplices E, & F; ipsarum verò C, & D æquemultiplices G, & H; eritque (1) tum E ad F, ut A ad B; cum G ad H, ut C ad D. Sed ex hypothesi A est ad B, ut C ad D. Quare erit (2) ut E ad F, ita G ad H. Et propterea (3) E, & F erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores ipsis G, & H. Quum ergo habeantur quatuor magnitudines, A prima, C secunda, B tertia, D quarta, & ostensum sit æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices secundæ, & quartæ; habebit (4) A ad C eamdem rationem, quàm B ad D. Quod erat ostendendum.

PROP.

[1] *Prop.12.hujus.* (2) *Prop.15.hujus.*
(3) *Prop.11.hujus.* (4) *Def.6.hujus.*

PROP. XVII. THEOR. XVII.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; & dividendo etiam proportionales erunt.



Habeat AB ad BC eamdem rationem, quàm DE ad EF. Dico, dividendo AC esse ad CB, ut est DF ad FE.

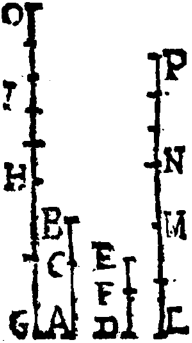
Ipsarum AC, CB, DF, FE capiantur eodem ordine æquemultiplices: & sint GH, HI, LM, MN. Ipsarum autem CB, FE aliæ quævis æquemultiplices sumantur, & sint IO, NP.

Quia igitur ipsarum AC, CB æquemultiplices sunt GH, HI; erit (1) tota GI tam multiplex totius AB, quàm est una GH unius AC. Atque ita quoque, quia ipsarum DF, FE æquemultiplices sunt LM, MN; erit tota LN tam multiplex totius DE, quàm est una LM unius DF. Est autem ex constructione GH tam multiplex ipsius AC, quàm est LM ipsius DF. Quare & GI tam quoque multiplex erit ipsius AB, quàm est LN ipsius DE.

Rursus quia earumdem CB, FE æquemultiplices sunt ex constructione, tam HI, MN, quàm IO, NP; erit (2) & HO tam mul-

 tiplex

[1] *Prop.1.hujus.* (2) *Prop.2.hujus.*



tiplex ipsius CB, quàm est MP ipsius FE. Sunt igitur GI, LN æquemultiplices ipsarum AB, DE, & HO, MP æquemultiplices ipsarum CB, FE. Est autem ex hypothesi, ut AB ad BC, ita DE ad EF. Quare (1) GI, LN erunt vel una majores, vel una minores, vel una æquales HO, MP; atque adeo demptis communibus HI, MN erunt etiam reliquæ GH, LM vel una majores, vel una minores, vel una æquales reliquis IO, NP. Sunt autem GH, LM æquemultiplices ipsarum AC, DF; suntque etiam IO, NP æquemultiplices ipsarum CB, FE. Quum ergo habeantur quatuor magnitudines AC prima, CB secunda, DF tertia, FE quarta, & ostensum sit æquemultiplices primæ, & tertiæ, vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices secundæ, & quartæ; habebit (2) AC ad CB eamdem rationem, quàm DF ad FE. Quod erat ostendendum.

PROP.

(1) *Def. 6. hujus.* (2) *Def. 6. hujus.*

PROP. XVIII. THEOR. XVIII.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; & componendo etiam proportionales erunt.

Habeat AB ad BC eamdem rationem, quàm DE ad EF. Dico, componendo AC esse ad CB, ut est DF ad FE.

Si enim AC non sit ad CB, ut est DF ad FE; sit ut AC ad CB, ita DF ad FG. Et quoniam AC est CB, ut DF ad FG; erit dividendo [1] ut AB ad BC, ita DG ad GF. Ex hypothesi autem AB est ad BC, ut DE ad EF. Quare erit (2) ut DG ad GF, ita DE ad EF: quod quidem est absurdum; quum si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima & secunda debeant (3) esse vel una æquales, vel una majores tertia, & quarta. Non igitur AC est ad CB, ut DF ad FG. Et propterea erit ut AC ad CB, ita DF ad FE. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIX. THEOR. XIX.

Si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; erit & reliqua ad reliquam, ut tota ad totam.

TOta AB ad totam CD habeat eamdem rationem, quàm ablata AE ad ablatam CF.

(1) *Prop.* 14. *hujus.* [2] *Prop.* 11 *hujus.*
(3) *Prop.* 16. *hujus.*

CF. Dico, & reliquam EB ad reliquam FD habere quoque eamdem rationem, quàm habet tota AB ad totam CD.

Quoniam enim ex hypothesi AB est ad CD, ut AE ad CF; erit [1] permutando, ut AB ad AE, ita CD ad CF; atque adeò dividendo (2), ut EB ad AE, ita FD ad CF. Unde, quum rursus permutando sit ut EB ad FD, ita AE ad CF; atque ex hypothesi AE sit ad CF, ut est AB ad CD; erit tandem (3), ut EB ad FD, ita AB ad CD. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

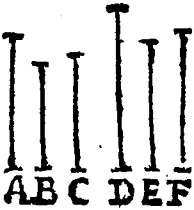
Atque hinc facile colligi potest, quòd si quatuor magnitudines proportionales fuerint, eædem convertendo etiam proportionales sint. Sit enim, ut AB ad AE, ita CD ad CF. Dico, convertendo esse, ut AB ad EB, ita CD ad FD. Quum enim AB sit ad AE, ut CD ad CF; erit permutando, ut AB ad CD, ita AE ad CF; atque adeo per hanc propositionem erit, ut EB ad FD, ita AB ad CD; sive etiam, ut AB ad CD, ita EB ad FD. Unde rursus permutando erit, ut AB ad EB, ita CD ad FD.

PROP. XX. THEOR. XX.

Si tres magnitudines fuerint in ordinatà ratione cum aliis totidem; primæ ipsarum erunt

(1) *Prop.16.hujus.* (2) *Prop.17.hujus.*
[3] *Prop.11.hujus.*

erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earumdem.



Sint tres magnitudines A,B,C in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus D, E, F: ita nempe, ut A ſit ad B, veluti eſt D ad E; & B ſit ad C, ut eſt E ad F. Dico primò, quod ſi A ſit æqualis C, etiam D ſit æqualis F.

Quoniam enim A eſt æqualis C; habebit [1] A ad B eamdem rationem, quàm C ad B. Sed A eſt ad B, ut eſt D ad E; & ex eo, quòd B ſit ad C, ut E ad F, eſt invertendo, ut C ad B, ita F ad E. Quare erit (2) ut D ad E, ita F ad E: proindeque [3] D æqualis erit F.

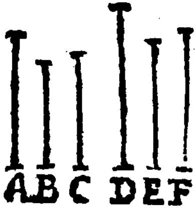
Dico ſecundò, quòd ſi A major ſit, quàm C, etiam D ſit major, quam F.

Quoniam enim A eſt major, quàm C; habebit [4] A ad B majorem rationem, quàm C ad B. Sed A eſt ad B, ut D ad E; & ex eo, quòd B ſit ad C, ut E ad F; eſt invertendo, ut C ad B, ita F ad E. Quare D ad E (5) majorem quoque habebit rationem, quàm F ad E: proindeque [6] D major erit, quàm F.

Dico denique, quòd ſi A minor ſit, quàm C, etiam D ſit minor, quàm F.

Quoniam enim A minor eſt, quàm C; habe-

(1) *Prop.7.hujus.* (2) *Prop.11.hujus.*
(3) *Prop.9.hujus.* [4] *Prop.8.hujus.*
[5] *Prop.13.hujus.* (6) *Prop.10.hujus.*



bebit (1) C ad B majorem rationem, quàm A ad B. Sed A eſt ad B, ut D ad E; & ex eo, quòd B ſit ad C, ut E ad F, eſt *invertendo*, ut C ad B, ita F ad E. Quare F ad E majorem [2] quoque rationem habebit, quàm D ad E. Et propterea (3) D minor erit, quàm F.

Si igitur tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus; primæ ipſarum erunt, vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earumdem. Quod erat oſtendendum.

PROP. XXI. THEOR. XXI.

Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus; prima ipſarum quoque erunt, vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earundem.

SInt tres magnitudines A,B,C in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus D, E, F: ita nempe, ut A ſit ad B, veluti eſt E ad F; & B ſit ad C, ut eſt D ad E. Dico primò, quòd ſi A ſit æqualis C, etiam D ſit æqualis F.

Quoniam enim A eſt æqualis C; erit (4) ut

(1) *Prop.8.hujus.* (2) *Prop.13.hujus.*
(3) *Prop.10.hujus.* [4] *Prop.7.hujus.*

ut A ad B, ita C ad B. Sed A est ad B, ut E ad F; & ex eo, quòd B sit ad C, ut D ad E, est invertendo, ut C ad B, ita E ad D. Quare erit (1), ut E ad F, ita E ad D: proindeque [2] D æqualis erit F.

Dico secundò, quod si A sit major, quàm C, etiam D major sit, quàm F.

Quoniam enim A major est, quàm C; habebit [3] A ad B majorem rationem, quàm C ad B. Sed A est ad B, ut E ad F; & ex eo, quòd B sit ad C, ut D ad E, est invertendo, ut C ad B, ita E ad D. Quare E ad F majorem (4) quoque rationem habebit, quàm E ad D: proindeque [5] D major erit, quàm F.

Dico denique, quòd si A sit minor, quàm C, etiam D minor sit, quàm F.

Quoniam enim A minor est, quàm C; habebit [6] C ad B majorem rationem, quàm A ad B. Sed A est ad B, ut E ad F; & ex eo, quòd B sit ad C, ut D ad E, est invertendo, ut C ad B, ita E ad D. Quare E ad D habebit quoque (7) majorem rationem, quàm E ad F. Et propterea (8) D minor erit, quàm F.

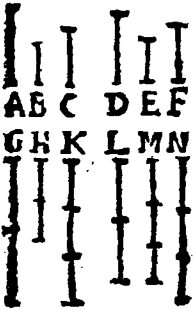
Si igitur tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus; primæ ipsarum erunt, vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earumdem. Quod erat demonstrandum.

PROP.

(1) *Prop.11.hujus.* (2) *Prop.9.hujus.*
(3) *Prop.8.hujus.* (4) *Prop.13.hujus.*
(5) *Prop.10.hujus.* (6) *Prop.8.hujus.*
[7] *Prop.13.hujus.* (8) *Prop.10.hujus.*

PROP. XXII. THEOR. XXII.

Si tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus; primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt.



Sint tres magnitudines A, B, C in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus D, E, F: ita nempe, ut A sit ad B, veluti est D ad E; & B sit ad C, ut E ad F. Dico, ex æquali A esse ad C, ut est D ad F.

Capiantur enim ipsarum quidem A, & D æquemultiplices G, & L; ipsarum verò B, & E æquemultiplices H, & M; ac denique ipsarum C, & F æquemultiplices K, & N. Quia ergo A est ad B, ut D ad E; erit etiam (1) ut G ad H, ita L ad M. Pariterque, quia B est ad C, ut E ad F; erit quoque ut H ad K, ita M ad N. Unde tres magnitudines G, H, K erunt etiam in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus L, M, N. Et propterea G, & L erunt (2) vel una æquales, vel una majores, vel una minores K, & N. Quum itaque habeantur quatuor magnitudines, A prima, C secunda, D tertia, F quarta, & ostensum sit, æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una

(1) Prop. 4. hujus. [2] Prop. 20. hujus.

una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices secundæ, & quartæ; habebit (1) A ad C eamdem rationem, quàm D ad F. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Quod si magnitudines, quæ sunt in ordinata ratione cum aliis totidem, plures fuerint, quàm tres; adhuc primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt. Ponatur enim, quod non modo A sit ad B, ut D ad E; & B ad C, ut E ad F; verum etiam, quod C sit ad aliam quæ vocetur N, ut F ad aliam quæ vocetur O. Dico, ex æquali A esse ad N, ut est D ad O. Nam in tribus magnitudinibus ostensum jam est, A esse ad C, ut est D ad F. Quum ergo C sit ad N, ut est F ad O; erunt tres magnitudines A, C, N in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus D, F, O. Et propterea per hanc propositionem A erit ad N, ut est D ad O.

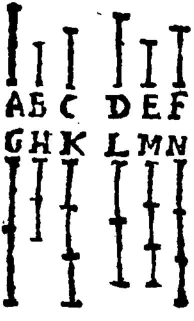
PROP. XXIII. THEOR. XXIII.

Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis totidem magnitudinibus; primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt.

Sint tres magnitudines A, B, C in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus D, E, F: ita nempe, ut A sit ad B, veluti est E ad F; & B sit ad C, ut D ad E. Dico, ex æquali A esse ad C, ut est D ad F.

Su-

(1) *Def. 6. hujus.*



Sumantur etenim, ipsarum quidem A, B, D æquemultiplices G, H, L; ipsarum verò C, E, F æquemultiplices K, M, N. Et quoniam G, & H sunt æquemultiplices ipsarum A, & B; erit, ut G ad H (1), ita A ad B. Pariterque, quia M, & N sunt æquemultiplices ipsarum E, & F; erit, ut M ad N, ita E ad F. Est autem ex hypothesi, ut A ad B, ita E ad F. Quare erit (2) quoque, ut G ad H, ita M ad N.

Rursus, quia ex hypothesi B est ad C, ut D ad E, & ipsarum quidem B, & D æquemultices sunt H, & L, ipsarum verò C, & E æquemultiplices sunt K, & M; erit quoque (3) ut G ad K, ita L ad M. Ostensum est autem, G esse ad H, ut est M ad N. Tres ergo magnitudines G, H, K sunt etiam in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus L, M, N; & idcirco G, & K erunt (4) vel una æquales, vel una majores, vel una minores L, & N.

Quum ergo habeantur quatuor magnitudines, A prima, C secunda, D tertia, F quarta, atque primæ, & tertiæ æquemultiplices G, & K vel una excedant, vel una deficiant, vel una adæquent æquemultiplices

ces

[1] *Prop.* 15. *hujus.* (2) *Prop.* 11. *hujus.*
[3] *Prop.* 4. *hujus.*
(4) *Prop.* 21. *hujus.*

ces secundæ, & quartæ L, & N; habebit [1] A ad C eamdem rationem, quàm D ad F. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Quod si magnitudines, quæ sunt in perturbata ratione cum aliis totidem, plures fuerint, quàm tres; adhuc primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt. Sint enim quatuor magnitudines A, B, C, N in perturbata ratione cum quatuor magnitudinibus D, E, F, O; ita nempe, ut A sit ad B, veluti est F ad O; B ad C, ut E ad F; & C ad N, ut D ad E. Dico, ex æquali esse, ut A ad N, ita D ad O. Nam in tribus magnitudinibus ostensum jam est, A esse ad C, ut est E ad O. Quum ergo C sit ad N, ut est D ad E; erunt tres magnitudines A, C, N in perturbata ratione cum tribus magnitudinibus D, E, O. Et propterea per hanc propositionem A erit ad N, ut est D ad O.

PROP. XXIV. THEOR. XXIV.

Si prima ad secundam habuerit eamdem rationem, quam tertia ad quartam: fuerit autem, ut quinta ad secundam, ita sexta ad quartam; erit composita ex prima, & quinta ad secundam, ut composita ex tertia, & sexta ad quartam.

PRima AB ad secundam C habeat eamdem rationem, quàm tertia DE ad quartam F. Quin-

(1) *Def. 6. hujus.*

Quinta autem BG ad secundam C habeat quoque eamdem rationem, quàm sexta EH ad quartam F. Dico, compositam ex prima, & quinta AG esse ad secundam C, ut est composita ex tertia, & sexta DH ad quartam F.

Quoniam enim BG est ad C, ut EH ad F; erit invertendo, ut C ad BG, ita F ad EH. Unde quum sit ut AB ad C, ita DE ad F; erunt tres magnitudines AB, C, BG in ordinata ratione cum tribus magnitudinibus DE, F, EH: proindeque ex æquali ordinando [1] erit, ut AB ad BG, ita DE ad EH; atque adeò, componendo (2), ut AG ad BG, ita DH ad EH. Est autem, ut BG ad C, ita EH ad F. Tres itaque magnitudines AG, BG, C erunt etiam in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus DH, EH, F. Unde rursus ex equali ordinando erit, ut AG ad C, ita DH ad F. Quod erat demonstrandum.

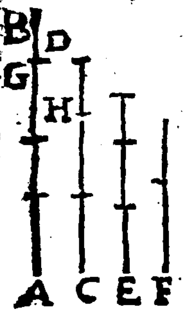
PROP. XXV. THEOR. XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; maxima, & minima simul reliquis duabus majores erunt.

HAbeat AB ad CD eamdem rationem, quàm E ad F; sitque AB omnium maxima,

---

[1] *Prop.22.hujus.* (2) *Prop.18.hujus.*



xima, & F omnium minima. Dico, duas AB, & F simul sumptas majores esse reliquis duabus CD, & E simul etiam acceptis.

Auferantur ex AB quidem portio AG æqualis E, ex CD verò portio CH æqualis F. Et quoniam ex hypothesi AB est ad CD ut E ad F, atque est AG æqualis E, & CH æqualis F; erit etiam, ut AB ad CD, ita AG ad CH. Unde, quum sit, ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; erit quoque (1) ut tota AB ad totam CD, ita reliqua GB ad reliquam HD. Et propterea, quemadmodum AB, velut omnium maxima, major est, quàm CD, ita [2] erit GB major, quàm HD. Sunt autem ex constructione æquales inter se, tum AG, & E, cum F, & CH. Quare, si istæ iis addantur, fient AB, & F majores, quàm CD, & E: ac proinde, si quatuor magnitudines proportionales fuerint; maxima, & minima reliquis duabus majores erunt. Quod erat demonstrandum.

MONITUM.

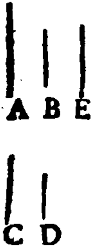
Quæ sequuntur Propositiones Euclidis non sunt, sed a Campano, & aliis adjectæ, quia apud

(1) *Prop.19.hujus.* (2) *Prop.14.hujus.*

apud graviſſimos Auctores frequens eſt uſus ipſarum, nec minus, quàm præcedentes, quaſi Euclidis eſſent, citari ſolent.

PROP. XXVI. THEOR. XXVI.

Si prima ad ſecundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam; habebit invertendo ſecunda ad primam minorem viciſſim rationem, quam quarta ad tertiam.



Habeat A ad B majorem rationem, quàm C ad D. Dico, invertendo B ad A habere viciſſim minorem rationem, quàm D ad C. Intelligatur etenim E eſſe ad B, ut eſt C ad D. Et quoniam ex hypotheſi A ad B habet majorem rationem, quàm C ad D; habebit (1) etiam A ad B majorem rationem, quàm E ad B: proindeque A major (2) erit, quàm E. Quū igitur A major ſit, quàm E, habebit [3] B ad E majorem rationem, quam B ad A. Sed invertendo B eſt ad E [4] ut D ad C. Quare D ad C (5) majorem quoque rationem habebit, quàm B ad A. Et propterea, ſi prima ad ſecundam habuerit majorem rationem, quàm tertia ad quartam; habebit invertendo ſecunda ad primam minorem viciſſim rationem, quàm quarta ad tertiam. Quod erat demonſtrandum.

SCHO-

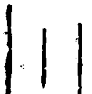
(1) *Prop.1·.hujus.* [2] *Prop.10.hujus.*
(3) *Prop.8.hujus.* [4] *Coroll.4.hujus.*
(5) *Prop.15.hujus.*

SCHOLIUM.

Similì autem ratione oſtendetur, quòd ſi prima ad ſecundam habuerit minorem rationem, quam tertia ad quartam; invertendo ſecunda ad primam habeat viciſſim majorem rationem, quam quarta ad tertiam.

PROP. XXVII. THEOR. XXVII.

Si prima ad ſecundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam; habebit permutando prima ad tertiam majorem quoque rationem, quam ſecunda ad quartam.



A B E

C D

Habeat A ad B majorem rationem, quàm C ad D. Dico, permutando A ad C habere quoque majorem rationem, quàm B ad D.

Intelligatur etenim E eſſe ad B, ut eſt C ad D. Et quoniam ex hypotheſi A ad B majorem rationem habet, quàm C ad D; habebit etiam (1) A ad B majorem rationem, quàm E ad B: proindeque A major (2) erit, quàm E. Quum igitur A major ſit, quàm E; habebit [3] A ad C majorem rationem, quam E ad C. Eſt autem permutando [4] ut E ad C, ita B ad D. Quare A ad C (5) majorem quoque rationem habebit, quàm B ad D. Et propterea, ſi prima ad ſecundam habuerit majorem rationem, quàm tertia ad quartam; habebit permutando prima ad tertiam majorem quoque rationem, quàm ſe-

N cun-

(1) *Prop.13.hujus.* [2] *Prop.10.hujus.*
(3) *Prop.8.hujus.* [4] *Prop.16.hujus.*
(5) *Prop.13.hujus.*

cunda ad quartam. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Simili autem ratione ostendetur, quòd si prima ad secundam habuerit minorem rationem, quam tertia ad quartam; permutando prima ad tertiam minorem quoque rationem habeat, quam secunda ad quartam.

PROP. XXVIII. THEOR. XXVIII.

Si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam; habebit componendo prima cum secunda ad secundam majorem quoque rationem, quam tertia cum quarta ad quartam.

Habeat AB ad BC majorem rationem, quàm DE ad EF. Dico, componendo AC ad BC habere quoque majorem rationem, quàm DE ad EF.

Intelligatur etenim, GB esse ad BC, ut DE ad EF. Et quoniam ex hypothesi AB ad BC majorem rationem habet, quàm DE ad EF; habebit (1) etiam AB ad BC majorem rationem, quam GB ad BC: proindeque AB major [2] erit quàm GB; additaque communi BC, erit etiam AC major quàm GC. Quum igitur AC major sit, quàm GC; habebit [3] AC ad BC majorem rationem, quàm

[1] *Prop.13.hujus.* [2] *Prop.10.hujus.*
[3] *Prop.8.hujus.*

quàm GC ad BC. Sed componendo GC est ad BC, ut (1) DF ad EF. Quare AC, ad BC (2) majorem quoque rationem habebit, quàm DF ad FE. Et propterea, si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quàm tertia ad quartam; habebit componendo prima cum secunda ad secundam majorem quoque rationem, quàm tertia cum quarta ad quartam. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Simili autem ratione ostendetur, quòd si prima ad secundam habuerit minorem rationem, quam tertia ad quartam: componendo prima cum secunda ad secundam minorem quoque rationem habeat, quam tertia cum quarta ad quartam.

PROP.XXIX. THEOR.XXIX.

Si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam; habebit dividendo excessus, quo prima superat secundam ad secundam majorem quoque rationem, quam excessus, quo tertia superat quartam ad quartam.

HAbeat AC ad BC majorem rationem, quàm DF ad EF. Dico, dividendo AB ad BC habere quoque majorem rationem quàm DE ad EF.

Intelligatur etenim GC esse ad BC, ut est DF ad EF. Et quoniam ex hypothesi AC

(1) *Prop.18.hujus.* (2) *Prop.13.hujus.*

est ad BC in majore ratione, quàm DF ad EF; habebit etiam (1) AG ad BC majorem rationem, quàm GC ad BC: proindeque AC (2) major erit, quàm GC; & ideò ablata communi BC, erit etiam AB major, quàm GB. Quum igitur AB major sit, quàm GB; habebit AB ad BC (3) majorem rationem, quam GB ad BC. Est autem dividendo (4), ut GB ad BC., ita DE ad EF; quare AB ad BC [5] majorem quoque rationem habebit, quàm DE ad EF. Et propterea, si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quàm tertia ad quartam; habebit dividendo excessus, quo prima superat secundam ad secundam majorem quoque rationem, quàm excessus, quo tertia superat quartam ad quartam. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

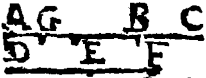
Simili autem ratione ostendetur, quòd si prima ad secundam habuerit minorem rationem, quam tertia ad quartam; dividendo excessus, quo prima superat secundam ad secundam minorem quoque habeat rationem, quam excessus, quo tertia superat quartam ad quartam.

PROP. XXX. THEOR. XXX.

Si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quàm tertia ad quartam; habebit con-

(1) *Prop.* 13. *hujus* (2) *Prop.* 10. *hujus.*
(3) *Prop.* 8. *hujus.* (4) *Prop.* 17. *hujus.*
(5) *Prop.* 23. *hujus.*

convertendo prima ad excessum, quo prima superat secundam, minorem vicissim rationem, quam tertia ad excessum, quo tertia superat quartam.



Habet AC ad BC majorem rationem; quàm DF ad EF. Dico, convertendo AC ad AB habere vicissim minorem rationem, quàm DF ad DE.

Quoniam enim ex hypothesi AC ad BC habet majorem rationem, quàm DF ad EF; habebit (1) dividendo AB ad BC majorem quoque rationem, quàm DE ad EF. Unde, quum invertendo (2) BC ad AB habeat vicissim minorem rationem, quàm EF ad DE; habebit componendo [3] AC ad AB minorem quoque rationem, quàm DF ad DE: proindeque, si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quàm tertia ad quartam; habebit convertendo prima ad excessum, quo prima superat secundam minorem vicissim rationem, quàm tertia ad excessum, quo tertia superat quartam. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

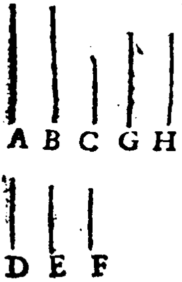
Simili autem ratione ostendetur, quod si prima ad secundam habuerit minorem rationem: quam tertia ad quartam; convertendo prima ad excessum, quo prima superat secundam, habeat vicissim majorem rationem quam ter-

[1] *Prop.29.hujus.* [2] *Prop.26.hujus.*
[3] *Prop.28.hujus.*

tertia ad excessum, quo tertia superat quartam.

PROP. XXXI. THEOR. XXXI.

Si tres magnitudines habuerint cum aliis tribus rationem ordinatam majorem; habebit ex æquali ordinando prima priorum ad ultimam majorem quoque rationem, quam prima posteriorum ad ultimam.



Tres magnitudines A, B, C cum aliis tribus D, E, F servent rationem ordinatam majorem: ita nempe, ut A ad B habeat majorem rationem, quàm D ad E; & B ad C majorem, quàm E ad F. Dico, ex æquali ordinando A ad C habere quoque majorem rationem, quam D ad F.

Intelligatur etenim G esse ad C, ut est E ad F. Et quoniam ex hypothesi B ad C majorem rationem habet, quàm E ad F; habebit quoque (1) B ad C majorem rationem, quàm G ad C: proindeque (2) B major erit, quàm G. Quum igitur B major sit, quàm G; habebit (3) A ad G majorem rationem, quàm ad B: ex hypothesi autem A ad B majorem rationem habet, quam D ad E. Quare A ad G multò majorem rationem habebit, quàm D ad E.

In-

(1) *Prop.13.hujus.* (2) *Prop.10.hujus.*
(3) *Prop.8.hujus.*

Intelligatur rursus H esse ad G, ut est D ad E. Et quoniam ex ostensis A ad G majorem rationem habet, quàm D ad E; habebit A ad G majorem quoque rationem, quàm H ad G: proindeque A major erit, quàm H; eritque propterea A ad C in majore ratione, quàm H ad C. Jam verò ex æquali ordinando H ad C habet eamdem rationem, quàm D ad F [1]. Quare A ad C majorem quoque rationem (2) habebit, quàm D ad F. Et propterea, si tres magnitudines servent cum aliis tribus rationem ordinatam majorem; habebit ex æquali ordinando prima priorum ad ultimam majorem quoque rationem, quàm prima posteriorum ad ultimam. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM I.

Quod si magnitudines servantes rationem ordinatam majorem cum aliis totidem plures fuerint, quàm tres; ostendetur, primam priorum ad ultimam habere quoque majorem rationem, quam prima posteriorum ad ultimam, idque eadem methodo, qua usi sumus in Scholio propositionis vigesimæ secundæ.

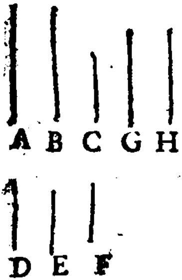
SCHOLIUM II.

Simili autem ratione ostendemus, quod si plures magnitudines cum aliis totidem fuerint in ratione ordinata minore, ex æquali ordinando prima priorum ad ultimam minorem quoque rationem habeat, quam prima posteriorum ad ultimam.

[1] *Prop.22.hujus.* (2) *Prop.13.hujus.*

PROP. XXXII. THEOR. XXXII.

Si tres magnitudines servent cum aliis tribus rationem perturbatam majorem; habebit ex æquali perturbando prima priorum ad ultimam majorem quoque rationem, quam prima posteriorum ad ultimam.



Tres magnitudines A, B, C servent cum aliis tribus D, E, F rationem perturbatam majorem: ita nempe, ut A ad B habeat majorem rationem, quàm E ad F: & B ad C majorem, quàm D ad E. Dico, ex æquali perturbando A ad C habere quoque majorem rationem, quàm D ad F.

Intelligatur enim G esse ad C, ut est D ad E. Et quoniam ex hypothesi B ad C majorem rationem habet, quàm D ad E; habebit quoque (1) B ad C majorem rationem, quàm G ad C; proindeque (2) B major erit, quàm G. Quum igitur B major sit, quàm G; habebit [3] A ad G majorem rationem, quàm A ad B. Ex hypothesi autem A habet ad B majorem rationem, quàm E ad F. Quare A ad G multò majorem rationem habebit, quàm E ad F.

Intelligatur rursus H esse ad G, ut est E ad F. Et quoniam ex ostensis A ad G habet majorem rationem, quàm E ad F; habebit A ad

(1) *Prop.13.hujus.* [2] *Prop.10.hujus.*
(3) *Prop.8. hujus.*

A ad G majorem quoque rationem, quàm H ad G: proindeque A major erit, quàm H; eritque propterea A ad C in majore ratione, quàm H ad C. Jam verò ex æquali perturbando (1) H est ad C, ut D ad F. Quare A ad C (2) majorem quoque rationem habebit, quàm D ad F: proindeque, si tres magnitudines cum aliis tribus fuerint in ratione perturbata majore; ex æquali perturbando prima priorum ad ultimam majorem quoque rationem habebit, quàm prima posteriorum ad ultimam. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM I.

Quod si magnitudines servantes rationem perturbatam majorem cum aliis totidem fuerint plures, quàm tres; ostendemus primam priorum ad ultimam majorem quoque rationem habere, quam prima posteriorum ad ultimam, idque eadem omnino methodo, qua usi sumus in Scholio propositionis vigesimæ tertiæ.

SCHOLIUM II.

Simili autem ratione ostendemus, quod si plures magnitudines cum aliis totidem fuerint in ratione perturbata minore, ex æquali perturbando prima priorum ad ultimam minorem quoque habeat rationem, quam prima posteriorum ad ultimam.

[1] *Prop.23.hujus.* (2) *Prop.15.hujus.*

PROP. XXXIII. THEOR. XXXIII.

Si tota ad totam habeat majorem rationem, quam ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam majorem quoque rationem habebit, quam tota ad totam.

Habeat tota AB ad totam CD majorem rationem, quàm ablata AE ad ablatam CF. Dico, reliquam EB ad reliquam FD majorem quoque rationem habere, quàm tota AB ad totam CD.

Quoniam enim ex hypothesi AB ad CD habet majorem rationem, quàm AE ad CF; habebit permutando AB ad AE majorem quoque rationem [1], quàm CD ad CF. Jam verò convertendo (2) AB ad EB minorem rationem habet, quàm CD ad FD. Quare rursus permutando AB ad CD habebit minorem quoque rationem, quàm EB ad FD. Et propterea ratio, quàm habet EB ad FD, major erit ratione, quàm habet AB ad CD. Si igitur tota ad totam habuerit majorem rationem, quàm ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam majorem quoque rationem habebit, quàm tota ad totam. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Ex ipso autem demonstrandi modo patet, quod si tota ad totam habuerit minorem ratio-

tio-

(1) *Propr. 27. hujus.* (2) *Prop. 30. hujus.*

tionem, quam ablata ad ablatam; reliqua ad reliquam minorem quoque rationem habeat, quam tota ad totam.

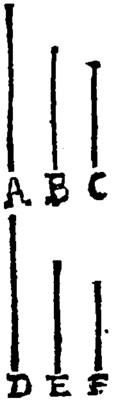
PROP. XXXIV. THEOR. XXXIV.

Si quotcumque magnitudines comparatæ cum aliis totidem constituant rationes, quarum antecedens subsequente semper major sit; habebunt omnes priores ad omnes posteriores majorem quidem rationem, quam ultima priorum ad ultimam posteriorum; minorem verò, quam prima priorum ad primam posteriorum.

Sint magnitudines A, B, C, & aliæ iis numero æquales D, E, F; habeatque A ad D majorem, rationem quàm B ad E; itemque B ad E majorem, quàm C ad F. Dico primo, quod omnes A, B, C ad omnes D, E, F habeant majorem rationem, quàm C ad F.

Quoniam enim ex hypothesi A ad D majorem habet rationem, quàm B ad E; habebit permutando (1) A ad B majorem quoque rationem, quàm D ad E; & consequenter componendo [2] A, & B simul ad B majorem adhuc rationem habebunt, quàm D, & E simul ad E. Et quoniam ex hypothesi B ad E majorem habet rationem, quàm C ad F; habebit permutando B ad C majorem quoque rationem, quàm E ad F. Unde ex æqua-

[1] *Prop.27.hujus.* (2) *Prop.28.hujus.*



æquali ordinando (1) A, & B ſimul ad C habebunt majorem adhuc rationem, quàm D, & E ſimul ad F. Quumque rurſus componendo habeant A, B, C ſimul ad C majorem rationem, quàm D, E, F ſimul ad F; habebunt tandem permutando omnes A, B, C ad omnes D, E, F majorem quoque rationem, quàm C ad F.

Dico ſecundò, quod omnes A, B, C ad omnes D, E, F minorem habeant rationem, quàm A ad D.

Quoniam enim ex hypotheſi B ad E majorem habet rationem, quàm C ad F; habebit permutando B (2) ad C majorem quoque rationem, quàm E ad F; & conſequenter componendo (3) B, & C ſimul ad C majorem adhuc rationem habebunt, quàm E, & F ſimul ad F. Unde, quum convertendo (4) B, & C ſimul ad B minorem habeant rationem, quàm E, & F ſimul ad E, & invertendo (5) B ad A minorem habeat rationem, quàm E ad D; habebunt ex æquali ordinando [6] B, & C ſimul ad A minorem quoque rationem, quàm E, & F ſimul ad D. Quare, quum rurſus componendo omnes A, B, C ad A minorem habeant rationem, quàm omnes D, E, F ad D; habebunt tandem permu-

(1) *Prop.31.hujus.* (2) *Prop.27.hujus.*
(3) *Prop.28.hujus.* [4] *Prop.30.hujus.*
(5) *Prop.26.hujus.* (6) *Prop.31.hujus.*

mutando omnes A, B, C ad omnes D, E, F minorem adhuc rationem, quam A ad D.

Si igitur quotcumque magnitudines comparatæ cum aliis totidem constituant rationes, quarum antecedens subsequente semper major sit; habebunt omnes priores ad omnes posteriores majorem quidem rationem, quàm ultima priorum ad ultimam posteriorum; minorem verò quam prima priorum ad primàm posteriorum. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Non dissimiliter autem ostendetur, quod si quotcumque magnitudines comparatæ cum aliis totidem constituant rationes, quarum antecedens subsequente semper minor sit; omnes priores ad omnes posteriores minorem quidem rationem habeant, quam ultima priorum ad ultimam posteriorum; majorem verò, quàm prima priorum ad primam posteriorum.

SCHOLIUM GENERALE.

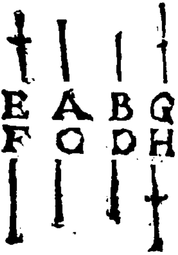
In tradenda proportionum doctrina, ab Euclidis methodo eam per æquemultiplicia ostendentis, nihil quidem recessimus: quod sanè nemo, opinor, vitio nobis vertet; quum, si res attentè perpendatur, ejusmodi proportionum doctrina Euclidea nullo vitio laborare comperiatur. Neque enim alia ratione doctrinam istam putant communiter Recentiores mancam esse, ac imperfectam, quàm quia lex illa æquemultiplicium, qua cognoscuntur magnitudines proportionales, velut principium ab Eucli-

clide fuit assumpta, quum tamen ex ipsorum sententia sua deberet ratione fulciri. Sed immeritò ab Euclide id exigunt, ut qui magno mentis acumine talem cuderit rationis definitionem, ut sine illa lege quæ sint quatuor magnitudines proportionales, seu eamdem rationem habentes in systemate suo nemo cognoscere queat. Jure id autem exigent ab iis, qui vocantes rationem, comparationem duarum magnitudinum ejusdem generis, factam ratione continentiæ, sine ulla demostratione eamdem illam legem usurparent. Nam, qui ita se gererent, jam quatuor magnitudinum proportionalium duas notas diversas assumerent, unam nempe, quum prima toties continet secundam, quoties tertia continet quartam; & alteram, quum æquemultiplicia primæ, & tertiæ, vel una superant, vel una deficiunt, vel una adæquant æquemultiplicia secundæ, & quartæ. Itaque quum apud Recentiores jam invaluerit, rationem definire, comparationem duarum magnitudinum ejusdem generis institutam ratione continentiæ; atque adeò vocare magnitudines proportionales, quæ ejusmodi sunt, ut quoties prima continet secundam, toties tertia contineat quartam: proinde, ut doctrina Euclidea etiam juxta has rationis, ac proportionis definitiones subsistere possit, visum est sequentia theoremata hoc loco subjungere.

THEOR. I.

Si prima toties contineat secundam, quoties tertia continet quartam; æquemultiplices primæ, & tertiæ, vel una excedent, vel una deficient, vel una adæquabunt æquemultiplices secundæ, & quartæ.

Pri-



Prima A toties contineat ſecundam B, quoties tertia C continet quartam D. Sumantur autem ipſarum quidem A, et C æquemultiplices E, et F; ipſarum verò B, et D æquemultiplices G, et H. Dico, E, et F vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare G, & H.

Ponamus etenim primò, quod E major ſit, quàm G. Jamque, ſi F non ſit major, quàm H; ſed vel minor, vel æqualis; continebit E magis G, quàm F continet H. Sed G, & H ſunt æquemultiplices ipſarum B, et D; atque adeò G toties continet B, quoties H continet D. Quare etiam E magis continebit B, quàm F continet D. Ex hypotheſi autem B toties continetur in A, quoties D continetur in C. Quare rurſus E magis continebit A, quàm F continet C: quod quidem eſt falſum; quum E, et F ſint æquemultiplices ipſarum A, et C.

Ponamus ſecundò, quòd E minor ſit, quàm G. Jamque ſi F non ſit minor, quam H, ſed vel major, vel æqualis; continebit E minus G, quà F continet H. Sed G, et H ſunt æquemultiplices ipſarum B, et D; atque adeò G toties continet B, quoties H continet D. Quare etiam E minus continebit B, quàm F continet D. Ex hypotheſi autem B toties continetur in A, quoties D continetur in C. Quare rurſus E minus continebit A, quàm F continet C: quod quidem adhuc eſt falſum; quum E, et F ſint æquemultiplices ipſarum A, et C.

Po-

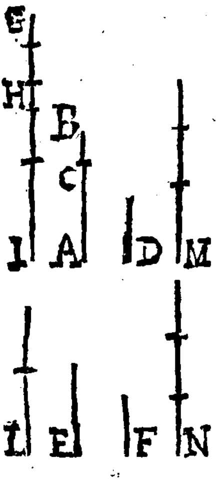
Ponamus denique, quod E ſit æqualis G. Jamque, ſi F non ſit æqualis H; erit vel major, vel minor. Unde, quum in primo caſu E minus contineat G, quam F continet H, & in in ſecundo E magis contineat G, quàm F continet H; ſemper oſtendetur, E non perinde continere A, ac F continet C: quod quum falſum ſit, concludendum eſt, quod ſi prima toties contineat ſecundam, quoties tertia continet quartam; æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una excedant, vel una deficiant, vel unà adequent æquemultiplices ſecundæ, & quartæ. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. II.

Si prima magis contineat ſecundam, quam tertia continet quartam, ſumi poterunt tales æquemultiplices primæ, & tertiæ, itemque tales ſecundæ, & quartæ, ut ſi multiplex primæ excedat multiplicem ſecundæ, multiplex tertiæ non excedat multiplicem quartæ.

Prima AB magis contineat ſecundam D, quàm tertia E continet quartam F. Dico, tales æquemultiplices ſumi poſſe ipſarum AB, & E, itemque tales ipſarum D, & F, ut ſi multiplex ipſius AB excedat multiplicem ipſius D, multiplex ipſius E non excedat multiplicem ipſius F.

Quoniam enim ex hypotheſi AB magis continet D, quàm E continet F, abſcindi poteſt ex AB portio aliqua BC, ita ut reliqua CA toties contineat D, quoties E continet F. Tum ipſarum BC, CA, & E æquemultiplices capiantur GH, HI, & L, hac tamen lege, ut GH multiplex ipſius BC major ſit, quàm D. Denique ipſarum D, & F ſumantur æquemultiplices M, & N, hac rurſus lege, ut M multiplex ipſius



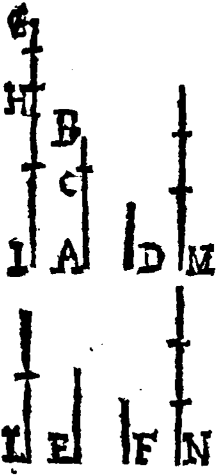
ſius D ſuperet HI magnitudine non majore, quàm D, ſed vel æquali, vel minore.

Et quoniam GH, HI ſunt æquemultiplices ipſarum BC, CA; erit per primam hujus GI tam multiplex ipſius AB, quam eſt GH ipſius BC, vel HI ipſius CA, vel denique L ipſius E. Sunt igitur GI, & L æquemultiplices ipſarum AB, & E. Suntque etiam ex conſtructione M, & N æquemultiplices ipſarum D, & F. Dico itaque, quod GI excedat M, ſed viciſſim L non excedat N.

Quod enim GI excedat M, id liquet abundè Nam, ex conſtructione, M ſuperat HI magnitudine non majore, quam D. Sed poſuimus GH majorem eſſe quam D. Itaque M ſuperat HI magnitudine minore, quàm GH: & propterea tota GI excedet M. Quod verò viciſſim L non excedat N, demonſtrabimus id quidem hoc pacto.

Si fieri poteſt L excedat N. Et quoniam HI minor eſt, quàm M, continebit L magis N, quàm HI continet M. Sed M, & N ſunt æquemultiplices ipſarum D, et F; atque adeò M toties continet D, quoties N continet F. Quare etiam L magis continebit F, quàm HI continet D. Ex conſtructione autem D toties

con-



continetur in CA, quoties F continetur in E. Quare rursus L magis continebit E, quàm HI continet CA: quod quidem est falsum: quum HI, & L sint æquemultiplices ipsarum CA, & E.

Concludamus igitur, quod si prima magis contineat secundam, quam tertia continet quartam; tales æquemultiplices sumi possint primæ, & tertiæ, itemq; tales secundæ, & quartæ, ut si multiplex primæ excedat multiplicem secundæ, multiplex tertiæ non excedat multiplicem quartæ: Quod erat demonstrandum.

THEOR. III.

Si æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una excedant, vel una deficiant, vel una adæquent æquemultiplices secundæ, & quartæ; continebit prima toties secundam, quoties tertia continet quartam.

Nam si ita non sit, sed prima magis contineat secundam, quam tertia continet quartam; jam per theorema secundum sumi poterunt tales æquemultiplices primæ, & tertiæ, itemque tales secundæ, & quartæ, ut si multiplex primæ excedat multiplicem secundæ, multiplex

plex tertiæ non excedat multiplicem quartæ: Posuimus autem, æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices secundæ, & quartæ. Necesse est igitur, ut prima toties contineat secundam, quoties tertia continet quartam. Quod erat demonstrandum.

THEOR. IV.

Si sumi possunt tales æquemultiplices primæ, & tertiæ, itemque tales secundæ, & quartæ, ut multiplex primæ excedat multiplicem secundæ, sed multiplex tertiæ non excedet multiplicem quartæ; prima magis continebit secundam, quam tertia continet quartam.

Sint quatuor magnitudines, AB prima, D secunda, E tertia, & F quarta, Dico, quod si sumi possint tales æquemultiplices primæ, & tertiæ, itemque tales, secundæ, & quartæ, ut multiplex primæ superet multiplicem secundæ, at multiplex tertiæ non superet multiplicem quartæ, prima AB magis contineat secundam D, quam tertia E continet quartam F.

Sumantur enim ejusmodi æquemultiplices; & ipsarum quidem AB, & E, sint GI, & L; *ipsarum verò D, & F sint* M, & N. *Quoniam igitur ex hypothesi* GI *superat* M, *sed* L *non superat* N; *continebit* GI *magis* M, *quam* L *continet* N. *Jam verò* M, & N *sunt æquemultiplices ipsarum D, & F; atque adeo quoties* M *continet D, toties* N *continet* F. *Quare etiam* GI *magis continebit D, quam* L *continet* F. *Sunt autem* GI, & L *æquemultiplices ipsarum AB, & E; ac proinde quoties* GI *continet AB, toties* L *continet* F. *Quare*

etiam

etiam AB magis continebit D , quam E continet F . Et propterea , si fuerint quatuor magnitudines , & sumi possint tales æquemultiplices primæ , & tertiæ , itemque tales secundæ , & quartæ , ut multiplex primæ superet multiplicem secundæ , sed multiplex tertiæ non superet multiplicem quartæ; prima magis continebit secundam , quàm tertia continet quartam. Quod erat demonstrandum.

GEO-

GCEMETRIÆ PLANÆ ELEMENTORUM

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

I.

S*imiles figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos, singulos singulis, æquales habent, & latera circum æquales angulos proportionalia.* Unde ad adstruendam duarum figurarum rectilinearum similitudinem, duo quidem ostendi debent. Primum, ut habeant angulos, singulos singulis, æquales. Deinde, ut habeant latera, quæ circum æquales angulos sunt proportionalia. Quocirca, si anguli unius figuræ, æquales fuerint angulis alterius figuræ, singuli singulis, at latera circa æquales angulos existentia non fuerint proportionalia; vel contra latera unius figuræ proportione correspondeant lateribus alterius figuræ, sed anguli, circa quos sunt latera proportionalia; non fuerint æquales: ejuscemodi figuræ nequaquam similes dici possunt.

II,

Reciprocæ autem figuræ sunt, quum in utraque ipsarum sunt antecedentes, & consequen-

tes

tes rationum. Vel clarius, quum in una quidem figura est antecedens primæ rationis, & consequens secundæ; in altera verò figura est consequens primæ rationis; & antecedens secundæ. Num autem termini isti diversarum rationum debeant esse circum æquales angulos; id nec ipsa definitio indicat, nec Interpretum quisquam advertit. Sed crediderim, hanc quoque conditionem requiri, ut figuræ dicantur reciprocæ; quemadmodum colligere licet ex propositionibus decimaquarta, & decimaquinta hujus libri, in quibus de his figuris disseritur.

III.

Recta linea, dicitur secari extrema ac media ratione, quum ita quidem dividitur, ut tota recta linea sit ad majus segmentum, ut est majus ad minus. Patebit autem inferius, secari quidem rectam lineam extrema, ac media ratione, si per undecimam secundi ita quidem dividatur, ut rectangulum, quod fit ex tota, & uno segmentorum, æqualæ sit quadrato alteriùs segmenti. Cœterùm lineæ hoc modo divisæ utilitates innumeræ penè sunt: unde nonnulli rationem, qua linea hoc pacto dividitur, divinam appellarunt. Sed dicitur vulgò divisa extrema, ac media ratione; quia unum segmentorum, in quæ dividitur, fit medius terminus proportionis continuæ, alterum terminus extremus.

IV.

Altitudo cujuscumque figuræ; est perpendicularis, quæ a vertice ad basim demittitur: nempe quia perpendicularis est minima omnium rectarum, quæ à vertice ad basim duci possunt; & utpote talis, est certæ, ac de-

determinatæ longitudinis; cujusmodi profectò debent esse rerum mensuræ. Hinc itaque patet, duas figuras æquales altitudines habere, si utique æquales fuerint perpendiculares, quæ ex ipsarum verticibus ad bases demittuntur. Erunt verò dictæ perpendiculares æquales, quum bases figurarum, & vertices vel sunt in iisdem parallelis, vel saltem in iisdem parallelis constitui possunt.

V.

Quantitas, seu exponens, vel denominator rationis est id, quod indicat, quoties antecedens continet consequentem. Sic quantitas rationis, quam habet 10 ad 2, est 5; quia 10 quinquies continet 2. Pariterque quantitas rationis, quàm habet 12 ad 3, est 4; quia 12 quater continet 3. Unde patet, rationes æquales eamdem quantitatem habere. Nam vocantur rationes æquales, quum antecedentium æquemultiplicia quævis vel una deficiunt, vel una adæquant, vel una superant æquemultiplicia consequentium utcumque sumpta: quod profectò quum accidit, ostensum fuit à nobis, antecedentem unius rationis toties continere suum consequentem, quoties consequentem suum continet antecedens alterius rationis.

VI.

Ratio dicitur componi ex duabus, aut pluribus rationibus, quum ejus quantitas prodit ex multiplicatione quantitatum illarum rationum. Sic ratio, quàm habet 18 ad 3, componitur ex ratione, quàm habet 4 ad 2, & ex ratione, quàm habet 12 ad 4; nam quantitas illius est *6*, quantitates verò istarum sunt 2, & 3: profectò autem, si 2 mul-

ti-

tiplicetur per 3, prodibit 6. Atque ita quoque ratio, quam habet 48 ad 2, componitur ex ratione, quàm habet 4 ad 2, ex ratione, quàm habet 9. ad 3, & ex ratione, quàm habet 12 ad 3, nam quantitas illius quæ est 24, oritur multiplicando inter se quantitates istarum, quæ sunt 2, 3, & 4.

Ex quo patet, quod si fuerint plures magnitudines, ratio, quam prima habet ad ultimam, componatur ex rationibus, quas eæ, excepta ultima, habent ad suas subsequentes. Ut si fuerint plures magnitudines 48, 12, 6, 2; habebit 48. ad 2 rationem compositam ex rationibus, quas habent 48 ad 12, 12 ad 6. & 6 ad 2, Nam quantitas rationis, quàm habet 48 ad 2, est 24: quæ quidem oritur, multiplicando inter se quantitates rationum, quas habent 48 ad 12, 12 ad 6, & 6 ad 2, quæ sunt 4, 2, & 3.

VII.

Ratio, quæ componitur ex duabus rationibus æqualibus, dicitur duplicata cujusque illarum; quemadmodum triplicata quum componitur ex tribus rationibus æqualibus; quadruplicata, quum ex quatuor; atque ita deinceps. Ita ratio, quàm habet 18 ad 2, componitur ex rationibus, quas habent 6 ad 2, & 12 ad 4. Unde, quia duæ istæ rationes sunt æquales inter se; dicetur illa duplicata cujusque istarum. Atque ita quoque, quia ratio, quàm habet 54 ad 2, componitur ex tribus rationibus æqualibus, quas habent 6 ad 2, 2 ad 4, & 15 ad 5; dicetur illa triplicata cujusque istarum.

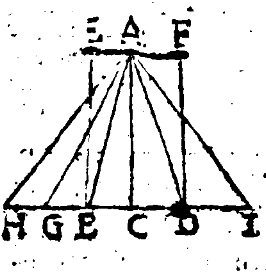
Ex quo patet, quod si fuerint tres magnitudines continuè proportionales A, B. C, ita nempe,

nempe ut A sit ad B, veluti est B ad C; ratio, quam habet prima A ad tertiam C duplicata sit ejus, quam habet vel prima A ad secundam B, vel secunda B ad tertiam C. Nam ratio, quam habet A ad C, componitur ex rationibus, quas habent A ad B, & B ad C. Unde quum ex hypothesi duæ istæ rationes sint æquales inter se; erit cujusque ipsarum duplicata ratio, quam habet A ad C.

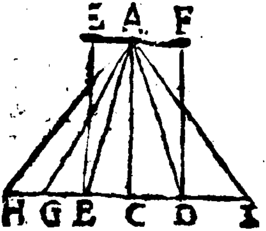
Similiter autem, si fuerint quatuor magnitudines continuè proportionales A, B, C, D, ita nempe, ut A sit ad B, veluti est B ad C, & B sit ad C, veluti est C ad D; ratio, quam habet prima A ad quartam D triplicata erit ejus, quam habet vel prima A ad secundam B, vel secunda B ad tertiam C, vel tertia C ad quartam D. Nam ratio, quam habet A ad D componitur ex rationibus, quas habent A ad B, B ad C, & C ad D. Unde quum tres istæ rationes sint æquales inter se; erit cujusque ipsarum triplicata ratio, quam habet A ad D.

PROP. I. THEOR. I.

Triangula, & parallelogramma eamdem altitudinem habentia inter se sunt ut bases.



Sint primum duo triangula ABC, ACD, quæ posita super eamdem rectam BD habeant eumdem verticem A, & consequenter eamdem altitudinē; dico triangulum ABC esse ad trian-



gulum ACD ut est basis BC ad basim CD.

Extendatur enim tum BC in directū versus H, quum DC in directum versus I: deinde super CH capiantur portiones BG, GH æquales ipsi BC, & super CI portio DI æqualis CD. Denique jungantur AG, AH, AI.

Et quoniam ex constructione æquales inter se sunt tum rectæ CB, BG, GH, quum rectæ CD, DI: erunt æqualia etiam inter se tum triangula ACB, ABG, AGH, quum triangula ACD, ADI; quare quoties BC, CD metiuntur CH, CI, toties triangula ABC, ACD metientur triangula ACH, ACI. Jam vero triangulum ACH est æquale, majus, vel minus triangulo ACI pro ut basis CH est æqualis, major, vel minor basi CI. Itaque quum habeantur quatuor magnitudines triangulum ABC prima, triangulum ACD secunda, basis BC tertia, & basis CD quarta; & ostensum sit æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices secundæ, & quartæ, erit ut triangulum ABC ad triangulum ACD ita basis BC ad basim CD.

Sint secundò duo parallelogramma AB, AD, quæ sint constituta inter easdem parallas BD, EF, & consequenter, non secus ac triangula, eamdem habeant altitudinem. Dico, parallelogrammum AB ad parallelogrammum

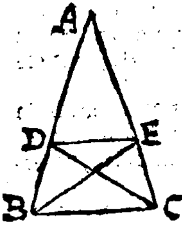
mum AD esse etiam, ut basis BC ad basim CD.

Quoniam enim diagonalis dividit parallelogrammum [1] in duo triangula æqualia; erit tam parallelogrammum AB duplum trianguli ABC, quàm parallelogrammum AD duplum trianguli ACD. Quare erit, ut parallelogrammum AB ad parallelogrammum AD; ita triangulum ABC ad triangulum ACD. Ostensum est autem, triangulum ABC esse ad triangulum ACD, ut est basis BC ad basim CD. Erit igitur quoque (2) ut parallelogrammum AB ad parallelogrammum AD, ita basis BC ad basim CD.

Triangula igitur, & parallelogramma, quæ eamdem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod erat demonstrandum.

PROP. II. THEOR. II.

Si uni laterum trianguli parallela recta linea ducatur, ea secabit alia duo latera proportionaliter; & vicissim si secet proportionaliter duo latera trianguli, ea tertio lateri parallela erit.



Sit triangulum ABC, in quo ducatur recta DE, quæ secans latera AB, AC in punctis D, & E parallela sit ipsi BC. Dico, rectam istam DE proportionaliter secare latera AB, AC: ita nempe, ut AD sit ad DB, ut est AE ad EC.

O 2 Jun-

[1] *Prop.34.lib.1.* (2) *Prop.11.lib.5.*

Jungantur etenim rectæ BE, CD. Et quoniam triangula BDE, CDE habent eamdem basim DE, & constituta sunt in iisdem parallelis DE, BC; erit triangulum BDE [1] æquale triangulo CDE. Quare erit (2), ut triangulum ADE ad triangulum BDE, ita idem triangulum ADE ad triangulum CDE. Jam verò triangulum ADE est ad triangulum BDE (3), ut est AD ad BD; itemque triangulum ADE est ad triangulum CDE, ut est AE ad EC. Quare erit [4] ut AD ad DB, ita AE ad EC.

Sed secet vicissim recta DE proportionaliter latera AB, AC in punctis D, & E. Dico rectam DE parallelam esse ipsi BC.

Jungantur similiter rectæ BE, CD. Et quoniam ex hypothesi AD est ad DB, ut AE ad EC; atque est AD ad DB [5], ut triangulum ADE ad triangulum BDE; & AE ad EC, ut triangulum ADE ad triangulum CDE; erit ut triangulum ADE ad triangulum BDE (6), ita idem triangulum ADE ad triangulum CDE: proindeque triangulum BDE (7) æquale erit triangulo CDE. Unde, quum duo ista triangula habeant eamdem basim DE, & sint ad eamdem partem posita; erunt etiam (8) in iisdem parallelis. Et propterea DE parallela erit ipsi BC.

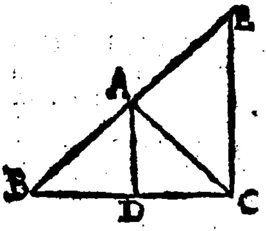
Si igitur uni laterum trianguli parallela recta linea ducatur, ea secabit alia duo latera proportionaliter; & vicissim si secet proporpor-

(1) *Prop.37.lib.1.* (2) *Prop.7.lib.5.*
(3) *Prop.1.hujus.* [4] *Prop.11.lib5.*
(5) *Prop.1.hujus.* (6) *Prop.11.lib.5.*
[7] *Prop.9.lib.5.* (8) *Prop.39.lib.1.*

portionaliter duo trianguli latera, ea parallela erit lateri tertio. Quod erat demonstrandum.

PROP. III. THEOR. III.

Recta, quæ secat angulum, verticalem alicujus trianguli bifariam, secabit basim in ratione laterum; & vicissim recta, quæ secat basim alicujus trianguli in ratione laterum, secabit angulum verticalem bifariam.

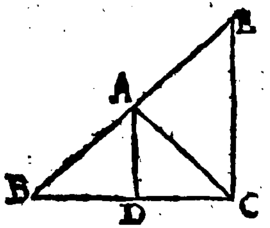


Sit triangulum ABC, ejusque angulus verticalis BAC secetur bifariam per rectam AD. Dico, rectam istam AD secare basim BC in ratione laterũ AB, AC: ita nempe, ut BD sit ad DC veluti est latus AB ad latus AC.

Ducatur enim (1) per punctum C recta CE ipsi AD parallela, quæ conveniat cum latere AB producto in E. Et quoniam rectæ AD, CE sunt parallelæ, & in ipsas incidit AC; erunt (2) anguli alterni DAC, ACE æquales inter se. Est autem ex hypothesi angulus DAC æqualis angulo BAD. Quare eidem angulo BAD æqualis quoque erit angulus ACE. Jam verò, propter easdem parallelas AD, CE, angulus BAD æqualis est angulo AEC. Quare erit angulus AEC

 æqua-

[1] *Prop.31.lib.1.* (2) *Prop.29.lib.1.*



æqualis angulo ACE. Et propterea latera AC, AE angulos illos subtendentia [1] æqualia erunt inter se. Quum igitur AC sit æqualis AE, habebit [2] AB ad AC eamdem rationem, quàm AB ad AE. Sed AB est ad AE (3), ut BD ad DC. Erit itaque (4) ut AB ad AC, ita BD ad DC.

Sed recta AD secet vicissim basim BC in ratione laterum AB, AC. Dico, eamdem rectam AD secare quoque bifariam angulum verticalem BAC.

Nam ex hypothesi BD est ad DC, ut AB ad AC. Sed [5] BD est ad DC, ut AB ad AE. Quare erit (6) ut AB ad AC, ita AB ad AE. Et propterea AC, AE æquales erunt inter se (7). Quum itaque triangulum CAE isosceles sit, erit (8) angulus ACE æqualis angulo AEC. Sed propter parallelas AD, CE [9] angulus ACE æqualis est angulo CAD, & angulus AEC æqualis est angulo BAD. Quare erit angulus CAD æqualis quoque angulo BAD: & ideò angulus BAC sectus erit bifariam per rectam AD.

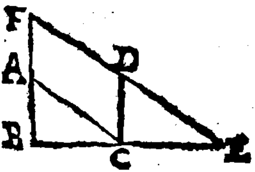
Re-

(1) *Prop.6.lib.*1. (2) *Prop.7.lib.*5.
(3) *Prop.2.hujus.* [4] *Prop.11.lib.*5.
(5) *Prop.2.hujus.* [6] *Prop.11.lib.*5.
(7) *Prop.9.lib.*5. (8) *Prop.5.lib.*1.
(9) *Prop.29.lib.*1.

Recta igitur, quæ secat angulum verticalem alicujus trianguli bifariam, secabit basim in ratione laterum; & vicissim recta, quæ secat basim alicujus trianguli in ratione laterum, secabit angulum verticalem bifariam.

PROP. IV. THEOR. IV.

Triangula æquiangula habent latera circum æquales angulos proportionalia; & homologa sunt latera illa, quæ æquales angulos subtendunt.

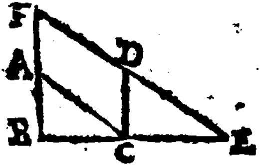


Sint ABC, DCE duo triangula æquiangula, quæ nempe habeant angulum ABC æqualem angulo DCE, angulum BCA æqualem angulo CED, & angulum CAB æqualem angulo EDC. Dico, eadem triangula habere quoque latera circum æquales angulos proportionalia, & illa quidem latera proportione sibi correspondere, quæ angulos æquales subtendunt; hoc est esse, ut AB ad BC, ita DC ad CE; ut BC ad CA, ita CE ad ED; & ut CA ad AB, ita ED ad DC.

Disponantur etenim triangula ABC, DCE ita quidem, ut latera BC, CE jaceant in directum. Et quoniam duo anguli [1] ABC, BCA sunt minores duobus rectis, atque est ex hypothesi angulus BCA æqualis angulo CED; erunt duo anguli ABC, CED simili-

 ter

[1] *Prop.*17.*lib.*1.



ter duobus rectis minores. Quum igitur in rectas AB, DE incidat tertia BE, & efficiat angulos internos ad eamdem partem duobus rectis minores; rectæ AB, DE nequaquam (1) erunt parallelæ, sed convenient productæ ad eam partem, in qua fiunt anguli minores duobus rectis. Producantur itaque rectæ AB, DE, & conveniant in F.

Et quoniam ex hypothesi in rectas BF, CD tertia incidens BE efficit angulum exteriorem DCE æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem ABC; erunt (2) rectæ BF, CD inter se parallelæ. Similiter, quia in rectas CA, EF tertia incidens BE efficit ex hypothesi angulum exteriorem BCA æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem CED; erunt rectæ CA, EF etiam inter se parallelæ. Quare parallelogrammum erit ACDF; eritque adeò [3] tum AC æqualis FD, cum AF æqualis CD.

Et quoniam in triangulo BFE ducta est AC ipsi EF parallela, erit (4) ut AB ad AF, ita BC ad CE. Est autem AF æqualis CD. Quare erit quoque, ut AB ad CD, ita BC ad CE. Et propterea permutando erit [5] ut AB ad BC, ita DC ad CE. Similiter, quia in eodem triangulo BEF ducta est CD ipsi BF

(1) *Axio.13.* [2] *Prop.28.lib.1.*
(3) *Prop.34 lib.1.* [4] *Prop.2.hujus.*
[5] *Prop.16.lib.5.*

BF parallela, erit ut BC ad CE, ita DF ad DE. Est autem DF æqualis AC. Quare erit quoque ut BC ad CE, ita AC ad DE; atque adeò purmutando erit, ut BC ad CA, ita CE ad ED. Quum igitur ostensum sit, AB esse ad BC, ut est DC ad CE, & BC esse ad CA, ut est CE ad ED; erit etiam ex æquali ordinando [1] ut AB ad AC, ita DC ad DE; atque adeò invertendo, ut CA ad AB, ita ED ad DC. Quod erat demonstrandum.

Triangula igitur æquiangula habent etiam latera circum æquales angulos proportionalia, & homologa sunt latera illa, quæ angulos æquales subtendunt.

COROLLARIUM.

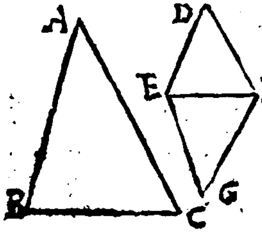
Ex quo patet, triangula æquiangula esse etiam similia inter se. Nam figuræ similes dicuntur illæ, quæ habent angulos angulis æquales, singulos singulis, & latera circum æquales angulos proportionalia. Quum igitur ostensum sit, triangula æquiangula habere quoque latera circa angulos æquales proportionalia; consequens est, ut triangula æquiangula sint etiam inter se similia.

PROP. V. THEOR. V.

Triangula, quæ latera habent proportionalia, erunt etiam æquiangula; & æquales habebunt eos angulos, quos homologa latera subtendunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quæ habeant latera proportionalia; hoc est AB sit ad

[1] *Prop.* 21 *lib.* 1.



BC, ut DE ad EF; & BC sit ad Ca, ut EF ad FD. Dico, eadem triangula esse etiam æquiangula, & æquales habere angulos illos, qui ab homologis lateribus subtenduntur: nempe angulum BAC æqualem esse angulo EDF, angulum ABC æqualem angulo DEF, & angulum ACB æqualem angulo DFE.

Fiat enim (1) angulus FEG æqualis angulo ABC, & angulus EFG æqualis angulo ACB, conveniantque rectæ EG, FG in G, eritque reliquus angulus EGF, æqualis quoque reliquo angulo BAC. Quum igitur duo triangula ABC, GEF sint æquiangula; erit [2] ut AB ad BC, ita GE ad EF; & ut BC ad CA, ita EF ad FG. Sed ex hypothesi AB est ad BC, ut DE ad EF; & BC est ad CA, ut EF ad FD. Quare erit [3], ut DE ad EF, ita GE ad EF; & ut EF ad FD, ita EF ad FG. Quum itaque DE, GE habeant ad EF eamdem rationem; erunt [4] DE, GE æquales inter se. Pariterque, quum eadem EF habeat eamdem rationem ad FD, quàm ad FG; erunt FD, FG etiam inter se æquales. Quare, quum duo triangula DEF, GEF habeant duo latera DE, DF æqualia duobus lateribus GE, GF, alterum alteri, nec non

(1) *Prop. 23. lib. 1.* (2) *Prop. 4. hujus.*
(3) *Prop. 11. lib. 5.* (4) *Prop. 9. lib. 5.*

non basim EF communem; habebunt quoque [1] angulum EDF æqualem angulo EGF; atque adeò æquales pariter (2) reliquos angulos, singulos singulis, hoc est angulum DEF æqualem angulo GEF, & angulum DFE æqualem angulo GFE. Est autem ex constructione angulus EGF æqualis angulo BAC, angulus GEF æqualis angulo ABC, & angulus GFE æqualis angulo ACB. Quare erit angulus BAC æqualis angulo EDF, angulus ABC æqualis angulo DEF, & angulus ACB æqualis angulo DFE. Et propterea triangula, quæ latera habent proportionalia, erunt etiam æquiangula, & æquales habebunt angulos illos, quos homologa latera subtendunt. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

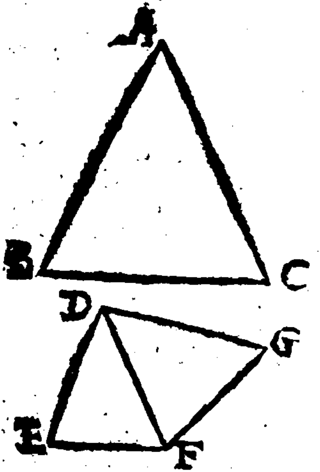
Ex quo patet, triangula, quæ latera habent proportionalia, esse etiam similia inter se. Nam figuræ similes dicuntur illæ, quæ non modo latera habent proportionalia, verùm etiam æquales angulos, circa quos sunt latera proportionalia. Quum igitur ostensum sit, triangula, quæ latera proportionalia habent, esse etiam æquiangula, & æquales habere angulos illos, quos homologa latera subtendunt; consequens est, ut triangula, quæ latera proportionalia habent, sint etiam similia inter se.

PROP. VI. THEOR. VI.

Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, & latera circum illos angulos

[1] Prop.8.lib.1. [2] Prop.4.lib.1.

gulos proportionalia, sunt etiam æquiangula, & æquales habent angulos illos, quos homologa latera subtendunt.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ habeant angulum BAC æqualem angulo EDF, nec non latera circum istos angulos proportionalia: ita nempe, ut BA sit ad AC, ut est ED ad DF. Dico, eadē triangula esse etiam æquiangula, & æquales habere angulos illos, quos homologa latera subtendunt; hoc est angulum ABC æqualem esse angulo DEF, angulum verò ACB æqualem angulo DFE.

Fiat enim (1) angulus FDG æqualis angulo BAC, seu EDF, & angulus DFG æqualis angulo ACB; conveniantque rectæ DG, FG in G; eritque reliquus angulus DGF æqualis quoque reliquo angulo ABC. Quum igitur duo triangula ABC, DGF ex constructione sint æquiangula; erit (2) ut AB ad AC, ita DG ad DF. Est autem ex hypothesi, ut

(1) *Propr.32.lib.1.* (2) *Prop.4.hujus.*

ut AB ad AC, ita DE ad DF. Quare erit [1] ut DE ad DF, ita DG ad DF. Et propterea, quum duæ DE, DG habeant ad DF eamdem rationem, erunt (2) DE, DG æquales inter se. Unde, quia duo triangula DEF, DGF habent duo latera DE, DF æqualia duobus lateribus DG, DF, alterum alteri, nec non æquales angulos sub æqualibus lateribus contentos; habebunt quoque [3] reliquos angulos reliquis angulis æquales, singulos singulis, hoc est angulum DGF æqualem angulo DEF, & angulum DFG æqualem angulo DFE. Jam verò ex constructione angulus DGF æqualis est angulo ABC, & angulus DFG æqualis est angulo ACB. Quare erit angulus ABC æqualis angulo DEF, & angulus ACB æqualis angulo DFE: proindeque triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, & latera circum istos angulos proportionalia, erunt etiam æquiangula, & æquales habebunt angulos illos, quos homologa latera subtendunt, Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Ex quo patet, triangula, quæ habent unum angulum uni angulo æqualem, & latera circum istos angulos proportionalia, esse etiam similia inter se. Nam hujusmodi triangula ostensa sunt inter se æquiangula. Sed triangula æquiangula sunt pariter similia. Quare & ipsa illa triangula similia erunt inter se.

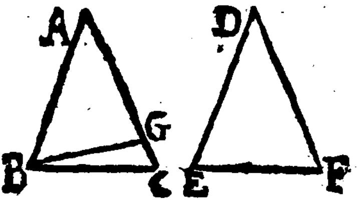
PROP.

---

(1) *Prop.11.lib.5.* [2] *Prop.9.lib.5.*
[3] *Prop.4.lib.1.*

PROP. VII. THEOR. VII.

Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, latera verò circum alios angulos proportionalia, & reliquos angulos proportionalia, & reliquos angulos ejusdem speciei inter se, hoc est vel utrumque acutum, vel utrumque obtusum, erunt etiam æquiangula, & æquales habebunt angulos illos, circa quos sunt latera proportionalia.



Sint duo triangula ABC, DEF quæ habeant angulum BAC æqualem angulo EDF. Sint deinde proportionalia latera, quæ sunt circa angulos ABC, DEF; hoc est AB sit ad BC, ut est DE ad EF. Denique reliqui anguli ACB, DFE sint ejusdem speciei inter se; hoc est, vel ambo acuti, seu recto minores, vel ambo obtusi, seu recto majores. Dico, eadem triangula esse etiam æquiangula inter se, & æquales habere angulos illos, circa quos sunt latera proportionalia, nempe angulum ABC æqualem esse angulo DEF.

Si enim angulus ABC non sit æqualis angulo DEF, alter ipsorum major erit. Sit itaque major angulus ABC. Quare fiat angulus ABG [1] æqualis angulo DEF. Quumque

[1] *Prop.23 lib.1.*

que angulus BAC positus sit æqualis angulo EDF; erit reliquus angulus AGB æqualis reliquo angulo DFE; atque adeò duo triangula ABG, DEF quum æquiangula sint, erit [1] ut AB ad BG, ita DE ad EF. Est autem ex hypothesi, ut AB ad BC, ita DE ad EF. Quare erit (2), ut AB ad BC, ita AB ad BG. Et propterea, quum eadem AB habeat eamdem rationem ad BC, quam ad BG; erunt [3] CB, BG æquales inter se. Isosceles est itaque triangulum BCG; eritque adeò (4) angulus BCG æqualis angulo BGC. Jam verò ex hypothesi angulus BCG est ejusdem speciei cum angulo EFD, qui ex constructione adæquat angulum BGA. Quare angulus CGB erit etiam ejusdem speciei cum angulo BGA; eruntque adeò ambo vel recto minores, vel recto majores. Sed hoc fieri non potest: debent enim simul (5) duos rectos adæquare. Non igitur angulus ABC major est, sed æqualis angulo DEF. Et propterea triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, latera verò circum alios angulos proportionalia; & reliquos angulos ejusdem speciei inter se, erunt etiam æquiangula, & æquales habebunt angulos illos, circa quos sunt latera proportionalia. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex quo patet, triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, latera verò circum alios

---

[1] *Prop. 4. hujus.* [2] *Prop. 11. lib. 5.*
(3) *Prop. 9. lib. 5.* (4) *Prop. 5. lib. 1.*
[5] *Prop. 13. lib. 1.*

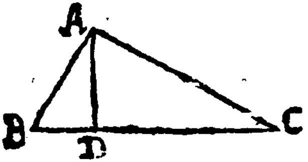
alios angulos proportionalia, & reliquos angulos ejusdem speciei inter se, esse etiam similia. Nam hujusmodi triangula ostensa sunt inter se æquiangula. Sed triangula æquiangula sunt pariter similia. Quare & ipsa illa triangula similia erunt inter se.

SCHOLIUM.

Vides igitur, similitudinem duorum triangulorum quatuor modis ostendi posse. Primò nempe, si triangula sint æquiangula. Secundò, si habeant latera proportionalia. Tertiò, si habeant unum angulum uni angulo æqualem, & latera circum istos angulos proportionalia. Et quartò demum, si habeant unum angulum uni angulo æqualem, latera verò circum alios angulos proportionalia, & reliquos angulos ejusdem speciei inter se.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si in triangulo rectangulo ex angulo recto ad basim perpendicularis demittatur; hæc dividet triangulum in duo alia triangula, quæ tum toti, quum inter se similia erunt.



Sit triangulum ABC, rectum habens angulum in A, ex quo demittatur ab basim BC perpendicularis AD. Dico, perpendicularem istam

AD

AD dividere triangulum ABC in duo alia triangula ABD, ACD, quæ similia sunt, tum toti triangulo ABC, quum etiam inter se.

Quoniam enim in triangulis ABC, ABD anguli BAC, ADB sunt recti, itemque angulus B communis; erunt & reliqui anguli ACB, BAD etiam æquales inter se. Quare triangula ABC, ABD æquiangula erunt; atque adeò similia. Similiter, quia in triangulis ACB, ACD anguli BAC, ADC sunt recti, itemque angulus C communis; erunt & reliqui anguli ABC, CAD etiam æquales inter se: proindeque triangula ACB, ACD æquiangula erunt; atque adeò similia. Denique, quum in triangulis ADB, ADC ostensi sint æquales, tum anguli ABD, CAD, quum anguli BAD, ACD, sintque reliqui anguli ADB, ADC recti; erunt triangula ADB, ADC etiam æquiangula; atque adeò pariter similia inter se. Quare, si in triangulo rectangulo demittatur ex angulo recto ad basim perpendicularis, hæc dividet triangulum in duo alia triangula, quæ tum tòti, quum inter se similia erunt. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Hinc patet primò, unumquodque latus trianguli rectanguli medium esse proportionale inter hypothenusam, & segmentum, quod ei adjacet: nempe latus AB medium esse proportionale inter hypothenusam BC, & segmentum BD; latus verò AC medium esse proportionale inter hypothenusam BC, & segmentum CD. Quum enim triangula ABC, ABD ostensa sint æquiangula; habebunt latera circa æquales angulos proportiona-

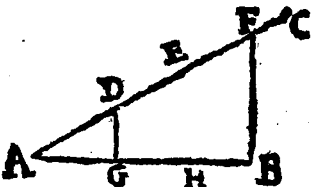
tionalia; eritque adeò, ut BC ad AB, ita AB ad AD. Atque ita quoque, quum ex ostensis æquiangula sint triangula ACB, ACD; erit ut BC ad AC, ita AC ad CD.

COROLLARIUM II.

Liquet secundò, demissam perpendicularem AD mediam esse proportionalem inter segmenta BD, CD. Triangula enim ADB, ADC ostensa sunt inter se æquiangula. Quare latera habebunt circum æquales angulos proportionalia. Et propterea erit, ut BD ad AD, ita AD ad CD.

PROP. IX. PROBL. I.

A data recta linea optatam partem abscindere.



Data sit recta AB. Oportet ab ea optatā quamvis partem, puta tertiā, abscindere.

Ex puncto A ducatur recta AC, quæ efficiat cum AB quemvis angulum BAC. Tum super AC capiantur tot partes æquales cujusvis magnitudinis, quota pars abscindenda est ex AB: nempe in proposito exemplo capiantur tres partes æquales, quæ sint AD, DE, EF. Denique, juncta BE, ei per punctum D pa-

D parallela (1) agatur DG. Dico, AG esse tertiam partem ipsius AB.

Quoniam enim in triangulo ABF ducta est recta DG parallela lateri BF; ea [2] secabit latera AB, AF proportionaliter in punctis G, & D; eritque propterea, ut AG ad GB, ita AD ad DF, sive etiam invertendo, ut GB ad AG, ita DF ad AD. Est autem componendo (3) ut AB ad AG, ita AF ad AD. Quare quemadmodum AF tripla est ipsius AD, ita & AB tripla erit ipsius AG. Ex data igitur recta AB abscissa est tertia pars AG. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

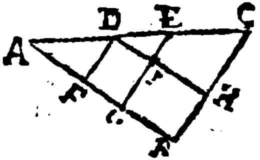
Quod, sit ex AB abscindenda sit portio, quæ sit ad AB, non ut unitas ad datum numerum, sed ut unus numerus ad alium, puta, ut 2 ad 3; tunc ducta similiter recta AC faciente cum AB angulum BAC, & sumptis adhuc super AC tribus portionibus æqualibus AD, DE, EF, ducenda erit per punctum E recta EH parallela ipsi BF. Nam quemadmodum AE ad AF est, ut 2 ad 3; ita in hac eadem ratione erit quoque AH ad AB.

PROP. X. PROBL. II.

Datam rectam lineam secare in partes proportionales partibus, in quas secta est alia data recta linea.

SIt recta AB insecta, AC verò secta in partes AD, DE, EC. Oportet, rectam AB

(1) *Prop.31.lib.5.* (2) *Prop.2.hujus.*
[3] *Prop.18.lib.5.*



AB secare in partes, quæ proportionales sint partibus AD, DE, EC.

Jungantur duæ datæ rectæ lineæ AB, AC ita, ut faciant angulum BAC, & à B ad C ducatur recta BC. Tum huic BC (1) parallelæ agantur DF, EG. Dico partes AF, FG, GB proportionales esse partibus AD, DE, EC.

Agatur enim per punctum D recta DH ipsi AB parallela. Et quoniam parallelogramma sunt DG, IB; erit (2) tum DI æqualis FG, cum IH æqualis GB: quare erit, ut DI ad IH [3] ita FG ad GB. Est autem (4) DI ad IH, ut DE ad EC. Erit igitur [5] ut FG ad GB ita DE ad EC. Et propterea partes FG, GB proportionales sunt partibus DE, EC. Sed partes AF, FG proportionales quoque sunt partibus AD, DE; quum sit ut AF ad FG, ita AD ad DE. Divisa est igitur AB in partes AF, FG, GB proportionales partibus AD, DE, EC, in quas secta est altera AC. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Hoc problema viam nobis aperit, dividendi datam rectam AB in quotcumque partes æqua-

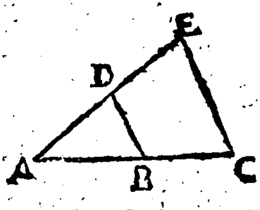
---

(1) *Prop.31.lib.1.* [2] *Prop.34.lib.1.*
(3) *Prop.7.lib.5.* [4] *Prop.2.hujus.*
(5) *Prop.11.lib.5.*

æquales. Si enim alteram ei adjungamus AC, facientem cum ipsa angulum BAC, super qua capiamus tot partes æquales AD, DE, EC, &c. in quot ipsa AB est dividenda; eò res redibit, ut dividamus AB in partes proportionales partibus AD, DE, EC, &c. Quod qua fiat ratione, jam in hoc problemate ostensum est.

PROP. XI. PROBL. III.

Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem invenire.



Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, BC. Oportet, invenire tertiam, ad quàm BC ita se habeat, quemadmodum est AB ad BC.

Datæ rectæ lineæ AB, BC disponantur in directum. Tum ipsi AC alia addatur AE, quæ faciat cum ea angulum CAE. Super AE porrò capiatur portio AD æqualis ipsi BC. Ac denique, juncta BD, huic per punctum C (1) parallela agatur CE, conveniens cum AE in puncto E. Dico, DE esse tertiam proportionalem quæsitam.

Quoniam enim in triangulo CAE ducta est recta BD parallela lateri CE; erit quidem (2) ut AB ad BC, ita AD ad DE. Est autem ex constructione AD æqualis BC. Quare erit, ut AB ad BC, ita BC ad DE.

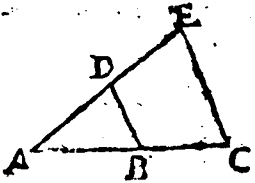
Da-

(1) *Prop.* 31 *lib.* 1. (2) *Prop.* 1. *hujus.*

Datis igitur duabus rectis lineis AB, BC inventa est tertia DE, ad quàm BC ita se habet, quemadmodum est AB ad BC. Quod erat faciendum.

PROP. XII. PROBL. IV.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenire.



Sint datæ tres rectæ lineæ, AB prima, BC secunda, AD tertia. Oportet, invenire quartam, ad quam AD ita se habeat, quemadmodū est AB ad BC.

Disponantur in directum duæ primæ AB, BC. Dum ipsi AG addatur tertia AD, quæ faciat cum ea angulum CAD. Jungatur porrò BD. Ac denique per punctum C ducatur [1] recta CE parallela ipsi BD, quæ conveniat cum AD in puncto E. Dico, DE esse quartam proportionalem quæsitam.

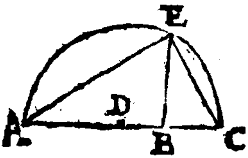
Quoniam enim in triangulo CAE ducta est recta BD parallela lateri CE; erit (2) ut AB ad BC, ita AD ad DE. Quare datis tribus rectis lineis AB, BC, AD inventa est quarta DE, ad quàm AD eamdem habet rationem, quàm AB ad BC. Quod erat faciendum.

PROP.

(1) *Prop. 31 lib. 1.* (2) *Prop. 2 hujus.*

PROP. XIII. PROBL. V.

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem invenire.



Datæ sint duæ rectæ AB, BC. Oportet, invenire mediã proportionalem, hoc est aliam rectam lineam, ad quam AB habeat eamdem rationem, quam ipsa habet ad BC.

Disponantur in directum duæ datæ rectæ lineæ AB, BC. Tum secta AC [1] bifariam in D, describatur centro D, & intervallo DA, seu DC semicirculus AEC. Ac denique ex puncto B erigatur perpendicularis BE (2), quæ occurrat circumferentiæ descripti semicirculi in E. Dico perpendicularem istam BE esse mediam proportionalem quæsitam.

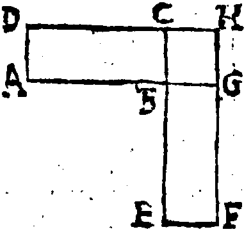
Jungantur enim rectæ AE, CE; & rectus erit [3] angulus AEC, velut in semicirculo existens. Unde, quum in triangulo rectangulo AEC ex angulo recto ad hypothenusam demissa sit perpendicularis EB; erit [4] ut AB ad BE, ita BE ad BC, Et propterea datis duabus rectis lineis AB, BC inventa est media proportionalis BE. Quod erat faciendum.

PROP.

(1) *Prop.10.lib.1.* (2) *Prop.11.lib.1.*
[3] *Prop.31.lib.3.* (4) *Coroll.2.prop.8.hujus.*

PROP. XIV. THEOR. IX.

Parallelogramma, quæ æqualia sunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciprocè proportionalia. Et vicissim parallelogramma, quæ circum æquales angulos latera habent reciprocè proportionalia, sunt etiam æqualia inter se.



Sint duo parallelogramma æqualia AC, BF, quæ habeant angulum ABC æqualē angulo EBG. Dico, eadem parallelogramma habere quoque latera circum æquales angulos reciprocè proportionalia, hoc est esse, ut AB ad BG, ita EB ad BC.

Conjungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut latera AB, BG jaceant in directum. Et quoniam æquales sunt anguli ABC, EBG; erunt [1] etiam in directum latera EB, BC. Extendantur denique DC, FG usquè donec conveniant in H, tertiumque constituant parallelogrammum BH.

Quia igitur parallelogramma AC, BF æqualia sunt inter se; erit (2) ut AC ad BH, ita BF ad BH. Sed AC est ad BH [3], ut AB

ad

[1] Pcol. prop. 15. lib. 1 [2] Prop. 7. lib. 1.
(3) Prop. 1. hujus.

ad BG; itemque BF est ad BH, ut EB ad BC. Quare erit [1] ut AB ad BG, ita EB ad BC.

Sed eadem parallelogramma AC, BF habeant per contrarium circa æquales angulos ABC, EBG latera reciprocè proportionalia: adeò nempe, ut AB sit ad BG, veluti est EB ad BC. Dico parallelogrammum AC æquale esse parallelogrammo BF.

Fiat enim eadem constructio; eritque ut AB ad BG, ita parallelogrammum AC ad parallelogrammum BH [2]; pariterque ut EB ad BC, ita parallelogrammum BF ad parallelogrammum BH. Est autem ex hypothesi, ut AB ad BG, ita EB ad BC. Quare erit [3] ut parallelogrammum AC ad parallelogrammum BH, ita parallelogrammum BF ad idem parallelogrammum BH. Et propterea, quum parallelogramma duo AC, BF habeant eamdem rationem ad tertium BH; erit (4) parallelogrammum AC æquale parallelogrammo BF.

Parallelogramma igitur, quæ æqualia sunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciprocè proportionalia. Et vicissim parallelogramma, quæ circum æquales angulos latera habent reciprocè proportionalia, sunt etiam æqualia inter se. Quod erat demonstrandum.

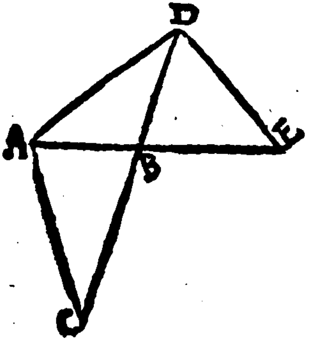
PROP. XV. THEOR. X.

Triangula, quæ æqualia sunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciprocè

P

(1) *Prop.*11.*lib.*5. [2] *Prop.*1.*hujus.*
[3] *Prop.*11.*lib.*5. [4] *Prop.*9.*lib.*5.

cè proportionalia. Et viciſſim triangula, quæ circum æquales angulos latera habent reciprocè proportionalia; ſunt etiam æqualia inter ſe.



Sint duo triãgula æqualia ABC, DBE, quæ habeant angulum ABC æqualē angulo DBE. Dico, eadem triangula habere quoque latera circum æquales angulos proportionalia reciprocè; hoc eſt eſſe, ut AB ad BE, ita DB ad BC.

Conjungantur triangula ad angulos æquales, ita ut latera AB, BE jaceant in directum. Et quoniam æquales ſunt anguli ABC, DBE; erunt [1] etiam in directum latera CB, BD. Denique jungatur AD ita ut oriatur tertium triangulum ABD.

Quia igitur triangula ABC, DBE æqualia ſunt inter ſe; erit (2) ut triangulum ABC ad triangulum ABD, ita triangulum DBE ad idem triangulum ABD. Sed triangulum ABC eſt ad triangulũ ABD, ut CB ad BD [3]; itemque triangulum DBE eſt ad triangulum ABD, ut EB ad BA. Quare erit (4) ut CB ad BD ita EB ad BA,

Sed

(1) *Sch. prop. 15 lib. 1.* [2] *Prop. 7 lib. 5.*
(3) *Prop. 1 hujus.* [4] *Prop. 11. lib. 5.*

Sed eadem triangula ABC, DBE habeant per contrarium circa æquales angulos ABC, DBE latera reciprocè proportionalia: adeò nempe, ut AB sit ad BE, veluti est DB ad BC. Dico, triangulum ABC æquale esse triangulo DBE.

Fiat enim eadem constructio; eritque ut AB ad BE, ita triangulum ABD ad triangulum DBE [1]; pariterque, ut DB ad BC, ita triangulum ABD ad triangulum ABC. Est autem ex hypothesi, ut AB ad BE, ita DE ad BC. Quare erit [2] ut triangulum ABD ad triangulum DBE, ita idem triangulũ ABD ad triangulum ABC. Et propterea, quum ad triangula ABC, DBE habeat eamdem rationem idem triangulum ABD; erit (3) triangulum ABC æquale triangulo DBE.

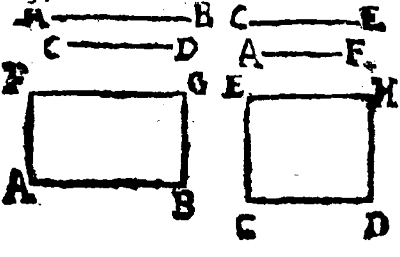
Triangula igitur, quæ æqualia sunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciprocè proportionalia. Et vicissim triangula, quæ circum æquales angulos latera habent reciprocè proportionalia, sunt etiam æqualia inter se, Quod erat demonstrandum.

PROP. XVI. THEOR. XI.

Si sint quatuor rectæ lineæ proportionales; erit rectangulum ex mediis æquale rectangulo ex extremis. Et vicissim, si rectangulum ex mediis æquale sit rectangulo ex extremis, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB prima, CD secunda, GE tertia, & AF quar-

(1) *Prop.1.hujus.* [2] *Prop.11.lib.5.*
(3) *Prop.9.lib.5.*



quarta ita nẽpe, ut AB sit ad CD, ut est CE ad AF. Dico, rectāgulum contentum sub mediis CD, CE æquale esse rectangulo contento sub extremis AB, AF. Esto enim AG rectangulum contentum sub extremis AB, AF, & CH rectangulũ contentum sub mediis CD, CE. Quia igitur AG, CH sunt duo parallelogrãma, quæ rectos habent angulos FAB, ECD, & in quibus AB est ad CD, ut CE ad AF; habebunt ea circum æquales angulos latera reciprocè proportionalia. Quare parallelogrammum AG æquale (1) erit parallelogrammo CH; hoc est rectangulum sub extremis AB, AF æquale erit rectangulo sub mediis CD, CE.

Sed vicissim sint æqualia inter se parallelogramma duo rectangula AG, CH. Dico, proportionales esse quatuor rectas lineas AB, CD, CE, AF; hoc est AB esse ad CD, ut est CE ad AF. Quoniam enim parallelogramma duo AG, CH sunt æqualia, & habent etiam angulos FAB, ECD rectos, adeòque æquales; habebunt quoque [2] latera circum æquales angulos reciprocè proportionalia. Quare erit, ut AB ad CD, ita EC ad AF.

Si igitur sint quatuor rectæ lineæ proportio-

(1) *Prop.* 14. *hujus.* [2] *Prop.* 14. *hujus.*

tionales; erit rectangulum ex mediis æquale rectangulo ex extremis. Et vicissim si rectangulum ex mediis æquale sit rectangulo ex extremis; quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I U M.

Vera est etiam hæc propositio, si parallelogramma facta ex mediis, & extremis non sint rectangula, sed utcumque æquiangula: dummodo tamen æquales sint anguli illi, qui sub ipsis rectis lineis continentur. Nam perspicuum est eamdem demonstrationem etiam in hoc casu sibi locum vindicare.

PROP. XVII. THEOR. XII.

Si sint tres rectæ lineæ proportionales; erit rectangulum ex extremis æquale quadrato, quod describitur à media. Et vicissim, si rectangulum ex extremis, æquale sit quadrato à media descripto; tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales, AB prima, CD secunda, AF tertia: ita nempe, ut AB sit ad CD, ut est CD ad AF. Dico, rectangulum AG contentum sub extremis AB, AF æquale esse quadrato CH descripto super media CD.

Quoniam enim AG, CH sunt duo parallelogramma, quæ rectos habent angulos FAB, ECD, & in quibus AB est ad CD, ut CE, seu CD ad AF; habebunt ea circum æquales angulos latera reciprocè proportionalia. Quare parallelogrammum AG (1) æquale erit parallelogrammo CH; hoc est rectangulum sub extremis AB, AF æquale erit quadrato,

(1) *Prop. 14. hujus.*

quod describitur à media CD.

Sed vicissim sit rectangulum AG contentum sub extremis AB, AF æquale quadrato CH, quod describitur à media CD. Dico, proportionales esse tres rectas lineas AB, CD, AF; hoc est AB esse ad CD, ut est CD ad AF.

Quoniam enim parallelogramma duo AG, CH sunt æqualia, & habent etiam angulos FAB, ECD rectos, adeòque æquales; habebunt quoque latera circum æquales angulos [1] reciprocè proportionalia. Quare erit, ut AB ad CD, ita CE ad AF. Est autem CH, quadratum descriptum ex CD; adeòque CE est æqualis CD. Erit igitur, ut AB ad CD, ita CD ad AF.

Si igitur sint tres rectæ lineæ proportionales; erit rectangulum ex extremis æquale quadrato, quod describitur à media; & vicissim, si rectangulum ex extremis æquale sit quadrato à media descripto; tres rectæ lineæ proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

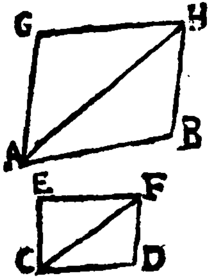
Vera est etiam hæc propositio, si parallelogrammum factum ex extremis, non sit rectangulum, sed utcumque obliquangulum; & à media non quadratum, sed rhomboides ei æquiangula describatur. Nam eamdem demonstrationem etiam in hoc casu sibi locum vindicare, nemo non videt

PROP. XVIII. PROBL. VI.

A data recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere.

Da-

[1] *Prop.* 14. *hujus.*



Data ſit recta linea AB, datum verò rectilineum CDEF. Oportet, ſuper AB deſcribere rectilineum, quod ſit ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineo dato CDEF.

Dividatur rectilineũ datum per rectam CF in duo triangula CDE, CEF. Deinde fiat angulus (1) ABH æqualis angulo CDF, & angulus BAH æqualis angulo DCF; coeantque rectæ AH, BH in H, ubi efficient angulum AHB æqualem angulo CFD; ipſumque adeò triangulum ABH æquiangulum erit triangulo CDF. Similiter autem fiat angulus GAH æqualis angulo ECF, & angulus AHG æqualis angulo CFE; coeantque rectæ AG, HG in G, ubi conſtituent angulum AGH æqualem angulo CEF; eritque adeò triangulum AGH æquiangulum triangulo CEF. Hoc facto, dico, rectilineum ABGH eſſe ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineo dato CDEF.

Quum enim ex conſtructione angulus BAH æqualis ſit angulo DCF, & angulus GAH æqualis angulo ECF; erit totus angulus BAG æqualis toti angulo DCE. Atque ita quoque, quia ex conſtructione angulus AHB æqualis eſt angulo CFD, & angulus AHG æqualis angulo CFE; erit totus angulus BHG æqualis toti angulo DFE. Eſt autem & angulus ABH

[1] *Prop. 23 lib. 1.*

æqualis angulo CDF, nec non angulus AGH æqualis angulo CEF. Quare rectilineum ABGH æquiangulum erit rectilineo CDEF.

Rursus, quum triangula ABH, CDF æquiangula sint, erit ut AB ad BH (1), ita CD ad DF; & ut BH ad HA, ita DF ad FC. Sed, propter triangula AGH, CEF similiter æquiangula, AH est ad GH, ut GF ad EF, & GH est ad GA, ut EF ad EC. Quare erit (2) ut BH ad GH, ita DG ad EF, & ut GA ad AB, ita QC ad CD. Unde, quum rectilinea duo ABGH, CDEF, non modo sint æquiangula, verum etiam latera habeant circum æquales angulos proportionalia; erunt ea similia, similiterque descripta. Et propterea super datam rectam AB descriptum est rectilineum ABGH simile, similiterque positum dato rectilineo CDEF. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

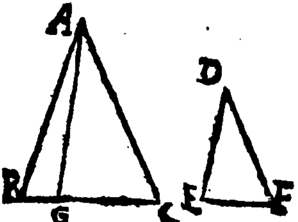
Nè Tyrones hìc hæreant, monendi sunt, quod duo rectilinea, super rectas duas descripta, dicantur à Geometris similia, similiterque posita, quando super ipsas rectas constituuntur anguli æquales, & reliqui æquales eodem semper ordine sese consequuntur: ita, ut & latera homologa ab iisdem rectis incipiant, eodemque quoque ordine semper subsequantur. Cæterùm, si datum rectilineum contineat plura latera, quàm quatuor; tunc ex aliquo ejus angulo ad omnes angulos oppositos ducendæ sunt totidem rectæ lineæ. Nam, quum adhuc

[1] *Prop.4.hujus.* [2] *Prop.22.lib.5.*

adhuc rectilineum in plura triangula divisum oriatur; fiet problemati satis, si singulis illis triangulis alia æquiangula totidem eadem ordine disposita describantur.

PROP. XIX. THEOR. XIII.

Triangula similia sunt inter se in ratione duplicata laterum homologorum.



Sint ABC, DEF duo triangula similia, quæ nempe habeant angulum ABC æqualem angulo DEF, angulū BCA æqualem angulo EFD, & angulum CAB æqualem angulo FDE, & in quibus sit etiam ut AB ad BC, ita DE ad EF; ut BC ad CA, ita EF ad FD; & ut CA ad AB, ita FD ad DE. Dico, triangula ABC, DEF habere inter se rationem duplicatam ejus, quam habent latera homologa BC, EF.

Ponatur enim BG (1) tertia proportionalis in ordine duarum BC, EF: adeò nempe, ut BC sit ad EF ut est EF ad BG; jungaturque AG. Et quoniam AB est ad BC, ut DE, ad EF; erit (2) permutando, ut AB ad DE, ita BC ad EF. Est autem ex constructione ut BC ad EF, ita EF ad BG. Quare erit, ut AB ad DE, ita EF ad BG (3). Et propterea, quum duo triangula ABG, DEF habeant la-

[1] *Prop.11.hujus.* [2] *Prop.16.lib.5.*
(3) *Prop.11 lib.5.*

tera circum æquales angulos reciprocè proportionalia, erit triangulum ABG [1] æquale triangulo DEF.

Jam triangula ABC, ABG habent eamdem altitudinem. Quare erit (2) ut triangulum ABC ad triangulum ABG; ita basis BC ad basim BG. Ostensum est autem triangulum ABG æquale triangulo DEF. Erit igitur quoque, ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita BC ad BG. Sed, ob rectas BC, EF, BG in continua proportione existentes, ratio, quam habet BC ad BG, duplicata est ejus, quam habet BC ad EF. Quare triangulum ABC ad triangulum DEF [3] erit etiam in duplicata ratione ejus, quam habet BC ad EF. Similia igitur triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

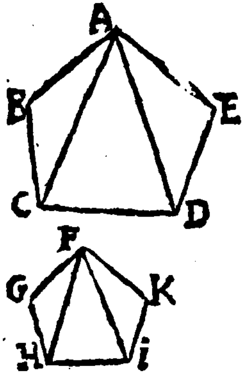
Patet hinc, quod si tres rectæ lineæ fuerint proportionales; triangula similia, similiterque descripta super primam, & secundam habere inter se eamdem rationem, quam habet prima ad tertiam. Tres etenim rectæ lineæ BC, EF, BG sunt proportionales ex constructione: & ostensum est in hoc theoremate triangulum ABC esse ad triangulum DEF, ut est BC ad BG.

PROP. XX. THEOR. XIV.

Polygona similia dividuntur in triangula numero æqualia similia, & homologa totis; duplicatamq; habent rationem laterũ homologorum.

SInt ABCDE, FGHIK duo polygona similia, habentia angulum ABC æqualem angulo

(1) *Prop.27.hujus* [2] *Prop.30.hujus.*
(3) *Prop.4.lib.1.*

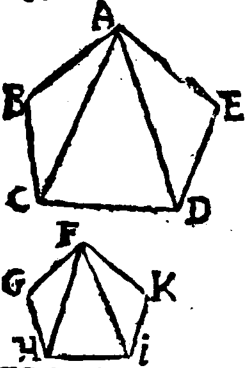


gulo FGH, angulum BCD æquale angulo GHI, atque ita deinceps; & in quibus AB sit ad BC, ut FG ad GH; BC sit ad CD, ut GH ad HI; atque ita de aliis. Dico primo, polygona ista dividi in triangula numero æqualia.

Ex punctis enim A, & F, in quibus consistunt anguli æquales BAE, GFK, ducantur ad angulos oppositos rectæ totidem. Et quoniam, propter similitudinem polygonorum, quot anguli in polygono ABCDE oppositi sunt anguloBAE totidem in polygono FGHIK opponuntur angulo GFK, fiet hinc, ut si in uno duci possint ex puncto A duæ rectæ AC, AD, in altero ex puncto F duæ etiam FH,FI duci queant & non plures; & propterea, quemadmodum polygonum ABCDE per ductas rectas scinditur in tria triangula ABC, ACD, ADE; ita quoque polygonum FGHIKper ductas rectas dividetur in tria, & non plura triangula, quæ erunt FGH, FHI, FIK.

Dico secundò, triangula ista esse similia inter se; hoc est triangulum ABC simile triangulo FGH, triangulum ACD simile triangulo FHI, & triangulum ADE simile triangulo FIK.

Nam in triangulis ABC,FGH ex hypothesi



angulus ABC æqualis est angulo FGH, & latera AB, BC proportionalia sūt lateribus FG, GH. Quare, quū ea habeant unū angulū uni angulo æqualē, & latera circum æquales angulos proportionalia; habebūt quoque reliquos angulos BAC, BCA æquales reliquis GFH, GHF; & ipsa adeò triangula ABC, FGH similia erunt inter se [1]. Simili ratione ostendentur similia triangula ADE, FIK; quum habeant ex hypothesi angulum DEA æqualem angulo IKF, & latera DE, EA proportionalia lateribus IK, KF: propter quorum triangulorum similitudinem erit angulus DAE æqualis angulo IFK, & angulus ADE æqualis angulo FIK. Quum autem anguli BCD, CDE ex hypothesi æquales sint angulis GHI, HIK, & anguli ACB, ADE ostensi sint æquales angulis FHG, FIK; erunt reliqui anguli ACD, ADC æquales reliquis angulis FHI, FIH. Quare triangula ACD, FHI æquiangula erunt, habebuntque latera circum æquales angulos proportionalia, atque adeò similia (2) erunt inter se.

Dico tertiò, triangula ista esse homologa polygonis totis; hoc est, quodlibet triangulorum unius polygoni esse ad triangulum sibi correspondens alterius polygoni, ut est pri-

(1) *Prop.6.hujus.* (2) *Prop.4.hujus.*

primum polygonum ad ſecundum.

Quum enim triangula ABC, FGH oſtenſa ſint ſimilia inter ſe; erit (1) triangulum ABC ad triangulum FGH in duplicata ratione laterum homologorum AC, FH. Et ſimiliter, quia ex oſtenſis ſimilia ſunt triangula ACD, FHI; erit triangulum ACD ad triangulum FHI in duplicata ratione eorundem laterum homologorum AC, FH. Quare erit (2) ut triangulum ABC ad triangulum FGH, ita triangulum ACD ad triangulum FHI. Non diſſimili autem ratione oſtendetur, triangulum ACD eſſe ad triangulum FHI, ut eſt triangulum ADE ad triangulum FIK. Erunt igitur triangula unius polygoni proportionalia trianguliis alterius: ita quidem, ut triangula unius ſint antecedentia, triangula alterius conſequentia. Jam verò, ſi fuerint quotcumque magnitudines, quotcumque magnitudinibus proportionales, ut eſt una antecedentium ad unam conſequentium, ita ſunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes [3]. Erit igitur, ut quodlibet triangulum polygoni ABCDE ad correſpondens ſibi triangulum polygoni FGHIK, ita polygonum ABCDE ad polygonum FGHIK.

Dico denique, polygona ipſa habere inter ſe duplicatam rationem ejus, quam habent inter ſe duo ipſorum latera homologa AB, FG.

Oſtenſum eſt enim, polygonum ABCDE eſſe

[1] *Prop.19.hujus.*
(2) *Prop.11.lib.5.*
(3) *Prop.12.lib.5.*

eſse ad polygonum FGHIK, ut eſt triangulũ ABC ad triangulum FGH. Sunt autem ex oſtenſis triangula ABC, FGH ſimilia inter ſe; atque adeò triangulum ABC eſt ad triangulum FGH in duplicata ratione laterum homologorum AB, FG. Quare in eadem duplicata ratione erit etiam polygonum ABCDE ad polygonum FGHIK. Et propterea polygona ſimilia, non modò dividuntur in triangula numero æqualia, ſimilia, & homologa totis, verùm etiam duplicatam habent rationem laterum homologorum. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

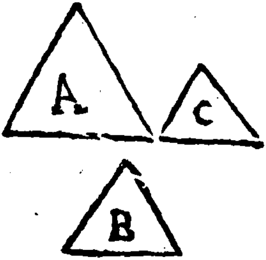
Atque hinc modò patet, quod ſi fuerint tres rectæ lineæ proportionales, polygona ſimilia, ſimiliterque deſcripta ſuper primam, & ſecundam habeant inter ſe eamdem rationem, quam prima habet ad tertiam. Sunt enim per hoc theorema in duplicata ratione ejus, quæ eſt inter primam, & ſecundam. Sed in hac eadem duplicata ratione eſt etiam prima ad tertiam; quum tres rectæ lineæ ponantur proportionales: Quare & ipſa polygona erunt inter ſe, ut prima ad tertiam.

PROP. XXI. THEOR. XV.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſimilia ſunt.

EIdem rectilineo A ſimile ſit tam rectilineum B, quam rectilineum C. Dico, rectilinea B, & C ſimilia eſse inter ſe.

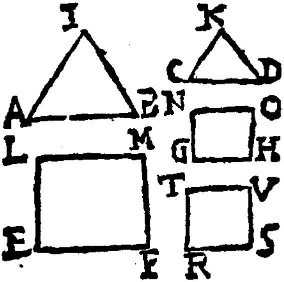
Quum enim, propter ſimilitudinem, angulis rectilinei A æquales ſint tum anguli rectilinei B, cum anguli rectilinei C; erunt anguli rectilinei B æquales angulis rectilinei C. Et rurſus, quia, ob eamdem ſimilitudinem,



dinem, lateribus rectilinei A proportionalia sunt, tum latera rectilinei B, cùm latera rectilinei C; erunt [1] latera rectilinei B proportionalia lateribus rectilinei C. Unde, quum duo rectilinea B, & C sint æquiangula, habeantque latera circum æquales angulos proportionalia; similia ea erunt inter se. Et propterea, quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt. Quod erat demonstrandum.

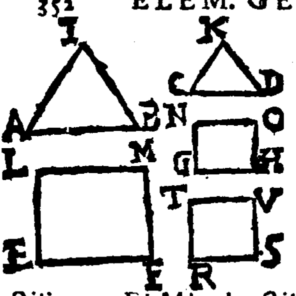
PROP. XXII. THEOR. XVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; erunt rectilinea similia, similiterq; ab eis descripta etiam proportionalia. Et vicissim, si rectilinea proportionalia sunt; ipsæ rectæ lineæ etiam proportionales erunt.



Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B prima, C D secunda, E F tertia, G H quarta. Describantur autem super primam, & secundā duo quæcumque rectilinea AIB, CKD simi-

(1) *Prop. 11 lib. 5.*



similia, similiterque posita; & alia duo ELMF, GNOH itidem similia, similiterque posita super tertiam, & quartam. Dico, rectilineum AIB esse ad rectilineum CKD, ut est rectilineum ELMF ad rectilineum GNOH.

Inveniatur enim, tum rectis AB, CD tertia proportionalis, quæ dicatur P, cùm rectis EF, GH tertia proportionalis, quæ dicatur Q (1). Erit igitur, ut AB ad CD, ita CD ad P; & ut EF ad GH, ita GH ad Q. Est autem ex hypothesi, ut AB ad CD, ita EF ad GH. Quare erit etiam [2] ut CD ad P, ita GH ad Q; atque adeò ex æquali ordinando (3) erit ut AB ad P, ita EF ad Q. Jam verò rectilineum AIB est ad rectilineũ CKD, ut AB ad P (4); itemque rectilineum ELMF est ad rectilineum GNOH, ut EF ad Q. Quare erit (5) ut rectilineum AIB ad rectilineum CKD, ita rectilineum ELMF ad rectilineum GNOH.

Per contrarium autem ponantur proportionalia quatuor rectilinea similia, similiterque descripta à rectis AB, CD, EF, GH. Dico, rectas istas etiam inter se proportionales esse; adeò nempe, ut AB sit ad CD, veluti est EF ad GH. In-

(1) *Prop. 11. hujus.* (2) *Prop. 11. lib. 5.*
(3) *Prop. 22. lib. 5.* (4) *Corol. prop. 20. hujus.*
(5) *Prop. 11. lib. 5.*

Inveniatur enim tribus rectis lineis AB, CD, EF quarta proportionalis RS (1), super quam describatur rectilineum RTVS simile, similiterque positum rectilineo ELMF [2]. Et quoniam AB est ad CD, ut EF ad RS; per ea, quæ jam ostensa sunt, erit ut rectilineum AIB ad rectilineum CKD, ita rectilineum ELMF ad rectilineum RTVS. Ex hypothesi autem, ut est rectilineum AIB ad rectilineum CKD, ita est rectilineum ELMF ad rectilineum GNOH. Erit igitur, ut rectilineum ELMF ad rectilineum RTVS (3), ita idem rectilineum ELMF ad rectilineum GNOH: proindeque rectilinea duo RTVS, GNOH æqualia erunt inter se (4). Sunt autem duo ista rectilinea similia, similiterque descripta à rectis RS, GH; quum utrumque sit simile, similiterque positum rectilineo ELMF, descripto à recta EF. Quare æquales quoque erunt rectæ RS, GH. Et propterea, quum sit AB ad CD, ut EF ad RS; erit etiam AB ad CD, ut EF ad GH.

Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; erunt rectilinea similia, similiterque ab eis descripta etiam proportionalia. Et vicissim, si rectilinea proportionalia sunt; ipsæ rectæ lineæ etiam proportionales erunt. Quod ostendere oportebat.

SCHOLIUM.

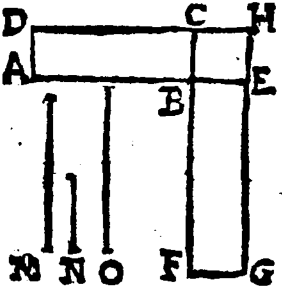
Quod autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, æqualia sunt RTVS, GNOH, consistant super rectas æquales RS, GH, ostendetur in hunc modum. Quoniam enim duo illa

(1) *Prop.12.hujus.* [2] *Prop.18.hujus.*
(3) *Prop.11.lib.5.* (4) *Prop.9.lib.5.*

la rectilinea sunt similia, similiterque descripta à rectis RS, GH; erunt ea inter se in duplicata ratione ipsarum RS, GH. Sed ratio rectilineorum est æqualitatis; quum eadem rectilinea ponantur etiam æqualia. Quare duplicata ratio rectarum RS, GH pariter æqualitatis erit: quod fieri non potest, nisi ipsæ rectæ RS, GH fuerint æquales.

PROP. XXIII. THEOR. XVII.

Parallelogramma æquiangula habent inter se rationem ex lateribus compositam.



Sint parallelogramma duo AC, BG, quæ habeant angulum ABC æqualem angulo EBF. Dico, eam habere rationem inter se duo ista parallelogramma, quæ componitur ex lateribus eorundem, hoc est ex AB ad BE, & ex CB ad BF.

Conjungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut AB, BE jaceant in directum. Et quoniam æquales sunt anguli ABC, EBF; erunt etiam (1) in directum rectæ CB, BF. Producantur deinde latera DC, GE usque donec conveniant in H, & constituant tertium parallelogrammum BH.

Sumatur jam recta quælibet M; & fiat [2], ut AB ad BE, ita M ad N; itemque ut CB ad BF, ita N ad O. Quia igitur AC est ad BH, ut

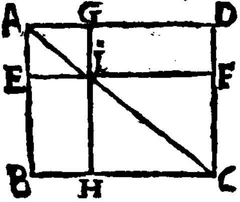
[1] *Sch. Prop.* 15 *lib.* 1. (2) *Prop.* 12 *hujus.*

ut AB ad BE; & AB est ad BE, ut M ad N: erit (1) ut AC ad BH, ita M ad N. Rursus quia BH est ad BG, ut CB ad BF; & CB est ad BF, ut N ad O: erit, ut BH ad BG, ita N ad O.

Et quoniam AC est ad BH, ut M ad N; & BH est ad BG, ut N ad O: erit ex æquali ordinando [2], ut AC ad BG, ita M ad O. Jam verò M est ad O in ratione composita ex M ad N, & ex N ad O; sivè etiam in ratione composita ex AB ad BE, & ex CB ad BF, quare AC ad BG (3) erit etiam in ratione composita ex AB ad BE, & ex CB ad BF. Et propterea parallelogramma æquiangula habent inter se rationem ex lateribus compositam. Quod erat ostendendum.

PROP. XXIV. THEOR. XVIII.

Parallelogramma, quæ sunt circa diametrum alterius, cum toti, cum inter se similia sunt.



Sit parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet ejus punctum I agantur rectæ EF, GH parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico, parallelogramma circa diametrum EG, FH, similia esse, cum toti BD, cum etiam inter se.

Quoniam enim rectæ EF, BC sunt parallelæ; erit (4) angulus exterior AEI æqualis interiori, & opposito ad eamdem partem ABC. Pariterque, quia rectæ GH, DC sunt pa-

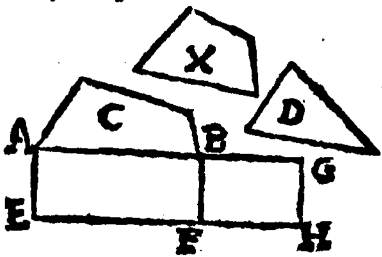
(1) *Prop.11.lib.5.* (2) *Prop 22.lib.5.*
(3) *Prop.11.lib.5.* (4) *Prop.29.hujus.*

parallelæ; erit angulus exterior AGI æqualis interiori, & opposito ad eamdem partem ADC. Unde, quum duo parallelogramma EG, BD habeant communem angulum A & præterea duos alios angulos æquales duobus aliis angulis, alterum alteri; habebunt quoque quartum æqualem quarto. Et propterea æquiangula erunt inter se. Sed habent etiam latera circum æquales angulos proportionalia, quam sit [1] ut AB ad EI, ita AB ad BC; & ut AG ad GI, ita AD ad DC. Quare parallelogramma duo EG, BD similia erunt inter se.

Eadem ratione ostendetur, parallelogrammum FH esse etiam simile parallelogrammo BD. Sed quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se (2) similia sunt. Quare parallelogramma EG, FH etiam similia erunt inter se. Et propterea parallelogramma, quæ sunt circa diametrum alterius, cum toti, tum inter se similia sunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXV. PROBL. VII.

Rectilineum constituere, quod sit simile uni dato, & æquale alteri dato.



Data sint duo rectilinea C, & D. Oportet, constituere tertium, quod simile quidem sit ipsi C, æqua-

(1) *Prop. 2. huius.* (2) *Prop. 21. hujus.*

æquale verò alteri D.

Super AB unum latus rectilinei C (1) constituatur parallelogrammum AF in quovis angulo, æquale ipsi rectilineo C. Et super BF constituatur aliud parallelogrammum BH, æquale alteri rectilineo D, quod tamen habeat angulum FBG æqualem angulo EAB. Inveniatur deinde inter AB, & EG (2) media proportionalis X, super quam constituatur rectilineum X (3) simile, similiterque positum ipsi C. Dico X esse rectilineum quæsitum.

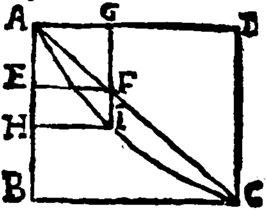
Quum enim rectæ AB; X, BG sint proportionales, erit rectilineumC ad rectilineum X (4), ut AB ad BG. Sed AB est ad BG [5], ut parallelogrammum AF ad parallologrammum BH, sive etiam ut rectilineum C ad rectilineum D. Quare erit (6) ut rectilineum C ad rectilineum X, ita idem rectilineum C ad rectilineum D. Et propterea rectilineum X æquale erit (7) rectilineo D. Est autẽ idem rectilineum X simile ipsi C. Datis igitur duobus rectilineis C, & D, constitutum est tertium X, simile quidem ipsi C, æquale verò ipsi D. Quod erat faciendum.

PROP. XXVI. THEOR. XIX.

Si ex parallelogrammo aliud auferatur, quod communem cum eo angulum habens, sit eidem simile, similiterque positum; consistet etiam cum illo circa eamdem diagonalem.

SIt parallelogrammum ABCD, ex quo auferatur aliud parallelogrammum AEFG, quod

(1) *Prop.13.hujus.* (2) *Prop.18.hujus.*
(3) *Coroll.prop.20.hujus.* [4] *Prop.1. hujus.*
(5) *Prop.11 lib.5.* (6) *Prop.9.lib.5.*



quod habens cum eo communem angulum A, sit eidem simile, similiterque positum, Dico, ablatum parallelogrammum EG consistere circa eamdem diagonalem cum toto BD.

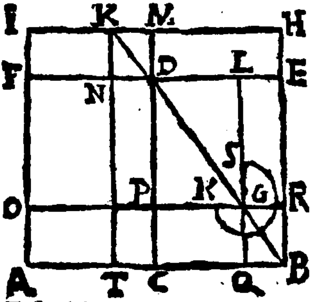
Sit enim AC diagonalis ipsius BD, quæ si non transeat per punctum F, secet latus GF, productum si opus in I, ex quo ducatur (1) IH ipsi EF parallela. Et quoniam BD, HG sunt parallelogramma, quæ consistunt circa eamdem diametrum AIC; erunt ea (2) similia similiterque posita inter se. Sed eidem parallelogrammo BD est etiam ex hypothesi simile, similiterque positum parallelogrammum EG. Quare parallelogramma duo EG, HG erunt similia (3) similiterque posita inter se. Et propterea erit, ut AG ad AE, ita AG ad AH: undè sequitur (4) AE, AH æquales esse inter se: quod est absurdum. Non igitur diagonalis AC transit per aliud punctum, quam F: & proinde si ex parallelogrammo aliud auferatur, quod communem cum eo angulum habens, sit eidem simile, similiterque positum; consistet etiam cum illo circa eamdem diagonalem. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXVII. THEOR. XX.

Omnium parallelogrammorum, quæ ad eamdem

[1] *Prop.3. lib.1.* [2] *Prop.24. hujus.*
[3] *Prop.21. hujus.* [4] *Prop.9. lib.3.*

dem rectam applicata, deficiunt parallelogrammis alicui dato similibus, maximum est illud, quod applicatur super dimidiam.



Detur recta AB, & intelligatur mente parallelogrammũ aliquod Z. Dico, omnium parallelogrammorum, quæ applicata ad rectam AB deficiunt parallelogrammis ipsi Z similibus, maximum esse illud, quod applicatur super dimidiam ipsius AB.

Secetur enim recta AB bifariam in C, & super BC constituatur parallelogrammum BCED simile ipsi Z. Ducatur deinde in hoc parallelogrammo diagonalis BD, per cujus, etiam si vis productæ, punctũ aliquod G, vel K ducantur rectæ OR, LQ, IH, KT, ipsis AB, BE parallelæ; eritque tum parallelogrammum BRGQ quum parallelogrammum BHKT simile quoque ipsi Z, quum sint circa eamdem diagonalem parallelogrammi BCDE. Quocirca, si compleantur parallelogramma duo AG, AK; ambo applicata ad eamdem rectam AB, ea deficient parallelogrammis similibus dato Z: proindeque eo res redit, ut ostendamus parallelogramma AG, AK majora esse parallelogrammo AD.

Et quidem, quum punctum G est in ipsa diagonali BD, ostendetur id in hunc modum.

Quo-

Quoniam CG est æquale [1] GE; apposito communi QR, erit CR æquale QE. Est autem CR [2] æquale AP, quum sint parallelogramma duo in æqualibus basibus, & in iisdem parallelis constituta. Quare erit AP æquale QE. Et propterea apposito rursus communi CG, erit AG æquale gnomoni KGS. Sed AD est æquale CE, quod majus est gnomone KGS. Quare erit AD majus quoque, quàm AG.

Quotiescumque verò punctum K est in diagonali producta, idem ostenditur hoc pacto. Producatur DE usque donec cum AI in F conveniat. Et quoniam AC est æqualis CB, erit etiam FD æqualis DE; & propterea parallelogramma duo FM, DH inter se æqualia erunt. Est autem DH æquale DT; quum sint supplementa in parallelogrammo TH. Quare erit FM æquale DT; atque adeo DT majus, quam Fk: Unde addito communi AN, erit AD majus quoque quam Ak.

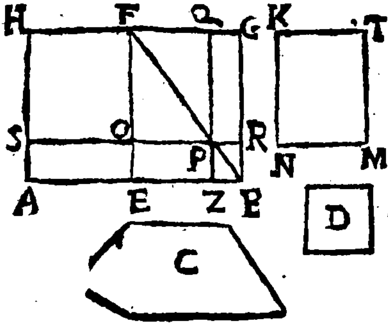
Omnium itaque parallelogrammorum, quæ ad eamdem rectam lineam applicata deficiũt parallelogrammis alicui dato similibus, maximum est illud, quod applicatur super dimidiam. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXVIII. PROBL. VIII.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens parallelogrammo, quod alteri dato sit simile. Oportet autem, ut datum rectilineum non majus sit eo parallelogrammo, quod applicatum super dimidiam datæ rectæ lineæ, deficit parallelogrammo, quod eidem dato sit simile.

Data

(1) *Prop.43.lib.1.* [2] *Prop.36.lib.1.*



Data ſit recta AB, datum rectilineum C, & datũ parallelogrammũ D. Sit autem rectilineum C non majus parallelogrãmo AF quod applicatum ſuper AE dimidiam ipſius AB, deficiat parallelogrammum EG, ſimili dato D. Oportet, ſuper AB applicare parallelogrammum æquale dato rectilineo C, & deficiens parallelogrammo alio, quod ſit ſimile dato D, vel etiam ipſi EG.

Quoniam enim datum rectilineum C non eſt majus parallelogrammo AF; proinde erit, vel ei æquale, vel eodem minus. Itaque, ſi rectilineum C ſit æquale parallelogrammo AF, quia idem eſt applicatum ſuper rectam AB, & deficit parallelogrammo EG, quod eſt ſimile dato D; erit AF parallelogrammum quæſitum. Quod ſi verò rectilineum C minus ſit parallelogrammo AF, inveniatur iſtius ſuper illud exceſſus, qui vocetur X. Tum conſtituatur parallelogrammum KLMN (1) æquale exceſſui invento X, & ſimile ipſi D, vel EG: ita, ut propter ſimilitudinem ſit, ut EF ad FG, ita NK ad KL. Abſcindantur de-

(1) *Prop.25.hujus.*

inde (1) ex EF, & EG portiones OF, FQ æquales ipsis NK, KL; & completo parallelogrammo OFQP, erit hoc æquale parallelogrammo superius constituto KLMN, itemque simile, similiterque positum ipsi EG: quare cum eodem EG (2) consistet etiam circa eamdem diametrum BF. Denique producatur tum recta PO in directum versus R, & S cum recta QP in directum versus Z. Et dico, AZPS esse parallelogrammum quæsitum.

Nam, quòd ita sit applicatum super rectam AB, ut deficiat parallelogrammo simili dato D; id quidem patet. Est enim ejus defectus parallelogrammum ZR, quod est simile [3], similiterque positum ipsi EG, quum consistant circa eamdem diametrum BF. Quod vero sit æquale dato rectilineo C, id ostendetur in hunc modum. Quoniam parallelogrammum OQ, velut æquale ipsi NL, seu X, est excessus, quo paralellogrammum AF, seu EG superat datum rectilineum C; erit Gnomon reliquus ipsi C æqualis. Sed, propter æqualitatem supplementorum PE, PG, est BO, seu AO æquale BQ; atque adeo AP æquale gnomoni. Quare erit parallelogrammum AP æquale rectilineo C. Et propterea ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicatum est, deficiens parallelogrammo simili alteri dato. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Conditio illa, ut datum rectilineum non sit ma-

[1] *Prop.31.lib.1.* [2] *Prop.26.hujus.*
(3) *Prop.24.hujus.*

majus eo parallelogrammo, quod applicatum super dimidiam datæ rectæ lineæ, deficit parallelogrammo simili eidem dato, non est frustra ab Euclide apposita. Quum enim per propositionem præcedentem ejusmodi parallelogrammum sit maximum omnium applicatorum, dummodo defectus sint similes; perspicuum est ad datam rectam lineam non posse ullum applicari, quod æquale sit dato rectilineo, sed omnia minora fore.

SCHOLIUM.

Excessus duorum rectilineorum facilè invenietur, si super eamdem rectam lineam, ad eamdem partem, & ad eumdem angulum constituantur per propositionem quadragesimam quintam libri primi parallelogramma duo æqualia datis rectilineis; nam excessus horum parallelogrammorum, qui ex ipsa constructione habetur, erit etiam excessus rectilineorum.

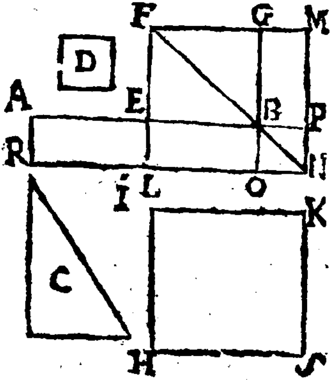
PROP. XXIX. PROBL. IX.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens parallelogrammo, quod alteri dato sit simile.

DAta sit recta AB, datum rectilineum C, & datum parallelogrammum D. Oportet, super AB applicare parallelogrammum, æquale dato rectilineo C, excedens parallelogrammo alio, quod sit simile ipsi D.

Secetur AB bifariam in E, & super EB (1) constituatur parallelogrammum EG, simile ipsi D. Tum addantur in unum, datum rectilineum C, & constitutum parallelogrammum EG, voceturque X summa ipsorum. Fiat deinde parallelogrammum IKSH

(1) *Prop.* 18. *hujus.*



(1) æquale ipsi X, & simile, similiterque positum ipsi D, vel EG: ita ut propter similitudinem sit, ut EF ad FG, ita IH ad IK. Producantur porro rectæ FE, FG, usque ad L, & M, ita ut FL, FM æquales fiant ipsis IH, IK: & completo parallelogrammo FLNM, erit hoc æquale parallelogrammo superius constituto IKHS, itemque simile, similiterque positum ipsi EG: quare cum eodem EG (2) consistet etiam circa eamdem diametrum BF. Denique extendatur AB versus P, NL versus R, ducaturque AR., ipsi FL parallela. Et dico, ARPN esse logrammum quæsitum.

Nam, quod ita sit applicatum super rectam AB, ut excedat parallelogrammo simili dato D; id quidem patet. Est enim ejus excessus parallelogrammum OP, quod est simile, similiterque positum [4] ipsi EG, quum sint circa eamdem diagonalem BF. Quod verò sit æquale dato rectilineo C; id ostendetur in hunc modum. Quoniam paralellogrammum

[1] *Prop.18.hujus.* (2) *Prop.25.hujus.*
[3] *Prop.26.hujus.* (4) *Prop.24.hujus.*

mum LM, velut æquale ipsi HK, seu X, est summa rectilinei C, & parallelogrammi EG; dempto communi parallelogrammo EG, erit gnomon reliquus æqualis rectilineo C. Sed, quum BM sit æquale ipsi BL, seu AL, erit idem gnomon æquale parallelogrammo AN. Quare erit parallelogrammum AN æquale rectilineo C. Et propterea ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicatum est, excedens parallelogrammo simili alteri dato. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Summa duorum rectilineorum facile invenietur, si super eamdem rectam lineam ad contrarias partes in angulis, qui simul duobus rectis sint æquales, constituantur per propositionem quadragesimam quintam libri primi parallelogramma duo æqualia datis rectilineis. Nam summa horum parallelogrammorum, quæ ex ipsa constructione habetur, erit etiam summa rectilineorum.

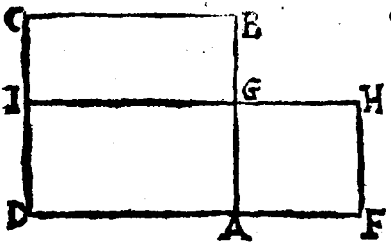
PROP. XXX. PROBL. X.

Datam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione dividere.

DAta sit recta terminata AB. Oportet, eam extrema, ac media ratione dividere; hoc est ea lege, ut tota recta linea sit ad majus segmentum, ut est majus segmentum ad minus.

Describatur super AB (1) quadratum ABCD. Tum super rectam AD [2] constituatur parallelogrammum DH, æquale quadrato AC, & excedens alia figura quadrata AH. Dico, re-

(1) *Prop. 46 lib. 1.* (2) *Prop. 29 hujus.*



ctam AB sectã esse extrema, ac media ratione in puncto H.

Quum enim ex constructione æqualia sint DH, AC; ablato communi DG, erit AH æquale CG. Est autem AF quadratum ex AG, itemque CG rectangulum ex AB in BG. Quare erit rectangulum ex AB in BG æquale quadrato ex AG; & propterea, quum sit [1] ut AB ad AG, ita AG ad BG, erit recta AB secta extrema, ac media ratione in puncto G. Data igitur recta linea divisa est extrema, ac media ratione. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

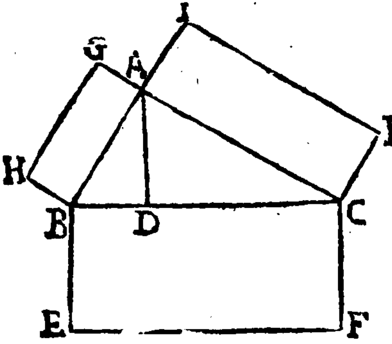
Ejusdem problematis solutio potest etiam haberi per undecimam secundi. Nempe, si data recta AB subinde dividatur in G, ut rectangulum, quod fit ex tota AB, & parte una BG, sit æquale quadrato alterius partis AG. Nam erit rursus, ut AB ad AG, ita AG ad BG.

PROP. XXXI. THEOR. XXI.

In triangulis rectangulis figura quævis, à latere rectum angulum subtendente descripta æqualis erit figuris, quæ illi similes, & similiter positæ, describuntur à lateribus, rectum angulum continentibus.

Sit

[1] *Prop. 17. hujus.*



Sit triãgulum A b C rectangulũ in A, super cujus lateribus describantur figuræ totidem similes, similiterque positæ inter se. Dico, figuram descriptam super B C æqualem esse figuris descriptis super A B, AC.

Nam propter similitudinem figurarum, figura descripta super B C est ad figuram descriptam super A B in duplicata ratione laterum BC, AB [1]. Sed quadrata ex iisdem lateribus, quum sint etiam similia inter se, sunt in eadem duplicata ratione. Quare erit [2] ut figura descripta super BC ad figuram descriptam super AB, ita quadratum ex BC ad quadratum ex AB.

Simili ratione ostendetur, figuram descriptam super B C esse ad figuram descriptam super AC, ut est quadratum ex B C ad quadratum ex A C. Quare erit [3] ut figura descripta super B C ad figuras descriptas super AB, AC, ita quadratum ex BC ad quadrata ex AB, AC, Est autem quadratum ex BC æquale qua-

(1) *Prop.20.hujus.* (2) *Prop.11.lib.5.*
(3) *Prop.24.lib.5.*

quadratis [1], quæ fiunt ex AB, AC. Quare figura descripta super BC figuris descriptis super AB, AC etiam æqualis erit.

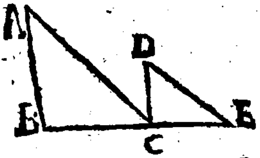
In triangulis itaque rectangulis figura quævis, à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis erit figuris, quæ illi similes, ac similiter positæ describuntur à lateribus rectum angulum continentibus. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Hoc theorema est longe universalius eo, quod in penultima primi continetur. Illud enim solo quadrata includit, hoc autem ad omnes figuras similes, similiterque descriptas se extendit. Sed quemadmodum in illo obtinet etiam conversum, quod ostensum est in ultima primi; sic & istud quoque converti poterit: nec dissimilis à converso illius erit ejus demonstratio.

PROP. XXXII. THEOR. XXII.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus proportionalia, & composita ad eumdem angulum habeant quoque latera homologa parallela; reliqua eorum latera in directum erunt.



Sint duo triangula ABC, DCE habentia latera AB, AC proportionalia lateribus DC, DE: ita quidem, ut AB sit ad AC, ut DC ad DE. Componantur triangula ista ad angulum ACD, & sic composita, habeant quoque latera homologa parallela. Dico, reliqua ipsorum latera BC, CE in directum esse. Quo-

(1) *Prop. 47 lib. 1.*

Quoniam enim AB, CD sunt parallelæ, erit [1] angulus BAC æqualis angulo ACD: Et similiter, quia AC, DE sunt parallelæ, erit eidem angulo ACD æqualis quoque angulus CDE. Et propterea angulus BAC æqualis erit angulo CDE. Unde, quum duo triangula ABC, DCE habeant circa æquales angulos latera proportionalia; erunt ea [2] æquiangula inter se; eritque proinde angulus ABC æqualis angulo DCE. Ostensus est autem angulus BAC æqualis angulo ACD. Quare erit totus angulus ACE æqualis duobus angulis ABC, BAC; atque adeo apposito communi ACB, erunt duo anguli ACE, ACB æquales tribus angulis ABC, BAC, ACB. Sed isti tres anguli, quum ad idem triangulum pertineant, simul sunt æquales [3] duobus rectis. Quare erunt etiam duobus rectis æquales duo anguli ACE, ACB: ac proindè rectæ duæ BC, CE. [4] in directum erunt.

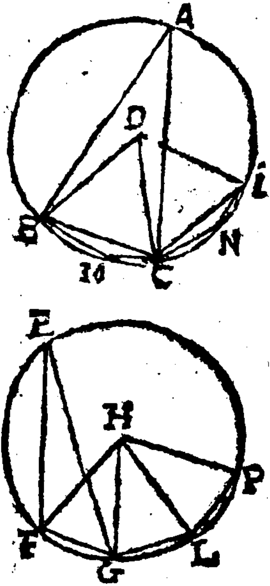
Si igitur duo triangula habeant duo latera duobus lateribus proportionalia, & composita ad eumdem angulum, habeant quoque latera homologa parallela; reliqua eorum latera in directum erunr. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXXIII. THEOR. XXIII.

In æqualibus circulis anguli, sive ad centra, sive ad circumferentias positi, eamdem habent rationem cum arcubus, quibus insistunt; similiter autem, & sectores.

Sint duo circuli æquales ABC, EFG. quorum centra sint puncta D, & H. Constituan-

(1) *Prop.29.lib.1.* [2] *Prop.6.hujus.*
(3) *Prop.32.lib.1.* (4) *Prop.14.lib.1.*



tuantur primò ad centra ista duo quilibet anguli BDC, FHG. Dico, angulum BDC esse ad angulum FHG, ut est arcus BC ad arcum FG.

Fiant etenim ad eadem centra plures alii anguli, æquales ipsis BDC, FHG; hoc est, vitandæ confusionis causa, unus quidem ad centrum D, qui sit CDI; duo vero ad centrum H, qui sint GHL, LHP. Itaque, quemadmodum æquales sunt anguli BDC, CDI, *ita quoque* æquales erunt arcus HC, CI, quibus insistunt anguli illi. Et similiter, quemadmodum æquales sunt anguli FHG, GHL, LHP, ita pariter æquales erunt arcus FG, GL, LP, quibus ii anguli insistunt. Quare angulus BDI tam multiplex erit anguli BDC, quam arcus HI est multiplex arcus BC; & *similiter* angulus FHP tam multiplex erit anguli FHG, quàm arcus FP est multiplex arcus FG. Jam verò angulus BDI est æqualis, major, vel minor angulo FHP, prout arcus BI, est æqualis, major, aut minor arcu FP. Quare erit, ut angulus BDC ad angulum FHG, ita arcus BC ad arcum FG.

Con-

Conſtituantur ſecundò ad circumferentias eorumdem circulorum duo quilibet anguli BAG,FEG. Dico,angulum BAC ad angulum FEG habere quoque eamdem rationem, quam habet arcus BC ad arcum FG.

Fiant etenim ad centra eorum circulorum anguli BDC, FHG, qui inſiſtant iiſdem arcubus BC, FG, quibus inſiſtunt anguli BAC, FEG, conſtituti ad circumferentias. Et quoniam anguli BAC, FEG ſunt ſemiſſes angulorum [1] BDG, FHG; erit ut angulus BAC ad angulum FEG, ita angulus BDC ad angulum FHG [2]. Oſtenſum eſt autem, angulum BDC eſſe ad angulum FHG, ut eſt arcus BC ad arcum FG. Quare erit [3] ut angulus BAC ad angulum FEG, ita arcus BC ad arcum FG.

Denique in iiſdem circulis æqualibus capiantur duo quilibet ſectores BCD, FGH. Dico, ſectorem BCD ad ſectorem FGH habere etiam eamdem rationem, quam habet arcus BC ad arcum FG.

Jungantur etenim rectæ BC, FG, & in iiſdem circulis aptentur [4] plures aliæ rectæ, æquales ipſis BC, FG; hoc eſt, vitandæ confuſionis cauſa, una quidem in circulo ABC, quæ ſit CI; duæ verò in circulo EFG, quæ ſint GL, LF. Et quoniam in eodem circulo æquales rectæ [5] æquales arcus abſcindunt; erit arcus BAC æqualis arcui CAI. Et propterea in ſegmentis BC, CI conſtitutis duobus angulis BMC, CNI, fient anguli iſti æquales inter ſe [6]; atque adeo ipſa ſegmenta BC, CI

[1] *Prop.20.lib.3.* [2] *Prop.15.lib.5.*
(3) *Prop.11.lib.5.* [4] *Prop.1.lib.4.*
[5] *Prop.28.lib.3.* [6] *Prop.27.lib.3.*

CI similia erunt. Sunt autem segmenta ista constituta super rectis æqualibus. Quare erunt etiam æqualia: proindeque additis triangulis BDC, CDI similiter æqualibus, fiet sector BCD æqualis sectori CID. Et propterea sector BID tam multiplex erit sectoris BCD, quam arcus BI est multiplex arcus BD. Simili ratione ostendetur, æquales esse sectores FGH, GLH, LPH, totumque sectorem FPH tam multiplicem esse sectoris FGH, quàm arcus FP est multiplex arcus FG. Jam verò sector BID est æqualis, major, vel minor sectore FPH, prout arcus BI est æqualis, major, vel minor arcu FP; Quare erit, ut sector BCD ad sectorem FGH, ita arcus BC ad arcum FG.

In æqualibus itaque circulis anguli, sive ad centra, sive ad circumscientias positi, eamdem habent rationem cum arcubus, quibus insistunt; similiter autem & sectores. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Angulus itaque ad centrum constitutus cum ipso arcu, cui insistit, proportionaliter augetur. Unde pro mensura anguli rectilinei adhiberi potest arcus circuli ex vertice anguli tamquam centro descriptus, & inter latera ejusdem anguli comprehensus: quippe qui metietur anguli quantitatem tam longitudine sua, quàm numero partium, quas continet, quum datum est intervallum; & verò metietur eam solo suarum partium numero, quum intervallum utcumque assumitur.

FINIS.