

# Notes du mont Royal

[www.notesdumontroyal.com](http://www.notesdumontroyal.com)

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

3<sup>and</sup>

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

*EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT.*

LES OEUVRES D'EUCLIDE.

*Cet Ouvrage se trouve aussi à Paris; aux indications suivantes :*

CHEZ { L'AUTEUR, au Lycée Bonaparte;  
TREUTTEL et WURTZ, libraires à Paris, rue de Lille, n° 17;  
FIRMIN DIDOT, rue Jacob, n° 24;  
Madame veuve COURCIER, quai des Augustins, n° 57.

5 B N  
15070

# LES OEUVRES D'EUCLIDE,

TRADUITES EN LATIN ET EN FRANÇAIS,  
D'APRÈS un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.

PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES OEUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT IMPÉRIAL DE FRANCE.



DÉDIÉ A SA MAJESTÉ LE ROI DE ROME

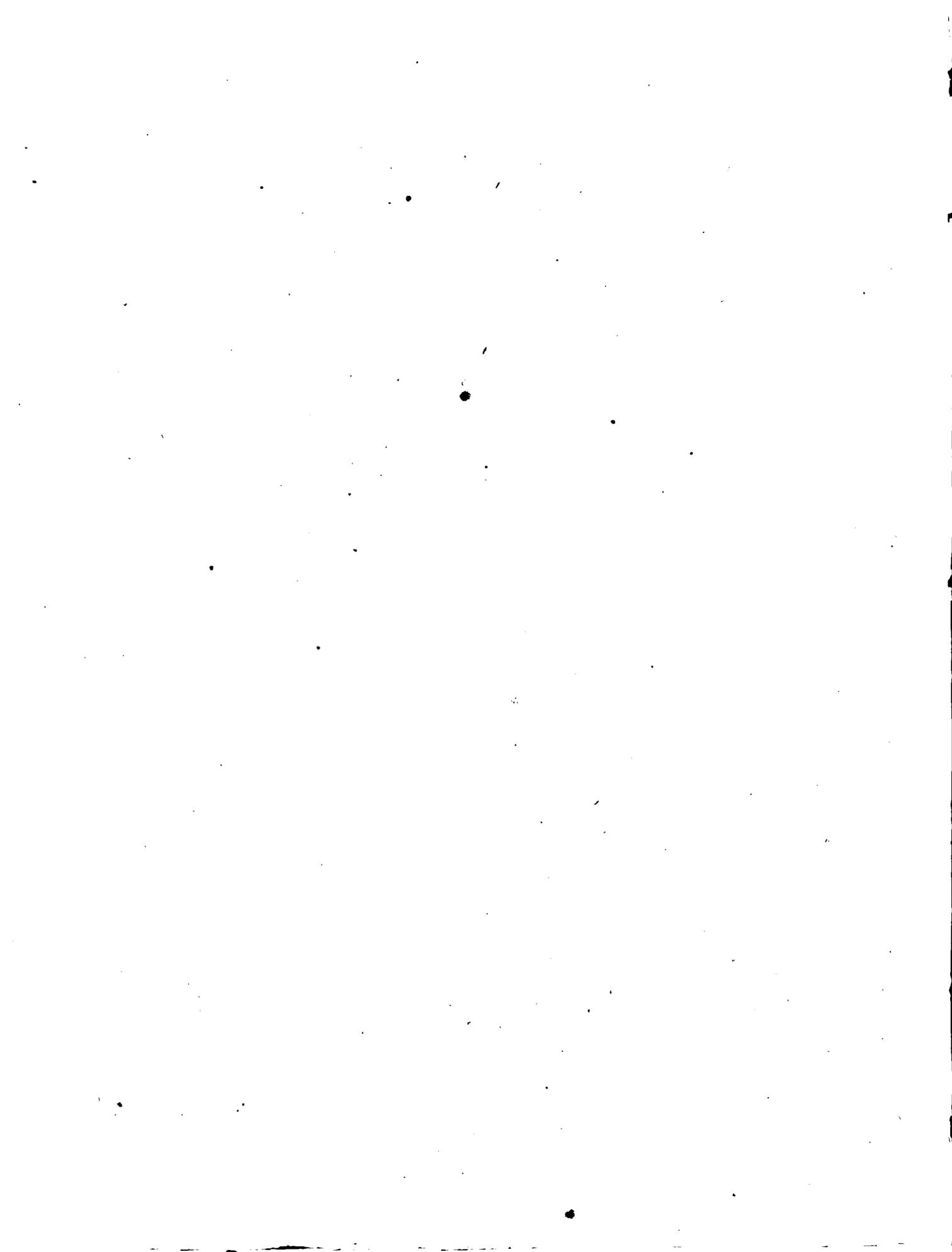
TOME PREMIER.



A PARIS,

CHEZ M. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, n° 4.

1814.



A SA MAJESTÉ  
LE ROI DE ROME.

SIRE,

Le plus grand des Héros, votre auguste Père, daigna agréer, il y a quatre ans, la dédicace de ma traduction d'ARCHIMÈDE. Il m'est permis aujourd'hui de faire paraître

ma traduction des OEUVRES D'EUCLIDE sous les auspices  
DE VOTRE MAJESTÉ, appelée par les destins à faire  
un jour le bonheur et les délices de la terre. Cette double  
faveur met le comble à mes vœux.

Je suis, avec le plus profond respect,

SIRE,

DE VOTRE MAJESTÉ,

Le très-humble et très-obéissant  
serviteur,

F. PEYRARD.

---

*A M. PEYRARD, professeur de mathématiques spéciales au  
Lycée Bonaparte.*

Paris, ce 28 mars 1812.

**J'**AI pris les ordres de l'Empereur, Monsieur, relativement au désir que vous avez exprimé de dédier à S. M. LE ROI DE ROME votre traduction des OEUVRÉS D'EUCLIDE. SA MAJESTÉ permet que le ROI DE ROME accepte cette Dédicace, et je me fais un plaisir véritable de vous en informer.

Un tel Ouvrage méritait de paraître sous de tels auspices, et devait offrir au Public, avec le nom d'un savant distingué, celui d'un Prince qui, dès le berceau, se glorifie d'être le protecteur des sciences.

Je vous prie, Monsieur, d'agréer l'assurance de ma parfaite considération.

La Gouvernante des Enfants de France,

M. COMTESSE DE MONTESQUIOU.

---

# P R Æ F A T I O.

---

**E**UCLIDES vixit temporibus Ptolemæi-Lagi, circiter annum 272 ante æram vulgarem; Archimedes suis in libris sæpe de illo meminit. Euclides a Ptolemæo interrogatus an non esset methodus discendæ Geometriæ methodo suâ facilior: Non est regia, inquit Euclides, ad Geometriam via. Hæc tantum de Euclide novimus: quâ sit patriâ oriundus ignoratur.

Ante Euclidem permulti floruerunt geometræ. Primus omnium Græcorum, Euclides eorum opera collegit, collecta digessit, et quæ fuerant incondite demonstrata, ea demonstrationibus inconcussis exornavit.

Plurima opera Euclides conscripserat; ex quibus tredecim libri Elementorum et Data tantum supersunt.

Librorum omnium qui de scientiarum elementis agunt liber perfectissimus semper habita sunt Euclidis Elementa, quæ in omnes omnino linguas fuerunt conversa.

De Elementis Euclidis sic Cardanus: *Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta est, ut nullum opus huic aliud comparare audeas; quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis quæstionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habeant familiarem.*

Ait Pemberton se non semel Newtonem audivisse moerentem quod sese Cartesii aliorumque algebristarum operibus totum dedisset, antequam studuisset Euclidis Elementis, et illa fuisset meditatus.

D. *Lagrange* quem extinctum luget et diu lugebit Europa, mihi dicitabat Geometriam esse linguam mortuam; et qui in Euclidis Elementis

---

# P R É F A C E.

---

**E**UCLIDE vivait du temps de Ptolémée-Lagus, vers l'an 272 avant l'ère vulgaire; Archimède l'a cité dans plusieurs de ses livres. Ptolémée ayant demandé à Euclide s'il n'y avait pas de manière plus facile que la sienne pour apprendre la Géométrie, Euclide répondit qu'il n'y avait point de chemin royal pour arriver à cette science. C'est tout ce que nous savons d'Euclide : on ignore même quelle fut sa patrie.

Beaucoup de géomètres avaient paru avant Euclide. Le premier des Grecs, Euclide rassembla leurs ouvrages, les mit dans un ordre convenable, et donna des démonstrations inattaquables de ce qui n'avait pas été démontré d'une manière rigoureuse.

Euclide avait composé un grand nombre d'ouvrages. Les treize livres des *Éléments* et les *Données* sont les seuls qui soient parvenus jusqu'à nous.

Les *Éléments* d'Euclide ont toujours été regardés comme le plus parfait de tous les livres élémentaires; ils ont été traduits et commentés dans toutes les langues.

Cardan, en parlant des *Éléments* d'Euclide, s'exprime ainsi : *Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta est, ut nullum opus jure huic aliud comparare audeas; quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis quæstionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habeant familiarem.*

Pemberton nous apprend qu'il avait entendu plusieurs fois Newton se plaindre de s'être livré tout entier aux ouvrages de Descartes, et des autres algébristes, avant d'avoir étudié et médité les *Éléments* d'Euclide.

M. Lagrange, dont l'Europe déplore et déplorera long-temps la perte, me répétait souvent que la Géométrie était une langue morte; que celui qui

P R Æ F A T I O.

Geometriæ non studebat, cum perinde facere ac si quis græcam latinamve linguam in recentioribus operibus græce et latine scriptis discere velit.

Theoremata subsequencia, quæ in quolibet Geometriæ tractatu adesse solent, in Elementis Euclidis desiderantur :

Circulorum circumferentiæ inter se sunt ut eorum diametri.

Quilibet circulus æqualis est triangulo rectangulo cujus unum ex lateribus angulum rectum continentibus æquale est semi-diametro, alterum autem æquale circumferentiæ.

Cujuslibet cylindri recti superficies convexa æqualis est rectangulo cujus altitudo æqualis est cylindri lateri, cujus autem basis æqualis circumferentiæ basis cylindri, vel circulo cujus semi-diameter media proportionalis est inter latus cylindri et diametrum basis cylindri.

Cujuslibet conii recti, exceptâ basi, superficies convexa æqualis est triangulo rectangulo cujus unum laterum angulum rectum continentium æquale est conii lateri, alterum vero æquale circumferentiæ basis conii, vel circulo cujus semi-diameter media proportionalis est inter conii latus et semi-diametrum circuli qui conii est basis.

Superficies convexæ cylindrorum rectorum et similium, et etiam conorum rectorum et similium, sunt inter se ut diametri basium eorundem cylindrorum et conorum.

Cujuslibet spheræ superficies æqualis est quatuor maximis ejusdem spheræ circulis, vel superficiei convexæ cylindri circumscripti.

Spherarum superficies inter se sunt ut quadrata earum diametrorum.

Quælibet sphaera æqualis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti.

Nonnulli credidere hæc theoremata ex Euclidis Elementis evanuisse temporum inclementiâ ; sed falso. Hæc enim theoremata quæ demonstrari non possunt nisi ope quatuor primorum postulatorum in initio primi libri *de Sphæra et Cylindro* positorum, demonstrari non potuerunt ab Euclide, qui hæc Archimedis postulata non admiserat.

n'étudiait pas la Géométrie dans Euclide, faisait la même chose que celui qui voudrait apprendre le grec et le latin, en lisant les ouvrages modernes écrits dans ces deux langues.

Les théorèmes suivants, qui se trouvent ordinairement dans tout traité élémentaire de Géométrie, ne se trouvent pas dans les *Éléments* d'Euclide:

Les circonférences de cercles sont entre elles comme leurs diamètres.

Un cercle est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence.

La surface convexe d'un cylindre droit est égale à un rectangle dont la hauteur est égale au côté du cylindre, et dont la base est égale à la circonférence de la base du cylindre, ou bien à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base.

La surface d'un cône droit, la base exceptée, est égale à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au côté du cône, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de la base du cône, ou bien à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cône et le rayon du cercle qui est la base du cône.

Les surfaces convexes des cylindres droits et semblables, des cônes droits et semblables, sont entre elles comme les diamètres des bases de ces cylindres et de ces cônes.

La surface d'une sphère est égale à quatre grands cercles, ou à la surface convexe du cylindre circonscrit.

Les surfaces des sphères sont entre elles comme les quarrés de leurs diamètres.

Une sphère est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit.

Des personnes ont pensé que ces théorèmes avaient disparu des *Éléments* d'Euclide par l'injure des temps; c'est une erreur. Ces théorèmes, qui ne peuvent se démontrer qu'à l'aide des quatre premières demandes placées au commencement du premier livre de *la Sphère et du Cylindre*, n'ont pu l'être par Euclide, qui n'avait point admis ces demandes d'Archimède.

Forsan dici potest solam dissimilitudinem quæ intercedit Euclidis inter et Archimedis methodum, consistere in rejectione vel in admissione postulatorum de quibus hîc incidit sermo.

In præfatione meæ versionis librorum 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12 Elementorum Euclidis, quæ anno 1804 edita fuit, suscepi munus edendi versiones operum completorum Euclidis, Archimedisque et Apollonii. Mea versio operum Archimedis vulgata est anno 1808; quo quidem tempore, vertendis Euclidis operibus ultimam manum admoveram. Sed antequam prelo subjiceretur, consulere volui codices manuscriptos bibliothecæ imperialis de plurimis locis qui mihi videbantur mutilati vel corrupti in editione Oxoniæ, quâ usus fueram in convertendo Euclide. Hi codices, tres et viginti numero, mihi commissi fuerunt, et statim animadverti editionem Oxoniæ nullius horum manuscriptorum esse exemplar; hos omnes manuscriptos explere lacunas, et restituere locos corruptos in editione basiliensi et in editione Oxoniæ quæ nihil aliud est quam ejus exemplar. Quin etiam animadverti hos omnes manuscriptos, manuscripto 190 tantum excepto, inter se esse ferme consentaneos; manuscriptum autem 190 explere lacunas, restituere locos corruptos qui ope aliorum manuscriptorum nec explebantur nec restituebantur.

Manuscriptus 190 ad bibliothecam vaticanam pertinebat: is Româ Lutetiam a comite *de Peluse* fuit missus.

In manuscripto græco 2348, sub finem sæculi decimi sexti exarato, quique continet Euclidis Data cum quinque antiquissimis vaticanis manuscriptis græcis collata a Josepho Auriâ, celebri geometrâ, nec unam quidem repertias e pretiosissimis lectionibus manuscripti 190 variantibus; quod præbere videtur hunc manuscriptum tunc temporis in bibliothecâ vaticanâ fuisse desideratum.

Manuscriptus 190 manuscriptorum exeunte nono sæculo exaratorum omnia præ se fert indicia; alii vero manuscripti pertinent ad sæcula multo recentiora.

Hoc manuscripto mihi commisso, statim in animum incidit edere græce, latine et gallice Elementa et Data, sola procul dubio quæ supersint Euclidis

On pourrait peut-être dire que la seule différence entre la méthode d'Euclide et celle d'Archimède, consiste dans le rejet ou l'admission des quatre demandes dont je viens de parler.

Dans la préface de ma traduction des livres 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12 des *Éléments* d'Euclide, qui parut en 1804, je pris l'engagement de publier les traductions des œuvres complètes d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius. Ma traduction des œuvres d'Archimède parut en 1808. A cette époque j'avais mis la dernière main à la traduction des œuvres d'Euclide. Mais avant de la livrer à l'impression, je voulus consulter les manuscrits de la bibliothèque impériale sur les passages qui me paraissaient tronqués ou altérés dans l'édition d'Oxford, d'après laquelle j'avais fait ma traduction. Ces manuscrits, qui sont au nombre de 23, me furent confiés, et je ne tardai pas à m'apercevoir que l'édition d'Oxford n'est la copie d'aucun de ces manuscrits ; que tous ces manuscrits remplissent des lacunes, et rétablissent des passages altérés qui se trouvent dans l'édition de Bâle, et dans celle d'Oxford qui n'en est que la copie. Je remarquai aussi que tous ces manuscrits, le n° 190 seul excepté, sont à peu de choses près conformes les uns aux autres ; que le n° 190 remplit des lacunes, et rétablit des passages altérés, qui ne peuvent pas l'être à l'aide des autres manuscrits.

Le manuscrit 190 appartenait à la bibliothèque du Vatican : il fut envoyé de Rome à Paris par le comte de Peluse.

Dans le manuscrit grec n° 2348, qui est de la fin du seizième siècle, et qui contient les *Données* d'Euclide collationnées par Joseph Auria, géomètre célèbre, avec les cinq plus anciens manuscrits grecs de la bibliothèque du Vatican, on ne trouve aucune des précieuses variantes du manuscrit 190 ; ce qui semble prouver que ce manuscrit n'était pas alors à la bibliothèque du Vatican.

Le manuscrit 190 porte tous les caractères des manuscrits de la fin du neuvième siècle, tandis que les autres appartiennent à des siècles beaucoup plus rapprochés de nous.

Étant dépositaire de ce précieux manuscrit, je me déterminai, sans balancer, à donner une édition grecque, latine et française des *Éléments* et

opera. Quapropter, contuli manuscriptum 190 cum editione Oxoniæ, exaravique lectiones variantes in margine operi impressi.

His perfectis, ad variantes lectiones margini appositas sedulus attendi, et aliis manuscriptis accersitis, hanc aut illam lectionem variantem in editionem parisiensem admisi, vel ab eâ rejeci. Manuscriptum 190 potiozem habui, quotiescumque nulla mihi fuit ratio cur hanc aut illam lectionem præferrem.

Textum græcum sic constitutum in latinum converti, et quæcunque ex variantibus quas admiseram lectionibus, mutari fuit opportunum, hæc in versione gallicâ mutata sunt.

Mea latina versio ad verbum textui græco congruit, nisi quid peculiare me coegerit ut secus facerem. Nonnulli in meâ versione occurrent forte hellenismi, aut saltem quædam locutiones a quibus lingua latina abhorere videtur. Illas quidem vitare potuissem; sed mea versio cum textu græco minus fuisset consentanea.

De meâ convertendi ratione, viros in græcâ latinâque linguâ versatissimos consului. *Dr. Delambre*, secretarius perpetuus classis scientiarum physicarum et mathematicarum Instituti imperialis Franciæ, necnon Universitatis imperialis quæstor, meam versionem dignatus est perpendere, et utilia mihi dare consilia. Hanc eâ de re ad me scripsit epistolam :

Parisiis, 20 februarii 1812.

Cum voluptate legimus sex prima folia tui Euclidis trilinguis. Tui commissarii desiderium enuntiaverant videndi editum Euclidis textum græcum expurgatum omnibus mendis quas castigavisti manuscriptorum ope, et locupletatum omnibus incrementis quæ tibi suppeditaverunt manuscripti : mox eorum omniumque doctorum explebis desiderium.

Multum probo quod constitutum habuisti reddere versionem latinam tam consentaneam quam utraque lingua ferre potest. Græcis erant duæ viæ indicandorum casuum obliquorum, terminatio scilicet et articulus; quando una earum duarum rationum eos deficiebat, quod sæpe in geometriâ contingit, articulus satis erat ad omnem tollendam dubitationem.

des **Données d'Euclide**, qui sont certainement les seuls ouvrages qui nous restent de ce géomètre à jamais célèbre. Pour cela, je comparai le manuscrit 190 avec l'édition d'Oxford, et j'écrivis les variantes en marge de l'ouvrage imprimé.

Ce travail terminé, j'examinai attentivement les variantes marginales, et à l'aide des autres manuscrits, j'adoptai ou je rejetai, pour l'édition de Paris, telle ou telle variante. Le manuscrit 190 a toujours eu la préférence, toutes les fois que je n'avais pas de motif pour préférer une leçon à une autre.

Le texte grec étant ainsi arrêté, je le traduisis en latin, et je fis à la traduction française les changements exigés par les variantes que j'avais adoptées.

Ma traduction latine correspond mot pour mot au texte grec, à moins que quelque règle particulière ne m'ait forcé de faire autrement. On trouvera quelquefois des hellénismes dans ma traduction, ou du moins certaines expressions qui semblent s'écarter un peu du génie de la langue latine. J'aurais pu les éviter ; mais ma traduction aurait été moins fidèle.

J'avais soumis mon système de traduction à des personnes versées dans la langue grecque et dans la langue latine. M. Delambre, secrétaire perpétuel de la classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut impérial de France et trésorier de l'université impériale, eut la complaisance de l'examiner avec soin, et de m'aider de ses sages conseils. Voici la lettre qu'il me fit l'honneur de m'écrire à ce sujet :

Paris, ce 20 février 1812.

**MONSIEUR**, j'ai lu avec plaisir les six premières feuilles de votre Euclide en trois langues. Vos commissaires avaient exprimé le vœu de voir paraître une édition grecque du texte d'Euclide, purgée de toutes les fautes que les manuscrits vous ont fait rectifier, et enrichie de toutes les additions qu'ils vous ont fournies : vous allez remplir leur vœu, et celui de tous les savants.

J'approuve beaucoup le parti que vous avez pris de rendre la version latine aussi littérale que le permet le génie des deux langues. Les grecs avaient deux moyens pour indiquer les cas obliques, la terminaison et l'article ; quand l'une de ces deux ressources leur manquait, comme il arrive souvent en géométrie, l'article suffisait pour ôter toute incertitude.

Tibi autem in linguâ latinâ hæc via non erat; tua versio nimis consentanea, sæpe obscura fuisset. Eorum qui te præcesserunt exemplo, usus es pronomine *ipse*, *ipsius*, *ipsi*. Non ignoras mihi eâ de re aliquid fuisse hesitationis; locutionibus illis *ipsi* ΑΓ, *ipsi* ΑΒΓ, anteposuissem has locutiones *lineæ* ΑΓ, *angulo* ΑΒΓ, quod longiusculum est.

Sed quoniam omnes geometrarum græcorum interpretes jamdudum iisdem interpolationibus usi sunt, capessivisti recte viam brevissimam amovendorum impedimentorum quæ singulis momentis occurrunt, etc.

Ad significandum duos angulos eundem verticem et latus commune habentes super eâdem rectâ collocatos esse, græce dicitur : *αι ἐπιζῆτες γωνίας*. Commandini, Torcelli, etc. exemplo, has tres græcas voces converti in has duas voces latinas : *deinceps anguli*. Sunt qui me dehortati sunt ab utendo voce hæc *deinceps*, quia, inquebant, *deinceps* in linguâ latinâ rerum ordinem numquam significavit. Non illis morem gessi. Nam, cum in Thesaurio linguæ latinæ Roberti Stephani, edito Lipsiæ anno 1739, legissem : *duo deinceps reges*. TIT. LIV. *Funera deinceps duo duxit*. TIT. LIV. *His perfectis collocatisque aliis deinceps rates jungebat*. CÆS. *Morem apud majores hunc epularum fuisse ut deinceps qui occubarent, canerent*. CIC., etc. pro certo habui Titum-Livium, Cæsarem et Cicero-nem, etc. vocem *deinceps* eodem sensu accepisse, quo ego acceperam.

Quod ad versionem gallicam attinet, ea cum textu græco tam consentanea est quam per eam linguam licet.

Sub finem cujusque tomi collocavi recensio-nem accuratissimam omnium variantium meæ editionis cum manuscripto 190, et cum editione Oxonia; ita ut harum lectionum variantium ope, possit, si quis velit, habere manuscripti 190 exemplar huic plane congruum.

Ad calcem tomi ultimi, qui hoc anno 1814 currente edetur, adjicientur animadversiones in variantes lectiones insignissimas, et in quosdam locos Euclidis.

Summâ diligentia usus sum ut mea editio quam maxime emendata esset; specimina a me prælecta, lecta fuerunt deinceps a D. Jannet, necnon a D. Patris, mei operis editore, rursusque a me relecta. In nullo specimine

Vous n'aviez pas cette ressource en latin ; votre version trop littérale eût été souvent obscure. A l'exemple de ceux qui vous ont précédé , vous vous êtes permis l'emploi du pronom *ipse* , *ipsius* , *ipsi*. Vous savez que j'avais à cet égard quelque scrupule ; au lieu de *ipsi*  $ΑΓ$  , *ipsi*  $ΑΒΓ$  , j'aurais mieux aimé *lineæ*  $ΑΓ$  , *angulo*  $ΑΒΓ$  , ce qui est un peu plus long.

Mais tous les traducteurs des géomètres grecs vous ont déjà donné l'exemple de pareilles intercalations , et vous avez bien fait de choisir le moyen le plus court pour vous tirer d'un embarras qui renaît à chaque instant , etc.

Pour exprimer que deux angles , qui ont le même sommet et un côté commun , sont placés sur une même droite , le grec dit : *αι ἐπιζῆς γωνίας*. A l'exemple de Commandin , de Torelli , etc. j'ai traduit ces trois mots grecs par *deinceps anguli*. Plusieurs personnes m'avaient invité à ne pas me servir du mot *deinceps* , parce que , disaient-elles , le mot *deinceps* n'a jamais en latin exprimé l'ordre des choses. Je ne me rendis pas à leur avis. Car , ayant lu dans le Trésor de la langue latine de Robert Étienne , édition de 1739 : *duo deinceps reges*. TIT. LIV. *Funera deinde deinceps duo duxit*. TIT. LIV. *His perfectis collocatisque alias deinceps rates jungebat*. CÆS. *Morem apud majores hunc epularum fuisse ut deinceps qui occubarent canerent*. Cic. , etc. il me parut démontré que Tite-Live , César , Cicéron , etc. donnaient au mot *deinceps* la même signification que moi.

Quant à la traduction française , elle est aussi littérale que le permet le génie de cette langue.

J'ai placé à la fin de chaque volume la liste exacte de toutes les variantes de mon édition avec le manuscrit 190 et l'édition d'Oxford. Par le moyen de ces variantes , on pourrait , si on le désirait , avoir une copie du manuscrit 190 qui lui serait parfaitement conforme.

Le dernier volume , qui paraîtra dans le courant de 1814 , sera terminé par des observations sur les variantes les plus remarquables , et sur quelques passages d'Euclide.

J'ai fait tous mes efforts pour que mon édition fût de la plus grande correction ; les épreuves , après avoir été lues par moi , ont été lues par M. Jannet , par M. Patris , éditeur de mon ouvrage , et relues encore par

prius subscriptis, *prelo subjiciatur*, quam illud mendis omnibus fuisset expurgatum. Ope erratorum ad finem ultimi tomi collocatorum, corrigi poterunt mendæ, si quas detexero in legendo perattente opere impresso.

D. *Nicolopoulo*, smyrnæus, vir eximiâ doctrinâ commendabilis et diligentissimus emendator, sponte suâ legit plurima specimina. D. *Patris*, qui linguam græcam, latinam et gallicam diu excoluit, summâ curâ et diligentia usus est ut mea editio prelis gallicis honori esset; in speciminibus legendis, versionem latinam et gallicam cum textu græco perattente comparabat, et margini notationes apponebat.

Ex lectionibus variantibus tomi primi, quædam præsertim sunt notandæ.

In omnibus editionibus græcis et latinis postulata 4, 5, 6 inter communes notiones collocata sunt.

Demonstratio propositionis septimæ libri primi duos habet casus, et tamen unus solum casus demonstratur in omnibus manuscriptis, nullo excepto, et in editionibus Basilicæ et Oxoniæ. Secundus casus est cum punctum  $\Delta$  incidit in triangulum  $AB\Gamma$ , vel punctum  $\Gamma$  in triangulum  $ABA$ . Ut secundus casus demonstraretur, antea demonstrandum fuerat, lateribus æqualibus trianguli isocelis productis, angulos sub basi inter se æquales esse; quod quidem Euclides demonstravit in propositione quintâ, et hoc tantum propositionis septimæ causâ, quandoquidem, propositione septimâ exceptâ, hæc demonstratio nullum usum habet in reliquis Euclidis Elementis; ex hoc manifeste sequitur, inquit omnes Euclidis commentatores, textum græcum propositionis septimæ esse mutilatum. Omnes commentatores in errore versabantur. Figura incompleta erat in omnibus manuscriptis et in omnibus editionibus. Secundam descripsi figuram; produxi rectas  $B\Gamma$ ,  $BA$ , et demonstratio completa fuit, in textu græco nullâ voce mutatâ.

Demonstratio propositionis 24 tertii libri tres casus habet. Posito enim  $A$  super  $\Gamma$ , et puncto  $B$  super  $\Delta$ , oportet demonstrare segmentum  $AEB$  non

moi. Je n'ai jamais donné de bon à tirer que je ne me fusse assuré auparavant que toutes les corrections avaient été faites. Par le moyen d'un *errata*, que je placerai à la fin du dernier volume, on pourra corriger les fautes qu'une lecture très-attentive que je ferai de l'ouvrage imprimé m'aura fait découvrir.

M. Nicolopoulo, de Smyrne, homme recommandable par ses rares talents et très-habile correcteur, a bien voulu lire un grand nombre de mes épreuves. M. Patris, qui a cultivé long-temps les langues grecque, latine et française, s'est donné des peines infinies pour que mon édition fît honneur aux presses françaises; en lisant les épreuves, il avait soin de comparer soigneusement la version latine et la version française au texte grec, et de me faire des observations marginales.

Parmi les variantes de ce premier volume, il en est quelques-unes qui méritent surtout d'être remarquées.

Dans toutes les éditions grecques et latines, les demandes 4, 5, 6 sont placées au nombre des notions communes.

La démonstration de la proposition 7 du livre I<sup>er</sup> a deux cas, et cependant un seul cas est démontré dans tous les manuscrits sans exception, et dans les éditions de Bâle et d'Oxford. Le second cas est celui où le point  $\Delta$  tombe dans le triangle  $A\alpha r$ , ou bien le point  $r$  dans le triangle  $AB\Delta$ . La démonstration du second cas exige qu'il soit démontré auparavant que les côtés égaux d'un triangle isocèle étant prolongés, les angles au dessous de la base sont égaux entre eux; et c'est ce qu'a fait Euclide dans la proposition 5, et ce qu'il n'a fait que pour la proposition 7, puisque, hors de là, cette démonstration n'est plus nécessaire dans le reste des *Éléments* d'Euclide; d'où il suit évidemment, disent tous les commentateurs, que le texte grec de la démonstration de la proposition 7 est tronqué. Tous les commentateurs avaient tort. La figure était incomplète dans tous les manuscrits et dans toutes les éditions. J'ai tracé une seconde figure; j'ai prolongé les droites  $\alpha r$ ,  $B\Delta$ , et la démonstration s'est trouvée complète, sans que j'eusse changé un seul mot au texte grec.

La démonstration de la proposition 24 du livre trois a trois cas. En effet, le point  $A$  étant sur le point  $r$ , et le point  $B$  sur le point  $\Delta$ , il faut démontrer

posse incidere vel intra segmentum  $AZ\Delta$ , vel extra, vel partim intra et partim extra; hi tres casus in manuscripto 190 et in editione parisiensi demonstrantur.

Sed in omnibus aliis manuscriptis, et in omnibus aliis editionibus græcis, tantum demonstratur segmentum  $AEB$  non incidere posse partim intra segmentum  $AZ\Delta$ , et partim extra. *Commandinus* dat aliorum casuum demonstrationem. At *Robert Simson* ex propositione 24 eximit partem quam propositioni 23 adjungit.

In propositione 26 libri sexti locus quidam minime intelligi poterat, lectio varians tertiam omnem ex eâ obscuritatem dispulit.

*Gregorius*, de corollario propositionis 19 libri quinti sermonem habens, sic loquitur: *Corruptissimus est hic locus; nec ope veterum exemplarium restitui potest: versionem ideo mutavimus, ut sensus constaret.* Clavius in locum hujus corollarii alterum subdidit. *Robert Simson* dicit: « Hoc corollarium manifeste ostendere librum quintum a geometriæ » ignaris corruptum fuisse, et hoc corollarium nullo modo pendere ex » propositione 19. » In hoc errat *Robert Simson*, et illum sæpissime errare in meis animadversionibus ostendam.

*Gregorii* versio intellectu est perdifficilis.

Suppressi tertiam vocem corollarii  $\epsilon\delta\epsilon\iota\chi\theta\eta$ . Loco proportionis:  $\acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \text{EB}\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \text{Z}\Delta$ , scripsi hanc proportionem:  $\acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AE}\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \text{IZ}$ ; loco tandem proportionis:  $\acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \text{AE}\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \text{IZ}$ , scripsi hanc proportionem:  $\acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \text{EB}\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Delta\Gamma\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \text{Z}\Delta$ . Ope harum levium correctionum corollarium evasit inconcussum.

In meâ editione, phrasis  $\epsilon\delta\epsilon\iota\chi\theta\eta\ \delta\epsilon\ \acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \text{EB}\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Delta\Gamma\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \text{Z}\Delta$ , sed ostensum est ut  $\text{AB ad EB ita } \Delta\Gamma \text{ ad } \text{Z}\Delta$  (19. 5), manifeste locum habet harum duarum phrasium:  $\epsilon\delta\epsilon\iota\chi\theta\eta\ \delta\epsilon\ \acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \text{EB}\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \text{Z}\Delta$ ,  $\epsilon\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha\zeta\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \text{EB}\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \pi\rho\acute{\sigma}\ \tau\omicron\ \text{Z}\Delta$ , ostensum autem est ut  $\text{AB ad } \Gamma\Delta \text{ ita EB ad } \text{Z}\Delta$  (19. 5); alterne igitur ut  $\text{AB ad EB ita } \Gamma\Delta \text{ ad } \text{Z}\Delta$  (16. 5).

que le segment  $AEB$  ne peut tomber ni en dedans du segment  $AZA$ , ni en dehors, ni partie en dedans et partie en dehors. Ces trois cas sont démontrés dans le manuscrit 190 et dans l'édition de Paris.

Mais dans tous les autres manuscrits et dans toutes les autres éditions grecques, on démontre seulement que le segment  $AEB$  ne peut point tomber partie en dedans du segment  $AZA$  et partie en dehors. Commandin donne la démonstration des deux autres cas. Robert Simson retranche une partie de la proposition 24, qu'il ajoute à la proposition 23.

Dans la proposition 26 du livre six, il y avait un passage tout à fait inintelligible; la variante 3 en a fait disparaître l'obscurité.

Grégori, en parlant du corollaire de la proposition 19 du livre cinq, s'exprime ainsi : *Corruptissimus est hic locus; nec ope veterum exemplarium restitui potest: versionem ideo mutavimus, ut sensus constaret.* Clavius a remplacé ce corollaire par un autre de sa façon. Robert Simson nous dit que ce corollaire prouve manifestement que le cinquième livre a été corrompu par des ignares en géométrie, et que ce corollaire ne dépend en aucune manière de la proposition 19. Robert Simson a tort ici comme dans une foule d'autres occasions, ainsi que je le ferai voir dans mes remarques.

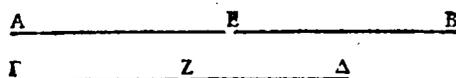
La version de Grégori est inintelligible.

J'ai fait disparaître le troisième mot du corollaire  $\text{ἰδείχθη}$ . A la place de  $\acute{\omega}\varsigma \tau\omicron \text{ AB } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ GA } \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma \tau\omicron \text{ EB } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ ZA}$ , j'ai mis  $\acute{\omega}\varsigma \tau\omicron \text{ AB } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ GA } \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma \tau\omicron \text{ AE } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ GZ}$ ; et à la place de  $\acute{\omega}\varsigma \tau\omicron \text{ AB } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ AE } \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma \tau\omicron \text{ GA } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ GZ}$ , j'ai écrit  $\acute{\omega}\varsigma \tau\omicron \text{ AB } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ EB } \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma \tau\omicron \text{ DG } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ ZA}$ . Par le moyen de ces légères corrections, le corollaire se trouve rétabli dans toute sa pureté.

Dans mon édition, la phrase  $\text{ἰδείχθη δὲ ὡς τὸ AB } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ EB } \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma \tau\omicron \text{ DG } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ ZA}$ , mais on a démontré que  $AB$  est à  $EB$  comme  $DG$  est à  $ZA$  (19. 5), tient évidemment lieu de  $\text{ἰδείχθη δὲ ὡς τὸ AB } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ GA } \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma \tau\omicron \text{ EB } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ ZA}$ ,  $\text{ἐνάλλαξ ἄρα ὡς τὸ AB } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ EB } \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma \tau\omicron \text{ GA } \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron \text{ ZA}$ , mais on a démontré que  $AB$  est à  $GA$  comme  $EB$  est à  $ZA$  (19. 5); donc par permutation  $AB$  est à  $EB$  comme  $GA$  est à  $ZA$  (16. 5).

Euclides hoc corollarium mutare potuisset in theorema, hęc modo :

Si magnitudines compositę (\*) sint proportionales, proportionales erunt per conversionem.



Sint magnitudines compositę AB, AE, ΓA, ΓZ, et sit AB ad AE ita ΓA ad ΓZ; dico per conversionem ut AB ad EB ita esse ΓA ad ZA.

Quoniam enim ut AB ad AE ita ΓA est ad ΓZ, alterne igitur ut AB ad ΓA ita est AE ad ΓZ (16. 5); ostensum autem est ut AB ad ΓA ita esse EB ad ZA (19. 5); alterne igitur ut AB ad EB ita est ΓA ad ZA, hoc est ut AB ad AB—AE ita est ΓA ad ΓA—ΓZ (16. 5); quod est per conversionem. Quod erat demonstrandum.

In textu gręco manuscripti 190, nequaquam agitur de circulorum sectoribus in ultimā sexti libri propositione. Manus aliena inter lineas et in margine manuscripti exaravit omnia quę ad sectores attinent, et quę adsunt in textu gręco omnium aliorum manuscriptorum et in editionibus Basilicę et Oxonię. Hoc addimentum, quod in meam editionem admittere non debuissim, textui a Theone factum est. Sic loquitur Theon in suis in Almagestum commentariis, p. 50, l. 7, edit. Basilicę, anno 1538 : « ὅτι δὲ οἱ ἐπιείσαν κύκλων τομῆς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ γωνίαι ἐφ' ὧν βεβήκασι δέδουκται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων πρὸς τῷ τέλει τοῦ ἔκτου βιβλίου. » *Quod autem in æqualibus circulis sectores inter se sunt ut anguli in illis positi, ostensum fuit a nobis in editione Elementorum ad finem libri sexti.*

Hoc Theonis addimentum, quod in subsequentibus nullum habet usum, Euclidis festinationi moram affert. In libris præsertim 10, 14, 15, necnon in Datis bene multas surperfluitates reperias quarum nullam in textu manuscripto 190. Ob id præcipue Euclidem mirati sunt quod ille ad propositum directe tendit, numquam de viâ declinans suâ demonstrandi causâ quę ad progrediendum nequaquam sunt necessaria. Sed hoc soli manuscripto 190 convenire potest; itaque non absurde conjecerim emendatum Euclidis

---

(\*) Quatuor magnitudines dicuntur compositę, quando secunda est quędam fractio primę, et quarta quędam fractio tertię.

Euclide aurait pu donner à ce corollaire la forme d'un théorème, en disant :

Si des grandeurs composées (\*) sont proportionnelles, elles sont proportionnelles par conversion.

$$\frac{A \quad \quad \quad E \quad \quad \quad B}{\Gamma \quad \quad \quad Z \quad \quad \quad \Delta}$$

Soient les grandeurs composées  $AB$ ,  $AE$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $\Gamma Z$ , et que  $AB$  soit à  $AE$  comme  $\Gamma\Delta$  est à  $\Gamma Z$ ; je dis que par conversion  $AB$  est à  $EB$  comme  $\Gamma\Delta$  est à  $Z\Delta$ .

Car, puisque  $AB$  est à  $AE$  comme  $\Gamma\Delta$  est à  $\Gamma Z$ , par permutation  $AB$  est à  $\Gamma\Delta$  comme  $AE$  est à  $\Gamma Z$  (16. 5); mais on a démontré que  $AB$  est à  $\Gamma\Delta$  comme  $EB$  est à  $Z\Delta$  (19. 5); donc, par permutation,  $AB$  est à  $EB$  comme  $\Gamma\Delta$  est à  $Z\Delta$ , c'est-à-dire que  $AB$  est à  $AB - AE$  comme  $\Gamma\Delta$  est à  $\Gamma\Delta - \Gamma Z$  (16. 5); ce qui est par conversion. Ce qu'il fallait démontrer.

Dans le texte du manuscrit 190, il n'est nullement question de secteurs circulaires dans la dernière proposition du livre 6. Une main étrangère a interliné et écrit en marge de ce manuscrit ce qui se trouve de relatif aux secteurs circulaires dans le texte de tous les autres manuscrits, et dans les éditions de Bâle et d'Oxford. Cette addition au texte, que je n'aurais pas dû conserver, est de Théon. Voici ce qu'il dit lui-même dans ses commentaires sur l'Almageste, pag. 50, l. 7, édit. de Bâle, 1538 : « ὅτι δὲ οἱ ἐπ' ἔσταν κύκλων τομῆς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ γωνίαι ἐφ' ὧν βεβήκασι δίδεικται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδοσει τῶν στοιχείων πρὸς τῇ τίλει τοῦ ἔκτου βιβλίου. » *J'ai démontré dans mon édition des Éléments, et à la fin du sixième livre, que dans les cercles égaux les secteurs sont entre eux comme les angles placés dans ces cercles.*

Cette addition de Théon, qui n'est d'aucun usage dans la suite, ne sert qu'à retarder la marche d'Euclide. On trouve dans les livres 10, 14, 15 surtout, ainsi que dans les Données, une foule de pareilles superfluités dont aucune n'est admise dans le texte du manuscrit 190. On a toujours admiré Euclide en ce qu'il marchait directement vers son but, sans jamais s'écarter de son chemin, pour démontrer ce qui ne lui était pas nécessaire pour aller en avant. Mais cela n'est vrai que pour le seul manuscrit 190; c'est pour-

---

(\*) Quatre grandeurs sont dites composées, lorsque la seconde est une fraction de la première, et que la quatrième est une fraction de la troisième.

textum in hoc manuscripto contineri, aliosque manuscriptos nihil aliud esse quam editionis vulgatæ a Theone exemplaria. Non dissiteor tamen editione in meâ quasdam adesse superfluitates, quarum indicem ad calcem animadversionum subjiciam, hoc est, indicem instituem omnium quæ licet sublata subsequentibus nullo modo obesse possunt.

Corollarium propositionis 15 primi libri suppressi, quamvis eâdem manu in margine manuscripti 190 exaratum sit, quia hoc corollarium non præ se fert signum quod in hoc manuscripto monet in margine exarata ad textum pertinere, ac insuper hoc corollarium tantum adest in textu unius ex manuscriptis, quia tandem hoc corollarium in subsequentibus nullum habet usum.

Definitio 5 sexti libri eâdem manu in imâ paginâ exarata est cum signo quod monet eam ad textum pertinere; sed manifestum est erravisse transcriptorem. Eam suppressi, quia nullum in Euclidis Elementis usum habet. *Robert Simson* sex paginas in-4° scripsit probandi causâ illam a Geometriæ ignaro in textum fuisse admissam.

Non plura dicam de lectionibus meæ editionis variantibus; lectori se certiore facere licebit permulta evanuisse menda typographica, necnon et plurimos locos obscuros vel corruptos, vel detruncatos, præsertim in libris 10, 14, 15, et in Data; Euclidisque textum permultis superfluitatibus me curante fuisse expurgatum.

Dixi Euclidis in omnes linguas conversa fuisse opera et commentariis illustrata; editiones et versiones notabilissimæ Euclidis hæ sunt:

Campanus primum in latinum ex arabico convertit Euclidem. Hæc versio Venetiis anno 1482 edita, comprehendit quindecim libros Elementorum.

Zambertus, venetus, ex græco convertit in latinum quindecim libros Elementorum et Data Euclidis. Hæc versio edita fuit Parisiis anno 1516, deinde Basilæ anno 1537 et anno 1546. Euclidis Data adsunt tantum in duabus posterioribus editionibus.

quoi il me sera permis de penser que ce manuscrit contient le texte pur d'Euclide, et que les autres ne sont que des copies de l'édition de Théon. J'avoue cependant qu'il existe quelques superfluités dans le manuscrit 190, et par conséquent dans mon édition; j'en donnerai la liste à la suite de mes remarques, c'est-à-dire, que je donnerai la liste de tout ce qui peut se supprimer sans nuire à ce qui suit.

J'ai supprimé le corollaire de la proposition 15 du premier livre, quoiqu'il soit écrit de la même main dans la marge du manuscrit 190, parce que ce corollaire n'est pas précédé du signe qui, dans ce manuscrit, sert toujours à indiquer que ce qui est écrit en marge doit faire partie du texte, parce que ce corollaire ne se trouve que dans le texte d'un seul manuscrit, et enfin, parce qu'il n'est d'aucun usage dans la suite.

La définition 5 du sixième livre est écrite de la même main au bas de la page, et avec le signe qui indique qu'elle doit faire partie du texte; mais il est hors de doute que c'est une faute du copiste. Je l'ai supprimée, parce qu'elle n'est d'aucun usage dans les *Éléments* d'Euclide. Robert Simson a écrit six pages in-4° pour prouver qu'elle a été introduite dans le texte par un ignare en Géométrie.

Je n'en dirai pas davantage sur les variantes de mon édition; le lecteur pourra s'assurer lui-même qu'elle a fait disparaître un très-grand nombre de fautes typographiques, beaucoup de passages obscurs ou altérés, ou tronqués, surtout dans les livres 10, 14, 15, et dans les *Données*, et que j'ai purgé le texte d'Euclide d'un très-grand nombre de superfluités.

J'ai dit que les œuvres d'Euclide ont été traduites et commentées dans toutes les langues; voici quelles sont les éditions et les traductions les plus remarquables.

La première traduction latine que nous ayons d'Euclide est celle de Campanus, qui parut à Venise en 1482. Cette traduction, qui a été faite d'après l'arabe, contient les quinze livres des *Éléments*.

Zamberti, vénitien, traduisit en latin, d'après le grec, les quinze livres des *Éléments* et les *Données* d'Euclide. Cette traduction, qui parut à Paris en 1516, reparut à Bâle en 1537, et ensuite en 1546. Les *Données* d'Euclide ne se trouvent que dans ces deux dernières éditions.

Textus græcus quindecim librorum Elementorum Euclidis cum commentario Theonis et Procli, primum editus fuit Basiliæ anno 1533, apud Herwagem, celeberrimum typographum. Simon Grynæus textûs græci fuit editor. Quindecim libri Elementorum editi fuerunt ex duobus manuscriptis qui Simoni Grynæo suppeditati fuerunt, alter Venetiis a Lazaro Bayfio, alter Parisiis a Joanne Ruellio. Commentarium Procli editum fuit ex manuscripto inemendato qui Oxoniâ Simoni Grynæo missus fuit a Joanne Claymando.

Candalla edidit, anno 1566, versionem latinam quindecim librorum Elementorum.

Commandinus unus optimorum geometrarum suæ ætatis, et apprime versatus in linguâ græcâ et latinâ, convertit in latinum quindecim libros Elementorum ex textu græco editionis basiliensis. Hæc versio, omnium Euclidis versionum, textui græco erat maxime consentanea; illa edita fuit Pisauri anno 1572, et deinde anno 1619.

Versio latina quindecim librorum Elementorum quam Clavius edidit Romæ, anno 1574, est quam minime consentanea; Clavius sibi concessit facultatem commutandi in permultis locis textum Euclidis; sed nonnullo in pretio est commentarium quod suæ versionis adjunxit, quamvis nimio plus sit diffusum.

Textus græcus Datorum Euclidis, cum versione latinâ Hardiæi, editus primum fuit anno 1625.

*Henrion* edidit, anno 1615, versionem gallicam quindecim librorum Elementorum et Datorum Euclidis. Hæc versio a textu Euclidis differt singulis momentis.

*Le Mardelé* edidit, non multo post, alteram versionem gallicam quindecim librorum Elementorum. Hæc versio in permultis locis differt a textu Euclidis.

Gregorius edidit Oxoniæ, anno 1703, græce et latine, quindecim libros Elementorum et Data Euclidis. Gregorius usus fuit, in quindecim libris Elementorum, versione latinâ Commandini, et in Datis, versione latinâ Hardiæi: quas duas versiones Gregorius ipse recognoverat.

Le texte grec des quinze livres des *Éléments* d'Euclide avec le commentaire de Théon et de Proclus, parut pour la première fois à Bâle en 1533, chez Herwage, célèbre imprimeur. Simon Grynæus en fut l'éditeur. Les quinze livres des *Éléments* furent imprimés d'après deux manuscrits grecs envoyés à Simon Grynæus; l'un de Venise, par Lazare Baysius, et l'autre de Paris, par Jean Ruellius. Le commentaire de Proclus fut imprimé, d'après un manuscrit très-défectueux envoyé d'Oxford à Simon Grynæus, par Jean Claymandus.

Candalle publia, en 1566, une traduction latine des quinze livres des *Éléments*.

Commandin, un des plus grands géomètres de son temps, et homme très-versé dans les langues, traduisit en latin les quinze livres des *Éléments* d'après le texte grec de l'édition de Bâle. C'était, de toutes les traductions, la plus conforme au texte grec d'Euclide; elle parut à Pesaro en 1572, et ensuite en 1619.

La traduction latine des quinze livres des *Éléments* que Clavius publia à Rome, en 1574, n'est rien moins que fidèle; Clavius s'est permis de faire de nombreux changements au texte d'Euclide; mais on estime le commentaire qui accompagne sa traduction, malgré sa très-grande prolixité.

Le texte grec des *Données* d'Euclide, accompagné d'une traduction latine de Hardi, parut pour la première fois en 1625.

Henrion publia, en 1625, une traduction française des quinze livres des *Éléments*, et des *Données* d'Euclide. Cette traduction diffère à chaque instant du texte d'Euclide.

Le Mardelé publia, quelque temps après, une nouvelle traduction des quinze livres des *Éléments*. Cette traduction diffère dans une foule d'endroits du texte d'Euclide.

Grégori publia à Oxford, en 1703, en grec et en latin, les quinze livres des *Éléments* et les *Données* d'Euclide. Grégori fit usage, pour les quinze livres des *Éléments*, de la traduction latine de Commandin, et pour les *Données*, de celle de Hardi. Ces deux traductions avaient été revues par Grégori lui-même.

In hâc editione, præter quindecim libros Elementorum, et Data, adsunt plura opera quæ procul dubio Euclidis non sunt; quod quidem Gregorius ipse non diffitetur in suâ præfatione.

*Robert Simson* edidit, anno 1756, versionem latinam librorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12 Elementorum.

*Robert Simson*, in pluribus locis, commutavit textum Euclidis.

Dixi in bibliothecâ imperiali adesse manuscriptos græcos tres et viginti. Eorum manuscriptorum secundum vetustatis ordinem hic est index :

N° 190. Is manuscriptus præ se fert omnia indicia manuscriptorum sub finem noni sæculi exaratorum. Data proxime sequuntur librum 13. Liber 14 et liber 15 post Data collocati sunt; quod in nullo contigit alio manuscripto. In meâ editione eundem ordinem sum secutus, ipsomet D. *Lagrange* suadente.

N° 1038. Is manuscriptus, in quo deest initium Elementorum usque ad propositionem octavam secundi libri, incunte undecimo sæculo exaratus videtur. Is manuscriptus, in quo deprehenduntur reliqua Elementa et Data, Româ Parisios fuit missus a comite *de Peluse*.

N° 2466. Is manuscriptus, in quo deprehenduntur tredecim libri Elementorum, duodecimo sæculo exaratus videtur.

N° 2344. Is manuscriptus, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo duodecimo exaratus videtur.

N° 2345. Is manuscriptus, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo tertio exaratus videtur.

Omnes ii manuscripti sunt membranacei; subsequentes sunt cartacei.

N° 2373. Is manuscriptus, in quo deprehenditur Euclidis Geometria cum scholiis, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

N° 2342. Is manuscriptus, in quo deest initium usque ad propositionem 23 primi libri, et in quo deprehenduntur quindecim libri Elementorum, et Data, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

N° 2762. Is codex, in quo tantum deprehenduntur octo priores libri Elementorum, sub finem sæculi decimi quinti exaratus videtur.

N° 2346. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Dans cette édition , outre les quinze livres des *Éléments*, et les *Données*, on trouve plusieurs autres traités qui bien évidemment ne sont pas d'*Euclide* ; *Grégori* lui-même en convient dans sa préface.

*Robert Simson* publia , en 1756 , la traduction latine des livres 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 11 , 12 des *Éléments* d'*Euclide*. C'est la traduction de *Commandin* , revue par *Robert Simson*.

*Robert Simson* a fait de nombreux changements au texte d'*Euclide*.

J'ai dit que la bibliothèque impériale renferme vingt-trois manuscrits grecs. En voici la liste par ordre d'ancienneté :

N° 190. Ce manuscrit porte tous les caractères des manuscrits de la fin du neuvième siècle. Les *Données* sont placées immédiatement après le treizième livre des *Éléments*. Le 14<sup>e</sup> et le 15<sup>e</sup> livre viennent ensuite ; ce qui n'existe dans aucun autre manuscrit de la bibliothèque impériale. J'ai suivi le même ordre dans mon édition , d'après le conseil de *M. Lagrange*.

N° 1038. Ce manuscrit , qui ne commence qu'à la proposition 8 du second livre , paraît être du commencement du onzième siècle. Il contient le reste des *Éléments*, et les *Données* ; il appartenait à la bibliothèque du Vatican ; et il fut envoyé de Rome à Paris , avec le manuscrit 190 , par le comte de *Peluse*.

N° 2466. Ce manuscrit , qui contient les treize premiers livres des *Éléments* , paraît être du douzième siècle.

N° 2344. Ce manuscrit , qui contient seulement les treize premiers livres des *Éléments*, paraît être du douzième siècle.

N° 2345. Ce manuscrit , qui contient seulement les treize premiers livres des *Éléments*, paraît être du treizième siècle.

Tous ces manuscrits sont en parchemin ; les suivants sont en papier.

N° 2373. Ce manuscrit , qui contient la *Géométrie* d'*Euclide* avec des scholies , paraît être du quatorzième siècle.

N° 2342. Ce manuscrit , qui ne commence qu'à la proposition 23 du premier livre , et qui contient le reste des *Éléments* , et les *Données*, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2762. Ce manuscrit , qui ne contient que les huit premiers livres des *Éléments* , paraît être de la fin du quinzième siècle.

N° 2346. Ce manuscrit , qui contient les treize premiers livres des *Éléments* , paraît être du quinzième siècle.

Nº 2481. Is codex, in quo tantum deprehenduntur decem priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Nº 2531. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Nº 2343. Is codex, in quo deprehenduntur quindecim libri Elementorum, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2547. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, et Data, ineunte sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2448. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

Nº 2352. Is codex, in quo Data deprehenduntur, a J. Rossi fuit exaratus anno 1488.

Nº 2363. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Nº 2349. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2350. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 1981. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2467. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2472. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur; sub finem nonnulla desiderantur.

Nº 3366. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2348. Is codex comprehendit Euclidis Data, collata cum quinque antiquissimis manuscriptis bibliothecæ vaticanæ, a Josepho Auriâ, neapolitano, celebri geometrà sæculi decimi sexti decedentis.

---

Anno 1814 currente editurus sum versionem gallicam Diophanti operum. Lectiones variantes manuscriptorum bibliothecæ imperialis cum editione 1670, meam versionem subsequenter. Imprimis usus sum manuscripto 2380 græco et latino, cujus initio legere est: *Diophanti Alexandrini arithmeticonum libri sex, ejusdem de numeris polygonis libellus, Josepho Auriâ interprete; cum antiquissimis vaticanis codicibus tribus græcis manuscriptis diligentissime collati operâ et studio Josephi Auriâ.*

Mea versio conicorum Apollonii edetur anno 1815 currente.

N° 2481. Ce manuscrit, qui contient les dix premiers livres des Éléments, paraît être du quinzième siècle.

N° 2531. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, paraît être du quinzième siècle.

N° 2343. Ce manuscrit, qui contient les quinze livres des Éléments, paraît être du seizième siècle.

N° 2547. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, et les Données, paraît être du commencement du seizième siècle.

N° 2448. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2352. Ce manuscrit, qui contient les Données, fut écrit par J. Rossi en 1488.

N° 2363. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du quinzième siècle.

N° 2349. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2350. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 1981. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2467. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2472. Ce manuscrit, qui contient les Données d'Euclide, paraît être du quatorzième siècle; il manque quelque chose à la fin.

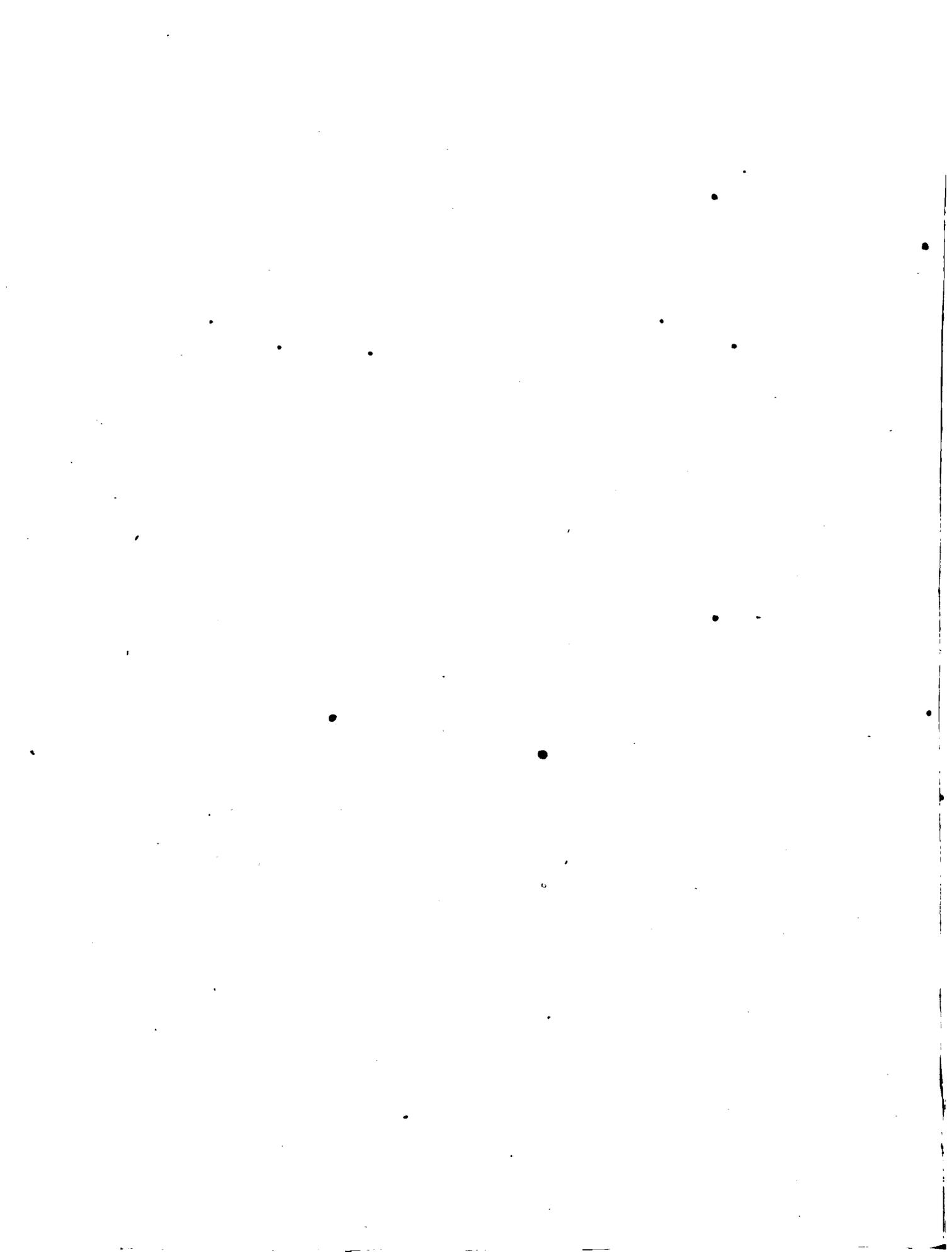
N° 3366. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2348. Ce manuscrit contient les Données d'Euclide comparées avec les cinq plus anciens manuscrits de la bibliothèque du Vatican, par Joseph Auria de Naples, célèbre géomètre de la fin du seizième siècle.

---

Je publierai dans le courant de l'année 1814 une traduction française des œuvres de Diophante. Les variantes des manuscrits de la bibliothèque impériale, avec l'édition de 1670, seront placées à la suite de ma traduction. J'ai fait principalement usage du manuscrit 2380 grec et latin. On lit en tête de ce manuscrit : *Diophanti Alexandrini arithmeticonum libri sex, ejusdem de numeris polygonis libellus, Josepho Auria interprete; cum antiquissimis vaticanis codicibus tribus græcis manuscriptis diligentissime collati operâ et studio Josephi Aurie.*

Ma traduction des coniques d'Apollonius paraîtra dans le courant de l'année 1815.



---

---

## INSTITUT DE FRANCE.

*Rapport de MM. DELAMBRE et PRONY, sur une édition grecque, latine et française des quinze livres des Éléments et du livre des Données d'Euclide, par M. Peyrard.*

LA classe avait déjà, sur le rapport de MM. Lagrange, Legendre et Delambre, donné son approbation à une traduction complète des OEuvres qui nous restent d'Euclide; M. Peyrard, auteur de ce travail, avait comparé tous les manuscrits grecs qui sont à la bibliothèque impériale, au nombre de vingt-trois. Il était résulté de cette comparaison qu'aucun de ces manuscrits n'est entièrement conforme à l'édition d'Oxford; que cette édition, qui passe pour la meilleure, et qui est sans contredit la plus belle, n'est pourtant, quant au texte grec, qu'une copie de l'édition de Bâle, dont elle a reproduit jusqu'aux fautes les plus palpables; que la plupart de ces manuscrits offrent des variantes qui remplissent quelques lacunes, ou éclaircissent quelques passages de ces deux éditions principales; qu'en général cependant tous ces manuscrits diffèrent peu les uns des autres, et diffèrent beaucoup d'un manuscrit portant le n° 190, qui provient de la bibliothèque du Vatican, d'où il fut envoyé en France par M. Monge.

Ce manuscrit porte tous les caractères qui peuvent en attester l'ancienneté, tous les autres paraissent plus modernes; M. Peyrard le croit de la fin du neuvième siècle. Mais cette date n'est pas son principal mérite; le texte y paraît plus pur, plus clair, moins prolix, et par-là même plus intelligible. C'est à ce manuscrit que M. Peyrard s'est principalement attaché, il en avait porté toutes les variantes aux marges d'un exemplaire de l'édition d'Oxford; cet exemplaire et le manuscrit qui avait servi à le corriger, furent remis aux commissaires nommés par la classe; ils vérifièrent les notes marginales de M. Peyrard; ils y remarquèrent des additions nécessaires, d'autres simplement utiles, des suppressions qui n'étaient pas moins avantageuses, d'autres changements sur lesquels les avis pouvaient être partagés, quelques-uns même qui ne semblaient pas devoir être adoptés, et leur conclusion fut que la classe pouvait donner son approbation au travail de M. Peyrard; que s'il n'était pas permis d'espérer une édition du texte grec purgé de toutes les fautes que les manuscrits pouvaient corriger, et enrichi de toutes les additions qu'ils pouvaient fournir, édition qui ne pouvait manquer d'être dispendieuse et qui demanderait beaucoup de temps, il était au moins à souhaiter que M. Peyrard ajoutât à sa traduction la liste des variantes qu'il aurait adoptées ou simplement recueillies, afin que les géomètres pussent corriger les éditions anciennes en attendant l'édition plus correcte qui pourrait faire oublier toutes les précédentes.

Ces conclusions adoptées par la classe inspirèrent un nouveau courage à M. Peyrard; il entreprit l'édition grecque, latine et française, dont nous avons à rendre compte; elle aura deux volumes in-4°; le premier est achevé. Sur la demande de l'auteur, S. E. le Ministre de l'intérieur, par sa lettre du 20 novembre 1813, invite la classe à examiner *si l'ouvrage est aussi exact que l'auteur a désiré le faire, si les leçons choisies sont en effet celles qui méritaient*

*d'être adoptées de préférence, enfin si le livre remplit bien toutes les conditions qui pouvaient être exigées.*

La classe d'histoire et de littérature ancienne a été en même temps invitée à considérer la traduction sous le rapport du style et de l'exécution ; S. E. prie les deux classes de vouloir bien, soit en particulier, soit en se réunissant, examiner le volume sous ces divers rapports.

Deux commissions ont été nommées ; les deux rapporteurs choisis par elles ont eu plusieurs conférences ; ils se sont trouvés du même avis, et chacun d'eux s'attachera plus particulièrement aux objets qui sont de sa compétence, en observant la ligne de démarcation tracée par S. E. le Ministre de l'intérieur.

L'ouvrage est précédé d'une préface, où l'éditeur rend compte des recherches qu'il a faites, des secours qu'il s'est procurés, du système qu'il a suivi ; cette préface est en deux langues, nous n'en examinerons ici que les idées.

Ce qu'on sait sur la personne d'Euclide se réduit à bien peu de chose, mais son ouvrage jouit de la plus grande réputation. On convient assez généralement qu'Euclide n'a fait que rassembler et mettre en ordre les théorèmes trouvés par les géomètres qui étaient venus avant lui ; peut-être a-t-il augmenté le nombre de ces théorèmes, il se peut qu'il en ait perfectionné les démonstrations ; cependant quelques auteurs attribuent ces démonstrations à Théon, l'un des plus anciens et plus célèbres commentateurs des Éléments. Proclus, qui nous a laissé quatre livres de commentaires sur le premier livre d'Euclide, dans une longue liste de tous les grecs qui se sont distingués dans les mathématiques, en cite quatre qui avaient composé des éléments avant Euclide. Le premier est Hippocrate de Chios, célèbre encore aujourd'hui par ses Lunules ; le second est Léon, dont l'ouvrage était plus plein, plus utile que celui de son prédécesseur ; le troisième est Theudius de Magnésie, que Proclus loue pour l'ordre qu'il a mis dans la rédaction ; après Léon vient Herotime de Colophon, qui, perfectionnant les découvertes d'Eudoxe et de Thætète, mit aussi beaucoup du sien dans les éléments ; peu de temps après vint Euclyde, qui, suivant le témoignage de Proclus, rassembla les éléments, mit en ordre beaucoup de choses trouvées par Eudoxe, perfectionna ce qui avait été commencé par Thætète, et démontra plus rigoureusement ce qui n'avait encore été que trop mollement démontré avant lui. Euclide vivait sous le premier des Ptolémées, car Archimède le cite dans son premier livre ; il avait fait beaucoup d'autres ouvrages remarquables par leur admirable exactitude et pleins de théories savantes. Proclus cite particulièrement son optique, sa catoptrique, ses éléments de musique, et enfin, son livre des diarèses, *διαρίσεων* ; mais ce qu'il admire surtout c'est le livre des éléments, tant pour l'ordre que pour le choix des théorèmes et des problèmes, qui méritent véritablement le nom d'élémentaires : il est à remarquer que Proclus ne dit rien des données, et qu'il n'a pas nommé Théon.

Ce passage que nous traduisons fidèlement, et dont Grégori dans sa préface avait seulement extrait quelques lignes, semble décisif ; aussi l'idée de ceux qui voulaient dépouiller presque entièrement Euclide en faveur de Théon, a-t-elle été vivement combattue par Butéon et Savilius ; Robert Simson en se rangeant à leur avis, le modifie d'une manière qui le rend encore plus favorable à Euclide. Par une espèce de superstition, excusable dans un traducteur, il a l'air de poser comme un axiôme qu'il est impossible qu'Euclide se soit jamais trompé, ou qu'il ait eu la moindre distraction. Ainsi quand il est obligé de reconnaître qu'une définition n'est pas assez

juste, qu'une démonstration est incomplète ou peu rigoureuse, il en rejète assez durement la faute sur Théon ou quelque autre commentateur, qu'il accuse nettement d'ineptie ou au moins d'ignorance en mathématiques. Le nouveau traducteur, sans s'éloigner beaucoup de cette manière de voir de Simson, est au moins plus modéré dans les termes; et pour rejeter plusieurs choses qui véritablement paraissent peu dignes d'Euclide, il a, ce qui manquait à Simson, l'autorité d'un bon manuscrit, dans lequel les passages dignes de censure se trouvent omis ou corrigés.

Cette prévention en faveur de son auteur, et la supériorité du manuscrit du Vatican sur tous les autres, ont fait penser à M. Peyrard, que ce manuscrit pourrait bien être le véritable texte d'Euclide, tandis que tous les autres, et en particulier ceux qui ont servi à l'édition de Bâle ou d'Oxford, seraient les éditions données par Théon, ou par les commentateurs venus après lui....

En avouant que nous n'avons aucun argument bien péremptoire pour rejeter la conjecture de M. Peyrard, nous dirons pourtant qu'elle ne nous paraît pas suffisamment établie.....

Nous n'attribuerons donc pas à Théon toutes les différences qui se trouvent entre les manuscrits plus modernes et le manuscrit du Vatican; nous ne dirons pas que ce manuscrit soit le texte véritable d'Euclide, car alors il faudrait attribuer à Euclide les mauvaises leçons que M. Peyrard a justement rejetées de son édition pour suivre ou les autres manuscrits ou les éditions de Bâle et d'Oxford. Nous ne dirons pas même que Théon soit décidément l'auteur de la définition condamnée par Simson; il est vrai que Théon la développe et l'explique dans son commentaire sur l'Almageste; mais il la rapporte sans pour cela s'en déclarer l'auteur, au lieu que dans un autre endroit il donne formellement comme de lui le théorème concernant les secteurs, qu'il dit avoir démontré dans son explication d'Euclide, car c'est ainsi que pour éviter l'équivoque nous traduisons le mot *indecor*, qu'on traduit communément par le mot *édiction*.

Nous n'accuserons point Théon d'avoir supprimé des démonstrations rigoureuses, pour en substituer d'autres qui ne prouvent rien ou qui sont inintelligibles. Nous admettrons aisément que Théon a pu commettre quelques fautes par inattention, mais non qu'il ait été assez ignorant pour ne sentir ni le mérite d'une bonne démonstration, ni les défauts de celles qu'il mettait à la place. Au reste, ce reproche que nous avons l'air d'adresser à M. Peyrard, va bien plus justement à Simson, dont la préface toute entière roule sur cette idée; et d'ailleurs nous sommes loin de donner trop d'importance à l'opinion d'un commentateur sur la source des erreurs avouées qu'il s'agit de rectifier. Que ces erreurs viennent d'Euclide lui-même ou de l'un de ses commentateurs, ou, ce qui souvent est plus probable, qu'elles viennent des copistes, rien n'est plus indifférent; pourvu que le nouvel éditeur les corrige bien, il aura rempli sa tâche; et s'il peut prouver que ses corrections sont appuyées du témoignage d'un ancien manuscrit, on n'a rien de plus à lui demander.

Ce qui distingue les *Éléments* d'Euclide, ce sont moins les théorèmes eux-mêmes, ou l'ordre dans lequel il les a fait dériver les uns des autres, que la manière dont il les a démontrés.....

Le mérite principal est dans la marche rigoureuse qu'il a suivie dans toutes ses démonstrations; on pourrait dire cependant que cette méthode même a trouvé plus de partisans que d'imitateurs.....

Mais sans nous déclarer exclusivement les admirateurs d'une manière passée de mode, nous dirons que cette manière a des avantages précieux, en même temps qu'elle a des inconvénients graves; qu'elle forme un langage aujourd'hui peu connu et qui mérite de l'être d'avantage; qu'en

la voyant appliquée par Euclide à des théorèmes assez simples, on pourra devenir en état de suivre plus facilement les démonstrations plus longues et plus obscures d'Apollonius et d'Archimède; que cette étude sera du moins un exercice utile pour s'habituer à la rigueur des démonstrations dont on n'est que trop disposé à se relâcher. On ne serait écouté de personne aujourd'hui si l'on proposait de commencer l'étude des mathématiques dans Euclide; mais on dira une chose vraie en assurant que tout géomètre fera très-bien de lire une fois en sa vie Euclide en entier, pour avoir une idée nette de ce genre de démonstrations, et se mettre en état de l'employer dans l'occasion.

Ces réflexions prouvent l'utilité de l'entreprise formée par M. Peyrard. Aujourd'hui que l'étude du grec commence à reflourir dans l'Université royale, il est à croire que peu de géomètres désormais se refuseront la satisfaction de lire Euclide, Archimède, Apollonius, Diophante dans leur langue. Il ne faut pas avoir fait une longue étude du grec pour entendre ces auteurs, qui ne sont pas plus difficiles que les fables d'Ésope, et bien moins, certainement, que les dialogues de Lucien, ou les vies de Plutarque, qu'on met entre les mains des enfants. Euclide surtout est d'une grande simplicité, ses phrases sont courtes, elles offrent peu d'inversions, on n'y voit pas une réflexion, pas un raisonnement grammaticalement compliqué; les mêmes expressions reparaisent à chaque instant; le vocabulaire n'est que trop borné, et les termes techniques que l'on y rencontre ne paraissent jamais sans avoir été préalablement définis.

L'intelligence du texte grec sera rendue plus facile encore par le système que M. Peyrard a suivi dans sa traduction latine. Partout il lui a donné la même fidélité qu'aux traductions interlinéaires des ouvrages qui servent à la première instruction. Les termes correspondants se suivent dans le même ordre dans les deux langues. Il n'est pas jusqu'aux articles qui manquent au latin, que le traducteur n'ait tenté de reproduire, par l'emploi continuel du pronom *ipse*, *ipsius*, etc., pour marquer les cas obliques des lignes, des angles, des figures, désignés en grec par des lettres indéclinables. Ces mots subsidiaires dont la répétition continuelle a quelque chose de fatigant, auraient pu être évités, sans doute, en les remplaçant parfois par les mots *rectæ*, *anguli*, *arcus*, ou tels autres qui n'auraient guères été plus longs; mais M. Peyrard est suffisamment excusé par l'exemple des traducteurs qui l'ont précédé, et même par celui des géomètres modernes qui ont écrit en latin. D'ailleurs, la traduction latine est moins destinée à être lue de suite, qu'à faciliter l'intelligence du texte grec; et ceux qui y trouveraient trop de difficulté pourront se borner à la traduction française qui est au bas de chaque page; outre le secours qu'il trouvait dans nos articles indéfinis, l'auteur n'a pas fait scrupule d'y introduire ces mots *ligne*, *angle*, etc., que nous regrettons tout-à-l'heure de ne pas trouver dans le latin. Cette licence est la seule qu'il ait prise; à cela près, le français est presque aussi littéral que le latin; on serait tenté quelquefois d'en faire un reproche au traducteur; mais la phrase d'Euclide est si simple, qu'il n'y a guères deux manières de la traduire, à moins de prendre des libertés qui, sans avantages bien réels, changeraient tout-à-fait le style de la démonstration.

Il nous reste à parler des variantes qui assurent à la nouvelle édition du texte une supériorité marquée sur les éditions précédentes, lesquelles d'ailleurs commencent à devenir un peu rares.

La première de ces variantes est celle qui place parmi les *demandes* trois propositions, que les éditions précédentes avaient rangées parmi les *notions communes*. Tous les auteurs qui ont depuis reproduit ces propositions se sont crus obligés de les démontrer; Euclide qui s'en est

dispensé , n'a pu cependant les regarder comme des vérités évidentes , mais seulement comme des principes qu'on pouvait lui accorder et qui lui étaient indispensables pour établir sa doctrine. Il faut convenir pourtant que ces trois demandes sont d'un genre tout différent des trois précédentes. En effet, il faudrait être d'un esprit bien difficile pour nier à Euclide la possibilité de mener une droite d'un point donné à un point donné , de prolonger une droite donnée , ou de décrire un cercle d'un centre et d'un rayon donnés. Mais on pourrait lui demander la preuve que tous les angles droits sont égaux , que deux lignes droites ne peuvent renfermer un espace , et surtout que deux droites se couperont nécessairement si on les prolonge suffisamment du côté où elles forment sur une autre droite deux angles dont la somme est moindre que celle de deux angles droits.

L'édition de Paris est conforme à tous les manuscrits de la Bibliothèque royale , si ce n'est que le n° 2545 place parmi les notions communes la troisième des propositions dont nous venons de parler , et que les n° 2546 et 2481 la placent tout à la fois , et parmi les demandes et parmi les notions communes. L'édition de Paris est encore conforme à l'édition arabe , à la traduction latine de Campan , faite d'après l'arabe , et à la traduction latine de Zamberti , faite d'après le texte grec , avant l'édition de Bâle ; Proclus , qui a démontré d'une manière très-simple que tous les angles droits sont égaux , place parmi les demandes , les deux premières propositions , et la troisième parmi les notions communes ; Boèce , qui a supprimé la troisième , place aussi les deux autres parmi les demandes. Tout porte donc à croire que Simon Gryncœus , qui est l'auteur de l'édition de Bâle , jugeant ces trois propositions déplacées , changea les accusatifs en nominatifs , les infinitifs en indicatifs , pour repôser ces propositions à une place qu'il jugeait plus convenable. Quoi qu'il en soit , nous croyons M. Peyrard plus qu'autorisé à la leçon qu'il a adoptée de préférence.

La proposition 7 du premier livre a plusieurs cas ; un seul cependant est énoncé et démontré dans tous les manuscrits. Clavius a senti la nécessité de nouveaux développements , il y consacre cinq figures et donne cinq démonstrations , qu'il pouvait réduire à trois ; Simson donne double démonstration et double figure , et la seconde est prise dans Clavius. M. Peyrard qui ne voyait dans les manuscrits qu'une seule figure et qu'une seule démonstration , pouvait dire tout simplement qu'Euclide avait eu un moment de distraction ; il pouvait compléter la démonstration dans une note. Il a voulu sauver Euclide de tout reproche ; en empruntant comme Simson , une figure à Clavius , et prolongeant deux lignes dans la figure d'Euclide , il a fait que la démonstration d'Euclide s'applique à la fois aux deux figures et aux deux cas qui renferment tous les autres. Ainsi *la démonstration s'est trouvée complète sans y changer un seul mot* , dit M. Peyrard , et cela est vrai ; mais dans la préparation il a été obligé d'ajouter une ligne qu'il a enfermée entre deux crochets , parce qu'elle ne se trouve dans aucun manuscrit ; il serait assez difficile d'imaginer comment les copistes auraient non-seulement omis une figure toute entière , mais encore les deux prolongements de la première figure , et enfin la ligne du texte qui explique ces prolongements ; ce n'est donc pas ici une variante que M. Peyrard porte dans le texte , c'est une véritable correction faite à un passage incomplet , mais du moins il l'a faite dans les moindres termes , et c'est par dévouement à son auteur qu'il se borne au mérite d'avoir retrouvé la véritable leçon.

La proposition 24 du livre III , a trois cas ; les éditions grecques n'en démontrent qu'un seul , Commandin dans sa traduction démontre les deux autres : Clavius développe la proposition , il y

emploie cinq figures ; Simson retranche une partie de la proposition qu'il reporte à la précédente ; à l'aide de son manuscrit M. Peyrard remplit la lacune.

Dans la proposition 26, la variante (3) éclaircit la démonstration, elle est donc utile ; M. Peyrard a bien fait de l'introduire dans le texte. Tous les traducteurs en avaient senti la nécessité, le manuscrit a légitimé leurs conjectures.

Le corollaire de la proposition 19 du livre V a paru si corrompu, que Gregori s'est cru obligé de le changer pour y donner un sens raisonnable. Clavius lui en avait donné l'exemple. Robert Simson, avec son aménité ordinaire, dit que tout ce livre V a été corrompu par des ignares en géométrie.....

Le manuscrit est absolument semblable à l'édition d'Oxford, c'est par des changements assez légers que M. Peyrard a rendu ce corollaire intelligible ; mais ces changements nécessaires ne sont autorisés par aucun manuscrit ; il lui donne ensuite la forme d'un théorème, et le démontre directement d'une manière assez courte dans sa préface.

Dans la dernière proposition du livre VI, ce qui regarde les secteurs circulaires paraît une addition de Théon, qui en réclame formellement la démonstration à la page 50 de son commentaire sur Ptolémée. Cet article ne se trouve pas dans le manuscrit du Vatican, et M. Peyrard se reproche de ne l'avoir pas retranché de son édition, par la raison qu'il n'est d'aucun usage dans tout ce qui suit ; mais puisque ce théorème est vrai, nous croyons le scrupule exagéré. Pour qu'un théorème soit admis dans un livre d'éléments, il n'est pas bien nécessaire qu'il serve à démontrer un théorème subséquent..... Cet article des secteurs a cependant trouvé grâce aux yeux de Simson, qui en ignorait probablement le véritable auteur, ou qui n'a pas vu dans le passage de Théon une preuve bien sûre qu'Euclide n'eût pas donné lui-même ce théorème.

Le traducteur continue de donner les raisons pour lesquelles il a rejeté du texte plusieurs variantes qu'il discute. Ces raisons sont assez plausibles, mais quand on ne les admettrait pas, comme les leçons rejetées se retrouvent à la fin du volume, personne n'aurait à se plaindre ; on sait qu'en pareille matière les éditeurs les plus estimables sont rarement du même avis.

Après avoir examiné la préface, nous aurions à passer en revue les variantes que l'auteur, soit en les admettant, soit en les rejetant, n'a pas jugées assez importantes pour leur consacrer un article particulier ; mais cet examen serait beaucoup trop long, nous nous bornerons à celles qui pourront nous fournir quelque remarque ; nous laisserons toutes celles qui nous ont paru ou indifférentes ou bien placées, soit qu'elles se trouvent dans le texte ou qu'elles soient à la fin du volume.

Dans la définition 15 du livre I<sup>er</sup>, l'éditeur, d'après plusieurs manuscrits, a reçu dans le texte les mots *πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν*, qui nous paraissent un double emploi, une glose fort inutile des mots *πρὸς ἢ* qui se trouvent deux lignes plus haut.

L'éditeur a marqué par des titres les différentes parties dont se compose la première proposition. Ces dénominations qui nous ont été conservées par Proclus, et qui sont *exposition*, *détermination*, *construction*, *démonstration* et *conclusion*, paraissent une pédanterie de commentateur, et le nouvel éditeur a bien fait de ne les employer qu'une seule fois pour exemple.

Il a rejeté parmi les variantes le corollaire de la proposition XV, qui dit que la somme des angles autour d'un même point est toujours égale à quatre angles droits. Sa raison est qu'il manque dans la plupart des manuscrits, et que dans les autres il est écrit d'une main étrangère. Il nous

semble qu'on aurait pu le conserver, à l'exemple de Simson. S'il n'est pas d'Euclide, s'il est implicitement renfermé dans ce qui précède, il a le mérite d'être court, et de contenir une remarque qui aurait pu échapper à quelques lecteurs. Il aurait pu, sans inconvénient, conserver quatre mots qu'il a retranchés de la proposition XX ; à la vérité, ils n'étaient pas bien nécessaires, mais ils paraissent dans la manière d'Euclide. Dans la proposition XXII, au contraire, il a rétabli dans le manuscrit deux lignes qui ne gâtent rien, mais dont on pouvait se passer.

Dans la proposition XXVI, l'addition faite (13) était nécessaire, quoique dans le manuscrit elle fût écrite en marge et d'une autre main ; elle se trouvait déjà dans l'édition d'Oxford.

Dans la proposition XXVII, la leçon du manuscrit est plus concise et suffisante ; celle d'Oxford est plus développée et plus dans la manière d'Euclide. On peut en dire autant de la proposition XXVIII. La leçon nouvelle de la proposition XXIX a le mérite de la brièveté.

A la proposition XXXI, l'éditeur s'est écarté de son manuscrit pour se conformer à l'édition d'Oxford ; il a cru parfaitement inutiles les mots qu'il supprimait : il y a dans tous ces choix un peu d'arbitraire, et nul inconvénient. Ainsi à la proposition XXXIV, le mot *χωρίως* ajouté à *παράλληλόγραμμον* n'était nullement nécessaire ; mais en le rétablissant, on a rendu l'énoncé plus conforme à celui de la proposition. A la proposition XXXVII, le retranchement autorisé par le manuscrit n'a aucun inconvénient : on fait toujours bien quand on retranche des mots inutiles ; la démonstration y gagne toujours, car celles des Grecs sont toujours un peu longues.

A la fameuse proposition XLVII (le carré de l'hypoténuse), on trouve une faute qui ne peut échapper au lecteur, et dont nous n'aurions pas fait mention, si elle ne se trouvait dans les trois langues : c'est un AA au lieu de BA.

Dans le livre II, proposition VIII, on serait tenté de regarder comme inutiles les quatre lignes introduites d'après le manuscrit ; mais dans la proposition IX, on a très-bien fait d'introduire ces mots *et elles sont égales*, qu'on était obligé de sous-entendre. La variante (12) de la même proposition est préférable à la leçon d'Oxford, qui pourtant revient à peu près au même ; car si les carrés sont égaux, les racines ou les côtés le sont nécessairement.

Le manuscrit avait, dans la proposition X, une faute évidente, qui n'était ni dans l'édition d'Oxford, ni dans celle de Bâle.

Dans le livre III, définition 2, l'éditeur a bien fait d'ajouter, d'après le manuscrit, les mots *ἐπι μηδέτερα μέρη* ; mais il a oublié de les traduire en français.

Dans la proposition VIII, l'éditeur a bien fait de suivre l'édition d'Oxford plutôt que le manuscrit ; la longue variante n'offre rien de bien intéressant.

Dans la proposition XIII on a ajouté, d'après le manuscrit, deux mots qui étaient si nécessaires, que Gregori les avait traduits ; quoiqu'ils ne fussent pas dans le texte.

Dans la proposition XXIV, le manuscrit et l'édition nouvelle présentent un sens moins incomplet : il y manque pourtant encore quelque chose, mais le sens ne peut être douteux.

La variante (6) de la proposition XXXVII, est certainement une amélioration.

Livre IV, au corollaire de la proposition V, la correction tirée du manuscrit est bonne ; la leçon d'Oxford était defectueuse ; cependant le sens était visible.

Livre V, proposition IV, l'éditeur a rétabli d'après le manuscrit deux mots qui manquaient, et que Simson avait jugés indispensables. Il y a ensuite, dans le manuscrit, trois lignes que l'éditeur a bien fait de ne point admettre dans son texte.

Proposition V, la variante (1) était nécessaire.

Proposition VII, l'éditeur n'a point inséré dans le texte un corollaire qui contient une proposition vraie, utile, et qui manque à ce livre, mais qui ne peut se conclure de la proposition précédente : il ne se trouve dans aucun manuscrit, si ce n'est celui du Vatican. Simson a donné à part cette proposition, qu'il a marquée de la lettre B. Dans la manière moderne de traiter les proportions, ce théorème est évident; il suffira d'en trouver l'énoncé parmi les variantes; mais il pouvait figurer dans le texte, avec une note.

A la proposition VIII, les sept lignes ajoutées d'après le manuscrit améliorent la démonstration sans la rendre encore bien claire. Simson avait raison de la trouver incomplète; mais il avait probablement tort d'en rejeter la faute sur Théon. Au reste, la proposition en elle-même est si simple, qu'on serait tenté d'en faire un axiôme; et de là vient peut-être la difficulté de la démontrer à la manière des anciens. Il y avait dans l'édition d'Oxford une faute de grammaire; un indicatif pour un infinitif; cette faute a été corrigée d'après le manuscrit.

A la proposition XXI, variante (3), la leçon d'Oxford était tronquée; on y ajoutait une explication qui paraît avoir été une note marginale, qui depuis aurait passé dans le texte. La leçon rend la glose inutile; ainsi le passage devient à la fois et plus court et plus clair.

A la proposition XXIII, on trouve une longue variante fournie par quatre manuscrits. Elle est préférable à la leçon d'Oxford. Simson a refondu la démonstration, et dans ses notes il critique vivement les interprètes qui l'ont précédé. Sa démonstration n'est pas non plus d'une grande clarté. Le théorème est un de ceux qu'on n'explique nulle part, et qu'on applique sans le connaître. Il suffit de l'écrire algébriquement pour en sentir la justesse. Cette espèce de traduction est en général le moyen le plus sûr pour juger les démonstrations des divers éditeurs; mais alors, si on les rend plus claires, on aperçoit en même temps qu'elles sont longues et peu naturelles.

Au livre VI, l'éditeur a supprimé la 5<sup>e</sup> définition, parce qu'elle n'est pas dans son manuscrit. Elle pourrait être de Théon; c'est celle que Simson a si vivement critiquée. La meilleure raison, c'est qu'elle est à peu près inutile, et qu'elle n'est point assez correcte. C'est la définition de la raison composée.

Dans la proposition II, l'éditeur a supprimé deux fois le mot παράλληλος qui n'est pas dans le manuscrit, et qui est de trop dans les imprimés. *Αγισιν παρά* signifie chez les Grecs ce que nous exprimons par *mener parallèlement*. On voit donc que le mot *parallèle* devient inutile. Deux lignes sont parallèles quand elles sont à côté l'une de l'autre sans jamais se couper; c'est ce que signifie *παρά* chez les géomètres grecs.

Dans la proposition III, l'éditeur a rétabli quelques articles qui manquaient, et adopté quelques variantes qui, sans être bien importantes par le sens, rendent la phrase plus correcte.

A la proposition X, il y avait dans l'édition d'Oxford une répétition inutile, occasionnée par l'insertion d'une phrase également superflue. L'éditeur, d'après quatre manuscrits, a donné une leçon plus courte et plus exacte.

A la fin de la deuxième démonstration de la proposition XIV, on a supprimé, d'après le manuscrit, quatre lignes qui formaient une glose peu nécessaire.

La proposition XXI avait un double emploi plus sensible, que le manuscrit a fait supprimer.

A la proposition XXII, le manuscrit a fourni deux développements utiles, qu'on pouvait cependant sous-entendre.

A la proposition XXVI, les éditeurs de Bâle et d'Oxford offraient un texte altéré, une figure mal faite. Clavius avait changé la démonstration et substitué deux figures à la figure unique du texte. Le manuscrit a fourni un texte correct et une figure exacte. Simson, en conservant la figure, avait changé le texte pour l'y faire cadrer. Sa correction était bonne, mais rien ne l'appuyait. Il est à croire que la nouvelle édition offre la véritable rédaction d'Euclide.

A la proposition XXVII,  $\tau\eta$  était une faute d'impression dans l'édition d'Oxford.

Livre VII. C'est le premier de ceux qui sont omis dans les éditions communes d'Euclide; il traite des nombres. La définition de l'unité ne signifie pas grand chose en grec, et ce défaut est bien plus sensible en latin et en français, où les mots *un* et *unité* ont une ressemblance que n'ont pas les mots *monade* et *un*;  $\mu\omega\acute{\nu}\eta\varsigma$  et  $\acute{\iota}$ .

L'éditeur a rétabli, d'après le manuscrit, la définition du nombre impairement pair qui manquait évidemment, quoiqu'on pût la supposer comprise dans celle du nombre pairement impair qui précède.

A la proposition X, on trouve une addition utile.

A la proposition XIX,  $\delta\iota\upsilon\tau\acute{\iota}\sigma\iota\varsigma$  pour  $\tau\epsilon\tau\acute{\alpha}\rho\tau\iota\sigma\iota\varsigma$ , était dans l'édition d'Oxford une faute prise dans celle de Bâle, et d'autant plus étonnante dans celle-là, qu'elle était corrigée dans la traduction.

A la proposition XXIII, la première variante a le mérite de plus de brièveté, la seconde celui de plus de justesse.

Nous sentons plus que personne combien ces détails sont arides et minutieux. Nous avons dû les rapporter pour donner à la Classe la preuve du scrupule avec lequel nous avons fait l'examen dont elle nous avait chargés. Notre conclusion sera que, nonobstant quelques fautes d'impression dont nous ajouterons ici la liste (1), qui étaient presque inévitables dans une entreprise de ce genre, et qui d'ailleurs sont bien moins nombreuses que celles de la belle édition d'Archimède, imprimée à Oxford, l'ouvrage est *exact*, non pas sans doute *autant que l'auteur aurait désiré le faire*, mais *autant qu'il était possible de l'espérer; que les leçons choisies sont en général celles qui méritaient la préférence*. Si quelquefois à cet égard nous nous sommes trouvés différer de sentiment avec l'éditeur, nous n'oserions assurer que nous ayons toujours raison; et ceux qui se trouveraient de notre avis auraient toujours la ressource de consulter la table des variantes; ainsi l'inconvénient, s'il en existe, est extrêmement léger. Nous dirons *que l'ouvrage remplit bien toutes les conditions qui pouvaient être exigées*, et que l'édition est évidemment supérieure à toutes celles que nous connaissons.

Fait à Paris, le 21 février 1814.

Signé PRONY et DELAMBRE, rapporteur.

Certifié conforme à l'original.

Le Secrétaire perpétuel,

Signé DELAMBRE.

(1) Cette liste est imprimée à la fin du volume.

# INSTITUT DE FRANCE.

## CLASSE D'HISTOIRE ET DE LITTÉRATURE ANCIENNE.

Paris, le 26 Février 1814.

*Le Secrétaire perpétuel de la Classe, à Son Excellence le Ministre de l'intérieur.*

**M**ONSIEUR LE COMTE,

Les *Éléments* d'Euclide ne renfermant que des définitions et des propositions de géométrie, sont essentiellement du ressort de la Classe des Sciences physiques et mathématiques, et sont entièrement étrangers, pour le fonds, au genre des travaux de celle d'histoire et de littérature ancienne. Cette Classe cependant, pour répondre, autant qu'il est en elle, au témoignage de confiance que Votre Excellence a jugé à propos de lui donner en la consultant sur le mérite du travail de M. Peyrard, s'est empressée de l'examiner sous le petit nombre de rapports qui la concernent et sur lesquels elle peut avoir une opinion motivée. Le compte que M. Delambre rendit il y a quelques années à la première Classe de la traduction française d'Euclide, et celui qu'il vient de lui rendre de l'édition du texte et des traductions latine et française dont il est accompagné, ainsi que de l'ensemble du travail de M. Peyrard, présentent les détails les plus intéressants qui supposent un examen très-approfondi de ce travail sous le rapport littéraire et sous celui de la science, et font connaître suffisamment ce qu'on doit en penser.

La classe d'histoire a donc cru devoir se borner à soumettre à Votre Excellence quelques observations générales sur la partie littéraire de l'ouvrage, et sur la manière dont il est exécuté.

Le texte d'Euclide lui a paru plus correct dans la nouvelle édition que dans les éditions antérieures; cependant elle pense que celle qui fut publiée à Bâle en 1533, par Simon Gryncœus, malgré quelques fautes d'impression, moins nombreuses qu'on ne le croit communément, et faciles à corriger, sera toujours précieuse aux amateurs de la langue grecque.

La partie typographique est en général soignée dans l'édition de M. Peyrard: il s'y est néanmoins glissé quelques fautes d'impression, surtout vers la fin du volume.

En comparant le texte grec de cette édition avec celui des éditions précédentes, on y remarque quelques différences. Les plus essentielles ont été relevées et appréciées dans le rapport fait à la première Classe, qui constate encore que l'auteur a rempli heureusement plusieurs lacunes avec le secours des manuscrits. . . . .

Les deux traductions jointes au texte sont très-littérales; peut-être même la traduction française l'est-elle trop. Cette manière de traduire mot à mot peut être bonne pour une version latine, dans laquelle on cherche plutôt l'exactitude et la fidélité que l'élégance, et dont quelques personnes peuvent avoir besoin pour entendre le texte; mais il semble que la traduction française aurait dû être faite avec un peu plus de liberté (1).

J'ai l'honneur de faire repasser à Votre Excellence l'ouvrage de M. Peyrard qu'elle m'avait envoyé, et de lui renouveler l'hommage de mes sentiments les plus respectueux.

Signé DACIER.

Certifié conforme à l'original,

Signé BARBIER DE NEUVILLE, chef de  
la 3<sup>me</sup> division du Ministère de l'intérieur.

(1) Voyez le rapport de M. Delambre, page 36, alinéa trois.

---

 INSTITUT DE FRANCE.

Paris, 14 août 1809.

*Rapport de MM. LAGRANGE, LEGENDRE et DELAMBRE, sur une traduction complète des quinze livres des Éléments, et des Données d'Euclide, par M. PEYRARD.*

LA Classe a déjà donné son approbation à une traduction d'Euclide, par M. Peyrard. A l'exemple de presque tous les éditeurs qui l'ont précédé, il avait omis les livres qui traitent des Quantités numériques, les trois derniers livres, et le livre des Données; mais il avait annoncé dès-lors une traduction complète. Le désir de lui donner toute la perfection possible lui a fait consulter tous les manuscrits de la bibliothèque royale. . . . .

Dépositaire de ces précieux manuscrits, M. Peyrard les a comparés soigneusement avec l'édition grecque d'Oxford; il a noté en marge de l'imprimé toutes les variantes, les a traduites en latin; et c'est sur ce texte rectifié qu'il a composé sa version, qui est aussi littérale que l'a permis le génie des deux langues.

Il a fait principalement usage du n° 190, qu'il nous a remis pour que nous puissions examiner son travail, et vérifier toutes les variantes dont il a enrichi les marges de son exemplaire de l'édition d'Oxford. Nous avons fait cette vérification, et nous avons reconnu partout la plus grande conformité avec le manuscrit.

Ces variantes, comme on peut s'y attendre, ne sont pas toutes de la même importance, et ne méritent pas toujours la préférence sur les leçons imprimées. Parmi ces variantes, il en est qui consistent en quelques mots omis dans les imprimés, dont les traducteurs avaient senti la nécessité, et que Grégori a fait entrer dans son texte, en les enfermant entre deux crochets; quelquefois c'est un présent au lieu d'un futur; *ἴσταν* au lieu de *ἴσταν*, ou réciproquement; le mot *ἴσταν* au lieu de *ἴσταν*, *égal*, pour *le même*; des expressions plus ou moins conformes au style ordinaire des géomètres, ou d'Euclide en particulier. Toutes ces variantes n'auraient de valeur qu'aux yeux des philologues et des érudits; mais il en est de vraiment dignes de l'attention des géomètres, en ce qu'elles changent en mieux le sens, ou qu'elles donnent un sens raisonnable à ce qui n'en présentait aucun. Ce sont des superfluités élaguées, des lignes entières omises dans les imprimés, et qui sont ou absolument nécessaires à la démonstration, ou y portent au moins des développements utiles. D'autres fois on y rencontre des leçons plus concises, et qui présentent un sens tout aussi clair; des transpositions qui rendent parfaitement intelligible ce qui paraissait obscur ou peu exact. La définition 5<sup>e</sup> du VI<sup>e</sup> livre, qui se trouve dans toutes les

éditions grecques, est une simple note placée au bas du manuscrit, d'où elle avait été mal à propos portée dans le texte : Robert Simson a écrit six pages contre cette mauvaise et inutile définition, et elle n'est pas d'Euclide.

Le même traducteur relève une bévue remarquable de tous les textes grecs imprimés, un changement de lettre dans la figure avait causé tout l'embarras. En rétablissant la lettre véritable  $\phi$  au lieu de  $\omega$ , on ne donne plus à Euclide le ridicule de paraître ignorer une vérité de la géométrie la plus élémentaire. Voyez *Prop. 17, liv. XII*.

La proposition 86 des *Données* avait fort inquiété Grégori qui, dans sa préface, en propose deux rédactions identiques, et à laquelle il voulait en ajouter une troisième, qui compléterait le système de la résolution des équations bi-quadratiques à la manière des anciens. Cette dernière conjecture n'est pas confirmée par le manuscrit, qui n'offre que l'une des deux premières rédactions. Grégori croyait le théorème singulièrement altéré; son erreur venait de ce qu'il ne connaissait pas un lemme qui se trouve dans le manuscrit à la fin des *Données*, et qui doit précéder la proposition 86.

M. Peyrard donne ce lemme qui, au reste, est une proposition bien simple et bien connue. Il s'agit de trouver la surface d'un parallélogramme obtus-angle; mais cette proposition renferme une construction nécessaire à la démonstration des propositions 86 et 87; qui disent que si deux lignes formant un angle donné comprennent un espace donné, et que le carré de l'une, augmenté ou diminué d'un espace donné, soit au carré de la seconde, en raison donnée, ces deux lignes seront connues.

D'après toutes ces considérations, nous pensons que la classe peut donner son approbation au travail de M. Peyrard, pour l'encourager encore à terminer l'entreprise qu'il poursuit avec une persévérance digne d'éloges, et qui nous fera mieux connaître tous les mathématiciens grecs. Nous exprimerions le vœu de voir paraître une édition grecque du texte d'Euclide, purgée de toutes les fautes que les manuscrits ont fait rectifier, et enrichie de toutes les additions qu'ils ont fournies; mais cette édition serait dispendieuse et demanderait beaucoup de temps : nous nous bornerons donc à souhaiter que M. Peyrard ajoute à sa traduction la liste de toutes les variantes qu'il a recueillies, et qui lui paraîtront mériter quelque attention. Ainsi les géomètres pourront corriger les éditions anciennes, en attendant celle qui pourrait faire oublier toutes les précédentes.

*Signé à la minute, LAGRANGE, LEGENDRE, DELAMBRE, rapporteur.*

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.



## ΟΡΟΙ

## DEFINITIONES.

- α'. ΣΗΜΕΙΟΝ ἴστιν, οὗ μέρος οὐδέν.  
β'. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατὺς.  
γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα.  
δ'. Εὐθεῖα γραμμὴ ἴστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς  
ἐφ' ἑαυτῆς σημεῖοις κείται.  
ε'. Επιφάνεια δὲ ἴστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος  
μόνον ἔχει.  
ς'. Επιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαι.  
ζ'. Επίπεδος ἐπιφανεία ἴστιν, ἥτις ἐξ ἴσου  
ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κείται.

1. PUNCTUM est, cujus pars nulla.  
2. Linea autem, longitudo non lata.  
3. Lineæ vero extrema, sunt puncta.  
4. Recta linea est, quæ ex æquo inter sua  
puncta ponitur.  
5. Superficies autem est, quod longitudinem  
et latitudinem solum habet.  
6. Superficiæ vero extrema, sunt lineæ.  
7. Plana superficies est, quæ ex æquo inter  
suas rectas ponitur.

## LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

### DÉFINITIONS.

1. Le point est ce dont la partie est nulle.  
2. Une ligne est une longueur sans largeur.  
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.  
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.  
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.  
6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.  
7. La surface plane est celle qui est également placée entre ses droites.

η. Επίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἢ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ. Όταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν εἰρημένην γωνίαν γραμμαὶ εὐθείαι ᾧσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι. Όταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐπιπέδων γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρω τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶ· καὶ ἡ ἐφισταμένη εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἢν ἐφίστηκεν.

ια. Ἀμβλεία γωνία ἐστὶν, ἢ μείζων ὀρθῆς.

ιβ. Ὄξεια δὲ, ἢ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ. Ὁρος ἐστὶν, ὃ τινός ἐστι πέρας.

ιδ'. Σχήμα ἐστὶ, τὸ ὑπὸ τινος ἢ τινῶν ἄρων περιεχόμενον.

ιε. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπιπέδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἢ καλεῖται περιφέρεια· πρὸς ἣν, ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

8. Planus autem angulus est in plano duarum linearum sese tangentium, et non in directum positarum, alterius ad alteram inclinatio.

9. Quando autem continentes dictum angulum lineæ rectæ sunt, rectilineus appellatur angulus.

10. Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; et insistens recta perpendicularis vocatur in quam insistit.

11. Obtusus angulus est, qui major recto.

12. Acutus autem, qui recto minor.

13. Terminus est, quod alicujus est extremum.

14. Figura est, quod ab aliquo vel aliquibus terminis continetur.

15. Circulus est figura plana ab una lineâ contenta, quæ vocatur circumferentia; ad quam ab uno puncto eorum intra figuram positorum, omnes cadentes rectæ ad circuli circumferentiam æquales inter se sunt.

8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.

9. Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme rectiligne.

10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.

12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.

13. On appelle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.

14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.

15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence, toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.

15'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.

16'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἄτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

17'. Ημικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιχόμενον σχῆμα, ὑπὸ τῆς ἑξῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

18'. Τμήμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιχόμενον σχῆμα ὑπὸ τῆς εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας, ἢ μείζονος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου.

19'. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιχόμενα.

κα. Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

κε. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

κγ. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλείονων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιχόμενα.

κδ. Τῶν δὲ τριπλευρῶν σχημάτων, ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς ἑξῆς ἴσας ἔχον πλευράς.

16. Centrum autem circuli, hoc punctum vocatur.

17. Diameter vero circuli est recta quædam per centrum ducta, et terminata ex utraque parte a circuli circumferentiâ; quæ et bifariam secat circumulum.

18. Semicirculus vero est contenta figura ab et diametro, et circumferentiâ circuli apprehensâ ab diametro.

19. Segmentum circuli est, contenta figura ab et rectâ, et circuli circumferentiâ, vel majore vel minore semicirculo existente.

20. Figuræ rectilineæ sunt, quæ ab rectis continentur.

21. Trilateræ quidem, quæ ab tribus.

22. Quadrilateræ autem, quæ ab quatuor.

23. Multilateræ vero, quæ ab pluribus quam quatuor rectis continentur.

24. Trilaterarum autem figurarum, æquilaterum quidem triangulum est quod tria æqualia habet latera.

16. Ce point se nomme le centre du cercle.

17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutendue par le diamètre.

19. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par la circonférence du cercle ; le demi-cercle étant plus grand ou plus petit que le segment.

20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.

21. Les figures trilatères sont terminées par trois droites.

22. Les quadrilatères, par quatre.

23. Les multilatères, par plus de quatre.

24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.

#### 4 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

κί. Ισοσκελής δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἰσὰς ἔχον πλευράς.

κς'. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους<sup>10</sup> ἔχον πλευράς.

κζ'. Ἐπι τε<sup>11</sup>, τῶν τριπλευρῶν σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

κη'. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλυγίαν γωνίαν.

κθ'. Οξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς<sup>12</sup> τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

λ'. Τῶν δὲ τετραπλευρῶν σχημάτων, τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον.

λα'. Ἐπιρόμβικες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δὲ.

λβ'. Ρόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δὲ.

λγ'. Ραμβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίων πλευρῶν τε καὶ γωνίας ἰσὰς ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστίν, οὔτε ὀρθογώνιον.

λδ'. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τετραπίγια καλεῖσθω.

25. Isosceles vero, quod duo solum æqualia habet latera.

26. Scalenum autem, quod tria inæqualia habet latera.

27. Insuper, trilaterarum figurarum rectangulum quidem triangulum est, quod habet rectum angulum.

28. Obtusangulum autem, quod habet obtusum angulum.

29. Acutangulum vero, quod tres acutos habet angulos.

30. Quadrilaterarum autem figurarum, quadratum quidem est, quod et æquilaterum est et rectangulum.

31. Oblongum autem, quod rectangulum quidem, non vero æquilaterum.

32. Rhombus vero, quod æquilaterum quidem, non vero rectangulum.

33. Rhomboïdes autem, quod et opposita latera et angulos æqualia inter se habet, quod neque æquilaterum est, nec rectangulum.

34. Præter hæc autem quadrilatera trapezia vocentur.

25. Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux.

26. Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux.

27. De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit.

28. Le triangle obtusangle, celle qui a un angle obtus.

29. Le triangle acutangle, celle qui a ses trois angles aigus.

30. Parmi les figures quadrilatères, le carré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.

31. Le rectangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.

32. Le rhombe, celle qui est équilatérale, et non rectangulaire.

33. Le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.

34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.

## LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 5

λέ. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἱ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

35. Parallelae sunt rectae, quae in eodem plano existentes, et productae in infinitum ad utramque partem, in neutram sibi coincidunt.

### ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

α. Ητήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχές ἑκβάλλειν.

γ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψασθαι.

δ. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε. Καὶ ἴαν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖά τις ἑμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἰλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἰλάσσονες γωνίαι.

ς. Καὶ δύο εὐθείας χωρὶον μὴ περιέχειν.

### POSTULATA.

1. POSTULATUR, ab omni puncto ad omnē punctum rectam lineam ducere.

2. Et finitam rectam in directum secundum continuum producere.

3. Et omni centro et intervallo circumulum describere.

4. Et omnes angulos rectos aequales inter se esse.

5. Et si in duas rectas recta quaedam incidens, interiores et ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, productas illas duas rectas in infinitum sibi coincidere ad quas partes sunt duobus rectis minores anguli.

6. Et duas rectas spatium non continere.

35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

### DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
6. Deux droites ne renferment point un espace.

## 6 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

### ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

- α. Τὰ τῆ αὐτῆ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσιν ἴσα.  
 β. Καὶ ἰὰν ἴσοις ἴσα προστεθῆ, τὰ ὅλα ἴσιν ἴσα.  
 γ. Καὶ ἰὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρθῆ, τὰ καταλειπόμινά ἴσιν ἴσα.  
 δ. Καὶ ἰὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῆ, τὰ ὅλα ἴσιν ἀνίσα.  
 ε. Καὶ ἰὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρθῆ, τὰ λοιπά ἴσιν ἀνίσα.  
 ς. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἴσιν.  
 ζ. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἴσιν.  
 η. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα, ἴσα ἀλλήλοις ἴσιν.  
 θ. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον ἴσιν.

### NOTIONES COMMUNES.

1. Quæ eadem æqualia, et inter se sunt æqualia.
2. Et si æqualibus æqualia addantur, tota sunt æqualia.
3. Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.
4. Et si inæqualibus æqualia addantur, tota sunt inæqualia.
5. Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.
6. Et quæ ejusdem duplicia, æqualia inter se sunt.
7. Et quæ ejusdem dimidia, æqualia inter se sunt.
8. Et quæ congruant inter se, æqualia inter se sunt.
9. Et totum parte majus est.

### NOTIONS COMMUNES.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront égaux.
3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront inégaux.
5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

PROPOSITIO I.

Επί τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τριγώνων ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

ΕΚΘΕΣΙΣ'. Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα<sup>2</sup> πεπερασμένη ἡ AB.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ'. Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς AB εὐθείας πεπερασμένης<sup>2</sup> τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

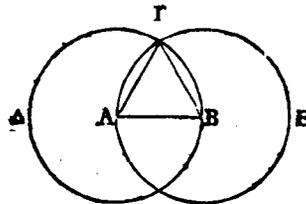
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ'. Κέντρον μὲν τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ AB, κύκλος γεγράφθω ὁ BΓΔ· καὶ πάλιν, κέντρον μὲν τῷ B, διαστήματι δὲ τῷ BA, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ· καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ A, B σημεία ἐπιζύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

SUPER datam rectam terminatam, triangulum æquilaterum constituere.

EXPOSITIO. Sit data recta terminata AB.

DETERMINATIO. Oportet igitur super AB rectam terminatam triangulum æquilaterum constituere.

CONSTRUCTIO. Centro quidem A, intervallo autem AB, circulus describatur BΓΔ; et rursus, centro quidem B, intervallo autem BA, circulus describatur ΑΓΕ; et ab Γ puncto, in quo sese secant circuli, ad A, B puncta adiungantur rectæ ΓΑ, ΓΒ.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ<sup>6</sup>. Καὶ ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ BΓΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ AB· πάλιν, ἐπεὶ τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΓΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ BA. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ

DEMONSTRATIO. Et quoniam A punctum centrum est BΓΔ circuli, æqualis est ΑΓ ipsi AB; rursus, quoniam B punctum centrum est ΑΓΕ circuli, æqualis est ΒΓ ipsi BA. Ostensa

PROPOSITION PREMIÈRE.

SUR une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

EXPOSITION. Soit AB une droite donnée et finie.

DÉTERMINATION. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.

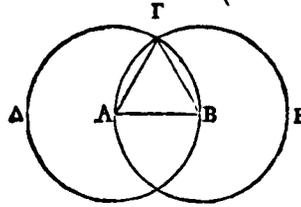
CONSTRUCTION. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BΓΔ (dem. 3); et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence ΑΓΕ; et du point Γ, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites ΓΑ, ΓΒ (dem. 1).

DÉMONSTRATION. Car, puisque le point A est le centre du cercle BΓΔ, la droite ΑΓ est égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le

## 8 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΓΑ τῆ AB ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῆ AB ἴσιν ἴση. Τὰ δὲ τῶ αὐτῶ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσιν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῆ ΓΒ ἴση ἴσιν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

est autem et ΓΑ ipsi AB æqualis; utraque igitur ipsarum ΓΑ, ΓΒ ipsi AB æqualis est. Quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; et ΓΑ igitur ipsi ΓΒ est æqualis; tres igitur ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ æquales inter se sunt.



**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ** <sup>β</sup>. Ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνίσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

**CONCLUSIO**. Æquilaterum igitur est ΑΒΓ triangulum, et constitutum est super datam rectam terminatam ΑΒ. Quod oportebat facere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

### PROPOSITIO II.

Πρὸς τῶ δοθέντι σημείῳ, τῆ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθείαν θέσθαι.

Ad datum punctum, datæ rectæ æqualem rectam ponere.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δι' δὲ τὸ Α σημείον, τῆ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῆ ΒΓ ἴσην εὐθείαν θέσθαι.

Sit quidem datum punctum Α, data autem recta ΒΓ; oportet igitur ad Α punctum, datæ rectæ ΒΓ æqualem rectam ponere.

Ἐπιζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνιστάτω ἐπ' αὐτῆς

Adjungatur enim ab Α puncto ad Β punctum recta ΑΒ, et constituatur super eam triangulum

centre du cercle ΑΓΕ, la droite ΒΓ est égale à la droite ΒΑ; mais on a démontré que la droite ΓΑ était égale à la droite ΑΒ; donc chacune des droites ΓΑ, ΓΒ est égale à la droite ΑΒ; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1); donc la droite ΓΑ est égale à la droite ΓΒ; donc les trois droites ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ sont égales entre elles.

**CONCLUSION**. Donc le triangle ΑΒΓ (def. 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie ΑΒ. Ce qu'il fallait faire.

### PROPOSITION II.

A un point donné, placer une droite égale à une droite donnée.

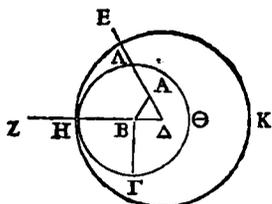
Soit Α le point donné, et ΒΓ la droite donnée; il faut au point Α placer une droite égale à la droite donnée ΒΓ.

Menons du point Α au point Β la droite ΑΒ (dem. 1); sur cette droite construisons

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 9

τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθείαις αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ· καὶ πάλιν, κέντρῳ τῷ Δ, καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

æquilaterum ΔΑΒ, et producantur in directum ipsis ΔΑ, ΔΒ rectæ ΑΕ, ΒΖ, et centro quidem Β, intervallo vero ΒΓ, circulus describatur ΓΗΘ; et rursus centro Δ, et intervallo ΔΗ circulus describatur ΗΚΛ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. Πάλιν\*, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὅν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῶν αὐτῶν ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κείται ἡ ΑΛ. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

Quoniam igitur Β punctum centrum est ΓΗΘ circuli, æqualis est ΒΓ ipsi ΒΗ. Rursus, quoniam Δ punctum centrum est ΗΚΛ circuli, æqualis est ΔΛ ipsi ΔΗ, quarum ΔΑ ipsi ΔΒ æqualis est; reliqua igitur ΑΛ reliquæ ΒΗ est æqualis. Ostensa est autem et ΒΓ ipsi ΒΗ æqualis; utraque igitur ipsarum ΑΛ, ΒΓ ipsi ΒΗ est æqualis. Quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; et ΑΛ igitur ipsi ΒΓ est æqualis.

Ad datum igitur punctum Α, datæ rectæ ΒΓ æqualis recta ponitur ΑΛ. Quod oportebat facere.

le triangle équilatéral ΔΑΒ (prop. 1); menons les droites ΑΕ, ΒΖ dans la direction de ΔΑ, ΔΒ; du centre Β et de l'intervalle ΒΓ, décrivons le cercle ΓΗΘ (dem. 3); et de plus, du centre Δ et de l'intervalle ΔΗ, décrivons le cercle ΗΚΛ.

Puisque le point Β est le centre du cercle ΓΗΘ, ΒΓ est égal à ΒΗ (déf. 15); de plus, puisque le point Δ est le centre du cercle ΗΚΛ, la droite ΔΛ est égale à la droite ΔΗ; mais ΔΑ est égal à ΔΒ; donc le reste ΑΛ est égal au reste ΒΗ (not. 3). Mais on a démontré que ΒΓ est égal à ΒΗ; donc chacune des droites ΑΛ, ΒΓ est égale à ΒΗ. Mais les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1.); donc ΑΛ est égal à ΒΓ.

Donc, au point donné Α, on a placé une droite ΑΛ égale à la droite donnée ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

10 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεισῶν δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ αἱ AB, Γ, ὧν μείζων ἴστω ἡ AB· δεῖ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

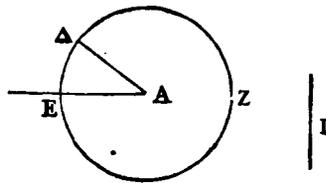
Κείσθω γάρ' πρὸς τῷ A σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ AD· καὶ κέντρον μὲν τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ AD, κύκλος γιγράφθω ὁ ΔEZ.

PROPOSITIO III.

Duobus datis rectis inæqualibus, a majore minori æqualem rectam auferre.

Sint datæ duæ rectæ inæquales AB, Γ, quarum major sit AB; oportet igitur a majore AB minori Γ æqualem rectam auferre.

Ponatur enim ad A punctum ipsi Γ rectæ æqualis AD; et centro quidem A, intervallo vero AD circulus describatur ΔEZ.



Καὶ ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔEZ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ AD· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ AD ἴστων ἴση. Ἐκατέρα ἄρα τῶν AE, Γ τῇ AD ἴστων ἴση· ὥστε καὶ ἡ AE τῇ Γ ἴστων ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν AB, Γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην ἀφῆρηται ἡ AE. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

Et quoniam A punctum centrum est ΔEZ circuli, æqualis est AE ipsi AD; sed et Γ ipsi AD est æqualis; utraque igitur ipsarum AE, Γ ipsi AD est æqualis; quare et AE ipsi Γ est æqualis.

Duabus igitur datis rectis inæqualibus AB, Γ, a majore AB minori Γ æqualis ablata est AE. Quod oportebat facere.

PROPOSITION III.

Deux droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.

Soient AB, Γ les deux droites inégales données, que AB soit la plus grande; il faut de la plus grande AB retrancher une droite égale à la plus petite Γ.

Au point A plaçons une droite AD égale à Γ (prop. 2), et du centre A et de l'intervalle AD, décrivons le cercle ΔEZ (dem. 3).

Puisque le point A est le centre du cercle ΔEZ, AE est égal à AD; mais Γ est égal à AD; donc chacune des droites AE, Γ, est égale à la droite AD; donc la droite AE est égale à la droite Γ.

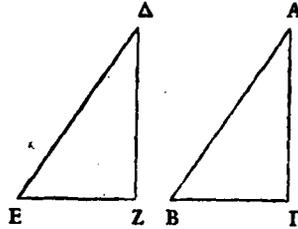
Donc les deux droites inégales AB, Γ, étant données, on a retranché de la plus grande AB une droite AE égale à la plus petite Γ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Εάν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευράς ταῖς' ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχη, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων ἑὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποταίνουσιν.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, et angulum angulo æqualem habeant, ab æqualibus rectis contentum; et basim basi æqualem habebunt, et triangulum triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt.



Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ABΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευράς τὰς AB, ΑΓ, ταῖς ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν AB τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἴσται, καὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται,

Sint duo triangula ABΓ, ΔΕΖ, duo latera AB, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ æqualia habentia, utrumque utrique, AB quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ vero ipsi ΔΖ, et angulum ΒΑΓ angulo ΕΔΖ æqualem; dico et basim ΒΓ basi ΕΖ æqualem esse, et ABΓ triangulum ΔΕΖ triangulo æquale fore, et reliquos angulos reliquis angulis æquales fore utrumque utrique, quos æqualia

PROPOSITION IV.

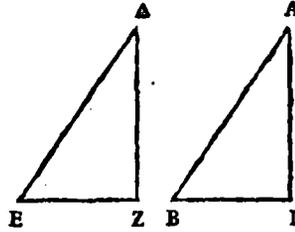
Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

Soient les deux triangles ABΓ, ΔΕΖ; que ces deux triangles aient les deux côtés AB, ΑΓ égaux aux deux côtés ΔΕ, ΔΖ, chacun à chacun, le côté AB égal au côté ΔΕ, et le côté ΑΓ au côté ΔΖ, et qu'ils aient aussi l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΕΔΖ; je dis que la base ΒΓ est égale à la base ΕΖ, que le triangle ABΓ sera égal au triangle ΔΕΖ, et que les angles restans, soutendus par les côtés égaux,

12 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἑκατέρα ἑκατέρῃ, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπο-  
ταίνουσιν, ἢ μὲν ὑπὸ ABΓ τῆ ὑπὸ ΔEZ, ἢ δὲ ὑπὸ  
AΓB τῆ ὑπὸ ΔZE.

latera subtendunt, ABΓ quidem ipsi ΔEZ, AΓB  
vero ipsi ΔZE.



Εφαρμοζόμενου γὰρ τοῦ ABΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ  
ΔEZ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν A σημείου  
ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τῆς δὲ AB εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔE,  
ἐφαρμόσει καὶ τὸ B σημεῖον<sup>2</sup> ἐπὶ τὸ E, διὰ τὸ  
ἴσιν εἶναι τὴν AB τῆ ΔE· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς  
AB ἐπὶ τὴν ΔE, ἐφαρμόσει καὶ ἡ AΓ εὐθεῖα ἐπὶ  
τὴν ΔZ, διὰ τὸ ἴσιν εἶναι τὴν ὑπὸ BAΓ γωνίαν  
τῆ ὑπὸ EΔZ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Z  
σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσιν πάλιν εἶναι τὴν  
AΓ τῆ ΔZ. ΑΛΛὰ μὴν καὶ τὸ B ἐπὶ τὸ E ἐφαρ-  
μόσει, ὥστε βάσις ἡ BΓ ἐπὶ βάσιν τὴν EZ ἐφαρ-  
μόσει· εἰ γὰρ τοῦ μὲν B ἐπὶ τὸ E ἐφαρμόσαντος,  
τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Z, ἡ BΓ βάσις ἐπὶ τὴν EZ  
οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν,  
ἑπὲρ ἴσιν<sup>1</sup> ἀδύνατον. Εφαρμόσει ἄρα ἡ BΓ βάσις

Congruente enim ABΓ triangulo ΔEZ trian-  
gulo, et posito quidem A puncto super Δ  
punctum, AB vero rectā super ΔE; congruet  
et B punctum ipsi E, quia est æqualis AB  
ipsi ΔE; congruente autem AB ipsi ΔE, con-  
gruet et AΓ recta ipsi ΔZ, quia æqualis est  
BAΓ angulus ipsi EΔZ; quare et Γ punctum  
Z puncto congruet, quia æqualis rursus est AΓ  
ipsi ΔZ. Sed quidem et B ipsi E congruebat;  
quare basis BΓ basi EZ congruet; si enim  
quidem B ipsi E congruente, Γ vero ipsi Z,  
BΓ basis ipsi EZ non congruat, duæ rectæ  
spatium continebunt, quod est impossibile. Con-  
gruet igitur BΓ basis ipsi EZ, et æqualis ei  
erit; quare et totum ABΓ triangulum toti ΔEZ

seront égaux chacun à chacun; l'angle ABΓ égal à l'angle ΔEZ, et l'angle AΓB égal à l'angle ΔZE.

Car le triangle ABΓ étant appliqué sur le triangle ΔEZ, le point A étant posé sur le point Δ, et la droite AB sur la droite ΔE, le point B s'appliquera sur le point E, parce que AB est égal à ΔE; mais AB étant appliqué sur ΔE, la droite AΓ s'appliquera sur ΔZ, parce que l'angle BAΓ est égal à l'angle EΔZ; donc le point Γ s'appliquera sur le point Z, parce que AΓ est égal à ΔZ; mais le point B s'applique sur le point E; donc la base BΓ s'appliquera sur la base EZ; car si le point B s'appliquant sur le point E, et le point Γ sur le point Z, la base BΓ ne s'appliquait pas sur la base EZ, deux droites comprendraient un espace, ce qui est impossible (dem. 6); donc la base BΓ s'appliquera sur la base EZ, et lui sera

ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἴση αὐτῇ ἴσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῇ ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἴσονται, ἢ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἢ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοῖς πλευραῖς ἴσας ἔχη, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχη, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὑφ' ἧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἑ.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ, προσκεκληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἴσονται.

triangulo congruet, et æquale ei erit, et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et æquales eis erunt, ΑΒΓ quidem ipsi ΔΕΖ, ΑΓΒ vero ipsi ΔΖΕ.

Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utriusque, et angulum angulo æqualem habeant ab æqualibus lateribus contentum; et basim basi æqualem habebunt, et triangulum triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utriusque, quos æqualia latera subtendunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO V.

Isoscelium triangulorum ad basim anguli æquales inter se sunt; et productis æqualibus rectis, sub basim anguli æquales inter se erunt.

égale; donc le triangle entier ΑΒΓ s'appliquera sur le triangle entier ΔΕΖ, et lui sera égal; et les angles restans s'appliqueront sur les angles restans, et leur seront égaux, l'angle ΑΒΓ à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΑΓΒ à l'angle ΔΖΕ.

Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION V.

Dans les triangles isoscèles, les angles sur la base sont égaux entre eux, et les côtés égaux étant prolongés, les angles sous la base seront aussi égaux entre eux.

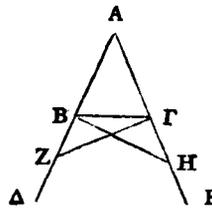
14 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

\* Εστὼ τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ, ἴσων ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκτε-  
 κλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθείαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθείαι.

Sit triangulum isosceles ΑΒΓ, æquale habens ΑΒ latus ΑΓ lateri, et producantur in directum ipsis ΑΒ, ΑΓ rectæ ΒΔ, ΓΕ; dico quidem ΑΒΓ angulum ipsi ΑΓΒ æqualem esse, ΓΒΔ vero ipsi ΒΓΕ.

Sumatur enim in ΒΔ quodlibet punctum Ζ, et auferatur à majore ΑΕ minori ΑΖ æqualis ipsa ΑΗ, et jungantur ΖΓ, ΗΒ rectæ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυοὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσιν τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπο-

Quoniam igitur est quidem ΑΖ ipsi ΑΗ, ΑΒ vero ipsi ΑΓ, duæ igitur ΖΑ, ΑΓ duabus ΗΑ, ΑΒ æquales sunt, utraque utrique, et angulum communem continent ΖΑΗ; basis igitur ΖΓ basi ΗΒ æqualis est, et ΑΖΓ triangulum ΑΗΒ triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt, ΑΓΖ quidem

Soit le triangle isosceles ΑΒΓ, ayant le côté ΑΒ égal au côté ΑΓ; menons les droites ΒΔ, ΓΕ, dans la direction de ΑΒ, ΑΓ (dem. 2); je dis que l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΑΓΒ, et que l'angle ΓΒΔ est aussi égal à l'angle ΒΓΕ.

Car prenons dans ΒΔ un point quelconque Ζ, et de la droite ΑΕ, plus grande que ΑΖ, retranchons une droite ΑΗ égale à la plus petite ΑΖ, et joignons les droites ΖΓ, ΗΒ.

Puisque ΑΖ est égal à ΑΗ, et ΑΒ à ΑΓ, les deux droites ΖΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΗΑ, ΑΒ, chacune à chacune; mais elles comprennent un angle commun ΖΑΗ; donc (4) la base ΖΓ est égale à la base ΗΒ, le triangle ΑΖΓ sera égal au triangle ΑΗΒ, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront

τείουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῆ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῆ ὑπὸ ΑΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλη τῆ ΑΗ ἴσθιν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῆ ΑΓ ἴσθιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῆ τῆ ΓΗ ἴσθιν ἴση. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῆ ΗΒ ἴση· δύο δὲ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσθιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνία τῆ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῶ ΓΗΒ τριγώνω ἴσον ἴσθαι, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσθονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείουσιν· ἴση ἄρα ἴσθιν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῆ ὑπὸ ΗΓΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῆ ὑπὸ ΓΒΗ. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλη τῆ ὑπὸ ΑΓΖ γωνία εἰδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῆ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῆ τῆ ὑπὸ ΑΓΒ ἴσθιν ἴση, καὶ εἰσι πρὸς τῆ βάσει τῶ ΑΒΓ τριγώνου· εἰδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῆ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση, καὶ εἰσθιν ὑπὸ τὴν βάσιν· τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsi ABH, AZG vero ipsi AHB. Et quoniam tota AZ toti AH est æqualis, quarum AB ipsi AG est æqualis, reliqua igitur BZ reliquæ GH est æqualis. Ostensa est autem et ZG ipsi HB æqualis; duæ igitur BZ, ZG duabus GH, HB æquales sunt, utraque utrique, et angulus BZG angulo GHB æqualis, et basis eorum communis BG; et BZG igitur triangulum GHB triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est quidem ZBG ipsi HGB, BGZ vero ipsi GBH. Quoniam igitur totus ABH angulus toti AGZ angulo ostensus est æqualis, quorum GBH ipsi BGZ æqualis; reliquus igitur ABG reliquo AGB est æqualis, et est ad basim ABG trianguli; ostensus est autem et ZBG ipsi HGB æqualis, et sunt sub basim; isoscelium igitur triangulorum, etc.

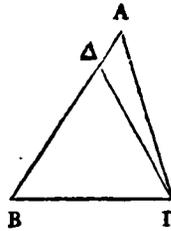
égaux chacun à chacun; l'angle AGZ à l'angle ABH, et l'angle AZG à l'angle AHB. Et puisque la droite entière AZ est égale à la droite entière AH, et que AB est égal à AG, la restante BZ sera égale à la restante GH (not. 5). Mais on a démontré que ZG est égal à HB; donc les deux droites BZ, ZG sont égales aux droites GH, HB, chacune à chacune; mais l'angle BZG est égal à l'angle GHB, et la droite BG est leur base commune; donc le triangle BZG sera égal au triangle GHB, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun; donc l'angle ZBG est égal à l'angle HGB, et l'angle BGZ égal à l'angle GBH. Mais on a démontré que l'angle entier ABH est égal à l'angle entier AGZ, et l'angle GBH est égal à l'angle BGZ; donc l'angle restant ABG est égal à l'angle restant AGB (not. 3), et ces angles sont sur la base; mais on a démontré aussi que l'angle ZBG est égal à l'angle HGB, et ces angles sont sous la base; donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εάν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτεινόμεναι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐστω τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$ , ἴσων ἔχον τὴν ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνίαν τῇ ὑπὸ  $AGB$  γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἢ  $AB$  πλευρᾷ τῇ  $AG$  ἴσῃ ἐστὶν ἴση.

Εἰ γὰρ ἀνίσος ἐστὶν ἢ  $AB$  τῇ  $AG$ , μία <sup>2</sup> αὐτῶν μείζων ἐστὶν. Ἐστω μείζων ἢ  $AB$  καὶ ἀφηρέσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς  $AB$  τῇ ἐλάσσονι τῇ  $AG$  ἴση ἢ  $\Delta B$ , καὶ ἐπιζεύχθω ἢ  $\Delta\Gamma$ .



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἢ  $\Delta B$  τῇ  $AG$ , κοινὴ δὲ ἢ  $B\Gamma$ , δύο δὲ αἱ  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  δυσὶ ταῖς  $AG$ ,  $GB$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ  $\Delta B\Gamma$  γωνία τῇ ὑπὸ  $AGB$  ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἢ  $\Delta\Gamma$  βάσει τῇ  $AB$  ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ  $\Delta B\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $AGB$  ἴσον ἐστὶν.

Si trianguli duo anguli æquales inter se sunt, et æquales angulos subtendentia latera æqualia inter se erunt.

Sit triangulum  $AB\Gamma$  æqualem habens  $AB\Gamma$  angulum  $AGB$  angulo; dico et latus  $AB$  lateri  $AG$  esse æquale.

Si enim inæquale est  $AB$  ipsi  $AG$ , unum eorum majus est. Sit majus  $AB$ , et auferatur a majore  $AB$  minori  $AG$  æqualis  $\Delta B$ , et jungatur  $\Delta\Gamma$ .

Quoniam igitur æqualis est  $\Delta B$  ipsi  $AG$ , communis autem  $B\Gamma$ , duæ igitur  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  duabus  $AG$ ,  $GB$  æquales sunt, utraque utrique, et angulus  $\Delta B\Gamma$  angulo  $AGB$  est æqualis; basis igitur  $\Delta\Gamma$  basi  $AB$  æqualis est, et  $\Delta B\Gamma$  trian-

## PROPOSITION VI.

Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles égaux, seront aussi égaux entre eux.

Soit le triangle  $AB\Gamma$ , ayant l'angle  $AB\Gamma$  égal à l'angle  $AGB$ ; je dis que le côté  $AB$  est égal au côté  $AG$ .

Car si le côté  $AB$  n'est pas égal au côté  $AG$ , l'un d'eux sera plus grand que l'autre. Soit  $AB$  le plus grand; retranchons du plus grand côté  $AB$  la droite  $\Delta B$  égale au plus petit  $AG$  (3), et joignons  $\Delta\Gamma$ .

Puisque  $\Delta B$  est égal à  $AG$ , et que  $B\Gamma$  est commun, les deux côtés  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  sont égaux aux deux côtés  $AG$ ,  $GB$ , chacun à chacun; mais l'angle  $\Delta B\Gamma$  est égal à l'angle  $AGB$ ; donc la base  $\Delta\Gamma$  est égale à la base  $AB$ , et le triangle  $\Delta B\Gamma$  sera égal

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 17

τριγώνω ἴσον ἔσται, τὸ ἑλασσον τῷ μείζονι, ὅπερ ἄπορον· οὐκ ἄρα ἀνίσος ἐστὶν ἡ AB τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα. Εὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἕξῃς.

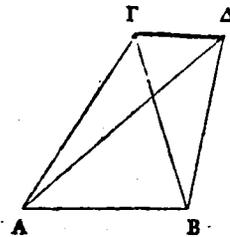
gulum  $\Delta\Gamma\text{B}$  triangulo æquale erit, minus majori, quod est absurdum; non igitur inæqualis est AB ipsi ΑΓ; ergo æqualis. Si igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυὸ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρα οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλη καὶ ἄλλη σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

PROPOSITIO VII.

Super eadem rectâ, duabus eisdem rectis aliæ duæ rectæ æquales utraque utrique non constituentur, ad aliud et aliud punctum ad easdem partes, eosdem terminos habentes quos primæ rectæ.



Ἐὶ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB, δυὸ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρα συστατάωσαν, πρὸς ἄλλη καὶ ἄλλη σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Γ, Δ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ Α, Β· ὥστε

Si enim possibile, super eadem rectâ AB duabus eisdem rectis ΑΓ, ΓΒ, aliæ duæ rectæ ΑΔ, ΔΒ æquales utraque utrique constituentur ad aliud et aliud punctum Γ et Δ, ad easdem partes, Γ, Δ, et eosdem terminos habentes Α, Β; ita ut æqualis sit quidem ΓΑ ipsi ΔΑ, eundem ter-

au triangle  $\Delta\Gamma\text{B}$ , le plus petit au plus grand, ce qui est absurde; donc les droites AB, ΒΓ ne sont pas inégales; donc AB est égal à ΒΓ. Donc, etc.

PROPOSITION VII.

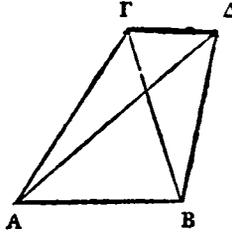
Sur une même droite, et à deux points différens placés du même côté, on ne peut pas construire deux droites égales à deux autres droites, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités que ces deux autres.

Car, si cela est possible, sur une même droite AB, et à deux points différens Γ et Δ, placés du même côté, construisons les deux droites ΑΔ, ΔΒ égales à deux autres droites ΑΓ, ΓΒ, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités Α, Β; de

18 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ, τὸ αὐτὸ πέρασ  
ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ, τὸ αὐτὸ  
πέρασ ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β· καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΔ.

minum habens quem illa, punctum A, GB vero  
ipsi AB, eundem terminum habens quem illa,  
punctum B; et jungatur GA.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΔ, ἴση ἐστὶ καὶ  
γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ  
ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ  
μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν  
ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ  
γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶν  
μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ, καὶ  
τὰ ἐξῆς.

Quoniam igitur æqualis est ΑΓ ipsi ΔΔ,  
æqualis est et angulus ΑΓΔ ipsi ΑΔΓ; major igitur  
ΑΔΓ ipso ΔΓΒ; multo igitur ΓΔΒ major est ipso  
ΔΓΒ. Rursus quoniam æqualis est ΓΒ ipsi ΔΒ,  
æqualis est et angulus ΓΔΒ angulo ΔΓΒ. Ostensus  
est autem ipso et multo major, quod est im-  
possibile. Non igitur super, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

PROPOSITIO VIII.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ  
πλευραῖς ἴσας ἔχη, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχη δὲ  
καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ  
γωνία ἴσην ἔξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν  
περιεχομένην.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus  
æqualia habeant, utrumque utrique, habeant  
autem et basim basi æqualem; et angulum an-  
gulo æqualem habebunt, ab æqualibus rectis  
contentum.

manière que la droite GA soit égale à la droite ΔΑ, et ait la même extrémité A que celle-ci, et que la droite GB soit égale à la droite ΔΒ, et ait la même extrémité B que celle-ci; et joignons ΓΔ.

Puisque ΑΓ est égal à ΔΔ, l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΑΔΓ (5); donc l'angle ΑΔΓ est plus grand que l'angle ΔΓΒ; donc l'angle ΓΔΒ est beaucoup plus grand que l'angle ΔΓΒ. De plus, puisque ΓΒ est égal à ΔΒ, l'angle ΓΔΒ est égal à l'angle ΔΓΒ; mais on a démontré qu'il est beaucoup plus grand, ce qui est impossible. Donc, etc.

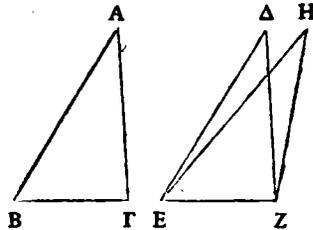
PROPOSITION VIII.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont la base égale à la base, les angles compris par les côtés égaux seront égaux.

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 19

Εστω δύο τρίγωνα τὰ  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , τὰς δύο πλευρὰς τὰς  $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$  ταῖς δυὸ πλευραῖς ταῖς  $ΔΕ$ ,  $ΔΖ$  ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρῃ, τὴν μὲν  $ΑΒ$  τῇ  $ΔΕ$ , τὴν δὲ  $ΑΓ$  τῇ  $ΔΖ$ · ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν  $ΒΓ$  βάσει τῇ  $ΕΖ$  ἴσην· λέγω ὅτι καὶ ᾠωνία ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  ᾠωνία τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$  ἐστὶν ἴση.

Sint duo triangula  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , duo latera  $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$  duobus lateribus  $ΔΕ$ ,  $ΔΖ$  æqualia habentia utrumque utriusque,  $ΑΒ$  quidem ipsi  $ΔΕ$ ,  $ΑΓ$  vero ipsi  $ΔΖ$ ; habeat autem et basim  $ΒΓ$  basi  $ΕΖ$  æqualem; dico et angulum  $ΒΑΓ$  angulo  $ΕΔΖ$  esse æqualem.



Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ  $ΑΒΓ$  τριγώνου ἐπὶ τὸ  $ΔΕΖ$  τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν  $Β$  σημείου ἐπὶ τὸ  $Ε$  σημεῖον, τῆς δὲ  $ΒΓ$  εὐθείας ἐπὶ τὴν  $ΕΖ$ , ἐφαρμόσει καὶ τὸ  $Γ$  σημεῖον ἐπὶ τὸ  $Ζ$ , διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν  $ΒΓ$  τῇ  $ΕΖ$ · ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς  $ΒΓ$  ἐπὶ τὴν  $ΕΖ$ , ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ  $ΒΑ$ ,  $ΓΑ$  ἐπὶ τὰς  $ΕΔ$ ,  $ΔΖ$ . Εἰ γὰρ βάσεις μὲν ἡ  $ΒΓ$  ἐπὶ βάσιν τὴν  $ΕΖ$  ἐφαρμόσει, αἱ δὲ  $ΒΑ$ ,  $ΑΓ$  πλευραὶ ἐπὶ τὰς  $ΕΔ$ ,  $ΔΖ$  οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλάξουσιν, ὡς αἱ  $ΕΗ$ ,  $ΗΖ$ , συσταθήσονται, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυοὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἀλλὰς δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρῃ ἑκατέρῃ, πρὸς

Congruente enim  $ΑΒΓ$  triangulo ipsi  $ΔΕΖ$  triangulo, et posito quidem  $Β$  puncto super  $Ε$  punctum,  $ΒΓ$  vero rectâ super  $ΕΖ$ , congruet et  $Γ$  punctum ipsi  $Ζ$ , quia æqualis est  $ΒΓ$  ipsi  $ΕΖ$ ; congruente igitur  $ΒΓ$  ipsi  $ΕΖ$ , congruet et  $ΒΑ$ ,  $ΓΑ$  ipsis  $ΕΔ$ ,  $ΔΖ$ . Si enim basis quidem  $ΒΓ$  basi  $ΕΖ$  congruat,  $ΒΑ$ ,  $ΑΓ$  vero latera ipsis  $ΕΔ$ ,  $ΔΖ$  non congruant, sed situm mutant ut  $ΕΗ$ ,  $ΗΖ$ , constituentur super eâdem rectâ duabus rectis aliâs duæ rectæ æquales, utraque utriusque, ad aliud et aliud punctum, ad easdem partes, eosdem terminos habentes. Non constituuntur

Soient les deux triangles  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , ayant les deux côtés  $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$  égaux aux deux côtés  $ΔΕ$ ,  $ΔΖ$ , chacun à chacun, le côté  $ΑΒ$  égal au côté  $ΔΕ$ , et le côté  $ΑΓ$  égal au côté  $ΔΖ$ ; qu'ils aient de plus la base  $ΒΓ$  égale à la base  $ΕΖ$ ; je dis que l'angle  $ΒΑΓ$  est égal à l'angle  $ΕΔΖ$ .

Car le triangle  $ΑΒΓ$  étant appliqué sur le triangle  $ΔΕΖ$ , le point  $Β$  étant placé sur le point  $Ε$ , et la droite  $ΒΓ$  sur la droite  $ΕΖ$ , le point  $Γ$  s'appliquera sur le point  $Ζ$ , parce que  $ΒΓ$  est égal à  $ΕΖ$ ; la droite  $ΒΓ$  s'appliquant sur la droite  $ΕΖ$ , les droites  $ΒΑ$ ,  $ΓΑ$  s'appliqueront sur les droites  $ΕΔ$ ,  $ΔΖ$ ; car si la base  $ΒΓ$  s'appliquant sur la base  $ΕΖ$ , les côtés  $ΒΑ$ ,  $ΑΓ$  ne s'appliquaient pas sur les côtés  $ΔΕ$ ,  $ΔΖ$ , et prenaient une autre position; comme  $ΕΗ$ ,  $ΗΖ$ , on pourrait construire sur une même droite, et à deux points différens placés du même côté, deux droites

20 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄλλη καὶ ἄλλη σημείω, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. Οὐ συνίστανται δὲ οὐκ ἄρα, ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. Εφαρμόσουσιν ἄρα ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴση αὐτῇ ἴσται. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἴξῃς.

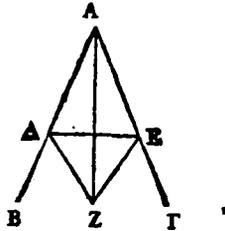
quidem. Non igitur, congruente ΒΓ basi ΕΖ basi, non congruent et ΒΑ, ΑΓ latera ipsis ΕΔ, ΔΖ. Congruent igitur; quare et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΖ congruet, et æqualis ei erit. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τιμεῖν.  
Ἐστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· διὲ δὲ αὐτὴν δίχα τιμεῖν.

PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.  
Sit datus angulus rectilineus ΒΑΓ; oportet igitur ipsum bifariam secare.



Εἰλήφθω γάρ ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχρὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφγρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῆ ΑΔ ἴση ἢ ΑΕ, καὶ περὶεὐχθῶ ἡ ΔΕ, καὶ συνιστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσοπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπιζεύχθω

Sumatur enim in ΑΒ quodlibet punctum Δ, et auferatur ab ΑΓ ipsi ΑΔ æqualis ΑΕ, et jungatur ΔΕ, et constituatur super ΔΕ triangulo æquilatero ΔΕΖ, et jungatur ΑΖ;

égales à deux autres droites, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités que ces deux autres; mais elles ne peuvent pas être construites (7); donc la base ΒΓ s'appliquant sur la base ΕΖ, les côtés ΒΑ, ΑΓ ne peuvent pas ne point s'appliquer sur les côtés ΕΔ, ΔΖ; donc ils s'appliqueront les uns sur les autres; donc l'angle ΒΑΓ s'applique sur l'angle ΕΔΖ; donc il lui est égal. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Partager un angle rectiligne donné en deux parties égales.

Soit ΒΑΓ un angle rectiligne donné; il faut le partager en deux parties égales.

Prenons dans la droite ΑΒ un point quelconque Δ, retranchons de la droite ΑΓ une droite ΑΕ égale à la droite ΑΔ, joignons ΔΕ, sur la droite ΔΕ, construisons

ἢ ΑΖ· λίγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπι γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὲ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν·.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὲ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμῖν.

dico ΒΑΓ angulum bifariam secari ab ΑΖ rectā.

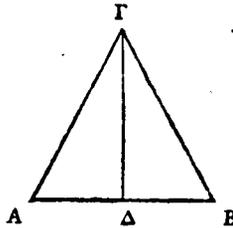
Quoniam enim æqualis est ΑΔ ipsi ΑΕ, communis autem ΑΖ, duæ ΔΑ, ΑΖ duabus ΕΑ, ΑΖ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΔΖ basi ΕΖ æqualis est; angulus igitur ΔΑΖ angulo ΕΑΖ æqualis est.

Datus igitur angulus rectilineus ΒΑΓ bifariam secatur ab ΑΖ rectā. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO X.

Datam rectam terminatam bifariam secare.

Sit data recta terminata ΑΒ; oportet igitur ΑΒ rectam terminatam bifariam secare.



Συνοστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τεμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα

Constituatur super ipsā triangulum æquilaterum ΑΒΓ, et secetur ΑΓΒ angulus bifariam

le triangle équilatéral ΔΕΖ (1), et joignons ΑΖ; je dis que l'angle ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΖ.

Puisque ΑΔ est égal à ΑΕ, et que la droite ΑΖ est commune, les deux droites ΔΑ, ΕΖ seront égales aux deux droites ΕΑ, ΑΖ, chacune à chacune; mais la base ΑΖ est égale à la base ΕΖ; donc l'angle ΔΑΖ est égal à l'angle ΕΑΖ (8).

Donc l'angle rectiligne donné ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΖ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION X.

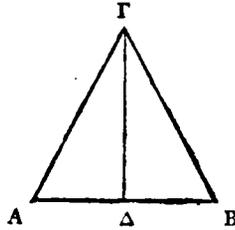
Partager une droite donnée et finie en deux parties égales.

Soit donnée une droite finie ΑΒ; il faut partager la droite finie ΑΒ en deux parties égales.

Construisons sur cette droite un triangle équilatéral ΑΒΓ (1), et partageons

22 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῆ ΓΔ εὐθείᾳ λέγω ὅτι ἡ AB εὐθεῖα δίχα ab ΓΔ rectā; dico AB rectam bifariam secari  
τίτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον. in Δ puncto.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὲ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία τῆ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστὶ· βᾶσις ἄρα ἡ ΑΔ βᾶσι τῆ ΒΔ ἴση ἐστίν'.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB δίχα τίτμηται κατὰ τὸ Δ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

Τῆ δοθεῖσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῆ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Quoniam enim æqualis est ΑΓ ipsi ΓΒ, communis autem ΓΔ, duæ ΑΓ, ΓΔ duabus ΒΓ, ΓΔ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΑΓΔ angulo ΒΓΔ æqualis est; basis igitur ΑΔ basi ΒΔ æqualis est.

Ergo data recta terminata AB bifariam secatur in puncto Δ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XI.

Data rectæ, a puncto in eâ dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit quidem data recta AB, datum vero punctum in eâ Γ; oportet igitur a Γ puncto ipsi AB rectæ ad rectos angulos rectam lineam ducere.

l'angle ΑΓΒ en deux parties égales par la droite ΓΔ (9); je dis que la droite AB est partagée en deux parties égales au point Δ.

Car puisque la droite ΑΓ est égale à la droite ΓΒ, et que la droite ΓΔ est commune, les deux droites ΑΓ, ΓΔ sont égales aux deux droites ΒΓ, ΓΔ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΔ est égale à la base ΒΔ (4).

Donc la droite donnée et finie AB est partagée en deux parties égales au point Δ; ce qu'il fallait faire.

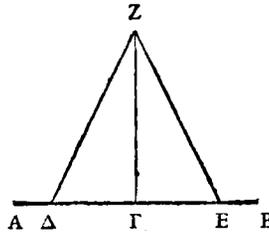
PROPOSITION XI.

A une droite donnée, et à un point donné dans cette droite, mener une ligne droite à angles droits.

Soit AB une droite donnée, et Γ le point donné dans cette droite; il faut du point Γ mener à la droite AB une ligne droite à angles droits.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἢ ΓΕ, καὶ συνεισάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπέζεύχθω ἢ ΖΓ· λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἢ ΖΓ.

Sumatur in ΑΓ quodlibet punctum Δ, et ponatur ipsi ΓΔ æqualis ΓΕ, et constituatur super ΔΕ triangulo æquilatero ΖΔΕ, et jungatur ΖΓ; dico datæ rectæ ΑΒ a dato in eâ puncto Γ, ad rectos angulos rectam lineam ductam esse ΖΓ.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἢ ΓΔ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἢ ΓΖ, δύο δὲ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυοὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βᾶσις ἢ ΔΖ βᾶσις τῇ ΖΕ ἴση ἐστὶ· γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ ΔΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστὶ, καὶ εἰσιν ἰφιεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἰφιεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Quoniam enim æqualis est ΓΔ ipsi ΓΕ, communis vero ΓΖ, duæ sane ΔΓ, ΓΖ duabus ΕΓ, ΓΖ æquales sunt utraque utrique, et basis ΔΖ basi ΖΕ æqualis est; angulus igitur ΔΓΖ angulo ΕΓΖ æqualis est, et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; rectus igitur est uterque ipsorum ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἢ ΖΓ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Ergo datæ rectæ ΑΒ a dato in eâ puncto Γ, ad rectos angulos recta linea ducta est ΓΖ. Quod oportebat facere.

Prenons dans la ligne droite ΑΓ un point quelconque Δ, faisons ΓΕ égal à ΓΔ (3), construisons sur ΔΕ le triangle équilatéral ΖΔΕ, et joignons ΖΓ; je dis que la droite ΓΖ est menée à angles droits à la droite ΑΒ du point Γ donné dans cette droite.

Car puisque la droite ΓΔ est égale à la droite ΓΕ, et que la droite ΓΖ est commune, les deux droites ΔΓ, ΓΖ sont égales aux deux droites ΕΓ, ΓΖ, chacune à chacune; mais la base ΔΖ est égale à la base ΖΕ; donc l'angle ΔΓΖ est égal à l'angle ΕΓΖ (8); mais ces deux angles sont de suite, et lorsqu'une droite placée sur une droite fait les angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit (déf. 10); donc chacun des angles ΔΓΖ, ΖΓΕ est droit.

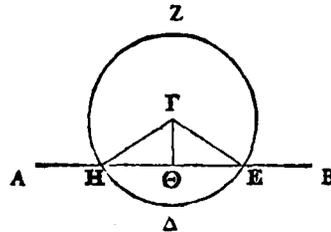
Donc la ligne droite ΖΓ a été menée à angles droits à la droite donnée ΑΒ du point Γ donné dans cette droite.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ  $AB$ , τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ  $\Gamma$ . διὲ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν  $AB$ , ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ  $\Gamma$ , ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Super datam rectam infinitam, a dato puncto, quod non est in eâ, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit quidem data recta infinita  $AB$ , datum vero punctum  $\Gamma$ , quod non est in eâ; oportet igitur super datam rectam infinitam  $AB$ , a dato puncto  $\Gamma$ , quod non est in eâ, perpendicularem rectam lineam ducere.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἔτερα μέρη τῆς  $AB$  εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ  $\Delta$ , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ  $\Gamma$ , διαστήματι δὲ τῷ  $\Gamma\Delta$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $EZH$ , καὶ τετμήσθω ἡ  $EH$  εὐθεῖα δίσχῃ κατὰ τὸ  $\Theta$ , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ  $\Gamma H$ ,  $\Gamma\Theta$ ,  $\Gamma E$  εὐθεῖαι. λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν  $AB$ , ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ  $\Gamma$ , ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦται ἡ  $\Gamma\Theta$ .

Sumatur enim ad alteram partem  $AB$  rectæ quodlibet punctum  $\Delta$ , et centro quidem  $\Gamma$ , intervallo autem  $\Gamma\Delta$ , circulus describatur  $EZH$ , et secetur  $EH$  recta bifariam in  $\Theta$ , et jungantur  $\Gamma H$ ,  $\Gamma\Theta$ ,  $\Gamma E$  rectæ; dico super datam rectam infinitam  $AB$ , a dato puncto  $\Gamma$ , quod non est in eâ, perpendicularem ductam esse  $\Gamma\Theta$ .

## PROPOSITION XII.

A une droite indéfinie et donnée, et d'un point donné qui n'est pas dans cette droite, mener une ligne droite perpendiculaire.

Soit  $AB$  une droite indéfinie et donnée, et  $\Gamma$  un point donné qui n'est pas dans cette droite; il faut à cette droite indéfinie et donnée  $AB$ , mener du point donné  $\Gamma$  qui n'est pas dans cette droite, une ligne droite perpendiculaire.

Prenons de l'autre côté de la droite  $AB$  un point quelconque  $\Delta$ , et du centre  $\Gamma$  et d'un intervalle  $\Gamma\Delta$ , décrivons le cercle  $EZH$  (dem. 3), partageons la droite  $EH$  en deux parties égales au point  $\Theta$  (10), et joignons  $\Gamma H$ ,  $\Gamma\Theta$ ,  $\Gamma E$ ; je dis qu'à la droite indéfinie et donnée  $AB$ , et du point donné  $\Gamma$  qui n'est pas dans cette droite, on a mené une perpendiculaire  $\Gamma\Theta$ .

Επί γάρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῆς ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὲ αἱ ΘΗ, ΘΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρας, καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσι τῆς ΓΕ ἴσῃ· ἴση γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΓ ἴσῃ, καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. Ὄταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· καὶ ἡ ἐπιστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐπίστηκεν.

Επι τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἀπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἤκται ἡ ΓΘ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17'.

Εάν' εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἦτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθείαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω, τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι, ἦτοι<sup>2</sup> δύο ὀρθαὶ εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Car puisque la droite ΗΘ est égale à la droite ΘΕ, et que la droite ΘΓ est commune, les deux droites ΘΗ, ΘΓ sont égales aux deux droites ΕΘ, ΘΓ, chacune à chacune; mais la base ΓΗ est égale à la base ΓΕ (déf. 15); donc l'angle ΓΘΗ est égal à l'angle ΕΘΓ (8); mais ces deux angles sont de suite, et lorsqu'une droite placée sur une droite fait les angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit, et la droite placée au dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

On a donc mené ΓΘ perpendiculaire à la droite indéfinie ΑΒ, du point donné Γ placé hors de cette droite. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIII.

Si une droite placée sur une droite fait des angles, elle fera ou deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits.

Qu'une droite ΑΒ placée sur une droite ΓΔ fasse les angles ΓΒΑ, ΑΒΔ; je dis que les angles ΓΒΑ, ΑΒΔ sont ou deux droits, ou égaux à deux droits.

Quoniam enim æqualis est ΗΘ ipsi ΘΕ, communis autem ΘΓ, duæ utique ΘΗ, ΘΓ duabus ΕΘ, ΘΓ æquales sunt, utraq̄ue utriq̄ue, et basis ΓΗ basi ΓΕ est æqualis; angulus igitur ΓΘΗ angulo ΕΘΓ est æqualis, et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens, deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; et insistens recta perpendicularis appellatur in quam insistit.

Super datam igitur rectam infinitam ΑΒ a dato puncto Γ quod non est in eâ, perpendicularis ducta est ΓΘ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII.

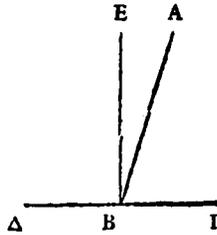
Si recta in rectam insistens angulos faciat, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales faciet.

Recta enim quædam ΑΒ in rectam ΓΔ insistens angulos faciat ΓΒΑ, ΑΒΔ; dico ΓΒΑ, ΑΒΔ angulos, vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales.

26 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἔστιν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῆ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαὶ εἰσιν. Εἰ δὲ οὐ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῆ ΓΔ ευθεία<sup>3</sup> πρὸς ὀρθὰς ἢ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαὶ εἰσι. Καὶ ἔπει ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυοὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἔστι, κοινὴ προσκείσθω ἢ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσὶ<sup>4</sup>. Πάλιν, ἔπει ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυοὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἔστι,

Si igitur quidem æqualis est ΓΒΑ ipsi ΑΒΔ, duo recti sunt. Si vero non, ducatur a B puncto ΓΔ rectæ ad rectos ipsa ΒΕ; ergo ΓΒΕ, ΕΒΔ duo recti sunt. Et quoniam ΓΒΕ duobus ΓΒΑ, ΑΒΕ æqualis est, communis addatur ΕΒΔ; ergo ΓΒΕ, ΕΒΔ tribus ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ æquales sunt. Rursus, quoniam ΔΒΑ duobus ΔΒΕ, ΕΒΑ æqualis est, communis addatur ΑΒΓ; ergo



κοινὴ προσκείσθω ἢ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσιν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῶ αὐτῶ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἔστιν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαὶ εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυοὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἐάν<sup>6</sup> ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΔΒΑ, ΑΒΓ tribus ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ æquales sunt. Ostensi sunt autem et ΓΒΕ, ΕΒΔ tribus eisdem æquales; quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; ergo et ΓΒΕ, ΕΒΔ ipsi ΔΒΑ, ΑΒΓ æquales sunt; sed ΓΒΕ, ΕΒΔ duo recti sunt; ergo et ΔΒΑ, ΑΒΓ duobus rectis æquales sunt. Si igitur, etc.

Car si l'angle ΓΒΑ est égal à l'angle ΑΒΔ, ces deux angles sont droits (déf. 10). Si non, du point Β conduisons ΒΕ à angles droits à ΓΔ (11); les deux angles ΓΒΕ, ΕΒΔ seront droits; et puisque l'angle ΓΒΕ est égal aux deux angles ΓΒΑ, ΑΒΕ, si l'on ajoute l'angle commun ΕΒΔ, les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ seront égaux aux trois angles ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. De plus, puisque l'angle ΔΒΑ est égal aux deux angles ΔΒΕ, ΕΒΑ, si l'on ajoute l'angle commun ΑΒΓ, les angles ΔΒΑ, ΑΒΓ seront égaux aux trois angles ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ. Mais on a démontré que les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ leur sont égaux; et les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles; donc les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ sont égaux aux angles ΔΒΑ, ΑΒΓ; mais les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ sont deux angles droits; donc les angles ΔΒΑ, ΑΒΓ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

PROPOSITIO XIV.

Εάν πρὸς τινὶ εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθείαι, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐπιξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθείαι.

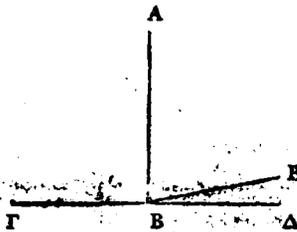
Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ AB, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ B, δύο εὐθείαι αἱ BG, BA, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐπιξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ABΓ, ABA δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἔσθι τῇ GB ἢ BA.

Εἰ γὰρ μὴ ἔσθι τῇ BG ἐπ' εὐθείας ἢ BA, ἔστω τῇ GB ἐπ' εὐθείας ἢ BE.

Si ad aliquam rectam, et ad punctum in ea, duæ rectæ, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos duobus rectis æquales faciant, in directum erunt sibi ipsis rectæ.

Ad aliquam enim rectam AB, et ad punctum in eâ B, duæ rectæ BG, BA, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos ABΓ, ABA duobus rectis æquales faciant; dico in directum esse ipsi GB ipsam BA.

Si enim non est ipsi BG in directum BA, sit ipsi GB in directum BE.



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἢ AB ἐπ' εὐθεῖαν τὴν GBE ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ABΓ, ABE γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἰσὶν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ABΓ, ABA

Quoniam igitur recta AB super rectam GBE insistit, ABΓ, ABE anguli duobus rectis æquales sunt; sunt autem et ABΓ, ABA duobus

PROPOSITION XIV.

Si à une droite, et à un point de cette droite, deux droites, non placées du même côté font les angles de suite égaux à deux droits, ces deux droites seront dans la même direction.

Qu'à une droite AB, et à un point B de cette droite, les deux droites BG, BA, non placées du même côté, fassent les angles de suite ABΓ, ABA égaux à deux droits; je dis que BA est dans la direction de GB.

Car si BA n'est point dans la direction de GB, que BE soit dans la direction de GB (dem. 2).

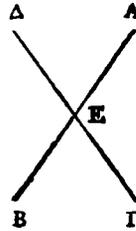
Puisque la droite AB est placée sur la droite GBE, les angles ABΓ, ABE sont égaux à deux droits (13); mais les angles ABΓ, ABA sont égaux à deux droits :

## 28 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὀπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσὶ. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἢ ἐλάσσων τῇ μείζωνι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ. Εὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε΄.

Εὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατα κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.



Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἢ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

rectis æquales; ergo ΓΒΑ, ΑΒΕ ipsi ΓΒΑ, ΑΒΔ æquales sunt. Communis auferatur ΓΒΑ; reliquus igitur ΑΒΕ reliquo ΑΒΔ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur in directum est ΒΕ ipsi ΒΓ. Similiter autem ostendemus neque esse aliam quamdam præter ΒΔ; in directum igitur est ΓΒ ipsi ΒΔ. Si igitur, etc.

### PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ sese secant, ad verticem angulos æquales inter se facient.

Duæ enim rectæ ΑΒ, ΓΔ sese secant in Ε puncto; dico æqualem esse quidem ΑΕΓ angulum ipsi ΔΕΒ, ΓΕΒ vero ipsi ΑΕΔ.

donc les angles ΓΒΑ, ΑΒΕ sont égaux aux angles ΓΒΑ, ΑΒΔ. Retranchons l'angle commun ΓΒΑ, l'angle restant ΑΒΕ sera égal à l'angle restant ΑΒΔ, le plus petit au plus grand; ce qui est impossible. ΒΕ n'est donc pas dans la direction de ΒΓ. Nous démontrerons semblablement qu'il n'y en a point d'autre excepté ΒΔ; donc ΓΒ est dans la direction de ΒΔ. Donc, etc.

### PROPOSITION XV.

Si deux droites se coupent mutuellement, elles font les angles au sommet égaux entre eux.

Que les droites ΑΒ, ΓΔ se coupent mutuellement au point Ε; je dis que l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle ΔΕΒ, et l'angle ΓΕΒ égal à l'angle ΑΕΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεία ἡ ΑΕ ἐπ' εὐθείαν τὴν ΓΔ ἐπίστυκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεία ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθείαν τὴν ΑΒ ἐπίστυκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσὶ. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν. Ὁμοίως δὲ δεῖχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσὶν. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς 'ε

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκτεθειμένης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίων γωνιῶν μείζων ἐστίν.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκτεθειμένη αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι

Quoniam enim recta ΑΕ in rectam ΓΔ insistit angulos faciens ΓΕΑ, ΑΕΔ; ipsi ΓΕΑ, ΑΕΔ anguli duobus rectis æquales sunt. Rursus, quoniam recta ΔΕ in rectam ΑΒ insistit, angulos faciens ΑΕΔ, ΔΕΒ; ipsi ΑΕΔ, ΔΕΒ anguli duobus rectis æquales sunt. Ostensi sunt autem et ΓΕΑ, ΑΕΔ duobus rectis æquales; ergo ΓΕΑ, ΑΕΔ ipsis ΑΕΔ, ΔΕΒ æquales sunt. Communis auferatur ΑΕΔ, reliquus igitur ΓΕΑ reliquo ΒΕΔ æqualis est. Similiter autem ostendemus et ΓΕΒ, ΔΕΑ esse æquales. Si igitur duo, etc.

PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli uno laterum producto, exterior angulus utroque interiorum et oppositorum angulorum major est.

Sit triangulum ΑΒΓ, et producaturs ipsius unum latus ΒΓ ad Δ; dico exteriorem angulum

Car puisque la droite ΑΕ est placée sur la droite ΓΔ, faisant les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ, les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ sont égaux à deux droits. De plus, puisque la droite ΔΕ est placée sur la droite ΑΒ, faisant les angles ΑΕΔ, ΔΕΒ, les angles ΑΕΔ, ΔΕΒ sont égaux à deux droits. Mais on a démontré que les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ sont égaux à deux droits; donc les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ sont égaux aux angles ΑΕΔ, ΔΕΒ. Retranchons l'angle commun ΑΕΔ; l'angle restant ΓΕΑ sera égal à l'angle restant ΒΕΔ. On démontrera semblablement que les angles ΓΕΒ, ΔΕΑ sont égaux. Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.

Soit le triangle ΑΒΓ, prolongeons le côté ΒΓ vers Δ; je dis que l'angle

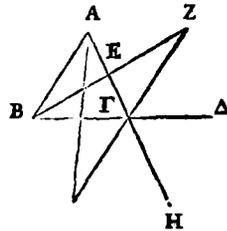
30 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ἐκτὸς γωνία, ἢ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶν ἰστέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχρα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκτελεσθήτω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπιζεύχθω ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

ΑΓΔ majorem esse utroque interiorum et oppositorum ΓΒΑ, ΒΑΓ angularum.

Secetur ΑΓ bifariam in Ε, et juncta ΒΕ producatur in directum ad Ζ, et ponatur ipsi ΒΕ æqualis ΕΖ, et jungatur ΖΓ, et producatur ΑΓ ad Η.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἢ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστὶ, κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἴσων ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτεινουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. Μείζων δὲ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ.

Quoniam igitur æqualis est quædam ΑΕ ipsi ΕΓ, ΒΕ vero ipsi ΕΖ, duæ ΑΕ, ΕΒ duabus ΓΕ, ΕΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΑΕΒ angulo ΖΕΓ æqualis est, ad verticem enim est; basis igitur ΑΒ basi ΖΓ æqualis est, et ΑΒΕ triangulum ΖΕΓ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales sunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est ΒΑΕ ipsi ΕΓΖ. Major autem est ΕΓΔ ipso ΕΓΖ; major est

extérieur ΑΓΔ est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés ΓΒΑ, ΒΑΓ.

Partageons la droite ΑΓ en deux parties égales en Ε (10); et ayant joint la droite ΒΕ, prolongeons-la vers Ζ, faisons ΕΖ égal à ΒΕ (3), joignons la droite ΖΓ, et prolongeons ΑΓ vers Η.

Puisque ΑΕ est égal à ΕΓ, et ΒΕ égal à ΕΖ, les deux droites ΑΕ, ΕΒ sont égales aux deux droites ΓΕ, ΕΖ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΕΒ est égal à l'angle ΖΕΓ (15), puisqu'ils sont au sommet; donc la base ΑΒ est égale à la base ΖΓ (4); le triangle ΑΒΕ est égal au triangle ΖΕΓ, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, sont égaux chacun à chacun; donc l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΕΓΖ (not. 9); mais l'angle ΕΓΔ est plus grand que l'angle ΕΓΖ; donc l'angle ΑΓΔ est plus grand

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 31

μείζων ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ομοίως δὲ, τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα, δειχθήσεται καὶ ἢ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἢ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

igitur ΑΓΔ ipso ΒΑΕ. Similiter autem, ΒΓ sectā bifariam, ostendetur et ΒΓΗ, Hoc est ΑΓΔ, major et ipso ΑΒΓ. Omnis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17'.

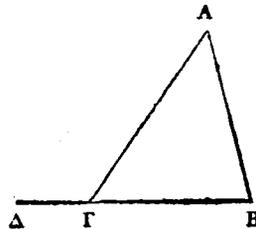
Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβάνονται.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβάνονται.

PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, omnifariam sumpti.

Sit triangulus ΑΒΓ; dico ΑΒΓ trianguli duos angulos duobus rectis minores esse, omnifariam sumptos.



Ἐκτελέσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἢ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίας, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές

Prodacatur enim ΒΓ ad Δ.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ exterior est angulus ΑΓΔ, major est interiore et opposito ΑΒΓ. Communis addatur ΑΓΒ; ergo ΑΓΔ, ΑΓΒ ipsis ΑΒΓ, ΒΓΑ majores sunt. Sed ΑΓΔ, ΑΓΒ duobus

que l'angle ΒΑΕ. Si on partage le côté ΒΓ en deux parties égales, on démontrera semblablement que l'angle ΒΓΗ, c'est-à-dire ΑΓΔ, est plus grand que l'angle ΑΒΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

Deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Soit le triangle ΑΒΓ; je dis que deux angles du triangle ΑΒΓ, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Prolongeons ΒΓ vers Δ (dem. 2).

Puisque l'angle ΑΓΔ du triangle ΑΒΓ est extérieur, il est plus grand que l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ (16). Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ, les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront

### 32 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

είσιν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι  
 εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες  
 εἰσιν. Ομοίως δὴ διέξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ,  
 ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ  
 ΓΑΒ, ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξ ἧς:

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μεί-  
 ζονα γωνίαν ὑπερτείνει.

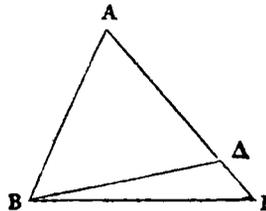
Ἐστω γάρ τριγώνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν  
 ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  
 ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

rectis æquales sunt; ergo ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus  
 rectis minores sunt. Similiter autem osten-  
 demus et ΒΑΓ, ΑΓΒ duobus rectis minores  
 esse, et adhuc ipsos ΓΑΒ, ΑΒΓ. Omnis  
 igitur, etc.

#### PROPOSITION XVIII.

Omnis trianguli major latus majorem an-  
 gulum subtendit.

Sit enim triangulum ΑΒΓ, major habens ΑΓ  
 latus ipso ΑΒ; dico et angulum ΑΒΓ majorem  
 esse ipso ΒΓΑ.



Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω  
 τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτὸς ἐστὶ γωνία  
 ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπι-  
 ναντίον, τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ

Quoniam enim major est ΑΓ ipsâ ΑΒ, po-  
 natur ipsi ΑΒ æqualis ΑΔ, et jungatur ΒΔ.

Et quoniam trianguli ΒΓΔ exterior est an-  
 gulus ΑΔΒ, major est interiore et opposito ΑΓΒ.  
 Æqualis autem ΑΔΒ ipsi ΑΒΔ, quia et latus ΑΒ

plus grands que les angles ΑΒΓ, ΒΓΑ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux  
 droits (13); donc les angles ΑΒΓ, ΒΓΑ sont moindres que deux droits. Nous démon-  
 trerons semblablement que les angles ΒΑΓ, ΑΓΒ, et les angles ΓΑΒ, ΑΒΓ sont moindres  
 que deux droits. Donc, etc.

#### PROPOSITION XVIII.

Dans tout triangle, un plus grand côté est opposé à un plus grand angle.

Soit le triangle ΑΒΓ, ayant le côté ΑΓ plus grand que le côté ΑΒ; je dis que  
 l'angle ΑΒΓ est plus grand que l'angle ΒΓΑ.

Puisque ΑΓ est plus grand que ΑΒ, faisons ΑΔ égal à ΑΒ (3), et joignons ΒΔ.

Puisque ΑΔΒ est un angle extérieur du triangle ΒΔΓ, cet angle est plus grand que  
 l'angle intérieur et opposé ΔΓΒ (16); mais l'angle ΑΔΒ est égal à l'angle ΑΒΔ (5), parce

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 33

ὕπὸ  $AB\Delta$ , ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἢ  $AB$  τῆ  $A\Delta$  ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $AB\Delta$  τῆς ὑπὸ  $AGB$ · πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$  μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $AGB$ . Παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsi  $A\Delta$  est æqualis; major igitur et  $AB\Delta$  ipso  $AGB$ ; multo igitur  $AB\Gamma$  major est ipso  $AGB$ . Omnis igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

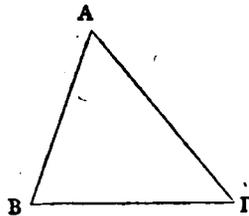
Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἐστω τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$ , μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνίαν τῆς ὑπὸ  $BGA$ · λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἢ  $AG$  πλευρᾶς τῆς  $AB$  μείζων ἐστίν.

PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli majorem angulum majus latus subtendit.

Sit triangulum  $AB\Gamma$ , majorem habens  $AB\Gamma$  angulum ipso  $BGA$ ; dico et latus  $AG$  latere  $AB$  majus esse.



Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ  $AG$  τῆ  $AB$ , ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὐκ ἐστὶν ἡ  $AG$  τῆ  $AB$ · ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$  τῆ  $ὑπὸ$   $AGB$ · οὐκ ἐστὶ δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ  $AG$  τῆ  $AB$ . Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ  $AG$  τῆ  $AB$ · ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$  τῆς ὑπὸ  $AGB$ .

Si enim non; vel æqualis est  $AG$  ipsi  $AB$ , vel minor; æqualis quidem non est  $AG$  ipsi  $AB$ , æqualis enim esset et angulus  $AB\Gamma$  ipsi  $AGB$ . Non est autem; non igitur æqualis est  $AG$  ipsi  $AB$ . Necque tamen minor est  $AG$  ipsa  $AB$ ; minor enim esset et angulus  $AB\Gamma$  ipso  $AGB$ ; non est

que le côté  $AB$  est égal au côté  $AG$ ; donc l'angle  $AB\Delta$  est plus grand que l'angle  $AGB$ ; donc l'angle  $AB\Gamma$  est beaucoup plus grand que l'angle  $AGB$ . Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Dans tout triangle, un plus grand côté soutend un plus grand angle.

Soit le triangle  $AB\Gamma$ , ayant l'angle  $AB\Gamma$  plus grand que l'angle  $BGA$ ; je dis que le côté  $AG$  est plus grand que le côté  $AB$ .

Car si cela n'est point,  $AG$  est égal à  $AB$ , ou plus petit. Mais  $AG$  n'est pas égal à  $AB$ , car alors l'angle  $AB\Gamma$  serait égal à l'angle  $AGB$  (5); mais il ne l'est pas; donc  $AG$  n'est pas égal à  $AB$ . Le côté  $AG$  n'est pas plus petit que le côté  $AB$ , car alors l'angle  $AB\Gamma$  serait plus petit que l'angle  $AGB$  (18); mais il ne l'est pas; donc le

### 34 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Οὐκ ἔστι δὲ οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἔστιν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση ἔστι· μείζων ἄρα ἔστιν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἕξῃς.

autem ; non igitur minor est ΑΓ ipsā ΑΒ. Ostensum est autem neque æqualem esse ; major igitur est ΑΓ ipsā ΑΒ. Omnis igitur, etc.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

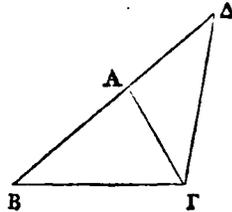
Παντὲς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνονται.

Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνονται, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

#### • PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, omnifariam sumpta.

Sit enim tringulum ΑΒΓ ; dico ΑΒΓ trianguli duo latera reliquo majora esse, omnifariam sumpta ; ipsa quidem ΒΑ, ΑΓ ipso ΒΓ, ipsa vero ΑΒ, ΒΓ ipso ΑΓ, et ipsa ΒΓ, ΓΑ ipso ΑΒ.



Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἔστι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· μείζων ἄρα ἡ

Producatur enim ΒΑ ad Δ punctum, et ponatur ipsi ΓΑ æqualis ΑΔ, et jungatur ΔΓ.

Quoniam igitur æqualis est ΔΑ ipsi ΑΓ, æqualis est et angulus ΑΔΓ ipsi ΑΓΔ, major

côté ΑΓ n'est pas plus petit que le côté ΑΒ. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal ; donc ΑΓ est plus grand que ΑΒ. Donc, etc.

#### PROPOSITION XX.

Deux côtés d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le côté restant.

Soit le triangle ΑΒΓ ; je dis que deux côtés du triangle ΑΒΓ, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le côté restant ; les côtés ΒΑ, ΑΓ plus grands que ΒΓ ; les côtés ΑΒ, ΒΓ plus grands que ΑΓ, et les côtés ΒΓ, ΓΑ plus grands que ΑΒ.

Prolongeons ΒΑ vers Δ, faisons ΑΔ égal à ΓΑ, et joignons ΔΓ.

Puisque ΔΑ est égal à ΑΓ, l'angle ΑΔΓ est égal à l'angle ΑΓΔ (5) ; donc l'angle ΒΓΔ

ὕπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπὶ τρίγωνόν ἐστὶ τὸ ΔΓΒ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἢ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων. Ἴση δὲ ἢ ΔΑ τῇ ΑΓ ἢ μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονες εἰσιν· αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μὲν ἴσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ πλευραὶ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μὲν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν, τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

utique est ΒΓΔ ipso ΑΔΓ; et quoniam triangulum est ΔΓΒ, majorem habens ΒΓΔ angulum ipso ΒΔΓ, majorem autem angulum majus latus subtendit; ΔΒ igitur ipsâ ΒΓ est major; æqualis autem ΔΑ ipsi ΑΓ; majores igitur ΒΑ, ΑΓ ipsâ ΒΓ. Similiter autem ostendemus et ipsas quidem ΑΒ, ΒΓ ipsâ ΓΑ majores esse; ipsas vero ΒΓ, ΓΑ ipsâ ΑΒ. Omnis igitur, etc.

PROPOSITIO XXI.

Si trianguli super uno laterum a terminis duæ rectæ intus constituentur, constructæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ΑΒΓ super uno laterum ΒΓ, a terminis Β, Γ, duæ rectæ intus constituentur ΒΔ, ΔΓ; dico ΒΔ, ΔΓ latera reliquis trianguli duobus lateribus ΒΑ, ΑΓ minora quidem esse, majorem vero angulum continere, ipsum ΒΔΓ ipso ΒΑΓ.

est plus grand que l'angle ΑΔΓ (not. 9); donc, puisque dans le triangle ΔΓΒ, l'angle ΒΓΔ est plus grand que l'angle ΒΔΓ, et qu'un plus grand côté soutend un plus grand angle (19), le côté ΔΒ est plus grand que le côté ΒΓ; mais ΔΑ est égal à ΑΓ; donc les côtés ΒΑ, ΑΓ sont plus grands que ΒΓ. Nous démontrerons semblablement que les côtés ΑΒ, ΒΓ sont plus grands que ΓΑ, et les côtés ΒΓ, ΓΑ plus grands que ΑΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XXI.

Si des extrémités d'un des côtés d'un triangle, on construit intérieurement deux droites, ces deux droites seront plus petites que les deux côtés restans du triangle, mais elles comprendront un plus grand angle.

Des extrémités Β, Γ du côté ΒΓ du triangle ΑΒΓ, construisons intérieurement les deux droites ΒΔ, ΔΓ; je dis que les droites ΒΔ, ΔΓ sont plus petites que les deux côtés restans ΒΑ, ΑΓ, et qu'elles comprennent un angle ΒΔΓ plus grand que l'angle ΒΑΓ.

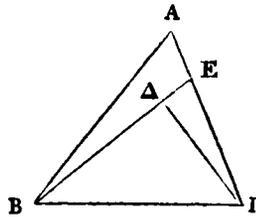
## 36 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονες εἰσι· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες εἰσι. Πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονες εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονες εἰσιν. Ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες εἰδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῶν ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονες εἰσι.

Producatur enim ΒΔ ad Ε.

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, ΑΒΕ trianguli duo latera ΑΒ, ΑΕ ipso ΒΕ majora sunt. Communis addatur ΕΓ; ergo ΒΑ; ΑΓ ipsis ΒΕ, ΕΓ majores sunt. Rursus, quoniam ΓΕΔ trianguli duo latera ΓΕ, ΕΔ ipso ΓΔ majora sunt; communis addatur ΔΒ; ergo ΓΕ, ΕΒ ipsis ΓΔ, ΔΒ majores sunt. Sed ipsis ΒΕ, ΕΓ majores ostensæ sunt ΒΑ, ΑΓ; multo igitur ΒΑ, ΑΓ ipsis ΒΔ, ΔΓ majores sunt.



Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστὶ· τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. Διὰ ταῦτα τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων εἰδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Rursus, quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et opposito major est, ΓΔΕ trianguli exterior angulus ΒΔΓ major est ipso ΓΕΔ. Propter eadem utique et ΑΒΕ trianguli exterior angulus ΓΕΒ major est ipso ΒΑΓ. Sed ipso ΓΕΒ major ostensus est ΒΔΓ; multo igitur ΒΔΓ major est ipso ΒΑΓ. Si igitur, etc.

Prolongeons ΒΑ vers Ε.

Puisque deux côtés d'un triangle quelconque sont plus grands que le côté restant (20), les deux côtés ΑΒ, ΑΕ du triangle ΑΒΕ sont plus grands que le côté ΒΕ; donc si nous ajoutons la droite commune ΒΓ, les droites ΒΑ, ΑΓ seront plus grandes que ΒΕ, ΕΓ. De plus, puisque les deux côtés ΓΕ, ΕΔ du triangle ΓΕΔ sont plus grands que ΓΔ, si nous ajoutons la droite commune ΔΒ, les droites ΓΕ, ΕΒ seront plus grandes que ΓΔ, ΔΒ; mais on a démontré que les droites ΒΑ, ΑΓ sont plus grandes que ΒΕ, ΕΓ; donc les droites ΒΑ, ΑΓ sont beaucoup plus grandes que ΒΑ, ΔΓ.

De plus, puisqu'un angle extérieur d'un triangle quelconque est plus grand qu'un des angles intérieurs et opposés (16), l'angle ΒΔΓ, qui est un angle extérieur du triangle ΔΕΓ, est plus grand que l'angle ΓΕΔ. Par la même raison l'angle ΓΕΒ, qui est un angle extérieur du triangle ΑΒΕ, est plus grand que l'angle ΒΑΓ; mais il a été démontré que l'angle ΒΔΓ est plus grand que l'angle ΓΕΒ; donc l'angle ΒΔΓ est beaucoup plus grand que l'angle ΒΑΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ.

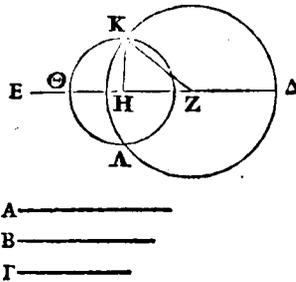
PROPOSITIO XXII.

Εκ τριῶν ὑθειῶν, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις<sup>1</sup>, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανόμενας, διὰ τὸ καὶ πάντες τριγώνου, τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανόμενας<sup>2</sup>.

Ἐστώσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἴστωσαν, πάντη μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ex tribus rectis, quæ sunt æquales tribus datis rectis, triangulum constituere; oportet autem duas reliquâ majores esse, omnifariam sumptas, quia et omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, omnifariam sumpta.

Sint datæ tres rectæ Α, Β, Γ, quarum duæ reliquâ majores sint, omnifariam sumptæ, ipsæ quidem Α, Β ipsâ Γ, ipsæ vero Α, Γ ipsâ Β, et denique ipsæ Β, Γ ipsâ Α; oportet igitur ex rectis æqualibus ipsis Α, Β, Γ triangulum constituere.



Ἐκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἀπείροσ δὲ κατὰ τὸ Ε· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση

Exponatur aliqua recta ΔΕ, terminata quidem ad Δ, infinita vero ad Ε; et ponatur ipsi quidem Α æqualis ΔΖ, ipsi vero Β æqualis ΖΗ, et ipsi Γ

PROPOSITION XXII.

Avec trois droites qui sont égales à trois droites données, construire un triangle: il faut que deux de ces trois droites, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grande que la troisième; parce que deux côtés d'un triangle, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisième.

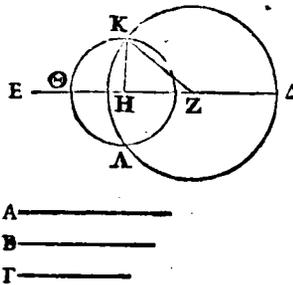
Soient données les trois droites Α, Β, Γ, dont deux, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grandes que la troisième; les droites Α, Β plus grandes que Γ; les droites Α, Γ plus grandes que Β, et enfin les droites Β, Γ plus grandes que Α; il faut, avec trois droites égales aux droites Α, Β, Γ, construire un triangle.

Soit la droite ΔΕ, terminée en Δ, et indéfinie en Ε; faisons la droite ΔΖ égale à la droite Α (prop. 3), la droite ΖΗ égale à la droite Β, et la droite ΗΘ égale à

38 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ  $H\Theta$ · καὶ κέντρῳ μὲν τῷ  $Z$ , διαστήματι δὲ τῷ  $Z\Delta$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $\Delta\text{Κ}\Lambda$ · καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ  $H$ , διαστήματι δὲ τῷ  $H\Theta$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $\text{Κ}\Lambda\Theta$ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ  $KZ$ ,  $KH$ · λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἴσων ταῖς  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ , τρίγωνον συνέσταται τὸ  $KZH$ .

$\alpha$ qualis  $H\Theta$ ; et centro quidem  $Z$ , intervallo vero  $Z\Delta$ , circulus describatur  $\Delta\text{Κ}\Lambda$ ; et rursus, centro quidem  $H$ , intervallo vero  $H\Theta$ , circulus describatur  $\text{Κ}\Lambda\Theta$ , et jungantur  $KZ$ ,  $KH$ ; dico ex tribus rectis,  $\alpha$ equalibus ipsis  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ , triangulum constitutum esse  $KZH$ .



Ἐπεὶ οὖν τὸ  $Z$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $\Delta\text{Κ}\Lambda$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $Z\Delta$  τῇ  $Z\text{Κ}$ · ἀλλὰ ἡ  $Z\Delta$  τῇ  $A$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ  $KZ$  ἄρα τῇ  $A$  ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ  $H$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $\text{Κ}\Lambda\Theta$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $H\Theta$  τῇ  $H\text{Κ}$ · ἀλλὰ ἡ  $H\Theta$  τῇ  $\Gamma$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ  $KH$  ἄρα τῇ  $\Gamma$  ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  $ZH$  τῇ  $B$  ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ  $KZ$ ,  $ZH$ ,  $H\text{Κ}$ , ἕκαστὴ ταῖς  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  ἴσαι εἰσίν.

Quoniam igitur  $Z$  punctum centrum est  $\Delta\text{Κ}\Lambda$  circuli,  $\alpha$ qualis est  $Z\Delta$  ipsi  $Z\text{Κ}$ ; sed  $Z\Delta$  ipsi  $A$  est  $\alpha$ qualis; et  $KZ$  igitur ipsi  $A$  est  $\alpha$ qualis. Rursus, quoniam  $H$  punctum centrum est  $\text{Κ}\Lambda\Theta$  circuli,  $\alpha$ qualis est  $H\Theta$  ipsi  $H\text{Κ}$ ; sed  $H\Theta$  ipsi  $\Gamma$  est  $\alpha$ qualis; et  $KH$  igitur ipsi  $\Gamma$  est  $\alpha$ qualis. Est autem et  $ZH$  ipsi  $B$   $\alpha$ qualis; tres igitur rectæ  $KZ$ ,  $ZH$ ,  $H\text{Κ}$  tribus  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$   $\alpha$ quales sunt.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν  $KZ$ ,  $ZH$ ,  $H\text{Κ}$ , αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ , τρίγωνον συνέσταται τὸ  $KZH$ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ex tribus igitur rectis  $KZ$ ,  $ZH$ ,  $H\text{Κ}$ , quæ sunt  $\alpha$ quales datis rectis  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ , triangulum constitutum est  $KZH$ . Quod oportebat facere.

la droite  $\Gamma$ ; du centre  $Z$  et de l'intervalle  $Z\Delta$  décrivons le cercle  $\Delta\text{Κ}\Lambda$  (dem. 5); et de plus du centre  $H$  et de l'intervalle  $H\Theta$  décrivons le cercle  $\text{Κ}\Lambda\Theta$ , et joignons  $KZ$ ,  $KH$ ; je dis que le triangle  $KZH$  est construit avec trois droites égales aux droites  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ .

Car puisque le point  $Z$  est le centre du cercle  $\Delta\text{Κ}\Lambda$ ,  $Z\Delta$  est égal à  $Z\text{Κ}$  (déf. 15); mais  $Z\Delta$  est égal à  $A$ ; donc  $KZ$  égal à  $A$ . De plus, puisque le point  $H$  est le centre du cercle  $\text{Κ}\Lambda\Theta$ ,  $H\Theta$  est égal à  $H\text{Κ}$ ; mais  $H\Theta$  est égal à  $\Gamma$ ; donc  $KH$  est égal à  $\Gamma$ . Mais  $ZH$  est égal à  $B$ ; donc les trois droites  $KZ$ ,  $ZH$ ,  $H\text{Κ}$  sont égales aux trois droites  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ .

Donc le triangle  $KZH$  a été construit avec trois droites  $KZ$ ,  $ZH$ ,  $H\text{Κ}$ , qui sont égales aux trois droites données  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ . Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

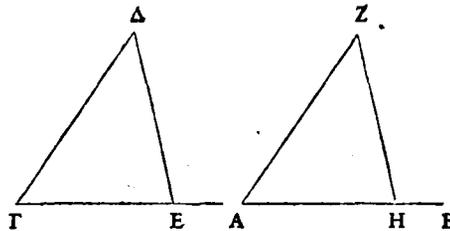
PROPOSITIO XXIII.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσῃ γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθείσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ , τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ  $A$ , ἡ δὲ δοθείσα γωνία εὐθυγράμμος ἡ ὑπὸ  $\Delta ΓΕ$ . δεῖ δὲ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ  $AB$ , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $A$ , τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ  $\Delta ΓΕ$  ἴσῃ γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ad datam rectam, et ad punctum in eâ, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit quidem data recta  $AB$ , in eâ vero punctum  $A$ , et datus angulus rectilineus  $\Delta ΓΕ$ ; oportet igitur ad datam rectam  $AB$ , et ad punctum in eâ  $A$ , dato angulo rectilineo  $\Delta ΓΕ$  æqualem angulum rectilineum constituere.



Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν  $ΓΔ$ ,  $ΓΕ$  τυχόντα σημεία τὰ  $\Delta$ ,  $E$ , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  $\Delta E$ · καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἷ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς  $ΓΔ$ ,  $\Delta E$ ,  $ΓΕ$ , τρίγωνον συνιστάτω τὸ  $AZH$ , ὥστε ἴσῃ εἶναι τὴν μὲν  $ΓΔ$  τῇ  $AZ$ , τὴν δὲ  $ΓΕ$  τῇ  $AH$ , καὶ ἔτι τὴν  $\Delta E$  τῇ  $ZH$ .

Sumantur in utraq̄ue ipsarum  $ΓΔ$ ,  $ΓΕ$  quælibet puncta  $\Delta$ ,  $E$ , et jungatur  $\Delta E$ ; et ex tribus rectis, quæ sunt æquales tribus  $ΓΔ$ ,  $\Delta E$ ,  $ΓΕ$ , triangulum constituatur  $AZH$ , ita ut æqualis sit  $ΓΔ$  quidem ipsi  $AZ$ , ipsa vero  $ΓΕ$  ipsi  $AH$ , et denique  $\Delta E$  ipsi  $ZH$ .

PROPOSITION XXIII.

A une droite donnée, et à un point de cette droite, construire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné.

Soient donnés la droite  $AB$ , et un point  $A$  dans cette droite; que  $\Delta ΓΕ$  soit l'angle rectiligne donné; il faut à la droite donnée  $AB$  et au point  $A$  de cette droite, construire un angle rectiligne égal à l'angle rectiligne donné  $\Delta ΓΕ$ .

Soient pris, dans l'une et l'autre des droites  $ΓΔ$ ,  $ΓΕ$ , deux points quelconques  $\Delta$ ,  $E$ , joignons  $\Delta E$ , et avec trois droites égales aux droites  $ΓΔ$ ,  $\Delta E$ ,  $ΓΕ$ , construisons le triangle  $AZH$  (22), de manière que  $ΓΔ$  soit égal à  $AZ$ ,  $ΓΕ$  égal à  $AH$ , et  $\Delta E$  égal à  $ZH$ .

40 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δυσὶ ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ ΔΕ ἴσῃ τῇ ΖΗ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἴσῃ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμω τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνίᾳ εὐθύγραμμος συνίσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχη τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξει.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἴστω· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

Quoniam igitur duæ ΔΓ, ΓΕ duabus ΖΑ, ΑΗ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΔΕ basi ΖΗ æqualis, angulus utique ΔΓΕ angulo ΖΑΗ est æqualis.

Ad datam igitur rectam ΑΒ, et ad punctum in eâ Α, dato angulo rectilineo ΔΓΕ, æqualis angulus rectilineus constitutus est ΖΑΗ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXIV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, angulum autem angulo majorem habeant, qui ab æqualibus lateribus continetur; et basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ æqualia habentia, utrumque utrique, ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ vero ipsi ΔΖ, et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΖ major sit; dico et basim ΒΓ basi ΕΖ majorem esse.

Puisque les deux droites ΔΓ, ΓΕ sont égales aux deux droites ΖΑ, ΑΗ, chacune à chacune, et que la base ΔΕ est égale à la base ΖΗ, l'angle ΔΓΕ sera égal à l'angle ΖΑΗ (8).

Donc à la droite ΑΒ, et au point Α de cette droite, on a construit l'angle rectiligne ΖΑΗ égal à l'angle rectiligne ΔΓΕ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXIV.

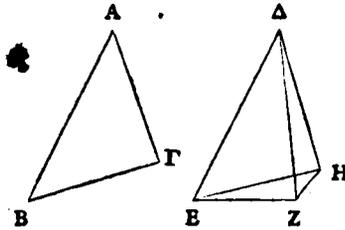
Si deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et la base de l'un plus grande que la base de l'autre, ils auront les angles compris entre les côtés égaux plus grands l'un que l'autre.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant les deux côtés ΑΒ, ΑΓ égaux aux deux côtés ΔΕ, ΔΖ, chacun à chacun, le côté ΑΒ égal au côté ΔΕ, et le côté ΑΓ égal au côté ΔΖ; que l'angle ΒΑΓ soit plus grand que l'angle ΕΔΖ; je dis que la base ΒΓ est plus grande que la base ΕΖ.

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 41

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἴσθιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνιστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ καὶ κείσθω ὀποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

Quoniam enim major est ΒΑΓ angulus ΕΔΖ angulo, constituatur ad ΔΕ rectam, et ad punctum in eâ Δ, ipsi ΒΑΓ angulo æqualis ΕΔΗ; et ponatur alterutri ipsarum ΑΓ, ΔΖ æqualis ΔΗ, et jungantur ΕΗ, ΖΗ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἴσθιν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὲ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι ἴσθιν, ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἴσθι· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ ἴσθι τῇ ΕΗ ἴσθιν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἴσθιν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἴσθι καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΗΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ, τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, πολλῶν ἄρα μείζων ἴσθιν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποταίνεται· μείζων ἄρα καὶ ἡ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. Ἰση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Quoniam igitur æqualis est ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ ipsa vero ipsi ΔΗ, duæ utique ΒΑ, ΑΓ duabus ΕΔ, ΔΗ æquales sunt, utraque utriusque, et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΗ æqualis est; basis igitur ΒΓ basi ΕΗ est æqualis. Rursus, quoniam æqualis est ΔΖ ipsi ΔΗ, æqualis est et ΔΖΗ angulus ipsi ΔΗΖ; major igitur ΔΖΗ ipso ΕΗΖ; multo igitur major est ΕΖΗ ipso ΕΗΖ. Et quoniam triangulum est ΕΖΗ, majorem habens ΕΖΗ angulum ipso ΕΗΖ; majorem autem angulum majus latus subtendit; majus igitur et latus ΕΗ ipso ΕΖ. Æquale autem ΕΗ ipsi ΒΓ; majus igitur et ΒΓ ipso ΕΖ. Si igitur duo, etc.

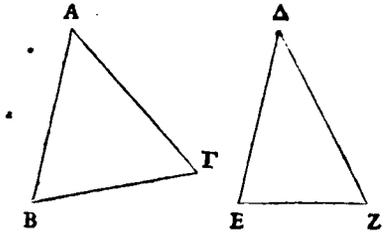
Car puisque l'angle ΒΑΓ est plus grand que l'angle ΕΔΖ, construisons sur la droite ΔΕ, et au point Δ de cette droite, un angle ΕΔΗ égal à l'angle ΒΑΓ (23); faisons la droite ΔΗ égale à l'une ou à l'autre des droites ΑΓ, ΔΖ (3), et joignons ΕΗ, ΖΗ.

Puisque ΑΒ est égal à ΔΕ, et ΑΓ à ΔΗ, les deux droites ΒΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΕΔ, ΔΗ, chacune à chacune; mais l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΕΔΗ; donc la base ΒΓ est égale à la base ΕΗ (4). De plus, puisque ΔΖ est égal à ΔΗ, l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΔΗΖ (5); donc l'angle ΔΖΗ est plus grand que l'angle ΕΗΖ; donc l'angle ΕΖΗ est beaucoup plus grand que l'angle ΕΗΖ; et puisque ΕΖΗ est un triangle, ayant l'angle ΕΖΗ plus grand que l'angle ΕΗΖ, et qu'un plus grand côté soutend un plus grand angle (19), le côté ΕΗ est plus grand que le côté ΕΖ; mais ΕΗ est égal à ΒΓ; donc le côté ΒΓ est plus grand que le côté ΕΖ. Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς ἑκατέρωθεν ἴσας ἔχη, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν δὲ βάσιν τῆς βραχύτερας μείζονα ἢ ἄλλοι καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ , τὰς δύο πλευρὰς τὰς  $AB$ ,  $ΑΓ$  ταῖς ἑκατέρωθεν ἴσας  $ΔE$ ,  $ΔZ$  ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν  $AB$  τῇ  $ΔE$ , τὴν δὲ  $ΑΓ$  τῇ  $ΔZ$ . Βάσις δὲ ἢ  $BΓ$  βραχύτερα τῆς  $EZ$  μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἢ ὑπὸ  $BΑΓ$  γωνίας τῆς ὑπὸ  $EΔZ$  μείζων ἔστί.



Εἰ γὰρ μὴ, ἢτοι ἴση ἔστί αὐτῇ, ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἢ ὑπὸ  $BΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $EΔZ$ , ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ ἡ βᾶσις ἢ  $BΓ$  βᾶσις τῇ  $EZ$ · οὐκ ἔστι δὲ· οὐκ ἄρα ἴση ἔστί γωνία ἢ ὑπὸ

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utriusque, basim autem basi majorem habeant; et angulum angulo majorem habebunt, qui ab æqualibus rectis continetur.

Sint duo triangula  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ , duo latera  $AB$ ,  $ΑΓ$  duobus lateribus  $ΔE$ ,  $ΔZ$  æqualia habentia, utrumque utriusque,  $AB$  quidem ipsi  $ΔE$ ,  $ΑΓ$  vero ipsi  $ΔZ$ , basis autem  $BΓ$  basi  $EZ$  major sit; dico et angulum  $BΑΓ$  angulo  $EΔZ$  majorem esse.

Si enim non, vel æqualis est ei, vel minor; æqualis autem non est  $BΑΓ$  ipsi  $EΔZ$ , æqualis enim esset et basis  $BΓ$  basi  $EZ$ ; non est autem; non igitur æqualis est angulus  $BΑΓ$  ipsi  $EΔZ$ .

## • PROPOSITION XXV.

Si deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et la base de l'un plus grande que la base de l'autre, ils auront les angles compris entre les côtés égaux plus grands l'un que l'autre.

Soient deux triangles  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ , ayant les deux côtés  $AB$ ,  $ΑΓ$  égaux aux deux côtés  $ΔE$ ,  $ΔZ$ , chacun à chacun, le côté  $AB$  égal au côté  $ΔE$ , et le côté  $ΑΓ$  égal au côté  $ΔZ$ ; que la base  $BΓ$  soit plus grande que la base  $EZ$ ; je dis que l'angle  $BΑΓ$  est plus grand que l'angle  $EΔZ$ .

Car si cela n'est point, il lui est égal, ou il est plus petit; mais l'angle  $BΑΓ$  n'est pas égal à l'angle  $EΔZ$ , car alors la base  $BΓ$  seroit égale à la base  $EZ$  (4); mais elle ne l'est point; donc l'angle  $BΑΓ$  n'est pas égal à l'angle  $EΔZ$ . Mais l'angle  $BΑΓ$

ΒΑΓ τῆ ὑπὸ ΕΔΖ. Οὐδὲ μὲν ἐλάσσων ἢ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ<sup>7</sup>, ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν<sup>8</sup> καὶ βάσις ἢ ΒΓ βάσις τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δὲ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ἴση· μίζων ἄρα ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ<sup>9</sup> τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

Neque tamen minor est ΒΑΓ ipso ΕΔΖ, minor enim esset et basis ΒΓ basi ΕΖ; non est autem; non igitur minor est ΒΑΓ angulus ipso ΕΔΖ. Ostensum est autem neque æqualem esse; major igitur est ΒΑΓ ipso ΕΔΖ. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

PROPOSITIO XXVI.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς<sup>1</sup> δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχη, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι<sup>2</sup> τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἐστω<sup>3</sup> δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυοὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχίτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην· πρότερον, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, vel quod est ad æquales angulos, vel quod subtendit unum æqualium angulorum; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, utrumque utrique, et reliquum angulum reliquo angulo.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duos angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus ΔΕΖ, ΕΖΔ æquales habentia, utrumque utrique, ΑΒΓ quidem ipsi ΔΕΖ, ΒΓΑ vero ipsi ΕΖΔ, habeant autem et unum latus uni lateri æquale; primum, quod est ad æquales angulos, ipsum ΒΓ ipsi ΕΖ; dico et reliqua latera

n'est pas plus petit que l'angle ΕΔΖ, car alors la base ΒΓ serait plus petite que la base ΕΖ (24); mais elle ne l'est point; donc l'angle ΒΑΓ n'est pas plus petit que l'angle ΕΔΖ. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc l'angle ΒΑΓ est plus grand que l'angle ΕΔΖ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVI.

Si deux triangles ont deux angles égaux, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, ou celui qui est adjacent aux angles égaux, ou celui qui est opposé à un des angles égaux, ils auront les autres côtés égaux, chacun à chacun, et l'angle restant égal à l'angle restant.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant les deux angles ΑΒΓ, ΒΓΑ égaux aux deux angles ΔΕΖ, ΕΖΔ, chacun à chacun, l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΒΓΑ égal à l'angle ΕΖΔ; que ces deux triangles aient aussi un côté égal à un côté, et d'abord celui qui est adjacent aux angles égaux, le côté ΒΓ égal au

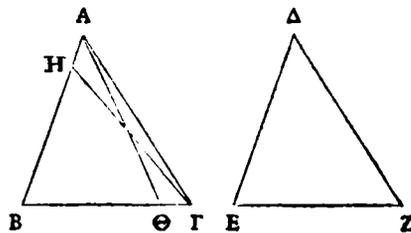
44 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γωνίαις τὴν ΒΓ τῆ ΕΖ· λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν ΑΒ τῆ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῆ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῆ λοιπῆ γωνία, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῆ ὑπὸ ΕΔΖ.

Εἰ γὰρ ἀνίσος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν\*. Ἐστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῆ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΗΓ.

reliquis lateribus æqualia habitura esse, utrumque utriusque, ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ vero ipsi ΔΖ, et reliquum angulum reliquo angulo, ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ.

Si enim inæqualis est ΑΒ ipsi ΔΕ, una earum major est. Sit major ΑΒ, et ponatur ipsi ΔΕ æqualis ΒΗ, et jungatur ΗΓ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῆ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῆ ΕΖ, δύο δὲ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυοὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνία τῆ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστὶ· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῆ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται<sup>δ</sup>, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῆ ὑπὸ ΔΖΕ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῆ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση<sup>ε</sup> καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῆ ὑπὸ ΒΓΑ

Quoniam igitur æqualis est ΒΗ quidem ipsi ΔΕ, ΒΓ vero ipsi ΕΖ, duæ utique ΒΗ, ΒΓ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales sunt, utraque utriusque, et angulus ΗΒΓ angulo ΔΕΖ æqualis est; basis igitur ΗΓ basi ΔΖ æqualis est, et ΗΒΓ triangulum ΔΕΖ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur ΗΓΒ angulus ipsi ΔΖΕ. Sed ΔΖΕ ipsi ΒΓΑ ponitur æqualis; igitur et ΒΓΗ ipsi ΒΓΑ æqualis est,

côté ΕΖ; je dis qu'ils auront les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun, le côté ΑΒ égal au côté ΔΕ, le côté ΑΓ égal au côté ΔΖ, et l'angle restant égal à l'angle restant, l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΕΔΖ.

Car si le côté ΑΒ n'est pas égal au côté ΔΕ, l'un d'eux est plus grand que l'autre. Soit ΑΒ le plus grand; faisons ΒΗ égal à ΔΕ (3), et joignons ΗΓ.

Puisque ΒΗ est égal à ΔΕ, et ΒΓ égal à ΕΖ, les deux côtés ΒΗ, ΒΓ sont égaux aux deux côtés ΔΕ, ΕΖ, chacun à chacun; mais l'angle ΗΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ; donc la base ΗΓ est égale à la base ΔΖ (4); le triangle ΗΒΓ est égal au triangle ΔΕΖ, et les angles restants, soutendus par les côtés égaux, seront égaux aux angles restants; donc l'angle ΗΓΒ est égal à l'angle ΔΖΕ; mais l'angle ΔΖΕ est supposé

ἴση ἔστιν, ἢ ἑλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $\Delta E$ . ἴση ἄρα. Ἐστί δὲ καὶ ἡ  $B\Gamma$  τῇ  $EZ$  ἴση, δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$  δυσὶ ταῖς  $\Delta E$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Delta EZ$  ἴση ἔστιν ἑκάστας ἄρα ἡ  $A\Gamma$  βάσις τῇ  $\Delta Z$  ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ  $BAG$  τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $E\Delta Z$  ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὲ πάλιν, ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτεινόμεναι ἴσαι, ὡς ἡ  $AB$  τῇ  $\Delta E$ . λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἢ μὲν  $A\Gamma$  τῇ  $\Delta Z$ , ἢ δὲ  $B\Gamma$  τῇ  $EZ$ , καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ  $BAG$  τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $E\Delta Z$  ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἀνισός ἐστιν ἡ  $B\Gamma$  τῇ  $EZ$ , μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ  $B\Gamma$  τῆς  $EZ$ , καὶ κείσθω τῇ  $EZ$  ἴση ἡ  $B\Theta$ , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  $\Delta\Theta$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ μὲν  $B\Theta$  τῇ  $EZ$ , ἡ δὲ  $AB$  τῇ  $\Delta E$ , δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $B\Theta$  δυσὶ ταῖς  $\Delta E$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ  $A\Theta$  ἑκάσται τῇ  $\Delta Z$  ἴση

minor majori, quod impossibile. Non igitur inæqualis est  $AB$  ipsi  $\Delta E$ ; æqualis igitur est. Est autem et  $B\Gamma$  ipsi  $EZ$  æqualis, duæ utique  $AB$ ,  $B\Gamma$  duabus  $\Delta E$ ,  $EZ$  æquales sunt, utraque utrique, et angulus  $AB\Gamma$  angulo  $\Delta EZ$  est æqualis; basis igitur  $A\Gamma$  basi  $\Delta Z$  æqualis est, et reliquus angulus  $BAG$  reliquo angulo  $E\Delta Z$  æqualis est.

Sed et rursus, sint ipsa æquales angulos latera subtendentia æqualia, ut  $AB$  ipsi  $\Delta E$ ; dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus æqualia futura esse,  $A\Gamma$  quidem ipsi  $\Delta Z$ ,  $B\Gamma$  vero ipsi  $EZ$ , et adhuc reliquum angulum  $BAG$  reliquo angulo  $E\Delta Z$  æqualem esse.

Si enim inæqualis est  $B\Gamma$  ipsi  $EZ$ , una earum major est. Sit major, si possibile est,  $B\Gamma$  ipsa  $EZ$ , et ponatur ipsi  $EZ$  æqualis  $B\Theta$ , et jungatur  $\Delta\Theta$ .

Et quoniam æqualis est  $B\Theta$  quidem ipsi  $EZ$ ,  $AB$  vero ipsi  $\Delta E$ , duæ utique  $AB$ ,  $B\Theta$  duabus  $\Delta E$ ,  $EZ$  æquales sunt, utraque utrique, et angulos æquales continent; basis igitur  $A\Theta$  basi  $\Delta Z$

égal à l'angle  $BGA$ ; donc l'angle  $B\Gamma H$  est égal à l'angle  $BGA$ , le plus petit au plus grand, ce qui est impossible; donc les côtés  $AB$ ,  $\Delta E$  ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais  $B\Gamma$  est égal à  $EZ$ ; donc les deux côtés  $AB$ ,  $B\Gamma$  sont égaux aux deux côtés  $\Delta E$ ,  $EZ$ , chacun à chacun; mais l'angle  $AB\Gamma$  est égal à l'angle  $\Delta EZ$ ; donc la base  $A\Gamma$  est égale à la base  $\Delta Z$  (4), et l'angle restant  $BAG$  est égal à l'angle restant  $E\Delta Z$ .

Mais de plus, que les côtés opposés aux angles égaux soient égaux, le côté  $AB$  égal au côté  $\Delta E$ ; je dis que les côtés restants seront égaux aux côtés restants, le côté  $A\Gamma$  égal au côté  $\Delta Z$ , et le côté  $B\Gamma$  égal au côté  $EZ$ , et que l'angle restant  $BAG$  est égal à l'angle restant  $E\Delta Z$ .

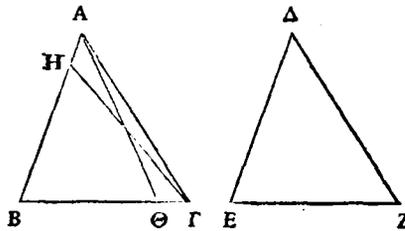
Car si le côté  $B\Gamma$  n'est pas égal au côté  $EZ$ , l'un d'eux est plus grand que l'autre; que  $B\Gamma$  soit plus grand que  $EZ$ , s'il est possible; faisons  $B\Theta$  égal à  $EZ$  (3), et joignons  $\Delta\Theta$ .

Puisque  $B\Theta$  est égal à  $EZ$ , et  $AB$  égal à  $\Delta E$ , les deux côtés  $AB$ ,  $B\Theta$  sont égaux aux deux côtés  $\Delta E$ ,  $EZ$ , chacun à chacun; mais ces côtés comprennent des angles égaux; donc la base  $A\Theta$  est égale à la base  $\Delta Z$  (4); le triangle  $AB\Theta$  est égal au

46 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστί, καὶ τὸ  $AB\Theta$  τρίγωνον τῷ  $\Delta EZ$  τριγώνῳ ἴσον ἴστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται<sup>11</sup>, ὅφ' αἷ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ὑπὸ  $B\Theta A$  γωνία τῇ ὑπὸ  $EZ\Delta$ . Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ  $EZ\Delta$  τῇ ὑπὸ  $B\Gamma A$ <sup>12</sup> ἴστί ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ  $B\Theta A$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $B\Gamma A$  ἴστί ἴση<sup>13</sup>· τριγώνου δὲ τοῦ  $A\Theta\Gamma$  ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $B\Theta A$  ἴση ἔστί τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ  $B\Gamma A$ , ὅπερ

$\alpha$ qualis est, et triangulum  $AB\Theta$  triangulo  $\Delta EZ$   $\alpha$ quale est, et reliqui anguli reliquis angulis  $\alpha$ quales erunt, quos  $\alpha$ qualia latera subtendunt;  $\alpha$ qualis igitur est  $B\Theta A$  angulus ipsi  $EZ\Delta$ . Sed  $EZ\Delta$  ipsi  $B\Gamma A$  est  $\alpha$ qualis; et  $B\Theta A$  igitur ipsi  $B\Gamma A$  est  $\alpha$ qualis; trianguli igitur  $A\Theta\Gamma$  exterior angulus  $B\Theta A$   $\alpha$ qualis est interiori et opposito  $B\Gamma A$ , quod est impossibile. Non igitur in $\alpha$ qualis est



ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ  $B\Gamma$  τῇ  $EZ$ , ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ  $AB$  τῇ  $\Delta E$  ἴση· δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$  δυσὶ ταῖς  $\Delta E$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βᾶσις ἄρα ἡ  $A\Gamma$  ἴσται τῇ  $\Delta Z$  ἴση ἴστί, καὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $\Delta EZ$  τριγώνῳ ἴσον, καὶ λοιπὴ<sup>14</sup> γωνία ἡ ὑπὸ  $B\Gamma A$  τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $E\Delta Z$  ἴση<sup>15</sup>. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

$B\Gamma$  ipsi  $EZ$ ;  $\alpha$ qualis igitur. Est autem et  $AB$  ipsi  $\Delta E$   $\alpha$ qualis; duæ igitur  $AB$ ,  $B\Gamma$  duabus  $\Delta E$ ,  $EZ$   $\alpha$ quales sunt, utraque utriusque, et angulos  $\alpha$ quales continent; basis igitur  $A\Gamma$  basi  $\Delta Z$   $\alpha$ qualis est, et triangulum  $AB\Gamma$  triangulo  $\Delta EZ$   $\alpha$ quale, et reliquus angulus  $B\Gamma A$  reliquo angulo  $E\Delta Z$   $\alpha$ qualis. Si igitur duo, etc.

triangle  $\Delta EZ$ , et les angles restants, opposés aux côtés égaux, seront égaux aux angles restants, chacun à chacun; donc l'angle  $B\Theta A$  est égal à l'angle  $EZ\Delta$ ; mais l'angle  $EZ\Delta$  est égal à l'angle  $B\Gamma A$ ; donc l'angle  $B\Theta A$  est égal à l'angle  $B\Gamma A$ ; donc l'angle extérieur  $B\Theta A$  du triangle  $A\Theta\Gamma$  est égal à l'angle intérieur et opposé  $B\Gamma A$ ; ce qui est impossible (16); donc les côtés  $B\Gamma$ ,  $EZ$  ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais le côté  $AB$  est égal au côté  $\Delta E$ ; donc les deux côtés  $AB$ ,  $B\Gamma$  sont égaux aux deux côtés  $\Delta E$ ,  $EZ$ , chacun à chacun; mais ces côtés comprennent des angles égaux; donc la base  $A\Gamma$  est égale à la base  $\Delta Z$  (4); le triangle  $AB\Gamma$  est égal au triangle  $\Delta EZ$ , et l'angle restant  $B\Gamma A$  égal à l'angle restant  $E\Delta Z$ . Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

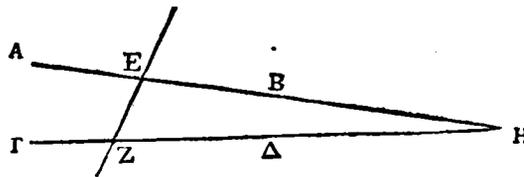
PROPOSITIO XXVII.

Εάν εἰς δύο εὐθείας εὐθείαι ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῆ, παράλληλοι ἴσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθείαι.

Si in duas rectas recta incidens alternos angulos æquales inter se faciat, parallele erunt inter se rectæ.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB, ΓΔ εὐθείαι ἐμπίπτουσα ἡ EZ, τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ AEZ, EZΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΓΔ'.

In duas enim rectas AB, ΓΔ recta incidens EZ, alternos angulos AEZ, EZΔ æquales inter se faciat; dico parallelam esse AB ipsi ΓΔ.



Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ AB, ΓΔ συμπεσοῦνται, ἢτοι ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ ΑΓ. Εκβεβλήσωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη κατὰ τὸ Η.

Si enim non, productæ AB, ΓΔ, convenient vel ad ΒΔ partes, vel ad ΑΓ; producantur, et convenient ad ΒΔ partes in Η.

Τριγώνου δὲ τοῦ EHZ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ AEZ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ EZH, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ AB, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ ΒΔ

Trianguli igitur EHZ exterior angulus AEZ æqualis est interiori et opposito EZH, quod est impossibile; non igitur AB, ΓΔ productæ convenient ad ΒΔ partes. Similiter autem ostend-

PROPOSITION XXVII.

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles alternes égaux entr'eux, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite EZ tombant sur les deux droites AB, ΓΔ fasse les angles alternes AEZ, EZΔ égaux entr'eux; je dis que la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ.

Car si elle ne lui est pas parallèle, les droites AB, ΓΔ étant prolongées se rencontreront, ou du côté ΒΔ, ou du côté ΑΓ. Qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent du côté ΒΔ, au point Η.

L'angle extérieur AEZ du triangle EHZ est égal à l'angle intérieur et opposé EZH, ce qui est impossible (16); donc les droites AB, ΓΔ prolongées du côté ΒΔ se rencontreront point. On démontrera de la même manière qu'elles ne se ren-

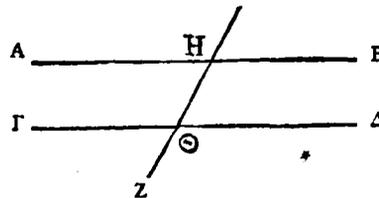
48 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μέρη. Ομοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ ΑΓ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοι εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Εὰν ἄρα εἰς δύο, καὶ τὰ ἰξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Εὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσιν ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ



ἴσιν ποιείτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω ὅτι παράλληλος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

detur neque ad ΑΓ; quæ autem in neutras partes conveniunt, parallelæ sunt; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ. Si igitur in duas, etc.

PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas recta incidens exteriorem angulum interiori et opposito et ad easdem partes æqualem faciat, vel interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales faciat; parallelæ erunt inter se rectæ.

In duas enim rectas ΑΒ, ΓΔ recta incidens ΕΖ exteriorem angulum ΕΗΒ interiori et opposito, angulo ΗΘΔ æqualem faciat, vel inte-

riores et ad easdem partes ipsos ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis æquales; dico parallelam esse ΑΒ ipsi ΓΔ.

contrerout pas non plus du côté ΑΓ; mais les droites qui ne se rencontrent d'aucun côté sont parallèles (déf. 35); donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVIII.

Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur, opposé, et placé du même côté, ou bien si elle fait les angles intérieurs et placés du même côté égaux à deux droits, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite ΕΖ tombant sur les droites ΑΒ, ΓΔ fasse l'angle extérieur ΕΗΒ égal à l'angle intérieur ΗΘΔ, opposé, et placé du même côté, ou bien les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ intérieurs, et placés du même côté, égaux à deux droits; je dis que la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ.

Επει γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσὶν ἑναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσὶ. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσὶν ἑναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα εἰς δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπύπτουσα τὰς τε ἑναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπιναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι τὰς τε

Car puisque l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΗΘΔ, et que l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΑΗΘ (15), l'angle ΑΗΘ est égal à l'angle ΗΘΔ; mais ces angles sont alternes; donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ (27).

De plus, puisque les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ sont égaux à deux droits, et que les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ sont aussi égaux à deux droits (15), les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ seront égaux aux angles ΒΗΘ, ΗΘΔ. Retranchons l'angle commun ΒΗΘ; l'angle restant ΑΗΘ sera égal à l'angle restant ΗΘΔ; mais ces deux angles sont alternes; donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ. (27). Donc, etc.

PROPOSITION XXIX.

Une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entr'eux, l'angle extérieur, égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits.

Que la droite ΕΖ tombe sur les droites parallèles ΑΒ, ΓΔ; je dis que cette droite fait les angles alternes ΑΗΘ, ΗΘΔ égaux entr'eux, l'angle extérieur ΕΗΒ, égal à

Quoniam enim æqualis est ΕΗΒ ipsi ΗΘΔ, sed ΕΗΒ ipsi ΑΗΘ est æqualis, et ΑΗΘ igitur ipsi ΗΘΔ est æqualis; et sunt alterni; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ.

Rursus, quoniam anguli ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis æquales sunt, sunt autem anguli ΑΗΘ, ΒΗΘ duobus rectis æquales; ergo ΑΗΘ, ΒΗΘ ipsis ΒΗΘ, ΗΘΔ æquales sunt. Communis auferatur ΒΗΘ; reliquus igitur ΑΗΘ reliquo ΗΘΔ est æqualis; et sunt alterni; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ. Si igitur in duas, etc.

PROPOSITIO XXIX.

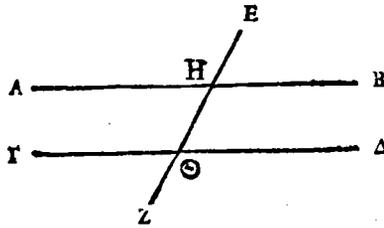
In parallelas rectas recta incidens, et alternos angulos æquales inter se facit, et exteriorem interiori et opposito et ad eandem partes æqualem, et interiores et ad eandem partes duobus rectis æquales.

In parallelas enim rectas ΑΒ, ΓΔ recta incidat ΕΖ; dico eam alternos angulos ΑΗΘ, ΗΘΔ æquales

50 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἰναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ  $AH\Theta$ ,  $H\Theta\Delta$  ἴσας ποιῶν, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ  $EHB$  τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ  $H\Theta\Delta$  ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ  $BH\Theta$ ,  $H\Theta\Delta$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

facere, et exteriorem angulum  $EHB$  interiori et opposito et ad easdem partes  $H\Theta\Delta$  æqualem, et interiores ad easdem partes  $BH\Theta$ ,  $H\Theta\Delta$  duobus rectis æquales.



Εἰ γὰρ ἀνίσος ἴστιν ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$  τῇ ὑπὸ  $H\Theta\Delta$ , μία αὐτῶν μείζων ἴστιν. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$  τῆς ὑπὸ  $H\Theta\Delta$ . Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  $BH\Theta$ . αἱ ἄρα ὑπὸ  $AH\Theta$ ,  $BH\Theta$  τῶν ὑπὸ  $BH\Theta$ ,  $H\Theta\Delta$  μείζονες εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ  $AH\Theta$ ,  $BH\Theta$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ  $BH\Theta$ ,  $H\Theta\Delta$  δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἀπειρον συμπέπτουσιν· αἱ ἄρα  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  ἐκβαλλόμεναι εἰς ἀπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπέπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκείσθαι· οὐκ ἄρα ἀνίσος ἴστιν ἡ ὑπὸ  $AH\Theta$  τῇ ὑπὸ  $H\Theta\Delta$  ἴση ἄρα.

Si enim inæqualis est  $AH\Theta$  ipsi  $H\Theta\Delta$ , unæ eorum major est; sit major  $AH\Theta$  ipso  $H\Theta\Delta$ . Communis addatur  $BH\Theta$ ; ergo  $AH\Theta$ ,  $BH\Theta$  ipsis  $BH\Theta$ ,  $H\Theta\Delta$  majores sunt. Sed  $AH\Theta$ ,  $BH\Theta$  duobus rectis æquales sunt; et igitur  $BH\Theta$ ,  $H\Theta\Delta$  duobus rectis minores sunt. Rectæ autem a minoribus quam duobus rectis productæ in infinitum concurrunt. Ipsæ igitur  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  productæ in infinitum concurrent; non autem concurrunt, quia parallelæ ponuntur; non igitur inæqualis est  $AH\Theta$  ipsi  $H\Theta\Delta$ ; æqualis igitur.

L'angle  $H\Theta\Delta$  intérieur opposé et placé du même côté, et les angles  $BH\Theta$ ,  $H\Theta\Delta$  intérieurs et placés du même côté, égaux à deux droits.

Car si l'angle  $AH\Theta$  n'est pas égal à l'angle  $H\Theta\Delta$ , l'un d'eux est plus grand. Que l'angle  $AH\Theta$  soit plus grand que  $H\Theta\Delta$ . Ajoutons l'angle commun  $BH\Theta$ , les angles  $AH\Theta$ ,  $BH\Theta$  seront plus grands que les angles  $BH\Theta$ ,  $H\Theta\Delta$ ; mais les angles  $AH\Theta$ ,  $BH\Theta$  sont égaux à deux droits (13); donc les angles  $BH\Theta$ ,  $H\Theta\Delta$  sont moindres que deux droits. Mais si deux droites sont prolongées à l'infini du côté où les angles intérieurs sont plus petits que deux droits, ces droites se rencontrent (dem. 5); donc les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  prolongées à l'infini se rencontreront. Mais elles ne se rencontreront pas, puisqu'elles sont parallèles; donc les angles  $AH\Theta$ ,

Αλλά ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆ ὑπὸ ΕΗΒ ἴσιν·  
καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῆ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσιν ἴση.

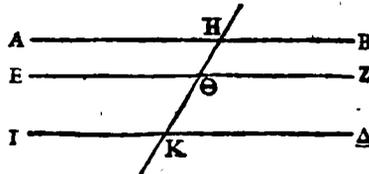
Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ  
ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν.  
Αλλά αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν·  
καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι  
εἰσίν. Η ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ΄.

Αἱ τῆ αὐτῆ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις  
εἰσὶ παράλληλοι.

Ἐστώ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῆ ΕΖ παράλ-  
ληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῆ ΓΔ ἐστὶ παράλ-  
ληλος.

Ἐμπίπτειτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.



Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ,  
ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  
ΑΗΘ τῆ ὑπὸ ΗΘΖ. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς τὰς παρ-

Sed ΑΗΘ ipsi ΕΗΒ est æqualis; et ΕΗΒ igitur  
ipsi ΗΘΔ est æqualis.

Communis addatur ΒΗΘ; ergo ΕΗΒ, ΒΗΘ  
ipsis ΒΗΘ, ΗΘΔ æquales sunt. Sed ΕΗΒ, ΒΗΘ  
duobus rectis æquales sunt; et ΒΗΘ, ΗΘΔ  
igitur duobus rectis æquales sunt. Ergo in  
parallelas, etc.

PROPOSITIO XXX.

Quæ eidem rectæ parallelæ sunt, et inter se  
sunt parallelæ.

Sit utraque ipsarum ΑΒ, ΓΔ ipsi ΕΖ paral-  
lela; dico et ΑΒ ipsi ΓΔ esse parallelam.

Incidat enim in ipsas recta ΗΚ.

Et quoniam in parallelas rectas ΑΒ, ΕΖ recta  
incidit ΗΚ, æqualis est ΑΗΘ ipsi ΗΘΖ. Rursus  
quoniam in parallelas rectas ΕΖ, ΓΔ recta in-

ΗΘΔ ne sont point inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle ΑΗΘ est égal à  
l'angle ΕΗΒ (15); donc l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΗΘΔ.

Ajoutons l'angle commun ΒΗΘ, les angles ΕΗΒ, ΒΗΘ seront égaux aux angles  
ΒΗΘ, ΗΘΔ; mais les angles ΕΗΒ, ΒΗΘ sont égaux à deux droits (13); donc les  
angles ΒΗΘ, ΗΘΔ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXX.

Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entr'elles.

Que chacune des droites ΑΒ, ΓΔ soit parallèle à ΕΖ; je dis que ΑΒ est parallèle à ΓΔ.

Que la droite ΗΚ tombe sur les droites ΑΒ, ΓΔ.

52 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

αλλήλους<sup>2</sup> εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεία ἰμ-  
πίπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ  
ΗΚΔ. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ  
ἴση. Καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστὶν ἴση· καὶ  
εἰσὶν ἐναλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.  
Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ<sup>3</sup>, καὶ τὰ ἐξῆς.

cidit ΗΚ, æqualis est ΗΘΖ ipsi ΗΚΔ. Ostensus  
est autem et ΑΗΚ ipsi ΗΘΖ æqualis; ΑΗΚ igitur  
ipsi ΗΚΔ est æqualis; et sunt alterni. Paral-  
lela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ. Quæ igitur eidem  
rectæ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ.

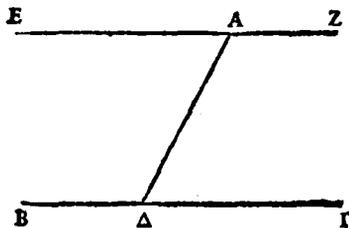
PROPOSITIO XXXI.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου<sup>1</sup>, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ  
παράλληλον εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Per datum punctum, datæ rectæ parallelam  
rectam lineam ducere.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ  
δοθείσα εὐθεία ἡ ΒΓ· διὸ δὴ, διὰ τοῦ Α σημείου,  
τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθείαν γραμμὴν  
ἀγαγεῖν.

Sit quidem datum punctum Α, data vero  
recta ΒΓ; oportet igitur, per Α punctum, ipsi  
ΒΓ rectæ parallelam rectam lineam ducere.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχόν σημεῖον τὸ Δ,  
καὶ ἰπιεξεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ ΑΔ

Sumatur in ΒΓ quodlibet punctum Δ, et jun-  
gatur ΑΔ; et constituatur ad ΑΔ rectam, et ad

Puisque la droite ΗΚ tombe sur les droites parallèles ΑΒ, ΕΖ, l'angle ΑΗΘ est égal à l'angle ΗΘΖ (27). De plus, puisque la droite ΗΚ tombe sur les droites parallèles ΕΖ, ΓΔ, l'angle ΗΘΖ est égal à l'angle ΗΚΔ (28). Mais on a démontré que l'angle ΑΗΚ est égal à l'angle ΗΘΖ; donc l'angle ΑΗΚ est égal à l'angle ΗΚΔ; mais ces angles sont alternes; donc ΑΒ est parallèle à ΓΔ (29). Donc, etc.

PROPOSITION XXXI.

Par un point donné, conduire une ligne droite parallèle à une droite donnée.  
Soit Α le point donné, et ΒΓ la droite donnée; il faut par le point Α conduire une ligne droite parallèle à la droite ΒΓ.

Prenons sur la droite ΒΓ un point quelconque Δ, et joignons ΑΔ; construisons

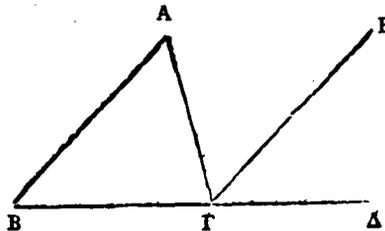
εὐθεία, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκτεθλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆς ΕΑ εὐθεῖα ἢ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἢ ΑΔ τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποιήκει, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἔκται ἢ ΕΑΖ· ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΞΙΣ ΑΒ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκτεθλήσθω, ἢ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ἑρβαῖς ἴσαι εἰσίν.



Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκτεθλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἢ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι

sur la droite ΔΑ, et au point Α de cette droite, l'angle ΔΑΕ égal à l'angle ΑΔΓ (23), et prolongeons la droite ΑΖ dans la direction de ΕΑ.

Puisque la droite ΑΔ, tombant sur les deux droites ΒΓ, ΕΖ, fait les angles alternes ΕΑΔ, ΑΔΓ égaux entr'eux, la droite ΕΖ est parallèle à droite ΒΓ (27).

Donc la ligne droite ΕΑΖ a été menée, par le point donné Α, parallèle à la droite donnée ΒΓ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXII.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelcônque, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés; et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

Soit le triangle ΑΒΓ; et prolongeons le côté ΒΓ en Δ; je dis que l'angle exté-

punctum in eâ Α, angulo ΑΔΓ æqualis angulus ΔΑΕ, et producatur in directum ipsi ΕΑ recta ΑΖ.

Et quoniam in duas rectas ΒΓ, ΕΖ recta incidens ΑΔ alternos angulos ΕΑΔ, ΑΔΓ æquales inter se facit, parallela est ΕΖ ipsi ΒΓ.

Per datum igitur punctum Α, datæ rectæ ΒΓ parallela recta linea ducta est ΕΑΖ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus et oppositis æqualis est; et interiores trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt.

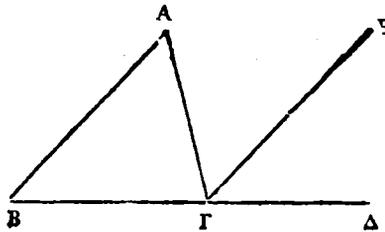
54 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ ταῖς' δυοὶ  
ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ·  
καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ  
ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡχθῶ γὰρ, διὰ τοῦ Γ σημείου, τῇ ΑΒ εὐθείᾳ  
παράλληλος ἡ ΓΕ.

ΑΓΔ æqualem esse duobus interioribus et op-  
positis ΓΑΒ, ΑΒΓ, et interiores trianguli tres  
angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ duabus rectis æquales  
esse.

Ducatur enim, per Γ punctum, ipsi ΑΒ rectæ  
parallela ΓΕ.



Καὶ ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ  
εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι  
αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Πάλιν,  
ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς  
αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ· ἡ ἐκτὸς γωνία  
ἢ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ  
ὑπὸ ΑΒΓ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ  
ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ  
δυοὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ,  
ΑΒΓ.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ  
ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι

Et quoniam parallela est ΑΒ ipsi ΓΕ, et in  
ipsas incidit ΑΓ, alterni anguli ΒΑΓ, ΑΓΕ  
æquales inter se sunt. Rursus, quoniam paral-  
lela est ΑΒ ipsi ΓΕ, et in ipsas incidit recta ΒΔ,  
exterior angulus ΕΓΔ æqualis est interiori et  
opposito ΑΒΓ. Ostensus autem est et ΑΓΕ ipsi  
ΒΑΓ æqualis; totus igitur ΑΓΔ exterior angulus  
æqualis est duobus interioribus et oppositis ΒΑΓ,  
ΑΒΓ.

Communis addatur ΑΓΒ; ergo ΑΓΔ, ΑΓΒ  
tribus ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ æquales sunt. Sed ΑΓΔ,

rieur ΑΓΔ est égal aux angles intérieurs et opposés ΓΑΒ, ΑΒΓ; et que les trois  
angles intérieurs ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits.

Menons, par le point Γ, la droite ΓΕ parallèle à ΑΒ (31).

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΕ, et que ΑΓ tombe sur ces droites, les angles  
alternes ΒΑΓ, ΑΓΕ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque la droite ΑΒ est  
parallèle à la droite ΓΕ, et que la droite ΒΔ tombe sur ces droites, l'angle exté-  
rieur ΕΓΔ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ. Mais on a démontré que  
l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΓ; donc l'angle extérieur ΑΓΔ est égal aux deux  
angles intérieurs et opposés ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ; les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront égaux aux trois

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 55

είσιν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δὺσιν ὀρθαῖς ἴσαι  
είσι· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δὺσιν  
ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ  
τὰ ἴζης.

ΑΓΒ duobus rectis æquales sunt; et ΑΓΒ, ΓΒΑ,  
ΓΑΒ igitur duobus rectis æquales sunt. Omnis  
igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

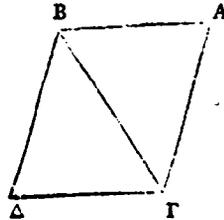
Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παράλληλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ  
μῆρη ἐπιζυγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι  
τε καὶ παράλληλοι εἰσιν.

Ἐστώσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ,  
καὶ ἐπιζυγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μῆρη  
εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ  
ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν.

PROPOSITIO XXXIII.

Quæ et æquales et parallelas ad easdem partes  
conjungunt rectæ, et ipsæ æquales et parallele  
sunt.

Sint et æquales et parallele ΑΒ, ΓΔ, et con-  
jungant ipsas ad easdem partes rectæ ΑΓ, ΒΔ;  
dico et ΑΓ, ΒΔ et æquales et parallelas esse.



Ἐπιζεύχθω γάρ ἡ ΒΓ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ  
εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι  
αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλάξ εἰσί. Καὶ ἐπεὶ

Jungatur enim ΒΓ.

Et quoniam parallela est ΑΒ ipsi ΓΔ, et in  
ipsas incidit ΒΓ, alterni anguli ΑΒΓ, ΒΓΔ  
æquales inter se sunt. Et quoniam æqualis est ΑΒ

angles ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits (15); donc  
les angles ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXXIII.

Les droites qui joignent, des mêmes côtés, des droites égales et parallèles, sont  
elles-mêmes égales et parallèles.

Soient ΑΒ, ΓΔ deux droites égales et parallèles; que les droites ΑΓ, ΒΔ les joi-  
gnent des mêmes côtés; je dis que les droites ΑΓ, ΒΔ sont égales et parallèles.

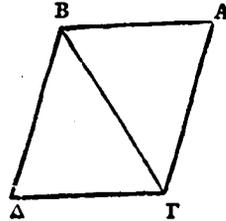
Joignons ΒΓ.

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles  
alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΒ est égale à ΓΔ, et que

56 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴση ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ , κοινὴ δὲ ἡ  $B\Gamma$ , δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$ , δυοὶ ταῖς  $\Gamma\Delta$ ,  $B\Gamma$  ἴσαι εἰσὶ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνία τῇ ὑπὸ  $B\Gamma\Delta$  ἴση ἐστίν· Βάσις ἄρα ἡ  $AG$  βάσει τῇ  $BD$  ἴση ἐστίν, καὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $B\Gamma\Delta$  τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἐσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπο-

ipsi  $\Gamma\Delta$ , communis autem  $B\Gamma$ ; duæ igitur  $AB$ ,  $B\Gamma$  duabus  $\Gamma\Delta$ ,  $B\Gamma$  æquales sunt, et angulus  $AB\Gamma$  angulo  $B\Gamma\Delta$  æqualis. Basis igitur  $AG$  basi  $BD$  est æqualis, et  $AB\Gamma$  triangulum  $B\Gamma\Delta$  triangulo æquale est; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt uterque utriusque, quos æqualia latera subtendunt; æqualis est igitur  $AGB$  an-



τείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $AGB$  γωνία τῇ ὑπὸ  $B\Gamma\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς  $AG$ ,  $BD$  εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ  $B\Gamma$  τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ  $AGB$ ,  $B\Gamma\Delta$  ἴσας ἀλλήλαις πεποιήκεν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $AG$  τῇ  $BD$ . Ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. Αἱ ἄρα τὰς ἴσας, καὶ τὰ ἐξῆς.

gulus ipsi  $B\Gamma\Delta$ . Et quoniam in duas rectas  $AG$ ,  $BD$  recta incidens  $B\Gamma$ , alternos angulos  $AGB$ ,  $B\Gamma\Delta$  æquales inter se facit, parallela est  $AG$  ipsi  $BD$ . Ostensa est autem ipsi et æqualis; quæ igitur æquales, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

PROPOSITIO XXXIV.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Parallelogrammorum spatiorum et opposita latera et anguli æqualia inter se sunt, et diameter ea bifariam secat.

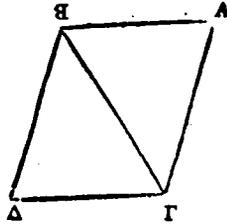
la droite  $B\Gamma$  est commune, les deux droites  $AB$ ,  $B\Gamma$  sont égales aux deux droites  $\Gamma\Delta$ ,  $B\Gamma$ ; mais l'angle  $AB\Gamma$  est égal à l'angle  $B\Gamma\Delta$ ; donc la base  $AG$  est égale à la base  $BD$ , le triangle  $AB\Gamma$  est égal au triangle  $B\Gamma\Delta$ , et les angles restans, opposés à des côtés égaux, seront égaux, chacun à chacun (4); donc l'angle  $AGB$  est égal à l'angle  $B\Gamma\Delta$ . Mais la droite  $B\Gamma$  tombant sur les deux droites  $AG$ ,  $BD$  fait les angles alternes  $AGB$ ,  $B\Gamma\Delta$  égaux entr'eux; donc la droite  $AG$  est parallèle à la droite  $BD$  (27). Mais on a démontré qu'elle lui est égale; donc, etc.

PROPOSITION XXXIV.

Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux, et la diagonale les partage en deux parties égales.

Εστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίας πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ διχα τέμνει.

Sit parallelogrammum spatium ΑΓΔΒ, diameter autem ipsius ΒΓ; dico ΑΓΔΒ parallelogrammi opposita et latera et angulos æqualia inter se esse, et ΒΓ diametrum illud bifariam secare.



Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Δύο δὴ τρίγωνα ἐστὶ τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν<sup>2</sup> μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Quoniam enim parallela est ΑΒ ipsi ΓΔ, et in ipsas incidit recta ΒΓ, alterni anguli ΑΒΓ, ΒΓΔ, æquales inter se sunt. Rursus, quoniam parallela est ΑΓ ipsi ΒΔ, et in ipsas incidit ΒΓ, alterni anguli ΑΓΒ, ΓΒΔ æquales inter se sunt. Duo igitur triangula sunt ΑΒΓ, ΒΓΔ, duos angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus angulis ΒΓΔ, ΓΒΔ æquales habentia, utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, commune utrique ΒΓ; et reliqua igitur reliquis lateribus æqualia habebunt, utrumque utrique, et reliquum angulum reliquo angulo; æquale igitur est ΑΒ quidem latus ipsi ΓΔ,

Soit le parallélogramme ΑΓΔΒ, et que ΒΓ soit sa diagonale; je dis que les côtés et les angles opposés du parallélogramme ΑΓΔΒ sont égaux entr'eux, et que la diagonale ΒΓ le partage en deux parties égales.

Car puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que la droite ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΓ est parallèle à ΒΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΓΒ, ΓΒΔ sont égaux entr'eux; donc les deux triangles ΑΒΓ, ΒΓΔ ont les deux angles ΑΒΓ, ΒΓΑ égaux aux deux angles ΒΓΔ, ΓΒΔ, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, savoir, le côté commun ΒΓ, qui est adjacent aux angles égaux; ils auront donc les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun (26), et l'angle restant égal à l'angle restant; donc le côté ΑΒ est égal au côté ΓΔ, le côté ΑΓ égal au côté ΒΔ, et l'angle

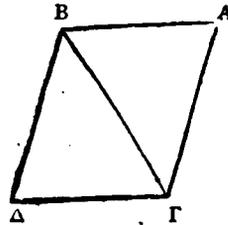
58 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴση ἄρα ἢ μὲν  $AB$  πλευρὰ τῆς  $\Gamma\Delta$ , ἢ δὲ  $AG$  τῆς  $B\Delta$ , καὶ ἔτι ἴση ἐστίν<sup>3</sup> ἢ ὑπὸ  $BAG$  γωνία τῆς ὑπὸ  $B\Delta\Gamma$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ μὲν ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνία τῆς ὑπὸ  $B\Gamma\Delta$ , ἢ δὲ ὑπὸ  $\Gamma B\Delta$  τῆς ὑπὸ  $AGB$  ἔλη ἄρα ἢ ὑπὸ  $AB\Delta$  ἔλη τῆς ὑπὸ  $AG\Delta$  ἐστὶν ἴση<sup>4</sup>· εἰδείχθη δὲ καὶ ἢ ὑπὸ  $BAG$  τῆς ὑπὸ  $\Gamma\Delta B$  ἴση·

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίων πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

$AG$  vero ipsi  $B\Delta$ , et adhuc æqualis est  $BAG$  angulus ipsi  $B\Delta\Gamma$ . Et quoniam æqualis est quidem  $AB\Gamma$  angulus ipsi  $B\Gamma\Delta$ , et  $\Gamma B\Delta$  ipsi  $AGB$ ; totus igitur  $AB\Delta$  toti  $AG\Delta$  est æqualis; ostensus est autem et  $BAG$  ipsi  $\Gamma\Delta B$  æqualis;

Ergo parallelogrammorum spatiorum opposita et latera et anguli æqualia inter se sunt.



λέγω δὲ<sup>5</sup> ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἢ  $AB$  τῆς  $\Gamma\Delta$ , κοινὴ δὲ ἢ  $B\Gamma$ , δύο δὴ αἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$  δυσὶ ταῖς  $\Delta\Gamma$ ,  $\Gamma B$  ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνία τῆς ὑπὸ  $B\Gamma\Delta$  ἴση ἐστὶ· καὶ βάσις ἄρα ἢ  $AG$  βάσει τῆς  $B\Delta$  ἴση ἐστὶ<sup>6</sup>· καὶ τὸ  $AB\Gamma$  ἄρα τρίγωνον τῷ  $B\Delta\Gamma$  τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα  $B\Gamma$  διάμετρος δίχα τέμνει τὸ  $AG\Delta B$  παραλληλόγραμμον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Dico et diametrum ipsa bifariam secare. Quoniam enim æqualis est  $AB$  ipsi  $\Gamma\Delta$ , communis autem  $B\Gamma$ , duæ igitur  $AB$ ,  $B\Gamma$  duabus  $\Delta\Gamma$ ,  $\Gamma B$  æquales sunt, utraque utrique, et angulus  $AB\Gamma$  angulo  $B\Gamma\Delta$  æqualis est; et basis igitur  $AG$  ipsi  $B\Delta$  æqualis est; et igitur triangulum  $AB\Gamma$  triangulo  $B\Delta\Gamma$  æquale est;

Ergo  $B\Gamma$  diameter bifariam secat  $AG\Delta B$  parallelogrammum. Quod oportebat ostendere.

$BAG$  égal à l'angle  $B\Delta\Gamma$ . Puisque l'angle  $AB\Gamma$  est égal à l'angle  $B\Gamma\Delta$ , et l'angle  $\Gamma B\Delta$  égal à l'angle  $AGB$ , l'angle total  $AB\Delta$  est égal à l'angle total  $AG\Delta$ . Mais on a démontré que l'angle  $BAG$  est égal à l'angle  $\Gamma\Delta B$ ;

Donc les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux.

Je dis de plus que la diagonale partage les parallélogrammes en deux parties égales. Car puisque  $AB$  est égal à  $\Gamma\Delta$ , et que la droite  $B\Gamma$  est commune, les deux droites  $AB$ ,  $B\Gamma$  sont égales aux droites  $\Delta\Gamma$ ,  $\Gamma B$ , chacune à chacune; mais l'angle  $AB\Gamma$  est égal à l'angle  $B\Gamma\Delta$ ; donc la base  $AG$  est égale à la base  $B\Delta$  (4), et le triangle  $AB\Gamma$  égal au triangle  $B\Delta\Gamma$ .

Donc la diagonale  $B\Gamma$  partage le parallélogramme  $AG\Delta B$  en deux parties égales; ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε΄.

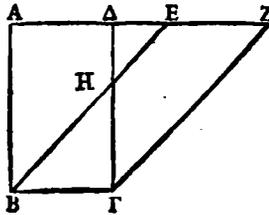
PROPOSITIO XXXV.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ  $ΑΒΓΔ$ ,  $ΕΒΓΖ$  ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα<sup>1</sup> τῆς  $ΒΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΑΖ$ ,  $ΒΓ$ . λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $ΑΒΓΔ$  τῷ  $ΕΒΓΖ$ <sup>2</sup>.

Parallelogramma, super eadem basi constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint parallelogramma  $ΑΒΓΔ$ ,  $ΕΒΓΖ$  super eadem basi  $ΒΓ$  constituta et in eisdem parallelis  $ΑΖ$ ,  $ΒΓ$ ; dico æquale esse  $ΑΒΓΔ$  ipsi  $ΕΒΓΖ$ .



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ  $ΑΒΓΔ$ , ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΒΓ$ <sup>3</sup>. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ  $ΕΖ$  τῇ  $ΒΓ$  ἐστὶν ἴση<sup>4</sup> ὥστε καὶ ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΕΖ$  ἐστὶν ἴση<sup>5</sup>. καὶ κοινὴ ἡ  $ΔΕ$ . ὅλη ἄρα ἡ  $ΑΕ$  ὅλη τῇ  $ΔΖ$  ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  $ΑΒ$  τῇ  $ΔΓ$  ἴση· δύο δὲ αἱ  $ΕΑ$ ,  $ΑΒ$  δυσὶ ταῖς  $ΖΔ$ ,  $ΔΓ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΖΔΓ$  γωνία τῇ

Quoniam enim parallelogrammum est  $ΑΒΓΔ$ , æqualis est  $ΑΔ$  ipsi  $ΒΓ$ . Propter eadem, et  $ΕΖ$  ipsi  $ΒΓ$  est æqualis. Quare et  $ΑΔ$  ipsi  $ΕΖ$  est æqualis; et communis  $ΔΕ$ ; tota igitur  $ΑΕ$  toti  $ΔΖ$  est æqualis. Est autem et  $ΑΒ$  ipsi  $ΔΓ$  æqualis; duæ igitur  $ΕΑ$ ,  $ΑΒ$  duabus  $ΖΔ$ ,  $ΔΓ$  æquales sunt utraque utrique, et angulus  $ΖΔΓ$  angulo  $ΕΑΒ$

PROPOSITION XXXV.

Les parallélogrammes, contruits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes  $ΑΒΓΔ$ ,  $ΕΒΓΖ$  soient construits sur la même base  $ΒΓ$ , et entre les mêmes parallèles  $ΑΖ$ ,  $ΒΓ$ ; je dis que le parallélogramme  $ΑΒΓΔ$  est égal au parallélogramme  $ΕΒΓΖ$ .

Car puisque  $ΑΒΓΔ$  est un parallélogramme,  $ΑΔ$  est égal à  $ΒΓ$  (34); par la même raison,  $ΕΖ$  est égale à  $ΒΓ$ ; donc  $ΑΔ$  est égal à  $ΕΖ$ ; mais la droite  $ΔΕ$  est commune; donc la droite totale  $ΑΕ$  est égale à la droite totale  $ΔΖ$  (not. 2); mais  $ΑΒ$  est égal à  $ΔΓ$  (34); donc les deux droites  $ΕΑ$ ,  $ΑΒ$  sont égales aux deux droites  $ΖΔ$ ,  $ΔΓ$ , chacune à chacune; mais l'angle extérieur  $ΖΔΓ$  est égal à l'angle intérieur

60 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὑπὸ ΕΑΒ ἴσῃ<sup>6</sup>, ἢ ἐκτὸς τῆ ἑντός· βάσις ἄρα ἢ ΕΒ βάσις τῆ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται 7. Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπέζιῳ ἴσῃ ἐστὶν ἴσον 8. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ἔλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλον τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστὶ. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἐξῆς.

est æqualis, exterior interiori; basis igitur EB basi ZG æqualis est, et EAB triangulum ipsi ΔΓΖ triangulo æquale erit. Commune auferatur ΔΗΕ; reliquum igitur ΑΒΗΔ trapezium reliquo ΕΗΓΖ trapezio est æquale. Commune addatur ΗΒΓ triangulum; totum igitur ΑΒΓΔ parallelogrammum toti ΕΒΓΖ parallelogrammo æquale est. Ergo parallelogramma, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 35'.

PROPOSITION XXXVI.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Parallelogramma, super æqualibus basibus constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα<sup>2</sup> τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Sint parallelogramma ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ super æqualibus basibus constituta ΒΓ, ΖΗ, et in eisdem parallelis ΑΘ, ΒΗ; dico æquale esse ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsi ΕΖΗΘ.

Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΘ.

EAB (29); donc la base EB est égale à la base Zr (4); donc le triangle EAB sera égal au triangle ΔΓΖ. Retrançons la partie commune ΔHE; le trapèze restant ΑΒΗΔ sera égal au trapèze restant ΕΗΓΖ (not. 3); ajoutons le triangle commun ΗΒΓ, le parallélogramme total ΑΒΓΔ sera égal au parallélogramme total ΕΒΓΖ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVI.

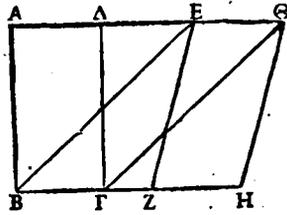
Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ soient construits sur des bases égales ΒΓ, ΖΗ, et entre les mêmes parallèles ΑΘ, ΒΗ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est égal au parallélogramme ΕΖΗΘ.

Joignons ΒΕ, ΓΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἴσθιν ἴση· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἴσθιν ἴση. Εἴσι δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζυγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΕ, ΓΘ, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζυγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἴσι· καὶ αἱ ΕΒ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τε εἴσι καὶ παράλληλοι. Παραλληλόγραμμον ἄρα

Et quoniam æqualis est ΒΓ ipsi ΖΗ, et ΖΗ ipsi ΕΘ est æqualis; et ΒΓ igitur ipsi ΕΘ est æqualis. Sunt autem et parallelæ, et jungunt ipsas ipsæ ΒΕ, ΓΘ, quæ autem æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt, æquales et parallelæ sunt; et ΕΒ, ΓΘ igitur et æquales sunt et parallelæ. Parallelogrammum



ἴσθιν τὸ ΕΒΓΘ, καὶ ἴσον ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ, ταῖς ΒΓ, ΑΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἴσθιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἴσθιν ἴσον. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἐξῆς.

igitur est ΕΒΓΘ, et est æquale ipsi ΑΒΓΔ; basin enim eandem habet ΒΓ quam ipsum, et in eisdem parallelis est ΒΓ, ΑΘ. Propter eadem, et ΕΖΗΘ eidem ΕΒΓΘ est æquale; quare et ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsi ΕΖΗΘ est æquale. Ergo parallelogramma, etc.

Puisque ΒΓ est égal à ΖΗ, et ΖΗ égal à ΕΘ, la droite ΒΓ est égale à ΕΘ; mais les droites ΒΕ, ΓΘ joignent ces droites qui sont parallèles, et les droites qui joignent des mêmes côtés deux droites égales et parallèles, sont égales et parallèles (33); donc les droites ΕΒ, ΓΘ sont égales et parallèles; donc ΕΒΓΘ est un parallélogramme, et ce parallélogramme est égal au parallélogramme ΑΒΓΔ (35); car il a la même base ΒΓ que lui, et il est construit entre les mêmes parallèles. Par la même raison le parallélogramme ΕΖΗΘ est égal au parallélogramme ΕΒΓΘ; donc le parallélogramme ΑΒΓΔ est égal au parallélogramme ΕΖΗΘ. Donc, etc.

62. LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

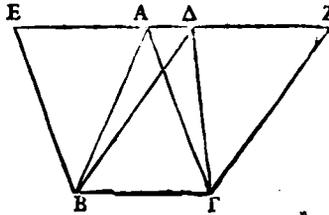
PROPOSITIO XXXVII.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἴστί.

Ἐστω τρίγωνα τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta B\Gamma$  ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα <sup>1</sup> τῆς  $B\Gamma$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $AD$ ,  $B\Gamma$ . λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $\Delta B\Gamma$  τριγώνῳ.

Triangula super eadem basi constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint triangula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta B\Gamma$  super eadem basi constituta  $B\Gamma$  et in eisdem parallelis  $AD$ ,  $B\Gamma$ ; dico æquale esse  $AB\Gamma$  triangulum  $\Delta B\Gamma$  triangulo.



Ἐκβεβλήσθω ἡ  $AD$  ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ  $E$ ,  $Z$  <sup>2</sup>, καὶ διὰ μὲν τοῦ  $B$  τῆ  $GA$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $BE$ , διὰ δὲ τοῦ  $\Gamma$  τῆ  $BD$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $GZ$ .

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἴστί ἑκάτερον τῶν  $EB\Gamma A$ ,  $\Delta B\Gamma Z$  καὶ εἰσὶν ἴσα <sup>3</sup> ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι <sup>4</sup> τῆς  $B\Gamma$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $B\Gamma$ ,  $EZ$ · καὶ ἴστί τοῦ μὲν  $EB\Gamma A$  παρ-

Producatur  $AD$  ex utraque parte in  $E$ ,  $Z$ , et per  $B$  quidem ipsi  $GA$  parallela ducatur  $BE$ , per  $\Gamma$  vero ipsi  $BD$  parallela ducatur  $GZ$ .

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum  $EB\Gamma A$ ,  $\Delta B\Gamma Z$ ; et æqualia sunt, nam super eadem basi sunt  $B\Gamma$  et in eisdem parallelis  $B\Gamma$ ,  $EZ$ ; et est ipsius  $EB\Gamma A$  quidem parallelogrammi

PROPOSITION XXXVII.

Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux.

Que les triangles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta B\Gamma$  soient sur la même base  $B\Gamma$  et entre les mêmes parallèles  $AD$ ,  $B\Gamma$ ; je dis que le triangle  $AB\Gamma$  est égal au triangle  $\Delta B\Gamma$ .

Prolongeons de part et d'autre la droite  $AD$  aux points  $E$ ,  $Z$ , et par le point  $B$  conduisons  $BE$  parallèle à  $GA$  (31), et par le point  $\Gamma$  conduisons  $GZ$  parallèle à  $BD$ .

Les figures  $EB\Gamma A$ ,  $\Delta B\Gamma Z$  sont des parallélogrammes, et ces parallélogrammes sont égaux (55); car ils sont sur la même base  $B\Gamma$ , et entre les mêmes parallèles; mais le triangle  $AB\Gamma$  est la moitié du parallélogramme  $EB\Gamma A$ ; car

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 63

αλληλογραμμου ἡμισυ τὸ καὶ τρίγωνον, ἢ γὰρ AB διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον, ἢ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμισυ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἰξῆς.

dimidium ΑΒΓ triangulum, nam ΑΒ diameter ipsum bifariam secat; est vero ipsius ΔΒΓΖ parallelogrammi dimidium ΔΒΓ triangulum, nam ΔΓ diameter ipsum bifariam secat; æqualium autem dimidia æqualia inter se sunt; æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΒΓ triangulo. Ergo triangula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΗ΄.

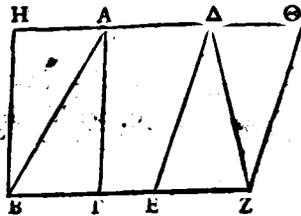
Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν<sup>1</sup>.

Ἐστω τρίγωνα τὰ<sup>2</sup> ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα<sup>3</sup> τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula, super æqualibus basibus constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ super æqualibus basibus constituta ΒΓ, ΕΖ et in eisdem parallelis ΒΖ, ΑΔ; dico æquale esse ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo.



Ἐκτεθῆσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ

Producatur enim ΑΔ ex utràque parte in Η, Θ, et per Β quidem ipsi ΓΑ parallela

la diagonale ΑΒ le partage en deux parties égales; le triangle ΔΒΓ est la moitié du parallélogramme ΔΒΕΖ, car la diagonale ΔΓ la partage en deux parties égales (34); mais les moitiés des quantités égales sont égales entr'elles; donc le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΒΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVIII.

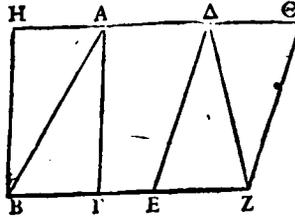
Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ soient construits sur des bases égales ΒΓ, ΕΖ et entre les mêmes parallèles ΒΖ, ΑΔ; je dis que le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΕΖ.

Prolongeons de part et d'autre la droite ΑΔ aux points Η, Θ; par le

64 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

παράλληλος ἤχθω ἡ BH, διὰ δὲ τοῦ Z τῆ ΔΕ ducatur BH, per Z vero ipsi ΔΕ parallela du-  
παράλληλος ἤχθω ἡ ZΘ. catur ZΘ.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν HBGA, ΔEZΘ· καὶ ἴσον τὸ HBGA τῷ ΔEZΘ, ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν BΓ, EZ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς BZ, HΘ· καὶ ἴστι τοῦ μὲν HBGA παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ ABΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ AB διάμετρος αὐτὸ δίχα<sup>5</sup> τέμνει· τοῦ δὲ ΔEZΘ παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ ZEA τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔZ διάμετρος αὐτὸ δίχα<sup>6</sup> τέμνει. Τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Parallelogrammum igitur est utrumque ipso-  
rum HBGA, ΔEZΘ; et æquale HBGA ipsi  
ΔEZΘ, in æqualibus enim et basibus sunt BΓ, EZ,  
et in eisdem parallelis BZ, HΘ; et est autem  
ipsius HBGA parallelogrammi dimidium ABΓ  
triangulum, AB enim diameter ipsum bifariam  
secat; est vero ipsius ΔEZΘ parallelogrammi  
dimidium ZEA triangulum, nam ΔZ diameter  
ipsum bifariam secat. Æqualium autem dimidia  
æqualia inter se sunt; æquale igitur est ABΓ  
triangulum ipsi ΔEZ triangulo. Ergo triangu-  
la, etc.

point B conduisons la droite BH parallèle à la droite ΓA (32), et par le point z conduisons la droite zΘ parallèle à la droite ΔE.

Les figures HBGA, ΔEZΘ sont des parallélogrammes; mais le parallélogramme HBGA est égal au parallélogramme ΔEZΘ (36), car ils sont construits sur des bases égales BΓ, EZ et entre les mêmes parallèles BZ, HΘ; mais le triangle ABΓ est la moitié du parallélogramme HBGA, car la diagonale AB le partage en deux parties égales (34); le triangle ZEA est la moitié du parallélogramme ΔEZΘ, car la diagonale ΔZ le partage en deux parties égales, et les moitiés des quantités égales sont égales entr'elles; donc le triangle ABΓ est égal au triangle ΔEZ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 39'.

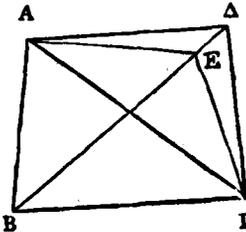
PROPOSITIO XXXIX.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα<sup>α</sup> τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔBΓ$ , ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς  $BΓ$ , καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη<sup>β</sup>. λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ  $AD$ . λέγω ὅτι παράλληλος ἐστίν ἡ  $AD$  τῇ  $BΓ$ .

Æqualia triangula, super eadem basi constituta et ad easdem partes, et in eisdem parallelis sunt.

Sint æqualia triangula  $ABΓ$ ,  $ΔBΓ$ , super eadem basi  $BΓ$  et ad easdem partes; dico et in eisdem parallelis esse. Jungatur enim  $AD$ ; dico parallelam esse  $AD$  ipsi  $BΓ$ .



Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω διὰ τοῦ  $A$  σημείου τῆ  $BΓ$  εὐθεῖα παράλληλος ἡ  $AE$ , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  $EG$ .

Ἴσον ἄρα<sup>γ</sup> ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $EBΓ$  τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστίν αὐτῶ τῆς  $BΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $BΓ$ ,  $AE$ <sup>δ</sup>. Ἀλλὰ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον<sup>ε</sup> τῷ  $ΔBΓ$  ἐστὶν

Si enim non, ducatur per  $A$  punctum ipsi  $BΓ$  rectæ parallela  $AE$ , et jungatur  $EG$ .

Æquale igitur est  $ABΓ$  triangulum ipsi  $EBΓ$  triangulo; super eadem enim basi est  $BΓ$  super quâ ipsum  $BEΓ$ , et in eisdem parallelis  $BΓ$ ,  $AE$ ; sed  $ABΓ$  triangulum ipsi  $ΔBΓ$  est æquale; ergo

PROPOSITION XXXIX.

Les triangles égaux, construits sur la même base et placés du même côté, sont compris entre les mêmes parallèles.

Que les deux triangles égaux  $ABΓ$ ,  $ΔBΓ$  soient construits sur la même base  $BΓ$ , et placés du même côté; je dis que ces deux triangles sont compris entre les mêmes parallèles. Joignons  $AD$ ; je dis que  $AD$  est parallèle à  $BΓ$ .

Car si cela n'est pas, par le point  $A$  conduisons  $AE$  parallèle à  $BΓ$  (31), et joignons  $EG$ .

Le triangle  $ABΓ$  est égal au triangle  $EBΓ$  (37), puisque ces deux triangles sont construits sur la base  $BΓ$ , et placés entre les mêmes parallèles  $BΓ$ ,  $AE$ . Mais le triangle  $ABΓ$  est égal au triangle  $ΔBΓ$ ; donc le triangle  $ΔBΓ$  est égal au

66 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστίν, τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν<sup>8</sup> ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλος ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶ παράλληλος. Τὰ ἄρα ἴσα, καὶ τὰ ἰζήεις.

et ΔΒΓ triangulum ipsi ΕΒΓ æquale est, majus minori, quod est impossibile. Non igitur parallela est ΑΕ ipsi ΒΓ. Similiter autem ostendemus neque aliam quampiam esse præter ΑΒ; ΑΔ igitur ipsi ΒΓ est parallela. Ergo æqualia, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ<sup>2</sup> ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα<sup>3</sup> τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλος ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΑΖ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΖ.

PROPOSITIO XL.

Æqualia triangula, super æqualibus basibus constituta et ad easdem partes, et in eisdem parallelis sunt.

Sint æqualia triangula ΑΒΓ, ΔΓΕ, super æqualibus basibus constituta ΒΓ, ΓΕ et ad easdem partes; dico et in eisdem parallelis esse; jungatur enim ΑΔ; dico parallelam esse ΑΔ ipsi ΒΕ.

Si enim non, ducatur per Α ipsi ΒΕ parallela ΑΖ, et jungatur ΕΖ.

triangle ΕΒΓ, le plus grand au plus petit, ce qui est impossible; donc ΑΕ n'est point parallèle à ΒΓ. Nous démontrerons semblablement qu'aucune autre droite, excepté ΑΔ, n'est parallèle à ΒΓ; donc ΑΔ est parallèle à ΒΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XL.

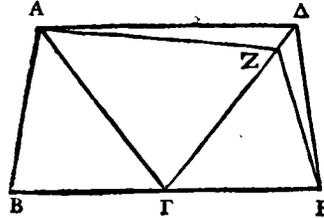
Les triangles égaux, construits sur des bases égales et du même côté, sont entre les mêmes parallèles.

Que les triangles égaux ΑΒΓ, ΔΓΕ soient construits sur les bases égales ΒΓ, ΓΕ et placés du même côté; je dis qu'ils sont entre les mêmes parallèles. Joignons ΑΔ; je dis que ΑΔ est parallèle à ΒΕ.

Car si cela n'est pas, par le point Α, conduisons ΑΖ parallèle à ΒΕ, et joignons ΕΖ.

Ἴσον ἄρα<sup>5</sup> ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τρι-  
γώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ  
καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ.  
Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ τρι-  
γώνῳ<sup>6</sup>· καὶ τὸ ΔΓΕ τρίγωνον<sup>7</sup> ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ

Æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΖΓΕ  
triangulo; in æqualibus enim basibus sunt ΒΓ,  
ΓΕ et in eisdem parallelis ΒΕ, ΑΖ. Sed ΑΒΓ  
triangulum æquale est ipsi ΔΓΕ triangulo; et  
ΔΓΕ triangulum igitur æquale est ipsi ΖΓΕ trian-



ΖΓΕ τριγώνῳ, τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ  
ἐστὶν<sup>8</sup> ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλος ἐστὶν<sup>9</sup>  
ἢ ΑΖ τῇ ΒΕ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη  
τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἢ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἐστὶ παράλ-  
ληλος<sup>10</sup>. Τὰ ἄρα ἴσα, καὶ τὰ ἐξῆς.

gulo, majus minori, quod est impossibile; non  
igitur parallela est ΑΖ ipsi ΒΕ. Similiter autem  
ostendemus neque aliam quampiam esse præter  
ΑΔ; ΑΔ igitur ipsi ΒΕ est parallela. Ergo  
æqualia, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

PROPOSITIO XLI.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ  
τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾗ  
διπλάσιον ἐστὶ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ  
τριγώνου.

Si parallelogrammum quam triangulum basim  
habeat eandem, et in eisdem parallelis sit,  
duplum est parallelogrammum trianguli.

Le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΖΓΕ (38); puisque ces deux triangles  
sont construits sur des bases égales ΒΓ, ΓΕ, et qu'ils sont entre les mêmes  
parallèles ΒΕ, ΑΖ. Mais le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΓΕ; donc le triangle  
ΔΓΕ est égal au triangle ΖΓΕ, le plus grand au plus petit, ce qui est impossible;  
donc ΑΖ n'est point parallèle à ΒΕ. Nous démontrerons semblablement qu'aucune  
autre droite, excepté ΑΔ, n'est parallèle à ΒΕ; donc ΑΔ est parallèle à ΒΕ.  
Donc, etc.

PROPOSITION XLI.

Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est dans les  
mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle.

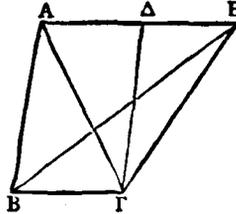
68 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε<sup>2</sup> ἔχεται τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω<sup>3</sup> ταῖς ΒΓ, ΑΕ· λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΕΒΓ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ.

Parallelogrammum enim ΑΒΓΔ quam triangulum ΕΒΓ basim habeat eandem ΒΓ, et in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΕ sit; dico duplum esse ΑΒΓΔ parallelogrammum ΕΒΓ trianguli.

Jungatur enim ΑΓ.



Ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τριγώνον<sup>3</sup> τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἕξῃς.

Æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΕΒΓ triangulo; nam super eadem basi est ΒΓ super quā ipsum ΕΒΓ, et in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΕ. Sed ΑΒΓΔ parallelogrammum duplum est ipsius ΑΒΓ trianguli, nam ΑΓ diameter ipsum bifariam secat; quare ΑΒΓΔ parallelogrammum et ipsius ΕΒΓ trianguli est duplum. Si igitur parallelogrammum, etc.

Que le parallélogramme ΑΒΓΔ ait la même base ΒΓ que le triangle ΕΒΓ, et qu'il soit entre les mêmes parallèles ΒΓ, ΑΕ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est double du triangle ΕΒΓ.

Joignons ΑΓ.

Le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΕΒΓ (37), puisqu'il est sur la même base ΒΓ que lui et entre les mêmes parallèles ΒΓ, ΑΕ. Mais le parallélogramme ΑΒΓΔ est double du triangle ΑΒΓ, car la diagonale ΑΓ partage ce parallélogramme en deux parties égales (34); donc le parallélogramme ΑΒΓΔ est double du triangle ΕΒΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

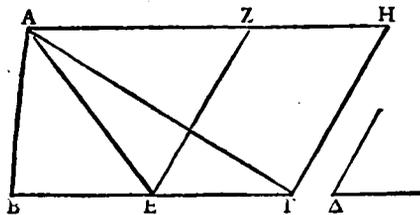
PROPOSITIO XLII.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ'.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθείσα γωνία εὐθύγραμμος ἢ Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit quidem datum triangulum ΑΒΓ, datus vero angulus rectilineus Δ; oportet igitur ipsi ΑΒΓ triangulo æquale parallelogrammum constituere in æquali ipsi Δ angulo rectilineo.



Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνόν τῳ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γάρ

Secetur ΒΓ bifariam in Ε, et jungatur ΑΕ, et constituatur ad ΕΓ rectam et ad punctum in eâ Ε ipsi Δ angulo æqualis ΓΕΖ, et per Α quidem ipsi ΕΓ parallela ducatur ΑΗ, per Γ vero ipsi ΕΖ parallela ducatur ΓΗ; parallelogrammum igitur est ΖΕΓΗ.

Et quoniam æqualis est ΒΕ ipsi ΕΓ, æquale est et ΑΒΕ triangulum ipsi ΑΕΓ triangulo; nam super

PROPOSITION XLII.

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut construire un parallélogramme égal au triangle ΑΒΓ dans l'angle rectiligne Δ.

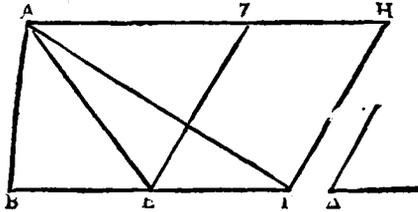
Coupons la droite ΒΓ en deux parties égales en Ε (10), joignons ΑΕ, sur la droite ΕΓ, et au point Ε de cette droite construisons un angle ΓΕΖ égal à l'angle Δ (23), par le point Α conduisons ΑΗ parallèle à ΕΓ (31), et par le point Γ conduisons ΓΗ parallèle à ΕΖ; la figure ΖΕΓΗ sera un parallélogramme.

Puisque ΒΕ est égal à ΕΓ, le triangle ΑΒΕ est égal au triangle ΑΕΓ (38), car

70 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσων βάσεων εἰσι τῶν BE, EG καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς  
 παραλλήλοις ταῖς BG, AH· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ  
 τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ AEG τριγώνου. Ἔστι δὲ  
 καὶ τὸ ZEGH παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ  
 AEG τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν

æqualibus basibus BE, EG sunt, et in eisdem  
 parallelis BG, AH; duplum igitur est ABΓ  
 triangulum ipsius AEG trianguli. Est autem et  
 ZEGH parallelogrammum duplum ipsius AEG  
 trianguli; basim enim quam AEG eandem habet,



ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις·  
 ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ZEGH παραλληλόγραμμον τῷ  
 ABΓ τριγώνῳ, καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ GEZ γωνίαν ἴσην  
 τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ABΓ ἴσον παρα-  
 λληλόγραμμον συνίσταται<sup>5</sup> τὸ ZEGH, ἐν γωνίᾳ  
 τῇ ὑπὸ GEZ, ἥτις<sup>6</sup> ἐστὶν ἴση τῇ Δ. Ὅπερ εἶδει  
 ποιῆσαι.

et in eisdem est parallelis in quibus ipsum AEG;  
 æquale igitur est ZEGH parallelogrammum ipsi  
 ABΓ triangulo, et habet GEZ angulum æqualem  
 dato Δ.

Dato igitur triangulo ABΓ æquale parallelo-  
 grammum constitutum est ZEGH in angulo GEZ  
 qui est æqualis ipsi Δ. Quod oportebat facere.

ils sont sur des bases égales BE, EG, et entre les mêmes parallèles BG, AH; donc le triangle ABΓ est double du triangle AEG. Mais le parallélogramme ZEGH est double du triangle AEG (41), car il a la même base que lui, et il est dans les mêmes parallèles; donc le parallélogramme ZEGH est égal au triangle ABΓ (not. 6), et il a l'angle GEZ égal à l'angle donné Δ.

Donc le parallélogramme ZEGH a été construit égal au triangle ABΓ dans un angle qui est GEZ égal à l'angle donné Δ; ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

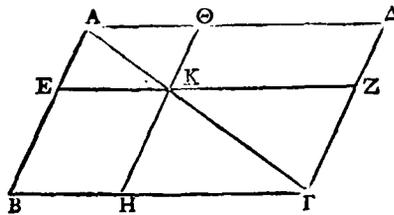
PROPOSITIO XLIII.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.

Omnis parallelogrammi eorum circa diametrum parallelogrammorum complementa æqualia inter se sunt.

Sit parallelogrammum ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius ΑΓ, et circa ΑΓ parallelogramma quidem sint ΕΘ, ΖΗ, ipsa vero dicta complementa ΒΚ, ΚΔ; dico æquale esse ΒΚ complementum ipsi ΚΔ complemento.



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. Πέλιον, ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ ΕΚΘΑ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ ΑΚ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον

Quoniam enim parallelogrammum est ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius ΑΓ, æquale est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΓΔ triangulo. Rursus quoniam parallelogrammum est ΕΚΘΑ, diameter autem ipsius est ΑΚ, æquale est ΑΕΚ triangulum ipsi ΑΘΚ triangulo. Propter eadem et ΚΖΓ triangulum ipsi ΚΗΓ

PROPOSITION XLIII.

Dans tout parallélogramme, les complémens des parallélogrammes, autour de la diagonale, sont égaux entr'eux.

Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de ΑΓ soient les parallélogrammes ΕΘ, ΖΗ, et les parallélogrammes ΒΚ, ΚΔ qu'on appelle complémens; je dis que le complément ΒΚ est égal au complément ΚΔ.

Car puisque ΑΒΓΔ est un parallélogramme, et que ΑΓ est sa diagonale, le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΑΓΔ (34). De plus, puisque ΕΚΘΑ est un parallélogramme, et que ΑΚ est sa diagonale, le triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ; le triangle ΚΖΓ est égal au triangle ΚΗΓ, par la même raison; donc puisque le

72 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ ΚΗΓ τριγώνῳ<sup>2</sup> ἴστίν ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἴστίν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἴστίν ἴσον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ ἕλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἕλω τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΗΔ παραπλήρωματι ἴστίν ἴσον<sup>3</sup>. Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἐξῆς.

est æquale. Quoniam igitur ΑΕΚ quidem triangulum ipsi ΑΘΚ triangulo est æquale; ΚΖΓ vero ipsi ΚΗΓ, triangulum ΑΕΚ cum ipso ΚΗΓ est æquale ipsi ΑΘΚ triangulo cum ΚΖΓ triangulo; est autem et totum ΑΒΓ triangulum toti ΑΔΓ æquale. Reliquum igitur ΒΚ complementum reliquo ΗΔ complemento est æquale. Omnis igitur parallelogrammi, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

PROPOSITIO XLIV.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμον.

Ad datam rectam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθέν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὲ παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Sit quidem data recta ΑΒ, datum vero triangulum Γ, et datus angulus rectilineus Δ; oportet igitur ad datam rectam ΑΒ, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum applicare in æquali ipsi Δ angulo.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἡ ἴστίν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας

Constituatur ipsi Γ triangulo æquale parallelogrammum ΒΕΖΗ, in angulo ΕΒΗ qui est æqualis, ipsi Δ; et ponatur in directum ΒΕ ipsi ΒΑ, et

triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ, et le triangle ΚΖΓ égal au triangle ΚΗΓ, le triangle ΑΕΚ, avec le triangle ΚΗΓ, est égal au triangle ΑΘΚ avec le triangle ΚΖΓ; mais le triangle entier ΑΒΓ est égal au triangle entier ΑΔΓ; donc le complément restant ΒΚ est égal au complément restant ΗΔ (not. 3). Donc, etc.

IK

PROPOSITION XLIV.

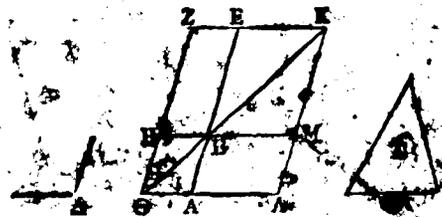
A une droite donnée, et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné.

Que ΑΒ soit la droite donnée, Γ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite ΑΒ et dans un angle égal à Δ, appliquer un parallélogramme égal au triangle donné Γ.

Dans un angle ΕΒΗ égal à l'angle Δ, construisons un parallélogramme ΒΕΖΗ égal au triangle Γ (42), plaçons la droite ΒΕ dans la direction de la droite ΒΑ, prolon-

είναι τὴν BE τῆ BA', καὶ διήχθω ἡ ZH ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ A ὀποτέρᾳ τῶν BH, EZ παράλληλος ἦχθω ἡ AΘ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΘB. Καὶ περὶ εἰς παραλλήλους τὰς AΘ, EZ εὐθεῖα ἐπέπιπται ἡ ΘZ, αἱ ὑπὸ AΘZ, ΘZE ἄρα γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἰσᾶί· αἱ ἄρα ὑπὸ BΘH, HZE δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσὶν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπέπτουσιν· αἱ ΘB, ZE ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπεπτέτωσαν κατὰ τὸ K, καὶ διὰ τοῦ K σημείου ὀποτέρᾳ τῶν EA, ZΘ παράλληλος ἦχθω ἡ KΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘA, HB ἐπὶ τὰ Λ, M σημεία.

producatur ZH ad Θ, et per A alterutri ipsarum BH, EZ parallela ducatur AΘ, et jungatur ΘB. Et quoniam in parallelas AΘ, EZ recta incidit ΘZ, ipsi AΘZ, ΘZE anguli duobus rectis sunt æquales; ergo BΘH, HZE duobus rectis minores sunt; rectæ autem a minoribus quam duobus rectis in infinitum productæ concurrunt; ΘB, ZE igitur productæ concurrent. Producantur et concurrant in K, et per K punctum alterutri ipsarum EA, ZΘ parallela ducatur KΛ, et producantur ΘA, HB ad Λ, M puncta.



Παράλληλογραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘAKZ, διαμέτρους δὲ αὐτοῦ ἡ ΘK, περὶ δὲ τὴν ΘK<sup>5</sup> παράλληλογραμμα μὲν τὰ AH, ME, τὰ δὲ κειόμενα παραπληρώματα τὰ<sup>6</sup> AB, BZ· ἴσον ἄρα ἐστὶ

Parallelogrammum igitur est ΘAKZ, diametrum autem ipsius ΘK, et circa ΘK parallelogramma quidem AH, ME, ipsa vero dicta complementa AB, BZ; æquale igitur est AB ipsi BZ,

geons la droite ZH vers Θ, par le point A conduisons AΘ parallèle à l'une ou à l'autre des droites BH, EZ (31), et joignons ΘB. Puisque la droite ΘZ tombe sur les parallèles AΘ, EZ, les angles AΘZ, ΘZE sont égaux à deux droits (29); donc les angles BΘH, HZE sont moindres que deux droits. Mais les droites prolongées à l'infini, du côté où les angles intérieurs sont moindres que deux angles droits, se rencontrent (dém. 5); donc les droites ΘB, ZE étant prolongées, se rencontreront; qu'elles soient prolongées (dém. 2), et qu'elles se rencontrent en K; par le point K, conduisons KΛ parallèle à l'une ou à l'autre des droites EA, ZΘ (31), et prolongeons les droites ΘA, HB vers les points Λ, M.

La figure ΘAKZ est un parallélogramme, ΘK est sa diagonale, et autour de ΘK sont les parallélogrammes AH, ME, et les parallélogrammes AB, BZ, qu'on nomme compléments; donc AB est égal à BZ (43). Mais BZ est égal au triangle

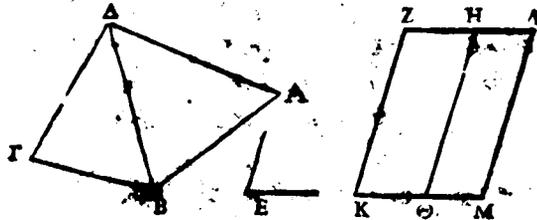
74 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ AB τῷ BZ. ἀλλὰ τὸ BZ τῷ Γ τριγώνῳ ἴστιν ἴσον· καὶ τὸ AB ἄρα τῷ Γ ἴστιν ἴσον. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἴστιν ἡ ὑπὸ HBE γωνία τῇ ὑπὸ ABM, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ HBE τῇ Δ ἴστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ABM ἄρα τῇ Δ γωνία ἴστιν ἴση.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθείαν τὴν AB, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παρατέλλεται τὸ AB, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ABM, ἡ ἴστιν ἴση τῇ Δ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μί.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



Ἐστω τὸ μὲν<sup>2</sup> δοθὲν εὐθυγράμμον τὸ ABΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθυγράμμος ἡ E· δεῖ δὲ τῷ ABΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ E.

Sed BZ ipsi Γ triangulo est æquale; et AB igitur ipsi Γ est æquale. Et quoniam æqualis est HBE angulus ipsi ABM, sed HBE ipsi Δ est æquale; et ABM igitur ipsi Δ angulo est æqualis.

Ad datam igitur rectam AB, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum applicatum est AB, in angulo ABM qui est æqualis ipsi Δ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo, æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

Sit quidem datum rectilineum ABΓΔ, datus vero angulus rectilineus E; oportet igitur ipsi ABΓΔ rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo E.

Γ; donc AB est égal à Γ. Et puisque l'angle HBE est égal à l'angle ABM (15), et que l'angle HBE est égal à l'angle Δ, l'angle ABM est égal à l'angle Δ.

Donc à la droite donnée AB, et dans l'angle ABM égal à Δ, on applique le parallélogramme AB égal au triangle donné Γ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLV.

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée.

Soit ABΓΔ la figure rectiligne donnée, et E l'angle rectiligne donné; il faut, dans l'angle donné E, construire un parallélogramme égal à la figure rectiligne ABΓΔ.

Επιζεύχθω γάρ ἡ ΔΒ, καὶ συνιστατω τῷ  
ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ,  
ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἢ ἴση ἰστίᾳ τῇ Ε· καὶ  
παραβελήσθω παρὰ τὴν ΘΗ εὐθείᾳ τῷ ΔΒΓ  
τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ, ἐν τῇ  
ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἢ ἴσῃ ἰσῃ τῇ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἰκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ,  
ΗΘΜ ἴσῃ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα<sup>δ</sup> τῇ ὑπὸ  
ΗΘΜ ἴσῃ ἴσῃ<sup>δ</sup>. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ·  
αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ  
ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς  
ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δυσὶν  
ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Πρὸς δὲ τινὶ εὐθείᾳ τῇ ΗΘ,  
καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, δύο εὐθεῖαι  
αἱ ΘΚ, ΘΜ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι,  
τὰς ἐπιξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν·  
ἐπ' εὐθείας ἄρα ἴσῃ ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ. Καὶ ἐπεὶ  
εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα<sup>γ</sup> ἐπέπεσον  
ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ  
ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  
ΘΗΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΑ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ,  
ΘΗΑ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΑ δυσὶν

Jungatur enim ΔΒ, et constituatur ipsi ΑΒΔ  
triangulo æquale parallelogrammum ΖΘ, in ΘΚΖ  
angulo, qui æqualis est ipsi Ε; et applicetur ad  
ΘΗ rectam ipsi ΔΒΓ triangulo æquale parallelo-  
grammum ΗΜ, in ΗΘΜ angulo, qui est æqualis  
ipsi Ε.

Et quoniam Ε angulus utrique ipsorum ΘΚΖ,  
ΗΘΜ est æqualis; et ΘΚΖ igitur ipsi ΗΘΜ est æ-  
qualis. Communis addatur ΚΘΗ; ergo ΖΚΘ, ΚΘΗ,  
ipsis ΚΘΗ, ΗΘΜ æquales sunt. Sed ΖΚΘ, ΚΘΗ duo-  
bus rectis æquales sunt; et ΚΘΗ, ΗΘΜ igitur duo-  
bus rectis æquales sunt. Ad aliquam igitur rectam  
ΗΘ, et ad punctum in eâ Θ, duæ rectæ ΘΚ, ΘΜ,  
non ad easdem partes positæ, deinceps angulos  
duobus rectis æquales faciunt; in directum igitur  
est ΚΘ ipsi ΘΜ. Et quoniam in parallelas ΚΜ,  
ΖΗ recta incidit ΘΗ, alterni anguli ΜΘΗ, ΘΗΖ  
æquales inter se sunt. Communis addatur ΘΗΑ;  
ergo ΜΘΗ, ΘΗΑ ipsis ΘΗΖ, ΘΗΑ æquales sunt.  
Sed ΜΘΗ, ΘΗΑ duobus rectis æquales sunt; et  
ΘΗΖ, ΘΗΑ igitur duobus rectis æquales sunt; in  
directum igitur est ΖΗ ipsi ΗΑ. Et quoniam ΚΖ

Joignons ΔΒ, et construisons dans l'angle εκζ égal à l'angle Ε, le pa-  
rallélogramme ΖΘ égal au triangle ΑΒΔ (42), et à la droite ΗΘ appliquons  
dans l'angle ΗΘΜ égal à l'angle Ε, le parallélogramme ΗΜ égal au trian-  
gle ΔΒΓ.

Puisque l'angle Ε est égal à chacun des angles εκζ, ΗΘΜ, l'angle εκζ est  
égal à l'angle ΗΘΜ; ajoutons-leur l'angle commun ΚΘΗ; les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ  
seront égaux aux angles ΚΘΗ, ΗΘΜ. Mais les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ sont égaux à  
deux droits (29); donc les angles ΚΘΗ, ΗΘΜ sont égaux à deux droits.  
Donc les deux droites εκ, εμ, non placées du même côté, font avec la droite  
ΗΘ, et au point ε de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits;  
donc la droite ΚΘ est dans la direction de la droite εμ (14). Et puisque la  
droite ΘΗ tombe sur les parallèles ΚΜ, ΖΗ, les angles alternes ΜΘΗ, ΘΗΖ sont  
égaux entr'eux (29). Ajoutons-leur l'angle commun ΘΗΑ; les angles ΜΘΗ, ΘΗΑ  
seront égaux aux angles ΘΗΖ, ΘΗΑ. Mais les angles ΜΘΗ, ΘΗΑ sont égaux à  
deux droits (29); donc les angles ΘΗΖ, ΘΗΑ sont aussi égaux à deux

76 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρθαίς ἴσαι εἰσὶν· καὶ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΑ ἄρα  
 δυοῖν ἄρθαίς ἴσαι εἰσὶν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν<sup>8</sup>  
 ἡ ΖΗ τῆ ΗΑ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΖ τῆ ΘΗ ἴση τε καὶ  
 παράλληλος ἐστίν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῆ ΜΑ·  
 καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῆ ΜΑ ἴση τε καὶ παράλληλος  
 ἐστίν· καὶ ἐπιζυγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ,  
 ΖΛ, καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν·  
 παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΑΜ. Καὶ ἐπεὶ  
 ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΘ παραλλη-  
 λογράμμῳ, τὸ δ' ἐ ΔΒΓ τῷ ΗΜ· ἴσον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ  
 εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΑΜ παραλληλογράμμῳ  
 ἐστὶν ἴσον 9.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθύγραμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον  
 παραλληλόγραμμον συνίσταται τὸ ΚΖΑΜ, ἐν  
 γωνίᾳ τῆ ὑπὸ ΖΚΜ, ἢ ἐστὶν ἴση τῇ<sup>10</sup> δεθείσῃ  
 τῇ Ε. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀνα-  
 γράψαι.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὲ ἀπὸ τῆς  
 ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

ipsi ΘΗ æqualis et parallela est, sed ΘΗ ipsi ΜΑ;  
 et ΚΖ igitur ipsi ΜΑ æqualis et parallela est; et  
 jungunt ipsas rectæ ΚΜ, ΖΛ, et ΚΜ, ΖΛ æquales  
 et parallelæ sunt; parallelogrammum igitur est  
 ΚΖΑΜ. Et quoniam aequale est quidem ΑΒΑ  
 triangulum ipsi ΖΘ parallelogrammo; ΔΒΓ vero  
 ipsi ΗΜ; totum igitur ΑΒΓΔ rectilineum toti  
 ΚΖΑΜ parallelogrammo est æquale.

Ergo dato rectilineo ΑΒΓΔ æquale parallelo-  
 grammum constitutum est ΚΖΑΜ in angulo ΖΚΜ,  
 qui est æqualis dato Ε. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XLVI.

Ex datâ rectâ quadratum describere.

Sit data recta ΑΒ; oportet igitur ex ΑΒ rectâ  
 quadratum describere.

droits; donc la droite ΖΗ est dans la direction de la droite ΗΑ; mais ΚΖ est  
 égal et parallèle à ΘΗ, et ΘΗ égale et parallèle à ΜΑ; donc la droite ΚΖ est égale  
 et parallèle à ΜΑ (not. 1 et 30); mais ces deux droites sont jointes par les  
 droites ΚΜ, ΖΛ, et les droites ΚΜ, ΖΛ sont égales et parallèles (33); donc  
 ΚΖΑΜ est un parallélogramme. Mais le triangle ΑΒΑ est égal au parallélogramme  
 ΖΘ, et le triangle ΔΒΓ est égal au parallélogramme ΗΜ; donc la figure recti-  
 ligne entière ΑΒΓΔ est égale au parallélogramme entier ΚΖΑΜ.

Done le parallélogramme ΚΖΑΜ a été construit égal à la figure rectiligne  
 donnée ΑΒΓΔ, dans l'angle ΖΚΜ égal à l'angle donné Ε; ce qu'il fallait faire.

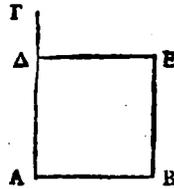
PROPOSITION XLVI.

Décrire un carré avec une droite donnée.

Soit ΑΒ la droite donnée; il faut décrire un carré avec la droite ΑΒ.

Ἦχθω τῆ AB εὐθεία, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ A, πρὸς ὀρθὰς ἢ ΑΓ· καὶ κείσθω τῆ AB ἴση ἢ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῆ AB παράλληλος ἤχθω ἢ ΔΕ· διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῆ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἢ ΒΕ.

Ducatur ipsi AB rectæ, a puncto in eâ A, ad rectos ipsa ΑΓ; et ponatur ipsi AB æqualis ΑΔ; et per Δ quidem punctum ipsi AB parallela ducatur ΔΕ; per B vero punctum ipsi ΑΔ parallela ducatur ΒΕ.



Παράλληλογραμμὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴσα ἄρα ἐστὶν ἢ μὲν AB τῆ ΔΕ, ἢ δὲ ΑΔ τῆ ΒΕ. Ἀλλὰ ἢ AB τῆ ΑΔ ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παράλληλογραμμὸν. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παράλληλους τὰς AB, ΔΕ εὐθεῖα ἐπέπεσεν ἢ ΑΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δυσὶν ἑρβαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὀρθὴ δὲ ἢ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἢ ὑπὸ ΑΔΕ. Τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκάτερα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν· ὀρθογώνιον

Parallelogrammum igitur est ΑΔΕΒ; æqualis igitur est quidem AB ipsi ΔΕ, ΑΔ vero ipsi ΒΕ. Sed AB ipsi ΑΔ est æqualis; quatuor igitur ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ æquales inter se sunt; æquilaterum igitur est ΑΔΕΒ parallelogrammum. Dico etiam et rectangulum. Quoniam enim in parallelas AB, ΔΕ recta incidit ΑΔ; ergo ΒΑΔ, ΑΔΕ anguli duobus rectis æquales sunt. Rectus autem est ΒΑΔ; rectus igitur et ΑΔΕ. Parallelogrammorum autem spatiorum opposita latera et anguli æqualia inter se sunt; rectus igitur et uterque oppositorum ΑΒΕ, ΒΕΔ angulorum; rectangulum igitur est ΑΔΕΒ. Ostensum autem est et æquilaterum;

Du point A, donné dans cette droite, conduisons ΑΓ perpendiculaire à AB (11); faisons ΑΔ égal à AB (3); par le point Δ conduisons ΔΕ parallèle à AB (31); et par le point B conduisons ΒΕ parallèle à ΑΔ.

La figure ΑΔΕΒ est un parallélogramme; donc AB est égal à ΔΕ, et ΑΔ égal à ΒΕ. Mais AB est égal à ΑΔ; donc les quatre droites ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ sont égales entr'elles; donc le parallélogramme ΑΔΕΒ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite ΑΔ tombe sur les parallèles AB, ΔΕ, les angles ΒΑΔ, ΑΔΕ sont égaux à deux droits (29); mais l'angle ΒΑΔ est droit; donc l'angle ΑΔΕ est droit aussi. Mais les côtés et angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux (34); donc chacun des angles opposés ΑΒΕ, ΒΕΔ est droit; donc le parallélogramme ΑΔΕΒ est rectangle; mais nous avons démontré qu'il est

78 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ἰσὶ τὸ ΑΔΕΒ. Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον τετράγωνον ἄρα ἰσὶ, καὶ ἴστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον. Οἷον ἴδω ποιῆσαι.

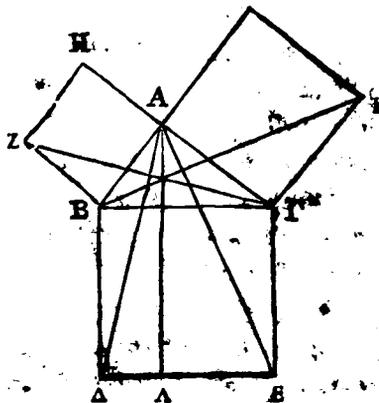
quadratum igitur est, et est ex AB recta descriptum. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

PROPOSITIO XLVII.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τῆν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

In rectangulis triangulis, quadratum ex latere rectum angulum subtendente æquale est quadratis ex lateribus rectum angulum continentibus.



Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

.Sit triangulum rectangulum ABG, rectum habens BAG angulum; dico quadratum ex BG æquale esse quadratis ex ipsis BA, AG.

équilateral; donc le parallélogramme ADEB est un carré, et il est décrit avec la droite AB; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLVII.

Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ABG un triangle rectangle, que BAG soit l'angle droit; je dis que le carré du côté BG est égal aux carrés des côtés BA, AG.

Ανεπιγράψω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ· ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ· καὶ διὰ τοῦ Α ὀποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΑ· καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν πρὸς δὲ τινὶ εὐθείᾳ τῇ ΒΑ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ Α, δύο εὐθείαι αἱ ΑΓ, ΑΗ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐπιζῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιούσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ προσκείμεθα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλη τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ· δύο δὲ αἱ ΔΒ, ΔΑ δυσὶ ταῖς ΓΒ, ΒΖ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσις τῇ ΖΓ ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΑ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς

Describatur enim ex ΒΓ quidem quadratum ΒΔΕΓ; ex ipsis vero ΒΑ, ΑΓ ipsa ΗΒ, ΘΓ; et per Α alterutri ipsarum ΒΔ, ΓΕ parallela ducatur ΑΑ; et jungantur ΑΔ, ΖΓ.

Et quoniam rectus est uterque ipsorum ΒΑΓ, ΒΑΗ angulorum, ad aliquam igitur rectam ΒΑ, et ad punctum in eâ Α, duæ rectæ ΑΓ, ΑΗ, non ad eandem partes positæ, deinceps angulos duobus rectis æquales faciunt; in rectum igitur est ΓΑ ipsi ΑΗ. Propter eadem et ΒΑ ipsi ΑΘ est in rectum. Et quoniam æqualis est ΔΒΓ angulus ipsi ΖΒΑ, rectus enim uterque, communis addatur ΑΒΓ; totus igitur ΔΒΑ toti ΖΒΓ est æqualis. Et quoniam æqualis est quidem ΔΒ ipsi ΒΓ, ipsa vero ΖΒ ipsi ΒΑ; duæ utique ΔΒ, ΔΑ duabus ΓΒ, ΒΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΔΒΑ angulo ΖΒΓ æqualis; basis igitur ΑΔ basi ΖΓ æqualis, et ΑΒΔ triangulum ipsi ΖΒΓ triangulo est æquale. Et est quicumque ipsius ΑΒΔ trianguli duplum ΒΑ παραλληλόγραμμον, basim enim eandem habent ΒΔ et in eisdem sunt parallelis ΒΑ, ΑΑ; ipsius vero ΖΒΓ trianguli duplum ΒΗ quadratum, et enim rursus basim eandem habent et in eisdem

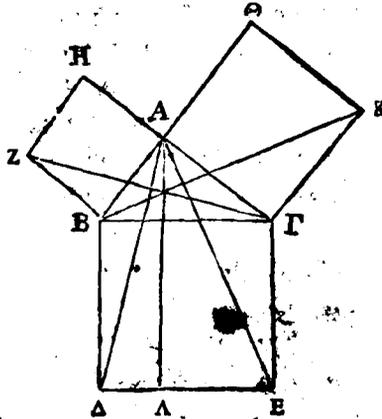
Décrivons avec ΒΓ le carré ΒΔΕΓ, et avec ΒΑ, ΑΓ les carrés ΗΒ, ΑΓ; et par le point Α conduisons ΑΑ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΒΔ, ΓΕ; et joignons ΑΔ, ΖΓ.

Puisque chacun des angles ΒΑΓ, ΒΑΗ est droit, les deux droites ΑΓ, ΑΗ, non placées du même côté, font avec la droite ΒΑ au point Α de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΓΑ est dans la direction de ΑΗ; la droite ΒΑ est dans la direction ΑΘ, par la même raison. Et puisque l'angle ΔΒΓ est égal à l'angle ΖΒΑ, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ΑΒΓ, l'angle entier ΔΒΑ sera égal à l'angle entier ΖΒΓ (not. 4). Et puisque ΔΒ est égal à ΒΓ, et ΖΒ à ΒΑ, les deux droites ΔΒ, ΔΑ sont égales aux deux droites ΓΒ, ΒΖ, chacune à chacune; mais l'angle ΔΒΑ est égal à l'angle ΖΒΓ; donc la base ΑΔ est égale à la base ΖΓ, et le triangle ΑΒΔ égal au triangle ΖΒΓ (4). Mais le parallélogramme ΒΑ est double du triangle ΑΒΔ (41), car ils ont la même base ΒΔ et ils sont entre

80 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

BA, AA· τοῦ δὲ ZBG τριγώνου διπλάσιον τὸ BH τε-  
 τράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι  
 τὴν ZB καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις  
 ταῖς ZB, HG· τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα  
 ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ BA παρ-  
 αλληλόγραμμον τῷ HB τετραγώνῳ. Ομοίως

sunt parallelis ZB, HG; æqualium autem dupla  
 æqualia inter se sunt; æquale igitur est et BA pa-  
 rallelogrammum ipsi HB quadrato. Similiter au-  
 tem junctis AE, BK ostendetur et ΓΑ parallelo-  
 grammum æquale ipsi ΘΓ quadrato. Totum igitur  
 ΒΔΕΓ quadratum duobus HB, ΘΓ quadratis æ-



δὲ, ἐπιζευγυμένῳ τῶν AE, BK, δειχθήσεται  
 καὶ τὸ ΓΑ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τε-  
 τράγωνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυοῖ  
 τοῖς HB, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστί. Καὶ ἐστὶ  
 τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς BG ἀναγρα-  
 φέν, τὰ δὲ HB, ΘΓ ἀπὸ τῶν BA, ΑΓ· τὸ ἄρα  
 ἀπὸ τῆς BG πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς  
 ἀπὸ τῶν BA, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις. Ἐν ἄρα  
 τοῖς ὀρθογωνίοις, καὶ τὰ ἰζῆς.

quale est, et est quidem ΒΔΕΓ quadratum ex BG  
 descriptum, ipsa vero HB, ΘΓ ex BA, ΑΓ; ergo  
 quadratum ex BG latere æquale est quadratis ex  
 BA, ΑΓ lateribus; ergo in rectangulis, etc.

les mêmes parallèles BA, AA; le carré BH est double du triangle ZBG, car ils ont la même base BZ et ils sont entre les mêmes parallèles ZB, HG; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales, sont égales entr'elles; donc le parallélograme BA est égal au carré HB. Ayant joint AE, BK, nous démontrerons semblablement que le parallélogramme ΓΑ est égal au carré ΘΓ; donc le carré entier ΒΔΕΓ est égal aux deux carrés HB, ΘΓ. Mais le carré ΒΔΕΓ est décrit avec BG, et les carrés HB, ΘΓ sont décrits avec BA, ΑΓ; donc le carré du côté BG est égal aux carrés des côtés BA, ΑΓ. Donc dans les triangles, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

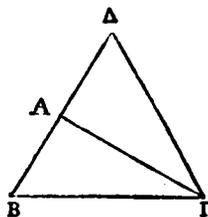
PROPOSITIO XLVIII.

Εάν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἢ περιχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστι.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω ὅτι ὀρθή ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

Si trianguli ex uno laterum quadratum æquale est quadratis ex reliquis trianguli duobus lateribus; contentus angulus a reliquis trianguli duobus lateribus rectus est.

Trianguli enim ΑΒΓ ex uno ΒΓ latere quadratum æquale sit quadratis ex ΒΑ, ΑΓ lateribus; dico rectum esse ΒΑΓ angulum.



Ἐχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῆ ΑΓ εὐθείας<sup>1</sup> πρὸς ὀρθὰς ἢ ΑΔ, καὶ κείσθω τῆ ΒΑ ἴση ἢ ΑΔ, καὶ ἐπιζεύχθω ἢ ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ ΔΑ τῆ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῆ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνω. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ

Ducatur enim ab Α puncto ipsi ΑΓ rectæ ad rectos ΑΔ, et ponatur ipsi ΒΑ æqualis ΑΔ, et jungatur ΔΓ.

Et quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΑΒ, æquale est et ex ΔΑ quadratum ipsi ex ΑΒ quadrato. Commune addatur ex ΑΓ quadratum; ipsa igitur ex

PROPOSITION XLVIII.

Si le carré d'un des côtés d'un triangle est égal aux carrés des deux côtés restants de ce triangle, l'angle compris par les deux côtés restants est droit.

Que le carré du côté ΒΓ du triangle ΑΒΓ soit égal aux carrés des côtés ΒΑ, ΑΓ; je dis que l'angle ΒΑΓ est droit.

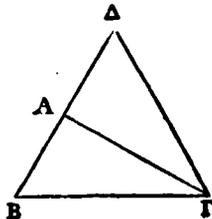
Du point Α, conduisons la droite ΑΔ perpendiculaire à ΑΓ (11), faisons ΑΔ égal à ΒΑ, et joignons ΔΓ.

Car puisque ΔΑ est égal à ΑΒ, le carré de ΔΑ est égal au carré de ΑΒ. Ajoutons le carré commun de ΑΓ; les carrés des droites ΔΑ, ΑΓ seront égaux

## 82 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετράγωνον τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἰστί τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἰστί τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὀρθὴ γάρ ἰστί ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἰστί τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἰστί τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε

$\Delta\Delta$ ,  $\text{ΑΓ}$  quadrata æqualia sunt ipsis ex  $\text{ΒΑ}$ ,  $\text{ΑΓ}$  quadratis. Sed ipsis quidem ex  $\Delta\Delta$ ,  $\text{ΑΓ}$  æquale est ipsum ex  $\Delta\Gamma$ , rectus enim est  $\Delta\text{ΑΓ}$  angulus; ipsis vero ex  $\text{ΒΑ}$ ,  $\text{ΑΓ}$  æquale est ipsum ex  $\text{ΒΓ}$ , ponitur enim; ipsum igitur ex  $\Delta\Gamma$  quadratum æquale est ipsi ex  $\text{ΒΓ}$  quadrato; quare et latus  $\Delta\Gamma$  ipsi  $\text{ΒΓ}$  est æquale; et quoniam æqualis est



καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἴστί· καὶ ἰστί ἴστί ἰστί ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὲ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ <sup>2</sup> ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ <sup>3</sup> ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

$\Delta\Delta$  ipsi  $\text{ΑΒ}$ , communis autem  $\text{ΑΓ}$ , duæ utique  $\Delta\Delta$ ,  $\text{ΑΓ}$  duabus  $\text{ΒΑ}$ ,  $\text{ΑΓ}$  æquales sunt, et basis  $\Delta\Gamma$  basi  $\text{ΒΓ}$  est æqualis; angulus igitur  $\Delta\text{ΑΓ}$  angulo  $\text{ΒΑΓ}$  est æqualis. Rectus autem  $\Delta\text{ΑΓ}$ ; rectus igitur et  $\text{ΒΑΓ}$ . Si igitur trianguli, etc.

aux carrés des droites  $\text{ΒΑ}$ ,  $\text{ΑΓ}$ . Mais le carré de  $\Delta\Gamma$  est égal aux carrés des droites  $\Delta\Delta$ ,  $\text{ΑΓ}$  (47), car l'angle  $\Delta\text{ΑΓ}$  est droit, et le carré de  $\text{ΒΓ}$  est supposé égal aux carrés des droites  $\text{ΒΑ}$ ,  $\text{ΑΓ}$ ; donc le carré de  $\Delta\Gamma$  est égal au carré de  $\text{ΒΓ}$ ; donc le côté  $\Delta\Gamma$  est égal au côté  $\text{ΒΓ}$ ; mais  $\Delta\Delta$  est égal à  $\text{ΑΒ}$ , et  $\text{ΑΓ}$  est commun; donc les deux droites  $\Delta\Delta$ ,  $\text{ΑΓ}$  sont égales aux deux droites  $\text{ΒΑ}$ ,  $\text{ΑΓ}$ ; mais la base  $\Delta\Gamma$  est égale à la base  $\text{ΒΓ}$ ; donc l'angle  $\Delta\text{ΑΓ}$  est égal à l'angle  $\text{ΒΑΓ}$  (8). Mais l'angle  $\Delta\text{ΑΓ}$  est droit; donc l'angle  $\text{ΒΑΓ}$  est droit aussi. Donc, etc.

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R S E C U N D U S.

---

ΟΡΟΙ.

DEFINITIONES.

α. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεται λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιχουστῶν εὐθειῶν.

β. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἐν ἑνὶ ὁποιοῦν σὺν τοῖς δυοῖς παραπληρέμασι γινώμεν καλεῖσθαι.

1. Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectum angulum continentibus rectis.

2. Omnis autem parallelogrammi spatii eorum circa diametrum ipsius parallelogrammorum unumquodque cum duobus complementis gnomon vocetur.

## LE DEUXIEME LIVRE

# DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

DÉFINITIONS.

1. Tout parallélogramme rectangle est dit contenu sous deux droites qui comprennent un angle droit.

2. Que dans tout parallélogramme, l'un quelconque des parallélogrammes décrits autour de la diagonale avec les deux compléments soit appelé gnomon.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

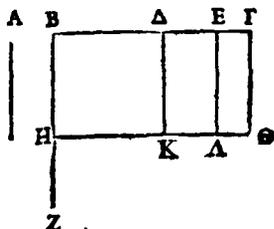
PROPOSITIO I.

Εάν δύο δύο εὐθείαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐ-  
τῶν εἰς ὅσα διποτοῦν τμήματα· τὸ περιχόμε-  
νον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς  
τε ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἐκάστου τῶν τμημά-  
των περιχομένοις ὀρθογώνιοις.

Ἐστώσαν δύο εὐθείαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ τετμήσθω  
ἡ ΒΓ ὡς ἔτυχι κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα· λέγω  
ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ περιχόμενον ὀρθογώνιον  
ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ περιχομένῳ  
ὀρθογώνιῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, καὶ ἔτι<sup>3</sup>  
τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.

Si sint duæ rectæ, secta fuerit autem altera  
ipsarum in æqualia quotcunque segmenta; con-  
tentum rectangulum sub duabus rectis æquale  
est et ipsis sub non sectâ et unoquoque segmen-  
torum contentis rectangulis.

Sint duæ rectæ Α, ΒΓ, et secta sit ΒΓ ut-  
cunque in Δ, Ε punctis; dico ipsum sub Α,  
ΒΓ contentum rectangulum æquale esse et ipsi  
sub Α, ΒΔ contento rectangulo, et ipsi sub  
Α, ΔΕ, et etiam ipsi sub Α, ΕΓ.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β' τῆ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ  
ΒΖ, καὶ κείσθω τῆ Α ἴση ἢ ΒΗ, καὶ διὰ μὲν<sup>4</sup>  
τοῦ Η τῆ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, διὰ δὲ  
τῶν Δ, Ε, Γ τῆ ΒΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ  
ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Ducatur enim a Β ipsi ΒΓ ad rectos ΒΖ, et  
ponatur ipsi Α æqualis ΒΗ, et per Η quidem  
ipsi ΒΓ parallela ducatur ΗΘ; per Δ, Ε, Γ  
vero ipsi ΒΗ parallelae ducantur ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est coupée en tant de parties qu'on voudra, le rectangle contenu sous ces deux droites est égal aux rectangles contenus sous la droite qui n'a point été coupée, et sous chacun des segments de l'autre.

Soient deux droites Α, ΒΓ, et que ΒΓ soit coupé à volonté aux points Δ, Ε; je dis que le rectangle contenu sous Α, ΒΓ est égal au rectangle contenu sous Α, ΒΔ, au rectangle sous Α, ΔΕ, et au rectangle sous Α, ΕΓ.

Par le point Β, conduisons la droite ΒΖ perpendiculaire à ΒΓ (11. 1); faisons ΒΗ égal à Α, et par le point Η conduisons ΗΘ parallèle à ΒΓ (31. 1); et par les points Δ, Ε, Γ, conduisons les droites ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ parallèles à la droite ΒΗ.

## LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 85

Ἴσον δὴ ἴσται τὸ ΒΘ τοῖς ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. Καὶ ἴσται τὸ μὲν ΒΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν<sup>5</sup> ΗΒ, ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΒΚ τὸ<sup>6</sup> ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΔΛ τὸ<sup>7</sup> ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΚ, τοῦτ' ἴσται ἡ ΒΗ, τῇ Α· καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ ΕΘ τὸ<sup>8</sup> ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ἴσον ἴσται τῷ τε ὑπὸ Α, ΒΔ, καὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ Α, ΕΓ. Ἐὰν ἄρα ᾖσι, καὶ τὰ ἐξῆς.

Æquale utique est ΒΘ ipsi ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ; et est quidem ΒΘ ipsum sub Α, ΒΓ, continetur enim sub ΗΒ, ΒΓ, æqualis autem ΒΗ ipsi Α; ΒΚ vero ipsum sub Α, ΒΔ, continetur enim sub ΗΒ, ΒΔ, æqualis autem ΒΗ ipsi Α; ΔΛ vero ipsum sub Α, ΔΕ, æqualis enim ΔΚ, hoc est ΒΗ, ipsi Α; et etiam similiter ΕΘ ipsum sub Α, ΕΓ; ergo ipsum sub Α, ΒΓ æquale est ipsi sub Α, ΒΔ, et ipsi sub ipsis Α, ΔΕ, et etiam ipsi sub Α, ΕΓ. Si igitur sint, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ἐὰν εὐθεία γραμμὴ τμηθῆ ὡς ἔτυχῃ, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα<sup>2</sup> ἴσται τῷ ἀπὸ τῆς<sup>3</sup> ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεία γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχῃ κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἴσον ἴσται τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Le rectangle ΒΘ est égal aux rectangles ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. Mais ΒΘ est le rectangle sous Α, ΒΓ, puisqu'il est contenu sous ΗΒ, ΒΓ, et que ΒΗ est égal à Α; ΒΚ est le rectangle sous Α, ΒΔ, puisqu'il est contenu sous ΗΒ, ΒΔ, et que ΒΗ est égal à Α; ΔΛ est le rectangle sous Α, ΔΕ, puisque ΔΚ, c'est-à-dire ΒΗ, est égal à Α; et semblablement, ΕΘ est le rectangle sous Α, ΕΓ; donc le rectangle contenu sous Α, ΒΓ est égal au rectangle sous Α, ΒΔ, au rectangle sous Α, ΔΕ, et encore au rectangle sous Α, ΕΓ. Donc, etc.

### PROPOSITION II.

Si une ligne droite est coupée à volonté, les rectangles contenus sous la droite entière et sous l'un et l'autre segment, sont égaux au carré de la droite entière.

Que la droite ΑΒ soit coupée à volonté en un point Γ; je dis que le rectangle contenu sous ΑΒ, ΒΓ, avec le rectangle contenu sous ΑΒ, ΑΓ, est égal au carré de ΑΒ.

### PROPOSITIO II.

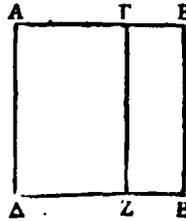
Si recta linea secetur utcunque, ipsa sub totâ et utroque segmentorum contenta rectangula æqualia sunt ipsi ex totâ quadrato.

Recta enim ΑΒ secetur utcunque in Γ puncto; dico ipsum sub ΑΒ, ΒΓ contentum rectangulum, cum ipso sub ΒΑ, ΑΓ contento rectangulo, æquale esse ipsi ex ΑΒ quadrato.

## 86 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνου τὸ  
 ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ  
 παράλληλος ἢ ΓΖ.

Describatur enim ex AB quadratum ΑΔΕΒ,  
 et ducatur per Γ alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΕ  
 parallela ΓΖ.



Ἴσον δὲ ἴστι<sup>5</sup> τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ· καὶ ἴστι  
 τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνου· τὸ δὲ  
 ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον·  
 περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἢ  
 ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ  
 ἢ ΒΕ τῇ ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, μετὰ  
 τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴσον ἴστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ  
 τετραγώνῳ. Εὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Æquale utique est ΑΕ ipsis ΑΖ, ΓΕ; et  
 est quidem ΑΕ ipsum ex ΑΒ quadratum, ΑΖ  
 vero ipsum sub ΒΑ, ΑΓ contentum rectan-  
 gulum, continetur etenim sub ΔΑ, ΑΓ, æqualis  
 autem ΑΔ ipsi ΑΒ; ΓΕ vero ipsum sub ΑΒ, ΒΓ,  
 æqualis enim ΒΕ ipsi ΑΒ; ipsum igitur sub ΒΑ,  
 ΑΓ, cum ipso sub ΑΒ, ΒΓ, æquale est ipsi  
 ex ΑΒ quadrato. Si igitur recta, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε<sup>1</sup>, τὸ ὑπὸ  
 τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον  
 ὀρθογώνιον ἴσον ἴστι τῷ τι ὑπὸ τῶν τμημάτων  
 περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρη-  
 μένου τμήματος τετραγώνῳ.

### PROPOSITIO III.

Si recta linea secetur utcumque, ipsum sub  
 totâ et uno segmentorum contentum rectangu-  
 lum æquale est et ipsi sub segmentis contento  
 rectangulo, et ipsi ex prædicto segmento qua-  
 drato.

Avec AB décrivons le carré ΑΔΕΒ (46. 1), et par le point Γ conduisons ΓΖ  
 parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΒΕ (31. 1).

Le carré ΑΕ est égal aux rectangles ΑΖ, ΓΕ; mais ΑΕ est le carré de ΑΒ,  
 ΑΖ est le rectangle contenu sous ΒΑ, ΑΓ, puisqu'il est contenu sous ΔΑ,  
 ΑΓ, et que ΑΔ est égal à ΑΒ; et ΓΕ est le rectangle contenu sous ΑΒ, ΒΓ;  
 puisque ΒΕ est égal à ΑΒ; donc le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ, avec le rectangle  
 sous ΑΒ, ΒΓ, est égal au carré de ΑΒ. Donc, etc.

### PROPOSITION III.

Si une ligne droite est coupée à volonté, le rectangle contenu sous la  
 droite entière et l'un des segments, est égal au rectangle contenu sous les  
 segments et au carré du segment premièrement dit.

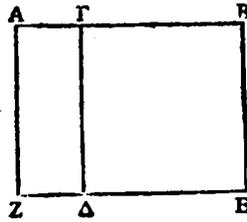
LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 87

Εὐθεία γὰρ ἡ  $AB$  τετμήσθω ὡς ἔτυχεν κατὰ τὸ  $\Gamma$ . Λίγω ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν  $AB, BG$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $AG, GB$  περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $BG$  τετραγώνου.

Αναγράφω γὰρ ἀπὸ τῆς  $GB$  τετράγωνον τὸ  $\Gamma AEB$ , καὶ διήχθω ἡ  $EA$  ἐπὶ τὸ  $Z$ , καὶ διὰ τοῦ  $A$  ὁποῦτα τῶν  $\Gamma A, BE$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $AZ$ .

Recta enim  $AB$  secetur utcumque in  $\Gamma$ ; dico ipsum sub  $AB, BG$  contentum rectangulum æquale esse ipsi sub  $AG, GB$  contento rectangulo, cum ipso ex  $BG$  quadrato.

Describatur enim ex  $GB$  quadratum  $\Gamma AEB$ , et producat  $EA$  in  $Z$ , et per  $A$  alterutri ipsarum  $\Gamma A, BE$  parallela ducatur  $AZ$ .



Ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ  $AE$  τοῖς  $A\Delta, \Gamma E$ ; καὶ ἐστὶ τὸ μὲν  $AE$  τὸ ὑπὸ τῶν  $AB, BG$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν  $AB, BE$ , ἴση δὲ ἡ  $BE$  τῇ  $BG$ ; τὸ δὲ  $A\Delta$  τὸ ὑπὸ τῶν  $AG, GB$ , ἴση γὰρ ἡ  $\Delta\Gamma$  τῇ  $GB$ ; τὸ δὲ  $\Delta B$  τὸ ἀπὸ τῆς  $GB$  τετράγωνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $AB, BG$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $AG, GB$  περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, κατὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $GB$  τετραγώνου. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Æquale utique est  $AE$  ipsis  $A\Delta, \Gamma E$ ; et est quidem  $AE$  ipsum sub  $AB, BG$  contentum rectangulum, continetur etenim sub  $AB, BE$ , æqualis autem  $BE$  ipsi  $BG$ ;  $A\Delta$  vero ipsum sub  $AG, GB$ , æqualis enim  $\Delta\Gamma$  ipsi  $GB$ ;  $\Delta B$  autem ex  $GB$  est quadratum; ipsum igitur sub  $AB, BG$  contentum rectangulum æquale est ipsi sub  $AG, GB$  contento rectangulo, cum ipso ex  $GB$  quadrato. Si igitur recta, etc.

Que la droite  $AB$  soit coupée à volonté au point  $\Gamma$ ; je dis que le rectangle contenu sous  $AB, BG$  est égal au rectangle contenu sous  $AG, GB$ , avec le carré de  $BG$ .

Avec  $GB$  décrivons le carré  $\Gamma AEB$  (46. 1), prolongeons  $EA$  en  $Z$ , et par le point  $A$  conduisons  $AZ$  parallèle à l'une ou à l'autre des droites  $\Gamma A, BE$  (31. 1).

Le rectangle  $AE$  est égal aux rectangles  $A\Delta, \Gamma E$ ; mais  $AE$  est le rectangle contenu sous  $AB, BG$ , puisqu'il est contenu sous  $AB, BE$ , et que  $BE$  est égal à  $BG$ ;  $A\Delta$  est le rectangle sous  $AG, GB$ , puisque  $\Delta\Gamma$  est égal à  $GB$ ; et  $\Delta B$  est le carré de  $GB$ ; donc le rectangle contenu sous  $AB, GB$  est égal au rectangle contenu sous  $AG, GB$ , avec le carré de  $GB$ . Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

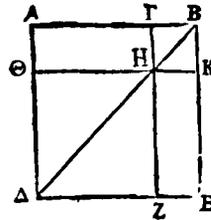
PROPOSITIO IV.

Εάν εὐθεία γραμμὴ τμηθῆ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνων ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθόγωνῳ.

Εὐθεία γὰρ γραμμὴ ἢ  $AB$  τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ  $\Gamma$ . λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνων ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Si recta linea secetur utcumque, ipsum ex totâ quadratum æquale est et ipsis ex segmentis quadratis, et ipsi bis sub segmentis contento rectangulo.

Recta enim linea  $AB$  secetur utcumque in  $\Gamma$ ; dico ipsum ex  $AB$  quadratum æquale esse et ipsis ex  $AG$ ,  $GB$  quadratis, et ipsi bis sub  $AG$ ,  $GB$  contento rectangulo.



Αναγεγράφω γὰρ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνων τὸ  $ADEB$ , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  $BA$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $\Gamma$  ὀποτέρᾳ τῶν  $AD$ ,  $EB$  παράλληλος ἦχθω ἢ  $GHZ$ , διὰ δὲ τοῦ  $H$  ὀποτέρᾳ τῶν  $AB$ ,  $DE$  παράλληλος ἦχθω ἢ  $HK$ .

Describatur enim ex  $AB$  quadratum  $ADEB$ ; et jungatur  $BA$ , et per  $\Gamma$  quidem alterutri ipsarum  $AD$ ,  $EB$  parallela ducatur  $GHZ$ , per  $H$  vero alterutri ipsarum  $AB$ ,  $DE$  parallela ducatur  $HK$ .

PROPOSITION IV.

Si la droite est coupée à volonté, le carré de la droite entière est égal aux carrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments.

Que la droite  $AB$  soit coupée à volonté au point  $\Gamma$ ; je dis que le carré de  $AB$  est égal aux carrés des segments  $AG$ ,  $GB$ , et à deux fois le rectangle contenu sous  $AG$ ,  $GB$ .

Avec  $AB$  décrivons le carré  $ADEB$  (46. 1); joignons  $BA$ ; par le point  $\Gamma$  conduisons  $GHZ$  parallèle à l'une ou à l'autre des droites  $AD$ ,  $EB$  (31. 1), et par le point  $H$  conduisons  $HK$  parallèle à l'une ou à l'autre des droites  $AB$ ,  $DE$ .

Καὶ ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. ΑΛΛ' ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. ΑΛΛὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἑρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐπέπεσαν ἡ ΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΒΓΗ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. Ὁρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ. Ὡστε καὶ αἱ ἀπεναντίον, αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαὶ εἰσι· ἑρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τοῦτ' ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΟΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καὶ ἐστὶ τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση

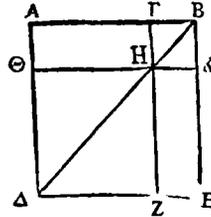
Et quoniam parallela est ΓΖ ipsi ΑΔ, et in ipsas incidit ΒΔ, interior angulus ΓΗΒ æqualis est interiori et opposito ΑΔΒ. Sed ΑΔΒ ipsi ΑΒΔ est æqualis, quoniam et latus ΒΑ ipsi ΑΔ est æquale; et ΓΗΒ igitur angulus ipsi ΗΒΓ est æqualis; quare et latus ΒΓ lateri ΓΗ est æquale. Sed ΓΒ quidem ipsi ΗΚ est æqualis, ΓΗ vero ipsi ΒΚ; et ΗΚ igitur ipsi ΚΒ est æqualis; æquilaterum igitur est ΓΗΚΒ. Dico etiam et rectangulum. Quoniam enim parallela est ΓΗ ipsi ΒΚ, et in ipsas incidit ΓΒ; ipsi igitur ΚΒΓ, ΒΓΗ anguli duobus rectis sunt æquales. Rectus autem est ΚΒΓ; rectus igitur et ΒΓΗ. Quare et oppositi ΓΗΚ, ΗΚΒ recti sunt; rectangulum igitur est ΓΗΚΒ. Ostensum autem est et æquilaterum; quadratum igitur est, et est ex ΓΒ. Propter eadem utique et ΟΖ quadratum est, et est ex ΘΗ, hoc est ex ΑΓ; ipsa igitur ΟΖ, ΓΚ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ sunt. Et quoniam æquale est ΑΗ ipsi ΗΕ, et est ΑΗ ipsum sub ΑΓ, ΓΒ, æqualis enim ΗΓ ipsi ΓΒ; et ΗΕ igitur æquale ipsi sub ΑΓ, ΓΒ; ipsa igitur ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt ipsi bis

Puisque ΓΖ est parallèle à ΑΔ, et que ΒΔ tombe sur ces deux droites, l'angle extérieur ΓΗΒ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΔΒ (29. 1). Mais l'angle ΑΔΒ est égal à l'angle ΑΒΔ (5. 1), puisque le côté ΒΑ est égal au côté ΑΔ; donc l'angle ΓΗΒ est égal à l'angle ΗΒΓ; donc le côté ΒΓ est égal au côté ΓΗ (6. 1); mais ΓΒ est égal à ΗΚ (34. 1), et ΓΗ égal à ΒΚ; donc ΗΚ est égal à ΚΒ; donc le quadrilatère ΓΗΚΒ est équilatéral. Je dis qu'il est rectangle. Car puisque ΓΗ est parallèle à ΒΚ, et que ΓΒ tombe sur ces deux droites, les angles ΚΒΓ, ΒΓΗ sont égaux à deux droits (29. 1). Mais l'angle ΚΒΓ est droit (déf. 30. 1); donc l'angle ΒΓΗ est droit. Donc les angles opposés ΓΗΚ, ΗΚΒ sont droits aussi (34. 1); donc le quadrilatère ΓΗΚΒ est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un carré, et ce carré est décrit avec ΓΒ. Par la même raison ΟΖ est aussi un carré, et ce carré est décrit avec ΘΗ, c'est-à-dire avec ΑΓ; donc ΟΖ, ΓΚ sont des carrés décrits avec ΑΓ, ΓΒ. Et puisque le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΗΕ (45. 1), et que le rectangle ΑΗ est com-

90 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γάρ ἡ ΗΓ τῆ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ

sub ΑΓ, ΓΒ. Sunt autem et ΘΖ, ΓΚ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ; ergo quatuor ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo. Sed quatuor ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ totum sunt ΑΔΕΒ, quod est ex ΑΒ quadratum; ergo ex ΑΒ qua-



περιχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀλλὰ τὰ τέσσαρα ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὃ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

dratum æquale est et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo. Si igitur recta, ect.

pris sous les droites ΑΓ, ΓΒ, car ΗΓ est égal à ΓΒ, le rectangle ΗΕ est égal au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc les rectangles ΑΗ, ΗΕ sont égaux à deux fois le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les carrés ΘΖ, ΓΚ sont décrits avec les droites ΑΓ, ΓΒ; donc les quatre figures ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ sont égales aux carrés des droites ΑΓ, ΓΒ et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les quatre figures ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ sont la figure entière ΑΔΕΒ, qui est le carré de ΑΒ; donc le carré de ΑΒ est égal aux carrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Donc, etc.

ΚΑΙ ΑΛΛΩΣ'.

ET ALITER.

Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  περιγεγμένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $BA$  τῇ  $AD$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ABD$  τῇ ὑπὸ  $ADB$ · καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυτὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ  $ABD$  ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ  $ABD$ ,  $ADB$ ,  $BAD$ , δυτὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $BAD$ , λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ  $ABD$ ,  $ADB$  μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶ· καὶ εἰσὶν ἴσαι· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ  $ABD$ ,  $ADB$  ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $BGH$ , ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ<sup>3</sup>  $A$ · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $GHB$  ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $GHB$  γωνία τῇ ὑπὸ  $GBH$ · ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ  $BG$  τῇ  $GH$  ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν  $GB$  τῇ  $HK$  ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ  $GH$  τῇ  $BK$  ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ  $GK$ . Ἐχει δὲ καὶ ὀρθὴν τὴν ὑπὸ  $GBK$  γωνίαν· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ  $GK$ , καὶ ἐστὶν

Dico ex  $AB$  quadratum æquale esse et ipsis ex  $AG$ ,  $GB$  quadratis et ipsi bis sub  $AG$ ,  $GB$  contento rectangulo.

Quoniam enim, in eadem figurâ, æqualis est  $BA$  ipsi  $AD$ , æqualis est et angulus  $ABD$  ipsi  $ADB$ ; et quoniam omnis trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt, ergo  $ABD$  trianguli tres anguli  $ABD$ ,  $ADB$ ,  $BAD$  duobus rectis æquales sunt. Rectus autem  $BAD$ ; reliqui igitur  $ABD$ ,  $ADB$  uni recto æquales sunt; et sunt æquales; uterque igitur ipsorum  $ABD$ ,  $ADB$  dimidius est recti. Rectus est autem  $BGH$ , æqualis enim est interiori et opposito qui ad  $A$ ; reliquus igitur  $GHB$  dimidius est recti; æqualis igitur est  $GHB$  angulus ipsi  $GBH$ ; quare et latus  $BG$  ipsi  $GH$  est æquale. Sed  $GB$  quidem ipsi  $HK$  est æqualis,  $GH$  vero ipsi  $BK$ ; æquilaterum igitur est  $GK$ . Habet autem et rectum  $GBK$  angulum; quadratum igitur est  $GK$ , et est ex  $GB$ . Propter

ET AUTREMENT.

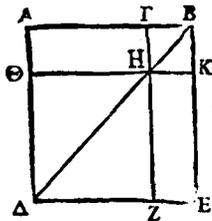
Je dis que le carré de  $AB$  est égal au carré des droites  $AG$ ,  $GB$  et à deux fois le rectangle compris sous  $AG$ ,  $GB$ .

Car puisque, dans la même figure,  $BA$  est égal à  $AD$ , l'angle  $ABD$  est égal à l'angle  $ADB$  (5. 1); et puisque les trois angles de tout triangle sont égaux à deux droits (32. 1), les trois angles  $ABD$ ,  $ADB$ ,  $BAD$  du triangle  $ABD$  sont égaux à deux droits. Mais l'angle  $BAD$  est droit; donc les deux angles restants  $ABD$ ,  $ADB$  sont égaux à un droit; et ils sont égaux; donc chacun des angles  $ABD$ ,  $ADB$  est la moitié d'un droit. Mais l'angle  $BGH$  est droit, car il est égal à l'angle intérieur et opposé en  $A$ ; donc l'angle restant  $GHB$  est la moitié d'un droit; donc l'angle  $GHB$  est égal à  $GBH$ ; donc le côté  $BG$  est égal au côté  $GH$  (34. 1). Mais  $GB$  est égal à  $HK$ , et  $GH$  égal à l'angle  $BK$  (34. 1); donc  $GK$  est équilatéral. Mais il a l'angle droit  $GBK$ ; donc  $GK$  est

92 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ΘΖ τε-  
 τράγωνόν ἐστι<sup>5</sup>, καὶ ἐστὶν ἴσον<sup>6</sup> τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ·  
 τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ τετράγωνα ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἴσα  
 τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ  
 τῷ ΗΕ, καὶ ἐστὶ τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ,  
 ἴση ἐστὶ γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΓΒ, καὶ τὸ ΕΗ ἄρα<sup>8</sup> ἴσον  
 ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ  
 τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ΓΚ, ΘΖ

eadem utique et ΘΖ quadratum est, et est æ-  
 quale ipsi ex ΑΓ; ergo ΓΚ, ΘΖ quadrata sunt,  
 et sunt æqualia ipsis ex ΑΓ, ΓΒ. Et quoniam  
 æquale est ΑΗ ipsi ΗΕ, et est ΑΗ ipsum sub  
 ΑΓ, ΓΒ, æqualis est enim ΓΗ ipsi ΓΒ; et ΕΗ  
 igitur æquale est ipsi sub ΑΓ, ΓΒ; ergo ΑΗ, ΗΕ  
 æqualia sunt ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ. Sunt autem et  
 ipsa ΓΚ, ΘΖ æqualia ipsis ex ΑΓ, ΓΒ; ergo ΓΚ,



ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ,  
 ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τῷ δις  
 ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Αλλὰ τὰ ΓΚ, ΘΖ καὶ τὰ ΑΗ,  
 ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕ, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΑΒ τε-  
 τράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ  
 τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετράγωνοις καὶ τῷ δις  
 ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ὅπως  
 εἶδε διείξαι.

ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ et  
 ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ. Sed ΓΚ, ΘΖ et ΑΗ, ΗΕ  
 totum sunt ΑΕ, quod est ex ΑΒ quadratum;  
 ergo ex ΑΒ quadratum æquale est et ipsis ex  
 ΑΓ, ΓΒ quadratis et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ con-  
 tento rectangulo. Quod oportebat ostendere.

un carré, et il est le carré de ΓΒ. Par la même raison, ΘΖ est un carré, et il est  
 égal à celui de ΑΓ; donc ΓΚ, ΘΖ sont des carrés, et ils sont égaux à ceux des  
 droites ΑΓ, ΓΒ. Et puisque ΑΗ est égal à ΗΕ (31. 1), et que ΑΗ est sous  
 ΑΓ, ΓΒ, car ΓΗ est égal à ΓΒ; le rectangle ΕΗ est égal au rectangle sous  
 ΑΓ, ΓΒ; donc les rectangles ΑΗ, ΗΕ sont égaux à deux fois le rectangle compris  
 sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les carrés ΓΚ, ΘΖ sont égaux aux carrés des droites ΑΓ,  
 ΓΒ; donc les figures ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ sont égales aux carrés des droites ΑΓ,  
 ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les figures ΓΚ, ΘΖ,  
 et ΑΗ, ΗΕ sont la figure entière ΑΕ, qui est le carré de ΑΒ; donc le carré de  
 ΑΒ est égal aux carrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris  
 sous ΑΓ, ΓΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Εκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίζεις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνα ἴστιν.

Ex his utique evidens est, in quadratis spatiis, circa diametrum parallelogramma quadrata esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

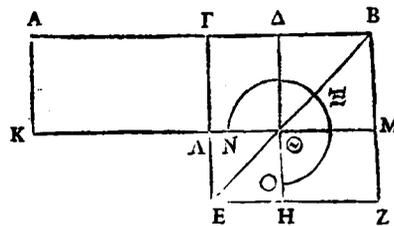
PROPOSITIO V.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Si recta linea secetur in æqualia et inæqualia, ipsum sub inæqualibus totius segmentis contentum rectangulum cum ipso ex ipsâ inter sectiones quadrato æquale est ipsi ex dimidiâ quadrato.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ

Recta enim aliqua AB secta sit in æqualia quidem ad Γ, in inæqualia vero ad Δ; dico



ὑπὸ τῶν AD, DB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

ipsum sub AD, DB contentum rectangulum cum ipso ex ΓΔ quadrato æquale esse ipsi ex ΓΒ quadrato.

COROLLAIRE.

De là il est évident que, dans les quarrés, les parallélogrammes autour de la diagonale sont des quarrés.

PROPOSITION V.

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le quarré de la droite placée entre les sections, est égal au quarré de la moitié de la droite entière.

Car qu'une droite AB soit coupée en deux parties égales au point Γ, et en deux parties inégales au point Δ, je dis que le rectangle compris sous AD, DB, avec le quarré de ΓΔ, est égal au quarré de ΓB.

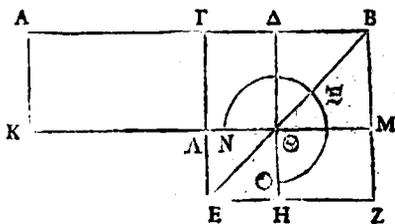
94 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αναγεγράφω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ· καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ὀποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΒΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΔΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ ὀποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ἦχθω ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὀποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΒΜ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΚ'.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῶν ΘΖ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλον τῶν ΔΖ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ

Describatur enim ex ΓΒ quadratum ΓΕΖΒ, et jungatur ΒΕ; et per Δ quidem alterutri ipsarum ΓΕ, ΒΖ parallela ducatur ΔΗ, per Θ vero alterutri ipsarum ΑΒ, ΕΖ parallela ducatur ΚΜ, et rursus per Α alterutri ipsarum ΓΑ, ΒΜ parallela ducatur ΑΚ.

Et quoniam æquale est ΓΘ complementum ipsi ΘΖ complemento, commune addatur ΔΜ; totum igitur ΓΜ toti ΔΖ æquale est. Sed ΓΜ



τὸ ΓΜ τῶν ΑΑ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῆ ΓΒ ἐστίν ἴση<sup>2</sup>· καὶ τὸ ΑΑ ἄρα τῶν ΔΖ ἴσον ἐστίν. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῶν ΝΕΟ γνόμων<sup>3</sup> ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ μὲν<sup>4</sup> ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐστίν, ἴση γὰρ ἢ<sup>5</sup> ΔΘ τῆ ΔΒ<sup>6</sup>· καὶ ὁ ΝΕΟ ἄρα γνόμων ἴσος ἐστὶ τῶν ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΑΗ, ὅ ἐστίν ἴσον τῶν ἀπὸ τῆς ΓΑ· ὅ ἄρα ΝΕΟ γνόμων καὶ τὸ ΑΗ ἴσα ἐστὶ τῶν ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῶ

ipsi ΑΑ æquale est quia et ΑΓ ipsi ΓΒ est æqualis; et ΑΑ igitur ipsi ΔΖ æquale est. Commune addatur ΓΘ; totum igitur ΑΘ ipsi ΝΕΟ gnomoni æquale est. Sed ΑΘ quidem ipsum sub ΑΔ, ΔΒ est, æqualis enim ΔΘ ipsi ΔΒ, ΝΕΟ igitur gnomon æqualis est ipsi sub ΑΔ, ΔΒ. Commune addatur ΑΗ, quod est æquale ipsi ex ΓΑ; ergo ΝΕΟ gnomon et ΑΗ æqualia sunt ipsi sub ΑΔ, ΔΒ contento rectangulo et ipsi ex ΓΑ quadrato.

Avec la droite ΓΒ décrivons le carré ΓΕΖΒ (46. 1), et joignons ΒΕ; par le point Δ conduisons ΔΗ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΕ, ΒΖ (31. 1); par le point Θ conduisons ΚΜ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΒ, ΕΖ; et par le point Α conduisons ΑΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΑ, ΒΜ.

Puisque le complément ΓΘ est égal au complément ΘΖ (43. 1), ajoutons le carré commun ΔΜ, le rectangle entier ΓΜ sera égal au rectangle entier ΔΖ. Mais ΓΜ est égal à ΑΑ (36. 3), puisque la droite ΑΓ est égale à la droite ΒΒ; donc le rectangle ΑΑ est égal au rectangle ΔΖ; ajoutons le rectangle commun ΓΘ, le rectangle entier ΑΘ sera égal au gnomon ΝΕΟ; mais ΑΘ est le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, puisque ΔΘ est égal à ΔΒ; donc le gnomon ΝΕΟ est égal au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ. Ajoutons le carré commun ΑΗ, qui est égal au carré de ΓΑ (corol. 4. 2), le gnomon ΝΕΟ et le carré ΑΗ seront égaux au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, et au carré

ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνόμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἰξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ δίχα, προστεθῆ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκεimenῆς ἕκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ'.

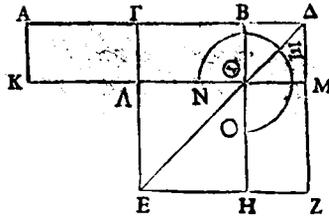
Εὐθεῖα γάρ τις ἢ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα

Sed NEO gnomon et ΛΗ totum sunt ΓΕΖΒ quadratum, quod est ex ΓΒ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ipso ex ΓΔ quadrato æquale est ipsi ex ΓΒ quadrato. Si igitur recta, etc.

PROPOSITIO VI.

Si recta linea secetur bifariam, adjiciatur autem aliqua ipsi recta in directum; ipsum sub totâ cum adjunctâ, et sub adjunctâ contentum parallelogrammum cum ipso ex dimidiâ quadrato æquale est ipsi ex compositâ ex dimidiâ et adjunctâ tanquam ex unâ descripto quadrato.

Recta enim aliqua ΑΒ secetur bifariam ad Γ punctum, adjiciatur autem aliqua ipsi recta in



ἐπ' εὐθείας ἢ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

directum ΒΔ; dico ipsum sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ipso ex ΓΒ quadrato æquale esse ipsi ex ΓΔ quadrato.

de ΓΔ. Mais le gnomon ΝΞΟ et ΛΗ sont le quarré entier ΓΕΖΒ, qui est décrit avec ΓΒ; donc le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ, avec le quarré de ΓΔ, est égal au quarré de ΓΒ. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

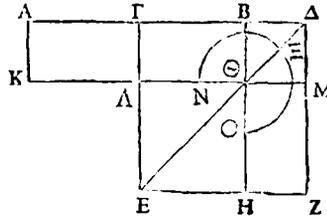
Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

Qu'une ligne droite ΑΒ soit coupée en deux parties égales au point Γ; qu'on lui ajoute directement une autre droite ΒΔ; je dis que le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ, avec le quarré de ΓΒ, est égal au quarré de ΓΔ.

96 LE DEUXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΔΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΒΗ· διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΚΜ· καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΔΜ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΚ.

Describatur enim ex ΓΔ quadratum ΓΕΖΔ, et jungatur ΔΕ, et per Β quidem punctum alterutri ipsarum ΓΕ, ΔΖ parallela ducatur ΒΗ; per Θ vero punctum alterutri ipsarum ΑΔ, ΕΖ parallela ducatur ΚΜ; et adhuc per Α alterutri ipsarum ΓΑ, ΔΜ parallela ducatur ΑΚ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΑ τῷ ΓΘ. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ ἄρα τῷ ΘΖ ἴσον ἐστὶ· καὶ τὸ ΑΑ ἄρα τῷ ΘΖ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκίεσθω τὸ ΓΜ· ἔλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ γινώμωνι ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἴση γάρ ἐστι· ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γινώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προσκίεσθω τὸ ΑΗ, ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ

Quoniam igitur æqualis est ΑΓ ipsi ΓΒ, æquale est et ΑΑ ipsi ΓΘ. Sed ΓΘ ipsi ΘΖ æquale est; et ΑΑ igitur ipsi ΘΖ est æquale. Commune addatur ΓΜ; totum igitur ΑΜ ipsi ΝΞΟ gnomoni est æquale. Sed ΑΜ est ipsum sub ΑΔ, ΔΒ, æqualis enim est ΔΜ ipsi ΔΒ; et igitur ΝΞΟ gnomon æqualis est ipsi sub ΑΔ, ΔΒ contento rectangulo. Commune addatur ΑΗ, quod est æquale ipsi ex ΓΒ quadrato; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ex ΓΒ quadrato æquale est ipsi ΝΞΟ gnomoni et ipsi ΑΗ. Sed ΝΞΟ guo-

Avec la droite ΓΔ décrivons le carré ΓΕΖΔ (46. 1); joignons ΔΕ; par le point Β conduisons ΒΗ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΕ, ΔΖ (31. 1); par le point Θ, conduisons ΚΜ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΕΖ, et enfin par le point Α conduisons ΑΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΑ, ΔΜ.

Puisque ΑΓ est égal à ΓΒ, le rectangle ΑΑ est égal au rectangle ΓΘ (36. 1). Mais le rectangle ΓΘ est égal au rectangle ΘΖ (43. 1); donc le rectangle ΑΑ est égal au rectangle ΘΖ; ajoutons le rectangle commun ΓΜ, le rectangle entier ΑΜ sera égal au gnomon ΝΞΟ. Mais ΑΜ est le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, car ΔΜ est égal à ΔΒ (4. 2); donc le gnomon ΝΞΟ est égal au rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ. Ajoutons le carré ΑΗ qui est égal au carré de ΓΒ, le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ avec le carré de ΓΒ sera égal au gnomon ΝΞΟ et au carré ΑΗ.

LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 97

ΞΟ γνόμωνι καὶ τῷ ΛΗ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνόμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΓΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἴξῃς.

mon et ΛΗ totum sunt ΓΕΖΔ quadratum, quod est ex ΓΑ; ergo sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ex ΓΒ quadrato æquale est ipsi ex ΓΑ quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

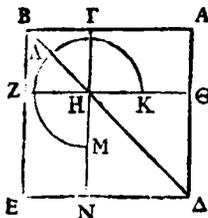
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἐνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφοτέρα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχόμενῳ ὀρθογώνῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἢ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ,

PROPOSITIO VII.

Si recta linea secetur utcumque, ipsa ex totâ et ex uno segmentorum, simul sumpta quadrata æqualia sunt et ipsi bis sub totâ et dicto segmento contento rectangulo, et ipsi ex reliquo segmento quadrato.

Recta enim aliqua ΑΒ secta sit utcumque in Γ puncto; dico ex ΑΒ, ΒΓ quadrata æqualia



ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενῳ ὀρθογώνῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ.

esse et ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ contento rectangulo et ipsi ex ΓΑ quadrato.

Mais le gnomon ΝΞΟ, et le carré ΛΗ sont le carré entier ΓΕΖΔ, qui est le carré de ΓΑ; donc le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ avec le carré de ΓΒ est égal au carré de ΓΑ. Donc, etc.

PROPOSITION VII.

Si une ligne droite est coupée d'une manière quelconque, le carré de la droite entière et le carré de l'un des segments, pris ensemble, sont égaux à deux fois le rectangle compris sous la droite entière et ledit segment, et au carré du segment restant.

Qu'une droite ΑΒ soit coupée d'une manière quelconque au point Γ; je dis que les carrés des droites ΑΒ, ΒΓ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΓ, et au carré de ΓΑ.

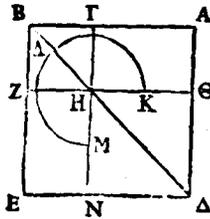
98 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ ὅλον τῷ ΓΕ ἴσον ἐστίν· τὰ ἄρα ΑΖ, ΓΕ διπλάσια ἐστὶ τοῦ ΑΖ. Ἀλλὰ τὰ ΑΖ, ΓΕ ὁ ΚΑΜ ἐστὶ γνόμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον· ὁ ΚΑΜ ἄρα γνόμων καὶ τὸ ΓΖ διπλάσια ἐστὶ τοῦ ΑΖ. Ἐστὶ δὲ τοῦ ΑΖ διπλάσιον καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ

Describatur enim ex AB quadratum ΑΔΕΒ; et construaturs figura.

Quoniam igitur æquale est ΑΗ ipsi ΗΕ, commune addatur ΓΖ; totum igitur ΑΖ toti ΓΕ æquale est; ergo ΑΖ, ΓΕ dupla sunt ipsius ΑΖ. Sed ΑΖ, ΓΕ ipse ΚΑΜ sunt gnomon et ΓΖ quadratum; ΚΑΜ igitur gnomon et ΓΖ dupla sunt ipsius ΑΖ. Est autem ipsius ΑΖ duplum et ipsum bis sub ΑΒ, ΒΓ, æqualis enim ΒΖ



ἢ ΒΖ τῷ ΒΓ· ὁ ἄρα ΚΑΜ γνόμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘΝ, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΚΑΜ γνόμων καὶ τὰ ΓΖ, ΘΝ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ ὁ ΚΑΜ γνόμων καὶ τὰ ΓΖ, ΘΝ τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ καὶ τὸ ΓΖ, ἃ ἐστὶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ

ipsi ΒΓ; ergo ΚΑΜ gnomon et ΓΖ quadratum æqualia sunt ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ. Commune addatur ΘΝ, quod est ex ΑΓ quadratum; ergo ΚΑΜ gnomon et ΓΖ, ΘΝ quadrata æqualia sunt et ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ contento rectangulo et ipsi ex ΑΓ quadrato. Sed ΚΑΜ gnomon et ΓΖ, ΘΝ quadrata totum sunt ΑΔΕΒ et ΓΖ, quæ sunt ex ΑΒ, ΒΓ quadrata; ergo ex ΑΒ, ΒΓ quadrata æqualia sunt ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ con-

Avec AB décrivons le carré ΑΔΕΒ (46. 1); et construisons la figure.

Puisque le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΗΕ (43. 1), ajoutons le carré commun ΓΖ; le rectangle entier ΑΖ sera égal au rectangle entier ΓΕ; donc les rectangles ΑΖ, ΓΕ sont doubles du rectangle ΑΖ. Mais les rectangles ΑΖ, ΓΕ sont le gnomon ΚΑΜ et le carré ΓΖ; donc le gnomon ΚΑΜ et le carré ΓΖ sont doubles du rectangle ΑΖ. Mais deux fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est double du rectangle ΑΖ, car ΒΖ est égal à ΒΓ (cor. 4. 2); donc le gnomon ΚΑΜ et le carré ΓΖ sont égaux à deux fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ. Ajoutons le carré commun ΘΝ, qui est le carré de ΑΓ; le gnomon ΚΑΜ et les carrés ΓΖ, ΘΝ seront égaux à deux fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, et au carré de ΑΓ. Mais le gnomon ΚΑΜ et les carrés ΓΖ, ΘΝ sont les carrés entiers ΑΔΕΒ, ΓΖ, qui sont les

## LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 99

τῶν AB, BΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ, τῶν δὲ ὑπὸ τῶν AB, BΓ περιεχομένων ὀρθογώνιων μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ τετραγώνου. Ἐάν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

tento rectangulo cum ex AΓ quadrato. Si igitur recta, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

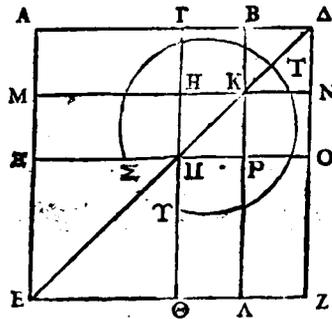
### PROPOSITIO VIII.

Ἐάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ ὡς ἔτυχι, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῶν τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημίτου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Si recta linea secetur utcunque, quater sub totâ et uno segmentorum contentum rectangulum cum ipso ex reliquo segmento quadrato æquale est ipsi ex totâ et dicto segmento tanquam ex unâ descripto quadrato.

Εὐθεῖα γάρ τις ἢ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχι κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν AB,

Recta enim aliqua AB secta sit utcunque in Γ puncto; dico et quater sub AB, BΓ conten-



BΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῆς AB, BΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

tum rectangulum cum ipso ex AΓ quadrato æquale esse ipsi ex ipsâ AB, BΓ tanquam ex unâ descripto quadrato.

quarrés des droites AB, BΓ; donc les quarrés des droites AB, BΓ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous AB, BΓ, et au quarré de AΓ. Donc, etc.

### PROPOSITION VIII.

Si une droite est coupée d'une manière quelconque, quatre fois le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, avec le quarré du segment restant, est égal au quarré décrit avec la droite entière et ledit segment, comme avec une seule droite.

Qu'une droite AB soit coupée d'une manière quelconque au point Γ; je dis que quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BΓ, avec le quarré de AΓ, est égal au quarré décrit avec les droites AB, BΓ, comme avec une seule droite.

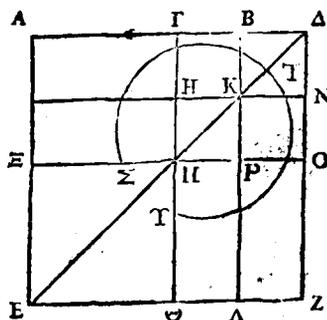
100 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εκτεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῆ AB εὐθεία ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω ἴση τῆ ΓΒ ἢ ΒΔ<sup>2</sup>, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον τὸ ΑΕΖΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῆ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ τῆ ΚΝ, καὶ ἡ ΗΚ ἄρα<sup>3</sup> τῆ ΚΝ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΠΡ τῆ ΡΟ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΒ τῆ ΒΔ, ἡ δὲ ΗΚ τῆ ΚΝ· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ<sup>5</sup> τὸ μὲν<sup>6</sup> ΓΚ

Producatur enim in directum ipsi AB recta ΒΔ, et ponatur æqualis ipsi ΓΒ ipsa ΒΔ, et describatur ex ΑΔ quadratum ΑΕΖΔ, et construatur dupla figura.

Quoniam igitur æqualis est ΒΓ ipsi ΒΔ, sed ΓΒ quidem ipsi ΗΚ est æqualis, et ΒΔ ipsi ΚΝ; et ΗΚ igitur ipsi ΚΝ est æqualis. Propter eadem utique et ΠΡ ipsi ΡΟ est æqualis. Et quoniam æqualis est ΓΒ quidem ipsi ΒΔ, et ΗΚ ipsi ΚΝ;



τῆ ΒΝ, τὸ δὲ ΗΡ τῆ ΚΟ. Ἀλλὰ τὸ ΓΚ τῆ ΠΝ ἐστὶν ἴσον<sup>7</sup>, παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓΟ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΒΝ ἄρα τῆ ΗΡ ἴσον ἐστὶν<sup>8</sup>. τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΠΝ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ· τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΓΚ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῆ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῆ ΒΚ, τοῦτ' ἐστὶ τῆ ΓΗ ἐστὶν<sup>9</sup> ἴση, ἡ δὲ ΓΒ τῆ ΗΚ, τοῦτ' ἐστὶ τῆ ΗΠ ἐστὶν

æquale igitur est ΓΚ quidem ipsi ΒΝ, et ΗΡ ipsi ΚΟ. Sed ΓΚ ipsi ΠΝ est æquale, complementa enim sunt ipsius ΓΟ parallelogrammi; et ΒΝ igitur ipsi ΗΡ æquale est; quatuor igitur ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΠΝ æqualia inter se sunt; quatuor igitur quadrupla sunt ipsius ΓΚ. Rursus, quoniam æqualis est ΓΒ ipsi ΒΔ, sed ΒΔ quidem ipsi ΒΚ, hoc est, ipsi ΓΗ est æqualis, ΓΒ vero ipsi ΗΚ, hoc est,

Conduisons la droite ΒΔ dans la direction de ΑΒ; faisons ΒΔ égal à ΒΓ; décrivons avec ΑΔ le quarré ΑΕΖΔ (46. 2), et construisons une double figure.

Puisque ΒΓ est égal à ΒΔ, que ΓΒ est égal à ΗΚ (34. 1), et ΒΔ égal à ΚΝ, la droite ΗΚ est égale à la droite ΚΝ. La droite ΠΡ est égale à la droite ΡΟ, par la même raison. Et puisque ΒΓ est égal à ΒΔ, et ΗΚ égal à ΚΝ, le rectangle ΓΚ est égal au rectangle ΒΝ, et le rectangle ΗΡ égal au rectangle ΚΟ (36. 1). Mais le rectangle ΓΚ est égal au rectangle ΠΝ (43. 1), car ils sont les compléments du parallélogramme ΓΟ; donc le rectangle ΒΝ est égal au rectangle ΗΡ; donc les quatre rectangles ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΠΝ sont égaux entr'eux; donc ces quatre rectangles sont le quadruple du rectangle ΓΚ. De plus, puisque ΓΒ est égal à ΒΔ, et ΒΔ égal à ΒΚ, c'est-à-dire à ΓΗ (34. 1), et que ΓΒ est égal à ΗΚ, c'est-à-dire à ΗΠ, la

ἴση<sup>10</sup>. καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῆ ΗΠ ἴση ἔσθιν<sup>11</sup>. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ τῆ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῆ ΡΟ· ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν<sup>12</sup> ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΑ τῷ ΡΖ. Ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΑ ἐστὶν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜΑ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον ἐστὶν· τὰ τεσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΑ, ΡΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν· τὰ τεσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ τετραπλάσια ἐστὶν<sup>13</sup>. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τεσσαρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ τοῦ ΓΚ τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὀκτὼ ἃ περιέχει τὸν ΣΤΥ γνῶμονα τετραπλάσια ἐστὶ τοῦ ΑΚ<sup>14</sup>. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἐστὶν, ἴση γὰρ<sup>15</sup> ἡ ΚΒ τῆ ΒΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ΑΚ. Ἐδείχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετραπλάσιος καὶ ὁ ΣΤΥ γνῶμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνῶμονι. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΘ, ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ<sup>16</sup> τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνῶμονι καὶ τῷ ΕΘ. Ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ γνῶμων καὶ τὸ ΕΘ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ,

ipsi ΗΠ est æqualis; et ΓΗ igitur ipsi ΗΠ æqualis est. Et quoniam æqualis est ΓΗ quidem ipsi ΗΠ, et ΗΡ ipsi ΡΟ; æquale est et ΑΗ quidem ipsi ΜΠ, et ΠΑ ipsi ΡΖ. Sed ΜΠ ipsi ΠΑ est æquale, complementa enim sunt ipsius ΜΑ parallelogrammi; et ΑΗ igitur ipsi ΡΖ æquale est; quatuor igitur ΑΗ, ΜΠ, ΠΑ, ΡΖ æqualia inter se sunt; quatuor igitur ipsius ΑΗ quadrupla sunt. Ostensa sunt autem et quatuor ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ ipsius ΓΚ quadrupla; ergo octo quæ continet ΣΤΥ gnomonon quadrupla sunt ipsius ΑΚ. Et quoniam ΑΚ ipsum sub ΑΒ, ΒΔ est, æqualis enim est ΚΒ ipsi ΒΔ; ergo ipsum quater sub ΑΒ, ΒΔ quadruplum est ipsius ΑΚ. Ostensus est autem ipsius ΑΚ quadruplus et ΣΤΥ gnomon. Ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ æquale est ipsi ΣΤΥ gnomoni. Commune addatur ΕΘ, quod æquale est ipsi ex ΑΓ quadrato; ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ contentum rectangulum cum ex ΑΓ quadrato æquale est ipsi ΣΤΥ gnomoni et ipsi ΕΘ. Sed ΣΤΥ gnomon et ΕΘ totum sunt ΑΕΖΔ

droite ΓΗ est égale à la droite ΗΠ. Et puisque ΓΗ est égal à ΗΠ, et que ΠΡ est égal à ΡΟ, le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΜΠ, et le rectangle ΠΑ égal au rectangle ΡΖ (36. 1). Mais le rectangle ΜΠ est égal au rectangle ΠΑ (43. 1), car ils sont les compléments du parallélogramme ΜΑ; donc le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΡΖ; donc les quatre rectangles ΑΗ, ΜΠ, ΠΑ, ΡΖ sont égaux entr'eux; donc ces quatre rectangles sont quadruples du rectangle ΑΗ. Mais on a démontré que les quatre carrés ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ sont quadruples du carré ΓΚ; donc les huit figurés qui composent le gnomon ΣΤΥ sont quadruples du rectangle ΑΚ. Mais le rectangle ΑΚ est sous ΑΒ, ΒΔ; car ΚΒ est égal à ΒΔ (cor. 4. 2); donc quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ est quadruple du rectangle ΑΚ. Mais on a démontré que le gnomon ΣΤΥ est quadruple du rectangle ΑΚ; donc quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ est égal au gnomon ΣΤΥ. Ajoutons le carré commun ΕΘ, qui est égal au carré de ΑΓ (cor. 4. 2); quatre fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΔ, avec le carré de ΑΓ sera égal au gnomon ΣΤΥ et au carré ΕΘ. Mais le gnomon ΣΤΥ et le carré ΕΘ sont le carré entier ΑΕΖΔ, qui est décrit

ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς<sup>17</sup> ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς<sup>18</sup> ΑΔ τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ<sup>19</sup>. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς<sup>20</sup> ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τοῦτ' ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφάντι τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ἕλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσια ἐστὶ τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τεμῶν τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λίγω ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσια ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρῃ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπι-

quadratum, quod est ex ΑΔ; ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ cum ipso ex ΑΓ æquale est ipsi ex ΑΒ quadrato. Æqualis autem est ΒΔ ipsi ΒΓ; ergo quater sub ΑΒ, ΒΓ contentum rectangulum cum ipso ex ΑΓ quadrato æquale est ipsi ex ΑΔ quadrato, hoc est, ex ipsâ ΑΒ et ΒΓ (tanquam ex unâ descripto quadrato. Si igitur recta, etc.

## PROPOSITIO IX.

Si recta linea secetur in æqualia et inæqualia, ex inæqualibus totius segmentis quadrata dupla sunt et ipsius ex dimidiâ et ipsius ex ipsâ inter sectiones quadrati.

Recta enim aliqua ΑΒ secta sit in æqualia quidem ad Γ, in inæqualia vero ad Δ; dico ex ΑΔ, ΔΒ quadrata dupla esse ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum.

Ducatur enim a Γ ipsi ΑΒ ad rectos ΓΕ, et ponatur æqualis utrique ipsarum ΑΓ, ΓΒ, et jun-

avec ΑΔ; donc quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ avec le carré de ΒΓ est égal au carré de ΑΔ. Mais ΒΔ est égal à ΒΓ; donc quatre fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΓ avec le carré de ΑΓ est égal au carré de ΑΔ, c'est-à-dire au carré décrit avec ΑΒ et ΒΓ comme avec une seule droite. Donc, etc.

## PROPOSITION IX.

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, les carrés des segments inégaux de la droite entière sont doubles du carré de la moitié de cette droite et du carré de la droite placée entre les sections.

Que la droite ΑΒ soit coupée en parties égales en Γ, et en parties inégales en Δ; je dis que les carrés des droites ΑΔ, ΔΒ sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ.

Du point Γ conduisons ΓΕ perpendiculaire à ΑΒ (II. 1); faisons la droite ΕΓ égale à l'une ou à l'autre des droites ΑΓ, ΓΒ, et joignons ΕΑ, ΕΒ; par le point

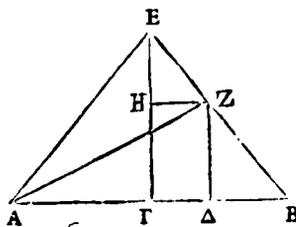
LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 103

εζεύχθωσαν αὐ αἰ ΑΕ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῆ ΕΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῆ ΑΒ παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῆ ὑπὸ ΑΕΓ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἰ ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ μιᾶ ὀρθῆ ἴσαι εἰσὶν, καὶ εἰσὶν ἴσαι<sup>2</sup> ἡμίσεια ἄρα ἑρθῆς ἴστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΑ, ΓΑΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ

gantur ΑΕ, ΕΒ, et per Δ quidem ipsi ΕΓ parallela ducatur ΔΖ, per Ζ vero ipsi ΑΒ parallela ducatur ΖΗ, et jungatur ΑΖ.

Et quoniam æqualis est ΑΓ ipsi ΓΕ, æqualis est et ΕΑΓ angulus ipsi ΑΕΓ. Et quoniam rectus est ad Γ; reliqui igitur ΕΑΓ, ΑΕΓ uni recto æquales sunt, et sunt æquales; dimidius igitur recti est uterque ipsorum ΓΕΑ, ΓΑΕ. Propter eadem utique et



δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ὀρθή ἐστὶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ, ἴση γάρ ἐστι τῆ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστὶν<sup>3</sup> ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῆ ὑπὸ ΕΖΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ πλευρᾶ τῆ ἡ ΖΗ ἐστὶν ἴση. Πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ, ἴση

uterque ipsorum ΓΕΒ, ΕΒΓ dimidius est recti; totus igitur ΑΕΒ rectus est. Et quoniam ΗΕΖ dimidius est recti, rectus autem ΕΗΖ, æqualis enim est interiori et opposito ΕΓΒ; reliquus igitur ΕΖΗ dimidius est recti; æqualis igitur est ΗΕΖ angulus ipsi ΕΖΗ; quare et latus ΕΗ lateri ΗΖ est æquale. Rursus quoniam ad Β angulus dimidius est recti, rectus autem ΖΑΒ, æqualis enim est rursus interiori et opposito

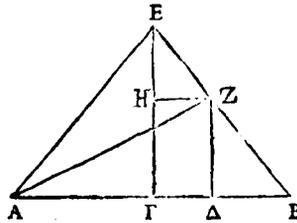
Δ conduisons ΔΖ parallèle à ΕΓ (31. 1), et par le point Ζ conduisons ΖΗ parallèle à ΑΒ, et joignons ΑΖ.

Puisque ΑΓ est égal à ΓΕ, l'angle ΕΑΓ est égal à l'angle ΑΕΓ (5. 1). Et puisque l'angle en Γ est droit, les angles restants ΕΑΓ, ΑΕΓ sont égaux à un droit (32. 1); mais ils sont égaux; donc chacun des angles ΓΕΑ, ΓΑΕ est la moitié d'un droit. Par la même raison, chacun des angles ΓΕΒ, ΕΒΓ est la moitié d'un droit; donc l'angle entier ΑΕΒ est droit. Et puisque l'angle ΗΕΖ est la moitié d'un droit, et que l'angle ΕΗΖ est droit, car il est égal à l'angle intérieur et opposé ΕΓΒ (29. 1), l'angle ΕΖΗ est la moitié d'un droit; donc l'angle ΗΕΖ est égal à l'angle ΕΖΗ; donc le côté ΕΗ est égal au côté ΗΖ (6. 1). De plus, puisque l'angle en Β est la moitié d'un droit, et que l'angle ΖΑΒ est droit, car il est égal à l'angle intérieur

104 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

γάρ ἐστὶ πάλιν<sup>5</sup> τῆ ἰσότητος καὶ ἀπεναντίον τῆ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΒ ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῆ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΔ πλευρᾷ τῆ ΔΒ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλασία ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον, ὀρθὰ γὰρ ἡ

ΕΓΒ; reliquus igitur ΔΖΒ dimidius est recti; æqualis igitur ad Β angulus ipsi ΔΖΒ; quare et latus ΖΔ lateri ΔΒ est æquale. Et quoniam æqualis est ΑΓ ipsi ΓΕ, æquale est et ipsum ex ΑΓ ipsi ex ΓΕ; ergo ex ΑΓ, ΓΕ quadrata dupla sunt ipsius ex ΑΓ. Ipsi autem ex ΑΓ, ΓΕ æquale est ex ΑΕ quadratum, rectus enim est ΑΓΕ angulus; ipsum igitur ex ΑΕ duplum est ipsius ex ΑΓ. Rursus quoniam æqualis est ΕΗ



ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΕ διπλασίον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῆ ΗΖ, ἴσον ἐστὶ<sup>10</sup> καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλασία ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον<sup>11</sup>. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλασίον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ<sup>12</sup>. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλασίον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς

ipsi ΗΖ, æquale est et ipsum ex ΕΗ ipsi ex ΗΖ; ergo ex ΕΗ, ΗΖ quadrata dupla sunt ipsius ex ΗΖ quadrati. Ipsi autem ex ΕΗ, ΗΖ quadratis æquale est ipsum ex ΕΖ; ergo ex ΕΖ quadratum duplum est ipsius ex ΗΖ. Sed æquale ipsum est ΗΖ ipsi ex ΓΔ; ipsum igitur ex ΕΖ duplum est ipsius ex ΓΔ. Est autem ipsum ex ΕΑ duplum ipsius ex ΑΓ; ergo ex ΑΕ, ΕΖ quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum; ipsis vero ex ΑΕ, ΕΖ æquale est ex ΕΖ quadratum,

et opposé ΕΓΒ (29. 1), l'angle restant ΔΖΒ est la moitié d'un droit; donc l'angle en Β est égal à l'angle ΔΖΒ; donc le côté ΖΔ est égal au côté ΔΒ (6. 1). Et puisque ΑΓ est égal à ΓΕ, le carré de ΑΓ est égal au carré de ΓΕ; donc les carrés des droites ΑΓ, ΓΕ sont doubles du carré de ΑΓ. Mais le carré de ΕΑ est égal aux carrés des droites ΑΓ, ΓΕ (47, 1), car l'angle ΑΓΕ est droit; donc le carré de ΑΕ est double du carré de ΑΓ. De plus, puisque ΕΗ est égal à ΗΖ, le carré de ΕΗ est égal au carré de ΗΖ; donc les carrés des droites ΕΗ, ΗΖ sont doubles du carré de ΗΖ. Mais le carré de ΕΖ est égal aux carrés des droites ΕΗ, ΗΖ (47. 1); donc le carré de ΕΖ est double du carré de ΗΖ. Mais ΗΖ est égal à ΓΔ (34. 1); donc le carré de ΕΖ est double du carré de ΗΖ. Mais le carré de ΕΑ est

ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσια ἴσιν τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἴσιν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, ὀρθὴ γὰρ ἴσιν<sup>13</sup> ἢ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἴσιν τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ, ὀρθὴ γὰρ ἢ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσια ἴσιν τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἴση δὲ ἢ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσια ἴσιν τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Εὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ἄλλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφοτέρα τετράγωνα, διπλάσια ἴσιν τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκεκλιμένης ἐκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου<sup>1</sup>.

double du carré de ΑΓ; donc les carrés des droites ΑΕ, ΕΖ sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais le carré de ΑΖ est égal aux carrés des droites ΑΕ, ΕΖ (47. 1), car l'angle ΑΕΖ est droit; donc le carré ΑΖ est double des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais les carrés des droites ΑΔ, ΔΖ sont égaux au carré de ΑΖ (47. 1), car l'angle en Δ est droit; donc les carrés des droites ΑΔ, ΔΖ sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais ΔΖ est égal à ΔΒ; donc les carrés des droites ΑΔ, ΔΒ sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION X.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le carré de la droite entière avec la droite ajoutée, et le carré de la droite ajoutée, étant pris ensemble, sont doubles du carré de la moitié de la droite entière, et du carré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

rectus enim est ΑΕΖ angulus; ergo ΑΖ quadratum duplum est ipsorum ex ΑΓ, ΓΔ. Ipsi vero ex ΑΖ æqualia sunt ipsa ex ΑΔ, ΔΖ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsa igitur ex ΑΔ, ΔΖ dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Æqualis autem ΔΖ ipsi ΔΒ; ergo ex ΑΔ, ΔΒ quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Si igitur recta, etc.

PROPOSITIO X.

Si recta linea secetur bifariam, adjiciatur autem aliqua ipsi recta in directum; ipsa ex tota cum adjecta et ex adjecta, simul sumpta quadrata, dupla sunt et ipsius ex dimidia et ipsius ex composita ex dimidia et adjecta tanquam ex una descripti quadrati.

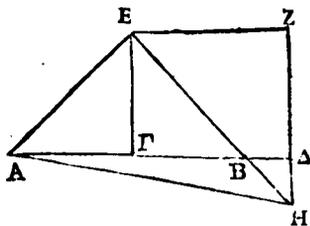
106 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ  $AB$  τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ  $\Gamma$ , προσκείσθω δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ  $BA$ . λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν  $AA$ ,  $\Delta B$  τετράγωνα διπλάσια ἴσται τῶν ἀπὸ τῶν  $A\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  τετραγώνων.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ  $\Gamma$  σημείου τῇ  $AB$  πρὸς ὀρθὰς ἡ  $GE$ , καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν  $A\Gamma$ ,  $\Gamma B$ , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ  $EA$ ,  $EB$ · καὶ διὰ μὲν τοῦ  $E$  τῇ  $\Delta\Delta$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $EZ$ · διὰ δὲ τοῦ  $\Delta$  τῇ

Recta enim aliqua  $AB$  secta sit bifariam in  $\Gamma$ , adjiciatur autem aliqua ei recta in directum  $BA$ ; dico ex  $AA$ ,  $\Delta B$  quadrata dupla esse ex  $A\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  quadratorum.

Ducatur enim a  $\Gamma$  puncto ipsi  $AB$  ad rectos  $GE$ , et ponatur æqualis utrique ipsorum  $A\Gamma$ ,  $\Gamma B$ , et jungantur  $EA$ ,  $EB$ ; et per  $E$  quidem ipsi  $\Delta\Delta$  parallela ducatur  $EZ$ ; per  $\Delta$  vero ipsi  $GE$



$GE$  πάλιν<sup>2</sup> παράλληλος ἤχθω ἡ  $Z\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς  $EG$ ,  $Z\Delta$  εὐθεῖά τις ἐπίπεσον ἡ  $EZ$ , αἱ ὑπὸ  $GEZ$ ,  $EZ\Delta$  ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ  $ZEB$ ,  $EZ\Delta$  δύο ὀρθῶν ἑλασσόνες εἰσὶν· αἱ δὲ ἀπὸ ἑλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκκαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα  $EB$ ,  $Z\Delta$  ἐκκαλλόμεναι ἐπὶ τὰ  $B\Delta$  μέρη συμπεσῶνται. Εκβελήσθωσαν, καὶ συμπεπίτωσαν κατὰ τὸ  $H$ , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  $AH$ .

rursus parallela ducatur  $Z\Delta$ . Et quoniam in parallelas rectas  $EG$ ,  $Z\Delta$  recta aliqua incidit  $EZ$ , anguli  $GEZ$ ,  $EZA$  duobus rectis æquales sunt; ergo  $ZEB$ ,  $\acute{E}ZA$  duobus rectis minores sunt. Rectæ autem a minoribus quam duobus rectis productæ conveniunt; ergo  $EB$ ,  $Z\Delta$  productæ ad partes  $B\Delta$  convenient. Producantur, et conveniant in  $H$ , et jungatur  $AH$ .

Qu'une droite  $AB$  soit coupée en deux parties égales en  $\Gamma$ , et qu'on lui ajoute directement une droite  $BA$ ; je dis que les carrés des droites  $AA$ ,  $\Delta B$  sont doubles des carrés des droites  $A\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$ .

Du point  $\Gamma$  conduisons  $GE$  perpendiculaire à  $AB$  (11. 1); faisons cette droite égale à l'une ou à l'autre des droites  $A\Gamma$ ,  $\Gamma B$ ; joignons  $EA$ ,  $EB$ ; par le point  $E$  conduisons  $EZ$  parallèle à  $AA$ ; et par le point  $\Delta$  conduisons  $Z\Delta$  parallèle à  $GE$  (31. 1). Puisque la droite  $EZ$  tombe sur les parallèles  $EG$ ,  $Z\Delta$ , les angles  $GEZ$ ,  $EZA$  sont égaux à deux droits (29. 1); donc les angles  $ZEB$ ,  $EZA$  sont plus petits que deux droits. Mais deux droites prolongées se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits (dém. 5); donc les droites  $EB$ ,  $Z\Delta$  prolongées se rencontreront du côté  $B\Delta$ . Prolongeons ces droites; qu'elles se rencontrent au point  $H$ ; et joignons  $AH$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΑΓ, καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστίν<sup>3</sup> ἑκατέρω τῶν ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρω τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ. Καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΕΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθή, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, ἐναλλάξ γάρ. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΗΒ<sup>5</sup> τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρὰ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ζ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΗΖ πλευρὰ τῇ ΖΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς<sup>6</sup> ΕΓ τετραγώνου τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ τετράγωνα διπλασιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον διπλασίον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ, ἴσον ἐστὶ

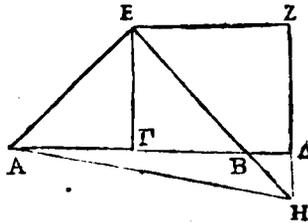
Et quoniam æqualis est ΑΓ ipsi ΓΕ, æqualis est et angulus ΑΕΓ ipsi ΕΑΓ; atque rectus est ad Γ; dimidius igitur recti est uterque ipsorum ΕΑΓ, ΑΕΓ. Propter eadem utique et uterque ipsorum ΓΕΒ, ΕΒΓ dimidius est recti; rectus igitur est ΑΕΒ. Et quoniam dimidius recti est ΕΒΓ, dimidius igitur recti est et ΔΒΗ. Est autem et ΒΔΗ rectus; æqualis enim est ipsi ΔΓΕ alterno. Reliquus igitur ΔΗΕ ipsi ΔΒΗ est æqualis; quare et latus ΒΔ lateri ΔΗ est æquale. Rursus, quoniam ΕΗΖ dimidius est recti, rectus autem est qui ad Ζ, æqualis enim est opposito qui ad Γ; reliquus igitur ΖΕΗ dimidius est recti; æqualis igitur ΕΗΖ angulus ipsi ΖΕΗ; quare et latus ΗΖ lateri ΖΕ est æquale. Et quoniam æqualis est ΕΓ ipsi ΓΑ, æquale est et ex ΕΓ quadratum ipsi ex ΓΑ quadrato. Ergo ex ΕΓ, ΓΑ quadrata dupla sunt ex ΓΑ quadrati. Ipsis autem ex ΕΓ, ΓΑ æquale est ipsum ex ΑΕ; ergo ex ΕΑ quadratum duplum est ipsius ex ΑΓ quadrato. Rursus, quoniam æqualis est ΖΗ ipsi ΖΕ, æquale est et ipsum ex ΗΖ ipsi ex ΖΕ. Ipsa igitur ex ΗΖ, ΖΕ dupla sunt ipsius ex ΕΖ. Ipsis autem ex ΗΖ, ΖΕ æquale est ipsum ex ΕΗ. Ipsum

Puisque ΑΓ est égal à ΓΕ, l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle ΕΑΓ (5. 1.); mais l'angle en Γ est droit; donc chacun des angles ΕΑΓ, ΑΕΓ est la moitié d'un droit (32. 1). Par la même raison, chacun des angles ΓΕΒ, ΕΒΓ est la moitié d'un droit; donc l'angle ΑΕΒ est droit. Et puisque l'angle ΕΒΓ est la moitié d'un angle droit, l'angle ΔΒΗ est la moitié d'un droit (15. 1). Mais l'angle ΒΔΗ est droit (29. 1), car il est égal à l'angle alterne ΔΓΕ; donc l'angle restant ΔΗΒ est égal à l'angle ΔΒΗ; donc le côté ΒΔ est égal au côté ΔΗ (6. 1). De plus, puisque l'angle ΕΗΖ est la moitié d'un droit, et que l'angle en Ζ est droit, car il est égal à l'angle opposé en Γ (34. 1), l'angle restant ΖΕΗ est la moitié d'un droit; donc l'angle ΕΗΖ est égal à l'angle ΖΕΗ; donc le côté ΗΖ est égal au côté ΖΕ (6. 1). Et puisque ΕΓ est égal à ΓΑ, le carré de ΕΓ est égal au carré de ΓΑ; donc les carrés des droites ΕΓ, ΓΑ sont doubles du carré de ΓΑ. Mais le carré de ΑΕ est égal aux carrés des droites ΕΓ, ΓΑ (47. 1); donc le carré de ΕΑ est double du carré de ΑΓ. De

108 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HZ ἰσὸν τῷ ἀπὸ τῆς ZE<sup>8</sup>. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν HZ, ZE διπλάσια ἴσιν τοῦ ἀπὸ τῆς EZ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν HZ, ZE ἴσον ἴσιν τὸ ἀπὸ τῆς EH<sup>9</sup>. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH διπλάσιόν ἴσιν τοῦ ἀπὸ τῆς EZ. Ἴση δὲ EZ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH τετραγώνων διπλάσιόν ἴσιν τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Εδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EA διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AE, EH τετράγωνα διπλάσια ἴσιν τῶν

igitur ex EH duplum est ipsius ex EZ. Æqualis autem EZ ipsi ΓΔ; ergo ex EH quadratum duplum est ipsius ex ΓΔ. Demonstratum est autem et ipsum ex EA duplum ipsius ΑΓ; ergo ex AE, EH quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Ipsis autem ex AE, EH quadratis æquale est ex AH quadratum; ipsum igitur ex AH duplum est ipsorum ΑΓ, ΓΔ. Ipsi autem ex AH æqualia sunt ipsa ex ΑΔ, ΔH; ipsa



ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν AE, EH τετραγώνοις ἴσον ἴσιν τὸ ἀπὸ τῆς AH τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AH διπλάσιόν ἴσιν τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. Τῇ δὲ ἀπὸ τῆς AH ἴσα ἴσιν τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔH· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔH<sup>10</sup> διπλάσια ἴσιν τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ<sup>11</sup>. Ἴση δὲ ἡ ΔH τῇ ΔB· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔB τετράγωνα διπλάσια ἴσιν τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Εὰν ἀρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

igitur ex ΑΔ, ΔH dupla sunt ipsorum ex ΑΓ, ΓΔ. Æqualis autem est ΔH ipsi ΔB; ergo ex ΑΔ, ΔB quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Si igitur recta, etc.

plus, puisque ZH est égal à ZE, le carré de HZ est égal au carré de ZE; donc les carrés des droites HZ, ZE sont doubles du carré de EZ. Mais le carré de EH est égal aux carrés des droites HZ, ZE (47. 1); donc le carré de EH est double du carré de EZ. Mais EZ est égal à ΓΔ; donc le carré de EH est double du carré de ΓΔ. Mais on a démontré que le carré de EA est double du carré de ΑΓ; donc les carrés des droites AE, EH sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais le carré de AH est égal aux carrés des droites AE, EH (47. 1); donc le carré AH est double des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais les carrés des droites ΑΔ, ΔH sont égaux au carré de AH (47. 1); donc les carrés des droites ΑΔ, ΔH sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ; mais la droite ΔH est égale à la droite ΔB; donc les carrés des droites ΑΔ, ΔB sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

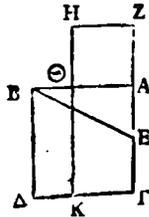
PROPOSITIO XI.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τιμῶν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ἅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Datam rectam secare, ita ut sub totâ et altero segmentorum contentum rectangulum æquale sit ipsi ex reliquo segmento quadrato.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ . διὲ δὴ τὴν  $AB$  τιμῶν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ἅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Sit data recta  $AB$ ; oportet igitur ipsam  $AB$  secare, ita ut sub totâ et altero segmentorum contentum rectangulum æquale sit ipsi ex reliquo segmento quadrato.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετράγωνον τὸ  $AB\Gamma\Delta$ , καὶ τιμηθῶ ἡ  $A\Gamma$  δίχα κατὰ τὸ  $E$  σημεῖον, καὶ ὑπέξεύχθω ἡ  $BE$ , καὶ διήχθω ἡ  $\Gamma A$  ἐπὶ τὸ  $Z$ , καὶ κείσθω τῇ  $BE$  ἴση ἡ  $EZ$ , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς  $AZ$  τετράγωνον τὸ  $Z\Theta$ , καὶ

Describatur enim ex  $AB$  quadratum  $AB\Gamma\Delta$ , et secetur  $A\Gamma$  bifariam in  $E$  puncto, et jungatur  $BE$ , et producatür  $\Gamma A$  in  $Z$ , et ponatur ipsi  $BE$  æqualis  $EZ$ , et describatur ex  $AZ$  quadratum  $Z\Theta$ , et producatür  $H\Theta$  ad  $K$ ; dico  $AB$  sectam

PROPOSITION XI.

Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.

Soit  $AB$  la droite donnée; il faut couper  $AB$  de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.

Avec la droite  $AB$  décrivons le carré  $AB\Gamma\Delta$  (46. 1); coupons  $A\Gamma$  en deux parties égales au point  $E$  (10. 1); joignons  $BE$ , prolongeons  $\Gamma A$  vers  $Z$ ; faisons  $EZ$  égal à  $BE$  (3. 1); décrivons avec  $AZ$  le carré  $Z\Theta$ ; et prolongeons  $H\Theta$  vers  $K$ ; je dis que la

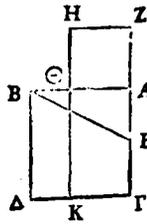
110 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

διήχθη ἡ ΗΘ ἐπὶ τὸ Κ· λέγεται ὅτι ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιῶν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΑΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ

esse in Θ, ita ut sub ΑΒ, ΒΘ contentum rectangulum æquale faciat ipsi ex ΑΘ quadrato.

Quoniam enim recta ΑΓ secatur bifariam in Ε, adjicitur autem ei ipsa ΑΖ; ergo sub ΓΖ, ΖΑ contentum rectangulum cum ex ΑΕ quadrato æquale est ipsi ex ΕΖ quadrato. Æqua-



τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ τετραγώνῳ<sup>2</sup>. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς<sup>3</sup> ΕΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ. Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον<sup>4</sup> ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ

lis autem ΕΖ ipsi ΕΒ; ergo sub ΓΖ, ΖΑ contentum rectangulum cum ex ΑΕ quadrato æquale est ipsi ex ΕΒ quadrato. Sed ipsi ex ΕΒ æqualia sunt ipsa ex ΒΑ, ΑΕ, rectus enim est ad Α angulus; ipsum igitur sub ΓΖ, ΖΑ cum ipso ex ΑΕ æquale est ipsis ex ΒΑ, ΑΕ. Commune auferatur ipsum ex ΑΕ; reliquum igitur sub ΓΖ, ΖΑ contentum rectangulum æquale est ipsi ex ΑΒ quadrato. Et est ipsum quidem sub ΓΖ, ΖΑ ipsum ΖΚ, æqualis enim est ΑΖ ipsi ΖΗ; ipsum

droite AB est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous AB, ΒΘ est égal au carré de ΑΘ.

Puisque la droite ΑΓ est coupée en deux parties égales en Ε, que ΑΖ lui est ajoutée; le rectangle compris sous les droites ΓΖ, ΖΑ avec le carré de ΑΕ est égal au carré de ΕΖ (6. 2). Mais ΕΖ est égal à ΕΒ; donc le rectangle compris sous ΓΖ, ΖΑ avec le carré de ΑΕ, est égal au carré de ΕΒ. Mais les carrés des droites ΒΑ, ΑΕ sont égaux au carré de ΕΒ (47. 1), car l'angle en Α est droit; donc le rectangle sous ΓΖ, ΖΑ avec le carré de ΑΕ est égal aux carrés des droites ΒΑ, ΑΕ. Retranchons le carré commun de ΑΕ; le rectangle restant compris sous ΓΖ, ΖΑ sera égal au carré de ΑΒ. Mais le rectangle sous les droites ΓΖ, ΖΑ est le rectangle

τὸ ΖΚ, ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔ· τὸ ἄρα ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔ. Κοινὸν ἀφ-  
 ἡρήσθω τὸ ΑΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ τῷ ΘΔ ἴσον  
 ἐστὶ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ δὲ  
 ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ<sup>5</sup>· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ  
 περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς<sup>6</sup>  
 ΘΑ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ  
 τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον  
 ὀρθογώνιον ἴσον ποιῆν τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ.  
 Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς  
 τῆν ἀμβλείαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τε-  
 τραγώνου μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τῆν ἀμβλείαν  
 γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ  
 περιεχομένῳ δὲ ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τῆν ἀμ-  
 βλείαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ καθέτος  
 πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς  
 καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

ZK, parce que AZ est égal à ZH, et le carré de AB est le carré AD; donc  
 le rectangle ZK est égal au carré AD. Retranchons le rectangle commun AK;  
 le carré restant ZΘ sera égal au rectangle ΘΔ. Mais ZΘ est le carré de ΑΘ, et ΘΔ  
 est le rectangle sous ΑΒ, ΒΘ; donc le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΘ est égal au  
 carré de ΘΑ.

Donc la droite ΑΒ est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous  
 ΑΒ, ΒΘ est égal au carré de ΘΑ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XII.

Dans les triangles obtusangles, le carré du côté qui soutient l'angle obtus  
 est plus grand que les carrés des côtés qui comprennent l'angle obtus, de deux  
 fois le rectangle compris sous celui des côtés de l'angle obtus sur le prolongement  
 duquel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise extérieurement de la  
 perpendiculaire à l'angle obtus.

vero ex ΑΒ ipsum ΑΔ; ipsum igitur ΖΚ æquale  
 est ipsi ΑΔ. Commune auferatur ΑΚ; reliquum  
 igitur ΖΘ ipsi ΘΔ æquale est. Et est quidem ΖΘ  
 ipsum ex ΑΘ; ipsum vero ΘΔ ipsum sub ΑΒ,  
 ΒΘ; ipsum igitur sub ΑΒ, ΒΘ contentum rec-  
 tangelum æquale est ipsi ex ΘΑ quadrato.

Ergo data recta ΑΒ secta est in Θ, ita ut ipsum  
 sub ΑΒ, ΒΘ contentum rectangelum æquale fa-  
 ciat ipsi ex ΘΑ quadrato. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII.

In obtusangulis triangulis quadratum ex la-  
 tere obtusum angulum subtendente majus est  
 quam quadrata ex latibus obtusum angulum  
 continentibus, contento bis sub uno ipsorum  
 circa obtusum angulum in quod productum  
 perpendicularis cadit, et assumptâ extra a per-  
 pendiculari ad obtusum angulum.

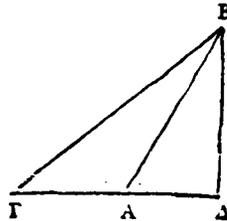
112 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω ἄμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἄμβλυγώνιον ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν<sup>2</sup>, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἢ ΒΔ· λήθω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνον μείζον ἔστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων<sup>1</sup>, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεία ἡ ΓΔ τέτμηται ὡς ἴσχυι κατὰ τὸ Α σημείον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὲ ὑπὸ

Sit obtusangulum triangulum ΑΒΓ obtusum habens ΒΑΓ angulum, et ducatur a Β puncto ad ΓΑ productam perpendicularis ΒΔ; dico ex ΒΓ quadratum majus esse quam ex ΒΑ, ΑΓ quadrata, ipso bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo.

Quoniam enim recta ΓΔ secatur utcumque in Α puncto; ipsum igitur ex ΓΑ ἄquale est ipsis ex ΓΑ, ΑΔ quadratis, et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento



τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσα ἔστι τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ<sup>3</sup>. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΔΒ ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον<sup>5</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνον<sup>6</sup> ἴσον ἔστι τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ

rectangulo. Commune addatur ipsum ex ΔΒ; ipsa igitur ex ΓΑ, ΔΒ ἄqualia sunt ipsis ex ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ quadratis et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo. Sed ipsis quidem ex ΓΑ, ΔΒ ἄquale est ipsum ex ΓΒ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsis vero ex ΑΔ, ΔΒ ἄquale est ipsum ex ΑΒ; ergo ex ΓΒ quadratum ἄquale est ipsis ex ΓΑ, ΑΒ quadratis et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo; quare ex ΓΒ quadratum quam ipsa ex ΓΑ, ΑΒ

Soit le triangle obtusangle ABG, ayant l'angle BAG obtus; du point B conduisons BA perpendiculaire sur GA prolongé; je dis que le carré de BG est plus grand que les carrés des côtés BA, AG, de deux fois le rectangle compris sous GA, AD.

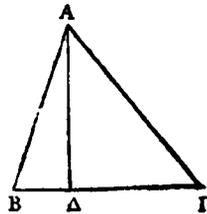
Car puisque la droite GA est coupée d'une manière quelconque au point A, le carré de GA est égal aux carrés des droites GA, AD, et à deux fois le rectangle compris sous GA, AD (4. 2). Ajoutons le carré commun de AB; les carrés de GA, AB seront égaux aux carrés des droites GA, AD, AB, et à deux fois le rectangle compris sous GA, AD. Mais le carré de GB est égal aux carrés des droites GA, AB (47.), car l'angle en Δ est droit, et le carré de AB est égal aux carrés des droites AD, AB;

δὲς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένη ὀρθογωνίῳ ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μείζον ἔστι, τῷ δὲς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις, καὶ τὰ ἰξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξείαν γωνίαν ὑποτινουσῆς πλευρᾶς τετράγωνον ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξείαν γωνίαν περιχοσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὲς ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξείαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἢ κἀθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς κἀθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἐστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξείαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, καὶ ἤχθῃ ἀπὸ τοῦ Α ση-



μίου ἐπὶ τὴν ΒΓ κἀθετος ἢ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῷ δὲς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

quadrata majus est, ipso bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo. In obtusangulis igitur, etc.

PROPOSITIO XIII.

In acutangulis triangulis ex latere acutum angulum subtendente quadratum minus est quam quadrata ex lateribus acutum angulum continentibus contente bis sub uno ipsorum circa acutum angulum in quod perpendicularis cadit, et assumptâ intus a perpendiculari ad acutum angulum.

Sit acutangulum triangulum ΑΒΓ acutum habens ad Β angulum, et ducatur ab Α puncto

ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ; dico ex ΑΓ quadratum minus esse quam ex ΓΒ, ΒΑ quadrata, ipso bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo.

donc le quarré de ΓΒ est égal aux quarrés des droites ΓΑ, ΑΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ; donc le quarré de ΓΒ est plus grand que les quarrés des droites ΓΑ, ΑΒ de deux fois le rectangle sous ΓΑ, ΑΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

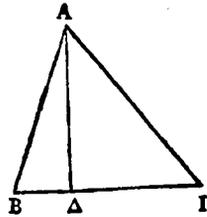
Dans les triangles acutangles, le quarré du côté qui soutend un angle aigu est plus petit que les quarrés des côtés qui comprennent cet angle aigu, de deux fois le rectangle compris sous le côté de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise intérieurement de la perpendiculaire à cet angle aigu.

Soit le triangle acutangle ΑΒΓ ayant l'angle aigu en Β; du point Α conduisons sur la droite ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ; je dis que le quarré de ΑΓ est plus petit que les quarrés des droites ΓΒ, ΒΑ, de deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ.

114 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεία ἡ ΓΒ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Δ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετραγώνων ἴσα ἐστὶ τῶν δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένων ὀρθογωνίων καὶ τῶν ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνου. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετραγώνου· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ τετραγώνων ἴσα ἐστὶ τῶν δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένων ὀρθογωνίων καὶ

Quoniam enim recta GB secta est utcunque in Δ; ergo ex GB, ΒΔ quadrata æqualia sunt et ipsi bis GB, ΒΔ contento rectangulo et ipsi ex ΔΓ quadrato. Commune addatur ex ΔΑ quadratum; ergo ex ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ quadrata æqualia sunt et ipsi bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo et ipsis ex ΔΑ, ΔΓ quadratis. Sed



τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῶν δις ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῶν δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ὅστις μόνον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῶν δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένων ὀρθογωνίων· Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsis quidem ex ΒΔ, ΔΑ æquale est ex ΑΒ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsis vero ex ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsum ex ΑΓ; ipsa igitur ex ΓΒ, ΒΑ æqualia sunt et ipsi ex ΑΓ, et ipsi bis sub ΓΒ, ΒΔ; quare solum ex ΑΓ minus est quam ex ΓΒ, ΒΑ quadrata, ipso bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo. Ergo in acutangulis, etc.

Car puisque la droite GB est coupée d'une manière quelconque au point Δ, les carrés des droites GB, ΒΔ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous GB, ΒΔ et au carré de ΔΓ (7. 2). Ajoutons le carré commun de ΔΑ; les carrés des droites ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ seront égaux à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ, et aux carrés des droites ΑΔ, ΔΓ. Mais le carré de ΑΒ est égal aux carrés des droites ΒΔ, ΔΑ (47. 1), car l'angle en Δ est droit, et le carré de ΑΓ est égal aux carrés des droites ΑΔ, ΔΓ; donc les carrés des droites ΓΒ, ΒΑ sont égaux au carré de ΑΓ et à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ; donc le seul carré de ΑΓ est plus petit que les carrés des droites ΓΒ, ΒΑ de deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

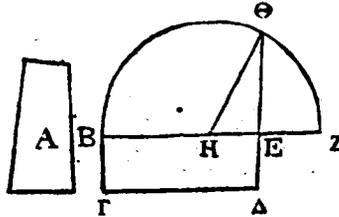
Ἐστω τὸ δοθέν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὲ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Συριστάτω γάρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση ᾖ ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γιγνησὶς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. Συνίσταται γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A; oportet igitur ipsi A rectilineo æquale quadratum constituere.

Constituatur enim ipsi A rectilineo æquale parallelogrammum rectangulum ΒΔ. Si igitur æqualis est ΒΕ ipsi ΕΔ, factum erit propositum; constitutum est enim ipsi A rectilineo



τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὐ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μίζων ἴστίη. Ἐστω μίζων ἡ ΒΕ, καὶ ἐκτελέσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΘΖ, καὶ ἐκτελέσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΗΘ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεία ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνευ κατὰ τὸ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ,

æquale quadratum ΒΔ; si autem non, una ipsarum ΒΕ, ΕΔ major est. Sit major ΒΕ, et producaturs ad Ζ, et ponatur ipsi ΕΔ æqualis ΕΖ, et secetur ΒΖ bifariam in Η, et centro quidem Η, intervallo vero unâ ipsarum ΗΒ, ΗΖ semicirculus describatur ΒΘΖ, et producaturs ΔΕ in Θ, et jungatur ΗΘ.

Quoniam igitur ΒΖ secta est in æqualia quidem in Η, in inæqualia vero in Ε; ergo sub

PROPOSITION XIV.

Construire un quarré égal à une figure rectiligne donnée.

Soit A la figure rectiligne donnée; il faut construire un quarré égal à cette figure rectiligne.

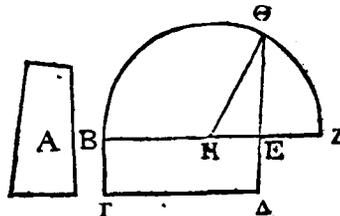
Construisons un parallélogramme rectangle ΒΔ égal à la figure rectiligne donnée A (45. 1). Si ΒΕ était égal à ΕΔ, on aurait fait ce qui était proposé; car le quarré ΒΔ aurait été construit égal à la figure rectiligne A. Si cela n'est point, l'un des côtés ΒΕ, ΕΔ est plus grand que l'autre. Que ΒΕ soit le plus grand, prolongeons-le vers Ζ, et faisons ΕΖ égal à ΕΔ (3. 1); coupons ΒΖ en deux parties égales au point Η; du centre Η et d'un intervalle égal à l'une des droites ΗΒ, ΗΖ, décrivons la demi-circonférence ΒΘΖ (dem. 3); prolongeons ΔΕ vers Θ, et joignons ΗΘ.

Puisque ΒΖ est partagé en deux parties égales au point Η, et en deux parties

116 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

EZ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς HE τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς HZ τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ HZ τῇ HΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BE, EZ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς HE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς HΘ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BE, EZ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς HE ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ. Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς HE τετράγωνον· λοι-

BE, EZ contentum rectangulum cum ex HE quadrato æquale est ipsi ex HZ quadrato. Æqualis autem HZ ipsi HΘ; ipsum igitur sub BE, EZ cum ipso ex HE æquale est ipsi ex HΘ. Ipsi autem ex HΘ æqualia sunt ex ΘΕ, ΕΗ quadrata; ipsum igitur sub BE, EZ cum ipso ex HE æquale est ipsis ex ΘΕ, ΕΗ. Commune auferatur ex HE quadratum; reliquum igitur sub



πὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν BE, EZ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EΘ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν BE, EZ τὸ ὑπὸ τῶν BE, EA ἐστὶν<sup>4</sup>, ἴση γὰρ ZE τῇ EA· τὸ ἄρα BA παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EΘ τετραγώνῳ. Ἴσον δὲ τὸ BA τῷ A ὑβυγράμμῳ· καὶ<sup>5</sup> τὸ A ἄρα ὑβυγράμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EΘ ἀναγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δθέντι ὑβυγράμμῳ τῷ A ἴσον τετράγωνον συνίσταται, τὸ ἀπὸ τῆς EΘ ἀναγραφισμένον. Ὅπρι ἔδει ποιῆσαι.

BE, EZ contentum rectangulum æquale est ipsi ex EΘ quadrato. Sed ipsum sub BE, EZ ipsum sub BE, EA est, æqualis enim est EZ ipsi EA; ergo BA parallelogrammum æquale est ipsi ex EΘ quadrato. Æquale autem est BA ipsi A rectilineo; et A igitur rectilineum æquale est ipsi ex EΘ descripto quadrato.

Ergo dato rectilineo A æquale quadratum constituitur ex EΘ descriptum. Quod oportebat facere.

inégaies au point E; le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal au quarré de HZ (5. 2). Mais HZ est égal à HΘ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE est égal au quarré de HΘ. Mais les quarrés des droites ΘΕ, ΕΗ sont égaux au quarré de HΘ (47. 1); donc le rectangle compfis sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal aux quarrés de droites ΘΕ, ΕΗ. Retrançons le quarré commun de HE; le rectangle restant compris sous BE, EZ sera égal au quarré de EΘ. Mais le rectangle compris sous BE, EZ est le rectangle compris sous BE, EA, puisque la droite EZ est égale à la droite EA; donc le parallélogramme BA est égal au quarré de ΘΕ. Mais BA est égal à la figure rectiligne A; donc la figure rectiligne A est égale au quarré de EΘ.

Donc le quarré décrit avec EΘ a été construit égal à la figure rectiligne donnée A; ce qu'il fallait faire. \*

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

ΟΡΟΙ.

DEFINITIONES.

α. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὃν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσὶν<sup>1</sup>. ἢ ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν.

β. Εὐθεῖα κύκλου ἰσάπτισθαι λέγεται, ἥτις ἀπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον ἐπὶ μηδέτερα μέρη<sup>2</sup>.

γ. Κύκλοι ἰσάπτισθαι ἀλλήλων λέγονται, ὃς τινες ἀπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

δ. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ<sup>3</sup> τοῦ κέντρου εὐθεΐαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτάς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ᾖσι.

1. Æquales circuli sunt, quorum diametri sunt; vel quorum quæ ex centrīs æquales sunt.

2. Recta circulum tangere dicitur, quæ tangens circulum et producta non secat circulum in neutrá parte.

3. Circuli tangere sese dicuntur, qui sese tangentes non sese secant.

4. In circulo æqualiter distare a centro rectæ dicuntur, quando ex centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt.

## LIVRE TROISIEME DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Les cercles égaux sont ceux dont les diamètres sont égaux, ou ceux dont les droites menées des centres aux circonférences sont égales.

2. Une droite, qui touchant un cercle, et qui étant prolongée ne le coupe point, est dite tangente à ce cercle.

3. Les cercles qui ne se touchent et qui ne se coupent point, sont dits tangents entr'eux.

4. Dans un cercle, on dit que des droites sont également éloignées du centre, lorsque les perpendiculaires menées du centre sur ces droites sont égales.

ί. Μείζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

ς'. Τμήμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληθῆ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἧτισί ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθειῶν εὐθειῶν.

θ. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσι τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

ί. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῆ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῶν τὴν γωνίαν περιχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

ιά. Ὁμοῖα τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἰσί.

5. Magis autem distare dicitur ea in quam major perpendicularis incidit.

6. Segmentum circuli est contenta figura et ab recta et circuli circumferentiâ.

7. Segmenti autem angulus est, qui continetur ab recta et circuli circumferentiâ.

8. In segmento autem angulus est, quando in circumferentiâ segmenti sumitur aliquod punctum, et ab ipso ad terminos rectæ quæ est basis segmenti conjunguntur rectæ, contentus angulus ab junctis rectis.

9. Quando autem continentes angulum rectæ assumunt aliquam circumferentiâ, illi dicitur insistere angulus.

10. Sector circuli est, quando ad centrum circuli positus est angulus, contenta figura et ab angulum continentibus rectis et assumptâ ab ipsis circumferentiâ.

11. Similia segmenta circuli sunt, quæ capiunt æquales angulos; vel in quibus anguli æquales inter se sunt.

5. La droite sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire est dite la plus éloignée du centre.

6. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par une circonférence de cercle.

7. L'angle du segment est celui qui est compris par une droite et par une circonférence de cercle.

8. L'angle dans le segment est l'angle compris par les droites menées d'un point pris dans la circonférence du segment aux extrémités de la droite qui est la base du segment.

9. Mais lorsque les droites qui comprennent l'angle embrassent une portion de la circonférence, cet angle est dit appuyé à la circonférence.

10. Un secteur de cercle est une figure comprise entre deux rayons qui font un angle au centre et la portion de la circonférence qu'embrassent ces deux rayons.

11. Les segments des cercles sont semblables, lorsqu'ils reçoivent des angles égaux ou lorsque les angles qu'ils contiennent sont égaux entr'eux.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

PROPOSITIO I.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

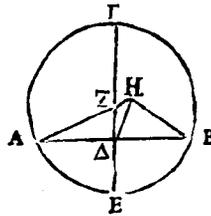
Dati circuli centrum invenire.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὲ τοῦ ΔΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Sit datus circulus ΑΒΓ; oportet igitur ΑΒΓ circuli centrum invenire.

Ἡχθω<sup>1</sup> τις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΓΔ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου<sup>2</sup>.

Ducatur aliqua in ipso utcumque recta ΑΒ, et secetur bifariam in Δ puncto, et a Δ ipsi ΑΒ ad rectos ducatur ΓΔ, et producat in Ε, et secetur ΓΕ bifariam in Ζ; dico Ζ centrum esse ΑΒΓ circuli.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, δύο δὲ αἱ ΑΔ, ΔΗ δυοῖ ταῖς ΗΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ βάσις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἐστὶν ἴση, ἐκ κέντρου γὰρ τοῦ Η<sup>5</sup>. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνία

Non enim, sed si possibile sit Η, et jungantur ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΔΒ, communis autem ΔΗ, duæ utriusque ΑΔ, ΔΗ duabus ΗΔ, ΔΒ æquales sunt, utraque utriusque, et basis ΗΑ basi ΗΒ est æqualis, ex centro enim Η; angulus igitur ΑΔΗ

PROPOSITION PREMIÈRE.

Trouver le centre d'un cercle donné.

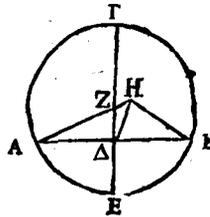
Soit ΑΒΓ le cercle donné; il faut trouver le centre du cercle ΑΒΓ.

Conduisons dans le cercle une droite quelconque ΑΒ, partageons-la en deux parties égales au point Δ (10. 1); du point Δ conduisons ΓΔ perpendiculaire à ΑΒ (11. 1), prolongeons ΓΔ en Ε, et partageons ΓΕ en deux parties égales en Ζ; je dis que le point Ζ est le centre du cercle ΑΒΓ.

Que Ζ ne le soit pas, et que Η le soit, si cela est possible. Joignons ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Et puisque ΑΔ est égal à ΔΒ et que ΔΗ est commun, les deux droites ΑΔ, ΔΗ sont égales aux deux droites ΗΔ, ΔΒ, chacune à chacune; mais la base ΗΑ est égale à la base ΗΒ, car ce sont deux rayons (déf. 15. 1); donc l'angle ΑΔΗ est égal à l'angle ΗΔΒ (8. 1). Mais lorsqu'une droite tombant sur

τῆ ὑπὸ ΗΑΒ ἴση ἰστί<sup>6</sup>. Όταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλή-  
 λαις ποιῆ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἰστί<sup>7</sup>.  
 ὀρθὴ ἄρα ἰστί<sup>7</sup> ἡ ὑπὸ ΗΑΒ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  
 ΖΑΒ ὀρθὴ ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῆ ὑπὸ ΗΑΒ, ἢ  
 ἐλάττων τῆ μείζονι<sup>8</sup>, ὅπερ ἰστί<sup>9</sup> ἀδύνατον. Οὐκ  
 ἄρα τὸ Η κέντρον ἰστί<sup>9</sup> τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ομοίως  
 δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Ζ.

angulo ΗΑΒ æqualis est. Quando autem recta  
 in rectam insistens deinceps angulos æquales  
 inter se facit, rectus uterque æqualium est;  
 rectus igitur est ΗΑΒ. Est autem et ΖΑΒ rec-  
 tus; æqualis igitur est ΖΑΒ ipsi ΗΑΒ, minor  
 majori, quod est impossibile. Non igitur Η  
 centrum est ΑΒΓ circuli. Similiter autem os-  
 tendemus, neque aliud quoddam præter Ζ.



Τὸ Ζ ἄρα σημεῖον κέντρον ἰστί<sup>9</sup> τοῦ ΑΒΓ κύ-  
 κλου<sup>9</sup>. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι<sup>10</sup>.

Ergo Ζ punctum est centrum ΑΒΓ circuli.  
 Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἰὰν ἐν κύκλῳ εὐ-  
 θεῖα τις<sup>11</sup> εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνη,  
 ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἰστί<sup>9</sup> τὸ κέντρον τοῦ κύκλου<sup>12</sup>.

Ex hoc utique evidens est, si in circulo  
 recta quædam rectam quamdam bifariam et ad  
 rectos secet, in secante esse centrum circuli.

une droite fait avec elle les angles de suite égaux, chacun des angles égaux  
 est droit (déf. 10. 1); donc l'angle ΗΑΒ est droit. Mais l'angle ΖΑΒ est droit; donc  
 l'angle ΖΑΒ est égal à l'angle ΗΑΒ; le plus petit au plus grand, ce qui est  
 impossible. Donc le point Η n'est point le centre du cercle ΑΒΓ. On démon-  
 trera semblablement que tout autre point, excepté Ζ, ne l'est pas.

Donc le point Ζ est le centre du cercle. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si dans un cercle une droite en coupe une autre  
 en deux parties égales, et à angles droits, le centre du cercle est dans la secante.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

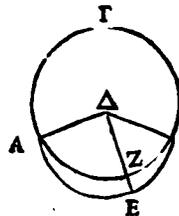
PROPOSITIO II.

Εάν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληθῇ δύο τυ-  
χόντα σημεῖα, ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζυ-  
γυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πιστεῖται τοῦ κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας  
αὐτοῦ εἰλήθω δύο τυχόντα<sup>2</sup> σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω  
ὅτι ἢ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζυγυμένη εὐθεῖα  
ἐντὸς πιστεῖται τοῦ κύκλου.

Si circuli in circumferentiâ sumantur duo  
quælibet puncta, hæc puncta conjungens recta  
intra cadet circumulum.

Sit circulus ΑΒΓ, et in circumferentiâ ipsius  
sumantur duo quælibet puncta Α, Β; dico ab  
ipso Α ad Β conjunctam rectam intra cadere  
circulum.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἔξωθεν ὡς ἢ  
ΑΕΒ, καὶ εἰλήθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου,  
καὶ ἴστω τὸ Δ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ,  
καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ<sup>3</sup>.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἴσων ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα καὶ  
γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριγώ-  
νου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσεκβίβληται ἢ ΑΕΒ,

Non enim, sed si possibile, cadat extra  
ut ΑΕΒ, et sumatur centrum ΑΒΓ· circuli, et  
sit Δ, ἐϋ jungantur ΔΑ, ΔΒ, et ducatur ΔΖΕ.

Et quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΔΒ, æqua-  
lis igitur et angulus ΔΑΕ ipsi ΔΒΕ; et quoniam  
trianguli ΔΑΕ unum latus ΑΕΒ producitur,

PROPOSITION II.

Si dans une circonférence de cercle, on prend deux points quelconques, la droite qui joindra ces deux points tombera dans le cercle.

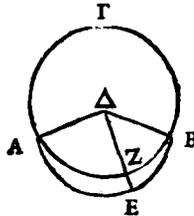
Soit le cercle ΑΒΓ; qu'on prenne deux points quelconques Α, Β, dans sa circonférence; je dis que la droite menée du point Α au point Β, tombera dans le cercle.

Car que cela ne soit point, et qu'elle tombe en dehors, si c'est possible, comme ΑΕΖ; prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit Δ, joignons ΔΑ, ΔΒ, et menons ΔΖΕ.

Puisque ΔΑ est égal à ΔΒ, l'angle ΔΑΕ est égal à l'angle ΔΒΕ (5. 1); et puis- que l'on a prolongé un côté ΑΕΒ du triangle ΔΑΕ, l'angle ΔΕΒ. est plus grand

μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. Ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. Ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ· μείζων ἄρα ἡ ΔΖ

major igitur est ΔΕΒ angulus ipso ΔΑΕ. Æqualis autem ΔΑΕ ipsi ΔΒΕ; major igitur est ΔΕΒ ipso ΔΒΕ. Majorem autem angulum majus latus subtendit; major igitur est ΔΒ ipsâ ΔΕ. Æqualis autem ΔΒ ipsi ΔΖ; major igitur est ΔΖ



τῆς ΔΕ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσῖται τοῦ κύκλου. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας ἐντὸς ἄρα πεσῖται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ ταύτης.

ipsâ ΔΕ, minor majore, quod est impossibile. Non igitur ab Α ad Β conjuncta recta extra cadet circumulum. Similiter utique ostendemus, neque in ipsam circumferentiam; intus igitur cadet. Si igitur circuli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνη, καὶ

Si in circulo recta aliqua per centrum rectam aliquam non per centrum bifariam secet,

que l'angle ΔΑΕ (16. 1). Mais l'angle ΔΑΒ est égal à l'angle ΔΒΕ; donc l'angle ΔΕΒ est plus grand que l'angle ΔΒΕ. Mais un plus grand côté soutend un plus grand angle (18. 1); donc ΔΒ est plus grand que ΔΕ. Mais ΔΒ est égal à ΔΖ; donc ΔΖ est plus grand que ΔΕ, le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc la droite menée du point Α au point Β ne tombe pas hors du cercle. Nous démontrerons semblablement qu'elle ne tombe pas dans la circonférence; donc elle tombe en dedans du cercle. Donc, etc.

PROPOSITION III.

Si dans un cercle une droite menée par le centre coupe en deux parties égales une droite non menée par le centre, elle la coupera à angles

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 123

πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνη, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

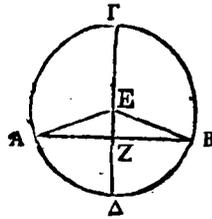
Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἢ ΓΔ εὐθεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ δίχα τεμνίτω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γάρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ,

et ad rectos ipsam secat; et si eam ad rectos secet, et bifariam ipsam secat.

Sit circulus ΑΒΓ, et in ipso recta aliqua ΓΔ per centrum, rectam aliquam ΑΒ non per centrum bifariam secet in Ζ puncto; dico et ad rectos ipsam secare.

Sumatur enim centrum ΑΒΓ circuli, et sit Ε, et jungantur ΕΑ, ΕΒ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὲ ἄνιστοι ἴσοι εἰσὶν<sup>2</sup>, καὶ βάσεις ἡ ΕΑ βάσει τῇ ΕΒ ἴση, γωνία ἄρα<sup>3</sup> ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΒ ἴση ἐστίν. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐπιζήσ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΒΖΕ<sup>4</sup>. Ἡ ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὕσα<sup>5</sup> τὴν ΑΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὕσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν<sup>6</sup> τέμνει.

Et quoniam æqualis est ΑΖ ipsi ΖΒ, communis autem ΖΕ, duæ utique duabus æquales sunt, et basis ΕΑ basi ΕΒ æqualis; angulus igitur ΑΖΕ angulo ΕΖΒ æqualis est. Quando autem recta super rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; rectus igitur est uterque ipsorum ΑΖΕ, ΒΖΕ. Ergo ΓΔ per centrum ducta ipsam ΑΒ non per centrum ductam bifariam secans, et ad rectos ipsam secat.

droits; et si elle la coupe à angles droits, elle la coupera en deux parties égales.

Soit le cercle ΑΒΓ; que dans ce cercle, la droite ΓΔ menée par le centre coupe en deux parties égales au point Ζ la droite ΑΒ non menée par le centre; je dis qu'elle la coupe à angles droits.

Prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3); qu'il soit Ε, et joignons ΕΑ, ΕΒ.

Puisque ΑΖ est égal à ΖΒ, et que la droite ΖΕ est commune, deux droites sont égales à deux droites; mais la base ΕΑ est égale à la base ΕΒ; donc l'angle ΑΖΕ est égal à l'angle ΕΖΒ (8. 1). Mais lorsqu'une droite tombant sur une autre droite fait les angles de suite égaux entr'eux, chacun des angles égaux est droit; donc chacun des angles ΑΖΕ, ΒΖΕ est droit. Donc la droite ΓΔ, menée par le centre, et qui coupe en deux parties égales la droite ΑΒ non menée par le centre, coupe aussi cette droite à angles droits.

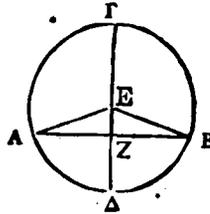
124 LE TROISIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αλλά δὴ καὶ ἡ ΓΔ τὴν ἈΒ πρὸς ὀρθὰς τέμ-  
νεται· λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τοῦτ'  
ἔστιν, ὅτι ἴση ἔστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση  
ἔστιν ἡ<sup>8</sup> ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση ἔστι καὶ γωνία ἡ  
ὑπὸ ΕΑΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ

Sed et ΓΔ ipsam ΑΒ ad rectos secet; dico et  
bifariam ipsam secare, hoc est, æqualem esse  
ΑΖ ipsi ΖΒ.

Eisdem enim constructis, quoniam æqualis  
est ΕΑ ipsi ΕΒ, æqualis est et angulus ΕΑΖ ipsi  
ΕΒΖ. Est autem et rectus ΑΖΕ recto ΒΖΕ æqua-



ΑΖΕ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση· δύο ἄρα τρίγωνα ἔστι  
τὰ ΕΑΖ, ΕΒΖ τὰς δύο γωνίας διὰ γωνίας  
ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ  
ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΕΖ, ὑποτίθουσιν ὑπὸ  
μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα  
πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει· ἴση  
ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

lis; duo igitur triangula sunt ΕΑΖ, ΕΒΖ duos  
angulos duobus angulis æquales habentia, et  
unum latus uni lateri æquale, commune ipsi  
ΕΖ, subteudens unum æqualium angulorum;  
et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia  
habebunt; æqualis igitur est ΑΖ ipsi ΖΒ. Si igi-  
tur in circulo, etc.

Mais que la droite ΓΔ coupe la droite ΑΒ à angles droits; je dis qu'elle la coupe  
en deux parties égales, c'est-à-dire que ΑΖ est égal à ΖΒ.

Faisons la même construction; puisque ΕΑ est égal à ΕΒ, l'angle ΕΑΖ est égal  
à l'angle ΕΒΖ (5. 1). Mais l'angle droit ΑΖΕ est égal à l'angle droit ΒΖΕ; donc  
ΕΑΖ, ΕΒΖ sont deux triangles qui ont deux angles égaux à deux angles, et un  
côté égal à un côté, c'est-à-dire leur côté commun ΕΖ, qui soutend un des angles  
égaux; donc ces deux triangles auront les côtés restants égaux aux côtés restants  
(26. 1); donc ΑΖ est égal à ΖΒ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

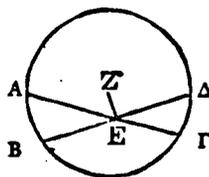
PROPOSITIO IV.

Εάν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνουσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Si in circulo duæ rectæ sese secant, non per centrum ductæ, non sese secabunt bifariam.

Ἐστὼ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνιτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημείον, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in ipso duæ rectæ ΑΓ, ΒΔ sese secant in Ε puncto, non per centrum ductæ; dico non eas sese secare bifariam.



Εἰ γὰρ δυνατόν, τέμνιτωσαν ἀλλήλας δίχα, ὅσπερ ἴσων εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΒΕ τῇ ΕΔ· καὶ εἰλήθῃ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχῃ ἡ ΖΕ.

Si enim possibile, sese secant bifariam, ita ut æqualis sit ΑΕ quidem ipsi ΕΓ, et ΒΕ ipsi ΕΔ; et sumatur centrum ΑΒΓΔ circuli, et sit Ζ, et jungatur ΖΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐθεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα

Quoniam igitur recta aliqua ΖΕ per centrum rectam aliquam ΑΓ non per centrum bifariam secat, et ad rectos ipsam secat;

PROPOSITION IV.

Si dans un cercle deux droites non menées par le centre se coupent, elles ne se coupent point en deux parties égales.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que dans ce cercle les deux droites ΑΓ, ΒΔ, non menées par le centre, se coupent au point Ε; je dis qu'elles ne se coupent point en deux parties égales.

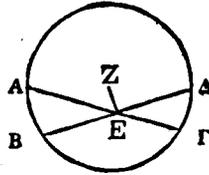
Car si cela est possible, qu'elles se coupent en deux parties égales, de manière que ΑΕ soit égal à ΕΓ, et ΒΕ égal à ΕΔ; prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 3), qu'il soit le point Ζ, et joignons ΖΕ.

Puisque la droite ΖΕ, menée par le centre, coupe en deux parties égales la droite ΑΓ non menée par le centre, elle la coupera à angles droits (3. 3);

126 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσθιν ἢ ὑπὸ ZEA. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθείᾳ τις ἢ ZE εὐθείαν τινα τὴν ΒΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα<sup>5</sup>

rectus igitur est ZEA. Rursus, quoniam recta aliqua ZE rectam aliquam ΒΔ non per centrum, bifariam secat, et ad rectos ipsam secat; rectus



ἢ ὑπὸ ZEB. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZEA ὀρθή· ἴση ἄρα ἢ ὑπὸ ZEA τῇ ὑπὸ ZEB, ἢ ὀλίγων τῇ μείζονι, ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. Εὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξ ἧς:

igitur est ZEB. Ostensus est autem et ZEA rectus; æqualis igitur ZEA ipsi ZEB, minor majori, quod est impossibile. Non igitur ΑΓ, ΒΔ sese secant bifariam. Si igitur in circulo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

PROPOSITIO V.

Εὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Si duo circuli sese secant, non erit ipsorum idem centrum.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΗ τέμνεταισαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημεία· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΓΔΗ sese secant in Β, Γ punctis; dico non esse ipsorum idem centrum.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΓ, καὶ δίχθω ἡ ΕΖΗ ὡς ἔτυχε.

Si enim possibile, sit Ε, et jungatur ΕΓ, et ducatur ΕΖΗ utcumque.

donc l'angle ZEA est droit. De plus, puisque la droite ZE coupe en deux parties égales la droite ΒΔ non menée par le centre, elle la coupera à angles droits; donc l'angle ZEB est droit. Mais on a démontré que l'angle ZEA est droit; donc l'angle ZEA est égal à l'angle ZEB, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc les droites ΑΓ, ΒΔ ne se coupent point en deux parties égales. Donc, etc.

PROPOSITION V.

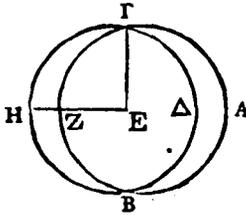
Si deux cercles se coupent, leur centre ne sera pas le même.

Que les deux cercles ΑΒΓ, ΓΔΗ se coupent aux deux points Β, Γ; je dis que leur centre ne sera pas le même.

Car si cela est possible, que leur centre soit le point Ε; joignons ΕΓ, et menons ΕΖΗ d'une manière quelconque.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΗ. Ἐδείχθη δὲ ἡ ΕΓ καὶ τῇ

Et quoniam E punctum centrum est ΑΒΓ circuli, æqualis est ΕΓ ipsi ΕΖ. Rursus, quoniam E punctum centrum est ΓΔΗ circuli, æqualis est ΓΕ ipsi ΕΗ. Ostensa est autem et ΕΓ



ΕΖ ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση<sup>2</sup>, ἢ ἰλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν<sup>3</sup> ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΗ κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἰξῆς.

ipsi ΕΖ æqualis; et ΖΕ igitur ipsi ΕΗ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur Ε punctum centrum est ΑΒΓ, ΓΔΗ circulorum. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

PROPOSITIO VI.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός<sup>1</sup>, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Si duo circuli sese intra tangant, non erit ipsorum idem centrum.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτίσθωσαν<sup>2</sup> ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται<sup>3</sup> αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΓΔΕ sese tangant in Γ puncto; dico non esse ipsorum idem centrum.

Puisque le point E est le centre du cercle ΑΒΓ, la droite ΕΓ est égale à ΕΖ (déf. 15. 1). De plus, puisque le point E est le centre du cercle ΓΔΗ, la droite ΓΕ est égale à ΕΗ. Mais on a démontré que ΕΓ est égal à ΕΖ; donc ΖΕ est égal à ΕΗ, la plus petite à la plus grande, ce qui est impossible. Donc le point E n'est pas le centre des cercles ΑΒΓ, ΓΔΗ. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Si deux cercles se touchent intérieurement, leur centre n'est pas le même. Que les deux cercles ΑΒΓ, ΓΔΕ se touchent au point Γ; je dis que leur centre n'est pas le même.

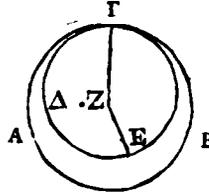
128 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω τὸ Z, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ZΓ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ZEB.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ZΓ τῇ BZ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν

Si enim possibile, sit Z, et jungatur ZΓ, et ducatur utcunq̄ ZEB.

Quoniam igitur Z punctum centrum est ABΓ circuli, æqualis est ZΓ ipsi BZ. Rursus, quoniam Z punctum centrum est ΓΔΕ circuli, æ-



ZΓ τῇ ZE. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZΓ τῇ ZB ἴση· καὶ ἡ ZE ἄρα τῇ ZB ἐστὶν ἴση, ἢ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ABΓ, ΓΔΕ κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἰξῆς.

qualis est ZΓ ipsi ZE. Ostensa est autem et ZΓ ipsi ZB æqualis; et ZE igitur ipsi ZB est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur Z punctum centrum est ABΓ, ΓΔΕ circum. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

PROPOSITIO VII.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληθῆ τι σημείον ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαι

Si circuli in diametro sumatur aliquod punctum quod non sit centrum circuli, ab ipso autem puncto in circum cadant rectæ quæ-

Car si cela est possible, que leur centre soit le point z; joignons zΓ, et menons zEB d'une manière quelconque.

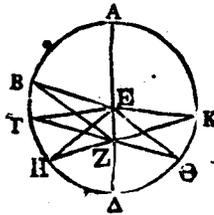
Puisque le point z est le centre du cercle ABΓ, la droite zΓ est égale à BZ. De plus, puisque le point z est le centre du cercle ΓΔΕ, la droite zΓ est égale à ZE. Mais on a démontré que zΓ est égal à ZB; donc ZE est égal à ZB, la plus petite à la plus grande, ce qui est impossible; donc le point z n'est point le centre des cercles ABΓ, ΓΔΕ. Donc, etc.

PROPOSITION. VII.

Si dans le diamètre d'un cercle on prend un point qui ne soit pas le centre de ce cercle, et si de ce point on conduit des droites à la circon-

τινες<sup>1</sup>· *μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὲ ἡ ἕγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔστί· δύο δὲ μόνον<sup>2</sup> ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπιπτοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.*

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰλήθω τι σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαι τινες



αἰ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω ὅτι *μεγίστη μὲν ἔστιν ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· τῶν δὲ ἄλλων, ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.*

Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἰ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Καὶ ἐπεὶ πάντες τριγῶνους αἰ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἰ ΕΒ, ΕΖ ἄρα<sup>3</sup> τῆς ΒΖ μεί-

dam, maxima quidem erit in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum remotiore major est; duæque solum æquales ab eodem puncto cadent in circulum, ex utraque parte minimæ.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit ΑΔ, et in ipsâ ΑΔ sumatur aliquod punctum Ζ, quod non sit centrum circuli, centrum autem circuli sit Ε, et a Ζ in ΑΒΓΔ circulum cadant rectæ quædam ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ; dico ma-

ximam quidem esse ΖΑ, minimam vero ΖΔ; aliarum autem, ΖΒ quidem majorem ipsâ ΖΓ; et ΖΓ ipsâ ΖΗ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, ipsæ ΕΒ, ΕΖ igitur ipsâ ΒΖ

férence; la plus grande sera celle dans laquelle est le centre, et la plus petite la droite restante; quant aux autres droites, la droite qui est plus près de celle qui passe par le centre est toujours plus grande que celle qui en est plus éloignée; et du même point on ne peut mener à la circonférence que deux droites égales de l'un et l'autre côté de la plus petite.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, que ΑΔ soit son diamètre, prenons dans ΑΔ un point quelconque Ζ qui ne soit pas le centre de ce cercle, que le centre du cercle soit le point Ε, du point Ζ menons à la circonférence ΑΒΓΔ les droites ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ; je dis que ΖΑ est la plus grande, et ΖΔ la plus petite; et que parmi les autres, la droite ΖΒ est plus grande que ΖΓ, et la droite ΖΓ plus grande que ΖΗ.

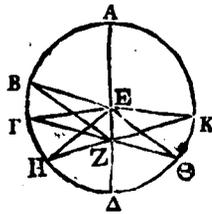
Joignons ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Puisque deux côtés d'un triangle sont plus grands que le côté restant

130 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ζονίς εἰσιν. ἴση δὲ ἡ  $AE$  τῇ  $BE$ , αἱ ἄρα  $BE$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσὶ τῇ  $AZ$ · μείζων ἄρα ἡ  $AZ$  τῆς  $BZ$ . Πάλιν, ἐπιὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $BE$  τῇ  $GE$ , κοινὴ δὲ ἡ  $ZE$ , δύο δὲ αἱ  $BE$ ,  $EZ$  δυσὶ ταῖς  $GE$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $BEZ$  γωνίας τῆς ὑπὸ  $GEZ$  μείζων· βάσις ἄρα ἡ  $BZ$  βάσιως τῆς  $ΓΖ$  μείζων ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ  $ΓΖ$  τῆς  $HZ$  μείζων ἐστὶ<sup>5</sup>.

maiores sunt. Æqualis autem  $AE$  ipsi  $BE$ ; ergo  $BE$ ,  $EZ$  æquales sunt ipsi  $AZ$ ; major igitur est  $AZ$  ipsâ  $BZ$ . Rursus, quoniam æqualis est  $BE$  ipsi  $GE$ , communis autem  $ZE$ , duæ utique  $BE$ ,  $EZ$  duabus  $GE$ ,  $EZ$  æquales sunt. Sed et angulus  $BEZ$  angulo  $GEZ$  major; basis igitur  $BZ$  basi  $ΓΖ$  major est. Propter eadem utique et  $ΓΖ$  ipsâ  $HZ$  major est.



Πάλιν, ἐπιὶ αἱ  $HZ$ ,  $ZE$  τῆς  $EH$  μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ  $EH$  τῇ  $ED$ · αἱ ἄρα  $HZ$ ,  $ZE$  τῆς  $ED$  μείζονές εἰσι. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ  $EZ$ · λοιπὴ ἄρα ἡ  $HZ$  λοιπῆς τῆς  $ZD$  μείζων ἐστὶ. Μεγίστη μὲν ἄρα ἡ  $ZA$ , ἐλαχίστη δὲ ἡ  $ZD$ · μείζων δὲ ἡ μὲν  $ZB$  τῆς  $ZΓ$ , ἡ δὲ  $ZΓ$  τῆς  $ZH$ .

Rursus, quoniam  $HZ$ ,  $ZE$  ipsâ  $EH$  majores sunt, æqualis autem  $EH$  ipsi  $ED$ ; ergo  $HZ$ ,  $ZE$  ipsâ  $ED$  majores sunt. Communis auferatur  $EZ$ ; reliqua igitur  $HZ$  reliquâ  $ZD$  major est. Maxima quidem igitur  $ZA$ , minima vero  $ZD$ ; major autem  $ZB$  quidem ipsâ  $ZΓ$ , et  $ZΓ$  ipsâ  $ZH$ .

Λέγω ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ  $Z$  σημείου δύο μόνον ἴσαι<sup>6</sup> προσπεσοῦνται πρὸς τὸν  $ABΓΔ$  κύκλον,

Dico et a  $Z$  puncto duas solum æquales cadere in  $ABΓΔ$  circulum, ex utràque parte ip-

(21. 1), les droites  $EB$ ,  $EZ$  sont plus grandes que la droite  $BZ$ . Mais la droite  $AE$  est égale à la droite  $BE$ ; donc les droites  $BE$ ,  $EZ$  sont égales à la droite  $AZ$ ; donc la droite  $AZ$  est plus grande que la droite  $BZ$ . De plus, puisque  $BE$  est égal à  $GE$ , et que la droite  $ZE$  est commune, les deux droites  $BE$ ,  $EZ$  sont égales aux deux droites  $GE$ ,  $EZ$ . Mais l'angle  $BEZ$  est plus grand que l'angle  $GEZ$ ; donc la base  $BZ$  est plus grande que la base  $ΓΖ$  (24. 1). Par la même raison la droite  $ΓΖ$  est plus grande que la droite  $HZ$ .

De plus, puisque les droites  $HZ$ ,  $ZE$  sont plus grandes que la droite  $EH$ , et que  $EH$  est égal à  $ED$ , les droites  $HZ$ ,  $ZE$  sont plus grandes que  $ED$ . Retrançons la droite commune  $EZ$ ; la droite restante  $HZ$  sera plus grande que la droite restante  $ZD$ . Donc la droite  $ZA$  est la plus grande, et la droite  $ZD$  la plus petite; donc la droite  $ZB$  est plus grande que la droite  $ZΓ$ , et la droite  $ZΓ$  plus grande que la droite  $ZH$ .

Je dis que du point  $Z$ , on ne peut mener à la circonférence  $ABΓΔ$  que deux

ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. Συνστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε, τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὲ αἱ ΗΒ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι τῇ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προσπιπτέται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση<sup>7</sup>, ἀλλὰ μὲν καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ<sup>8</sup>· καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῇ ΘΖ ἐστὶν ἴση<sup>9</sup>, ἡ ἕγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ<sup>10</sup> ἀπώτερον ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἡ καὶ οὕτως. Ἐπιζεύχθω ἡ ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, καὶ βάσις ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΚ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἴση ἐστὶν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ<sup>11</sup> τῇ ὑπὸ ΖΕΘ ἴση ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν<sup>12</sup> ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπιπτέται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

sus ΖΔ minimæ. Constituatur enim ad ΕΖ rec-tam, et ad punctum in eâ Ε, ipsi ΗΕΖ an-gulo æqualis ΖΕΘ, et jungatur ΖΘ. Quoniam igitur æqualis est ΗΕ ipsi ΕΘ, communis au-tem ΕΖ, duæ utique ΗΕ, ΕΖ duabus ΘΕ, ΕΖ æquales sunt; et angulus ΗΕΖ angulo ΘΕΖ æ-qualis; basis igitur ΖΗ basi ΖΘ æqualis est. Dico autem ipsi ΖΗ aliam æqualem non cadere in circumulum a Ζ puncto. Si enim possibile, cadat ΖΚ. Et quoniam ΖΚ ipsi ΖΗ est æqualis, sed quidem et ΖΘ ipsi ΖΗ; et ΖΚ igitur ipsi ΘΖ est æqualis, propinquior ei quæ per cen-trum remotiori æqualis, quod impossibile.

Vel et hoc modo. Jungatur ΕΚ. Et quoniam æqualis est ΗΕ ipsi ΕΚ, communis autem ΕΖ, et basis ΖΗ basi ΖΚ æqualis; angulus igitur ΗΕΖ angulo ΚΕΖ æqualis est. Sed ΗΕΖ ipsi ΖΕΘ est æqualis; et ΖΕΘ igitur ipsi ΚΕΖ est æqua-lis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur a Ζ puncto alia aliqua cadet in circu-lum æqualis ipsi ΗΖ; una igitur sola. Si igitur circuli, etc.

droites égales, de l'un et l'autre côté de la plus petite ΖΔ. Car sur la droite ΕΖ et au point Ε de cette droite, faisons l'angle ΖΕΘ égal à l'angle ΗΕΖ (23. 1), et joignons ΖΘ. Puisque la droite ΗΕ est égale à la droite ΕΘ, et que la droite ΕΖ est commune, les deux droites ΗΕ, ΕΖ sont égales aux deux droites ΘΕ, ΕΖ; mais l'angle ΗΕΖ est égal à l'angle ΘΕΖ; donc la base ΖΗ est égale à la base ΖΘ (4. 1). Je dis que du point Ζ on ne peut mener à la circonférence une autre droite égale à ΖΗ. Car si cela est possible, menons ΖΚ. Puisque ΖΚ est égal à ΖΗ, et ΖΘ égal à ΖΗ, la droite ΖΚ est égale à la droite ΘΖ, une droite plus près de celle qui passe par le centre, égale à une droite qui en est plus éloignée, ce qui est impossible.

Ou d'une autre manière. Joignons ΕΚ. Et puisque ΗΕ est égal à ΕΚ, que la droite ΕΖ est commune, et que la base ΖΗ est égale à la base ΖΚ, l'angle ΗΕΖ est égal à l'angle ΚΕΖ (8. 1). Mais l'angle ΗΕΖ est égal à l'angle ΖΕΘ; donc l'angle ΖΕΘ est égal à l'angle ΚΕΖ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc du point Ζ, on ne peut pas mener à la circonférence une autre droite qui soit égale à ΗΖ; donc on n'en peut mener qu'une seule. Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Ἐὰν κύκλου ληφθῆ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχι· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μέγιστη μὲν ἔστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἴσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἔστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερον ἔστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἑφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἴσται δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν

## PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ab ipso autem puncto ad circulum ducantur rectæ quædam, quarum una per centrum, reliquæ autem utcunque; ipsarum quidem ad concavam circumferentiam cadentium rectarum maxima quidem est quæ per centrum; aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum remotiore major erit; ipsarum vero in convexam circumferentiam cadentium rectarum, minima quidem est quæ inter et punctum et diametrum; aliarum autem, semper propinquior minimæ remotiore est minor. Duæ autem solum æquales a puncto cadent in circulum, ex utraque parte minimæ.

Sit circulus ΑΒΓ, et extra ipsum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, et ab eo ducantur rectæ quædam ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, sit autem ΔΑ per centrum; dico earum quidem in ΑΕΖΓ conca-

## PROPOSITION VIII.

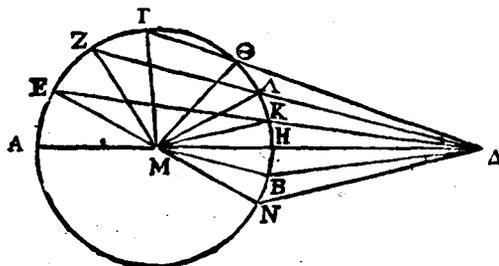
Si hors d'un cercle on prend un point quelconque, si de ce point on mène à ce cercle des droites, si une d'elles est menée par le centre, et les autres comme on voudra; parmi les droites menées à la circonférence concave, la plus grande est celle qui passe par le centre, et parmi les autres celle qui est plus près de celle qui passe par le centre est toujours plus grande que celle qui s'en éloigne davantage; mais parmi les droites menées à la circonférence convexe, la plus petite est celle qui est entre le point pris hors du cercle et le diamètre, et parmi les autres celle qui est plus près de la plus petite est toujours plus petite que celle qui s'en éloigne davantage; et du point pris hors du cercle, on ne peut mener à la circonférence de l'un et l'autre côté de la plus petite, que deux droites égales.

Soit le cercle ΑΒΓ, et hors du cercle ΑΒΓ, prenons un point quelconque Δ; de ce point menons à ce cercle les droites ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, et que ΔΑ passe

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 133

ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν  
 μεγίστη μὲν ἔστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· αἰ  
 δὲ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον  
 μείζων ἔσται, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς  
 ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΑΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν  
 προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, ἡ  
 μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ·  
 αἰ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἔστι  
 τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ  
 τῆς ΔΘ'.

vam circumferentiam cadentium reclarum ma-  
 ximam quidem esse ΔΑ quæ per centrum;  
 semper autem propinquior ei quæ per centrum  
 remotiore major erit, ΔΕ quidem ipsâ ΔΖ, et  
 ΔΖ ipsâ ΔΓ; ipsarum autem in ΘΑΚΗ con-  
 vexam circumferentiam cadentium reclarum,  
 minima quidem ΔΗ, quæ inter et punctum Δ  
 et diametrum ΑΗ; semper autem propinquior  
 ipsi ΔΗ minimæ minor est remotiore, ΔΚ qui-  
 dem ipsâ ΔΛ, et ΔΛ ipsâ ΔΘ.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ  
 ἴστω τὸ Μ· καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ,  
 ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Sumatur enim centrum ΑΒΓ circuli, et sit  
 Μ; et jungantur ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προσ-  
 κείσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἔστί ταῖς ΕΜ, ΜΔ.  
 Αἱ δὲ ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ΑΔ

Et quoniam æqualis est ΑΜ ipsi ΕΜ, com-  
 munis addatur ΜΔ; ergo ΑΔ æqualis est ipsi  
 ΕΜ, ΜΔ. Sed ΕΜ, ΜΔ ipsâ ΕΔ majores sunt;

par le centre ; je dis que de toutes les droites menées à la circonférence con-  
 cave ΑΕΖΓ, la plus grande est la droite ΔΑ, menée par le centre, et que  
 la droite qui est plus près de celle qui passe par le centre sera toujours plus  
 grande que celle qui s'en éloigne davantage, la droite ΔΕ plus grande que  
 ΔΖ, et la droite ΔΖ plus grande que ΔΓ; mais parmi les droites menées à la  
 circonférence convexe ΘΑΚΗ, la droite ΔΗ placée entre le point Δ et le dia-  
 mètre ΑΗ est la plus petite, et la droite placée plus près de la plus petite ΔΗ  
 est toujours plus petite que celle qui s'en éloigne davantage; la droite ΔΚ plus  
 petite que ΔΛ, et la droite ΔΛ plus petite que la droite ΔΘ.

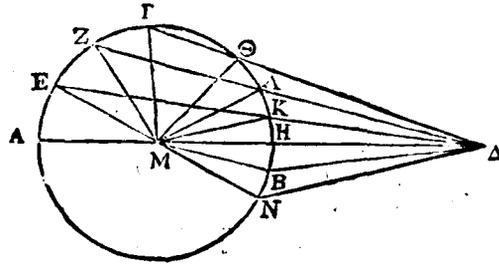
Prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1.3), qu'il soit le point Μ; et joignons  
 ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Puisque la droite ΑΜ est égale à la droite ΕΜ, ajoutons la droite com-  
 mune ΜΔ; la droite ΑΔ sera égale aux droites ΕΜ, ΜΔ. Mais les droites ΕΜ,

134 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΜ τῆ ΖΜ, κοινὴ προσκείσθω<sup>3</sup> ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ, ΜΔ ἄρα ταῖς ΖΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστί. Βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσιως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστί· μέγιστη μὲν ἄρα ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.

et ΔΔ igitur ipsā ΕΔ major est. Rursus, quoniam æqualis est ΕΜ ipsi ΖΜ, communis addatur ΜΔ; ergo ΕΜ, ΜΔ ipsis ΖΜ, ΜΔ æquales sunt, et angulus ΕΜΔ angulo ΖΜΔ major est. Basis igitur ΕΔ basi ΖΔ major est. Similiter autem ostendemus, et ΖΔ ipsā ΓΔ majorem esse; maxima quidem igitur est ΔΑ, major vero ΔΕ ipsā ΔΖ, et ΔΖ ipsā ΔΓ.



Καὶ ἐπεὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῆ ΜΚ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΔΚ ἐλάττω ἐστίν, ἐλάχιστη ἄρα ἐστί. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΜΑΔ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ, δύο εὐθείαι ἐντὸς συνεσθάρησαν, αἱ ΜΚ, ΚΔ ἄρα τῶν ΜΑ, ΑΔ ἐλάττωτες εἰσιν· ἴση δὲ ἡ ΜΚ τῆ ΜΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΑΔ ἐλάττω

Et quoniam ΜΚ, ΚΔ ipsā ΜΔ majores sunt, æqualis autem ΜΗ ipsi ΜΚ, reliqua igitur ΚΔ reliquā ΗΔ major est; quare et ΔΗ ipsā ΔΚ minor est; minima igitur est. Et quoniam trianguli ΜΑΔ super uno laterum ΜΔ, duæ rectæ intus constituuntur; ΜΚ, ΚΔ igitur ipsis ΜΑ, ΑΔ minores sunt; æqualis autem ΜΚ ipsi ΜΑ; reliqua igitur ΔΚ reliquā ΑΔ minor est. Similiter

ΜΔ sont plus grandes que la droite ΕΔ (20. 1); donc la droite ΑΔ est plus grande que la droite ΕΔ. De plus, puisque la droite ΕΜ est égale à la droite ΖΜ, ajoutons la droite commune ΜΔ, les droites ΕΜ, ΜΔ seront égales aux droites ΖΜ, ΜΔ; mais l'angle ΕΜΔ est plus grand que l'angle ΖΜΔ; donc la base ΕΔ est plus grande que la base ΖΔ (24. 1). Nous démontrerons semblablement que la droite ΖΔ est plus grande que la droite ΓΔ; donc la droite ΔΑ est la plus grande, la droite ΔΕ plus grande que ΔΖ, et la droite ΔΖ plus grande que ΔΓ.

De plus, puisque les droites ΜΚ, ΚΔ sont plus grandes que la droite ΜΔ (20. 1), et que la droite ΜΗ est égale à la droite ΜΚ, la droite restante ΚΔ est plus grande que la droite restante ΗΔ; donc la droite ΔΗ est plus petite que la droite ΔΚ; donc elle est la plus petite. Et puisque sur un des côtés ΜΑ du triangle ΜΑΔ on a construit intérieurement deux droites, les droites ΜΚ, ΚΔ sont plus petites que les droites ΜΑ, ΑΔ (21. 1); mais ΜΚ est égal à ΜΑ; donc la droite

ιστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ τῆς ΔΘ ἐλάττων ἰστίν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ, ἐλάττων δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι<sup>6</sup> ἀπὸ τοῦ Δ σημείου προσπισοῦνται<sup>7</sup> πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης. Συνιστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθεία, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Μ, τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ, καὶ ἐπιζεύχτω ἡ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἰστίν ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὲ αἱ ΚΜ, ΜΔ δυσὶ ταῖς ΒΜ, ΜΔ ἴσαι ἰστίν, ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση<sup>8</sup>· βάσις ἄρα ἡ ΔΚ βάσις τῇ ΔΒ ἴση ἰστί. Λέγω δὲ ὅτι τῇ ΔΚ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπισοῦται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω, καὶ ἴστω ἡ ΔΝ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἰστίν ἴση, ἀλλ' ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ ἰστίν ἴση· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ ἰστίν ἴση<sup>10</sup>, ἡ ἴγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερον ἰστίν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον εἰδέχθη.

Η καὶ ἄλλως. Ἐπιζεύχτω ἡ ΜΝ. Ἐπεὶ<sup>11</sup> ἴση ἰστίν ἡ ΚΜ τῇ ΜΝ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, καὶ βάσις ἡ

autem ostendemus et ΔΛ ipsā ΔΘ minorem esse; minima quidem igitur est ΔΗ, minor vero ΔΚ ipsā ΔΛ, et ΔΛ ipsā ΔΘ.

Dico et duas solum æquales a Δ puncto cadere in circulum, ex utraq̄ue parte ipsius ΔΗ minimæ. Constituatur ad ΜΔ rectam, et ad punctum in eâ Μ, ipsi ΚΜΔ angulo æqualis angulus ΔΜΒ, et jungatur ΔΒ. Et quoniam æqualis est ΜΚ ipsi ΜΒ, communis autem ΜΔ, duæ utique ΚΜ, ΜΔ duabus ΒΜ, ΜΔ æquales sunt, utraque utriq̄ue, et angulus ΚΜΔ angulo ΒΜΔ æqualis; basis igitur ΔΚ basi ΔΒ æqualis est. Dico autem ipsi ΔΚ rectæ aliam æqualem non cadere in circulum a Δ puncto. Si enim possibile, cadat, et sit ΔΝ. Quoniam igitur ΔΚ ipsi ΔΝ est æqualis, sed ΔΚ ipsi ΔΒ est æqualis; et ΔΒ igitur ipsi ΔΝ est æqualis; propinquior minimæ ipsius ΔΗ remotiori est æqualis, quod impossibile ostensum est.

Vel et aliter. Jungatur ΜΝ. Quoniam æqualis est ΚΜ ipsi ΜΝ, communis autem ΜΔ, et basis

restante ΔΚ est plus petite que la droite restante ΔΛ. Nous démontrerons semblablement que la droite ΔΛ est plus petite que la droite ΔΘ; donc la droite ΔΗ est la plus petite, et la droite ΔΚ est plus petite que la droite ΔΛ, et la droite ΔΛ plus petite que la droite ΔΘ.

Je dis aussi que du point Δ, on ne peut mener au cercle que deux droites égales, de l'un et l'autre côté de la plus petite ΔΗ. Construisons sur la droite ΜΔ, et au point Μ de cette droite, un angle ΔΜΒ égal à l'angle ΚΜΔ (23. 1), et joignons ΔΒ. Puisque la droite ΜΚ est égale à ΜΒ, et que la droite ΜΔ est commune, les deux droites ΚΜ, ΜΔ sont égales aux deux droites ΒΜ, ΜΔ, chacune à chacune; mais l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΒΜΔ; donc la base ΔΚ est égale à la base ΔΒ (4. 1). Je dis qu'on ne saurait mener du point Δ au cercle ΔΒΓ une autre droite égale à ΔΚ. Qu'elle soit menée, s'il est possible, et qu'elle soit ΔΝ. Puisque ΔΚ est égal à ΔΝ, et ΔΚ égal à ΔΒ, la droite ΔΒ est égale à ΔΝ; donc une droite plus près de la plus petite ΔΗ est égale à une droite qui s'en éloigne davantage, ce qui a été démontré impossible.

Ou autrement. Joignons ΜΝ. Puisque la droite ΚΜ est égale à ΜΝ, que la

136 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΔΚ βάσει τῆ ΔΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ἀπὸ ΚΜΔ γωνία τῆ ὑπὸ ΝΜΔ ἴση ἐστίν. ΑΛΛ' ἡ ὑπὸ ΚΜΔ τῆ ὑπὸ ΒΜΔ ἐστίν ἴση<sup>12</sup>. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΜΔ ἄρα<sup>13</sup> τῆ ὑπὸ ΝΜΔ ἐστίν ἴση<sup>14</sup>, ἡ ἐλάττων τῆ μείζονι, ὅπερ ἐστίν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι<sup>15</sup> πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἰσχυρίσθαι προσπισσοῦνται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΔΚ basi ΔΝ æqualis; angulus igitur ΚΜΔ angulo ΝΜΔ æqualis est. Sed ΚΜΔ ipsi ΒΜΔ est æqualis; et ΒΜΔ igitur ipsi ΝΜΔ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur plures quam duæ æquales in ΑΒΓ circulum a Δ puncto ex utràque parte ipsius ΔΗ minimæ cadent. Si igitur extra circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

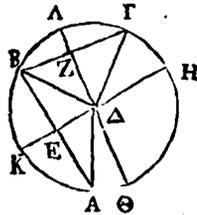
Ἐὰν κύκλου ληφθῆ τι σημείον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεΐαι<sup>1</sup>, τὸ ληφθὲν σημείον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντός δὲ αὐτοῦ σημείον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπίπτει-

PROPOSITIO IX.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, ab eo autem puncto in circulum cadant plures quam duæ æquales rectæ, sumptum punctum centrum est circuli.

Sit circulus ΑΒΓ, intra autem ipsum punctum Δ, et a Δ in ΑΒΓ circulum cadant plures



τῶσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεΐαι<sup>2</sup>, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ Δ σημείον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

quam duæ æquales rectæ, ipsæ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ; dico Δ punctum centrum esse ΑΒΓ circuli.

droite ΔΔ est commune et que la base ΔΚ est égale à la base ΔΝ, l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΝΜΔ (8. 1). Mais l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΒΜΔ; donc l'angle ΒΜΔ est égal à l'angle ΝΜΔ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc il est impossible de mener du point Δ au cercle ΑΒΓ, de l'un et l'autre côté de la plus petite ΔΗ, plus de deux droites égales. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Si dans un cercle, l'on prend un point quelconque, et si plus de deux droites menées de ce point à la circonférence sont égales entr'elles, le point qu'on aura pris sera le centre du cercle.

Soit le cercle ΑΒΓ, et le point intérieur Δ, et que plus de deux droites ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ menées du point Δ à la circonférence soient égales entre elles, je dis que le point Δ est le centre du cercle ΑΒΓ.

Επιζεύχθωσαν γὰρ αἱ  $AB, BG$ , καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ  $E, Z$  σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθείσαι αἱ  $EA, ZA$  διήχθωσαν ἐπὶ τὰ  $K, H, \Lambda, \Theta$  σημεῖα.

Ἐπὶ οὖν ἐστὶν ἴση<sup>3</sup> ἡ  $AE$  τῇ  $EB$ , κοινὴ δὲ ἡ  $EA$ . Δύο δὲ αἱ  $AE, EA$  δυοῖν ταῖς  $BE, EA$  ἴσαι εἰσὶ καὶ βάσεις ἡ  $\Delta A$  βάσει τῇ  $\Delta B$  ἴση<sup>4</sup>. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $AED$  γωνία τῇ ὑπὸ  $BED$  ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $AED, BED$  γωνιῶν ἡ  $HK$  ἄρα τὴν  $AB$  τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς<sup>5</sup>. Καὶ ἐπεὶ, εἰάν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθειᾶν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνη, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ τῆς  $HK$  ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ  $ABG$ <sup>6</sup> κύκλου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐπὶ τῆς  $\Theta\Lambda$  ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ  $ABG$  κύκλου<sup>7</sup>. Καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ  $HK, \Theta\Lambda$  εὐθεῖαι, ἢ τὸ  $\Delta$  σημεῖον· τὸ  $\Delta$  ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ABG$  κύκλου. Ἐάν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἴξῃς.

Jungantur enim  $AB, BG$ , et secentur bifariam in  $E, Z$  punctis, et junctæ  $EA, ZA$  producantur ad  $K, H, \Lambda, \Theta$  puncta.

Quoniam igitur æqualis est  $AE$  ipsi  $EB$ , communis autem  $EA$ , duæ utique  $AE, EA$  duabus  $BE, EA$  æquales sunt; et basis  $\Delta A$  ipsi  $\Delta B$  æqualis; angulus igitur  $AED$  angulo  $BED$  æqualis est; rectus igitur uterque  $AED, BED$  angulorum.  $HK$  igitur ipsam  $AB$  secat bifariam et ad rectos. Et quoniam, si in circulo aliqua recta rectam aliquam bifariam et ad rectos secet, in secante est centrum circuli; in  $HK$  igitur est centrum ipsius  $ABG$  circuli. Propter eadem utique et in  $\Theta\Lambda$  est centrum ipsius  $ABG$  circuli. Et nullum aliud commune habent  $HK, \Theta\Lambda$  rectæ quam  $\Delta$  punctum;  $\Delta$  igitur punctum centrum est  $ABG$  circuli. Si igitur circuli, etc.

Joignons les droites  $AB, BG$ , coupons-les en deux parties égales aux points  $E, Z$  (10. 1), et ayant joint les droites  $EA, ZA$ , prolongeons-les vers les points  $K, H, \Lambda, \Theta$ .

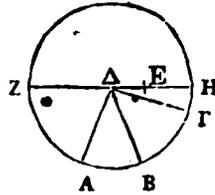
Puisque  $AE$  est égal à  $EB$ , et que la droite  $EA$  est commune, les deux droites  $AE, EA$  sont égales aux deux droites  $BE, EA$ ; mais la base  $\Delta A$  est égale à la base  $\Delta B$ ; donc l'angle  $AED$  est égal à l'angle  $BED$  (8. 1); donc chacun des angles  $AED, BED$  est droit; donc la droite  $HK$  coupe la droite  $AB$  en deux parties égales et à angles droits. Mais lorsque, dans un cercle, une droite coupe une autre droite en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle est dans la sécante (cor. 1. 3); donc le centre du cercle  $ABG$  est dans  $HK$ . Par la même raison, le centre du cercle  $ABG$  est dans  $\Theta\Lambda$ . Mais les droites  $HK, \Theta\Lambda$  n'ont d'autre point commun que le point  $\Delta$ ; donc le point  $\Delta$  est le centre du cercle  $ABG$ . Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσηπτεῖται πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

ALITER.

Intra enim circulum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, a Δ autem in ΑΒΓ circulum cadant plures quam duæ æquales rectæ, ipsæ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ; dico sumptum punctum Δ centrum esse ipsius ΑΒΓ circuli.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζηυχθεῖσα ἡ ΔΕ διήχθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η σημεῖα, ἡ ΖΗ ἄρα<sup>β</sup> διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ΖΗ διαμέτρου εἰληπταί τι σημεῖον τὸ Δ, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου<sup>θ</sup>, μάλιστα μὲν ἔσται ἡ ΔΗ, μείζων δὲ ἢ μὲν ΔΓ τῆς ΔΒ, ἢ δὲ ΔΒ τῆς ΔΑ. Ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι

Non enim, sed si possibile, sit Ε, et juncta ΔΕ producat in Ζ, Η puncta; ergo ΖΗ diameter est ipsius ΑΒΓ circuli. Quoniam igitur circuli ΑΒΓ in ΖΗ diametro sumptum est aliquod punctum Δ, quod non est centrum circuli, maxima quidem erit ΔΗ, major vero ΔΓ ipsâ ΔΒ, et ΔΒ ipsâ ΔΑ. Sed et æqualis, quod est impossibile; non igitur Ε centrum est ipsius ΑΒΓ circuli. Similiter autem ostendemus, neque aliud

## A U T R E M E N T.

Dans le cercle ΑΒΓ soit pris un point quelconque Δ, et que plus de deux droites égales tombent du point Δ dans le cercle ΑΒΓ, les droites ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ; je dis que le point Δ est le centre du cercle ΑΒΓ.

Qu'il ne le soit point, mais s'il est possible, que ce soit le point Ε; ayant joint ΔΕ, prolongeons cette droite vers les points Ζ, Η; la droite ΖΗ sera le diamètre du cercle ΑΒΓ. Puisque l'on a pris dans le diamètre ΖΗ du cercle ΑΒΓ un point Δ, qui n'est pas le centre de ce cercle, la droite ΔΗ sera la plus grande, la droite ΔΓ plus grande que la droite ΔΒ, et la droite ΔΒ plus grande que la droite ΔΑ (7, 3). Mais elle lui est égale, ce qui est impossible; donc le

οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Δ· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου<sup>10</sup>.

præter Δ; ergo Δ punctum centrum est ipsius ΑΒΓ circuli.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

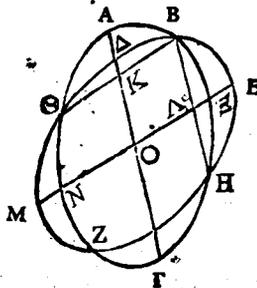
PROPOSITIO X.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο<sup>1</sup>.

Circulus circulum non secat in pluribus punctis quam duobus.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τέμνεται κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ Β, Η,

Si enim possibile, circulus ΑΒΓ circulum ΔΕΖ secet in pluribus punctis quam duobus, in



Ζ, Θ, καὶ ἰπιζευχθεῖσαι αἱ ΒΘ, ΒΗ δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ σημεία· καὶ ἀπὸ τῶν Κ, Λ ταῖς ΒΘ, ΒΗ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΚΓ, ΛΜ διέχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε σημεία<sup>2</sup>.

ipsis Β, Η, Ζ, Θ, et junctæ ΒΘ, ΒΗ bifariam secantur in Κ, Λ punctis; et ab ipsis Κ, Λ ipsis ΒΘ, ΒΗ ad rectos ductæ ΚΓ, ΛΜ producantur in Α, Ε puncta.

point E n'est pas le centre du cercle ΑΒΓ. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre point, excepté Δ, ne peut l'être; donc le point Δ est le centre du cercle ΑΒΓ.

PROPOSITION X.

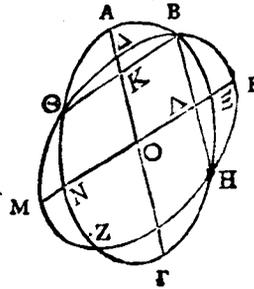
Un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points.

Car si cela est possible, que le cercle ΑΒΓ coupe le cercle ΔΕΖ en plus de deux points, aux points Β, Η, Ζ, Θ; joignons les droites ΒΘ; ΒΗ; coupons-les en deux parties égales aux points Κ, Λ, et par les points Κ, Λ, ayant conduit les droites ΚΓ, ΛΜ perpendiculaires à ΒΘ, ΒΗ, prolongeons-les vers les points Α, Ε.

140 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ  $ΑΒΓ$  εὐθεῖά τις ἢ  $ΑΓ$  εὐθεῖάν τινα τὴν  $ΒΘ$  δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει<sup>3</sup>, ἐπὶ τῆς  $ΑΓ$  ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ  $ΑΒΓ$  κύκλου. Πάλιν, ἔπει ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ  $ΑΒΓ$  εὐθεῖά τις ἢ  $ΝΞ$  εὐθεῖάν τινα τὴν  $ΒΗ$  δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς  $ΝΞ$  ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ΑΒΓ$  κύκλου. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς

Quoniam igitur in circulo  $ΑΒΓ$  recta aliqua  $ΑΓ$  rectam aliquam  $ΒΘ$  bifariam et ad rectos secat, in  $ΑΓ$  igitur est centrum ipsius  $ΑΒΓ$  circuli. Rursus, quoniam in circulo eodem  $ΑΒΓ$  recta aliqua  $ΝΞ$  rectam aliquam  $ΒΗ$  bifariam et ad rectos secat, in  $ΝΞ$  igitur centrum est ipsius  $ΑΒΓ$  circuli. Ostensum autem ipsum esse et in  $ΑΓ$ , et



$ΑΓ$ , καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ  $ΑΓ$ ,  $ΝΞ$  εὐθεῖαι ἀλλήλαις ἢ κατὰ τὸ  $Ο$ . τὸ  $Ο$  ἄρα συμμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ΑΒΓ$  κύκλου. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ  $ΔΕΖ$  κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ  $Ο$ . δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , τὸ αὐτὸ ἐστὶ κέντρον τὸ  $Ο$ , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἰξῆς.

in nullo puncto conveniunt  $ΑΓ$ ,  $ΝΞ$  rectæ inter se præterquam in  $Ο$ ; ergo  $Ο$  punctum centrum est ipsius  $ΑΒΓ$  circuli. Similiter autem ostendemus; et ipsius  $ΔΕΖ$  circuli centrum esse  $Ο$ ; duorum igitur circulorum sese secantium  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , idem erit centrum  $Ο$ , quod est impossibile. Non igitur circulus, etc.

Puisque dans le cercle  $ΑΒΓ$ , la droite  $ΑΓ$  coupe la droite  $ΒΘ$  en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle  $ΑΒΓ$  est dans la droite  $ΑΓ$  (cor. 1. 3). De plus, puisque dans le même cercle  $ΑΒΓ$  la droite  $ΝΞ$  coupe la droite  $ΒΗ$  en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle  $ΑΒΓ$  est dans la droite  $ΝΞ$ . Mais on a démontré qu'il est dans la droite  $ΑΓ$ , et les deux droites  $ΑΓ$ ,  $ΝΞ$  ne se rencontrent qu'au point  $Ο$ ; donc le point  $Ο$  est le centre du cercle  $ΑΒΓ$ . Nous démontrerons semblablement que le point  $Ο$  est le centre du cercle  $ΔΕΖ$ ; donc le même point  $Ο$  est le centre des deux cercles  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , qui se coupent mutuellement, ce qui est impossible (5. 3). Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

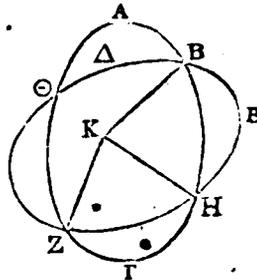
Κύκλος γὰρ πάλιν ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ  
 τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ Β, Η,  
 Ζ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τὸ  
 Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΔΕΖ εἵληπται τι ση-  
 μεῖον ἐντὸς, τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς τὸν

ALITER.

Circulus enim rursus ΑΒΓ circulum ΔΕΖ se-  
 cet in pluribus punctis quam duobus, in ipsis Β,  
 Η, Ζ, et sumatur centrum ipsius ΑΒΓ circuli, ip-  
 sum Κ, et jungantur ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Quoniam igitur intra circulum ΔΕΖ sumptum  
 est aliquod punctum Κ, et a Κ in ΔΕΖ circu-



ΔΕΖ κύκλον προσπεπτάκασι πλείους ἢ δύο εὐ-  
 θεῖαι ἴσαι<sup>6</sup>, αἱ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ· τὸ Κ ἄρα σημείον  
 κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου. Ἔστι δὲ καὶ τοῦ  
 ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ· δύο ἄρα κύκλων τε-  
 μνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ Κ,  
 ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἐξῆς.

lum incidunt plures quam duæ rectæ æquales,  
 ipsæ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ; ergo Κ punctum centrum est  
 ipsius ΔΕΖ circuli. Est autem et ipsius ΑΒΓ circuli  
 centrum ipsius Κ; duorum igitur circularum  
 scēse secantium idem centrum est Κ, quod im-  
 possibile. Non igitur circulus, etc.

AUTREMENT.

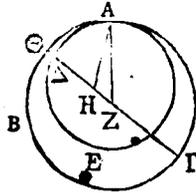
Car que le cercle ΑΒΓ coupe encore le cercle ΔΕΖ en plus de deux points, aux  
 points Β, Η, Ζ; prenons le centre Κ du cercle ΑΒΓ, et joignons ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Puisque dans le cercle ΔΕΖ, on a pris un point Κ, et que plus de deux droites  
 égales ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ tombent du point Κ dans le cercle ΔΕΖ, le point Κ est  
 le centre du cercle ΔΕΖ (9. 3). Mais le point Κ est le centre du cercle ΑΒΓ;  
 donc le même point Κ est le centre de deux cercles qui se coupent; ce qui  
 est impossible (5. 3).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

Ἐάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεΐα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΔΕ$  ἐφαπτίσθωσαν<sup>2</sup> ἀλλήλων ἐντός κατὰ τὸ  $Α$  σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν  $ΑΒΓ$  κύκλου<sup>3</sup> κέντρον τὸ  $Ζ$ , τοῦ δὲ  $ΑΔΕ$  τὸ  $Η$ . λέγω ὅτι ἢ ἀπὸ τοῦ  $Η$  ἐπὶ τὸ  $Ζ$  ἐπιζευγνυμένη εὐθεΐα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ  $Α$ <sup>4</sup> πεσεῖται.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ὡς ἡ  $ΖΗΘ$ , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ  $ΑΖ$ ,  $ΑΗ$ .

Ἐπεὶ οὖν αἱ  $ΑΗ$ ,  $ΗΖ$  τῆς  $ΖΑ$  τοῦτ' ἴσθι τῆς  $ΖΘ$ <sup>5</sup>, μείζονές εἰσι, κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ  $ΖΗ$ . λοιπὴ ἄρα ἢ  $ΑΗ$  λοιπῆς τῆς  $ΗΘ$  μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἢ τῇ  $ΔΗ$ . καὶ ἢ  $ΗΔ$  ἄρα τῆς  $ΗΘ$  μείζων ἐστίν,

Si duo circuli sese contingant intus, et sumantur eorum centra, centra eorum conjungens recta producta in contactum cadet circumlorum.

Duo enim circuli  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΔΕ$  sese contingant intus in  $Α$  puncto, et sumatur quidem ipsius  $ΑΒΓ$  circuli centrum  $Ζ$ , ipsius autem  $ΑΔΕ$  ipsum  $Η$ ; dico ab  $Η$  ad  $Ζ$  conjungentem rectam productam in  $Α$  cadere.

Non enim, sed si possibile, cadat ut  $ΖΗΘ$ , et jungantur  $ΑΖ$ ,  $ΑΗ$ .

Quoniam igitur  $ΑΗ$ ,  $ΗΖ$  ipsā  $ΖΑ$ , hoc est ipsā  $ΖΘ$  majores sunt, communis auferatur  $ΖΗ$ ; reliqua igitur  $ΑΗ$  reliquā  $ΗΘ$  major est.  $Æqualis$  autem  $ΑΗ$  ipsi  $ΔΗ$ ; et  $ΗΔ$  igitur ipsā  $ΗΘ$

## PROPOSITION XI.

Si deux cercles se touchent intérieurement, et si on prend leurs centres, la droite qui joint leurs centres étant prolongée tombera au contact de ces cercles.

Que les deux cercles  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΔΕ$  se touchent intérieurement au point  $Α$ ; prenons le centre  $Ζ$  du cercle  $ΑΒΓ$ , et le centre  $Η$  du cercle  $ΑΔΕ$ ; je dis que la droite menée du point  $Η$  au point  $Ζ$ , étant prolongée, tombera en  $Α$ .

Que cela ne soit point, mais s'il est possible, qu'elle tombe comme  $ΖΗΘ$ ; et joignons  $ΑΖ$ ,  $ΑΗ$ .

Puisque les droites  $ΑΗ$ ,  $ΗΖ$  sont plus grandes que  $ΖΑ$  (20. 1), c'est-à-dire que  $ΖΘ$ , retranchons la droite commune  $ΖΗ$ ; la droite restante  $ΑΗ$  sera plus grande que la droite restante  $ΗΘ$ . Mais  $ΑΗ$  est égal à  $ΔΗ$ ; donc  $ΗΔ$  est plus grand que  $ΘΗ$ ,

ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν<sup>6</sup> ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἢ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ Α συναφῆς πείσεται· κατὰ τὸ Α ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πείσεται<sup>7</sup>. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι, καὶ τὰ ἐξῆς.

major est, minor majore, quod est impossibile. Non igitur a Z ad H conjuncta recta extra contactum ad A cadet. Ergo in contactum ad A cadet. Si igitur duo circuli, etc.

Α Λ Λ Ω Σ.

ALITER.

Ἀλλὰ δὴ πιπτέτω ὡς ἢ ΗΖΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω<sup>8</sup> ἐπ' εὐθείας ἢ ΗΖΓ ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΖ.

Sed etiam cadat ut ΗΖΓ, et producat in directum ipsa ΗΖΓ ad Θ punctum, et jungantur ΑΗ, ΑΖ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ μείζονες εἰσὶ τῆς ΑΖ, ἀλλὰ ἢ ΖΑ ἴση ἐστὶ τῇ ΖΓ, τοῦτ' ἐστὶ τῇ ΖΘ, κοινὴ ἀφηρήσθω ἢ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἢ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν, τοῦτ' ἐστὶν ἢ ΗΔ τῆς ΗΘ, ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ὁμοίως, καὶ ἐκτὸς ἢ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν τὸ αὐτὸ ἄτοπον<sup>9</sup>.

Quoniam igitur ΑΗ, ΗΖ majores sunt ipsâ ΑΖ, sed ΖΑ æqualis est ipsi ΖΓ, hoc est ipsi ΖΘ, communis auferatur ΖΗ; reliqua igitur ΑΗ reliquâ ΗΘ major est, hoc est ΗΔ ipsâ ΗΘ, minor majore; quod est impossibile. Similiter, et si extra parvum sit centrum majoris circuli, ostendemus hoc idem absurdum.

le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc la droite menée du point z au point H ne tombera pas hors du contact en A; donc elle tombera dans le contact en A. Donc, etc.

AUTREMENT.

Mais qu'elle tombe comme ΗΖΓ, prolongeons ΗΖΓ directement vers le point Θ, et joignons ΑΗ, ΗΖ.

Puisque les droites ΑΗ, ΗΖ sont plus grandes que ΑΖ, et que ΖΑ est égal à ΖΓ; c'est-à-dire à ΖΘ, retranchons la droite commune ΖΗ; la droite restante ΑΗ sera plus grande que la droite restante ΗΘ, c'est-à-dire, ΗΔ plus grand que ΗΘ, le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Si le centre du grand cercle était hors du petit cercle, nous démontrerons semblablement qu'il s'en suivrait une absurdité.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

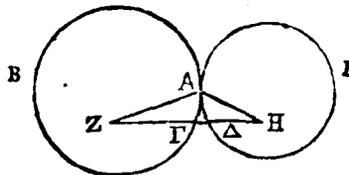
PROPOSITIO XII.

Εάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἄλλήλων ἐκτός, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζυγμένη εὐθεΐα<sup>2</sup> διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτίσθωσαν ἄλλήλων ἐκτός κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰληφθῶ τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου<sup>3</sup> κέντρον, τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζυγυμένη εὐθεΐα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Si duo circuli sese contingant extra, centra ipsorum cunjungens recta per contactum transibit.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΑΔΕ sese contingant extra in Α puncto, et sumatur quidem ipsius ΑΒΓ circuli centrum Ζ, ipsius vero ΑΔΕ ipsum Η; dico a Ζ ad Η conjungentem rectam per contactum ad Α transire.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς αἱ ΖΓΔΗ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ

Non enim, sed si possibile, eat ut ΖΓΔΗ, et jungantur ΖΑ, ΑΗ.

Quoniam igitur Ζ punctum centrum est ipsius ΑΒΓ circuli, æqualis est ΖΑ ipsi ΖΓ. Rursus, quoniam Η punctum centrum est ipsius ΑΔΕ circuli, æqualis est ΑΗ ipsi ΗΔ. Ostensa est

PROPOSITION XII.

Si deux cercles se touchent extérieurement, la droite qui joint leurs centres passera par le contact.

Que les deux cercles ΑΒΓ, ΑΔΕ se touchent extérieurement au point Α; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et le centre Η du cercle ΑΔΕ; je dis que la droite menée du point Ζ au point Η passera par le contact en Α.

Car que cela ne soit point, mais, s'il est possible, qu'elle tombe comme ΖΓΔΗ, et joignons ΖΑ, ΑΗ.

Puisque le point Ζ est le centre du cercle ΑΒΓ, la droite ΖΑ est égale à ΖΓ. De plus, puisque le point Η est le centre du cercle ΑΔΕ, la droite ΑΗ est égale à ΗΔ. Mais on a démontré que ΖΑ est égal à la droite ΖΓ; donc les droites ΖΑ

ἴση· αἱ ἄρα ΖΑ, ΑΗ ταῖς ΖΓ, ΔΗ ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ΖΗ τῶν ΖΑ, ΑΗ μείζων ἰστίη. ἀλλὰ καὶ ἐλάττω, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι' αὐτῆς ἄρα. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι, καὶ τὰ ἐξῆς.

est autem ZA ipsi ZΓ æqualis; ipsæ igitur ZA, ΑΗ ipsis ΖΓ, ΔΗ æquales sunt; quare tota ΖΗ ipsis ΖΑ, ΑΗ major est. Sed et minor, quod impossibile. Non igitur a Z ad Η ducta recta per contactum ad Α non transibit; per ipsum igitur. Si igitur duo circuli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

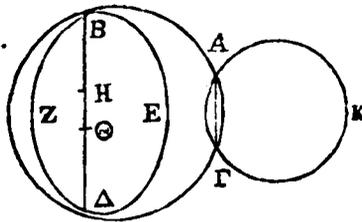
PROPOSITIO XIII.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφαπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἓν, ἰάν τε ἐντὸς ἐφαπτεται ἰάν τε ἐκτὸς'.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΔΓ κύκλου τοῦ ΕΒΖΔ ἐφαπτίσθω<sup>2</sup> πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἐν, τὰ Β, Δ.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam in uno, sive intus contingat, sive extra.

Si enim possibile, circulus ΑΒΔΓ circulum ΕΒΖΔ contingat primum intus in pluribus punctis quam in uno, in Β, Δ.



Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΔΓ κύκλου κέντρον, τὸ Η· τοῦ δὲ ΕΒΖΔ, τὸ Θ.

Et sumatur ipsius quidem ΑΒΔΓ circuli centrum Η; ipsius autem ΕΒΖΔ, ipsum Θ.

ΑΗ sont égales aux droites ΖΓ, ΔΗ; donc la droite entière ΖΗ est plus grande que les droites ΖΑ, ΑΗ. Mais au contraire, elle est plus petite (20. 1), ce qui est impossible. Donc la droite menée du point Ζ au point Η ne peut pas ne pas passer par le contact en Α; donc elle y passe. Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

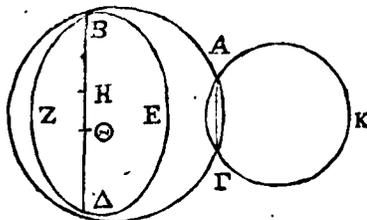
Un cercle ne touche point un cercle en plus d'un point, soit qu'il le touche intérieurement, ou extérieurement.

Car si cela est possible, que le cercle ΑΒΔΓ touche d'abord intérieurement le cercle ΕΒΖΔ en plus d'un point, aux points Β, Δ.

Prenons le centre Η du cercle ΑΒΔΓ, et le centre Θ du cercle ΕΒΖΔ.

Η ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζυγνυμένη εὐ-  
θεῖα<sup>3</sup> ἐπὶ τὰ Β, Δ πεσέται. Πιπτέτω ὡς ἡ ΒΗΘΔ.  
Καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΔΓ  
κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΔ· μείζων ἄρα ἡ  
ΒΗ τῆς ΘΔ· πολλῶ ἄρα μείζων ἡ ΒΘ τῆς ΘΔ.  
Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  
ΕΒΖΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΘ τῇ ΘΔ. Εδείχθη  
δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶ μείζων, ὅπερ ἄδύνατον·  
οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ  
πλείονα σημεία ἢ ἓν.

Ipsa igitur ab Η ducta recta ad Θ in puncta  
Β, Δ cadet. Cadat ut ΒΗΘΔ. Et quoniam Η punc-  
tum centrum est ipsius ΑΒΔΓ circuli, æqualis est  
ΒΗ ipsi ΗΔ; major igitur ΒΗ ipsâ ΘΔ; ergo  
multo major ΒΘ ipsâ ΘΔ. Rursus, quoniam Θ  
punctum centrum est ipsius ΕΒΖΔ circuli, æqua-  
lis est ΒΘ ipsi ΘΔ. Ostensa est autem ipsâ et  
multo major, quod impossibile; non igitur  
circulus circulum contingit intus in pluribus  
punctis quam in uno.



Λέγω δὴ ὅτι οὐδε ἑκτός. Εἰ γὰρ δυνατόν, κύ-  
κλος ὁ ΑΓΚ κύκλου τοῦ<sup>5</sup> ΑΒΔΓ ἐφαπτόσθαι ἐκτός  
κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν, τὰ Α, Γ, καὶ ἐπι-  
ζεύχθαι ἡ ΑΓ.

Dico etiam neque extra. Si enim possibile,  
circulus ΑΓΚ circulum ΑΒΔΓ contingat extra  
in pluribus punctis quam in uno, in Α, Γ, et  
jungatur ΑΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν ΑΒΔΓ, ΑΓΚ εἴληπται ἐπὶ  
τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεία τὰ  
Α, Γ, ἡ ἄρα<sup>6</sup> ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεία ἐπιζυγνυμένη

Quoniam igitur circulorum ΑΒΔΓ, ΑΓΚ sumpta  
sunt in circumferentiis utriusque duo quælibet  
puncta Α, Γ, hæc utique puncta conjungens recta

La droite menée du point Η au point Θ passera par les points Β, Δ (11.3).  
Qu'elle tombe comme ΒΗΘΔ. Puisque le point Η est le centre du cercle ΑΒΔΓ,  
la droite ΒΗ est égale à ΗΔ; donc ΒΗ est plus grand que ΘΔ; donc ΒΘ est beaucoup  
plus grand que ΘΔ. De plus, puisque le point Θ est le centre du cercle  
ΕΒΖΔ, la droite ΒΘ est égale à ΘΔ. Mais on a démontré qu'elle est beaucoup  
plus grande, ce qui est impossible; donc un cercle ne touche pas intérieurement  
un cercle en plus d'un point.

Je dis aussi qu'il ne le touche pas extérieurement en plus d'un point. Car,  
s'il est possible, que le cercle ΑΓΚ touche extérieurement le cercle ΑΒΔΓ en  
plus d'un point, aux points Α, Γ; joignons ΑΓ.

Puisque dans la circonférence des cercles ΑΒΔΓ, ΑΓΚ, on a pris deux points  
quelconques Α, Γ, la droite qui joindra ces deux points tombera dans

εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται. Ἀλλὰ τοῦ μὲν  $ΑΒΔΓ$  ἐντὸς ἔπιση, τοῦ δὲ  $ΑΓΚ$  ἐκτὸς, ὅπερ ἀτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν. Ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐντὸς. Κύκλος ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

intra utrumque cadet. Sed quidem intra ipsum  $ΑΒΔΓ$  cadit, extra vero ipsum  $ΑΓΚ$ , quod absurdum. Non igitur circulus circulum contingit extra in pluribus punctis quam in uno. Ostensum est autem neque intus. Circulus igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐστω κύκλος ὁ  $ΑΒΔΓ$ , καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἴστωσαν αἱ  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$ . λέγω ὅτι αἱ  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

PROPOSITIO XIV.

In circulo æquales rectæ æqualiter distant a centro, et quæ æqualiter distant a centro æquales inter se sunt.

Sit circulus  $ΑΒΔΓ$ , et in eo æquales rectæ sint  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$ ; dico ipsas  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  æqualiter distare a centro.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ  $ΑΒΔΓ$  κύκλου, καὶ ἴστω τὸ  $Ε$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $Ε$  ἐπὶ τὰς  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  κάθετοι ἔχθωσαν αἱ  $ΕΖ$ ,  $ΕΗ$ , καὶ ἰσχυθῶσαν αἱ  $ΑΕ$ ,  $ΕΕ$ .

Sumatur enim centrum ipsius  $ΑΒΔΓ$  circuli, et sit  $Ε$ , et ab  $Ε$  ad  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  perpendiculares ductantur  $ΕΖ$ ,  $ΕΗ$ , et jungantur  $ΑΕ$ ,  $ΕΕ$ .

l'un et l'autre cercle (2. 3). Mais elle tombe dans le cercle  $ΑΒΔΓ$ , et hors du cercle  $ΑΓΚ$  (déf. 3. 3), ce qui est absurde; donc un cercle ne touche pas extérieurement un cercle en plus d'un point. Mais on a démontré qu'il ne le touche pas intérieurement en plus d'un point. Donc etc.

PROPOSITION XIV.

Dans un cercle les droites égales sont également éloignées du centre, et les droites également éloignées du centre sont égales entr'elles.

Soit le cercle  $ΑΒΔΓ$ , et que dans ce cercle les droites  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  soient égales; je dis que les droites  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  sont également éloignées du centre.

Prenons le centre du cercle  $ΑΒΔΓ$ , qu'il soit le point  $Ε$ , du point  $Ε$  menons les droites  $ΕΖ$ ,  $ΕΗ$  perpendiculaires aux droites  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$ , et joignons  $ΑΕ$ ,  $ΕΕ$ .

148 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐπιὶ οὖν εὐθείᾳ τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθείαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθῶς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. Ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΒΖ· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἰστί διπλῆ, καὶ ἴσιν ἴση ἡ<sup>2</sup> ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· Καὶ ἐπιὶ ἴση ἰστί ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ

Quoniam itaque recta aliqua EZ per centrum rectam aliquam AB non per centrum ad rectos secat, et bifariam ipsam secat. Æqualis igitur AZ ipsi BZ; dupla igitur AB ipsius AZ. Propter eadem utique et ΓΔ ipsius ΓΗ est dupla, et est æqualis AB ipsi ΓΔ; æqualis igitur et AZ ipsi ΓΗ. Et quoniam æqualis est ΑΕ ipsi ΕΓ, æquale et ipsum ex ΑΕ ipsi ex ΕΓ. Sed ipsi quidem



ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ ἴσα ἰστί τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΕ, ὅν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἰστί τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ, ἴση γὰρ ἰστί ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἰστί, ἴση ἄρα<sup>3</sup> ἡ ΖΕ τῇ ΕΗ. Ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέν-

ex ΑΕ æqualia ipsa ex ΑΖ, ΖΕ, rectus enim ad Ζ angulus; ipsi vero ex ΕΓ æqualia ipsa ex ΕΗ, ΗΓ, rectus enim ad Η angulus; ipsa igitur ex ΑΖ, ΖΕ æqualia sunt ipsis ex ΓΗ, ΗΕ, quorum ipsum ex ΑΖ æquale est ipsi ex ΓΗ, æqualis enim est ΑΖ ipsi ΓΗ; reliquum igitur ipsum ex ΖΕ reliquo ex ΕΗ; æquale est, æqualis igitur ΖΕ ipsi ΕΗ. In circulo autem æqualiter distare à centro rectæ dicuntur, quando a cen-

Puisque la droite EZ menée par le centre, coupe à angles droits la droite AB, non menée par le centre, elle la coupe en deux parties égales (3. 5). Donc AZ est égal à BZ; donc AB est double de AZ. Par la même raison ΓΔ est double de ΓΗ; mais AB est égal à ΓΔ; donc AZ est égal à ΓΗ. Et puisque AE est égal à EG, le carré de AE est égal au carré de EG. Mais les carrés des droites AZ, ZE sont égaux au carré de AE (47. 1), car l'angle en Z est droit; et les carrés des droites EH, ΗΓ sont égaux au carré de EG, car l'angle en H est droit; donc les carrés des droites AZ, ZE sont égaux aux carrés des droites ΓΗ, ΗΕ; mais le carré de AZ est égal au carré de ΓΗ, car AZ est égal à ΓΗ; donc le carré restant de ZE est égal au carré restant de EH; donc ZE est égal à EH. Mais dans un cercle les droites sont dites également éloignées du centre, lorsque les per-

τρον ἐπ' αὐτάς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὄσιν· αἱ ἄρα AB, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ AB, ΓΔ ἰσθίαι ἴσον ἀπέχονται ἀπὸ τοῦ κέντρου, τοῦτ' ἔστιν, ἴση ἔστω ἡ EZ τῆ ΕΗ· λέγω ὅτι ἴση ἔστί καὶ ἡ AB τῆ ΓΔ.

Ἰῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἔστιν ἡ μὲν AB τῆς AZ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ AE τῆ ΓE, ἴσον ἔστί τὸ ἀπὸ τῆς AE τῶ ἀπὸ τῆς ΓE· ἀλλὰ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς AE ἴσα ἔστί τὰ ἀπὸ τῶν EZ, ZA, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς ΓE ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν EZ, ZA ἴσα ἔστί τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῶ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἔστιν ἴσον<sup>5</sup>, ἴση γὰρ ἡ EZ τῆ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AZ λοιπῶ τῶ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἔστί<sup>6</sup>. ἴση ἄρα ἡ AZ τῆ ΓΗ, καὶ ἔστι τῆς μὲν AZ διπλῆ ἡ AB, τῆς δὲ ΓΗ διπλῆ ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἡ AB τῆ ΓΔ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

tro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt; ergo AB, ΓΔ æqualiter distant a centro.

Sed demum æqualiter AB, ΓΔ distant a centro, hoc est, æqualis sit EZ ipsi ΕΗ; dico æqualem esse et AB ipsi ΓΔ.

Etenim iisdem constructis, similiter utique ostendemus duplam esse quidem AB ipsius AZ, et ΓΔ ipsius ΓΗ; et quoniam æqualis est AE ipsi ΓE, æquale est ipsum ex AE ipsi ex ΓE; sed ipsi quidem ex AE æqualia sunt ipsa ex EZ, ZA, ipsi vero ex ΓE ipsa ex ΕΗ, ΗΓ; ipsa igitur ex EZ, ZA æqualia sunt ipsis ex ΕΗ, ΗΓ, quorum ipsum ex EZ ipsi ex ΕΗ est æquale, æqualis enim EZ ipsi ΕΗ; reliquum igitur ex AZ reliquo ex ΓΗ est æquale; æqualis igitur AZ ipsi ΓΗ, et est ipsius quidem AZ dupla AB, ipsius vero ΓΗ dupla ΓΔ. Æqualis igitur AB ipsi ΓΔ. In circulo igitur, etc.

pendiculaires menées du centre sur ces droites sont égales (déf. 4. 3); donc les droites AB, ΓΔ sont également éloignées du centre.

Mais que les droites AB, ΓΔ soient également éloignées du centre, c'est-à-dire, que ZE soit égal à ΕΗ; je dis que AB est égal à ΓΔ.

Les mêmes constructions étant faites, nous démontrerons semblablement que AB est double de AZ, et ΓΔ double de ΓΗ. Et puisque AE est égal à ΓE, le carré de AE est égal au carré de ΓE. Mais les carrés des droites EZ, ZA sont égaux au carré de AE (47. 1), et les carrés des droites ΕΗ, ΗΓ égaux au carré de ΓE; donc les carrés des droites EZ, ZA sont égaux aux carrés des droites ΕΗ, ΗΓ; mais le carré de EZ est égal au carré de ΕΗ, car EZ est égal à ΕΗ; donc le carré restant de AZ est égal au carré restant de ΓΗ; donc AZ est égal à ΓΗ; mais AB est double de la droite AZ, et ΓΔ double de ΓΗ; donc AB est égal à ΓΔ. Donc etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

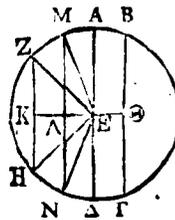
PROPOSITIO XV.

Εν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἔστιν ἡ διάμετρος· τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔστί.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἔγγιον μὲν τοῦ Ε κέντρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἔστιν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero, semper propinquior centro remotiore major est.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit ΑΔ, centrum vero Ε, et propinquior quidem ipsi Ε centro sit ΒΓ, remotior vero ΖΗ; dico maximam esse ΑΔ, majorem vero ΒΓ ipsâ ΖΗ.



Ἡχθῶσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἔστιν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. Κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθείτω ἡ ΑΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

Ducantur enim ab Ε centro ad ΒΓ, ΖΗ perpendiculares ΕΘ, ΕΚ. Et quoniam propinquior quidem centro est ΒΓ, remotior vero ΖΗ, major igitur ΕΚ ipsâ ΕΘ. Ponatur ipsi ΕΘ æqualis ΕΛ, et per Α ipsi ΕΚ ad rectos ducta ΑΜ producatetur ad Ν, et jungantur ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

PROPOSITION XV.

Dans un cercle le diamètre est la plus grande de toutes les droites, et parmi les autres, celle qui est plus près du centre est plus grande que celle qui en est plus éloignée.

Soit le cercle ΑΒΓΔ; que ΑΔ en soit le diamètre, et Ε le centre, et que ΒΓ soit plus près du centre que ΖΗ; je dis que la droite ΑΔ est la plus grande, et que ΒΓ est plus grand que ΖΗ.

Menons du centre Ε les droites ΕΘ, ΕΚ perpendiculaires aux droites ΒΓ, ΖΗ. Et puisque ΒΓ est plus près du centre que ΖΗ, la droite ΕΚ est plus grande que ΕΘ (déf. 5. 3). Faisons la droite ΕΛ égale à ΕΘ, par le point Α menons la droite ΑΜ perpendiculaire à ΕΚ, prolongeons-la vers Ν, et joignons ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἴστιν ἡ ΕΘ τῆ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῆ ΜΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἴστιν ἡ μὲν ΑΕ τῆ ΕΜ, ἡ δὲ ΕΑ τῆ ΕΝ, ἡ ἄρα ΕΑ ταῖς ΜΕ, ΕΝ ἴση ἴστιν. ΑΛΛ' αἱ ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονές εἰσι, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΜΝ μείζων ἴστιν. Ἰση δὲ ἡ ΜΝ τῆ ΒΓ, ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἴστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΕΝ, γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων<sup>5</sup>. Βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσιως τῆς ΖΗ μείζων ἴστιν. ΑΛΛὰ ἡ ΜΝ τῆ ΒΓ εἰδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ μείζων ἴστιν. Μεγίστη μὲν<sup>6</sup> ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Ἡ τῆ διαμέτρω τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πιστεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπίσεται· καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἀπάσης γωνίας ὀξείας, εὐθυγράμμου μείζων ἴστιν· ἡ δὲ λοιπὴ πλάττων.

Puisque ΕΘ est égal à ΕΑ, la droite ΒΓ est égale à ΜΝ (14. 3). De plus, puisque ΑΕ est égal à ΕΜ, et ΕΑ égal à ΕΝ, la droite ΑΔ est égale aux droites ΜΕ, ΕΝ. Mais les droites ΜΕ, ΕΝ sont plus grandes que ΜΝ; donc ΑΔ est plus grand que ΜΝ. Mais ΜΝ est égal à ΒΓ; donc ΑΔ est plus grand que ΒΓ. Et puisque les deux droites ΜΕ, ΕΝ sont égales aux deux droites ΖΕ, ΕΗ, et que l'angle ΜΕΝ est plus grand que l'angle ΖΕΗ, la base ΜΝ est plus grande que la base ΖΗ (24. 1). Mais on a démontré que ΜΝ est égal à ΒΓ; donc ΒΓ est plus grand que ΖΗ. Donc diamètre ΑΔ est la plus grande de toutes les droites, et ΒΓ est plus grand que ΖΗ. Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Une perpendiculaire au diamètre d'un cercle et menée de l'une de ses extrémités, tombe hors de ce cercle; dans l'espace compris entre cette perpendiculaire et la circonférence, on ne peut pas mener une autre droite; et l'angle du demi-cercle est plus grand, et l'angle restant est plus petit qu'aucun angle rectiligne aigu.

Et quoniam æqualis est ΕΘ ipsi ΕΑ, æqualis est et ΒΓ ipsi ΜΝ. Rursus, quoniam æqualis est quidem ΑΕ ipsi ΕΜ, et ΕΑ ipsi ΕΝ, ergo ΕΑ ipsis ΜΕ, ΕΝ æqualis est. Sed ΜΕ, ΕΝ ipsa ΜΝ majores sunt, et ΑΔ ipsa ΜΝ major est. Æqualis autem ΜΝ ipsi ΒΓ, ergo ΑΔ ipsa ΒΓ major est. Et quoniam duæ ΜΕ, ΕΝ duabus ΖΕ, ΕΗ æquales sunt, et angulus ΜΕΝ angulo ΖΕΗ major; basis igitur ΜΝ basi ΖΗ major est. Sed ΜΝ ipsi ΒΓ ostensa est æqualis, et ΒΓ ipsa ΖΗ major est. Maxima quidem igitur ΑΔ diameter, major vero ΒΓ ipsa ΖΗ. In circulo igitur, etc.

PROPOSITIO XVI.

Recta diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta extra cadet circumulum; et in locum inter et rectam et circumferentiam altera recta non cadet; et quidem semicirculi angulus quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus vero minor.

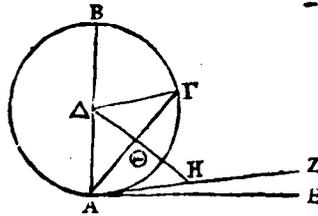
152 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΓ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΓ.

Sit circulus ΑΒΓ circa centrum Δ et diametrum ΑΒ; dico ipsam ab Α ad ΑΒ ad rectos ab extremitate ductam extra cadere circulum.

Non enim, sed si possibile, cadat intus, ut ΑΓ, et jungatur ΔΓ.



Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν<sup>3</sup>. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· τριγώνου δὲ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἰετὸς ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου, τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφέρειας· ἐκτὸς ἄρα πιπτέτω, ὡς ἡ ΑΕ.

Λέγω δὲ<sup>5</sup> ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε ΑΕ ὑθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφέρειας, ἑτέρα ὑθεία οὐ περιμπεσεῖται.

Quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΔΓ, et angulus ΔΑΓ angulo ΑΓΔ æqualis est. Rectus autem ΔΑΓ, rectus igitur et ΑΓΔ; trianguli utique ΑΓΔ duo anguli ΔΑΓ, ΑΓΔ duobus rectis æquales sunt, quod est impossibile. Non igitur ab Α puncto, ipsi ΒΑ ad rectos ducta intra cadet circulum. Similiter utique ostendemus, neque in circumferentiam; extra igitur cadet, ut ΑΕ.

Dico etiam in locum inter ΑΕ rectam et ΓΘΑ circumferentiam alteram rectam non cadere.

Soit le cercle ΑΒΓ ayant pour centre le point Δ, et pour diamètre la droite ΑΒ; je dis que la perpendiculaire menée du point Α à la droite ΑΒ, tombe hors du cercle.

Car quoè cela ne soit point, mais s'il est possible, qu'elle tombe en-dedans comme ΑΓ, et joignons ΔΓ.

Puisque ΔΑ est égal à ΔΓ, l'angle ΔΑΓ est égal à l'angle ΑΓΔ (5. 1); mais l'angle ΔΑΓ est droit; donc l'angle ΑΓΔ est droit aussi; donc les angles ΔΑΓ, ΑΓΔ du triangle ΑΓΔ sont égaux à deux angles droits, ce qui est impossible (17. 1); donc la perpendiculaire menée du point Α au diamètre ΑΒ, ne tombe point dans le cercle. Nous démontrerons semblablement qu'elle ne tombe point dans la circonférence; donc elle tombe en-dehors comme ΑΕ.

Je dis encore qu'aucune droite ne peut tomber dans l'espace qui est entre la droite ΑΕ et la circonférence ΓΘΑ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεπιπέτω ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἄρχω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἢ ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἢ ὑπὸ ΔΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. Ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ· μείζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ὡς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφέρειας, ἑτέρα εὐθεῖα παρεπιπέτῃται.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἢ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφέρειας, ἀπάσης γωνίας ὀξείας<sup>δ</sup> εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἢ δὲ λοιπῇ, ἢ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἰστί τις γωνία εὐθύγραμμος, μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφέρειας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας εὐθεῖα<sup>δ</sup> παρεπιπέτῃται, ἥ τις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε

Si enim possibile, cadat ut ZA, et ducatur a puncto Δ ad ZA perpendicularis ΔΗ.

Et quoniam rectus est ΑΗΔ, minor autem recto ipse ΔΑΗ; major igitur ΑΔ ipsa ΔΗ. Æqualis autem ΑΔ ipsi ΔΘ; major igitur ΔΘ ipsa ΔΗ, minor majore, quod est impossibile. Non igitur in locum inter rectam et circumferentiam altera recta cadet.

Dico et quidem semicirculi angulum, comprehensum et a ΒΑ recta et ΓΘΑ circumferentiā, quovis angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero comprehensum et a ΓΘΑ circumferentiā et ΑΕ recta, quovis angulo acuto rectilineo minorem esse.

Si enim est aliquis angulus rectilineus, major quidem comprehenso et a ΒΑ recta et ΓΘΑ circumferentiā, minor vero comprehenso et a ΓΘΑ circumferentiā et ΑΕ recta, in locum inter et ΓΘΑ circumferentiam et ΑΕ rectam recta cadet, quæ faciet angulum a rectis comprehensum, majorem quidem comprehenso et a ΒΑ recta

Car si cela est possible, qu'elle tombe comme ΖΑ, et du point Δ menons ΔΗ perpendiculaire à ΖΑ.

Puisque l'angle ΑΗΔ est droit, et que l'angle ΔΑΗ est plus petit qu'un droit, la droite ΑΔ est plus grande que ΔΗ. Mais ΑΔ est égal à ΔΘ; donc ΔΘ est plus grand que ΔΗ, le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc une droite ne peut pas tomber dans l'espace qui est entre la droite ΑΕ et la circonférence.

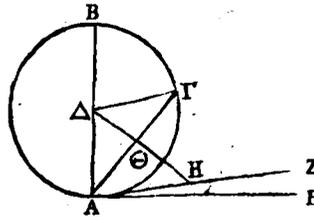
Je dis enfin, que l'angle du demi-cercle compris par la droite ΒΑ et la circonférence ΓΘΑ est plus grand que tout angle rectiligne aigu, et que l'angle restant compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ est plus petit que tout angle rectiligne aigu.

Car s'il y a un angle rectiligne plus grand que l'angle compris par la droite ΒΑ et par la circonférence ΓΘΑ, et un angle plus petit que l'angle compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ, dans l'espace compris entre la circonfé-

154 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῆς ΒΑ ὑθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ ὑ-  
 θειῶν περιεχομένην, ἐλάττωνα δὲ τῆς περιεχομέ-  
 νης ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ ὑ-  
 θείας. Οὐ παρμιπίπτει δὲ οὐκ ἄρα τῆς περιεχο-  
 μένης γωνίας ὑπὸ τε τῆς ΒΑ ὑθείας καὶ τῆς ΓΘΑ  
 περιφερείας ἴσται μείζων ὀξεία ὑπὸ ὑθειῶν περι-  
 εχομένη, οὐδὲ μὲν ἐλάττων τῆς περιεχομένης  
 ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ ὑθείας.  
 Οπερ ἴδι διέξαιθ.

et ΓΘΑ circumferentiā, minorem vero com-  
 prehenso et a ΓΘΑ circumferentiā et ΑΕ rectā.  
 Non cadit autem; non igitur comprehenso ang-  
 gulo et a ΒΑ rectā et ΓΘΑ circumferentiā erit  
 major acutus a rectis comprehensus, neque  
 quidem minor comprehenso et a ΓΘΑ circum-  
 ferentiā et ΑΕ rectā. Quod oportebat ostendere.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Εκ δὲ τούτου<sup>10</sup> φανερὸν, ὅτι ἡ τῆς διαμέτρου τοῦ  
 κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται  
 τοῦ κύκλου καὶ ὅτι ὑθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον  
 ἐφάπτεται σημεῖον. Ἐπεὶ δὴ περ καὶ ἡ κατὰ  
 δύο αὐτῶ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα  
 ἰδέχθη<sup>11</sup>.

Ex hoc utique manifestum est rectam diame-  
 tro circuli ad rectos ab extremitate ductam con-  
 tingere circumulum; et rectam circumulum in unico  
 contingere puncto. Quoniam et recta in duobus  
 ipsi occurens intra ipsum cadere ostensa est.

rence ΓΘΑ et la droite ΑΕ, il y aura une droite qui fera un angle plus grand  
 que l'angle compris par la droite ΒΑ et la circonférence ΓΘΑ, et un angle  
 plus petit que l'angle compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ. Mais  
 il n'y en a point; donc il n'y a point d'angle aigu, compris par des droites, plus  
 grand que l'angle compris par la droite ΒΑ et la circonférence ΓΘΑ, ni d'angle  
 plus petit que l'angle compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ. Ce  
 qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

De là il est évident que la droite perpendiculaire au diamètre, et menée  
 d'une de ses extrémités, touche la circonférence, et que cette droite ne la  
 touche qu'en un seul point. Puisqu'il a été démontré que la droite qui rencontre  
 un cercle en deux points entre dans ce cercle (2. 3).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

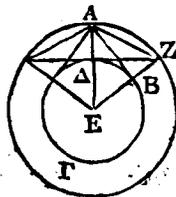
PROPOSITIO XVII.

Από τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἴφαπτομένην εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω τὸ μὴν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἴφαπτομένην εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ circulum datum contingat.

Sit datum quidem punctum Α, datus vero circulus ΒΓΔ; oportet igitur ab Α puncto rectam lineam ducere, quæ ΒΓΔ circulum contingat.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ ἄγρω μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΑΒ· λέγω ὅτι ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἴφαπτομένη ἦται ἡ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τῶν ΒΓΔ, ΑΖΗ κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ

Sumatur enim centrum circuli E, et jungatur AE, centro quidem E, intervallo vero EA circulus describatur AZH, et a Δ ipsi EA ad rectos ducatur ΔΖ, et jungantur EZ, AB; dico quod ab Α puncto ipsum ΒΓΔ circulum contingens ducta est ipsa AB.

Quoniam enim E centrum est ΒΓΔ, ΑΖΗ circulorum, æqualis igitur est quidem EA ipsi EZ,

PROPOSITION XVII.

D'un point donné, mener une ligne droite qui touche un cercle donné.

Soit A le point donné, et ΒΓΔ le cercle donné; il faut mener du point A une ligne droite qui touche le cercle ΒΓΔ.

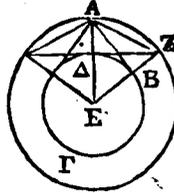
Prenons le centre E de ce cercle, joignons AE, du centre E et de l'intervalle EA, décrivons le cercle AZH (dém. 3); par le point Δ menons ΔΖ perpendiculaire à AE, et joignons EZ, AB; je dis que la droite AB, menée du point A, touche le cercle ΒΓΔ.

Car puisque le point E est le centre des cercles ΒΓΔ, ΑΖΗ, la droite AE est

156 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΕΔ τῆ EB· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι, τὴν<sup>2</sup> πρὸς τῷ Ε· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῆ ΑΒ ἴση ἐστὶ· καὶ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΕΒΑ τρίγωνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῆ ὑπὸ ΕΒΑ<sup>3</sup>. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΔΖ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ. Καὶ

et EA ipsi EB; duæ utique AE, EB duabus ZE, EA æquales sunt, et angulum communem comprehendunt ad E; basis igitur ΔZ basi AB æqualis est; et ΕΔΖ triangulum EBA triangulo æquale est; et reliqui anguli reliquis angulis; æqualis igitur ΕΔΖ ipsi ΕΒΑ. Rectus autem ΕΔΖ, rectus igitur et ΕΒΑ; et est EB ex cen-



ἐστὶν ἡ EB ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τῆ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΑΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΒΓΑ<sup>4</sup> κύκλου.

tro; diametro autem circuli ad rectos ab extremitate ducta contingit circulum; AB igitur contingit BGA circulum.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δθέντος<sup>5</sup> σημείου τοῦ Α τοῦ δθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΑ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ ΑΒ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

A dato igitur puncto A datum circulum ΒΓΑ contingens recta linea ducta est AB. Quod oportebat facere.

égale à EZ, et EA égal à EB; donc les deux droites AE, EB sont égales aux deux droites ZE, EA; mais ces droites comprennent un angle commun en E; donc la base ΔZ est égale à la base AB, le triangle ΕΔΖ égal au triangle ΕΒΑ, et les angles restants égaux aux angles restants (4. 1); donc l'angle ΕΔΖ est égal à l'angle ΕΒΑ. Mais l'angle ΕΔΖ est droit; donc l'angle ΕΒΑ est droit aussi. Mais la droite EB est menée par le centre, et la perpendiculaire au diamètre du cercle, et menée de l'une des extrémités du diamètre touche le cercle (15. 3); donc la droite AB touche le cercle ΒΓΑ.

Donc la ligne droite AB, menée par le point donné A, touche le cercle ΒΓΑ· Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

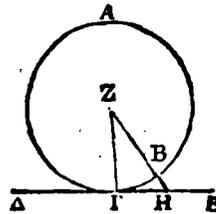
PROPOSITIO XVIII.

Εάν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεία, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφ᾽ ἣν ἐπιζυχθῆ τις εὐθεία, ἢ ἐπιζυχθεῖσα κάθετος ἴσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην<sup>1</sup>.

Si circulum contingat aliqua recta, a centro autem ad contactum ducatur aliqua recta, conjungens perpendicularis erit ad contingentem.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτίσθω<sup>2</sup> τις εὐθεία ἢ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζυχθω ἢ ΖΓ· λίγω ὅτι ἡ ΖΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Circulum enim ΑΒΓ contingat aliqua recta ΔΕ in Γ puncto, et sumatur centrum ΑΒΓ circuli Ζ, et a Ζ ad Γ conjungatur ΖΓ; dico ΖΓ perpendiculararem esse ad ΔΕ.



Εἰ γὰρ μὴ, ἔχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἢ ΖΗ.

Si enim non, ducatur a Ζ ad ΔΕ perpendicularis ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΗΓ γωνία ὀρθὴ ἐστίν, ὀξεία ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΗ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζον πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα ἢ ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ. Ἴση δὲ ἢ ΖΓ τῇ ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ<sup>3</sup> ΖΒ τῆς ΖΗ, ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ

Quoniam igitur ΖΗΓ angulus est rectus, acutus igitur est ΖΓΗ; majorem autem angulum majus latus subtendit, major igitur ΖΓ ipsā ΖΗ. Æqualis autem ΖΓ ipsi ΖΒ; major igitur et ΖΒ ipsā ΖΗ, minor majore, quod est impossibile.

PROPOSITION XVIII.

Si une droite touche un cercle, et si du centre on mène une droite au point de contact, cette droite sera perpendiculaire à la tangente.

Que la droite ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ au point Γ; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et du point Ζ au point Γ menons ΖΓ; je dis que la droite ΖΓ est perpendiculaire à ΔΕ.

Car si elle ne l'est pas, du point Ζ menons ΖΗ perpendiculaire à ΔΕ (12. 1).

Puisque l'angle ΖΗΓ est droit, l'angle ΖΓΗ est aigu (17. 1); mais un plus grand côté soutend un plus grand angle (19. 1); donc ΖΓ est plus grand que ΖΗ. Mais ΖΓ est égal à ΖΒ; donc la droite ΖΒ est plus grande que la droite ΖΗ,

158 LE TROISIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

ἴστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ΖΗ κάθετός ἐστίν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστίν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

Non igitur ZH perpendicularis est ad ΔΕ. Similiter utique ostendemus neque aliam quampiam præter ipsam ΖΓ; ergo ΖΓ perpendicularis est ad ΔΕ. Si igitur eirculum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

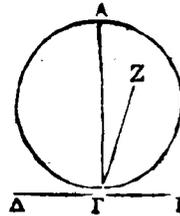
Ἐὰν κύκλου ἐφάπτεται τις εὐθεία, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς τῆ ἐφαπτομένη πρὸς ὀρθὰς εὐθεία γραμμὴ ἀχθῆ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἴσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ὀπτέσθω τις εὐθεία ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῆ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἴσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO XIX.

Si circulum contingat aliqua recta, a contactu autem contingenti ad rectos recta linea ducatur, in ductâ erit centrum circuli.

Circulum enim ΑΒΓ contingat aliqua recta ΔΕ in Γ puncto, et a Γ ipsi ΔΕ ad rectos ducatur ΓΑ; dico in ΑΓ esse centrum circuli.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἴσται τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΖ.

Non enim, sed si possibile, sit Z, et jungatur ΓΖ.

la plus petite que la plus grande, ce qui est impossible; donc ZH n'est pas une perpendiculaire à ΔΕ. Nous démontrerons semblablement qu'il n'y en a point d'autre, excepté ΖΓ; donc ΖΓ est perpendiculaire à ΔΕ. Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Si une droite touche un cercle, et si du point de contact on mène une ligne droite perpendiculaire à la tangente, le centre du cercle sera dans la droite qui aura été menée.

Car qu'une droite ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ au point Γ, et du point Γ menons ΓΑ perpendiculaire à ΔΕ; je dis que le centre du cercle est dans ΑΓ.

Car que cela ne soit point, mais s'il est possible, que le centre soit Ζ, et joignons ΓΖ.

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 159

Ἐπεὶ οὖν<sup>3</sup> κύκλου τοῦ  $ΑΒΓ$  ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ  $ΔΕ$ , ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπίζευκται ἡ  $ΖΓ$ , ἡ  $ΖΓ$  ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν  $ΔΕ$ . ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΖΓΕ$ . Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΑΓΕ$  ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΖΓΕ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΓΕ$ , ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ  $Ζ$  κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ΑΒΓ$  κύκλου. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς  $ΑΓ$ . Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam igitur circulum  $ΑΒΓ$  contingit aliqua recta  $ΔΕ$ , a centro autem ad contactum ducta est  $ΖΓ$ ,  $ΖΓ$  ergo perpendicularis est ad  $ΔΕ$ ; rectus igitur est  $ΖΓΕ$ . Est autem et  $ΑΓΕ$  rectus; æqualis igitur est  $ΖΓΕ$  ipsi  $ΑΓΕ$ , minor majori, quod est impossibile. Non igitur  $Ζ$  centrum est  $ΑΒΓ$  circuli. Similiter utique ostendemus, neque aliud aliquod esse præterquam in ipsa  $ΑΓ$ . Si igitur circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

PROPOSITIO XX.

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἐστω κύκλος ὁ  $ΑΒΓ$ , καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ  $ΒΕΓ$ , πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ, ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$ , ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν  $ΒΓ$ . λέγω ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΒΕΓ$  γωνία τῆς ὑπὸ  $ΒΑΓ$ .

In circulo, ad centrum angulus duplus est ipsius ad circumferentiam, quando eandem circumferentiam pro basi habent anguli.

Sit circulus  $ΑΒΓ$ , et ad centrum quidem ejus angulus sit  $ΒΕΓ$ , ad circumferentiam vero ipsi  $ΒΑΓ$ , habeant autem eandem circumferentiam pro basi  $ΒΓ$ ; dico duplum esse  $ΒΕΓ$  angulum ipsius  $ΒΑΓ$ .

Puisque la droite  $ΔΕ$  touche le cercle  $ΑΒΓ$ , et que  $ΖΓ$  a été mené du centre au point de contact, la droite  $ΖΓ$  est perpendiculaire à  $ΔΕ$  (18. 3); donc l'angle  $ΖΓΕ$  est droit. Mais l'angle  $ΑΓΕ$  est droit aussi; donc l'angle  $ΖΓΕ$  est égal à l'angle  $ΑΓΕ$ , le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc le point  $Ζ$  n'est pas le centre du cercle  $ΑΒΓ$ . Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre point ne peut l'être, à moins qu'il ne soit dans  $ΑΓ$ . Donc, etc.

PROPOSITION XX.

Dans un cercle, l'angle au centre est double de l'angle à la circonférence, quand ces angles ont pour base le même arc.

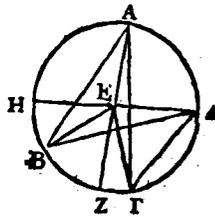
Soit le cercle  $ΑΒΓ$ , que l'angle  $ΒΕΓ$  soit au centre de ce cercle, que l'angle  $ΒΑΓ$  soit à la circonférence, et que ces angles aient pour base le même arc  $ΒΓ$ ; je dis que l'angle  $ΒΕΓ$  est double de l'angle  $ΒΑΓ$ .

Επιζυχθεῖσα γὰρ ἡ ΑΕ διήχθη ἐπὶ τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλάσιαι εἰσιν. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶ διπλῆ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστὶ διπλῆ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶ διπλῆ.

Juncta enim AE producatnr ad Z.

Quoniam igitur æqualis est EA ipsi EB, æqualis et angulus EAB ipsi EBA; anguli igitur EAB, EBA ipsius EAB dupli sunt. Æqualis autem BEZ ipsis EAB, EBA; et BEZ igitur ipsius EAB est duplus. Propter eadem utique et ZEG ipsius EAG est duplus; totus igitur BEG totius BAG est duplus.



Κεκλιόσθω δὴ πάλιν, καὶ ἴστω ἑτέρα γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ ἐπιζυχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκκεκλιόσθω ἐπὶ τὸ Η. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΗΑΓ, ὡς ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΗΑΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Inclinetur autem rursus, et sit alter angulus BAG, et juncta DE producatnr ad H. Similiter utique ostendemus duplum esse HEG angulum ipsius HAG, quorum HEB duplus est ipsius HAB; reliquus igitur BEG duplus est BAG. In circulo igitur, etc.

Joignons la droite AE, et prolongeons-la vers Z.

Puisque EA est égal à EB, l'angle EAB est égal à l'angle EBA (5. 1); donc les angles EAB, EBA sont doubles de l'angle EAB. Mais l'angle BEZ est égal aux angles EAB, EBA (32. 1); donc l'angle BEZ est double de l'angle EAB. L'angle ZEG est double de l'angle ZAG par la même raison; donc l'angle entier BEG est double de l'angle entier BAG.

Que l'angle BAG change de position, et qu'il soit un autre angle BAG; ayant joint la droite AE, prolongeons-la vers H. Nous démontrerons semblablement que l'angle HEG est double de l'angle HAG; mais l'angle HEB est double de l'angle HAB; donc l'angle restant BEG est double de l'angle restant BAG. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ΄.

PROPOSITIO XXI.

Εν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

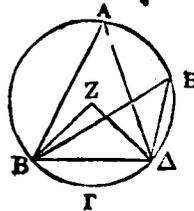
Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἴστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἴστω τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

In circulo in eodem segmento anguli æquales inter se sunt.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in eodem segmento ΒΑΕΔ anguli sint ΒΑΔ, ΒΕΔ; dico ΒΑΔ, ΒΕΔ angulos æquales inter se esse.

Sumatur enim ΑΒΓΔ circuli centrum, et sit Ζ, et jungantur ΒΖ, ΖΔ.



Καὶ ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἴστιν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφέρειᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίῳ ἴστι τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἴστι διπλασίῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἴζῃς.

Et quoniam quidem ΒΖΔ angulus ad centrum est, ipse vero ΒΑΔ ad circumferentiam, et habent eandem circumferentiam ΒΓΔ pro basi; ergo ΒΖΔ angulus duplus est ipsius ΒΑΔ. Propter eadem utique ΒΖΔ et ipsius ΒΕΔ est duplus; æqualis igitur ΒΑΔ ipsi ΒΕΔ. In circulo igitur, etc.

PROPOSITION XXI.

Dans un cercle, les angles placés dans le même segment sont égaux entr'eux.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que les angles ΒΑΔ, ΒΕΔ soient dans le même segment ΒΑΕΔ; je dis que les angles ΒΑΔ, ΒΕΔ sont égaux entr'eux.

Car prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 3), qu'il soit Ζ, et joignons ΒΖ, ΖΔ.

Puisque l'angle ΒΖΔ est au centre, que l'angle ΒΑΔ est à la circonférence, et que ces deux angles ont pour base le même arc ΒΓΔ, l'angle ΒΖΔ est double de l'angle ΒΑΔ (20. 3). L'angle ΒΖΔ est double de l'angle ΒΕΔ, par la même raison; donc l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΒΕΔ (not. 7). Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

## PROPOSITIO XXII.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

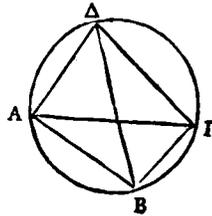
Ἐστώ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετραπλευρον ἴστω τὸ ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐπιζύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

In circulis quadrilaterorum oppositi anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in ipso quadrilaterum sit ΑΒΓΔ; dico oppositos ipsius angulos duobus rectis æquales esse.

Jungantur ΑΓ, ΒΔ.



Ἐπεὶ οὖν<sup>1</sup> παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ ΑΒΓ ἄρα τριγώνου<sup>2</sup> αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ ΒΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ ΑΔΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστί. Κοινὰ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ,

Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt, ipsius ΑΒΓ trianguli tres anguli ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus rectis æquales sunt. Æqualis autem quidem ΓΔΒ ipsi ΒΑΓ, etenim in eodem sunt segmento ΒΑΔΓ, et ΑΓΒ ipsi ΑΔΒ, etenim in eodem sunt segmento ΑΔΓΒ. Totus igitur ΑΔΓ ipsis ΒΑΓ, ΑΓΒ æqualis est. Communis addatur ΑΒΓ; ergo ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ

## PROPOSITION XXII.

Les angles opposés des quadrilatères inscrits dans des cercles sont égaux à deux droits.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que le quadrilatère ΑΒΓΔ lui soit inscrit; je dis que les angles opposés de ce quadrilatère sont égaux à deux droits.

Joignons ΑΓ, ΒΔ.

Puisque les trois angles de tout triangle sont égaux à deux droits (32. 1), les trois angles ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ du triangle ΑΒΓ sont égaux à deux droits. Mais l'angle ΓΔΒ est égal à l'angle ΒΑΓ (21. 3), car ils sont dans le même segment ΒΑΔΓ; et l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΑΔΒ, car ils sont dans le même segment ΑΔΓΒ; donc l'angle entier ΑΔΓ est égal aux angles ΒΑΓ, ΑΓΒ. Ajoutons l'angle

PAΓ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἴσαι εἰσίν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἄρα<sup>3</sup> δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΔΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις, καὶ τὰ ἴξῆς.

ipsis ΑΒΓ, ΑΔΓ æquales sunt. Sed ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ duobus rectis æquales sunt; et ΑΒΓ, ΑΔΓ igitur duobus rectis æquales sunt. Similiter utique ostendemus, et ΒΑΔ, ΔΓΒ angulos duobus rectis esse. In circulis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

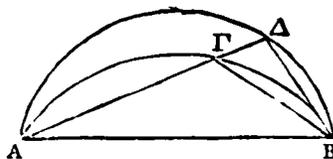
PROPOSITIO XXIII.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται ἑπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Super eadem rectâ duo segmenta circulorum similia et inæqualia non constituentur ex eadem parte.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συστατάτω ἑπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓΔ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.

Si enim possibile, ad eandem rectam ΑΒ duo segmenta circulorum similia et inæqualia constituentur ex eadem parte ΑΓΒ, ΑΔΒ, et ducatur ΑΓΔ, et jungantur ΓΒ, ΔΒ.



Ἐπεὶ οὖν ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΓΒ τμήμα τῷ ΑΔΒ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δε-

Quoniam igitur simile est ΑΓΒ segmentum ipsi ΑΔΒ segmento, similia autem segmenta

commun ΑΒΓ; les angles ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ seront égaux aux angles ΑΒΓ, ΑΔΓ. Mais les angles ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits; donc les angles ΑΒΓ, ΑΔΓ sont égaux à deux angles droits. Nous démontrerons semblablement que les angles ΒΑΔ, ΔΓΒ sont aussi égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXIII.

Sur une même droite, on ne peut pas décrire du même côté deux segments de cercles semblables et inégaux.

Car si cela est possible, décrivons du même côté, sur la même droite ΑΒ les deux segments de cercles ΑΓΒ, ΑΔΒ semblables et inégaux; menons ΑΓΔ, et joignons ΓΒ, ΔΒ.

Puisque le segment ΑΓΒ est semblable au segment ΑΔΒ, et que les segments

164 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

χόμενα γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ  
γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἢ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ  
ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας,  
καὶ τὰ ἰξῆς.

circularum sunt quæ capiunt angulos æquales;  
æqualis igitur est ΑΓΒ angulus ipsi ΑΔΒ, exte-  
rior interiori, quod est impossibile. Non igitur  
super eadem rectâ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

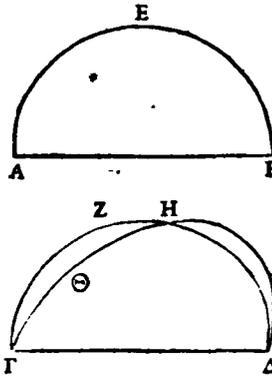
PROPOSITIO XXIV.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων  
ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Super æqualibus rectis similia segmenta cir-  
cularum æqualia inter se sunt.

Ἐστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῆς ΑΒ, ΓΔ  
ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω

Sint enim super æqualibus rectis ΑΒ, ΓΔ  
similia segmenta circularum ipsa ΑΕΒ, ΓΖΔ;



ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμήμα τῷ ΓΖΔ τμή-  
ματι.

dico æquale esse ΑΕΒ segmentum ipsi ΓΖΔ seg-  
mento.

de cercles semblables sont ceux qui reçoivent des angles égaux (déf. 11. 3),  
l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΑΔΒ, l'angle intérieur à l'angle extérieur; ce qui  
est impossible (16. 1). Donc, etc.

PROPOSITION XXIV.

Sur des droites égales, les segments de cercles semblables sont égaux  
entr'eux.

Que sur les droites égales ΑΒ, ΓΔ soient décrits les segments de cercles  
semblables ΑΕΒ, ΓΖΔ; je dis que le segment ΑΕΒ est égal au segment ΓΖΔ.

Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ AEB τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ, τῆς δὲ AB εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὴν AB τῇ ΓΔ· τῆς δὲ AB ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμοσάσης<sup>2</sup>, ἐφαρμόσει καὶ τὸ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ. Εἰ γὰρ ἡ AB εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἤτοι ἰντὸς αὐτοῦ πιθεῖται, ἢ ἐκτὸς, ἢ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ Γ, Η, Δ<sup>3</sup>, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς AB εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἴσται. Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν, καὶ τὰ ἰξῆς.

Congruente enim AEB segmento ipsi ΓΖΔ, et posito quidem A puncto super Γ, recta vero AB super ΓΔ, congruet et B punctum ipsi Δ puncto, propterea quod æqualis est AB ipsi ΓΔ; ipsa autem AB ipsi ΓΔ congruente, congruet et AEB segmentum ipsi ΓΖΔ. Si enim AB recta ipsi ΓΔ congruat, segmentum autem AEB ipsi ΓΖΔ non congruat, vel intra ipsum cadet, vel extra, vel situm mutabit ut ΓΘΗΔ, et circulus circulum secabit in pluribus punctis quam duobus, in punctis Γ, Η, Δ, quod est impossibile. Non igitur congruente AB recta ipsi ΓΔ non congruet et AEB segmentum ipsi ΓΖΔ. Congruet igitur, et æquale ipsi erit. Ergo super æqualibus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

PROPOSITIO XXV.

Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὐπὲρ ἐστὶ τμήμα.

Circuli segmento dato, describere circulum cuius est segmentum.

Car le segment AEB étant appliqué sur le segment ΓΖΔ, le point A étant posé sur le point Γ, et la droite AB sur la droite ΓΔ, le point B tombera sur le point Δ, parce que la droite AB est égale à la droite ΓΔ; mais la droite AB coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment AEB coïncidera avec le segment ΓΖΔ. Car si la droite AB coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment AEB ne coïncidait pas avec le segment ΓΖΔ, ou il tomberait en dedans, ou en dehors, ou bien prenant une position comme ΓΘΗΔ, un cercle couperait un cercle en plus de deux points, aux points Γ, Η, Δ, ce qui est impossible (10. 3). Donc la droite AB coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment ABA ne peut pas ne pas coïncider avec le segment ΓΖΔ; donc il coïncide avec lui, et lui est par conséquent égal. Donc, etc.

PROPOSITION XXV.

Un segment de cercle étant donné, décrire le cercle dont il est le segment.

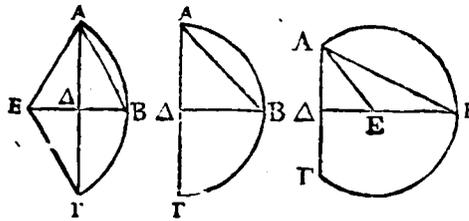
166 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω τὸ δοθὲν τμήμα κύκλου, τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὐπὲρ ἔστι τὸ ΑΒΓ τμήμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῆ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΒ· ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἄρα<sup>2</sup> τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἤτοι μείζων ἴσθιν, ἢ ἴση, ἢ ἑλάττων.

Sit datum circuli segmentum ΑΒΓ; oportet igitur describere circulum, cujus est ΑΒΓ segmentum.

Secetur enim ΑΓ bifariam in Δ, et ducatur a Δ puncto ipsi ΑΓ ad rectos ΔΒ, et jungatur ΑΒ. Ergo ΑΒΔ angulus ipso ΒΑΔ vel major est, vel æqualis, vel minor.



Εστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῆ ΒΑ εὐθεία, καὶ τῆ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῶ Α, τῆ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΔΒ ἐπὶ τὸ Ε<sup>3</sup>, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἴσθιν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῆ ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση ἄρα ἴσθιν καὶ ἡ ΒΕ εὐθεῖα εὐθείᾳ<sup>4</sup> τῆ ΕΑ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἴσθιν ἡ ΑΔ τῆ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, δύο δὲ αἱ ΑΔ, ΔΕ δυοῖ ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνία τῆ ὑπὸ ΓΔΕ ἴσθιν<sup>5</sup>, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρω· βάσις<sup>6</sup> ἄρα

Sit primum major, et constituatur ad ΒΑ rectam, et ad punctum in eâ Α, ipsi ΑΒΔ angulo æqualis ipse ΒΑΕ, et producatuur ΔΒ ad Ε, et jungatur ΕΓ. Et quoniam igitur æqualis est ΑΒΕ angulus ipsi ΒΑΕ, æqualis utique est et ΒΕ rectæ ΕΑ. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΔΓ, communis autem ΔΕ, duæ utique ΑΔ, ΔΕ duabus ΓΔ, ΔΕ æquales sunt, utraque utriusque, et angulus ΑΔΕ angulo ΓΔΕ est æqualis; rectus enim uterque; basi igitur ΑΕ basi ΓΕ est æqua-

Soit ΑΒΓ le segment de cercle donné ; il faut décrire le cercle dont ΑΒΓ est le segment.

Coupons la droite ΑΓ en deux parties égales au point Δ (10. 1), du point Δ menons ΔΒ perpendiculaire à ΑΓ, et joignons ΑΒ (11. 1) ; l'angle ΑΒΔ sera ou plus grand que l'angle ΒΑΔ, ou il lui sera égal, ou il sera plus petit.

Qu'il soit d'abord plus grand ; sur la droite donnée ΒΑ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΒΑΕ égal à l'angle ΑΒΔ (23. 1) ; prolongeons ΔΒ vers Ε, et joignons ΕΓ. Puisque l'angle ΑΒΕ est égal à l'angle ΒΑΕ, la droite ΒΕ est égale à la droite ΕΑ (6. 1). Et puisque ΑΔ est égal à ΔΓ, et que la droite ΔΕ est commune, les deux droites ΑΔ, ΔΕ sont égales aux deux droites ΓΔ, ΔΕ, chacune à chacune ; mais l'angle ΑΔΕ est égal à l'angle ΓΔΕ, car ils sont droits l'un et l'autre

ἢ ΑΕ βᾶσι τῆ ΓΕ ἴσιν. Ἀλλὰ ἢ ΑΕ τῆ ΕΒ ἰδείχθη ἴση· καὶ ἢ ΒΕ ἄρα τῆ ΓΕ ἴσιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρον τῷ<sup>8</sup> Ε, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ, κύκλος γραφόμενος ἦξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος κύκλος<sup>9</sup>. Κύκλου ἄρα τμήματος δεθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. Καὶ δῆλον ὡς τὸ ΑΒΓ τμήμα ἑλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, διὰ τὸ, τὸ Ε κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ<sup>10</sup> τυγχάνειν.

Ομοίως καὶ ἐὰν ἢ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση ἢ<sup>11</sup> τῆ ὑπὸ ΒΑΔ, τῆς ΑΔ ἴσης γενομένης ἑκατέρᾳ τῶν ΒΔ, ΔΓ, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ προσαναγεγραμμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἢ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ἢ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ συστησόμεθα πρὸς τῆ ΒΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α<sup>12</sup>, τῆ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίαν ἴσην, ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τμήματος πεισῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔΒ ὡς τὸ Ε<sup>13</sup>, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ τμήμα μείζον ἡμικυκλίου.

donc la base AE est égale à la base GE (4. 1). Mais AE a été démontré égal à EB ; donc BE est égal à GE ; donc les trois droites AE, EB, EG sont égales entre elles ; donc le cercle décrit du centre E et d'un intervalle égal à une des droites AE, EB, EG, passera par les autres points, et le cercle sera décrit. Donc un segment de cercle ayant été donné, on a décrit le cercle dont il est le segment (9. 3). Il est évident que le segment ABG est plus petit qu'un demi-cercle ; car le centre E tombe hors du segment.

Semblablement, si l'angle ABA est égal à l'angle BAA, la droite AA étant égale à chacune des droites BA, AG, les trois droites AA, AB, AG seront égales entre elles ; donc le point A sera le centre du cercle entier (9. 3), et le segment ABG sera évidemment un demi-cercle.

Mais si l'angle ABA est plus petit que l'angle BAA, et si sur la droite BA, et au point A de cette droite, nous faisons l'angle BAE égal à l'angle ABA, le centre tombera en dedans du segment ABG dans la droite AB, comme en E, et le segment sera évidemment plus grand qu'un demi-cercle.

lis. Sed AE ipsi EB ostensa est æqualis ; et BE igitur ipsi GE est æqualis ; tres igitur AE, EB, EG æquales inter se sunt ; ergo centro E, intervallo autem unâ ipsarum AE, EB, EG circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit descriptus circulus. Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus. Et manifestum est ABG segmentum minus esse semicirculo, propterea quod E centrum extra ipsum cadit.

Similiter et si angulus ABA æqualis sit ipsi BAA, ipsâ AA æquali factâ alterutri ipsarum BA, AG, tres igitur AA, AB, AG æquales inter se erunt, et erit autem A centrum completi circuli, et erit utique ABG semicirculus.

Si autem ABA minor sit ipso BAA, et si constituamus ad BA rectam, et ad punctum in eâ A, ipsi ABA angulum æqualem, intra ABG segmentum cadet centrum in AB, ut E, et erit utique ABG segmentum majus semicirculo.

168 LE TROISIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος, οὐπὲρ ἔστι τὸ τμήμα' 4. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus cujus est segmentum. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

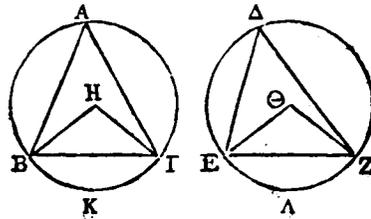
PROPOSITIO XXVI.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβῆκασιν, εἴητε πρὸς τοῖς κέντροις εἴητε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὡς βεβῆκασιν.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus circumferentiis insistent, sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes.

Ἐστωσαν γάρ ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἐν αὐτοῖς, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι

Sint enim æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et in ipsis quidem ad centra æquales anguli



ἴστωσαν, αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἴση ἔστιν ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΑΖ περιφερείᾳ.

sint ΒΗΓ, ΕΘΖ, et ad circumferentias ipsi ΒΑΓ, ΕΔΖ; dico æqualem esse ΒΚΓ circumferentiam ipsi ΕΑΖ circumferentiæ.

Ἐπιζεύχθωσαν γάρ αἱ ΒΓ, ΕΖ.

Jungantur enim ΒΓ, ΕΖ.

Donc un segment de cercle ayant été donné, on a décrit le cercle dont il est le segment ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXVI.

Dans des cercles égaux, les angles égaux s'appuient sur des arcs égaux, soit qu'ils soient placés aux centres, ou bien aux circonférences.

Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ, que les angles égaux ΒΗΓ, ΕΘΖ soient aux centres, et que les angles égaux ΒΑΓ, ΕΔΖ soient aux circonférences ; je dis que l'arc ΒΚΓ est égal à l'arc ΕΑΖ.

Joignons ΒΓ, ΕΖ.

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 169

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$  κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ  $BH$ ,  $HF$  δυσὶν ταῖς  $EΘ$ ,  $ΘΖ$  ἴσαι εἰσὶν<sup>3</sup>. καὶ γωνία ἢ πρὸς τῷ  $H$  γωνία τῇ πρὸς τῷ  $Θ$  ἴση ἐστὶ<sup>4</sup>. βάσεις ἄρα ἢ  $BΓ$  βάσει τῇ  $EΖ$  ἐστὶν ἴση<sup>5</sup>. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶ ἢ πρὸς τῷ  $A$  γωνία τῇ πρὸς τῷ  $Δ$ , ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΒΑΓ$  τμήμα τῷ  $ΕΔΖ$  τμήματι, καὶ ἐστὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν  $BΓ$ ,  $EΖ$ . τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὁμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν<sup>6</sup>. ἴσον ἄρα τὸ  $ΒΑΓ$  τμήμα τῷ  $ΕΔΖ$  τμήματι<sup>7</sup>. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ  $ΑΒΓ$  κύκλος ἕλω τῷ  $ΔΕΖ$  κύκλῳ ἴσος, λοιπὸν ἄρα  $BΚΓ$  τμήμα λοιπῷ  $ΕΔΖ$  ἴσον ἢ ἄρα  $BΚΓ$  περιφέρειά ἐστὶν ἴση τῇ  $ΕΔΖ$  περιφέρειᾷ<sup>8</sup>. Ἐὰν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

Et quoniam æquales sunt  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$  circuli, æquales sunt ipsæ ex centris; duæ igitur  $BH$ ,  $HF$  duabus  $EΘ$ ,  $ΘΖ$  æquales sunt; et angulus ad  $H$  angulo ad  $Θ$  æqualis est; basis igitur  $BΓ$  basi  $EΖ$  est æqualis. Et quoniam æqualis est ad  $A$  angulus ipsi ad  $Δ$ , simile igitur est  $ΒΑΓ$  segmentum ipsi  $ΕΔΖ$  segmento, et sunt super æquales rectas  $BΓ$ ,  $EΖ$ ; ipsa autem super æquales rectas similia segmenta circulorum æqualia inter se sunt; æquale igitur  $ΒΑΓ$  segmentum ipsi  $ΕΔΖ$  segmento. Est autem et totus  $ΑΒΓ$  circulus toti  $ΔΕΖ$  circulo æqualis; reliquum igitur  $BΚΓ$  segmentum reliquo  $ΕΔΖ$  æquale; ergo  $BΚΓ$  circumferentia æqualis est  $EΔΖ$  circumferentiæ. Si igitur in æqualibus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἰάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἰάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὡς βεβηκυῖαι.

Puisque les cercles  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$  sont égaux, leurs rayons sont égaux; donc les deux droites  $BH$ ,  $HF$  sont égales aux deux droites  $EΘ$ ,  $ΘΖ$ ; mais l'angle en  $H$  est égal à l'angle en  $Θ$ ; donc la base  $BΓ$  est égale à la base  $EΖ$  (4. 1). Mais l'angle en  $A$  est égal à l'angle en  $Δ$ ; donc le segment  $ΒΑΓ$  est semblable au segment  $ΕΔΖ$  (déf. 11. 3); mais ils sont placés sur les droites égales  $BΓ$ ,  $EΖ$ , et les segments de cercles semblables, qui sont placés sur des droites égales, sont égaux entr'eux (24. 3); donc le segment  $ΒΑΓ$  est égal au segment  $ΕΔΖ$ . Mais le cercle entier  $ΑΒΓ$  est égal au cercle entier  $ΔΕΖ$ ; donc le segment restant  $BΚΓ$  est égal au segment restant  $EΔΖ$ ; donc l'arc  $BΚΓ$  est égal à l'arc  $EΔΖ$ . Donc, etc.

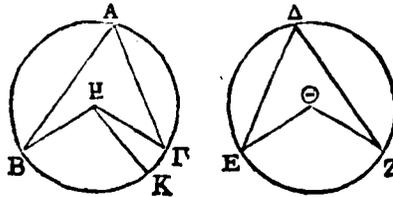
PROPOSITION XXVII.

Dans les cercles égaux, les angles qui comprennent des arcs égaux sont égaux entr'eux, soit qu'ils soient aux centres, ou aux circonférences.

170 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εν γὰρ ἴσους κύκλοις τοῖς  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ , ἐπι-  
 ἴσων περιφερειῶν τῶν  $BΓ$ ,  $EZ$ , πρὸς μὲν τοῖς  $H$ ,  
 $Θ$  κέντροις γωνίαι βεβηκέτασαν αἱ ὑπὸ  $BHΓ$ ,  
 $EΘZ$ , πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ  $BΑΓ$ ,  
 $EΔZ$ . λῖγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ  $BHΓ$  γωνία<sup>3</sup> τῇ ὑπὸ  
 $EΘZ$  ἴσθιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ  $BΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $EΔZ$  ἴσθιν  
 ἴση<sup>3</sup>.

In æqualibus enim circulis  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ ,  
 æqualibus circumferentiis  $BΓ$ ,  $EZ$ , ad  $H$ ,  $Θ$   
 quidem centra anguli insistant  $BHΓ$ ,  $EΘZ$ , ad  
 circumferentias vero ipsi  $BΑΓ$ ,  $EΔZ$ ; dico  $BHΓ$   
 quidem angulum ipsi  $EΘZ$  esse æqualem, ip-  
 sum vero  $BΑΓ$  ipsi  $EΔZ$ .



Εἰ γὰρ ἀνίσος ἴσθιν ἡ ὑπὸ  $BHΓ$  τῇ ὑπὸ  $EΘZ$ ,  
 μία αὐτῶν μείζων ἴσθαι<sup>4</sup>. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ  
 $BHΓ$ , καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ  $BH$  εὐθείᾳ, καὶ τῷ  
 πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $H$ , τῇ ὑπὸ  $EΘZ$  γωνίᾳ  
 ἴση ἡ ὑπὸ  $BHK$ . αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων πε-  
 ριφερειῶν βεβηκέασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις  
 ᾤσθιν ἴση ἄρα ἡ  $BK$  περιφέρεια τῇ  $EZ$  περιφε-  
 ρείᾳ. Ἀλλ' ἡ  $EZ$  τῇ  $BΓ$  ἴσθιν ἴση, καὶ ἡ  $BK$   
 ἄρα τῇ  $BΓ$  ἴσθιν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι,  
 ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνίσος ἴσθιν ἡ  
 ὑπὸ  $BHΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $EΘZ$ . ἴση ἄρα. Καὶ ἴσθιν τῆς

Si enim inæqualis sit  $BHΓ$  ipsi  $EΘZ$ , unus  
 ipsorum major erit. Sit major  $BHΓ$ , et consti-  
 tuatur ad  $BH$  rectam, et ad punctum in eâ  $H$ ,  
 ipsi  $EΘZ$  angulo æqualis ipse  $BHK$ ; æquales  
 autem anguli æqualibus circumferentiis insis-  
 tunt, quando ad centra sunt; æqualis igitur  
 $BK$  circumferentia ipsi  $EZ$  circumferentiæ. Sed  
 $EZ$  ipsi  $BΓ$  æqualis est, et  $BK$  igitur ipsi  $BΓ$   
 est æqualis, minor majori, quod est impossi-  
 bile. Non igitur inæqualis est  $BHΓ$  angulus ipsi  
 $EΘZ$ ; æqualis igitur. Et est ipsius quidem  $BHΓ$

Que dans les cercles égaux  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ , les angles  $BHΓ$ ,  $EΘZ$  placés aux centres  $H$ ,  $Θ$ , et les angles  $BΑΓ$ ,  $EΔZ$  placés aux arcs  $BΑΓ$ ,  $EΔZ$  comprennent les arcs égaux  $BΓ$ ,  $EZ$ ; je dis que l'angle  $BHΓ$  est égal à l'angle  $EΘZ$ , et l'angle  $BΑΓ$  égal à l'angle  $EΔZ$ .

Carsi si les angles  $BHΓ$ ,  $EΘZ$  sont inégaux, l'un d'eux sera le plus grand. Que l'angle  $BHΓ$  soit le plus grand; sur la droite  $BH$ , et au point  $H$  de cette droite, faisons l'angle  $BHK$  égal à l'angle  $EΘZ$  (23. 1). Puisque les angles égaux comprennent des arcs égaux, lorsqu'ils sont aux centres (26. 3), l'arc  $BK$  est égal à l'arc  $EZ$ . Mais l'arc  $EZ$  est égal à l'arc  $BΓ$ ; donc l'arc  $BK$  est égal à l'arc  $BΓ$ , le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc les angles  $BHΓ$ ,  $EΘZ$  ne sont pas inégaux; donc ils sont

LE TROISIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 171

μὲν ὑπὸ BHΓ ἡμίση αἰ πρὸς τῷ Α, τῆς δὲ ὑπὸ ΕΘΖ ἡμίση αἰ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἴξῃς.

dimidius ipse ad A, ipsius vero ΕΘΖ dimidius ipse ad Δ; æqualis igitur et ad A angulus ipsi ad Δ. In æqualibus igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

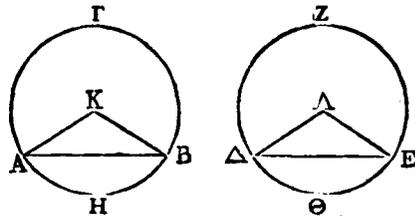
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἰ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἴστωσαν αἰ ΑΒ, ΔΕ, τὰς μὲν ΑΓΒ, ΔΖΕ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦ-

PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis æquales rectæ æquales circumferentias auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et in ipsis æquales rectæ sint ΑΒ, ΔΕ, ipsas quidem ΑΓΒ, ΔΖΕ circumferentias majores auferentes, ipsas



σαι, τὰς δὲ ΑΗΒ, ΔΘΕ ἐλάττονας· λέγω ὅτι ἡ μὲν ΑΓΒ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΔΖΕ μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΑΗΒ ἐλάττων περιφέρεια τῇ ΔΘΕ ἐλάττονι.

vero ΑΗΒ, ΔΘΕ minores; dico ipsam quidem ΑΓΒ majorem circumferentiam æqualem esse ipsi ΔΖΕ majori circumferentiæ, ipsam vero ΑΗΒ minorem ipsi ΔΘΕ minori.

égaux. Mais l'angle en A est la moitié de l'angle BHΓ, et l'angle en Δ la moitié de l'angle ΕΘΖ (20. 3); donc l'angle en A est égal à l'angle en Δ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVIII.

Dans des cercles égaux, les droites égales soutendent des arcs égaux, le plus grand étant égal au plus grand, et le plus petit égal au plus petit.

Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ, et que dans ces cercles, les droites égales ΑΒ, ΔΕ soutendent les plus grands arcs ΑΓΒ, ΔΖΕ, et les plus petits arcs ΑΗΒ, ΔΘΕ; je dis que le plus grand arc ΑΓΒ est égal au plus grand arc ΔΖΕ, et que le plus petit arc ΑΗΒ est égal au plus petit arc ΔΘΕ.

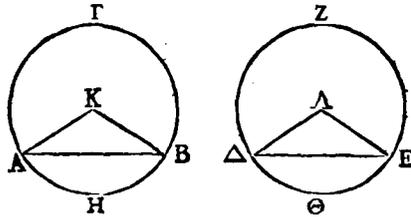
172 LE TROISIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΒΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

Sumantur enim centra circulorum, Κ, Λ, et jungantur ΒΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΑΚ, ΚΒ ὁμοίαι ταῖς ΔΛ, ΛΕ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΒ βάσει τῆ ΔΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ γωνία τῆ ὑπὸ

Et quoniam æquales circuli sunt, æquales sunt et ipsæ ex centris; duæ igitur ΑΚ, ΚΒ duabus ΔΛ, ΛΕ æquales sunt, et basis ΑΒ basi ΔΕ æqualis; angulus igitur ΑΚΒ ipsi ΔΛΕ æqua-



ΔΛΕ ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ᾖσιν· ἴση ἄρα ἡ ΑΗΒ περιφέρεια τῆ ΔΘΕ περιφέρειᾳ<sup>3</sup>. Ἐστί δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλων τῶ ΔΕΖ κύκλων ἴσος· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια λοιπῆ τῆ ΔΖΕ περιφέρειᾳ ἴση ἐστίν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἰξῆς.

lis est. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistent, quando ad centra sunt; æqualis igitur ΑΗΒ circumferentia ipsi ΔΘΕ circumferentiæ. Est autem et totus ΑΒΓ circulus toti ΔΕΖ circulo æqualis; reliqua igitur et ΑΓΒ circumferentia reliquæ ΔΖΕ circumferentiæ æqualis est. In æqualibus igitur, etc.

Prenons les centres Κ, Λ de ces cercles (1. 3), et joignons ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

Puisque ces cercles sont égaux, leurs rayons sont égaux; donc les deux droites ΑΚ, ΚΒ sont égales aux deux droites ΔΛ, ΛΕ; mais la base ΑΒ est égale à la base ΔΕ; donc l'angle ΑΚΒ est égal à l'angle ΔΛΕ (8. 1). Mais des angles égaux comprennent des arcs égaux, quand ils sont aux centres (26. 3); donc l'arc ΑΗΒ est égal à l'arc ΔΘΕ. Mais la circonférence entière ΑΒΓ est égale à la circonférence entière ΔΕΖ; donc l'arc restant ΑΓΒ est égal à l'arc restant ΔΖΕ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

PROPOSITIO XXIX.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφε-  
ρείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

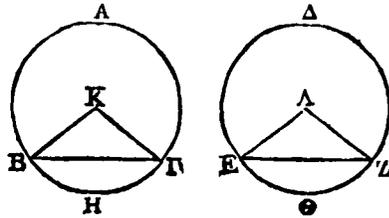
Ἐστώσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν  
αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήθωσαν αἱ ΒΗΓ,  
ΕΘΖ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι· λέγω  
ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ εὐθεῖα τῇ ΕΖ.

Εἰλήθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ  
ἕστω<sup>3</sup> τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ,  
ΕΛ, ΛΖ.

In æqualibus circulis æquales circumferentias  
æquales rectæ subtendunt.

Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et in ipsis  
æquales circumferentiæ sumantur ΒΗΓ, ΕΘΖ,  
et jungantur ΒΓ, ΕΖ rectæ; dico æqualem esse  
ΒΓ rectam ipsi ΕΖ.

Sumantur enim centra circulorum, et sint  
Κ, Λ, et jungantur ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ  
περιφέρειᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ  
ὑπὸ ΕΛΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύ-  
κλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὲ  
αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γω-  
νίας ἴσας περιέχουσι· βάσεις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ  
ΕΖ ἴση ἐστὶν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἰζήσ.

Et quoniam æqualis est ΒΗΓ circumferentia  
ipsi ΕΘΖ circumferentiæ, æqualis est et angu-  
lus ΒΚΓ ipsi ΕΛΖ. Et quoniam æquales sunt  
ΑΒΓ, ΔΕΖ circuli, æquales sunt et ipsæ ex cen-  
tris; duæ igitur ΒΚ, ΚΓ duabus ΕΛ, ΛΖ æquales  
sunt, et angulos æquales continent; basis igitur  
ΒΓ basi ΕΖ æqualis est. In æqualibus igitur, etc.

PROPOSITION XXIX.

Dans des cercles égaux, les arcs égaux sont soutendus par des droites égales.

Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ; dans ces cercles prenons les arcs égaux  
ΒΗΓ, ΕΘΖ, et joignons les droites ΒΓ, ΕΖ; je dis que la droite ΒΓ est égale à  
la droite ΕΖ.

Prenons les centres de ces cercles, qu'ils soient Κ, Λ, et joignons ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Puisque l'arc ΒΗΓ est égal à l'arc ΕΘΖ, l'angle ΒΚΓ est égal à l'angle ΕΛΖ (27.  
3). Mais les cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont égaux; donc leurs rayons seront égaux;  
donc les deux droites ΒΚ, ΚΓ sont égales aux deux droites ΕΛ, ΛΖ; mais ces  
droites comprennent des angles égaux; donc la base ΒΓ est égale à la base ΕΖ  
(4. 1). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

PROPOSITIO XXX.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμῖν'.

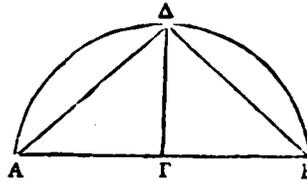
Ἐστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ  $\Lambda\Delta\text{B}$ · δεῖ δὴ τὴν  $\Lambda\Delta\text{B}$  περιφέρειαν δίχα τεμῖν'.

Ἐπιζεύχθω ἡ  $\text{AB}$ , καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ  $\Gamma$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $\Gamma$  σημείου τῇ  $\text{AB}$  εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ  $\Gamma\Delta$ , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ  $\Lambda\Delta$ ,  $\Delta\text{B}$ .

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia  $\Lambda\Delta\text{B}$ ; oportet igitur  $\Lambda\Delta\text{B}$  circumferentiam bifariam secare.

Jungatur  $\text{AB}$ , et secetur bifariam in  $\Gamma$ , et a  $\Gamma$  puncto ipsi  $\text{AB}$  rectæ ad rectos ducatur  $\Gamma\text{B}$ , et jungantur  $\Lambda\Delta$ ,  $\Delta\text{B}$ .



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $\text{AG}$  τῇ  $\text{GB}$ , κοινὴ δὲ ἡ  $\Gamma\Delta$ · δύο δὲ αἱ  $\text{AG}$ ,  $\Gamma\Delta$  δυσὶ ταῖς  $\text{BG}$ ,  $\Gamma\Delta$  ἴσαι εἰσὶ. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $\text{AGD}$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\text{BGD}$  ἴση, ἄρθῃ γάρ· κατέρω· βάσεις ἄρα<sup>3</sup> ἡ  $\Lambda\Delta$  βάσει τῇ  $\Delta\text{B}$  ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· καὶ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν  $\Lambda\Delta$ ,  $\Delta\text{B}$  περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίῳ· ἴση ἄρα ἡ  $\Lambda\Delta$  περιφέρεια τῇ  $\Delta\text{B}$  περιφέρειᾳ.

Et quoniam æqualis est  $\text{AG}$  ipsi  $\text{GB}$ , communis autem  $\Gamma\Delta$ ; duæ igitur  $\text{AG}$ ,  $\Gamma\Delta$  duabus  $\text{BG}$ ,  $\Gamma\Delta$  æquales sunt. Et angulus  $\text{AGD}$  angulo  $\text{BGD}$  æqualis, rectus enim uterque; basis igitur  $\Lambda\Delta$  basi  $\Delta\text{B}$  æqualis est. Æquales autem rectæ æquales circumferentias auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori; et est utraque ipsarum  $\Lambda\Delta$ ,  $\Delta\text{B}$  circumferentiarum minor semicirculo; æqualis igitur  $\Lambda\Delta$  circumferentia ipsi  $\Delta\text{B}$  circumferentiæ.

PROPOSITION XXX.

Couper un arc donné en deux parties égales.

Soit  $\Lambda\Delta\text{B}$  l'arc donné; il faut couper l'arc  $\Lambda\Delta\text{B}$  en deux parties égales.

Joignons la droite  $\text{AB}$ , et coupons-la en deux parties égales en  $\Gamma$  (10. 1); du point  $\Gamma$  menons  $\Gamma\Delta$  perpendiculaire à la droite  $\text{AB}$  (11. 1), et joignons  $\Lambda\Delta$ ,  $\Delta\text{B}$ .

Puisque  $\text{AG}$  est égal à  $\text{GB}$ , et que la droite  $\Gamma\Delta$  est commune, les deux droites  $\text{AG}$ ,  $\Gamma\Delta$  sont égales aux deux droites  $\text{BG}$ ,  $\Gamma\Delta$ . Mais l'angle  $\text{AGD}$  est égal à l'angle  $\text{BGD}$ ; car ils sont droits l'un et l'autre; donc la base  $\Lambda\Delta$  est égale à la base  $\Delta\text{B}$  (4. 1). Mais des droites égales soutendent des arcs égaux, le plus grand étant égal au plus grand, et le plus petit égal au plus petit (28. 3), et l'un et l'autre des arcs  $\Lambda\Delta$ ,  $\Delta\text{B}$  est plus petit que la demi-circonférence; donc l'arc  $\Lambda\Delta$  est égal à l'arc  $\Delta\text{B}$ .

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 175

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται  
κατὰ τὸ Δ σημείον⁴. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ergo data circumferentia bifariam secta est  
in Δ puncto. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

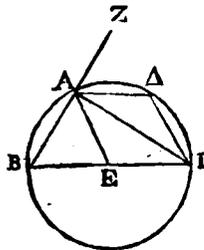
PROPOSITIO XXXI.

Ἐν κύκλῳ, ἢ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή  
ἔστιν· ἢ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς·  
ἢ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς. Καὶ  
ἔτι ἢ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων  
ἔστιν ὀρθῆς· ἢ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία  
ἐλάττων ὀρθῆς².

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ  
ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθωσαν

In circulo, ipse quidem in semicirculo angu-  
lus rectus est; ipse vero in majore segmento  
minor recto; ipse autem in minore segmento  
major recto. Et insuper ipse quidem majoris  
segmenti angulus major est recto; ipse vero mi-  
noris segmenti angulus minor recto.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit  
ΒΓ, centrum vero Ε, et jungantur ΒΑ, ΑΓ,



αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ. Λέγω ὅτι ἢ μὲν ἐν τῷ ΒΑΓ  
ἡμικυκλίῳ γωνία ἢ ὑπὸ ΒΑΓ³ ὀρθή ἐστίν· ἢ δὲ

ΑΔ, ΔΓ; dico ipsum quidem in ΒΑΓ semicir-  
culo angulum ΒΑΓ rectum esse; ipsum autem in

Donc l'arc donné a été coupé en deux parties égales au point Δ. Ce qu'il  
fallait faire.

PROPOSITION XXXI.

Dans un cercle, l'angle placé dans le demi-cercle est droit; l'angle placé  
dans un segment plus grand est plus petit qu'un droit; l'angle placé dans  
un segment plus petit est plus grand qu'un droit; l'angle du plus grand seg-  
ment est plus grand qu'un droit, et l'angle du plus petit segment est plus  
petit qu'un droit.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, dont le diamètre est ΒΓ et le centre le point Ε; joignons  
ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ; je dis que l'angle ΒΑΓ placé dans le demi-cercle ΒΑΓ est droit;

176 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἐν τῷ  $ABΓ$  μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία, ἢ ὑπὸ  $ABΓ$ , ἐλάττων ὀρθῆς· ἢ δὲ ἐν τῷ  $ΑΔΓ$  ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἢ ὑπὸ  $ΑΔΓ$  μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

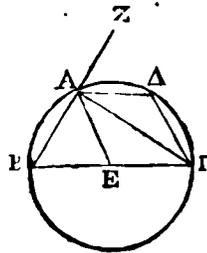
Ἐπιζεύχθω ἡ  $AE$ , καὶ διήχθω ἡ  $BA$  ἐπὶ τὸ  $Z$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $BE$  τῇ  $EA$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἢ ὑπὸ  $ABE$  τῇ ὑπὸ  $BAE$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΓE$  τῇ  $EA$ , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΑΓE$  τῇ ὑπὸ

$ABΓ$  majore semicirculo segmento angulum  $ABΓ$  minorem recto; ipsum vero in  $ΑΔΓ$  minorem semicirculo segmento angulum  $ΑΔΓ$  majorem esse recto.

Jungatur  $AE$ , et producatu  $BA$  ad  $Z$ .

Et quoniam æqualis est  $BE$  ipsi  $EA$ , æqualis est et angulus  $ABE$ , ipsi  $BAE$ . Rursus, quoniam æqualis est  $ΓE$  ipsi  $EA$ , æqualis est et  $ΑΓE$  ipsi



$ΓAE$ · ἔλη ἄρα ἢ ὑπὸ  $BAΓ$  δυσὶ ταῖς ὑπὸ  $ABΓ$ ,  $ΑΓB$  ἴση ἐστίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ZΑΓ$  ἐκτὸς τοῦ  $ABΓ$  τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ  $ABΓ$ ,  $ΑΓB$  γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $BAΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ZΑΓ$ , ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἢ ἄρα ἐν τῷ  $BAΓ$  ἡμικυκλίῳ γωνία ἢ ὑπὸ  $BAΓ$  ὀρθὴ ἐστὶ.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ  $ABΓ$  τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ  $ABΓ$ ,  $BAΓ$  δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ

$ΓAE$ ; totus igitur  $BAΓ$  duobus  $ABΓ$ ,  $ΑΓB$  æqualis est. Est autem et ipse  $ZΑΓ$ , extra  $ABΓ$  triangulum, duobus  $ABΓ$ ,  $ΑΓB$  angulis æqualis; æqualis igitur et  $BAΓ$  angulus ipsi  $ZΑΓ$ ; recus igitur uterque; ipse igitur in  $BAΓ$  semicirculo angulus  $BAΓ$  rectus est.

Et quoniam  $ABΓ$  trianguli duo anguli  $ABΓ$ ,  $BAΓ$  duobus rectis minores sunt, rectus autem

que l'angle  $ABΓ$  placé dans le segment  $ABΓ$  plus grand que le demi-cercle  $ABΓ$  est plus petit qu'un droit, et que l'angle  $ΑΔΓ$  placé dans le segment  $ΑΔΓ$  plus petit que le demi-cercle, est plus grand qu'un droit.

Joignons  $AE$ , et prolongeons  $BA$  vers  $Z$ .

Puisque  $BE$  est égal à  $EA$ , l'angle  $ABE$  est égal à l'angle  $BAE$  (5. 1). De plus, puisque  $ΓE$  est égal à  $EA$ , l'angle  $ΑΓE$  est égal à l'angle  $ΓAE$ ; donc l'angle entier  $BAΓ$  est égal aux deux angles  $ABΓ$ ,  $ΑΓB$ . Mais l'angle  $ZΑΓ$  placé hors du triangle  $ABΓ$  est égal aux deux angles  $ABΓ$ ,  $ΑΓB$  (32. 1); donc l'angle  $BAΓ$  est égal à l'angle  $ZΑΓ$ ; donc chacun de ces angles est droit (déf. 10. 1); donc l'angle  $BAΓ$ , placé dans le demi-cercle  $BAΓ$ , est droit.

Puisque les deux angles  $ABΓ$ ,  $BAΓ$  du triangle  $ABΓ$  sont plus petits que deux

δὲ ἢ ὑπὸ ΒΑΓ<sup>6</sup>· ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, καὶ ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Καὶ ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὸν ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι<sup>7</sup>.

Λέγω<sup>8</sup> ὅτι καὶ ἢ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, ἢ περιεχομένη ὑπὸ τε<sup>9</sup> τῆς ΑΒΓ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἢ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἢ περιεχομένη ὑπὸ τε<sup>10</sup> τῆς ΑΔΓ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἐστὶν αὐτόθεν φανερόν. Ἐπεὶ γὰρ ἢ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία<sup>11</sup> ἐστὶν, ἢ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπεὶ ἢ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΖ εὐθειῶν ὀρθὴ ἐστὶν· ἢ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓΑ εὐθείας καὶ τῆς ΑΓΔ περιφέρειας περιεχομένη<sup>12</sup> ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΒΑΓ; minor igitur recto est ΑΒΓ angulus, et in ΑΒΓ segmento semicirculo majore.

Et quoniam in circulo quadrilaturnm est ΑΒΓΔ, in circulis autem quadrilaterorum oppositi duobus rectis æquales sunt; ipsi igitur ΑΒΓ, ΑΔΓ duobus rectis æquales sunt. Et est ΑΒΓ minor recto; reliquus igitur ΑΔΓ angulus major recto est, et est in ΑΔΓ segmento semicirculo minore.

Dico autem et majoris quidem segmenti angulum comprehensum et ab ΑΒΓ circumferentiâ et ΑΓ rectâ, majorem esse recto; minoris vero segmenti angulum comprehensum et ab ΑΔΓ circumferentiâ et ΑΓ rectâ, minorem esse recto. Et est hoc manifestum. Quoniam enim ipse a ΒΑ, ΑΓ rectis comprehensus rectus angulus est, ergo ab ΑΒΓ circumferentiâ et ΑΓ rectâ comprehensus major est recto. Rursus, quoniam ipse ab ΑΓ, ΑΖ rectis comprehensus rectus est, ergo a ΓΑ rectâ, et ΑΓΔ circumferentiâ comprehensus minor est recto. In circulo igitur, etc.

droits (17. 1), et que l'angle ΒΑΓ est droit, l'angle ΑΒΓ est plus petit qu'un droit, et cet angle est dans le segment ΑΒΓ plus grand que le demi-cercle.

Puisque le quadrilatère ΑΒΓΔ est dans un cercle, et que les angles opposés des quadrilatères inscrits dans des cercles sont égaux à deux droits (22. 3), les angles ΑΒΓ, ΑΔΓ sont égaux à deux droits. Mais l'angle ΑΒΓ est plus petit qu'un droit; donc l'angle restant ΑΔΓ est plus grand qu'un droit, et cet angle est dans le segment ΑΔΓ plus petit que le demi-cercle.

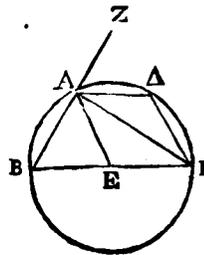
Je dis aussi que l'angle du plus grand segment, compris par l'arc ΑΒΓ et la droite ΑΓ, est plus grand qu'un droit, et que l'angle du plus petit segment, compris par l'arc ΑΔΓ et la droite ΑΓ, est plus petit qu'un droit, ce qui est évident; car puisque l'angle compris par les droites ΒΑ, ΑΓ est droit, l'angle compris par l'arc ΑΒΓ et la droite ΑΓ est plus grand qu'un droit. De plus, puisque l'angle compris par les droites ΑΓ, ΑΖ est droit, l'angle compris par la droite ΓΑ et l'arc ΑΓΔ est plus petit qu'un droit. Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Η<sup>13</sup> ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὸν εἶναι τὸν ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐπεὶ διπλὴ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση γὰρ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· ἴσῃ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ διπλὴ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ διπλασίονες εἰσι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Demonstratur rectum esse ΒΑΓ. Quoniam duplus est ΑΕΓ ipsius ΒΑΕ, æqualis enim duobus interioribus et oppositis; est autem et ΑΕΒ duplus ipsius ΕΑΓ; ipsi igitur ΑΕΒ, ΑΕΓ dupli sunt ipsius ΒΑΓ. Sed ipsi ΑΕΒ, ΑΕΓ duobus rectis æquales sunt; ergo ΒΑΓ rectus est. Quod oportebat ostendere.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἡ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία.

Ex hoc utique manifestum, si unus angulus trianguli duobus æqualis sit, rectum esse angu-

AUTREMENT.

On démontre autrement que l'angle ΒΑΓ est droit. En effet, puisque l'angle ΑΕΓ est double de l'angle ΒΑΕ, car il est égal aux deux angles intérieurs et opposés (32. 1), et que l'angle ΑΕΒ est double de l'angle ΕΑΓ, les angles ΑΕΒ, ΑΕΓ, sont doubles de l'angle ΒΑΓ. Mais les angles ΑΕΒ, ΑΕΓ, sont égaux à deux droits (13. 1); donc l'angle ΒΑΓ est droit. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si un des angles d'un triangle est égal aux deux autres, cet angle est droit, parce que son angle extérieur est égal à ces

διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἔκτος ταῖς αὐταῖς ἴσιν εἶναι. Ὄταν δὲ ἐπιζῆς ἴσαι ὦσιν, ὀρθαί εἰσιν<sup>14</sup>.

lum, propterea quod et ejus angulus exterior iisdem est æqualis. Quando autem ipsi deinceps sunt æquales, recti sunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

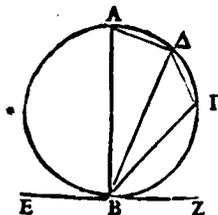
PROPOSITIO XXXII.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῆ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἴσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Si circulum contingat aliqua recta, a contactu autem in circulum ducatur aliqua recta ducta secans circulum, quos facit angulos ad contingentem ipsi æquales erunt angulis in alternis circuli segmentis.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτίσθω τις εὐθεῖα ἢ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου

Circulum enim ΑΒΓΔ contingat aliqua recta ΕΖ in Β puncto, et a Β puncto ducatur aliqua



διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἢ ΒΔ· λέγω ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἢ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης ἴσαι ἴσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις.

recta ΒΔ in ΑΒΓΔ circulum secans ipsum; dico quos facit angulos ΒΔ cum ΕΖ contingente eos æquales esse angulis in alternis segmentis circuli, hoc est ΖΒΔ quidem angulum æ-

mêmes angles, et que quand deux angles de suite sont égaux, ils sont droits (déf. 10. 1).

PROPOSITION XXXII.

Si une droite touche un cercle, et si du point de contact on mène une droite qui coupe ce cercle, les angles que cette droite fait avec la tangente seront égaux aux angles placés dans les segments alternes du cercle.

Qu'une droite ΕΖ touche le cercle ΑΒΓΔ au point Β, et du point Β menons une droite ΒΔ qui coupe le cercle ΑΒΓΔ; je dis que les angles que fait ΒΔ avec la tangente ΕΖ sont égaux aux angles placés dans les segments alternes du cercle;

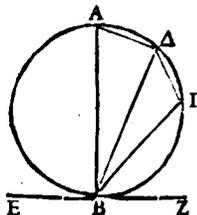
180 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

νίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένη γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΒΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένη γωνία<sup>3</sup>.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τοχὸν σημείον τὸ Γ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

qualem esse angulo in ΒΑΔ segmento constituto, ΔΒΕ vero angulum æqualem esse in ΑΓΒ segmento constituto.

Ducatur enim a Β ipsi ΕΖ ad rectos ΒΑ, et sumatur in ΒΔ circumferentiâ quodlibet punctum Γ, et jungantur ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.



Καὶ ἐπὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἰφάπτεται τις εὐθεία ΕΖ κατὰ τὸ Β, ἀπὸ δὲ τῆς<sup>4</sup> ἀφ᾽ ἧς ἤκται τῇ ἰφαπτομένη πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ ἄρα<sup>5</sup> τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου<sup>6</sup>. Ἡ ΒΑ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου<sup>6</sup>. ἢ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὔσα ὀρθή ἐστὶ. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ μιᾶ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ ὀρθή· ἢ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ

Et quoniam circulum ΑΒΓΔ contingit aliqua recta ΕΖ in Β, a contactu autem ducta est tangenti ad rectas ΒΑ, in ΒΑ igitur centrum est ΑΒΓΔ circuli. ΒΑ igitur diameter est ΑΒΓΔ circuli; ergo ΑΔΒ angulus in semicirculo constitutus rectus est; reliqui igitur ΒΑΔ, ΑΒΔ uni recto æquales sunt. Est autem et ΑΒΖ rectus; ergo ΑΒΖ æqualis est ipsis ΒΑΔ, ΑΒΔ. Communis auferatur ΑΒΔ; reliquus igitur ΔΒΖ angulus æqualis est angulo ΒΑΔ in alterno

c'est-à-dire, que l'angle ΖΒΔ est égal à l'angle placé dans le segment ΒΑΔ; et que l'angle ΑΒΕ est égal à l'angle placé dans le segment ΔΓΒ.

D'un point Β menons la droite ΒΑ perpendiculaire à ΕΖ (11. 1), et dans l'arc ΒΔ, prenons un point quelconque Γ, et joignons ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Puisque la droite ΕΖ touche le cercle ΑΒΓΔ au point Β, et que la droite ΒΑ, menée du point de contact Β, est perpendiculaire à la tangente ΕΖ, le centre du cercle ΑΒΓΔ est dans la droite ΒΑ (19. 3). Donc ΒΑ est le diamètre du cercle ΑΒΓΔ; donc l'angle ΑΔΒ, placé dans le demi-cercle, est droit (31. 3). Donc les angles restants ΒΑΔ, ΑΒΔ sont égaux à un droit. Mais l'angle ΑΒΖ est droit; donc l'angle ΑΒΖ est égal aux angles ΒΑΔ, ΑΒΔ (not. 10). Retranchons l'angle commun ΑΒΔ; l'angle restant ΔΒΖ sera égal à l'angle ΒΑΔ

τῆ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνία, τῆ ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι γ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῆ ὑπὸ ΔΒΖ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῆ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ, τῆ ὑπὸ ΔΓΒ γωνία, ἐστὶν ἴση. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

segmento circuli. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ΑΒΓΔ, oppositi ejus anguli duobus rectis æquales sunt. Sunt autem et ipsi ΔΒΖ, ΔΒΕ duobus rectis æquales; ipsi igitur ΔΒΖ, ΔΒΕ ipsis ΒΑΔ, ΒΓΔ æquales sunt, quorum ΒΑΔ ipsi ΔΒΖ ostensus est æqualis; reliquus igitur ΔΒΕ angulo ΔΓΒ in alterno circuli segmento ΔΓΒ æqualis est. Si igitur circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

PROPOSITIO XXXIII.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμήμα κύκλου, διχομόνον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Super datâ rectâ describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ· δεῖ δὲ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γράψαι τμήμα κύκλου, διχομόνον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ'. Ἡ δὲ πρὸς τῷ Γ γωνία ἢ τοῖς ὀξείᾳ ἐστὶν, ἢ ὀρθῇ, ἢ ἀμβλείᾳ.

Sit data recta ΑΒ, datus autem angulus rectilineus ad Γ; oportet igitur super datâ rectâ ΑΒ describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ. Ipse autem ad Γ angulus vel est acutus, vel rectus, vel obtusus.

placé dans le segment alterne du cercle. Et puisque le quadrilatère ΑΒΓΔ est inscrit dans le cercle, ses angles opposés sont égaux à deux droits (22. 3). Mais les angles ΔΒΖ, ΔΒΕ sont égaux à deux droits; donc les angles ΔΒΖ, ΔΒΕ sont égaux aux angles ΒΑΔ, ΒΓΔ (13. 1); mais on a démontré que l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΔΒΖ; donc l'angle restant ΔΒΕ est égal à l'angle ΑΓΒ placé dans le segment alterne du cercle ΔΓΒ; donc, etc.

PROPOSITION XXXIII.

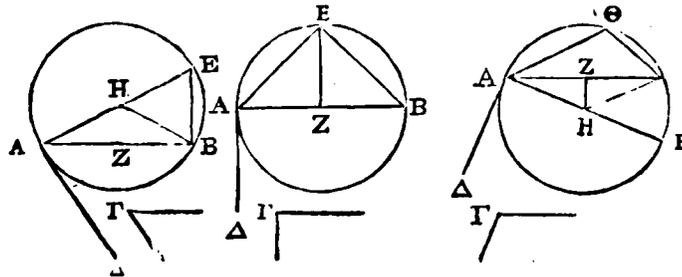
Sur une droite donnée, décrire un segment de cercle, qui reçoive un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit ΑΒ la droite donnée et Γ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite donnée ΑΒ décrire un segment de cercle qui reçoive un angle égal à l'angle donné Γ. L'angle Γ est aigu, ou droit, ou obtus.

182 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς<sup>3</sup> ἐπὶ πρώτης καταγραφῆς, καὶ συνιστάτω πρὸς τῆ AB εὐθεία καὶ τῷ A σημείῳ τῆ πρὸς τῷ Γ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀξεῖα ἄρα ἴσῃ καὶ ἢ ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ<sup>5</sup> ἤχθω τῆ AD ἀπὸ τοῦ A σημείου πρὸς ὀρθὰς ἢ AE, καὶ τεμηθῶ ἢ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z σημείου τῆ AB πρὸς ὀρθὰς ἢ ZH, καὶ ἐπιζεύχθω ἢ HB. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἴσῃ ἢ AZ τῆ ZB,

Sit primum acutus, ut in primâ figurâ, et constitutur ad AB rectam et ad punctum in A, ipsi ad Γ angulo æqualis ipse ΒΑΔ; acutus igitur est et ΒΑΔ. Ducatur ipsi AD ab A puncto ad rectos ipsa AE, et secetur AB bifariam in Z, et ducatur a Z puncto ipsi AB ad rectos ipsa ZH, et jungatur HB. Et quoniam æqualis est AZ ipsi ZB, communis autem ZH, duæ utique



κοινὴ δὲ ἢ ZH, δύο δὲ αἱ AZ, ZH δυτὶ ταῖς ZB, ZH ἴσαι ἴσῃ, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ AZH γωνία<sup>6</sup> τῆ ὑπὸ BZH ἴση· βάσις ἄρα ἢ AH βάσις τῆ HB ἴση ἴσῃ. Ο ἄρα κέντρω μὲν τῷ H, διαστήματι δὲ τῷ HA, κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τοῦ B. Γεγράφθω, καὶ ἴστω ὁ ABE, καὶ ἐπιζεύχθω ἢ BE. Ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας τῆς AE διαμέτρου, ἀπὸ τοῦ A, τῆ AE πρὸς ὀρθὰς ἴσῃ ἢ AD, ἢ AD ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ

AZ, ZH duabus ZB, ZH æquales sunt, et angulus AZH ipsi angulo BZH æqualis; basis igitur AH basi HB æqualis est. Ergo centro quidem H, intervallo vero HA, circulus descriptus transibit et per B. Describatur, et sit ABE, et jungatur BE. Quoniam igitur ab extremitate A ipsius AE diametri ipsi AE ad rectos est AD, ipsa utique AD contingit circulum. Quoniam igitur circulum ABE tangit aliqua recta AD, et a

Premièrement qu'il soit aigu, comme dans la première figure; sur la droite AB et au point A construisons un angle ΒΑΔ égal à l'angle Γ (23. 1); l'angle ΒΑΔ sera aigu. Du point A menons AE perpendiculaire à AD (11. 1); coupons AB en deux parties égales en Z (10. 1), et du point Z menons ZH perpendiculaire à AB, et joignons HB. Puisque AZ est égal à ZB, et que la droite ZH est commune, les deux droites AZ, ZH sont égales aux deux droites ZB, ZH; mais l'angle AZH est égal à l'angle BZH; donc la base AH est égale à la base HB (4. 1). Donc le cercle décrit du centre H, et de l'intervalle HA passera par le point B. Qu'il soit décrit, et qu'il soit ABE, et joignons EB. Puisque la droite AD menée de l'extrémité A du diamètre AE est perpendiculaire à AE, la droite AD touchera le cercle (16. 3). Puisque la droite AD touche le cercle,

οὗν κύκλου τοῦ  $ABE$  ἐφάπτεται τις εὐθεΐα ἢ  $AD$ , καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ  $A$  ἀφῆς εἰς<sup>8</sup> τὸ  $ABE$  κύκλον διῆκται τις εὐθεΐα ἢ  $AB$ , ἢ ἄρα ὑπὸ  $ΔAB$  γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ κύκλου<sup>9</sup> τμήματι γωνία τῇ ὑπὸ  $AEB$ . ἀλλ' ἢ ὑπὸ  $ΔAB$  τῇ πρὸς τῷ  $Γ$  ἐστὶν ἴση, καὶ ἢ πρὸς τῷ  $Γ$  ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ  $AEB$ . ἐπὶ τῆς δευτέρας ἄρα εὐθείας τῆς  $AB$  τμήμα κύκλου γέγραπται τὸ  $AEB$ , διχομόνον γωνίαν τὴν ὑπὸ  $AEB$  ἴσην τῇ δευτέρῃ σὴ πρὸς τῷ  $Γ$ .

ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἢ πρὸς τῷ  $Γ$ , καὶ δεῖον ἔστω πάλιν<sup>10</sup> ἐπὶ τῆς  $AB$  γράψαι τμήμα κύκλου διχομόνον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ  $Γ$  ὀρθῇ γωνίᾳ<sup>11</sup>. συνιστάτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ  $Γ$  ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ  $BAD$ , ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς διυτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἢ  $AB$  δίχα κατὰ τὸ  $Z$ , καὶ κέντρον μὲν τῷ  $Z$ , διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν  $ZA$ ,  $ZB$ , κύκλος γεγράφθω ὁ  $AEB$ . ἐφάπτεται ἄρα ἢ  $AD$  εὐθεΐα τοῦ  $ABE$  κύκλου, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ  $A$  γωνίαν. καὶ ἴση ἐστὶν ἢ μὲν ὑπὸ  $BAD$  γωνία τῇ ἐν τῷ  $AEB$  τμήματι<sup>12</sup>, ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα. ἀλλὰ καὶ ἢ ὑπὸ  $BAD$  τῇ πρὸς τῷ  $Γ$  ἴση ἐστὶ<sup>13</sup>. καὶ ἢ ἐν

contactu ad  $A$  in  $ABE$  circulum ducta est aliqua  $AB$ , angulus utique  $ΔAB$  æqualis est angulo  $AEB$  in alterno circuli segmento. Sed  $ΔAB$  ipsi ad  $Γ$  est æqualis; et ad  $Γ$  igitur angulus æqualis est ipsi  $AEB$ . Super datâ igitur rectâ  $AB$  segmentum circuli descriptum est  $AEB$ , capiens angulum  $AEB$  æqualem dato ad  $Γ$ .

Sed et rectus sit ipse ad  $Γ$ ; et oporteat rursus super  $AB$  describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem ipsi ad  $Γ$  recto angulo. Constituatur enim rursus ipsi ad  $Γ$  recto angulus æqualis  $BAD$ , ut se habet in secundâ figurâ, et secetur  $AB$  bifariam in  $Z$ , et centro quidem  $Z$ , intervallo vero alterutrâ ipsarum  $AZ$ ,  $ZB$ , circulus describatur  $AEB$ ; contingit igitur  $AD$  recta  $ABE$  circulum, propterea quod rectus est ad  $A$  angulus. Et æqualis est quidem  $BAD$  angulus ipsi in  $AEB$  segmento, rectus enim et ipse est in semicirculo consistens. Sed  $BAD$  ipsi ad  $Γ$  æqualis est; et ipse

et que du point de contact en  $A$  on a méné une droite  $AB$  dans le cercle  $ABE$ , l'angle  $ΔAB$  est égal à l'angle  $AEB$  placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Mais l'angle  $ΔAB$  est égal à l'angle  $Γ$ ; donc l'angle  $Γ$  est égal à l'angle  $AEB$ . Donc sur la droite donnée  $AB$ , on a décrit un segment de cercle  $AEB$  qui reçoit un angle  $AEB$  égal à l'angle donné  $Γ$ .

Mais que l'angle  $Γ$  soit droit, et qu'il faille encore décrire sur la droite  $AB$  un segment de cercle qui reçoive un angle égal à l'angle droit  $Γ$ . Construisons un angle  $BAD$  égal à l'angle droit  $Γ$  (25. 1), comme dans la seconde figure; coupons  $AB$  en deux parties égales en  $Z$  (10. 1); du centre  $Z$ , et d'un intervalle égal à l'une ou à l'autre des droites  $ZA$ ,  $ZB$ , décrivons le cercle  $AEB$ . La droite  $AD$  sera tangente au cercle  $ABE$  (16. 3), parce que l'angle est droit en  $A$ . Mais l'angle  $BAD$  est égal à l'angle qui est placé dans le segment  $AEB$ , car cet angle est droit, puisqu'il est placé dans un demi-cercle (31. 3). Mais l'angle  $BAD$  est égal à l'angle  $Γ$ ; donc l'angle placé dans le segment est égal à l'angle  $Γ$ ,

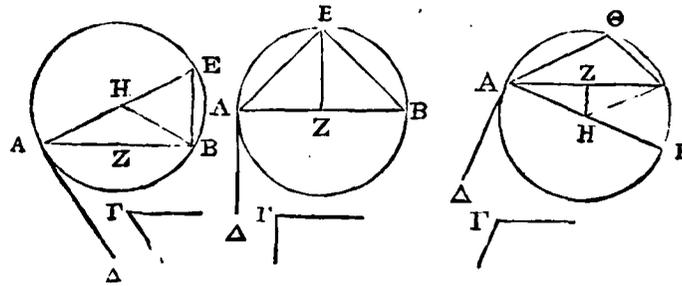
184 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ AEB τμήματι ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ' ἴση γωνίᾳ ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς AB τμήμα κύκλου τὸ AEB, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ'.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ' ἀμβλεία ἔστω, καὶ συνιστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ ἡ ὑπὸ BAA, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ AD πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ

in AEB segmento igitur æqualis est ipsi ad Γ'. Descriptum est igitur rursus super AB segmentum circuli AEB, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ'.

Sed etiam ad Γ obtusus sit, et constitutur ipsi æqualis ad AB rectam et ad A punctum ipse BAA, ut se habet in tertiâ figurâ, et ipsi AA ad rectos ducatur AE, et secetur rur-



AE, καὶ τετμήσω πάλιν ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ZH, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ HB. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB, καὶ κοινὴ ἡ ZH, δύο δὲ αἱ AZ, ZH δυσὶ ταῖς BZ, ZH ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ<sup>15</sup> ὑπὸ AZH γωνία τῇ ὑπὸ BZH ἴση· βάσεις ἄρα ἡ AH βάσει τῇ BH ἴση ἐστίν. Ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ H, διαστήματι δὲ τῷ HA, κύκλος γραφόμενος ἦξει καὶ διὰ τοῦ B. Ἐρχέσθω ὡς ὁ AEB<sup>16</sup>. Καὶ

sus AB bifariam in Z, et ipsi AB ad rectos ducatur ZH, et jungatur HB. Et quoniam rursus æqualis est AZ ipsi ZB, et communis ZH, duæ utique AZ, ZH duabus BZ, ZH æquales sunt, et angulus AZH angulo BZH æqualis; basis igitur AH basi BH æqualis est. Ergo centro quidem H, intervallo vero HA, circulus descriptus transibit et per B. Transeat ut AEB. Et Quoniam ipsi AB diametro ab extremitate ad rec-

donc on a décrit sur la droite AB un segment de cercle AEB qui reçoit un angle égal à l'angle droit Γ.

Mais enfin que l'angle Γ soit obtus. Sur la droite AB et au point A construisons un angle BAA égal à l'angle Γ (23. 1), et menons AE perpendiculaire à AA (11. 1); coupons la droite AB en-deux parties égales en Z (10. 1); menons ZH perpendiculaire à AB (11. 1), et joignons HB. Puisque AZ est égal à ZB, et que la droite ZH est commune, les deux droites AZ, ZH sont égales aux deux droites BZ, ZH; mais l'angle AZH est égal à l'angle BZH; donc la base AH est égale à la base BH (4. 1). Donc le cercle décrit du point H et de l'intervalle HA passera par le point B. Qu'il y passe comme AEB, puisqu'on a mené de l'extrémité du

ἐπι τῆ ΑΕ διαμέτρῳ ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθὰς ἔκται<sup>20</sup> ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. Καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς διήκται ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένη γωνία, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστὶ· καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ. Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας<sup>21</sup> τῆς ΑΒ γίγνεται τμήμα κύκλου τὸ ΑΘΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

tos ducta est ΑΔ, ipsa ΑΔ igitur contingit ΑΕΒ circulum. Et a contactu ad Α ducta est ΑΒ; ergo ΒΑΔ angulus æqualis est angulo constituto in alterno circuli segmento ΑΘΒ. Sed ΒΑΔ angulus ipsi ad Γ æqualis est. Et ipse in ΑΘΒ igitur segmento angulus æqualis est ipsi ad Γ. Ergo super datam rectam ΑΒ descriptum est segmentum circuli ΑΘΒ, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Απὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμήμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνία εὐθυγράμμω.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθείσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμήμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνία εὐθυγράμμω τῇ πρὸς τῷ Δ'.

PROPOSITIO XXXIV.

A dato circulo segmentum auferre, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Sit datus circulus ΑΒΓ, datus vero angulus rectilineus ad Δ; oportet igitur ab ΑΒΓ circulo segmentum auferre, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo ad Δ.

diamètre ΑΕ, la droite ΑΔ perpendiculaire à ce diamètre, la droite ΑΔ touchera le cercle ΑΕΒ (16. 3). Et puisque la droite ΑΒ a été menée du point de contact Α, l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle placé dans le segment alterne ΑΘΒ du cercle. Mais l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle Γ; donc l'angle placé dans le segment ΑΘΒ est égal à l'angle Γ. Donc on a décrit sur la droite donnée ΑΒ un segment de cercle ΑΘΒ, qui reçoit un angle égal à l'angle Γ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXIV.

D'un cercle donné, retrancher un segment, qui reçoive un angle égal à un angle rectiligne donné.

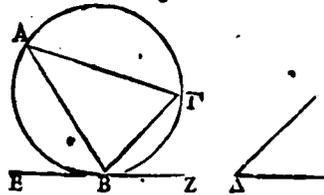
Soit ΑΒΓ le cercle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut du cercle ΑΒΓ retrancher un segment, qui reçoive un angle égal à l'angle rectiligne donné Δ.

Ἦχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἑφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ ΕΖ ὀρθία καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΖΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεται τις ὀρθία ἢ ΕΖ, καὶ ἔπο' τῆς κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς διήκται ἢ ΒΓ, ἢ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ

Ducatur ipsum ΑΒΓ circulum contingens ΕΖ ad Β punctum, et constituatur ad ΕΖ rectam et ad punctum in eâ Β ipsi ad Δ angulo æqualis ΖΒΓ.

Quoniam igitur circulum ΑΒΓ contingit aliqua recta ΕΖ, et a contactu ad Β ducta est ΒΓ; ipse ΖΒΓ igitur æqualis est angulo constituto



ΒΑΓ ἑναλλάξ τμήματι συνισταμένη γωνία. Ἀλλ' ἢ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἢ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ<sup>3</sup>.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμήμα ἀφῆρηται τὸ ΒΑΓ, διχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ ὀρθογώνιῳ τῇ πρὸς τῷ Δ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

in ΒΑΓ alterno segmento. Sed ΖΒΓ ipsi ad Δ æqualis est; et ipse in ΒΑΓ igitur segmento æqualis est ipsi ad Δ angulo.

A dato igitur circulo ΑΒΓ segmentum ablatum est ΒΑΓ, capiens angulum æqualem ipsi dato angulo rectilineo ad Δ. Quod oportebat facere.

Menons une droite ΕΖ qui touche le cercle ΑΒΓ au point Β (17. 3), et sur la droite ΕΖ, et au point Β de cette droite, faisons l'angle ΖΒΓ égal à l'angle Δ (23. 1).

Puisque la droite ΕΖ touche le cercle ΑΒΓ, et que la droite ΒΓ a été menée du point de contact Β, l'angle ΖΒΓ est égal à l'angle placé dans le segment alterne ΒΑΓ du cercle (32. 3). Mais l'angle ΖΒΓ est égal à l'angle Δ; donc l'angle placé dans le segment ΒΑΓ est égal à l'angle Δ.

Donc du cercle donné ΑΒΓ on a retranché un segment ΒΑΓ, qui reçoit un angle égal à l'angle rectiligne donné Δ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ.

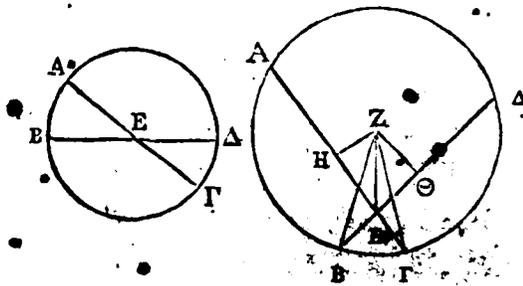
PROPOSITIO XXXV.

Εάν ἐν κύκλῳ δύο εὐθείαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστί τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἐν γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθείαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνεταισαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημείον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστί τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Si in circulo duæ rectæ sese secent, ipsum sub unius segmentis contentum rectangulum æquale est ipsi sub alterius segmentis contento rectangulo.

In circulo enim ΑΒΓΔ duæ rectæ ΑΓ, ΒΔ sese secent in Ε puncto; dico ipsam sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo.



Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσίν, ὥστε τὸ Ε κέντρον εἶναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· φανερόν ὅτι, ἴσων ὄντων τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστί τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Si igitur ipsæ quidem ΑΓ, ΒΔ per centrum sunt, ita ut Ε centrum sit ipsius ΑΒΓΔ circuli; manifestum est æqualibus existentibus ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, et ipsum sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo.

PROPOSITION XXXV.

Si dans un cercle, deux droites se coupent mutuellement, le rectangle compris sous les segments de l'une est égal au rectangle compris sous les segments de l'autre.

Que dans le cercle ΑΒΓΔ les deux droites ΑΓ, ΒΔ se coupent mutuellement au point Ε; je dis que le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ est égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ.

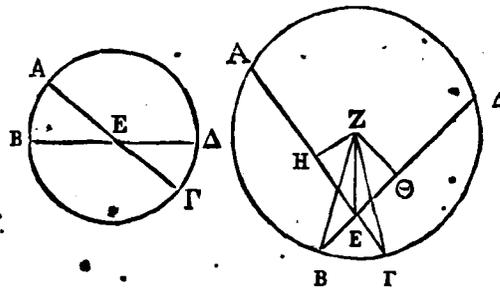
Si les droites ΑΓ, ΒΔ passent par le centre, de manière que le point Ε soit le centre du cercle ΑΒΓΔ, il est évident que les droites ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ étant égales, le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ est égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ.

Μη<sup>2</sup> ἴστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου<sup>3</sup>, καὶ ἴστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΒ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Καὶ ἐπὶ εὐθείᾳ τις διὰ τοῦ κέντρου ἢ ΖΗ εὐθείαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει<sup>4</sup> ἴση

Non sint autem ΑΓ, ΔΒ per centrum, et sumatur centrum ipsius ΑΒΓΔ circuli, et sit Ζ, et a Ζ ad ΑΓ, ΔΒ rectas perpendiculares ducantur ΖΗ, ΖΘ, et jungantur ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Et quoniam recta aliqua ΖΗ per centrum rectam aliquam ΑΓ non per centrum ad rectos secat, et bifariam ipsam secat; æqualis igitur



ἄρα ἢ ΑΗ τῇ ΗΓ. Ἐπεὶ ἂν εὐθεῖα ἢ ΑΓ τέμνεται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Προσκείσθω κοινόν<sup>5</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν ἀπὸ<sup>5</sup> τῶν ΖΗ, ΗΕ ἴσον<sup>6</sup> ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ

AH ipsi HG. Quoniam igitur ΑΓ secta est in æqualia quidem in Η, in inæqualia vero in Ε, ipsum utique sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum cum ipso ex ΗΕ quadrato æquale est ipsi ex ΗΓ. Commune addatur ipsum ex ΗΖ; ipsum igitur sub ΑΕ, ΕΓ eum ipsis ex ΖΗ, ΗΕ æquale est ipsis ex ΓΗ, ΗΖ. Sed ipsis quidem ex ΕΗ, ΗΖ est æquale ipsum ex ΖΕ, ipsis vero ex ΓΗ, ΗΖ æquale est ipsi ex ΖΓ; ipsum igitur

Mais que les droites ΑΓ, ΔΒ ne passent pas par le centre; prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 3), qu'il soit le point Ζ; du point Ζ menons les droites ΖΗ, ΖΘ perpendiculaires à ΑΓ, ΔΒ (12. 1), et joignons ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Puisque la droite ΖΗ menée par le centre coupe à angles droits la droite ΑΓ non menée par le centre, elle la coupe en deux parties égales (3. 3); donc ΑΗ est égal à ΗΓ. Puisque ΑΓ est coupé en deux parties égales en Η, et en deux parties inégales en Ε, le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ, avec le carré de ΗΕ, est égal au carré de ΗΓ (5. 2). Ajoutons le carré commun de ΗΖ; le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec les carrés des droites ΖΗ, ΗΕ sera égal aux carrés des droites ΓΗ, ΗΖ. Mais le carré de ΖΕ est égal aux carrés des droites ΕΗ, ΗΖ (47. 1), et le carré de ΖΓ égal aux carrés des droites ΓΗ, ΗΖ.

τῆς ΖΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΓ. Ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. Κοινὸν ἀφαιρήσω. τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιχόμενον ὀρθογώνιῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

sub ΑΕ, ΕΓ cum ipso ex ΖΕ, æquale est ipsi ΖΓ. Æqualis autem ΖΓ ipsi ΖΒ, ipsum igitur sub ΑΕ, ΕΓ cum ipso ex ΕΖ æquale est ipsi ex ΖΒ. Propter eadem utique et ipsum sub ΔΕ, ΕΒ cum ipso ex ΖΕ æquale est ipsi ex ΖΒ. Ostensum est autem et ipsum sub ΑΕ ΕΓ cum ipso ex ΖΕ æquale esse ipsi ex ΖΒ; ipsum igitur sub ΑΕ, ΕΓ cum ipso ex ΖΕ æquale est ipsi sub ΔΕ, ΕΒ cum ipso ex ΖΕ. Commune auferatur ipsum ex ΖΕ; reliquum igitur sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale est ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo. Si igitur in circulo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'.

Ἐὰν κύκλου ληθῆ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται· ἴσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ

PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, et ab eo in circulum cadant duæ rectæ, et una quidem earum secet circulum, altera vero contingat; erit ipsum sub totâ secante et ipsâ exteriùs sumptâ inter et punctum et convexam

HZ; donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le quarré de ΖΕ, est égal au quarré de ΖΓ. Mais ΖΓ est égal à ΖΒ; donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le quarré de ΕΖ, est égal au quarré de ΖΒ. Par la même raison, le rectangle sous ΔΕ, ΕΒ, avec le quarré de ΖΕ, est égal au quarré de ΖΒ. Mais on a démontré que le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le quarré de ΖΕ, est égal au quarré de ΖΒ; donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le quarré de ΖΕ est égal au rectangle sous ΔΕ, ΕΒ, avec le quarré de ΖΕ. Retrançons le quarré commun de ΖΕ; le rectangle restant compris sous ΑΕ, ΕΓ sera égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVI.

Si l'on prend un point quelconque hors du cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe le cercle, et dont l'autre lui soit tangente, le rectangle compris sous la sécante entière et la droite prise exté-

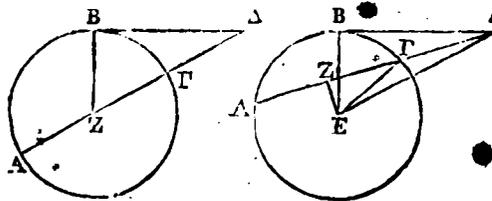
190 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τοῦτε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω σὶ σημείον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ· καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν ΑΒΓ κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ ἐφαπτόσθω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ. Ἡ ἄρα ΔΓΑ<sup>2</sup> ἢτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστίν, ἢ οὐ.

circumferentiam contentum rectangulum æquale ipsi ex contingente quadrato.

Extra circumulum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, et a Δ ad ΑΒΓ circumulum cadant duæ rectæ ΔΓΑ, ΔΒ, et ipsa quidem ΔΓΑ secet ΑΒΓ circumulum, ipsa vero ΔΒ contingat; dico ipsum sub ΑΔ, ΔΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi ex ΔΒ quadrato. Ipsa igitur ΔΓΑ γελ per centrum est, vel non.



Ἐστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστίν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ δίχα τίμηται κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ<sup>2</sup> μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Ἴση δὲ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ

Sit primum per centrum, et sit Ζ centrum ipsius ΑΒΓ circumuli, et jungatur ΖΒ; rectus igitur est ΖΒΔ. Et quoniam recta ΑΓ bifariam secta est in Ζ, adjicitur vero ipsi ipsa ΓΔ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΖΓ æquale est ipsi ex ΖΔ. Æqualis autem ΖΓ ipsi ΖΒ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΖΒ æquale est ipsi

rieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au carré de la tangente.

Hors du cercle ΑΒΓ, prenons un point quelconque Δ, et de ce point menons les deux droites ΔΓΑ, ΔΒ; que la droite ΔΓΑ coupe le cercle ΑΒΓ, et que la droite ΔΒ lui soit tangente; je dis que le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΓ est égal au carré de ΔΒ, soit que la droite ΔΓΑ passe par le centre, ou non.

Qu'elle passe premièrement par le centre du cercle, et que Ζ soit le centre du cercle ΑΒΓ, joignons ΖΒ; l'angle ΖΒΔ sera droit (18. 3). Et puisque la droite ΑΓ est coupée en deux parties égales au point Ζ, et que la droite ΓΔ lui est ajoutée, le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le carré de ΖΓ, est égal au carré de ΖΔ (6. 3). Mais la droite ΖΓ est égale à la droite ΖΒ; donc le rectangle

του ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἰσὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΔ ἴσα ἰσὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἢ ὑπὸ ΖΒΔ<sup>5</sup>. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ. Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἰσὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐφαπτομένης.

Αλλὰ δὴ ἢ ΔΓΑ μὴ ἴστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἤχθω ἢ ΕΖ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ὀρθὴ ἄρα ἰσὶν ἢ ὑπὸ ΕΖΔ. Καὶ ἐπεὶ εὐθείαι τις διὰ τοῦ κέντρου ἢ ΕΖ εὐθείαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμείνῃ ἢ ΑΖ ἄρα τῆς ΖΓ ἰσὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἢ ΑΓ τέμνεται δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον<sup>6</sup>, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἢ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἰσὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον<sup>7</sup> ἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ. Αλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ

ex ZA. Ipsi vero ex ZA æqualia sunt ipsa ex ZB, ΒΔ, rectus enim ipse ZBA; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ZB æquale est ipsis ex ZB, ΒΔ. Commune auferatur ipsum ex ZB; reliquum igitur sub ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsi ex ΑΒ contingente.

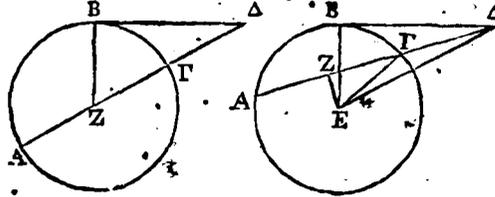
Sed et ΔΓΑ non sit per centrum ipsius ΑΒΓ circuli, et sumatur centrum Ε, et ex Ε ad ΑΓ perpendicularis ducatur ΕΖ, et jungantur ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ; rectus igitur est ΕΖΔ. Et quoniam recta aliqua ΕΖ per centrum rectam aliquam ΑΓ non per centrum ad rectos secatur, et bifariam ipsam secabit; ΑΖ igitur ipsi ΖΓ est æqualis. Et quoniam recta ΑΓ secatur bifariam in Ζ puncto, adjicitur vero ipsi ipsa ΓΔ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ΖΓ æquale est ipsi ex ΖΑ. Commune addatur ex ΖΕ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipsis ex ΓΖ, ΖΕ æquale est ipsis ex ΔΖ, ΖΕ. Sed ipsis ex ΓΖ, ΖΕ æquale est ipsum ex ΕΓ, rectus enim ΕΖΓ angulus; ip-

sous ΑΔ, ΔΓ, avec le carré de ΖΒ, est égal au carré de ΖΔ. Mais les carrés des droites ΖΒ, ΒΔ sont égaux au carré de ΖΔ (47. 1), car l'angle ΖΒΔ est droit; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le carré de ΖΒ, est égal aux carrés des droites ΖΒ, ΒΔ. Retranchons le carré commun de ΖΒ, le rectangle restant sous ΑΔ, ΔΓ sera égal au carré de la tangente ΖΒ.

Mais que la droite ΔΓΑ ne passe pas par le centre du cercle ΑΒΓ; prenons le centre Ε, et du point Ε menons ΕΖ perpendiculaire à ΑΓ (12. 1), et joignons ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ; l'angle ΕΖΔ sera droit. Et puisque la droite ΕΖ menée par le centre coupe à angles droits la droite ΑΓ non menée par le centre, la droite ΕΖ coupe la droite ΑΓ en deux parties égales (3. 3); donc la droite ΑΖ est égale à la droite ΖΓ. Et puisque la droite ΑΓ est coupée en deux parties égales au point Ζ, et que la droite ΓΔ lui est ajoutée, le rectangle sous les droites ΑΔ, ΔΓ, avec le carré de ΖΓ, est égal au carré de ΖΔ (6. 2). Ajoutons le carré commun de ΖΕ; le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec les carrés des droites ΓΖ, ΖΕ, sera égal aux carrés des droites ΔΖ, ΖΕ. Mais le carré de ΕΓ est égal aux carrés de ΓΖ, ΖΕ (47. 1), car l'angle ΕΖΓ

ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ<sup>8</sup>. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Ἴση δὲ ἡ ΕΓ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ

sis autem ex ΔΖ, ΖΕ æquale est ipsum ex ΕΔ. Ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΓ æquale est ipsi ex ΕΔ. Æqualis autem ΕΓ ipsi ΕΒ; ipsura igitur ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΒ æquale est ipsi ex ΕΔ. Ipsi autem ex ΕΔ æqua-



ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τῷ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, κοινὸν ἀφαιρέσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

lia sunt ipsa ex ΕΒ, ΒΔ, rectus enim ΕΒΔ angulus; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΒ æquale est ipsis ex ΕΒ, ΒΔ. Commune auferatur ipsum ex ΕΒ; reliquum igitur sub ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsi ex ΔΒ. Si igitur extra circumulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ

PROPOSITIO XXXVII.

Εὰν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ

Si extra circumulum sumatur aliquod punctum, ex puncto autem in circumulum cadant duæ rectæ, et una quidem earum secet circumulum altera, vero

est droit, et le carré de ΕΔ est égal aux carrés des droites ΔΖ, ΖΕ; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le carré de ΕΓ, est égal au carré de ΕΔ. Mais ΕΓ est égal à ΕΒ; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le carré de ΕΒ est égal au carré de ΕΔ. Mais les carrés des droites ΕΒ, ΒΔ sont égaux au carré de ΕΔ (47. 1), car l'angle ΕΒΔ est droit; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le carré ΕΒ, est égal aux carrés des droites ΕΒ, ΒΔ. Retrançons le carré commun de ΕΒ, le rectangle restant sous ΑΔ, ΔΓ. sera égal au carré de ΔΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVII.

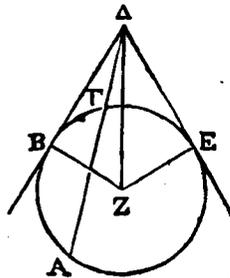
Si l'on prend un point quelconque hors d'un cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe ce cercle, et dont l'angle tombe sur

προσπίπτῃ, ἢ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς<sup>1</sup> τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπίπτουσας ἢ προσπίπτουσα ἰφάψεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπέτωσαν δύο εὐθείαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν

in eum cadat, sit autem ipsum sub totâ secantæ et ipsâ exterius sumptâ inter et punctum et convexam circumferentiam æquale ipsi ex incidente; incidens continget circumlum.

Extra circumlum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, et ex Δ in ΑΒΓ circumlum incidant duæ rectæ ΔΓΑ, ΔΒ, et ipsa quidem ΔΓΑ secet



ΔΓΑ τεμνίτω τὸν κύκλον, ἢ δὲ ΔΒ προσπίπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ<sup>2</sup> ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἰφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἦχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἰφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ<sup>3</sup>, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ· ἡ δὲ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστὶ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἰφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ ΔΓΑ· τὸ δὲ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον

circulum, ipsa vero ΔΒ in eum incidat, sit autem ipsum sub ΑΔ, ΔΓ æquale ipsi ex ΔΒ; dico ipsam ΔΒ contingere ΑΒΓ circumlum.

Ducatur enim ipsum ΑΒΓ contingens ipsa ΔΕ, et sumatur centrum circuli ΑΒΓ, et sit Ζ, et jungantur ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ; ipse igitur ΖΕΔ rectus est.

Et quoniam ΔΕ contingit ΑΒΓ circumlum, secat autem ipsa ΔΓΑ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ

ce cercle, et si le rectangle sous la sécante entière et la droite prise extérieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au carré de la droite qui tombe sur ce cercle, la droite qui tombe sur le cercle sera tangente à ce cercle.

Hors du cercle ΑΒΓ prenons un point quelconque Δ, et menons de ce point les deux droites ΔΓΑ, ΔΒ, que la droite ΔΓΑ coupe le cercle, et que la droite ΔΒ tombe sur le cercle; que le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ soit égal au carré de ΔΒ; je dis que la droite ΔΒ est tangente au cercle ΑΒΓ.

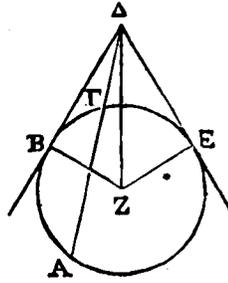
Menons la droite ΔΕ tangente au cercle ΑΒΓ (17. 3), prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit Ζ; joignons ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ; l'angle ΖΕΔ sera droit (18. 3).

Puisque ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ, et que ΔΓΑ le coupe, le rectangle sous ΑΔ,

194 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσῃ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. Ἦν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  
 ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  
 ΔΕ ἴσον ἴσῃ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ  
 τῇ ΔΒ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὲ αἱ  
 ΔΕ, ΕΖ δυοὶ ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις  
 αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ. Γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία

æquale est ipsi ex ΔΕ. Erat autem et ipsum  
 sub ΑΔ, ΔΓ æquale ipsi ex ΔΒ; ipsum igitur ex  
 ΔΕ æquale est ipsi ex ΔΒ; æqualis igitur ΔΕ  
 ipsi ΔΒ. Est autem et ΖΕ ipsi ΖΒ æqualis, dua  
 igitur ΔΕ, ΕΖ duabus ΔΒ, ΒΖ æquales sunt,  
 et basis ipsarum communis ΖΔ; angulus igitur



τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἴσῃ ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ  
 ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. Καὶ ἴσῃ ἡ ΒΖ ἐκβαλλο-  
 μένη διάμετρος, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου  
 πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται καὶ  
 τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύ-  
 κλου. Ὁμοίως δὲ δεῖχθήσεται καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ  
 τῆς ΑΓ τυγχάνη. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΔΕΖ angulo ΔΒΖ est æqualis. Rectus autem  
 ΔΕΖ; rectus igitur et ΔΒΖ. Et est ΒΖ producta  
 diameter, ipsa vero diametro circuli ab extre-  
 mitate ducta contingit et circulum; ipsa ΔΒ  
 igitur contingit ΑΒΓ circulum. Similiter autem  
 ostendemus, et si centrum in ΑΓ sit. Si igitur  
 extra circulum, etc.

ΔΓ est égal au carré de ΔΕ (36. 3). Mais le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ est  
 égal au carré de ΔΒ; donc le carré de ΔΕ est égal au carré de ΔΒ;  
 donc ΔΕ est égal à ΔΒ. Mais ΖΕ est égal à ΖΒ; donc les deux droites ΔΕ, ΕΖ  
 sont égales aux deux droites ΔΒ, ΒΖ; mais la base ΖΔ est commune; donc l'angle  
 ΔΕΖ est égal à l'angle ΔΒΖ (8. 1). Mais l'angle ΔΕΖ est droit; donc l'angle  
 ΔΒΖ est droit aussi. Mais la droite ΒΖ prolongée est un diamètre, et une droite  
 perpendiculaire au diamètre et menée d'une de ses extrémités est tangente au cercle  
 (16. 3). Donc la droite ΔΒ est tangente au cercle ΑΒΓ. La démonstration serait  
 la même si le centre était dans ΑΓ. Donc, etc.

FIN DU TROISIÈME LIVRE.

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUARTUS.

ΟΡΟΙ.

DEFINITIONES.

α. Σχήμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφισθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἀπτηται.

β. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγραφισθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἀπτηται.

1. Figura rectilinea in figurâ rectilineâ inscribi dicitur, quando unusquisque inscriptæ figuræ angulorum unumquodque latus ipsius in quâ inscribitur contingit.

2. Figura autem similiter circa figuram circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ unumquemque angulum ipsius circa quam circumscribitur contingit.

## LIVRE QUATRIEME DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Une figure rectiligne est dite inscrite dans une figure rectiligne, lorsque chacun des angles de la figure inscrite touche chaque côté de celle dans laquelle elle est inscrite.

2. Semblablement une figure est dite circonscrite à une figure, lorsque chaque côté de la figure circonscrite touche chaque angle de la figure à laquelle elle est circonscrite.

γ'. Σχήμα δὲ ἰσόγυραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφισθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἀπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δ'. Σχήμα δὲ ἰσόγυραμμον περὶ κύκλον περιγράφισθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας<sup>2</sup>.

εἰ Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως λέγεται ἐγγράφισθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἀπτηται.

ς'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφισθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἀπτηται.

ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἑναρμόζισθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ τοῦ κύκλου.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι εὐθεῖᾳ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἑναρμόσαι.

3. Une figure rectiligne est dite inscrite dans un cercle, lorsque chaque angle de la figure inscrite touche la circonférence de ce cercle.

4. Une figure rectiligne est dite circonscrite à un cercle, lorsque chaque côté de la figure circonscrite touche la circonférence de ce cercle.

5. Semblablement un cercle est dit inscrit dans une figure rectiligne, lorsque la circonférence du cercle touche chaque côté de la figure dans laquelle il est inscrit.

6. Un cercle est dit circonscrit à une figure, lorsque la circonférence du cercle touche chaque angle de la figure à laquelle il est circonscrit.

7. Une droite est dite adaptée dans un cercle, lorsque ses extrémités sont dans la circonférence de ce cercle.

## PROPOSITION PREMIÈRE.

Dans un cercle donné, adapter une droite égale à une droite donnée, qui n'est pas plus grande que le diamètre.

3. Figura vero rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando unusquisque angulus circumscriptæ contingit circuli circumferentiam.

4. Figura autem rectilinea circa circumscriptam dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ contingit circuli circumferentiam.

5. Circulus vero in figurâ similiter dicitur inscribi, quando circuli circumferentia unumquodque latus ipsius in quâ inscribitur contingit.

6. Circulus autem circa figuram circumscribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ipsius circa quam circumscribitur contingit.

7. Recta in circulo aptari dicitur, quando termini ejus in circumferentiâ sunt circuli.

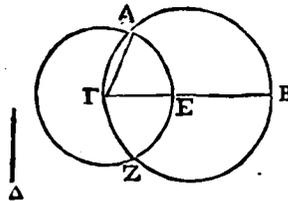
## PROPOSITIO I.

In dato circulo datæ rectæ, non majori existenti circuli diametro, æqualem rectam aptare.

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 197

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐ-  
θεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἢ Δ.  
Δι' δὲ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῆ Δ εὐθεία ἴσην εὐ-  
θεΐαν ἐναρμόσασαι.

Ἦχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος ἡ ΒΓ. Εἰ  
μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆ Δ, γυροῦνός ἂν εἴη  
τὸ ἐπιταχθῆναι. ἐνάρμοσται γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύ-  
κλον τῆ Δ εὐθεία ἴση ἡ ΒΓ. Εἰ δὲ μείζων ἐστὶν  
ἡ ΒΓ τῆς Δ, κείσθω<sup>2</sup> τῆ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κέν-  
τρον ἡ ΓΕ.



τρον μὲν<sup>3</sup> τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος  
γεγράφθω ὁ ΑΕΖ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΑ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ κύ-  
κλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῆ ΓΕ. Ἀλλὰ τῆ Δ ἡ ΓΕ<sup>4</sup>  
ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῆ ΓΑ ἐστὶν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓ, τῆ δο-  
θεῖσιν εὐθείᾳ τῆ Δ<sup>5</sup>, ἴση ἐνάρμοσται ἡ ΓΑ. Ὅπερ  
ἴδι ποιῆσαι.

Sit datus circulus ΑΒΓ, data autem recta  
Δ non major circuli diametro; oportet igitur in  
ΑΒΓ circulo ipsi Δ rectæ æqualem rectam  
aptare.

Ducatur ΑΒΓ circuli diameter ΒΓ. Si qui-  
dem igitur æqualis est ΒΓ ipsi Δ, factum erit  
propositum. Aptata est enim in ΑΒΓ circulo ipsi  
Δ rectæ æqualis ΒΓ. Si vero major est ΒΓ ipsa  
Δ, ponatur ipsi Δ æqualis ΓΕ, et centro

quidem Γ, intervallo vero ΓΕ, circulus descri-  
batur ΑΕΖ, et jungatur ΓΑ.

Quoniam igitur Γ punctum centrum est ipsius  
ΑΕΖ circuli, æqualis est ΓΑ ipsi ΓΕ. Sed ipsi Δ  
ipsa ΓΕ est æqualis; et Δ igitur ipsi ΓΑ est æqualis.

In dato igitur circulo ΑΒΓ, datæ rectæ Δ,  
æqualis aptata est ΓΑ. Quod oportebat facere.

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et Δ la droite donnée, qui n'est pas plus grande que le diamètre de ce cercle; il faut dans le cercle ΑΒΓ adapter une droite égale à la droite Δ.

Menons le diamètre ΒΓ du cercle ΑΒΓ. Si la droite ΒΓ est égale à la droite Δ, on aura fait ce qui était proposé. Car on aura adapté dans le cercle ΑΒΓ, une droite ΒΓ égale à la droite Δ. Mais si la droite ΒΓ est plus grande que la droite Δ, faisons ΓΕ égal à Δ (3. 1), du centre Γ et de l'intervalle ΓΕ décrivons le cercle ΑΕΖ, et joignons ΓΑ.

Puisque le point Γ est le centre du cercle ΑΕΖ, la droite ΓΑ est égale à la droite ΓΕ; mais Δ est égal à ΓΕ; donc Δ est égal à ΓΑ.

Donc dans le cercle donné ΑΒΓ on a adapté une droite ΓΑ égale à la droite donnée Δ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

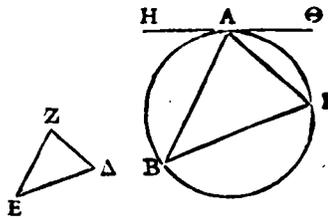
PROPOSITIO II.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἰγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἰγγράψαι.

In dato circulo dato triangulo æquiangulum triangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓ, datum vero triangulum ΔΕΖ; oportet igitur in ΑΒΓ circulo ipso ΔΕΖ-triangulo æquiangulum triangulum inscribere.



Ἦχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἑφαπτομένη ἡ ΗΘ κατὰ τὸ Α, καὶ συνιστάτω πρὸς<sup>1</sup> τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΘΑΓ· πάλιν, πρὸς<sup>2</sup> τῇ ΗΑ εὐθείᾳ καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΖΔΕ<sup>3</sup> ἴση ἢ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΓ.

Ducatur ΑΒΓ circulum contingens ipsa ΗΘ in Α, et constituatur ad ΑΘ rectam et ad punctum in eâ Α ipsi ΔΕΖ angulo æqualis ipse ΘΑΓ; rursus, ad ΗΑ rectam et ad punctum in eâ Α ipsi ΖΔΕ æqualis ΗΑΒ, et jungatur ΒΓ.

PROPOSITION II.

Dans un cercle donné, inscrire un triangle qui soit équiangle avec un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et ΔΕΖ le triangle donné; il faut dans le cercle ΑΒΓ inscrire un triangle qui soit équiangle avec le triangle donné ΔΕΖ.

Menons la droite ΗΘ, de manière qu'elle touche le cercle ΑΒΓ en un point Α, et sur la droite ΑΘ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΘΑΓ égal à l'angle ΔΕΖ (23. 1). De plus sur la droite ΗΑ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΗΑΒ égal à l'angle ΖΔΕ, et joignons ΒΓ.

Ἐπὶ οὖν κύκλου τοῦ  $ΑΒΓ$  ἐφάπτεται τις εὐθεΐα ἢ  $ΘΑ$ , καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ  $Α$  ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεΐα ἢ  $ΑΓ$ . ἢ ἄρα ὑπὸ  $ΘΑΓ$  ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνία, τῇ ὑπὸ  $ΑΒΓ$ . Ἀλλ' ἡ ὑπὸ  $ΘΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΖ$  ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ  $ΑΒΓ$  ἄρα γωνία, τῇ ὑπὸ  $ΔΕΖ$  ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΖΔΕ$  ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $ΕΖΔ$  ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τριγώνῳ, καὶ ἐγγράφεται εἰς τὸν  $ΑΒΓ$  κύκλον<sup>5</sup>.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράφεται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Quoniam igitur  $ΑΒΓ$  circulum contingit aliqua recta  $ΘΑ$ , a contactu autem ad  $Α$  in circulo ducta est recta  $ΑΓ$ , ipse utique  $ΘΑΓ$  æqualis est ipsi in alterno circuli segmento angulo  $ΑΒΓ$ . Sed ipse  $ΘΑΓ$  ipsi  $ΔΕΖ$  est æqualis; et  $ΑΒΓ$  igitur angulus ipsi  $ΔΕΖ$  est æqualis. Propter eadem utique et ipse  $ΑΓΒ$  ipsi  $ΖΔΕ$  est æqualis, et reliquus igitur  $ΒΑΓ$  reliquo  $ΕΖΔ$  est æqualis. Æquiangulum igitur est  $ΑΒΓ$  triangulum ipsi  $ΔΕΖ$  triangulo, et inscriptum est in  $ΑΒΓ$  circulo.

In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

PROPOSITIO III.

Circa datum circulum dato triangulo æquiangulum triangulum circumscribere.

Puisque la droite  $ΘΑ$  touche le cercle  $ΑΒΓ$ , et que la droite  $ΑΓ$  a été menée dans le cercle du point de contact  $Α$ , l'angle  $ΘΑΓ$  est égal à l'angle  $ΑΒΓ$  placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Mais l'angle  $ΘΑΓ$  est égal à l'angle  $ΔΕΖ$ ; donc l'angle  $ΑΒΓ$  est égal à l'angle  $ΔΕΖ$ . Par la même raison l'angle  $ΑΓΒ$  est égal à l'angle  $ΖΔΕ$ ; donc l'angle restant  $ΒΑΓ$  est égal à l'angle restant  $ΕΖΔ$  (32. 1); donc le triangle  $ΑΒΓ$  est équiangle avec le triangle  $ΔΕΖ$ , et il est inscrit dans le cercle  $ΑΒΓ$  (déf. 3. 4).

Donc dans le cercle donné, on a inscrit un triangle équiangle avec un triangle donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION III.

Aun cercle donné, circonscrire un triangle équiangle avec un triangle donné.

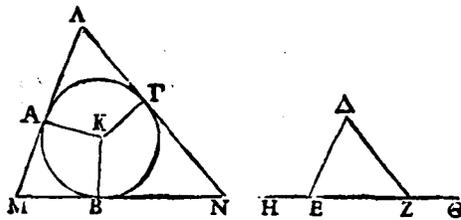
200 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· διτ' δὲ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐκτελέσωμεν ἢ ΕΖ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ εἰλήφωμεν τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἢ ΚΒ, καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ ΚΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς

Sit datus circulus ΑΒΓ, datum autem triangulum ΔΕΖ; oportet igitur circa ΑΒΓ circulum ipsi ΔΕΖ triangulo æquiangulum triangulum circumscribere.

Producatur ΕΖ ex utraq̄ue parte ad Η, Θ puncta, et sumatur ΑΒΓ circuli centrum Κ, et ducatur utcunque recta ΚΒ, et constituatur ad ΚΒ rectam et ad punctum in εἰ Κ ipsi qui-



αὐτῇ σημεῖῳ τῷ Κ τῇ μὲν ὑπὸ ΔΕΗ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΒΚΑ, τῇ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴση ἢ ὑπὸ ΒΚΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΑ κατὰ τὰ Α, Β, Γ σημεῖα, καὶ ἐπιζευγνύμεναι εἰσὶν αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ σημείοις γωνίαι. Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΜΒΚ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρις γωνίαι

dem ΔΕΗ angulo æqualis ΒΚΑ, ipsi vero ΔΖΘ æqualis ΒΚΓ, et per Α, Β, Γ puncta ducantur tangentēs ipsum ΑΒΓ circulum ipsæ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ.

Et quoniam contingunt ΑΒΓ circulum ipsæ ΛΜ, ΜΝ, ΝΑ in Α, Β, Γ punctis, et junctæ sunt ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ; recti utique sunt ipsi ad Α, Β, Γ puncta anguli. Et quoniam ΑΜΒΚ quadrilateri quatuor anguli quatuor rectis æquales sunt, quandoqui-

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et ΔΕΖ le triangle donné; il faut au cercle ΑΒΓ circonscrire un triangle équiangle avec le triangle ΔΕΖ.

Prolongeons la droite ΕΖ de part et d'autre vers les points Η, Θ (dem. 2), prenons le centre Κ du cercle ΑΒΓ (1. 3), menons d'une manière quelconque la droite ΚΒ, faisons sur la droite ΚΒ, et au point Κ de cette droite, un angle ΒΚΑ égal à l'angle ΔΕΗ, et l'angle ΒΚΓ égal à l'angle ΔΖΘ (23. 1), par les points Α, Β, Γ menons les droites ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ tangentes au cercle ΑΒΓ (17. 3).

Puisque les droites ΛΜ, ΜΝ, ΝΑ touchent le cercle ΑΒΓ aux points Α, Β, Γ, et que l'on a joint ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, les angles aux points Α, Β, Γ seront droits (18. 3). Et puisque les quatre angles du quadrilatère ΑΜΒΚ sont

τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἐπεὶ δὴ περ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ  $AMBK$ , καὶ εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ  $MAK$ ,  $KBM$  γωνίαι<sup>3</sup>. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ  $AKB$ ,  $AMB$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ  $\Delta EH$ ,  $\Delta EZ$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ  $AKB$ ,  $AMB$  ταῖς ὑπὸ  $\Delta EH$ ,  $\Delta EZ$  ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ  $AKB$  τῆ ὑπὸ  $\Delta EH$  ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $AMB$  λοιπῆ τῆ ὑπὸ  $\Delta EZ$  ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ  $\Lambda NM$  τῆ ὑπὸ  $\Delta ZE$  ἐστὶν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $MAN$  λοιπῆ<sup>4</sup> τῆ ὑπὸ  $E\Delta Z$  ἐστὶν ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $\Lambda MN$  τρίγωνον τῷ  $\Delta EZ$  τριγώνῳ, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν  $AB\Gamma$  κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

dem et in duo triangula dividitur  $AMBK$ , et sunt recti  $MAK$ ,  $KBM$  anguli; reliqui igitur  $AKB$ ,  $AMB$  duobus rectis æquales sunt; sunt autem et  $\Delta EH$ ,  $\Delta EZ$  duobus rectis æquales; ipsi igitur  $AKB$ ,  $AMB$  ipsis  $\Delta EH$ ,  $\Delta EZ$  æquales sunt, quorum  $AKB$  ipsi  $\Delta EH$  est æqualis; reliquus igitur  $AMB$  reliquo  $\Delta EZ$  est æqualis. Similiter utique ostendetur et ipsum  $\Lambda NM$  ipsi  $\Delta ZE$  esse æqualem; et reliquus igitur  $MAN$  reliquo  $E\Delta Z$  est æqualis.  $\Lambda$ equiangulum igitur est  $\Lambda MN$  triangulum ipsi  $\Delta EZ$  triangulo, et circumscribitur circum  $AB\Gamma$  circumulum.

Circa datum igitur circumulum dato triangulo æquiangulum triangulum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

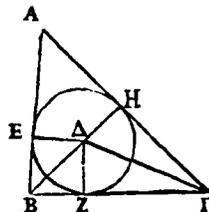
égaux à quatre angles droits (32. 1), car le quadrilatère  $AMBK$  peut se diviser en deux triangles; mais parmi les angles de ce quadrilatère, les angles  $MAK$ ,  $KBM$  sont droits; donc les angles restants  $AKB$ ,  $AMB$  sont égaux à deux droits. Mais les angles  $\Delta EH$ ,  $\Delta EZ$  sont égaux à deux droits (13. 1); donc les angles  $AKB$ ,  $AMB$  sont égaux aux angles  $\Delta EH$ ,  $\Delta EZ$ ; mais l'angle  $AKB$  est égal à l'angle  $\Delta EH$ ; donc l'angle restant  $AMB$  est égal à l'angle restant  $\Delta EZ$ . Nous démontrerons semblablement que l'angle  $\Lambda NM$  est égal à l'angle  $\Delta ZE$ ; donc l'angle restant  $MAN$  est égal à l'angle restant  $E\Delta Z$  (32. 1). Donc le triangle  $\Lambda MN$  est équiangle avec le triangle  $\Delta EZ$ , et il est circonscrit au cercle  $AB\Gamma$  (déf. 4. 4).

Donc un triangle équiangle avec un triangle donné a été circonscrit à un cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράφαι.  
 Ἐστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ εἰς τὸ  
 ΑΒΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράφαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δίχα  
 ταῖς ΒΔ, ΓΔ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλ-  
 λήλαις κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ  
 τοῦ Δ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας κάθετοι αἱ  
 ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ  
 ΔΒΓ, ἴσῳ δὲ καὶ ὀρθῇ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΔ  
 ἴση, δύο δὲ τρίγωνα ἴσῳ τὰ ΕΒΔ, ΖΒΔ, τὰς δύο  
 γωνίας ταῖς<sup>2</sup> δυοῖν γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν  
 πλευρὰν μιᾷ<sup>2</sup> πλευρᾷ ἴσην, τὴν<sup>3</sup> ὑποτίνουσαν  
 ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΔ,

In dato triangulo circumulum inscribere.

Sit datum triangulum ΑΓΒ; oportet igitur  
 in ΑΒΓ triangulo circumulum inscribere.

Secentur ΑΒΓ, ΑΓΒ anguli bifariam ab ipsis  
 ΒΔ, ΓΔ rectis, et convenient inter se in Δ  
 puncto, et ducantur a Δ ad ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ rectas  
 perpendiculares ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.

Et quoniam æqualis est ΑΒΔ angulus ipsi ΔΒΓ,  
 est autem et rectus ΒΕΔ recto ΒΖΔ æqualis;  
 duo igitur triangula sunt ΕΒΔ, ΖΒΔ, duos an-  
 gulos duobus angulis æquales habentia, et unum  
 latus uni lateri æquale, sustendens unum æqua-  
 lium angulorum, commune iis ipsum ΒΔ. Et

## PROPOSITION IV.

Inscrire un cercle dans un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le triangle donné; il faut dans le triangle ΑΒΓ inscrire un cercle.

Partageons en deux parties égales les angles ΑΒΓ, ΑΓΒ par les droites ΒΔ, ΓΔ; que ces droites se rencontrent au point Δ, et du point Δ menons aux droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ les perpendiculaires ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ (12. 1).

Puisque l'angle ΑΒΔ est égal à l'angle ΔΒΓ, et que l'angle droit ΒΕΔ est égal à l'angle droit ΒΖΔ, les deux triangles ΕΒΔ, ΖΒΔ ont deux angles égaux à deux angles, et un côté égal à un côté, le côté commun ΒΔ qui soutend un des

καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευ-  
ραῖς ἴσας ἔξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΖ. Διὰ τὰ  
αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ ἔστιν ἴση. Αἱ τρεῖς  
ἄρα εὐθείαι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν·  
ὁ ἄρα κέντρον τῶ Δ, καὶ<sup>5</sup> διαστήματι ἐνὶ τῶν  
ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ  
τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάπεται τῶν ΑΒ,  
ΒΓ, ΓΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς  
τοῖς Ε, Ζ, Η σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ τεμεί-  
αὐτὰς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς  
ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ  
κύκλου, ὅπερ ἀτοπον εἰδείχθη<sup>6</sup>. οὐκ ἄρα ὁ κέν-  
τρον Δ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ γρα-  
φόμενος κύκλος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας·  
ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμ-  
μένος εἰς<sup>8</sup> τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Εγγεγράφθω ὡς  
ΖΕΗ<sup>9</sup>.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος  
ἐγγέγραπται ὁ<sup>10</sup> ΕΖΗ. Ὅπερ εἶδει ποιῆται.

reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia  
habebunt; æqualis igitur ΔΕ ipsi ΔΖ. Propter  
eadem utique et ΔΗ ipsi ΔΖ est æqualis. Tres igitur  
rectæ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ æquales inter se sunt; ergo  
centro Δ, et intervallo unâ ipsarum ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ  
circulus descriptus transibit et per reliqua puncta,  
et continget ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ rectas, propterea  
quod recti sunt ad Ε, Ζ, Η puncta anguli. Si  
enim secet ipsas, erit ipsa diametro circuli ad  
rectos ab extremitate ducta intra ipsum cadens  
circulum, quod absurdum ostensum est; non  
igitur centro Δ, intervallo autem unâ ipsarum  
ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ descriptus circulus secat ΑΒ, ΒΓ,  
ΓΑ rectas; contingit igitur ipsas, et erit cir-  
culus descriptus in ΑΒΓ triangulo. Inscribatur  
ut ΖΕΗ-

In dato igitur triangulo ΑΒΓ circulus ins-  
criptus est ΕΖΗ. Quod oportebat facere.

angles égaux; ils ont donc les côtés restants égaux aux côtés restants (26. 1);  
donc ΔΕ est égal à ΔΖ. Par la même raison ΔΗ est égal à ΔΖ. Donc les trois  
droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ sont égales entr'elles; donc le cercle décrit du point Δ  
et d'un intervalle égal à une des droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ passera par les autres  
points, et touchera les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, les angles étant droits en Ε, Ζ, Η.  
Car si le cercle coupait ces droites, une perpendiculaire au diamètre d'un  
cercle et menée d'une de ses extrémités tomberait dans ce cercle, ce qui a  
été démontré absurde (16. 3); donc le cercle décrit du point Δ et d'un inter-  
valle égal à une des droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ne coupera point les droites ΑΒ, ΒΓ,  
ΓΑ; donc elle les touchera, et ce cercle sera inscrit dans le triangle ΑΒΓ (déf. 5. 4).  
Qu'il soit inscrit comme ΖΕΗ.

Donc dans le triangle donné ΑΒΓ, on a inscrit le cercle ΕΖΗ. Ce qu'il fallait  
faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

PROPOSITIO V.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

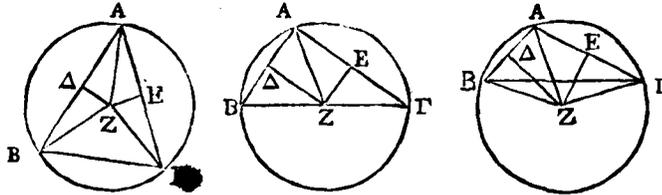
Circa datum triangulum circulum circumscribere.

Ἐστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλον περιγράψαι.

Sit datum triangulum ΑΒΓ; oportet igitur circa datum triangulum ΑΒΓ circulum circumscribere.

Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ εὐθείαι<sup>1</sup> δίχα κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Δ, Ε σημείων ταῖς ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΖΕ· συμπεσοῦνται δὲ ἢ τῶν ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας, ἢ ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

Secentur ΑΒ, ΑΓ rectæ bifariam in Δ, Ε punctis, et ab ipsis Δ, Ε punctis ipsis ΑΒ, ΑΓ ad rectos ducantur ΔΖ, ΖΕ. Conveniant autem vel intra ΑΒΓ triangulum, vel in ΒΓ rectâ, vel extra ΒΓ.



Συμπιπτέτωσαν οὖν<sup>2</sup> ἐντὸς πρότερον κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΔ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση<sup>3</sup>.

Conveniant igitur igitus primum in Ζ, et jungantur ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. Et quoniam æqualis est ΑΔ ἰπ̄σι ΒΔ, communis autem et ad rectos ipsa ΔΖ; basis igitur ΑΖ ipsi ΖΒ est æqualis. Simi-

PROPOSITION V.

Circonscrire un cercle à un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le triangle donné; il faut au triangle donné ΑΒΓ circonscrire un cercle.

Coupons les droites ΑΒ, ΑΓ en deux parties égales aux points Δ, Ε (10. 1), et des points Δ, Ε menons aux droites ΑΒ, ΑΓ les perpendiculaires ΔΖ, ΖΕ (11. 1); ces perpendiculaires se rencontreront ou dans le triangle ΑΒΓ, ou dans la droite ΒΓ, ou hors de la droite ΒΓ.

Premièrement que ces perpendiculaires se rencontrent dans le triangle, au point Ζ; joignons ΖΒ, ΖΕ, ΖΑ. Puisque ΑΔ est égal à ΒΔ, et que la perpendiculaire ΔΖ est commune et à angles droits, la base ΑΖ est égale à la base ΖΒ (4. 1). Nous.

Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῆ ΑΖ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῆ ΖΓ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρον τῶ Ζ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Περιγραφείσθω ὡς ὁ ΑΒΓ.

Αλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτεύωσαν ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας κατὰ τὸ Ζ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΖ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὸ Ζ σημειῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.

Αλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτεύωσαν ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, κατὰ τὸ Ζ πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Καὶ ἐπὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῆ ΖΒ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΖΓ τῆ ΖΑ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῆ ΖΓ ἐστὶν ἴση· ὁ ἄρα πάλιν κέντρον τῶ Ζ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος

liter utique ostendemus et ipsam ΓΖ ipsi ΑΖ esse æqualem, quare et ΖΒ ipsi ΖΓ est æqualis; tres igitur ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ æquales inter se sunt. Ergo centro Ζ, intervallo autem unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit circumscriptus circulus circa ΑΒΓ triangulum. Circumscribatur ut ΑΒΓ.

Sed et ΔΖ, ΕΖ convenient in ΒΓ rectâ in Ζ, ut se habet in secundâ figurâ, et jungatur ΑΖ. Similiter utique ostendemus Ζ punctum centrum esse ipsius circa ΑΒΓ triangulum circumscripti circuli.

Sed et ΔΖ, ΕΖ convenient extra ΑΒΓ triangulum, in Ζ rursus, ut se habet in tertiâ figurâ, et jungantur ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Et quoniam rursus æqualis est ΑΔ ipsi ΔΒ, communis autem et ad rectos ipsa ΔΖ; basis igitur ΑΖ ipsi ΖΒ est æqualis. Similiter utique ostendemus et ΖΓ ipsi ΖΑ esse æqualem, quare et ΖΒ ipsi ΖΓ est æqualis; ergo rursus centro Ζ, intervallo autem unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ circulus descriptus transibit et per

démontrerons semblablement que ΓΖ est égal à ΑΖ; donc ΖΒ est égal à ΖΓ; donc les trois droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ sont égales entr'elles. Donc si du centre Ζ, et d'un intervalle égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, on décrit un cercle, ce cercle passera par les autres points, et ce cercle sera circonscrit au triangle ΑΒΓ (déf. 6. 4). Qu'il soit circonscrit comme ΑΒΓ.

Mais que les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontrent dans la droite ΒΓ, au point Ζ, comme dans la seconde figure; joignons ΑΖ. Nous démontrerons semblablement que le point Ζ est le centre du cercle circonscrit au triangle ΑΒΓ.

Mais enfin, que les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontrent hors du triangle ΑΒΓ, au point Ζ, comme dans la troisième figure, et joignons ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Puisque ΑΔ est encore égal à ΔΒ, et que la perpendiculaire ΔΖ est commune et à angles droits, la base ΑΖ est égale à la base ΖΒ (4. 1). Nous démontrerons semblablement que ΖΓ est égal à ΖΑ; donc ΖΒ est égal à ΖΓ; donc encore si du centre Ζ, et d'un intervalle égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, on décrit un cercle, ce

206 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γραφόμενος ἢξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραφόμενος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Καὶ γεγράφθω ὡς ΑΒΓ<sup>δ</sup>.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

reliqua puncta, et erit circumscriptus circa ΑΒΓ triangulum. Et describatur ut ΑΒΓ.

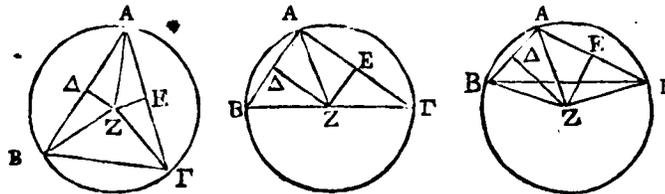
Circa datum igitur triangulum circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερόν ἐστι, ὅτι μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἢ ὑπὸ ΒΑΓ γων-

COROLLARIUM.

Et manifestum est, quando quidem intra triangulum cadit centrum circuli, ipsum ΒΑΓ angu-



νία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἢ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστίν· ἔτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τῶν ὀρθῶν πίπτει, ἢ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐν ἐλάττονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου.

lum, in segmento majore quam semicirculo existentem, minorem esse recto; quando autem in ΒΓ rectam centrum cadit, ipsum ΒΑΓ angulum, in semicirculo existentem, rectum esse; quando vero centrum circuli extra triangulum cadit, ipsum ΒΑΓ, in segmento minore quam semicir-

cercle passera par les points restants, et il sera circonscrit au triangle ΑΒΓ. Qu'il soit circonscrit comme ΑΒΓ.

Donc un cercle a été circonscrit dans un triangle donné. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

Il est évident que si le centre du cercle tombe dans le triangle, l'angle ΒΑΓ compris dans un segment plus grand qu'un demi-cercle, est plus petit qu'un angle droit; que si le centre du cercle tombe dans la droite ΒΓ, l'angle ΒΑΓ compris dans un demi-cercle, est droit; que si enfin le centre du cercle tombe hors du triangle ΒΑΓ, l'angle ΒΑΓ compris dans un segment plus petit qu'un demi-

τυγχάνουσα, μείζων ἴσθιν ὀρθῆς. Ὡστε καὶ ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἢ δεδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσῶνται<sup>11</sup> αἱ ΔΖ, ΕΖ· ὅταν δὲ ὀρθῇ, ἐπὶ τῆς ΒΓ· ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐντὸς τῆς ΒΓ<sup>12</sup>.

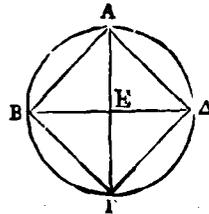
culo, majorem esse recto. Quare et quando minor recto est datus angulus, intra triangulum convenient ΔΖ, ΕΖ; quando autem rectus, in ΒΓ; quando vero major recto, extra ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.  
Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· διττὴ δὲ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO VI.

In dato circulo quadratum inscribere.  
Sit datus circulus ΑΒΓΔ; oportet igitur in ΑΒΓΔ circulo quadratum inscribere.



Ἦχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο<sup>2</sup> διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ· καὶ ἐπιζεύχθω αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Ducantur ipsius ΑΒΓΔ circuli duæ diametri ΑΓ, ΒΔ ad rectos inter se, et jungantur ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Καὶ ἐπιτὶ ἴση ἴσθιν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, κέντρον γὰρ τὸ Ε, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ἰρθὰς ἡ ΕΑ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΑΔ ἴση ἴσθι. Διὰ<sup>3</sup> τὰ αὐτὰ

Et quoniam æqualis est ΒΕ ipsi ΕΔ, centrum enim Ε, communis autem et ad rectos ipsa ΕΑ; basis igitur ΑΒ basi ΑΔ æqualis est. Propter

cercle, est plus grand qu'un angle droit. C'est pourquoi si l'angle donné est plus petit qu'un droit, les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontreront dans le triangle; s'il est droit, elles se rencontreront dans ΒΓ, et s'il est plus grand qu'un droit, elles se rencontreront hors de la droite ΒΓ.

PROPOSITION VI.

Inscrire un carré dans un cercle donné.

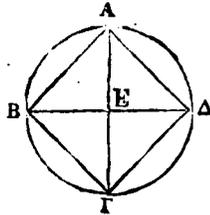
Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut inscrire un carré dans le cercle ΑΒΓΔ.  
Menons les diamètres ΑΓ, ΒΔ du cercle ΑΒΓΔ perpendiculaires l'un à l'autre (II. 1), et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Puisque ΒΕ est égal à ΕΔ, car le point Ε est le centre, et que la droite ΕΑ est commune et à angles droits, la base ΑΒ est égale à la base ΑΔ (4. 1).

208 LE QUATRIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

δὴ καὶ ἑκατέρῃ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἑκατέρα τῶν ΒΑ, ΑΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΔ εὐθεῖα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία<sup>4</sup>. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ ὀρθὴ ἐστίν· ὀρθογώ-

eadem utique et utraque ipsarum ΒΓ, ΓΔ utri- que ipsarum ΒΑ, ΑΔ æqualis est ; æquilaterum igitur est ΑΒΓΔ quadrilaterum. Dico autem et rectangulum. Quoniam enim ΒΔ recta diame- ter est ipsius ΑΒΓΔ circuli, semicirculum igi- tur est ΒΑΔ ; rectus igitur ΒΑΔ angulus. Prop- ter eadem utique et unusquisque ipsorum ΑΒΓ,



νιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ. Καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα ΑΒΓΔ κύκλον<sup>5</sup>.

ΒΓΔ, ΓΔΑ rectus est ; rectangulum igitur est ΑΒΓΔ quadrilaterum. Ostensum est autem et æquilaterum ; quadratum igitur est. Et inscrip- tum est in dato ΑΒΓΔ circulo.

Εἰς ἄρα δοθέντα<sup>6</sup> κύκλον τὸν ΑΒΓΔ τετράγω- νον ἐγγέγραπται τὸ ΑΒΓΔ. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

In dato igitur circulo ΑΒΓΔ quadratum ins- criptum est ΑΒΓΔ. Quod oportebat facere.

Par la même raison, chacune des droites ΒΓ, ΓΔ est égale à chacune des droites ΒΑ, ΑΔ ; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite ΒΔ est un diamètre du cercle ΑΒΓΔ, la figure ΒΑΔ est un demi-cercle. Donc l'angle ΒΑΔ est droit (51. 1). Par la même raison, chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ est droit aussi ; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral ; donc ce quadrilatère est un carré. Et ce carré est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔ.

Donc on a inscrit le carré ΑΒΓΔ dans le cercle donné ΑΒΓΔ. Ce qu'il fal- lait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

PROPOSITIO VII.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

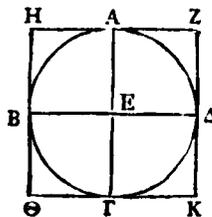
Ἐστω δοθεὶς κύκλος ὁ' ΑΒΓΔ· δι' δὴ<sup>2</sup> περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἡχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διαμέτροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.

Circa datum circulum quadratum circumscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔ; oportet igitur circa ΑΒΓΔ circulum quadratum circumscribere.

Ducantur ΑΒΓΔ circuli duæ diametri ΑΓ, ΒΔ ad rectos inter se, et per Α, Β, Γ, Δ puncta ducantur contingentes ΑΒΓΔ circulum ipsæ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.



Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΖΗ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Α ἴσαφὴν ἐπιζύκεται ἡ ΕΑ· αἱ ἄρα πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαὶ εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ<sup>3</sup> αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαὶ εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία, ἐστὶ δὲ ὀρθὴ καὶ

Quoniam igitur contingit ΖΗ ipsum ΑΒΓΔ circulum, ab Ε autem centro ad contactum Α ducitur ΕΑ; ipsi igitur ad Α anguli recti sunt. Propter eadem utique et ad Β, Γ, Δ puncta anguli recti sunt. Et quoniam rectus est ΑΕΒ angulus, est autem rectus et ΕΒΗ; parallela

PROPOSITION VII.

Circonscrire un carré à un cercle donné.

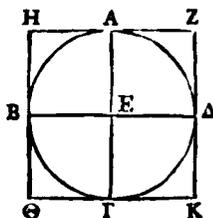
Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut circonscrire un carré au cercle ΑΒΓΔ.

Menons dans le cercle ΑΒΓΔ, les deux diamètres ΑΓ, ΒΔ perpendiculaires l'un à l'autre, et par les points Α, Β, Γ, Δ menons les droites ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ tangentes au cercle ΑΒΓΔ (17. 3).

Puisque la droite ΖΗ est tangente au cercle ΑΒΓΔ, et que la droite ΕΑ a été menée du centre Ε au point de contact Α, les angles sont droits en Α (28. 3). Par la même raison, les angles sont droits aux points Β, Γ, Δ. Et puisque l'angle ΑΕΒ est droit, et que l'angle ΕΒΗ est droit aussi, la droite ΗΘ est paral-

ἡ ὑπὸ EBH· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ HΘ τῆ  
 ΑΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῆ ΖΚ ἐστὶ παρ-  
 ἀλληλος<sup>4</sup>. Ὅστε καὶ ἡ HΘ τῆ ΖΚ ἐστὶ παράλλη-  
 λος<sup>5</sup>. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν  
 ΗΖ, ΘΚ τῆ ΒΕΔ ἐστὶ παράλληλος. Παραλληλό-  
 γραμμα ἐστὶ τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ· ἴση  
 ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΖ τῆ ΘΚ, ἡ δὲ HΘ τῆ ΖΚ.  
 Καὶ ἐπιὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆ ΒΔ, ἀλλὰ καὶ<sup>6</sup> ἡ  
 μὲν ΑΓ ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΖΚ<sup>7</sup>, ἡ δὲ ΕΔ ἑκα-

igitur est HΘ ipsi ΑΓ. Propter eadem utique et  
 ΑΓ ipsi ΖΚ est parallela; quare et HΘ ipsi ΖΚ  
 est parallela. Similiter utique ostendemus et  
 utramque ipsarum ΗΖ, ΘΚ ipsi ΒΕΔ esse paral-  
 lelam. Parallelograma igitur sunt ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ,  
 ΖΒ, ΒΚ; æqualis igitur est ΗΖ quidem ipsi ΘΚ,  
 ipsa vero HΘ ipsi ΖΚ. Et quoniam æqualis est ΑΓ  
 ipsi ΒΔ, sed et ipsa quidem ΑΓ utrique ipsa-  
 rum ΗΘ, ΖΚ, ipsa vero ΕΔ utrique ipsarum



τέρα τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα  
 τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκατέρα τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση<sup>8</sup>.  
 Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον.  
 Λέγω δὲ<sup>9</sup> ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπιὶ γὰρ παραλλη-  
 λόγραμμὸν ἐστὶ τὸ ΗΒΕΑ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ  
 ΑΕΒ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ. Ὁμοίως δὲ δείξο-  
 μεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς ταῖς Θ, Κ, Ζ γωνίαι ὀρθαὶ εἴ-  
 σιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον<sup>10</sup>.

ΗΖ, ΘΚ est æqualis; et uterque igitur ipsarum  
 ΗΘ, ΖΚ utrique ipsarum ΗΖ, ΘΚ est æqualis.  
 Ἐquilaterum igitur est ΖΗΘΚ quadrilaterum.  
 Dico et rectangulum. Quoniam enim paralle-  
 logrammum est ΗΒΕΑ, et est rectus ΑΕΒ; rec-  
 tus igitur et ΑΗΒ. Similiter utique ostendemus  
 et ipsos ad Θ, Κ, Ζ angulos rectos esse; rec-  
 tangulum igitur est ΖΗΘΚ quadrilaterum. Os-

lèle à la droite ΑΓ (28. 1). Par la même raison, la droite ΑΓ est parallèle à la droite ΖΚ. Donc ΗΘ est parallèle à ΖΚ. Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites ΗΖ, ΘΚ est parallèle à la droite ΒΕΔ. Donc les figures ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ sont des parallélogrammes; donc ΗΖ est égal à ΘΚ (34. 1), et ΗΘ égal à ΖΚ; et puisque ΑΓ est égal à ΒΔ, que ΑΓ est égal à l'une et à l'autre des droites ΗΘ, ΖΚ, et que ΒΔ est égal à l'une et à l'autre des droites ΗΖ, ΘΚ, les droites ΗΘ, ΖΚ sont égales aux droites ΗΖ, ΘΚ. Donc le quadrilatère ΖΗΘΚ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle, car puisque ΗΒΕΑ est un parallélogramme, et que l'angle ΑΕΒ est droit, l'angle ΑΗΒ est droit aussi (34. 1). Nous démontrerons semblablement que les angles sont droits en Θ, Κ, Ζ; donc le quadrilatère ΖΗΘΚ est rectangle; mais on

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 211

Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον τετράγωνον ἄρα ἰστί.  
Καὶ περιγίγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

tensum est autem et æquilaterum; quadratum igitur est. Et circumscriptum est circa ΑΒΓΔ circum-  
culum.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγίγραπται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Circa datum igitur circumlum quadratum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

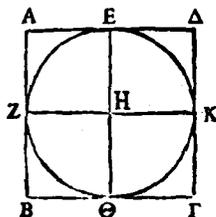
PROPOSITIO VIII.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράφαι.

In dato quadrato circumlum inscribere.

Ἐστὼ τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὲ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγράφαι.

Sit datum quadratum ΑΒΓΔ; oportet igitur in ΑΒΓΔ quadrato circumlum inscribere.



Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΑΔ, δίχα κατὰ τὰ Ζ, Ε σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΕΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἰστὶν ἕκαστον τῶν ΑΚ,

Secetur utraque ipsarum ΑΒ, ΑΔ bisariam in Ε, Ζ punctis, et per Ε quidem alterutri ipsarum ΑΒ, ΓΔ parallela ducatur ΕΘ; per Ζ vero alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΓ parallela ducatur ΖΚ; parallelogramum igitur est unumquodque ipso-

a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un carré, et il est circonscrit au cercle ΑΒΓΔ.

On a donc circonscrit un carré à un cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION VIII.

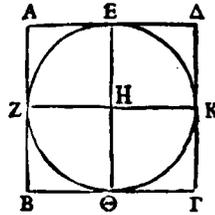
Inscrire un cercle dans un carré donné.

Soit ΑΒΓΔ le carré donné; il faut inscrire un cercle dans le carré ΑΒΓΔ.

Coupons en deux parties égales l'une et l'autre des droites ΑΒ, ΑΔ aux points Ζ, Ε (10. 1), et par le point Ε menons ΕΘ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΒ, ΓΔ (31. 1), et par le point Ζ menons aussi la droite ΖΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΒΓ; donc chacune des figures ΑΚ,

KB, AΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ, ΗΔ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσὶ<sup>1</sup>. Καὶ ἴσαι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, καὶ ἴστί τῆς μὲν ΑΔ ἡμίση αἱ ΑΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίση αἱ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσὶν<sup>2</sup>, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρω τῶν ΖΗ, ΗΕ ἴστί τιν ἴση. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν<sup>3</sup>. Ὁ ἄρα κέν-

rum AK, KB, AΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ, ΗΔ, et opposita ipsorum latera utique æqualia sunt. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΑΒ, et est ipsius quidem ΑΔ dimidia ΑΕ, ipsius vero ΑΒ dimidia ΑΖ, æqualis igitur et ΑΕ ipsi ΑΖ; quare et opposita æqualia sunt, æqualis igitur et ΖΗ ipsi ΗΕ. Similiter utique ostendemus et utramque ipsarum ΗΘ, ΗΚ utrique ipsarum ΖΗ, ΗΕ esse æqualem. Quatuor igitur ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ æquales



τρον μὲν τῷ Η<sup>ο</sup>, διαστήματι δεῖνὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἐπάφεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Θ, Κ γωνίας· εἰ γὰρ τέμνῃ ὁ κύκλος τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἢ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀμρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κυκλοῦ, ὅπερ ἀτοπον εἰδείχθη<sup>4</sup>. Οὐκ ἄρα ὁ

inter sesunt. Ipse igitur centro quidem Η, intervallo vero unâ ipsarum ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta; et continget ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ rectas, propterea quod recti sunt ad Ε, Ζ, Θ, Κ anguli; si enim secat circulus ipsas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ipsa diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta intra cadet circulum, quod absurdum ostend-

KB, AΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ, ΗΔ est un parallélogramme, et leurs côtés opposés sont égaux (34. 1). Et puisque ΑΔ est égal à ΑΒ, que ΑΕ est la moitié de ΑΔ, et ΑΖ la moitié de ΑΒ, la droite ΑΕ est égale à ΑΖ; donc les côtés opposés sont égaux; donc ΖΗ est égal à ΗΕ. Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites ΗΘ, ΗΚ est égale à l'une et à l'autre des droites ΖΗ, ΗΕ. Donc les quatre droites ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre Η, et d'un intervalle égal à une des droites ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ passera par les autres points, et sera tangent aux droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, parce que les angles sont droits en Ε, Ζ, Θ, Κ; car si ce cercle coupait les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, la perpendiculaire au diamètre du cercle, et menée de l'une de ses extrémités tomberait dans le cercle; ce qui a été démontré absurde (16. 3). Donc le cercle décrit du centre Η, et

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 213

κέντρο μὲν<sup>5</sup> τῷ Η, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθείας. Εφάπτεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν<sup>6</sup> τετράγωνον κύκλος ἐγγί-  
γραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. \*

sum est. Non igitur centro quidem H, intervallo vero unâ ipsarum HE, HZ, HO, HK circulus descriptus secat AB, BG, GD, DA rectas. Continget igitur ipsas et erit inscriptus in ABGD quadrato.

In dato igitur quadrato circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

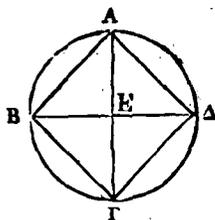
PROPOSITIO IX.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγρά-  
ψαι.

Ἐστὼ τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ. δεῖ  
δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον περι-  
γράψαι.

Circa datum quadratum circulum circumscribere.

Sit datum quadratum ABGD; oportet igitur circa ABGD quadratum circulum circumscribere.



Ἐπιζυχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμένετωσαν  
ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε.

Junctæ enim ΑΓ, ΒΔ, sese secant in Ε.

d'un intervalle égal à des droites HE, HZ, HO, HK ne coupe point les droites AB, BG, GD, DA. Donc il sera tangent à ces droites, et il sera inscrit dans le carré ABGD (déf. 5. 4).

Donc on a inscrit un cercle dans un carré donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION IX.

Circonscrire un cercle à un carré donné.

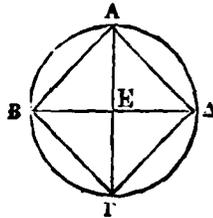
Soit ABGD le carré donné; il faut circonscrire un cercle au carré ABGD.

Joignons ΑΓ, ΒΔ, et que ces droites se coupent au point Ε.

214 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση<sup>1</sup>. γωνία ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ<sup>2</sup>. ἢ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ ὕψιων. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΒ

Et quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΑΒ, communis autem ΑΓ, duæ utique ΔΑ, ΑΓ duabus ΒΑ, ΑΓ æquales sunt, et basis ΔΓ basi ΒΓ æqualis; angulus igitur æqualis est ΔΑΓ ipsi ΒΑΓ; ipse igitur ΔΑΒ angulus bifariam sectus est ab ΑΓ. Similiter utique ostendemus et unumquemque ipsorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ bifariam sectum esse ab ΑΓ, ΔΒ rectis. Et quoniam æqualis est ΔΑΒ angulus ipsi ΑΒΓ, et est ipsius quidem ΔΑΒ di-



ἡμίση ἢ ὑπὸ ΕΑΒ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίση ἢ ὑπὸ ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΕΒΑ εἰσὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΑ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκάτερα τῶν ΕΑ, ΕΒ ὕψιων ἐκάτερα τῶν ΕΓ, ΕΔ ἴση ἐστίν. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ο ἄρα κέντρω τῷ Ε, καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ κύκλος

midius ipse ΕΑΒ, et ipsius ΑΒΓ dimidius ipse ΕΒΑ; et ΕΑΒ igitur ipsi ΕΒΑ est æqualis. Quare et latus ΕΑ lateri ΕΒ est æquale. Similiter utique ostendemus, et utramque ΕΑ, ΕΒ rectarum utriusque ipsarum ΕΓ, ΕΔ æqualem esse; quatuor igitur ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ æquales inter se sunt. Ipse igitur centro Ε, et intervallo unâ ipsarum ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ circulus descriptus tran-

Puisque ΔΑ est égal à ΑΒ, et que la droite ΑΓ est commune, les deux droites ΔΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΒΑ; ΑΓ; mais la base ΔΓ est égale à la base ΒΓ; donc l'angle ΔΑΓ est égal à l'angle ΒΑΓ (8. 1); donc l'angle ΔΑΒ est coupé en deux parties égales par la droite ΑΓ. Nous démontrerons semblablement que chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ est coupé en deux parties égales par les droites ΑΓ, ΔΒ. Et puisque l'angle ΔΑΒ est égal à l'angle ΑΒΓ, que l'angle ΕΑΒ est la moitié de l'angle ΔΑΒ, et l'angle ΕΒΑ la moitié de l'angle ΑΒΓ, l'angle ΕΑΒ est égal à l'angle ΕΒΑ; donc le côté ΕΑ est égal au côté ΕΒ (6. 1). Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites ΕΓ, ΕΒ est égale à l'une et à l'autre des droites ΕΓ, ΕΔ; donc les quatre droites ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre Ε, et d'un intervalle égal à une des droites ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ passera par les autres points,

γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραμμίνος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον. Περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγράφεται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκάτεραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διαπλασίνα τῆς λοιπῆς.

Ἐκκείσθω τις εὐθεΐα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχο-

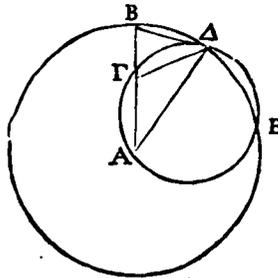
sibit et per reliqua puncta, et erit circumscriptus circa ΑΒΓΔ quadratum. Circumscribatur ut ΑΒΓΔ.

Circa datum igitur quadratum circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO X.

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque ipsorum ad basim angulorum duplum reliqui.

Exponatur aliqua recta ΑΒ, et secetur in Γ puncto, ita ut ipsum sub ΑΒ, ΒΓ contentum



μενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ ΓΑ τετραγώνῳ καὶ κέντρῳ τῷ Α, καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ' κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν

rectangulum æquale sit ipsi ex ΓΑ quadrato; et centro Α, et intervallo ΑΒ circulus describatur ΒΔΕ, et aptetur in ΒΔΕ circulo ipsi ΑΓ

et il sera circonscrit au carré ΑΒΓΔ. Qu'il soit circonscrit comme ΑΒΓΔ.

Donc on a circonscrit un cercle à un carré donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION X.

Construire un triangle isocèle, qui ait chacun des angles de la base double de l'angle restant.

Soit une droite ΑΒ; que cette droite soit coupée en un point Γ, de manière que le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΓ soit égal au carré de ΓΑ (I I. 2); du centre Α et de l'intervalle ΑΒ décrivons le cercle ΒΔΕ (dém. 3); dans le cercle

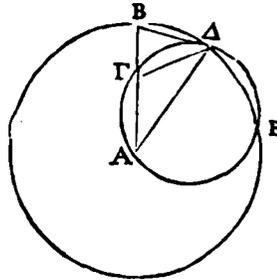
216 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΒΔΕ κύκλον τῆ ΑΓ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὐσῆ τῆς τοῦ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου, ἴση εὐθείᾳ ἢ ΒΔ· καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴση δὲ ἢ ΑΓ τῆ ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΓΔ εἴληπται τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ

rectæ, non majori existenti ipsâ ΒΔΓ circuli diametro, æqualis recta ΒΔ; et jungantur ΑΔ, ΓΔ, et circumscribatur circa ΑΓΔ triangulum circulus ΑΓΔ.

Et quoniam ipsum sub ΑΒ, ΒΓ æquale est quadrato ex ΑΓ, æqualis autem ΑΓ ipsi ΒΔ; ipsum igitur sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsi ex ΒΔ. Et quoniam extra circulum ΑΓΔ sumptum est



Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸν ΑΓΔ κύκλον προσπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ· ἢ ΒΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΔΓ· ἢ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ

aliquod punctum Β, et a Β in ΑΓΔ circulum cadunt duæ rectæ ΒΑ, ΒΔ, et altera quidem ipsarum secat, altera vero incidit; et est ipsum sub ΑΒ, ΒΓ æquale ipsi ex ΒΔ; ipsa ΒΔ igitur contingit ΑΓΔ. Et quoniam contingit quidem ipsa ΒΔ, a contactu vero ad Δ ducta est ΔΓ; ipse igitur ΒΔΓ angulus æqualis est ipsi in alterno circuli segmento angulo ΔΓΑ. Quoniam igitur æ-

ΒΔΕ adaptions une droite ΒΔ égale à la droite ΑΓ, qui n'est pas plus grande que le diamètre du cercle ΒΔΕ (1. 4); joignons ΑΔ, ΓΔ, et circonscrivons le cercle ΑΓΔ au triangle ΑΓΔ (5. 4).

Puisque le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est égal au carré ΑΓ, et que ΑΓ est égal à ΒΔ, le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est égal au carré de ΒΔ. Et puisque le point Β a été pris hors du cercle ΑΓΔ, que les droites ΒΑ, ΒΔ vont du point Β au cercle ΑΓΔ, que l'une d'elles le coupe, et que l'autre ne le coupe point, et que le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est égal au carré de ΒΔ, la droite ΒΔ est tangente au cercle ΑΓΔ (37. 3). Donc, puisque la droite ΒΔ est tangente, et que la droite ΔΓ a été menée du point de contact Δ, l'angle ΒΔΓ est égal à

ΔΑΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ἔσθι ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ. Ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. Ἀλλ' ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ γωνία<sup>5</sup> τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ εἰσὶ διπλασίου<sup>6</sup>. Ἰση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ διπλῆ<sup>8</sup>. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρῃ τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶ διπλῆ.

Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνίσταται τὸ ΑΔΒ, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΔΒ βάσει γωνιῶν διπλασίου τῆς λοιπῆς. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

qualis est ΒΔΓ ipsi ΔΑΓ, communjs addatur ΓΔΑ. Totus igitur ΒΔΑ æqualis est duobus ΓΔΑ, ΔΑΓ. Sed ipsis ΓΔΑ, ΔΑΓ æqualis est exterior ΒΓΔ; ipse igitur ΒΔΑ æqualis est ipsi ΒΓΔ. Sed ΒΔΑ ipsi ΓΒΔ est æqualis, quoniam et latus ΔΑ ips AB est æquale; quare et ΔΒΑ ipsi ΒΓΔ est æqualis. Tres igitur ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ æquales inter se sunt. Et quoniam æqualis est ΔΒΓ angulus ips. ΒΓΔ, æquale est et latus ΒΔ lateri ΔΓ. Sed ΒΔ ipsi ΓΑ ponitur æqualis; et ΑΓ igitur ipsi ΓΔ est æqualis; quare et angulus ΓΔΑ angulo ΔΑΓ est æqualis; ipsi igitur ΓΔΑ, ΔΑΓ ipsius ΔΑΓ sunt dupli. Æqualis autem et ΒΓΔ ipsis ΓΔΑ, ΔΑΓ; et ΒΓΔ igitur ipsius ΔΑΓ est duplus. Æqualis autem et ΒΓΔ utrique ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ; et uterque igitur ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ ipsius ΒΑΔ est duplus.

Isosceles igitur triangulum constitutum est ΑΔΒ habens utrumque ipsorum ad ΑΒ basim angulorum duplum reliqui. Quod oportebat facere.

l'angle ΔΑΓ placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Puisque l'angle ΒΔΓ est égal à l'angle ΔΑΓ, ajoutons l'angle commun ΓΔΑ, l'angle entier ΒΔΑ sera égal aux deux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ. Mais l'angle extérieur ΒΓΔ est égal aux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ (32. 1); donc l'angle ΒΔΑ est égal à l'angle ΒΓΔ. Mais l'angle ΒΔΑ est égal à l'angle ΓΒΔ (5. 1), puisque le côté ΔΑ est égal au côté ΑΒ; donc l'angle ΔΒΑ est égal à l'angle ΒΓΔ. Donc les trois angles ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux. Et puisque l'angle ΔΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ, le côté ΒΔ est égal au côté ΔΓ (6. 1). Mais le côté ΒΔ est supposé égal au côté ΓΑ; donc le côté ΑΓ est égal au côté ΓΔ; donc l'angle ΓΔΑ est égal à l'angle ΔΑΓ (5. 1); donc les angles ΓΔΑ, ΔΑΓ sont doubles de l'angle ΔΑΓ. Mais l'angle ΒΓΔ est égal aux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ (32. 1); donc l'angle ΒΓΔ est double de l'angle ΔΑΓ. Mais l'angle ΒΓΔ est égal à chacun des angles ΒΔΑ, ΔΒΑ; donc chacun des angles ΒΔΑ, ΔΒΑ est double de l'angle ΒΑΔ.

Donc on a construit un triangle isocèle ΑΔΒ, ayant chacun des angles de la base ΒΔ double de l'angle restant. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

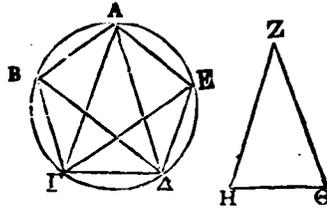
PROPOSITIO XI.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἰγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· διττὸ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἰγγράψαι'.

In dato circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔΕ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕ circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.



Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶ πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἰγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίᾳ ἴσῃ εἶναι τὴν ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ ἴσῃν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ τῆς ὑπὸ

Exponatur triangulum isosceles ΖΗΘ, duplum habens utrumque ipsorum ad Η, Θ angulorum ipsius ad Ζ, et inscribatur in ΑΒΓΔΕ circulo, ipsi ΖΗΘ triangulo æquiangulum triangulum ΑΓΔ, ita ut ipsi quidem Ζ angulo æqualis sit ipse ΓΑΔ, uterque vero ipsorum ad Η, Θ æqualis utrique ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ; et uterque igitur ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ ipsius ΓΑΔ est duplus. Sec-

PROPOSITION XI.

Dans un cercle donné, inscrire un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕ le cercle donné; il faut inscrire dans le cercle ΑΒΓΔΕ un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit posé le triangle isocèle ΖΗΘ, ayant chacun des angles en Η, Θ double de l'angle Ζ (10. 4); inscrivons dans le cercle ΑΒΓΔΕ le triangle ΑΓΔ équiangle avec le triangle ΖΗΘ (2. 4), de manière que l'angle ΓΑΔ soit égal à l'angle Ζ, et que chacun des angles Η, Θ soit égal à chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ; chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ sera double de l'angle ΓΑΔ. Coupons chacun des angles ΑΓΔ

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 219

ΓΑΔ ἴστί διπλῆ. Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ ἑκατέρας<sup>3</sup> τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπιζεύχσασαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ<sup>4</sup>.

Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίον ἴστί τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφέρειάς ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἴστί τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσῶνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆ ΔΕ περιφέρειᾶ ἴσθιν ἴση<sup>5</sup>, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλη τῆ ΕΔΓΒ περιφέρειᾶ ἴσθιν ἴση<sup>6</sup>. Καὶ βίβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒΓΔ περιφέρειᾶς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒ περιφέρειᾶς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα γωνία<sup>7</sup> τῆ ὑπὸ ΑΕΔ ἴσθιν ἴση<sup>8</sup>. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκα-

tur autem uterque ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ bifariam ab utraq̄ue ipsarum ΓΕ, ΔΒ rectarum, et jungantur ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Quoniam igitur uterque ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ angulorum duplus est ipsius ΓΑΔ; et secti sunt bifariam à ΓΕ, ΔΒ rectis; quinque igitur anguli ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ æquales inter se sunt. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistent; quinque igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ æquales inter se sunt. Æquales autem circumferentias æquales rectæ subtendunt; quinque igitur rectæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ æquales inter se sunt; æquilaterum igitur est ΑΒΓΔΕ pentagonum. Dico et æquiangulum. Quoniam enim ΑΒ circumferentiā ipsi ΔΕ circumferentiæ est æqualis, communis addatur ΒΓΔ; tota igitur ΑΒΓΔ circumferentiā toti ΕΔΓΒ circumferentiæ est æqualis. Et insistit ipsi quidem ΑΒΓΔ circumferentiæ angulus ΑΕΔ, ipsi vero ΕΔΓΒ circumferentiæ angulus ΒΑΕ, et ΒΑΕ igitur angulus ipsi ΑΕΔ est æqualis. Propter eadem utique et unusquisque ipsorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ angulo-

ΓΔΑ en deux parties égales par les droites ΓΕ, ΔΒ (9. 1), et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Puisque chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ est double de l'angle ΓΑΔ, et que ces angles sont coupés en deux parties égales par les droites ΓΕ, ΔΒ, les cinq angles ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ sont égaux entr'eux. Mais les angles égaux sont appuyés sur des arcs égaux (26. 3); donc les cinq arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sont égaux entr'eux. Mais les arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3); donc les cinq droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sont égales entr'elles; donc le pentagone ΑΒΓΔΕ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΑΒ est égal à l'arc ΔΕ, ajoutons l'arc commun ΒΓΔ; l'arc entier ΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒ. Mais l'angle ΑΕΔ est appuyé sur l'arc ΑΒΓΔ, et l'angle ΒΑΕ sur l'arc ΕΔΓΒ; donc l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΑΕΔ (27. 3). Par la même raison, chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ est égal à chacun des angles ΒΑΕ,

220 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τίρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ ἴστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἴστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον·

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. Οπερ ἴδει ποιῆσαι.

rum utrique ipsorum ΒΑΕ, ΑΕΔ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΓΔΕ pentagonum. Ostensum est autem et æquilaterum;

In dato igitur, circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Εστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὲ περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

PROPOSITIO XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum circumscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔΕ; oportet igitur circa ΑΒΓΔΕ circulum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum circumscribere.



Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεία, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ περιφερείας·

Intelligantur inscripti pentagoni angulorum puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε, ita ut æquales sint ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ circumferentiæ; et per Α,

ΑΕΔ; donc le pentagone ΑΒΓΔΕ est équiangle. Mais il a été démontré qu'il est équilatéral;

Donc dans un cercle donné, on a inscrit un pentagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XII.

Circonscrire à un cercle donné un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕ le cercle donné; il faut au cercle ΑΒΓΔΕ circonscrire un pentagone équilatéral et équiangle.

Concevons que Α, Β, Γ, Δ, Ε soient les sommets des angles du pentagone inscrit (11. 4), de manière que les arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ soient égaux;

καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΑ, ΛΜ, ΜΗ· καὶ εἰληφθῶ τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Καὶ ἐπιὶ ἡ μὲν ΚΑ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου ἐπιὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐπαφὴν ἐπίζευκται ἡ ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΑ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαὶ εἰσι. Καὶ ἐπιὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ<sup>2</sup>· ὥστε τὰ<sup>3</sup> ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὣν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ λοιπὸν<sup>4</sup> τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΒΚ<sup>5</sup>. Καὶ ἐπιὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο δὲ αἱ ΒΖ, ΖΚ δυοὶ ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνία τῷ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση, ἡ

Β, Γ, Δ, Ε ducantur circulum contingentes ΗΘ, ΘΚ, ΚΑ, ΛΜ, ΜΗ; et sumatur ΑΒΓΔΕ circuli centrum Ζ, et jungantur ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Et quoniam recta quidem ΚΑ contingit ΑΒΓΔΕ circulum in Γ, ab ipso vero Ζ centro in contactum ad Γ ducta est ΖΓ; ergo ΖΓ perpendicularis est ad ΚΑ; rectus igitur est uterque ipsorum ad Γ angulorum. Propter eadem utique et ipsi ad Β, Δ puncta anguli recti sunt. Et quoniam rectus est ΖΓΚ angulus, ipsum igitur ex ΖΚ æquale est ipsis ex ΖΓ, ΓΚ. Propter eadem utique et ipsis ex ΖΒ, ΒΚ æquale est ipsum ex ΖΚ; quare ipsa ex ΖΓ, ΓΚ ipsis ex ΖΒ, ΒΚ æqualia sunt, quorum ipsum ex ΖΓ ipsi ΖΒ est æquale; reliquum igitur ex ΓΚ reliquo ex ΒΚ est æquale; æqualis igitur ΓΚ ipsi ΒΚ. Et quoniam æqualis est ΖΒ ipsi ΖΓ, et communis ΖΚ, duæ utique ΒΖ, ΖΚ duabus ΓΖ, ΖΚ æquales sunt, et basis ΒΚ basi ΓΚ est æqualis; angulus igitur quidem ΒΖΚ angulo ΚΖΓ est æqualis, ipse vero ΒΚΖ ipsi ΖΚΓ est æqualis; duplus igitur

par les points Α, Β, Γ, Δ, Ε, menons au cercle les tangentes ΗΘ, ΘΚ, ΚΑ, ΛΜ, ΜΗ (17. 3); prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓΔΕ, et joignons ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Puisque la droite ΚΑ touche le cercle ΑΒΓΔΕ au point Γ, et que la droite ΖΓ est menée du centre Ζ au point de contact Γ, la droite ΖΓ est perpendiculaire à ΚΑ (18. 3); donc chacun des angles en Γ est droit. Chacun des angles aux points Β, Δ est droit, par la même raison. Et puisque l'angle ΖΓΚ est droit, le carré de la droite ΖΚ est égal aux carrés des droites ΖΓ, ΓΚ (47. 1). Le carré de la droite ΖΚ est égal aux carrés des droites ΖΒ, ΒΚ, par la même raison; donc les carrés des droites ΖΓ, ΓΚ sont égaux aux carrés des droites ΖΒ, ΒΚ; mais le carré de ΖΓ est égal au carré de ΖΒ; donc le carré restant de ΓΚ est égal au carré restant de ΒΚ; donc ΓΚ est égal à ΒΚ. Et puisque ΖΒ est égal à ΖΓ, et que la droite ΖΚ est commune, les deux droites ΒΖ, ΖΚ sont égales aux deux droites ΓΖ, ΖΚ; mais la base ΒΚ est égale à la base ΓΚ; donc l'angle ΒΖΚ

δὲ ὑπὸ  $BKZ$  τῆ ὑπὸ  $ZKΓ$  ἴσιν<sup>6</sup>. διπλῆ ἄρα ἢ μὲν ὑπὸ  $BZΓ$  τῆς ὑπὸ  $KZΓ$ , ἢ δὲ ὑπὸ  $BKΓ$  τῆς ὑπὸ  $ZKΓ$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἢ μὲν ὑπὸ  $ΓZΔ$  τῆς  $ΓZΛ$  ἴσιν διπλῆ, ἢ δὲ ὑπὸ  $ΓΛΔ$  τῆς ὑπὸ  $ΓΛZ$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ  $BΓ$  περιφέρεια τῆ  $ΓΔ$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἢ ὑπὸ  $BZΓ$  τῆ ὑπὸ  $ΓZΔ$ . Καὶ ἐστὶν ἢ μὲν ὑπὸ  $BZΓ$  τῆς ὑπὸ  $KZΓ$  διπλῆ, ἢ δὲ ὑπὸ  $ΔZΓ$  διπλῆ<sup>7</sup> τῆς ὑπὸ  $ΛZΓ$ . ἴση ἄρα καὶ ἢ ὑπὸ  $KZΓ$  τῆ ὑπὸ  $ΛZΓ$ . ἴσιν δὲ καὶ ἢ ὑπὸ  $ZKΓ$

tur ipse quidem  $BZΓ$  ipsius  $KZΓ$ , ipse vero  $BKΓ$  ipsius  $ZKΓ$ . Propter eadem utique et ipse quidem  $ΓZΔ$  ipsius  $ΓZΛ$  est duplus, ipse vero  $ΓΛΔ$  ipsius  $ΓΛZ$ . Et quoniam æqualis est  $BΓ$  circumferentia ipsi  $ΓΔ$ , æqualis est et angulus  $BZΓ$  ipsi  $ΓZΔ$ . Et est ipse quidem  $BZΓ$  ipsius  $KZΓ$  duplus, ipse vero  $ΔZΓ$  duplus ipsius  $ΛZΓ$ ; æqualis igitur et  $KZΓ$  ipsi  $ΛZΓ$ ; est autem et  $ZKΓ$  angulus ipsi  $ZΓΛ$  æqualis. Duo utique triangula sunt  $ZKΓ$ ,  $ZΛΓ$  duos an-



γωνία τῆ ὑπὸ  $ZΓΛ$  ἴσιν<sup>8</sup>. Δύο δὲ τρίγωνα ἴσιν<sup>9</sup> τὰ  $ZKΓ$ ,  $ZΛΓ$  τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρῃ<sup>10</sup>, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσιν, κοινὴν αὐτῶν τὴν  $ZΓ$ , καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῆ λοιπῆ γωνία. ἴση ἄρα ἢ μὲν  $KΓ$  ὑπεῖα τῆ  $ΓΛ$ , ἢ δὲ ὑπὸ  $ZKΓ$  γωνία τῆ ὑπὸ  $ZΛΓ$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν

gulos duobus angulis æquales habentia utrumque utriusque, et unum latus uni lateri æquale, commune ipsis ipsum  $ZΓ$ , et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo; æqualis igitur ipsa quidem  $KΓ$  recta ipsi  $ΓΛ$ , ipse vero  $ZKΓ$  angulus ipsi  $ZΛΓ$ . Et quoniam æqualis est  $KΓ$  ipsi  $ΓΛ$ , dupla igitur  $ΚΑ$  ipsius  $KΓ$ . Propter eadem

est égal à l'angle  $KZΓ$ , et l'angle  $BKZ$  à l'angle  $ZKΓ$  (8. 1); donc l'angle  $BZΓ$  est double de l'angle  $KZΓ$ , et l'angle  $BKΓ$  double de l'angle  $ZKΓ$ . Par la même raison, l'angle  $ZΓΔ$  est double de l'angle  $ΓZΛ$ , et l'angle  $ΓΛΔ$  double de l'angle  $ΓΛZ$ . Et puisque l'arc  $BΓ$  est égal à l'arc  $ΓΔ$ , l'angle  $BZΓ$  est égal à l'angle  $ΓZΔ$  (27. 3). Mais l'angle  $BZΓ$  est double de l'angle  $KZΓ$ , et l'angle  $ΔZΓ$  double de l'angle  $ΛZΓ$ ; donc l'angle  $KZΓ$  est égal à l'angle  $ΛZΓ$ ; mais l'angle  $ZKΓ$  est égal à l'angle  $ZΓΛ$ ; donc les triangles  $ZKΓ$ ,  $ZΛΓ$  ont deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, le côté  $ZΓ$ , qui leur est commun; donc ces deux triangles ont les côtés restants égaux aux côtés restants, et l'angle restant égal à l'angle restant (26. 1); donc la droite  $KΓ$  est égale à la droite  $ΓΛ$ , et l'angle  $ZKΓ$  est égal à l'angle  $ZΛΓ$ . Mais  $KΓ$  est égal à  $ΓΛ$ ; donc

ἡ ΚΓ τῆ ΓΛ, διπλῆ ἄρα ἢ ΚΑ τῆς ΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ διχθήσεται, καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῆ. Καὶ ἔστιν ἡ ΒΚ τῆ ΚΓ ἴση<sup>11</sup>. καὶ ΘΚ ἄρα τῆ ΚΑ ἔστιν ἴση. Ομοίως δὲ διχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΑ ἑκατέρα τῶν ΘΚ, ΚΑ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἔστι τὸ ΗΘΚΑΜ πεντάγωνον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἔστιν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῆ ὑπὸ ΖΛΓ, καὶ εἰδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῆ ἢ ὑπὸ ΘΚΑ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῆ ἢ ὑπὸ ΚΑΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΑ ἄρα τῆ ὑπὸ ΚΑΜ ἔστιν ἴση. Ομοίως δὲ διχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΑ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘΚΑ, ΚΑΜ ἴση· αἱ πάντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΑ, ΚΑΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ ΗΘΚΑΜ πεντάγωνον. Εἰδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι.

utique ostendetur, et ΘΚ ipsius ΒΚ dupla. Et est ΒΚ ipsi ΚΓ æqualis; et ΘΚ igitur ipsi ΚΑ est æqualis. Similiter utique ostendetur et unaquæque ipsarum ΘΗ, ΗΜ, ΜΑ utrique ipsarum ΘΚ, ΚΑ æqualis; æquilaterum igitur est ΗΘΚΑΜ pentagonum. Dico autem et æquiangulum. Quoniam enim æqualis est ΖΚΓ angulus ipsi ΖΛΓ, et ostensus est ipsius quidem ΖΚΓ duplus ipse ΘΚΑ, ipsius vero ΖΛΓ duplus ipse ΚΑΜ; et ΘΚΑ igitur ipsi ΚΑΜ est æqualis. Similiter utique ostendetur et unusquisque ipsorum ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΑ utrique ipsorum ΘΚΑ, ΚΑΜ æqualis; quinque igitur anguli ΗΘΚ, ΘΚΑ, ΚΑΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ æquales inter se sunt. Æquiangulum igitur est ΗΘΚΑΜ pentagonum. Ostensum est autem et æquilaterum, et circumscriptum est circa ΑΒΓΔΕ circumulum. Quod oportebat facere.

ΚΑ est double de ΚΓ. On démontrera de la même manière que ΘΚ est double de ΒΚ. Mais ΒΚ est égal à ΚΓ; donc ΘΚ est égal à ΚΑ. On démontrera semblablement que chacune des droites ΘΗ, ΗΜ, ΜΑ est égale à l'une et à l'autre des droites ΘΚ, ΚΑ; donc le pentagone ΗΘΚΑΜ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est équiangle; car puisque l'angle ΖΚΓ est égal à l'angle ΖΛΓ, et qu'on a démontré que l'angle ΘΚΑ est double de l'angle ΖΚΓ, et l'angle ΚΑΜ double de l'angle ΖΛΓ, l'angle ΘΚΑ est égal à l'angle ΚΑΜ. On démontrera semblablement que chacun des angles ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΑ est égal à l'un et à l'autre des angles ΘΚΑ, ΚΑΜ; donc les cinq angles ΗΘΚ, ΘΚΑ, ΚΑΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ sont égaux entr'eux. Donc le pentagone ΗΘΚΑΜ est équiangle. Mais nous avons démontré qu'il est équilatéral, et il est circonscrit au cercle ΑΒΓΔΕ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17'.

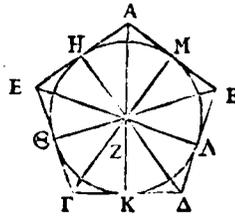
PROPOSITIO XIII.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

In dato pentagono, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulum inscribere.

Sit datum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum ΑΒΓΔΕ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕ pentagono circulum inscribere.



Τετμήσθω γὰρ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπιζεύχουσιν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση ἐστὶ· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ τῇ βάσει ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἐστὶ ἴσον.

Secetur enim uterque ipsorum ΒΓΔ, ΓΔΕ angulorum bifariam ab utraq̄ue ipsarum ΓΖ, ΔΖ rectarum; et a Ζ puncto, in quo conveniunt inter se ΓΖ, ΔΖ rectæ, ducantur ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ rectæ. Et quoniam æqualis est ΒΓ ipsi ΓΔ, communis autem ΓΖ, duæ utiq̄ue ΒΓ, ΓΖ duabus ΔΓ, ΓΖ æquales sunt, et angulus ΒΓΖ angulo ΔΓΖ æqualis est; basis igitur ΒΖ basi ΔΖ est æqualis, et ΒΖΓ triangulum ipsi ΔΖΓ triangulo est æquale,

PROPOSITION XIII.

Dans un pentagone équilatéral et équiangle donné, inscrire un cercle.

Soit ΑΒΓΔΕ le pentagone équilatéral et équiangle donné; il faut inscrire un cercle dans le pentagone ΑΒΓΔΕ.

Coupons chacun des angles ΒΓΔ, ΓΔΕ en deux parties égales par les droites ΓΖ, ΔΖ (9. 1); et du point Ζ où les deux droites ΓΖ, ΔΖ se rencontrent, menons les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Et puisque ΒΓ est égal à ΓΔ, et que la droite ΓΖ est commune, les deux droites ΒΓ, ΓΖ sont égales aux deux droites ΔΓ, ΓΖ; mais l'angle ΒΓΖ est égal à l'angle ΔΓΖ; donc la base ΒΖ est égale à la base ΔΖ (4. 1), et le triangle ΒΖΓ est égal au triangle ΔΖΓ, et les angles restants

καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται<sup>5</sup>, ὅφ' αἱ αἰ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ<sup>6</sup>, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἔστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΒΖ εὐθείας. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρω τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. Ἠχθῶσαν δὲ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ ὑπὸ ΘΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΓ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς<sup>8</sup> δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μίᾳ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν ΖΓ ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ κατέτω. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ ἑκατέρω τῶν ΖΘ, ΖΚ ἴση ἔστιν· αἱ πέτε

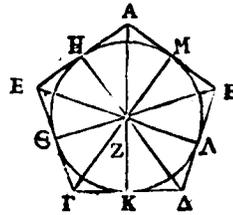
et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur ΓΒΖ angulus ipsi ΓΔΖ. Et quoniam duplus est ΓΔΕ ipsius ΓΔΖ, æqualis autem ipse quidem ΓΔΕ ipsi ΑΒΓ, ipse vero ΓΔΖ ipsi ΓΒΖ, et ΓΒΑ igitur ipsius ΓΒΖ est duplus; æqualis igitur ΑΒΖ angulus ipsi ΖΒΓ. Ergo ΑΒΓ angulus bifariam secatur à ΒΖ rectâ. Similiter utique ostendetur et utrumque ipsorum ΒΑΕ, ΑΕΔ bifariam secari ab utraque ipsarum ΖΑ, ΖΕ rectorum. Ducantur autem à Ζ puncto ad ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ rectas perpendiculares ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Et quoniam æqualis est ΘΓΖ angulus ipsi ΚΓΖ, est autem et rectus ΖΘΓ recto ΖΚΓ æqualis, duo utique triangula sunt ΖΘΓ, ΖΚΓ duos angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus uni lateri æquale, commune ipsorum ΖΓ, subtendens unum æqualium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt; æqualis igitur ΖΘ perpendicularis ipsi ΖΚ perpendiculari. Similiter utique ostendetur et unamquamque ipsarum ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ, utrique ipsarum ΖΘ,

égaux aux angles restants, ceux qui soutendent des côtés égaux (4. 1); donc l'angle ΓΒΖ est égal à l'angle ΓΔΖ. Et puisque l'angle ΓΔΕ est double de l'angle ΓΔΖ, que ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΒΓ, et que ΓΔΖ est égal à ΓΒΖ, l'angle ΓΒΑ est double de l'angle ΓΒΖ; donc l'angle ΑΒΖ est égal à l'angle ΖΒΓ; donc l'angle ΑΒΓ est coupé en deux parties égales par la droite ΒΖ. Nous démontrerons semblablement que chacun des angles ΒΑΕ, ΑΕΔ est coupé en deux parties égales par les droites ΖΑ, ΖΕ. Du point Ζ menons sur les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ les perpendiculaires ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Puisque l'angle ΘΓΖ est égal à l'angle ΚΓΖ, et que l'angle droit ΖΘΓ est égal à l'angle droit ΖΚΓ, les deux triangles ΖΘΓ, ΖΚΓ auront deux angles égaux à deux angles, et un côté égal à un côté, le côté commun ΖΓ qui soutend un des angles égaux; ils auront donc les côtés restants égaux aux côtés restants (26. 1); donc la perpendiculaire ΖΘ est égale à la perpendiculaire ΖΚ. On démontrera semblablement que chacune des droites ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ est égale à l'une et à l'autre

226 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα εὐθείαι αἱ  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρον τῆ  $Z$ , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$  εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς  $H, \Theta, K, \Lambda, M$  σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ οὐκ ἐφάψεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμνῆ αὐτάς, συμβήσεται τὴν τῆ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένην ἐντὶς

$ZK$  æqualem esse ; quinque igitur rectæ  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  æquales inter se sunt. Ergo centro  $Z$ , intervallo vero unâ ipsarum  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$  rectas ; propterea quod recti sunt ad  $H, \Theta, K, \Lambda, M$  puncta anguli. Si enim non contingit ipsas, sed secat ipsas, eveniet ut ipsa diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta



πίπτειν τοῦ κύκλου, ὅπερ ἀτοπον εἰδείχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρον τῆ  $Z$ , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος ὀ τεμνῆ τὰς  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$  εὐθείας. Εφαψεται ἄρα αὐτῶν. Γεγράφθω ὡς ὁ  $H\Theta K\Lambda M$ .

intra cadat circulum, quod absurdum ostensum est. Non igitur centro  $Z$ , intervallo vero unâ ipsarum  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  rectarum descriptus circulus secabit ipsas  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$  rectas ; continget igitur ipsas. Describatur ut  $H\Theta K\Lambda M$ .

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

In dato igitur pentagono, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

des droites  $Z\Theta, ZK$  ; donc les cinq droites  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre  $Z$ , et d'un intervalle égal à une des droites  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$ , passera par les autres points, et touchera les droites  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$ , parce que les angles sont droits en  $H, \Theta, K, \Lambda, M$ . Car s'il ne les touchait pas, et s'il les coupait, la perpendiculaire menée d'une de ses extrémités au diamètre, tomberait dans le cercle ; ce qui a été démontré absurde (16. 3) ; donc le cercle décrit du centre  $Z$ , et d'un intervalle égal à une des droites  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$ , ne coupera point les droites  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$  ; donc il les touchera. Décrivons le cercle  $H\Theta K\Lambda M$ .

Donc on a inscrit un cercle dans un pentagone équilatéral et équiangle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

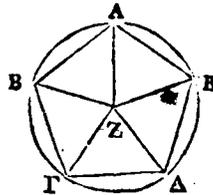
PROPOSITIO XIV.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Circa datum pentagonum, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulum circumscribere.

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δι᾽ δὲ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Sit datum pentagonum, quod est æquilaterumque et æquiangulum ΑΒΓΔΕ; oportet igitur circa ΑΒΓΔΕ pentagonum circulum circumscribere.



Τετμήσθω δὲ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεία ἐπιζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Ὁμοίως δὲ τὸ πρὸς τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία

Secetur quidem uterque ipsorum ΒΓΔ, ΓΔΕ angulorum bifariam ab utraq̃ue ipsarum ΓΖ, ΖΔ, et a Ζ puncto, in quo conveniunt rectæ, ad Β, Α, Ε puncta ducantur rectæ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Similiter utique ut antea ostendetur et unumquemque ipsorum ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ angulorum bifariam secari ab unâquaque ipsarum ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ rectarum. Et quoniam æqualis est

PROPOSITION XIV.

Circonscrire un cercle à un pentagone équilatéral et équiangle donné.

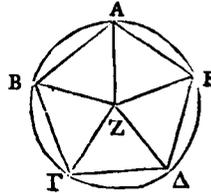
Soit ΑΒΓΔΕ le pentagone équilatéral et équiangle donné; il faut au pentagone ΑΒΓΔΕ circonscrire un cercle.

Coupons en deux parties égales chacun des angles ΒΓΔ, ΓΔΕ par les droites ΓΖ, ΖΔ (9. 1), et du point Ζ où ces droites se rencontrent, menons aux points Β, Α, Ε les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Nous démontrerons, comme auparavant, que chacun des angles ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ est coupé en deux parties égales par les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Et puisque l'angle ΒΓΔ est égal à l'angle ΓΔΕ, et

228 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῆ ὑπὸ ΓΔΕ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΓΔ ἡμί-  
 σια ἢ ὑπὸ ΖΓΔ, τῆς δὲ ὑπὸ ΓΔΕ ἡμίσεια ἢ ὑπὸ  
 ΓΔΖ, καὶ ἢ ὑπὸ ΖΓΔ ἄρα τῆ ὑπὸ ΖΔΓ ἔστιν ἴση·  
 ὥστε καὶ πλευρὰ ἢ ΖΓ πλευρᾶ τῆ ΖΔ ἔστιν ἴση.  
 Ομοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ,  
 ΖΑ, ΖΕ ἑκατέρα τῶν ΖΓ, ΖΔ ἔστιν ἴση· αἱ πέντε  
 ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ ἴσαι ἀλλή-

ΒΓΔ angulus ipsi ΓΔΕ, et est ipsius quidem  
 ΒΓΔ dimidius ipse ΖΓΔ, ipsius vero ΓΔΕ di-  
 midius ΓΔΖ, et ΖΓΔ igitur ipsi ΖΔΓ est æqualis ;  
 quare et latus ΖΓ lateri ΖΔ est æquale. Similiter  
 utique ostendetur et unamquamque ipsarum ΖΒ,  
 ΖΑ, ΖΕ utrique ipsarum ΖΓ, ΖΔ esse æqua-  
 lem ; quinque igitur rectæ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ



λαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρο τῆ Ζ, καὶ διαστήματι<sup>3</sup>  
 ἐνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ κύκλος γραφόμε-  
 νος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἴσται  
 περιγραφόμενος<sup>4</sup>. Περιγεγράφθω, καὶ ἴστω ὁ  
 ΑΒΓΔΕ.

Περὶ ἄρα τὸ δοθέν<sup>5</sup> πεντάγωνον, ὃ ἔστιν ἰσό-  
 πλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγράφεται.  
 Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

æquales inter se sunt. Ipse igitur centro Ζ et in-  
 tervallo unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ cir-  
 culus descriptus transibit et per reliqua puncta,  
 et erit circumscriptus. Circumscribatur, et sit  
 ΑΒΓΔΕ.

Circa datum igitur pentagonum, quod est  
 æquilaterumque et æquiangulum, circulus cir-  
 cumscriptus est. Quod oportebat facere.

que l'angle ΖΓΔ est la moitié de l'angle ΒΓΔ, et l'angle ΓΔΖ la moitié de l'angle  
 ΓΔΕ, l'angle ΖΓΔ est égal à l'angle ΖΔΓ ; donc le côté ΖΓ est égal au côté ΖΔ  
 (6. 1). On démontrera semblablement que chacune des droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ  
 est égale à chacune des droites ΖΓ, ΖΔ ; donc les cinq droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ,  
 ΖΕ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du point Ζ et d'un intervalle  
 égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ passera par les autres points ; et sera  
 circonscrit. Qu'il soit circonscrit, et qu'il soit ΑΒΓΔΕ.

Donc un cercle a été circonscrit à un pentagone équilatéral et équiangle  
 donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

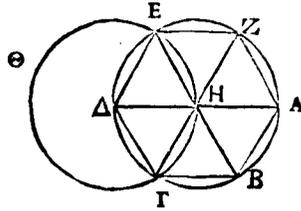
PROPOSITIO XV.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἰγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἰγγράψαι.

In dato circulo hexagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔΕΖ ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕΖ circulo hexagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.



Ἦχθω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου διάμετρος ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΗ, ΓΗ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἴστί καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἴστί τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἴστί ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ

Ducatur ΑΒΓΔΕΖ circuli diameter ΑΔ, et sumatur centrum circuli Η, et centro quidem Δ, intervallo vero ΔΗ circulus describatur ΕΗΓΘ, et junctæ ΕΗ, ΓΗ producantur ad Β, Ζ puncta, et jungantur ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ; dico ΑΒΓΔΕΖ hexagonum æquilaterumque esse et æquiangulum.

Quoniam enim Η punctum centrum est ΑΒΓΔΕΖ circuli, æqualis est ΗΕ ipsi ΗΔ. Rur-

PROPOSITION XV.

Inscrire dans un cercle donné un hexagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕΖ le cercle donné ; il faut dans ce cercle inscrire un hexagone équilatéral et équiangle.

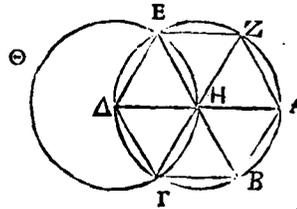
Menons le diamètre ΑΔ du cercle ΑΒΓΔΕΖ, prenons le centre Η de ce cercle, du centre Δ, et de l'intervalle ΔΗ décrivons le cercle ΕΗΓΘ (dém. 3), joignons les droites ΕΗ, ΓΗ, prolongeons-les vers les points Β, Ζ, et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ; je dis que l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral et équiangle.

Puisque le point Η est le centre du cercle ΑΒΓΔΕΖ, la droite ΗΕ est égale à

230 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Δ σημείον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ. ΑΛΛ' ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ ἰδέχθη ἴση, καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν, ἐπειδὴ περ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν.

sus, quoniam Δ punctum centrum est ΕΗΓΘ circuli, æqualis est ΔΕ ipsi ΔΗ. Sed ΗΕ ipsi ΗΔ ostensa est æqualis, ΗΕ igitur ipsi ΕΔ æqualis est; æquilaterum igitur est ΕΗΔ triangulum, et tres igitur ipsius anguli ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ æquales inter se sunt, quia isoscelium triangulorum ad basim anguli æquales inter se sunt. Et sunt tres trianguli anguli duobus rectis æquales; ipse igitur ΕΗΔ angulus tertia pars



Ομοίως δὲ διαχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΗ εὐθεία ἐπὶ τὴν ΕΒ σταθεῖσα τὰς ἐπιξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ, ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ· αἱ ἔξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ,

est duorum rectorum. Similiter utique ostendetur et ΔΗΓ tertia pars duorum rectorum. Et quoniam ΓΗ recta super ΕΒ insistens deinceps angulos ΕΗΓ, ΓΗΒ duobus rectis æquales facit, et reliquus igitur ΓΗΒ tertia pars est duorum rectorum; ipsi igitur ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ anguli æquales inter se sunt; quare et ad verticem ipsi ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ æquales sunt ipsis ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ; sex igitur anguli ΕΗΔ,

ΗΔ. De plus, puisque le point Δ est le centre du cercle ΕΗΓΘ, la droite ΔΕ est égale à ΔΗ. Mais on a démontré que ΗΕ est égal à ΗΔ; donc ΗΕ est égal à ΕΔ; donc le triangle ΕΗΔ est équilatéral; donc les trois angles ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ sont égaux entr'eux, puisque dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux entr'eux (5. 1). Mais les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits (32. 1); donc l'angle ΕΗΔ est le tiers de deux droits. Nous démontrerons semblablement que ΔΗΓ est le tiers de deux droits. Mais la droite ΓΗ tombant sur la droite ΕΒ fait les angles de suite ΕΗΓ, ΓΗΒ égaux à deux droits (13. 1); donc l'angle restant ΓΗΒ est le tiers de deux droits; donc les angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ sont égaux entr'eux; mais les angles ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ sont égaux aux angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, parce que ces angles sont opposés par le sommet (15. 1), donc les six angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ

ZHE ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἐξ ἄρα περιφέρειαι αἱ AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἐξ ἄρα εὐθείαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον· λέγω δὲ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφέρειᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ<sup>3</sup> ὅλη τῇ ΕΔΓΒΑ<sup>4</sup> ἐστὶν ἴση, καὶ βέβαια ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ περιφερείας<sup>5</sup> ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΔ. Ὁμοίως δὲ<sup>6</sup> δευχθήσεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ<sup>7</sup> τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα τῶν δοθέντων κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

AHZ, ZHE sont égaux entr'eux. Mais des angles égaux s'appuient sur des arcs égaux (26. 3); donc les six arcs AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ sont égaux entr'eux. Mais des arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3); donc ces six droites sont égales entr'elles; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral. Je dis qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΖΑ est égal à l'arc ΕΔ, ajoutons l'arc commun ΑΒΓΔ, l'arc entier ΖΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒΑ. Mais l'angle ΖΕΔ s'appuie sur l'arc ΖΑΒΓΔ, et l'angle ΑΖΕ s'appuie sur l'arc ΕΔΓΒΑ; donc l'angle ΑΖΕ est égal à l'angle ΖΕΔ (27. 3). On démontrera semblablement que les angles restants de l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ sont égaux un à un à l'un et à l'autre des angles ΑΖΕ, ΖΕΔ; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équiangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral, et il est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔΕΖ.

Donc on a inscrit un hexagone équilatéral et équiangle dans le cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ æquales inter se sunt. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistent; sex igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ æquales inter se sunt. Æquales autem circumferentias æquales rectæ subtendunt; sex igitur rectæ æquales inter se sunt; æquilaterum igitur est ΑΒΓΔΕΖ hexagonum; dico etiam et æquiangulum. Quoniam enim æqualis est ΖΑ circumferentia ipsi ΕΔ circumferentiæ, communis addatur ΑΒΓΔ circumferentia; tota igitur ΖΑΒΓΔ toti ΕΔΓΒΑ est æqualis, et insisist quidem ipsi ΖΑΒΓΔ circumferentiæ ipse ΖΕΔ angulus, ipsi vero ΕΔΓΒΑ circumferentiæ ipse ΑΖΕ angulus. Æqualis igitur ΑΖΕ angulus ipsi ΖΕΔ. Similiter utique ostendetur et reliquos angulos ipsius ΑΒΓΔΕΖ hexagoni secundum unum æquales esse alterutri ipsorum ΑΖΕ, ΖΕΔ angulorum. Æquiangulum igitur est ΑΒΓΔΕΖ hexagonum. Ostensum est autem et æquilaterum, et inscriptum est in ΑΒΓΔΕΖ circulo.

In dato igitur circulo hexagonum æquilaterumque et æquiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ τούτου φανερόν ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Καὶ ἐὰν διὰ τῶν  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$  σημείων<sup>8</sup> ἑφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγεφῆσται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολουθῶς τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. Καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθέν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράφομέν τε καὶ περιγράφομενθ.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθὴς κύκλος ὁ  $AB\Gamma\Delta$ . διὲ δὴ εἰς τὸν  $AB\Gamma\Delta$  κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

## COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum hexagoni latus æquale esse ipsi ex circuli centro.

Et si per  $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$  puncta contingentes circulum ducamus, circumscribetur circa circulum hexagonum æquilaterumque et æquiangulum, congruenter eis de pentagono dictis. Et etiam congruenter eis de pentagono dictis, in dato hexagono circulum inscribemusque et circumscribemus.

## PROPOSITIO XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus  $AB\Gamma\Delta$ ; oportet igitur in  $AB\Gamma\Delta$  circulo quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

## COROLLAIRE.

De là il est évident que le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle.

Semblablement si par les points  $A, B, \Delta, \Gamma, E, Z$  nous menons des tangentes au cercle, on circonscrit à ce cercle un hexagone équilatéral et équiangle, conformément à ce qui a été dit pour le pentagone. C'est aussi conformément à ce qui a été dit pour le pentagone, que nous inscrirons, et que nous circonscrirons un cercle à un hexagone donné.

## PROPOSITION XVI.

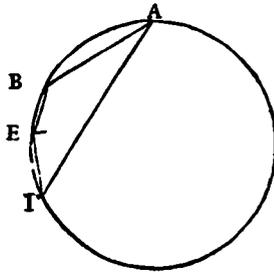
Inscrire dans un cercle donné un quindécagone équilatéral et équiangle.

Soit  $AB\Gamma\Delta$  le cercle donné; il faut dans ce cercle inscrire un quindécagone équilatéral et équiangle.

## LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 233

Εγγεγράφω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἢ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἢ ΑΒ· οἷων ἄρα ἔστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἢ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τρίτον οὔσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε, ἢ δὲ ΑΒ περιφέρεια, πεμπτὸν οὔσα τοῦ κύκλου, ἔσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἢ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. Τετμήσθω

Inscribatur in ΑΒΓΔ circulo trianguli quidem æquilateri in ipso inscripti latus ΑΓ, pentagoni vero æquilateri ipsum ΑΒ; qualium igitur est ΑΒΓΔ circulus æqualium segmentorum quindecim, talium ΑΒΓ quidem circumferentia tertia pars existens circuli erit quinque; ΑΒ vero circumferentia, quinta existens circuli, erit trium; reliqua igitur ΒΓ æqualium duarum. Secetur



ἢ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, ἑκάτερα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ περιφερειῶν πεντεκαίδεκατον ἔσται<sup>2</sup> τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Εὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς ΒΕ, ΕΓ εὐθείας<sup>3</sup>, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαίδεκων ἰσοπλευρὸν τε καὶ ἰσογώνιον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΒΓ bifariam in Ε, utraque igitur ipsarum ΒΕ, ΕΓ circumferentiarum quintadecima erit ΑΒΓΔ circuli. Si igitur jungentes ipsas ΒΕ, ΕΓ rectas, æquales ipsis in continuum rectas aptemus in ΑΒΓΔ circulo, erit in ipso inscriptum quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum. Quod oportebat facere.

Inscrivons dans le cercle ΑΒΓΔ le côté ΑΓ d'un triangle équilatéral inscrit, et le côté ΑΒ d'un pentagone équilatéral. Puisque la circonférence entière ΑΒΓΔ doit être partagée en quinze parties égales, l'arc ΑΒΓ qui est la troisième partie de la circonférence, en contiendra cinq, et l'arc ΑΒ qui est le cinquième de la circonférence, en contiendra trois; donc l'arc restant ΒΓ en contiendra deux. Partageons l'arc restant ΒΓ en deux parties égales au point Ε (30. 3), chacun des arcs ΒΕ, ΕΓ sera la quinzième partie de la circonférence du cercle ΑΒΓΔ. Donc, si ayant joint les droites ΒΕ, ΕΓ, nous adaptons dans le cercle ΑΒΓΔ, à la suite les unes des autres, des droites égales à ces droites (1. 4), on aura inscrit dans ce cercle un quindecagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.

## 234 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, ἴαν διὰ τῶν κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἰφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαϊδεκάγωνον ἰσόπλιυρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἐτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημίνοις<sup>4</sup>, καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαϊδεκάγωνον, ὃ ἴστιν ἰσόπλιυρόν τε καὶ ἰσογώνιον<sup>5</sup>, κύκλον ἐγγράφομεν τε καὶ περιγράφομεν<sup>6</sup>.

Congruenter autem eis quæ de pentagono, si per circuli divisiones contingentes circulum ducamus, circumscribetur circa circulum quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum. Et insuper congruenter eis de pentagono dictis, et in dato quindecagono circulum inscribemus et circumscribemus.

Conformément à ce qui a été dit pour le pentagone, si par les points de divisions d'un cercle, on mène des tangentes à ce cercle, on circonscrira à ce cercle un quindécagone équilatéral et équiangle. De plus, conformément à ce qui a été dit pour les démonstrations du pentagone, nous inscrirons et nous circonscrirons une circonférence de cercle à un quindécagone équilatéral et équiangle donné.

FIN DU QUATRIÈME LIVRE.

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R Q U I N T U S.

---

#### ΟΡΟΙ.

α. Μέρος ἐστὶ μέγθος μείζονος, τὸ ἕλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρηῖ τὸ μείζον.

β. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μείζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρηῖται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πληκίότητα πρὸς ἄλληλα ποιά σέσεις'.

#### DEFINITIONES.

1. Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando mensurat majorem.

2. Multiplex autem major minoris, quando mensuratur a minore.

3. Ratio est duorum magnitudinum homogenearum secundum quantitatem inter se quaedam habitudo.

## LIVRE CINQUIEME

# DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

#### DÉFINITIONS.

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.

236 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δ'. Αναλογία δὲ, ἢ τῶν λόγων ταυτότης<sup>2</sup>.

ε'. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἂ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

ς'. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δευτέρον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων, καθ' ὅποιον οὖν πολλαπλασιασμον, ἑκατέρον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπέρχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ἐλλείπη ληφθέντα κατάλληλα<sup>3</sup>.

ζ'. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη<sup>4</sup>, ἀνάλογον καλεῖσθω.

η'. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκεις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τό τε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δευτέρον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ πρὸς τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

θ'. Αναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη<sup>5</sup> ἐστίν.

4. Proportio autem, rationum identitas.

5. Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese superare.

6. In eâdem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primæ et tertiæ æque multiples, secundæ et quartæ æque multiples, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt comparatæ inter se.

7. Ipsæ autem eandem rationem habentes magnitudines proportionales vocentur.

8. Quando vero æque multiplicium, primæ quidem multiplex superat secundæ multiplicem, tertiæ vero multiplex non superat quartæ multiplicem, tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicitur, quam tertia ad quartam.

9. Proportio autem in tribus terminis minima est.

4. Une proportion est une identité de raisons.

5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.

8. Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

9. Une proportion a au moins trois termes.

ί. Όταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ἦ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ πρὸς τὸ δεύτερον.

ιά. Όταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ἦ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ πρὸς τὸ τρίτον· καὶ αὖτις ἕξ ὁμοίως ὡς ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχη.

ιβ'. Ομόλογα μεγέθη λέγεται<sup>δ</sup>, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἐπόμενα τοῖς ἐπομένοις.

ιγ'. Εναλλάξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἐπομένου πρὸς τὸ ἐπόμενον.

ιδ'. Ανάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἐπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἐπόμενον.

ιε'. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἐπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.

ισ'. Διάφρασις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ὑπέριξις τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.

10. Si autem tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplam rationem habere dicitur, ejus quam ad secundam.

11. Si quatuor magnitudines proportionales sint, prima ad quartam triplam rationem habere dicitur ejus quam ad secundam; et semper deinceps similiter quamdiu proportio exstiterit.

12. Homologæ magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

13. Alterna ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, et consequentis ad consequentem.

14. Inversa ratio est sumptio consequentis ut antecedentis, ad antecedentem ut ad consequentem.

15. Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente tanquam unius ad ipsam consequentem.

16. Divisio rationis est sumptio excessus, quo superat antecedens consequentem, ad ipsam consequentem.

10. Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle qu'elle a avec la seconde.

11. Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la quatrième une raison triple de celle qu'elle a avec la seconde, et ainsi de suite, tant que la proportion subsiste.

12. Les antécédents sont dits des grandeurs homologues aux antécédents; et les conséquents, des grandeurs homologues aux conséquents.

13. La raison est alterne, quand on compare l'antécédent à l'antécédent, et le conséquent au conséquent.

14. La raison est inverse, quand on compare le conséquent comme antécédent à l'antécédent comme conséquent.

15. Il y a composition de raison, quand on compare au conséquent l'antécédent avec le conséquent.

16. Il y a division de raison, quand on compare au conséquent l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

ιζ. Αναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγούμενου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἢ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου.

ιη. Δίιστου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων<sup>10</sup> τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ἢ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἴσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἴσχατον. Ἡ ἄλλως. Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

ιβ. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ἢ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἐπόμενον, ἢ δὲ καὶ ὡς ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι οὕτως ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι<sup>11</sup>.

κ'. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν, τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων<sup>12</sup> τὸ πλῆθος, γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἐπόμενον πρὸς ἄλλο

17. *Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens consequentem.*

18. *Ex æqualitate ratio est, pluribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis æqualibus numero, binis sumptis et in eadem ratione, quando est ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam. Vel aliter. Sumptio extremarum per subtractionem mediarum.*

19. *Ordinata proportio est, quando est ut antecedens ad consequentem ita antecedens ad consequentem; est autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.*

20. *Perturbata autem proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis æqualibus numero, fit, ut quidem in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem; ut vero in primis magnitudinibus*

17. Il y a conversion de raison, quand on compare l'antécédent à l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

17. Il y a raison par égalité, lorsqu'ayant plusieurs grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, la première grandeur des premières est à la dernière, comme la première grandeur des secondes est à la dernière; ou bien, lorsque l'on compare les grandeurs extrêmes, les moyennes étant retranchées.

19. La proportion est ordonnée, lorsque l'antécédent est au conséquent comme l'antécédent est au conséquent, et que le conséquent est à un autre conséquent quelconque, comme le conséquent est à un autre conséquent quelconque.

20. La proportion est troublée, lorsqu'ayant trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, il arrive que dans les premières grandeurs l'antécédent est au conséquent, comme dans les secondes grandeurs l'antécédent est au conséquent, et que dans les premières gran-

τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεισιν<sup>13</sup> ἄλλό τι πρὸς ἡγούμενον.

consequens ad aliam quampiam, ita in secundis magnitudinibus alia quæpiam ad antecedentem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Εάν ἢ ὅποσαοῦν μεγέθη ὅποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον ὅσαπλάσιόν ἐστίν ἐν τῶν μεγεθῶν ἐνός, τοσαυταπλάσια ἴσται καὶ τὰ παντὰ τῶν πάντων.

Ἐστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ AB, ΓΔ ὅποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν E, Z ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι ὅσαπλάσιόν ἐστὶ τὸ AB τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἴσται καὶ τὰ AB, ΓΔ τῶν E, Z.

PROPOSITIO I.

Si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium multitudine, singulæ singularum æque multiples, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiples erunt et omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB, ΓΔ quotcunque magnitudinum E, Z æqualium multitudine, singulæ singularum æque multiples; dico quam multiplex est AB ipsius E, tam multiples esse et AB, ΓΔ ipsarum E, Z.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ E, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Z· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ

Quoniam enim æque est multiplex AB ipsius E ac ΓΔ ipsius Z; quot igitur sunt in AB magni-

deurs le conséquent est à une grandeur quelconque, comme dans les secondes grandeurs une grandeur quelconque est à un antécédent.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, égales en nombre à d'autres grandeurs, chacune des premières étant le même équimultiple de chacune des secondes, une des premières grandeurs sera le même multiple d'une des secondes que la somme des premières l'est de la somme des secondes.

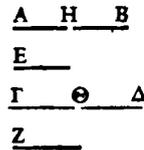
Soient AB, ΓΔ (245), tant de grandeurs qu'on voudra égales en nombre à d'autres grandeurs E, Z, chacune étant le même multiple de chacune; je dis que AB est le même multiple de E, que la somme de AB et de ΓΔ l'est de la somme de E et de Z.

Puisque AB est multiple de E, que ΓΔ l'est de Z, il y aura dans AB autant

240 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB μεγέθη<sup>2</sup> ἴσα τῷ E, τσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Z. Διηρήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ E μεγέθη ἴσα τὰ AH, HB, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Z ἴσα τὰ ΓΘ, ΘΔ· ἴσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH, HB τῷ πλῆθει τῶν ΓΘ, ΘΔ<sup>2</sup>. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἴστί το μὲν AH τῷ E, καὶ τὸ δὲ ΓΘ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ AH, ΓΘ τοῖς E, Z. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ

tudines æquales ipsi E, tot sunt et in ΓΔ æquales ipsi Z. Dividatur AB quidem in magnitudines AH, HB æquales ipsi E, ipsa vero ΓΔ in ipsas ΓΘ, ΘΔ æquales ipsi Z; erit utique æqualis multitudo ipsarum AH, HB multitudini ipsarum ΓΘ, ΘΔ. Et quoniam æqualis est AH quidem ipsi E, ipsa vero ΓΘ ipsi Z; æqualis igitur et AH, ΓΘ



ἴσον ἴστί τὸ HB τῷ E, καὶ τὸ ΘΔ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z<sup>3</sup>. ὅσα ἄρα ἴσθιν ἐν τῷ AB ἴσα τῷ E, τσαῦτα καὶ ἐν τοῖς AB, ΓΔ ἴσα τοῖς E, Z· ὅσα πλάσιον ἄρα ἴστί τὸ AB τοῦ E, τσαυταπλάσια ἴσται καὶ τὰ AB, ΓΔ τῶν E, Z. Εὰν ἄρα ἦ ὀποσαοῦν, καὶ τὰ ἰζῆς.

ipsis E, Z; propter eadem utique æqualis est HB ipsi E, et ΘΔ ipsi Z; æquales igitur et HB, ΘΔ ipsis E, Z; quot igitur sunt in AB æquales ipsi E, tot sunt et in AB, ΓΔ æquales ipsis E, Z; quam multiplex igitur est AB ipsius E, tam multiplices erunt et AB, ΓΔ ipsarum E, Z. Si igitur quocunque etc.

de grandeurs égales à E, qu'il y a de grandeurs égales à Z. Partageons AB en grandeurs égales à E, et que ces grandeurs soient AH, HB; partageons aussi ΓΔ en grandeurs égales à Z, et que ces grandeurs soient ΓΘ, ΘΔ. Le nombre des parties ΓΘ, ΘΔ sera égal au nombre des parties AH, HB. Mais AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z; donc la somme de AH et de ΓΘ sera égale à la somme de E et de Z. Par la même raison, HB est égal à E, et ΘΔ à Z; donc la somme de HB et de ΘΔ est égale à la somme de E et de Z. Il y a donc dans AB autant de grandeurs égales à E, qu'il y a dans la somme de AB et de ΓΔ de grandeurs égales à la somme de E et de Z. Donc AB est le même multiple de E que la somme de AB et ΓΔ l'est de la somme de E et de Z. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

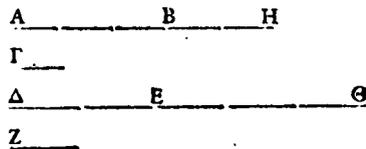
PROPOSITIO II.

Εάν πρῶτον δευτέρου ἰσάνεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ἢ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάνεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάνεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ AB δευτέρου τοῦ Γ ἰσάνεις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔE τετάρτου τοῦ

Si prima secundæ æque sit multiplex ac tertia quartæ, sit autem et quinta secundæ æque multiplex ac sexta quartæ; et simul sumptæ prima et quinta secundæ æque erunt multiplices ac tertia et sexta quartæ.

Prima enim AB secundæ Γ æque sit multiplex ac tertia ΔE quartæ Z, sit autem et quinta BH



Z, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ BH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάνεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ EΘ τετάρτου τοῦ Z· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάνεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Z.

secundæ Γ æque multiplex ac sexta EΘ quartæ Z; dico et simul sumptas primam et quintam AH secundæ Γ æque fore multiplices ac tertiam et sextam ΔΘ ipsius Z.

PROPOSITION II.

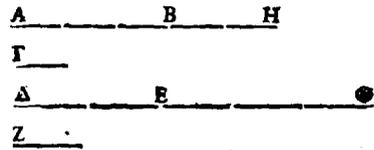
Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si la cinquième est le même multiple de la seconde que la sixième l'est de la quatrième, la somme de la première et de la cinquième sera le même multiple de la seconde que la somme de la troisième et de la sixième l'est de la quatrième.

Que la première AB soit le même multiple de la seconde Γ que la troisième ΔE l'est de la quatrième z, et que la cinquième BH soit le même multiple de la seconde Γ que la sixième EΘ l'est de la quatrième z; je dis que la somme de la première et de la cinquième AH sera le même multiple de la seconde Γ que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ l'est de la quatrième z.

242 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθει ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ BH ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ AH ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ

Quoniam enim æque est multiplex AB ipsius Γ ac ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur sunt in AB magnitudines æquales ipsi Γ, tot et in ΔΕ æquales ipsi Ζ. Propter eadem utique et quot sunt in BH æquales ipsi Γ, tot et in ΕΘ æquales ipsi Ζ; quot igitur sunt in totâ AH æquales ipsi Γ, tot et in



ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα πλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AH τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἴσται καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ· καὶ συντεθὲν ἄρα<sup>2</sup> πρῶτον καὶ πέμπτου τὸ AH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἴσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτου καὶ ἕκτου τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

totâ ΔΘ æquales ipsi Ζ; quæ multiplex igitur est AH ipsius Γ, tam multiplex erit et ΔΘ ipsius Ζ; et simul sumptæ igitur prima et quinta AH secundæ Γ æque erunt multiplices ac tertia et sexta ΔΘ quartæ Ζ. Si igitur prima, etc.

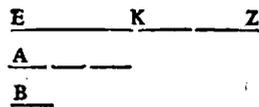
Puisque AB est le même multiple de Γ que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΔΕ de grandeurs égales à Ζ. Par la même raison, il y a dans BH autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΕΘ de grandeurs égales à Ζ. Il y a donc dans la grandeur entière AH autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans la grandeur entière ΔΘ de grandeurs égales à Ζ. Donc AH est le même multiple de Γ que ΔΘ l'est de Ζ; donc la somme de la première et de la cinquième AH sera le même multiple de la seconde Γ que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ l'est de la quatrième Ζ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

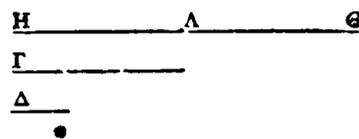
Εάν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληθῆ δὲ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ δίσου τῶν ληθόντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήθῃ τῶν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι ἰσάκεις ἔστι πολλαπλάσιον<sup>1</sup> τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.



Si prima secundæ æque sit multiplex ac tertia quartæ, sumantur autem æque multiples primæ et tertiæ; et ex æquo sumptarum utraque utriusque æque erit multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Prima enim Α secundæ Β æque sit multiplex ac tertia Γ quartæ Δ, et sumantur ipsarum Α, Γ æque multiples ΕΖ, ΗΘ; dico æque esse multiplicem ΕΖ ipsius Β ac ΗΘ ipsius Δ.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἔστι πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ· ὅσα ἄρα ἔστιν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα<sup>2</sup> καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. Διηρήσθω τὸ μὲν<sup>3</sup> ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη

Quoniam enim æque est multiplex ΕΖ ipsius Α ac ΗΘ ipsius Γ; quot igitur sunt in ΕΖ æquales ipsi Α, tot et in ΗΘ æquales ipsi Γ. Dividatur ΕΖ quidem in magnitudines ipsi Α æqua-

PROPOSITION III.

Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si l'on prend des équimultiples de la première et de la troisième, le multiple de la première sera, par égalité, le même multiple de la seconde que le multiple de la troisième l'est de la quatrième.

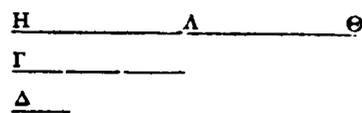
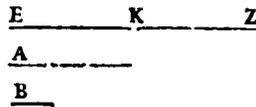
Que la première Α soit le même multiple de la seconde Β que la troisième Γ l'est de la quatrième Δ; prenons les équimultiples ΕΖ, ΗΘ de Α et de Γ; je dis que ΕΖ est le même multiple de Β que ΗΘ l'est de Δ.

Puisque ΕΖ est le même multiple de Α que ΗΘ l'est de Γ, il y a dans ΕΖ autant de grandeurs égales à Α qu'il y a dans ΗΘ de grandeurs égales à Γ. Di-

244 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΛΘ· ἴσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλῆθει τῶν ΗΛ, ΛΘ. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ· ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ.

les ΕΚ, ΚΖ, ipsa vero ΗΘ in magnitudines ipsi Γ æquales ΗΛ, ΛΘ; erit utique æqualis multitudo ipsarum ΕΚ, ΚΖ multitudini ipsarum ΗΛ, ΛΘ. Et quoniam æque est multiplex Α ipsius Β ac Γ ipsius Δ; æqualis autem ΒΚ quidem ipsi Α, ipsa vero ΗΛ ipsi Γ; æque igitur est multiplex ΕΚ ipsius Β ac ΗΛ ipsius Δ. Propter eadem utique æque est multiplex ΚΖ ipsius Β ac ΛΘ ipsius Δ. Quoniam



Ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ· ἐστὶ δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ· καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

igitur prima ΕΚ secundæ Β æque est multiplex ac tertia ΗΛ quartæ Δ; est autem et quinta ΚΖ secundæ Β æque multiplex ac sexta ΛΘ quartæ Δ; et simul sumptæ igitur prima et quinta ΕΖ secundæ Β æque sunt multiplices ac tertia et sexta ΗΘ quartæ Δ. Si igitur prima, etc.

visons ΕΖ en grandeurs égales à Α, et que ces grandeurs soient ΕΚ, ΚΖ; divisons ΗΘ en grandeurs égales à Γ, et que ces grandeurs soient ΗΛ, ΛΘ. Le nombre des parties ΕΚ, ΚΖ sera égal au nombre des parties ΗΛ, ΛΘ. Et puisque Α est le même multiple de Β que Γ l'est de Δ, que ΕΚ est égal à Α, et ΗΛ égal à Γ, la grandeur ΕΚ est le même multiple de Β que ΗΛ l'est de Δ. Par la même raison, ΚΖ est le même multiple de Β que ΛΘ l'est de Δ. Et puisque la première ΕΚ est le même multiple de la seconde Β que la troisième ΗΛ l'est de la quatrième Δ, et que la cinquième ΚΖ est le même multiple de la seconde Β que la sixième ΛΘ l'est de la quatrième Δ, la somme de la première et de la cinquième, qui est ΕΖ, sera le même multiple de la seconde Β, que la somme de la troisième et de la sixième, qui est ΗΘ, l'est de la quatrième Δ (2. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

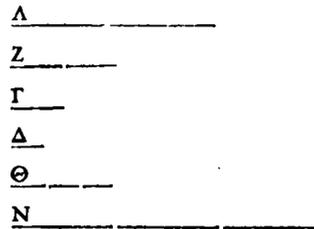
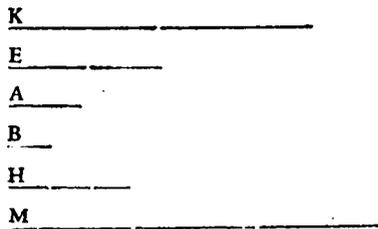
PROPOSITIO IV.

Εάν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὅποιον οὖν πολλαπλασιασμὸν, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ληθθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; et æque multiples primæque et tertiæ ad æque multiples secundæ et quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem inter se comparatæ.

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, et su-



τὸ Δ, καὶ εἰλήθῃ τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἅ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω ὅτι ἴστιν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Εἰλήθῃ γὰρ πῶν μὲν Ε, Ζ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Η, Θ ἄλλα ἅ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

mantur ipsarum quidem Α, Γ æque multiples Ε, Ζ, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcunque æque multiples Η, Θ; dico esse ut Ε ad Η, ita Ζ ad Θ.

Sumantur enim ipsarum quidem Ε, Ζ æque multiples Κ, Λ, ipsarum vero Η, Θ aliæ utcunque multiples Μ, Ν.

PROPOSITION IV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, des équi-multiples quelconques de la première et de la troisième comparés à des équi-multiples quelconques de la seconde et de la quatrième, auront entre eux la même raison.

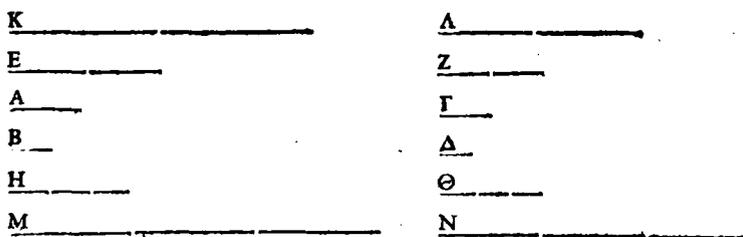
Car que la première A ait avec la seconde B la même raison que Γ avec Δ, prenons des équi-multiples quelconques Ε, Ζ de A et de Γ, et d'autres équi-multiples quelconques Η, Θ de B et de Δ; je dis que Ε est à Η comme Ζ est à Θ.

Prenons des équi-multiples quelconques Κ, Λ de Ε et de Ζ, et d'autres équi-multiples quelconques Μ, Ν de Η et de Θ.

246 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν Ε τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ, καὶ εἴληπται τῶν Ε, Ζ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Κ τοῦ Α καὶ τὸ Λ τοῦ Γ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Μ τοῦ Β καὶ τὸ Ν τοῦ Δ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν

Et quoniam æque est multiplex E quidem ipsius A, ipsa vero Z ipsius Γ, et sumptæ sunt ipsarum E, Z æque multiples K, Λ; æque igitur est multiplex K ipsius A ac Λ ipsius Γ. Propter eadem utique æque est multiplex M ipsius B ac N ipsius Δ. Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem A, Γ æque multiples K, Λ, ipsarum vero B, Δ aliæ utique



δὲ Β, Δ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερίχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερίχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν Κ, Λ τῶν Ε, Ζ ἰσάνεις πολλαπλάσια<sup>3</sup>, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Η, Θ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ. Εὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

que æque multiples M, N; si igitur superat K ipsam M, superat et Λ ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt K, Λ quidem ipsarum E, Z æque multiples, ipsæ vero M, N ipsarum H, Θ aliæ utique multiples; est igitur ut E ad H, ita Z ad Θ. Si igitur prima, etc.

Puisque E est le même multiple de A que Z l'est de Γ, et que l'on a pris des équi-multiples K, Λ de E et de Z, la grandeur K est le même multiple de A que Λ l'est de Γ (3. 5). Par la même raison, M est le même multiple de B que N l'est de Δ. Et puisque A est à B comme Γ est à Δ, que l'on a pris des équi-multiples quelconques K, Λ de A et de Γ, et d'autres équi-multiples quelconques M, N de B et de Δ, si K surpasse M, Λ surpasse N; si K est égal à M, Λ est égal à N, et si K est plus petit que M, Λ est plus petit que N (déf. 5. \*). Mais K, Λ sont des équi-multiples quelconques de E et de Z, et M, N d'autres équi-multiples quelconques de H et de Θ; donc E est à H comme Z est à Θ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Ἐπει οὖν εἰδείχθη, ὅτι, εἰ ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Κ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ν τοῦ Λ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· καὶ διὰ τοῦτο ἴσται καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Ζ. Ἐκ δὲ τοῦτου φανερόν, ὅτι ἑὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ἦ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἴσται.

Quoniam igitur ostensum est, si superat  $K$  ipsam  $M$ , superare et  $\Lambda$  ipsam  $N$ ; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; manifestum est et si  $M$  superat  $K$ , superare et  $N$  ipsam  $\Lambda$ ; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; et propter hoc erit et ut  $H$  est ad  $E$ , ita  $\Theta$  ad  $Z$ . Ex hoc utique manifestum est, si quatuor magnitudines proportionales sunt, et inversione proportionales fore.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

PROPOSITIO V.

Ἐὰν μέγθος μεγέθους ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρῆθαι ἀφαιρηθῆντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκεις ἴσται πολλαπλάσιον, ὅσα πλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Si magnitudo magnitudinis æque sit multiplex ac ablata ablatæ, et reliqua reliquæ æque erit multiplex ac multiplex est tota totius.

COROLLAIRE.

Puisqu'il a été démontré que si  $K$  surpasse  $M$ ,  $\Lambda$  surpasse  $N$ ; que si  $K$  est égal à  $M$ ,  $\Lambda$  est égal à  $N$ , et que si  $K$  est plus petit que  $M$ ,  $\Lambda$  est plus petit que  $N$ , il est évident que si  $M$  surpasse  $K$ ,  $N$  surpasse  $\Lambda$ ; que si  $M$  est égal à  $K$ ,  $N$  est égal à  $\Lambda$ , et que si  $M$  est plus petit que  $K$ ,  $N$  est plus petit que  $\Lambda$ ; par conséquent  $H$  est à  $E$  comme  $\Theta$  est à  $Z$ . De là il est évident que si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par inversion.

PROPOSITION V.

Si une grandeur est le même multiple d'une grandeur que la grandeur retranchée l'est de la grandeur retranchée, le reste sera le même multiple du reste que le tout l'est du tout.

248 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Μέγεθος γάρ τὸ AB μέγεθος τοῦ ΓΔ ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρέθην τὸ ΑΕ ἀφαιρέθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, ἰσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

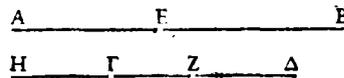
Ἐσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γεγονότω καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ· καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ· κεῖται δὲ ἰσάκεις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλά-

Magnitudo enim AB magnitudinis ΓΔ æque sit multiplex ac ablata ΑΕ ablatae ΓΖ; dico et reliquam EB reliquæ ΖΔ æque fore multiplicem ac multiplex est tota AB totius ΓΔ.

Quam multiple enim est ΑΕ ipsius ΓΖ, tam multiplex fiat et ΕΒ ipsius ΓΗ.

Et quoniam æque multiplex est ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΕΒ ipsius ΗΓ; æque igitur est multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΑΒ ipsius ΗΖ; ponitur autem æque multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΑΒ ipsius ΓΔ; æque igitur est multiplex ΑΒ utriusque



σιον τὸ ΑΒ ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ, κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῶ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τῷ ΗΓ τὸ ΔΖ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἰσάκεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλα-

ipsarum ΗΖ, ΓΔ; æqualis igitur ΗΖ ipsi ΓΔ. Communis auferatur ΓΖ; reliqua igitur ΗΓ reliquæ ΔΖ est æqualis. Et quoniam æque est multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΕΒ ipsius ΗΓ, æqualis autem ipsi ΗΓ ipsa ΔΖ; æque igitur est multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΕΒ ipsius ΖΔ. Æque autem ponitur multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΑΒ ipsius ΓΔ; æque igitur est multiplex ΕΒ ipsius

Que la grandeur AB soit le même multiple de la grandeur ΓΔ que la grandeur retranchée ΑΕ l'est de la grandeur retranchée ΓΖ; je dis que la grandeur restante EB sera le même multiple de la grandeur restante ΖΔ que la grandeur entière AB l'est de la grandeur entière ΓΔ.

Que ΑΕ soit le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΓΗ.

Puisque ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΗΓ, ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΑΒ l'est de ΗΖ (1. 5). Mais l'on a supposé que ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΑΒ l'est de ΓΔ; donc ΑΒ est le même multiple de ΗΖ et de ΓΔ; donc ΗΖ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΖ; le reste ΗΓ sera égal au reste ΔΖ. Et puisque ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΗΓ, et que ΖΔ est égal à ΗΓ, ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΖΔ. Mais on a supposé que ΑΕ est le même multiple de ΓΖ

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 249

πλάσιον τὸ EB τοῦ ΖΔ καὶ τὸ AB τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ EB λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκεις ἴσται<sup>2</sup> πολλαπλάσιον, ὅσα πλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ AB ὅλου τοῦ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα μίγεθος, καὶ τὰ ἐξῆς.

ZΔ ac AB ipsius ΓΔ; et reliqua igitur EB reliquæ ZΔ æque erit multiplex ac multiplex est tota AB totius ΓΔ. Si igitur magitudo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

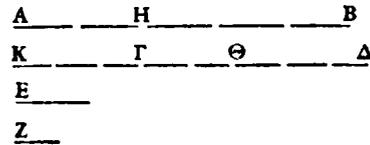
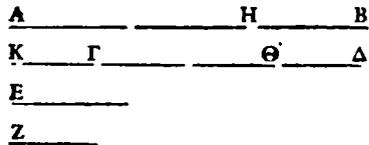
PROPOSITIO VI.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρέντα τίνα τῶν αὐτῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἢτοι ἴσα ἴσταιν, ἢ ἰσάκεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque sint multiplices, et ablatae quædam earumdem æque sint multiplices; et reliquæ iisdem vel æquales sunt, vel æque earum multiplices.

Ἐὰν μίγεθρον τὰ AB, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν E, Z ἰσάκεις ἴστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρι-

Duæ enim magnitudines AB, ΓΔ duarum magnitudinum E, Z æque sint multiplices, et



θέντα τὰ AH, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν E, Z ἰσάκεις ἴστω πολλαπλάσια· λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z ἢτοι ἴσα ἴσταιν, ἢ ἰσάκεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

ablatae AH, ΓΘ earumdem E, Z æque sint multiplices; dico et reliquas HB, ΘΔ ipsis E, Z vel æquales esse, vel æque earum multiplices.

que AB l'est de ΓΔ; donc EB est le même multiple de ZΔ que AB l'est de ΓΔ; donc la grandeur restante EB sera le même multiple de la grandeur restante ZΔ que la grandeur entière AB l'est de la grandeur entière ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

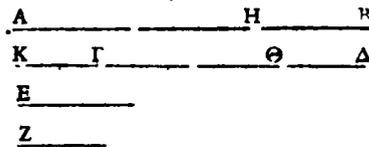
Si deux grandeurs sont des équi-multiples de deux grandeurs, et si certaines grandeurs retranchées sont des équi-multiples des dernières, les grandeurs restantes seront égales à ces dernières, ou des équi-multiples de ces dernières.

Que les deux grandeurs AB, ΓΔ soient des équi-multiples des deux grandeurs E, Z, et que les grandeurs retranchées AH, ΓΘ soient des équi-multiples de E et de Z; je dis que les grandeurs restantes HB, ΘΔ sont égales aux grandeurs E, Z, ou des équi-multiples de ces grandeurs.

250 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω γάρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστί. Κείσθω γάρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΚΓ τῷ Ζ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. Ἰσάκεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ

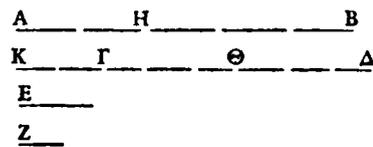


τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. Ἐπεὶ οὖν ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τῆς ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τῷ Ζ τὸ ΚΓ<sup>3</sup> ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἴσον ἐστίν<sup>4</sup>. Ὡστε εἰ<sup>5</sup> τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστί, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἐσται τῷ Ζ.

Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ πολλαπλάσιον ἢ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον ἐσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ. Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Sit enim primum ΗΒ ipsi Ε æqualis; dico et ΘΔ ipsi Ζ æqualem esse. Ponatur enim ipsi Ζ æqualis ΓΚ.

Et quoniam æque est multiplex ΑΗ ipsius Ε ac ΓΘ ipsius Ζ, æqualis autem ΗΒ quidem ipsi Ε, ipsa vero ΚΓ ipsi Ζ; æque igitur est multiplex ΑΒ ipsius Ε ac ΚΘ ipsius Ζ. Æque autem ponitur multiplex ΑΒ ipsius Ε ac ΓΔ ip-



sius Ζ; æque igitur est multiplex ΚΘ ipsius Ζ ac ΓΔ ipsius Ζ. Et quoniam utraque ipsarum ΚΘ, ΓΔ ipsius Ζ æque est multiplex; æqualis igitur est ΚΘ ipsi ΓΔ. Communis auferatur ΓΘ; reliqua igitur ΚΓ reliquæ ΘΔ æqualis est. Sed ipsi Ζ ipsa ΚΓ est æqualis; et ΘΔ igitur ipsi Ζ æqualis est. Quare si ΗΒ ipsi Ε æqualis est, et ΘΔ æqualis erit ipsi Ζ.

Similiter utique ostendemus et si multiplex est ΗΒ ipsius Ε, multiplicem fore et magnitudinem ΘΔ ipsius Ζ. Si igitur duæ, etc.

Premièrement, que ΗΒ soit égal à Ε; je dis que ΘΔ est égal à Ζ. Faisons ΓΚ égal à Ζ.

Puisque ΑΗ est le même multiple de Ε que ΓΘ l'est de Ζ, que ΗΒ est égal à Ε, et ΚΓ égal à Ζ, ΑΒ est le même multiple de Ε que ΚΘ l'est de Ζ (2. 5). Mais on a supposé que ΑΒ est le même multiple de Ε que ΓΔ l'est de Ζ; donc ΚΘ est le même multiple de Ζ que ΓΔ l'est de Ζ. Et puisque les grandeurs ΚΘ, ΓΔ sont chacune le même multiple de Ζ, ΚΘ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΘ; la grandeur restante ΚΓ sera égale à la grandeur restante ΘΔ. Mais ΚΓ est égal à Ζ; donc ΘΔ est égal à Ζ; donc si ΗΒ est égal à Ε, ΘΔ sera égal à Ζ.

Nous démontrerons semblablement, que si ΗΒ est un multiple de Ε, la grandeur ΘΔ sera le même multiple de Ζ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ

PROPOSITIO VII.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἐστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δὲ τι ὁ ἔτυχε μέγεθος τὸ Γ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν<sup>2</sup> Α, Β ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο ὁ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ Ζ.

Æquales ad eandem eandem habent rationem, et eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines Α, Β, alia autem quælibet magnitudo Γ; dico utramque ipsarum Α, Β ad Γ habere eandem rationem, et Γ ad utramque ipsarum Α, Β.

Sumantur enim ipsarum Α, Β quidem æque multiples Δ, Ε, ipsius vero Γ alia utcunque multiplex Ζ.

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_

Δ \_\_\_\_\_  
Ε \_\_\_\_\_  
Ζ \_\_\_\_\_

Ἐπι οὖν ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε. Ἄλλο δὲ ὁ ἔτυχε τὸ Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον<sup>3</sup>· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον·

Quoniam igitur æque est multiplex Δ ipsius Α ac Ε ipsius Β, æqualis autem Α ipsi Β; æqualis igitur et Δ ipsi Ε. Alia vero Ζ ipsius Γ utcunque multiplex; si igitur superat Δ ipsam Ζ, superat et Ε ipsam Ζ; et si æqualis, æqua-

PROPOSITION VII.

Des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur, et une même grandeur a la même raison avec des grandeurs égales.

Soient les grandeurs égales Α, Β, et Γ une autre grandeur quelconque; je dis que chacune des grandeurs Α, Β a la même raison avec Γ, et que Γ a la même raison avec chacune des grandeurs Α, Β.

Prenons des équimultiples quelconques Δ, Ε de Α et de Β, et un autre multiple quelconque Ζ de Γ.

Puisque Δ est le même multiple de Α que Ε l'est de Β, et que Α est égal à Β, Δ est égal à Ε. Mais Ζ est un autre multiple quelconque de Γ; donc, si Δ surpasse Ζ, Ε surpasse Ζ; si Δ est égal à Ζ, Ε est égal à Ζ; et si Δ est plus petit

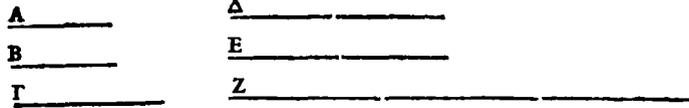
252 LE CINQUIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

καὶ εἰ ἕλαττον, ἕλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Δ, Ε τῶν Α, Β ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον ἔστιν ἢ ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ.

Λέγω δὴ<sup>5</sup> ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἐκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

lis; et si minor, minor. Et sunt quidem Δ, Ε ipsarum Α, Β æque multiples, ipsa vero Ζ ipsius Γ alia utcunque multiplex est; est igitur ut Α ad Γ, ita Β ad Γ.

Dico autem et Γ ad utramque ipsarum Α, Β eandem habere rationem.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ<sup>6</sup> δειξομιν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ Ε· ἄλλο δὲ τι τὸ Ζ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ζ τοῦ Δ, ὑπερέχει τὸ Ζ καὶ τοῦ Ε· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἕλαττον, ἕλαττον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ, Ε τῶν Α, Β ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Τὰ ἴσα ἄρα, καὶ τὰ ἰξῆς<sup>8</sup>.

Iisdem enim constructis, similiter utique ostendemus æqualem esse Δ ipsi Ε; alia vero quædam Ζ; si igitur superat Ζ ipsam Δ, superat Ζ et ipsam Ε; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et est Ζ quidem ipsius Γ multiplex; ipsæ autem Δ, Ε ipsarum Α, Β aliæ utcunque æque multiples; est igitur ut Γ ad Α, ita Γ ad Β. Æquales igitur, etc.

que Ζ, Ε est plus petit que Ζ. Mais Δ, Ε sont des équimultiples quelconques de Α et de Β, et Ζ est un autre multiple quelconque de Γ; donc Α est à Γ comme Β est à Γ (déf. 6. 5).

Je dis aussi que Γ a la même raison avec chacune des grandeurs Α, Β.

La même construction étant faite, nous démontrerons semblablement que Δ est égal à Ε; mais Ζ est un autre multiple quelconque; donc si Ζ surpasse Δ, Ζ surpasse Ε; si Ζ est égal à Δ, Ζ est égal à Ε, et si Ζ est plus petit que Γ, Ζ est plus petit que Ε. Mais Ζ est un multiple de Γ, et Δ, Ε sont d'autres équimultiples quelconques de Α et de Β; donc Γ est à Α comme Γ est à Β (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

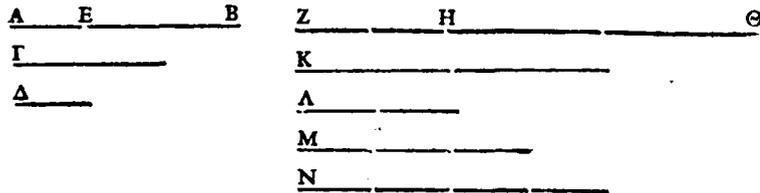
PROPOSITIO VIII.

Ἦν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸ μείζον.

Ἐστω ἀνίσα μεγέθη τὰ AB, Γ, καὶ ἔστω μείζον τὸ AB, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ AB πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸ AB.

Inæqualium magnitudinum, major ad eandem majorem rationem habet quam minor; et eadem ad minorem majorem rationem habet quam ad majorem.

Sint inæquales magnitudines AB, Γ, et sit major AB, alia vero utcunque Δ; dico AB ad Δ majorem rationem habere quam Γ ad Δ, et Δ ad Γ majorem rationem habere quam ad AB.



Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἔστι τὸ AB τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ BE, τὸ δὲ ἔλασσον τῶν AE, EB πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὶ τοῦ Δ μείζον. Ἐστω πρότερον τὸ AE ἔλαττον τοῦ EB, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ AE, καὶ ἔστω<sup>2</sup> αὐτοῦ πολλαπλάσιον

Quoniam enim major est AB ipsâ Γ, ponatur ipsi Γ æqualis BE, minor utique ipsarum AE, EB multiplicata, erit aliquando ipsâ Δ major. Sit primum AE minor ipsâ EB, et multiplicetur AE, et sit ipsius multiplex ZH major

PROPOSITION VIII.

Deux grandeurs étant inégales, la plus grande a avec une même grandeur une plus grande raison que la plus petite, et une même grandeur a avec la plus petite une plus grande raison qu'avec la plus grande.

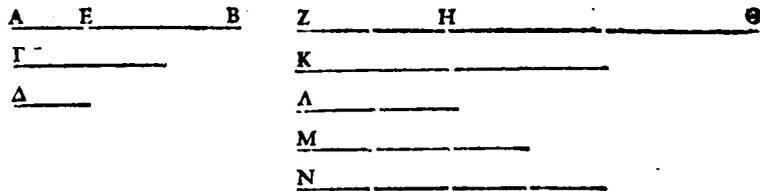
Soient les grandeurs inégales AB, Γ; que AB soit la plus grande, et que Δ soit une autre grandeur quelconque; je dis que AB a avec Δ une plus grande raison que Γ avec Δ, et que Δ a avec Γ une plus grande raison qu'avec AB.

Car puisque AB est plus grand que Γ, faisons BE égal à Γ; la plus petite des grandeurs AE, EB étant multipliée, deviendra enfin plus grande que Δ (déf. 5. 5). Que AE soit d'abord plus petit que EB; multiplions AE, que son multiple

254 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΖΗ μείζον ὄν τοῦ Δ, καὶ ὄσαπλάσιόν ἐστὶ τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ, τοσαυταπλάσιον γιγνόμετω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείον ἕως οὗ<sup>3</sup> τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γίνηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μείζον τοῦ Κ. Εἰλήφθω, καὶ ἕστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μείζον τοῦ Κ.

ipsa Δ, et quam multiplex est ΖΗ ipsius ΑΕ, tam multiplex fiat et ΗΘ quidem ipsius ΕΒ, ipsa vero Κ ipsius Γ; et sumatur ipsius Δ dupla quidem ipsa Δ, tripla vero Μ, et deinceps unâ major quoad sumpta multiplex quidem fiat ipsius Δ, primum vero major ipsâ Κ. Sumatur, et sit Ν quadrupla quidem ipsius Δ, primum vero major ipsâ Κ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὐκ ἐστὶν ἔλαττον. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. ἰσάκεις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ. ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ, καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολ-

Quoniam igitur Κ ipsâ Ν primum est minor, ipsa Κ igitur ipsâ Μ non est minor. Et quoniam æque est multiplex ΖΗ ipsius ΑΕ ac ΗΘ ipsius ΕΒ, æque igitur est multiplex ΖΗ ipsius ΑΕ ac ΖΘ ipsius ΑΒ. Æque autem est multiplex ΖΗ ipsius ΑΕ ac Κ ipsius Γ; æque igitur est multiplex ΖΘ ipsius ΑΒ ac Κ ipsius Γ; ipsæ ΖΘ, Κ igitur ipsarum ΑΒ, Γ æque sunt multiplices. Rursus, quoniam æque est multiplex ΗΘ ipsius

ZH soit plus grand que Δ, et que ΗΘ soit le même multiple de ΕΒ, et Κ le même multiple de Γ, que ΖΗ l'est de ΑΕ. Prenons la grandeur Λ double de Δ, la grandeur Μ triple de Δ, et ainsi de suite, une fois de plus, jusqu'à ce que le multiple de Δ devienne pour la première fois plus grand que Κ. Prenons ce multiple; que Ν, quadruple de Δ, soit plus grand que Κ, pour la première fois.

Puisque Κ est pour la première fois plus petit que Ν, la grandeur Κ n'est pas plus petite que Μ. Mais ΖΗ est le même multiple de ΑΕ que ΗΘ l'est de ΕΒ; donc ΖΗ est le même multiple de ΑΕ que ΖΘ l'est de ΑΒ (1. 5). Mais ΖΗ est le même multiple de ΑΕ que Κ l'est de Γ; donc ΖΘ est le même multiple de ΑΒ que Κ l'est de Γ; donc ΖΘ, Κ sont des équimultiples de ΑΒ et de Γ. De plus, puis-

λαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Κ τῷ ΗΘ. Τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον· οὐδ' ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἔλαττόν ἐστι. Μείζον δὲ τὸ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μείζον ἐστίν. Ἀλλὰ συναμφοτέρα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἴσιν ἴσα· ἐπειδήπερ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστι, συναμφοτέρα δὲ τὰ Δ, Μ τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφοτέρα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ μείζον ἐστίν· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο ὁ ἔτυχε πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δὲ ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

que ΗΘ est le même multiple de ΕΒ que Κ l'est de Γ, et que ΕΒ est égal à Γ, ΗΘ est égal à Κ. Mais Κ n'est pas plus petit que Μ; donc ΗΘ n'est pas plus petit que Μ. Mais ΖΗ est plus grand que Δ; donc la grandeur entière ΖΘ est plus grande que Δ et Μ pris ensemble. Mais Δ, Μ pris ensemble sont égaux à Ν, puisque Μ est triple de Δ, que Δ, Μ pris ensemble sont quadruples de Δ, et que Ν est quadruple de Δ, les grandeurs Μ, Δ prises ensemble sont égales à Ν. Mais ΖΘ est plus grand que Δ, Μ; donc ΖΘ surpasse Ν. Mais Κ ne surpasse pas Ν, et ΖΘ, Κ sont des équimultiples de ΑΒ et de Γ, et Ν est un autre multiple quelconque de Δ; donc ΑΒ a une plus grande raison avec Δ, que Γ avec Δ (déf. 8. 5).

Je dis de plus que Δ a une plus grande raison avec Γ que Δ avec ΑΒ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que Ν surpasse Κ, et que Ν ne surpasse pas ΖΘ. Mais Ν est un multiple de Δ, et ΖΘ, Κ sont d'autres équimultiples quelconques de ΑΒ et de Γ; donc Δ a une plus grande raison avec Γ que Δ avec ΑΒ (déf. 8. 5).

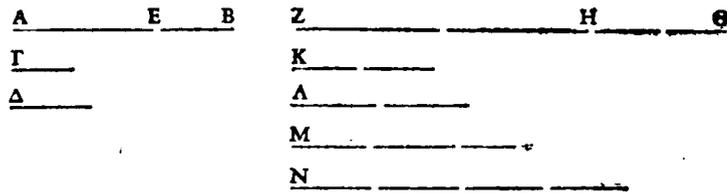
EB ac Κ ipsius Γ, æqualis autem EB ipsius Γ; æqualis igitur et Κ ipsi ΗΘ. Ipsa vero Κ ipsâ Μ non est minor; non igitur ΗΘ ipsâ Μ minor est. Major autem ΖΗ ipsâ Δ; tota igitur ΖΘ utrisque simul Δ, Μ major est. Sed utræque simul Δ, Μ ipsi Ν sunt æquales, quandoquidem Μ ipsius Δ est tripla, utræque autem simul Δ, Μ ipsius Δ sunt quadruplæ, est vero et Ν ipsius Δ quadrupla, utræque simul igitur Μ, Δ ipsi Ν æquales sunt. Sed ΖΘ ipsis Δ, Μ major est; ΖΘ igitur ipsam Μ superat. Κ vero ipsam Ν non superat. Et sunt ipsæ quidem ΖΘ, Κ ipsarum ΑΒ, Γ æque multiples, ipsa vero Ν ipsius Δ alia utcunq̄e multiplex; ΑΒ igitur ad Δ majorem rationem habet quam Γ ad Δ.

Dico autem et Δ ad Γ majorem rationem habere, quam Δ ad ΑΒ.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus, Ν quidem ipsam Κ superare, Ν vero ipsam ΖΘ non superare. Et est Ν quidem ipsius Δ multiplex, et ipsæ ΖΘ, Κ ipsarum ΑΒ, Γ alix utcunq̄e æque multiples; Δ igitur ad Γ majorem rationem habet quam Δ ad ΑΒ.

Αλλά δὴ τὸ ΑΕ τοῦ ΕΒ μείζον ἴστω<sup>7</sup>. τὸ δὲ ἔλαττον τὸ ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἴσται ποτὶ τοῦ Δ μείζον. Πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἴστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μείζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον γηγόνετω καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι τὰ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Καὶ εἰλήθθω ὁμοίως τὸ Ν πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως

Sed et ΑΕ ipsā ΕΒ major sit ; minor ΕΒ utique multiplicata, erit aliquando ipsā Δ major. Multiplicetur, etsit ΗΘ multiplex quidem ipsius ΕΒ, major vero ipsā Δ ; et quam multiplex est ΗΘ ipsius ΕΒ, tam multiplex fiat et ΖΗ quidem ipsius ΑΕ, ipsa vero Κ ipsius Γ. Similiter utique ostendemus ipsas ΖΘ, Κ ipsarum ΑΒ, Γ æque esse multiples. Et sumatur similiter Ν multiplex quidem ipsius Δ, primum vero major ipsā ΖΗ ;



δὲ μείζον τοῦ ΖΗ· ὥστε πάλιν τὸ ΖΗ τοῦ Μ μὴ ἔλαττον εἶναι<sup>8</sup>, μείζον δὲ τὸ ΗΘ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ τουτίστι τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ ΖΗ μείζον ἂν τοῦ ΗΘ, τουτίστι τὸ Κ, τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ὡσαύτως<sup>9</sup> κατακολουθοῦντες τοῖς ἰπάνω πειράνομεν τὴν ἀπόδειξιν. Τῶν ἄρα ἀνίσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

quare rursus ΖΗ ipsā Μ non minor erit, major autem ΗΘ ipsā Δ ; tota igitur ΖΘ ipsas Δ, Μ, hoc est Ν superat, Κ vero ipsam Ν non superat, quandoquidem et ΖΗ quæ major est ipsā ΗΘ, hoc est ipsā Κ, ipsam Ν non superat. Et similiter subsequentes superiora absolvemus demonstrationem. Ergo inæqualium, etc.

Mais que ΑΕ soit plus grand que ΕΒ ; la plus petite grandeur ΕΒ étant multipliée deviendra enfin plus grande que Δ (déf. 5. 5). Qu'elle soit multipliée, et que ΗΘ soit un multiple de ΕΒ plus grand que Δ, et que ΖΗ soit le même multiple de ΑΕ, et Κ de Γ, que ΗΘ l'est de ΕΒ. Nous démontrerons semblablement que ΖΘ, Κ sont des équmultiples de ΑΒ et de Γ. Prenons semblablement un multiple Ν de Δ qui soit plus grand pour la première fois que ΖΗ ; ΖΗ ne sera pas plus petit que Μ. Mais ΗΘ est plus grand que Δ ; donc la grandeur entière ΖΘ surpasse Δ, Μ pris ensemble, c'est-à-dire Ν. Mais Κ ne surpasse pas Ν, parce que ΖΗ étant plus grand que ΗΘ, c'est-à-dire que Κ, ne surpasse pas Ν. Et conformément à ce qui a été dit auparavant, nous achèverons la démonstration. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

PROPOSITIO IX.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν'.

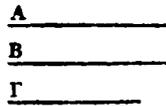
Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B.

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B.

Quæ ad eandem eandem habent rationem, æquales inter se sunt; et ad quas eadem eandem habet rationem, illæ æquales inter se sunt.

Habeat enim utraque ipsarum A, B ad Γ eandem rationem; dico æqualem esse A ipsi B.

Si enim non, non utraque ipsarum A, B ad Γ eandem haberet rationem, habet autem; æqualis igitur est A ipsi B.



Ἐχέτω δὲ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B.

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B. Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

Habeat autem rursus Γ ad utramque A, B eandem rationem; dico æqualem esse A ipsi B.

Si enim non, non Γ ad utramque ipsarum A, B eandem haberet rationem; habet autem; æqualis igitur est A ipsi B. Quæ igitur ad eandem, etc.

PROPOSITION IX.

Les grandeurs qui ont une même raison avec une même grandeur sont égales entr'elles, et les grandeurs avec lesquelles une même grandeur a une même raison sont aussi égales entr'elles.

Que chacune des grandeurs A, B ait avec Γ la même raison; je dis que A est égal à B.

Car, si cela n'était point, chacune des grandeurs A, B n'aurait pas avec Γ la même raison (8. 5); mais elle l'a; donc A est égal à B.

Que Γ ait la même raison avec chacune des grandeurs A, B; je dis que A est égal à B.

Car, si cela n'était point, la grandeur Γ n'aurait pas la même raison avec chacune des grandeurs A, B (8. 5). Mais elle l'a; donc A est égal à B. Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκείνο μείζον ἔστι. Πρὸς δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἑλαττόν ἔστιν.

Ἐχέτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω ὅτι μείζον ἔστι τὸ Α τοῦ Β.

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσον ἔστι τὸ Α τῷ Β, ἢ ἑλάσσον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Α τῷ Β, ἐλάττερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἔστι τὸ Α τῷ Β. Οὐδὲ μὲν ἑλάσσον ἔστι τὸ Α τοῦ Β, τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ τὸν ἐλάσσονα εἶχε λόγον ἤπερ

Ipsarum ad eandem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est; ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est.

Habeat enim A ad Γ majorem rationem, quam B ad Γ; dico majorem esse A ipsâ B.

Si enim non, vel æqualis est A ipsi B, vel minor. Æqualis autem non est A ipsi B, utraque enim ipsarum A, B ad Γ eandem haberet rationem. Non habet vero; non igitur æqualis est A ipsi B. Neque tamen minor est A ipsâ B, nam A ad Γ minorem haberet rationem quam

## PROPOSITION X.

Des grandeurs ayant une raison avec une même grandeur, celle qui a une plus grande raison est la plus grande, et celle avec laquelle cette même grandeur a une plus grande raison est la plus petite.

Que A ait avec Γ une plus grande raison que B avec Γ; je dis que A est plus grand que B.

Car, si cela n'est pas, A est égal à B, ou plus petit. A n'est pas égal à B, car chacune des grandeurs A, B aurait la même raison avec Γ (7. 5). Mais chacune de ces grandeurs n'a pas la même raison avec Γ; donc A n'est pas égal à B. A n'est pas cependant plus petit que B; car A aurait avec Γ une plus petite raison que B avec Γ (8. 5). Mais A n'a pas avec Γ une plus petite raison que

τὸ Β πρὸς τὸ Γ. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. Εδείχθη δὲ ὅτι<sup>3</sup> οὐδὲ ἴσον, μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἢ πρὸς τὸ Α· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὰ Β τοῦ Α.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσον ἐστίν, ἢ μείζον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστὶ τὸ Β τῷ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Οὐ δὲ μὴν μείζον ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἢ πρὸς τὸ Α. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α. Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

B ad Γ. Non habet autem, non igitur minor est A ipsā B. Ostensa autem est neque æqualis, major igitur est A ipsā B.

Habeat autem rursus Γ ad Β majorem rationem quam Γ ad Α; dico minorem esse Β ipsā Α.

Si enim non, vel æqualis est, vel major. Æqualis quidem non est Β ipsi Α, nam Γ ad utramque ipsarum Α, Β eandem haberet rationem. Non habet vero, non igitur æqualis est Α ipsi Β. Non autem tamen major est Β ipsā Α, nam Γ ad Β minorem rationem haberet quam ad Α. Non habet vero, non igitur major est Β ipsā Α. Ostensa autem est neque æqualis, minor igitur est Β ipsā Α. Ipsarum igitur ad eandem, etc.

B avec Γ; donc A n'est pas plus petit que B. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc A est plus grand que B.

De plus, que Γ ait avec B une raison plus grande que Γ avec A; je dis que B est plus petit que A.

Car, si cela n'est pas, il lui est égal, ou il est plus grand. Mais la grandeur B n'est pas égale à A; car alors la grandeur Γ aurait la même raison avec chacune des grandeurs A, B (7. 5). Mais elle ne l'a pas; donc A n'est pas égal à B. La grandeur B n'est pas cependant plus grande que A; car alors Γ aurait avec B une raison plus petite qu'avec A (8. 5). Mais Γ n'a pas avec B une raison plus petite qu'avec A; donc B n'est pas plus grand que A. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc B est plus petit que A. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

PROPOSTIO XI.

Οἱ τῶ αὐτῶ λόγοι οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

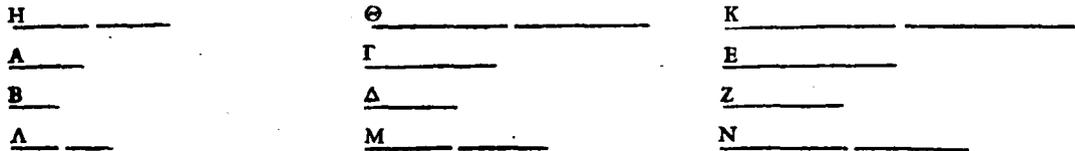
Ἐστώσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν<sup>1</sup> Α, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἄτυχην ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Eidem rationes eadem, et inter se sunt eadem.

Sint enim ut Α quidem ad Β ita Γ ad Δ, ut Γ vero ad Δ, ita Ε ad Ζ; dico esse ut Α ad Β ita Ε ad Ζ.

Sumantur enim ipsarum Α, Γ, Ε quidem æque multiples Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Α, Μ, Ν.



Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἰληπται τῶν μὲν<sup>2</sup> Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἄτυχην ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ<sup>3</sup>· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ·

Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ æque multiples Η, Θ, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcunque multiples Α, Μ; si igitur Η superat ipsam Α, superat et Θ ipsam Μ; et si æqualis, æqualis; et

PROPOSITION XI.

Les raisons qui sont les mêmes avec une même raison sont égales entr'elles.

Que Α soit à Β comme Γ est à Δ, et que Γ soit à Δ comme Ε est à Ζ; je dis que Α est à Β comme Ε est à Ζ.

Prenons des équi-multiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équi-multiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et qu'on a pris des équi-multiples quelconques Η, Θ de Α et de Γ; et d'autres équi-multiples quelconques Λ, Μ de Β et de Δ; si Η surpasse Λ, Θ surpasse Μ; si Η est égal à Λ, Θ est égal à Μ;

καὶ εἰ ἴσον, ἴσον<sup>4</sup>· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον<sup>5</sup>.  
 Πάλιν, ἐπεί ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ  
 Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἰληπται τῶν μιν<sup>6</sup> Γ, Ε ἰσά-  
 κεις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα  
 ἢ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα  
 ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν·  
 καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον.  
 Ἀλλὰ εἰ ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ  
 τὸ Η τοῦ Α· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλατ-  
 τον, ἔλαττον· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Α,  
 ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ  
 εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν Η, Κ  
 τῶν Α, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Α, Ν  
 τῶν Β, Ζ ἄλλα ἢ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια·  
 ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς  
 τὸ Ζ. Οἱ ἄρα τῶν αὐτῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

si minor, minor. **R**ursus, quoniam est ut Γ ad  
 Δ ita Ε ad Ζ, et sumptæ ipsarum quidem Γ, Ε  
 æque multiples Θ, Κ, ipsarum vero Δ, Ζ aliæ  
 utcunque æque multiples Μ, Ν; si igitur su-  
 perat Θ ipsam Μ, superat et Κ ipsam Ν; et si  
 æqualis, æqualis; et si minor, minor. Sed si su-  
 perat Θ ipsam Μ, superat et Η ipsam Α; et si  
 æqualis, æqualis; et si minor, minor; quare et  
 si superat Η ipsam Α, superat et Κ ipsam Ν; et  
 si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt  
 Η, Κ quidem ipsarum Α, Ε æque multiples,  
 ipsæ vero Α, Ν ipsarum Β, Ζ aliæ utcunque  
 multiples; est igitur ut Α ad Β ita Ε ad Ζ.  
 Ergo eisdem, etc.

et si Η est plus petit que Α, Θ est plus petit que Μ (déf. 6. 5). De plus, puisque Γ est à Δ comme Ε est à Ζ, et qu'on a pris des équi-multiples quelconques Θ, κ de Γ et de Ε, et d'autres équi-multiples quelconques Μ, Ν de Δ et de Ζ; si Θ surpasse Μ, κ surpasse Ν; si Θ est égal à Μ, κ est égal à Ν, et si Θ est plus petit que Μ, κ est plus petit que Ν. Mais si Θ surpasse Μ, Η surpasse Α; si Θ est égal à Μ, Η est égal à Α, et si Θ est plus petit que Μ, Η est plus petit que Α; donc, si Η surpasse Α, κ surpasse Ν; si Η est égal à Α, κ est égal à Ν, et si Η est plus petit que Α, κ est plus petit que Ν. Mais Η, κ sont des équi-multiples quelconques de Α et de Ε, et Α, Ν d'autres équi-multiples quelconques de Β et de Ζ; donc Α est à Β comme Ε est à Ζ (déf. 6. 5).  
 Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

PROPOSITIO XII.

Εάν ἢ ὅποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον ἴσται ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα.

Ἐστωσαν ὅποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Si sint quotcunque magnitudines proportionales, erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et Ε ad Ζ; dico esse ut Α ad Β ita Α, Γ, Ε ad ipsas Β, Δ, Ζ.

H \_\_\_\_\_  
 Θ \_\_\_\_\_  
 Κ \_\_\_\_\_  
 Α \_\_\_\_\_  
 Γ \_\_\_\_\_  
 Ε \_\_\_\_\_

Λ \_\_\_\_\_  
 Μ \_\_\_\_\_  
 Ν \_\_\_\_\_  
 Β \_\_\_\_\_  
 Δ \_\_\_\_\_  
 Ζ \_\_\_\_\_

Εἰλήθη γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ τοῖς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἰληπται

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Γ, Ε æque multiples Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Λ, Μ, Ν.

Et quoniam est Α ad Β ita Γ ad Δ et Ε ad Ζ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ, Ε æque

PROPOSITION XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

Soient Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ tant de grandeurs proportionnelles qu'on voudra; que Α soit à Β comme Γ est à Δ et comme Ε est à Ζ; je dis que Α est à Β comme la somme des antécédents Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et comme Ε est à Ζ; que l'on a pris

τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Α, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὡστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Α, ὑπερέχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Α, Μ, Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον<sup>2</sup>. Καί ἐστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἐπειδὴ περ ἀν<sup>3</sup> ἢ ὅποσαοῦν μεγέθη ὅποσαοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἕκαστου ἰσάκεις πολλαπλάσια<sup>1</sup>, ὅσαπλασίον ἐστι ἐν τῶν μεγεθῶν ἰσός, τοσαυταπλάσια ἴσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Α καὶ τὰ Α, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἴστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ<sup>5</sup> Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ. Εὰν ἄρα ἢ ὅποσαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

multiplices H, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiplices Α, Μ, Ν; si igitur H superat ipsam Α, superat et Θ ipsam Μ, et Κ ipsam Ν; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Quare et si superat H ipsam Α, superant et Η, Θ, Κ ipsas Α, Μ, Ν; et si æqualis, æquales; et si minor, minores. Et est H quidem et Η, Θ, Κ ipsius Α et ipsarum Α, Γ, Ε æque multiplices; quoniam si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium multitudine, singulæ singularum æque multiplices, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiplices erunt et omnes omnium. Propter eadem utique et Α et Α, Μ, Ν ipsius Β et ipsarum Β, Δ, Ζ æque sunt multiplices; est igitur ut Α ad Β, ita Α, Γ, Ε ad Β, Δ, Ζ. Si igitur sint quotcunque, etc.

des équi-multiples quelconques H, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équi-multiples quelconques Α, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ; si H surpasse Α, Θ surpasse Μ, et Κ surpasse Ν; si H est égal à Α, Θ est égal à Μ, et Κ égal à Ν; et si H est plus petit que Α, Θ est plus petit que Ν, et Κ plus petit que Ν (déf. 6. 5). Donc, si H surpasse Α, la somme des grandeurs H, Θ, Κ surpasse la somme des grandeurs Α, Μ, Ν; si H est égal à Α, la somme des grandeurs H, Θ, Κ est égale à la somme des grandeurs Α, Μ, Ν; et si H est plus petit que Α, la somme des grandeurs H, Θ, Κ est plus petite que la somme des grandeurs Α, Μ, Ν. Mais la grandeur H et la somme des grandeurs H, Θ, Κ sont des équi-multiples de la grandeur Α et des grandeurs Α, Γ, Ε, parce que si tant de grandeurs qu'on voudra sont les mêmes multiples d'autres grandeurs égales en nombre, chacune de chacune, la somme des premières grandeurs est le même multiple de la somme des secondes, qu'une de ces grandeurs l'est d'une de ces grandeurs (1. 5). Par la même raison, la grandeur Α et la somme des grandeurs Α, Μ, Ν sont des équi-multiples de la grandeur Β et de la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ; donc Α est à Β comme la somme des grandeurs Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

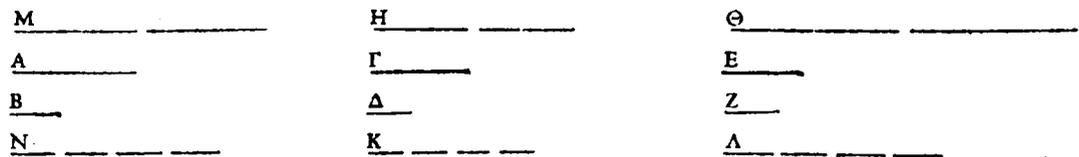
PROPOSITIO XIII.

Εάν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχη ἢ πεμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔξει ἢ πεμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον μὲν<sup>3</sup> γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχεται λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam majorem rationem habeat quam quinta ad sextam; et prima ad secundam majorem rationem habeat quam quinta ad sextam.

Prima quidem enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, tertia vero Γ ad quartam Δ majorem rationem



μείζονα λόγον ἔχεται ἢ πεμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἔξει ἢ πεμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ<sup>5</sup>.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ πεμπτον τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ<sup>6</sup>· ἔστι τιὰ τῶν μὲν Γ, Ε

habeat quam quinta E ad sextam Z; dico et primam A ad secundam B majorem rationem habituram esse quam quintam E ad sextam Z.

Quoniam enim Γ ad Δ majorem rationem habet quam E ad Z, sunt quaedam ipsarum

⊙ PROPOSITION XIII.

Si la première a la même raison avec la seconde que la troisième avec la quatrième, et si la troisième a avec la quatrième une raison plus grande que la cinquième avec la sixième, la première aura avec la seconde une raison plus grande que la cinquième avec la sixième.

Que la première A ait avec la seconde B la même raison que la troisième Γ avec la quatrième Δ, et que la troisième Γ ait avec la quatrième Δ une raison plus grande que la cinquième E avec la sixième Z; je dis que la première A aura avec la seconde B une raison plus grande que la cinquième E avec la sixième Z.

Puisque Γ a avec Δ une raison plus grande que E avec Z, parmi des équi-

ισάκεις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίῳ ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλασίῳ οὐχ ὑπερέχει. Εἰλήφθω, καὶ ἴστω τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μὲν ἴστι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἴστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α· ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἴστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.

Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. Τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καὶ ἴστι τὰ μὲν Μ, Θ τῶν Α, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Ν, Λ τῶν Β, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν

quidem Γ, Ε æque multiples, ipsarum vero Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples; et ipsius quidem Γ multiplex ipsius Δ multiplicem superat, ipsius vero Ε multiplex ipsius Ζ multiplicem non superat. Sumantur, et sint ipsarum quidem Γ, Ε æque multiples Η, Θ; ipsarum vero Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Κ, Λ; ita ut Η quidem ipsam Κ superet, ipsa vero Θ ipsam Λ non superet; et quam multiplex quidem est Η ipsius Γ, tam multiplex sit et Μ ipsius Α; quam vero multiplex Κ ipsius Δ, tam multiplex sit et Ν ipsius Β.

Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ æque multiples Μ, Η, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcunque æque multiples Ν, Κ; si igitur superat Μ ipsam Ν, superat et Η ipsam Κ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Superat autem Η ipsam Κ, superat igitur et Μ ipsam Ν. Ipsa vero Θ ipsam Λ non superat; et sunt Μ, Θ quidem ipsarum Α, Ε æque multiples, ipsæ vero Ν, Λ ipsarum Β, Ζ aliæ utcunque æque multiples; ergo Α

multiples quelconques de Γ et de Ε, et parmi d'autres équimultiples quelconques de Δ et de Ζ, un multiple de Γ surpasse un multiple de Δ, et un multiple de Ε ne surpasse pas un multiple de Ζ (déf. 8. 5). Prenons ces équimultiples, et que Η, Θ soient des équimultiples de Γ et de Ε, et que Κ, Λ soient d'autres équimultiples quelconques de Δ et de Ζ, de manière que Η surpasse Κ, et que Θ ne surpasse pas Λ; et que Μ soit le même multiple de Α que Η l'est de Γ, et que Ν soit le même multiple de Β que Κ l'est de Δ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et qu'on a pris des équimultiples quelconques Μ, Η de Α et de Γ, et d'autres équimultiples quelconques Ν, Κ de Β et de Δ; si Μ surpasse Ν, Η surpasse Κ; si Μ est égal à Ν, Η est égal à Κ; et si Μ est plus petit que Ν, Η est plus petit que Κ (déf. 6. 5). Mais Η surpasse Κ; donc Μ surpasse Ν. Mais Θ ne surpasse pas Λ; et Μ, Θ sont des équimultiples quelconques de Α et de Ε; et Ν, Λ sont d'autres équimultiples quelconques de Β

266 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ισάκεις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα A πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ Z. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ad B majorem rationem habet quam E ad Z. Si igitur prima, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

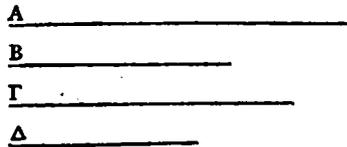
PROPOSITIO XIV.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἴσται· καὶ ἴσον, ἴσον καὶ ἔλασσον, ἔλασσον

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima vero tertia major sit, et secunda tertia major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Πρῶτον γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἔχεται λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, major



τὸ Δ, μείζον δὲ ἴσται τὸ A τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ B τοῦ Δ μείζον ἴσται.

autem sit A ipsa Γ; dico et B ipsa Δ majorem esse.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἴσται τὸ A τοῦ Γ, ἄλλο δὲ ὁ ἴτυχε μέγεθος τὸ B· τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα

Quoniam enim major est A ipsa Γ, alia autem utcunque magnitudo B; ergo A ad B majorem

et de Z; donc A a avec B une raison plus grande que E avec Z (déf. 8. 5).  
Donc, etc.

PROPOSITION XIV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde sera égale à la quatrième, et si la première est plus petite que la troisième, la seconde sera plus petite que la quatrième.

Que la première A ait avec la seconde B la même raison que la troisième Γ avec la quatrième Δ, et que A soit plus grand que Γ; je dis que B est plus grand que Δ.

Puisque A est plus grand que Γ, et que B est une autre grandeur quelconque,

λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἔλαττόν ἐστιν· ἔλαττον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β· ἵσως μείζον ἐστὶ τὸ Β τοῦ Δ.

Ὁμοίως δὲ διΐξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ Β τῷ Δ· καὶ ἔλασσον ἢ τὸ Α τοῦ Γ, ἔλασσον ἐστὶ, καὶ<sup>3</sup> τὸ Β τοῦ Δ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἕξῃς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, λεφθίνα κατάλληλα.

Ἐστω γὰρ ἰσάκεις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ

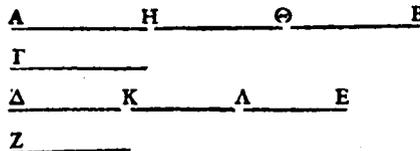
rationem habet quam Γ ad Β. Ut autem Α ad Β, ita Γ ad Δ; et Γ igitur ad Δ majorem rationem habet quam Γ ad Β. Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est; minor igitur Δ ipsa Β; quare major est Β ipsa Δ.

Similiter utique ostendemus et si æqualis sit Α ipsi Γ, æqualem fore et Β ipsi Δ; et si minor sit Α ipsa Γ, minorem fore et Β ipsa Δ. Si igitur prima, etc.

PROPOSITIO XV.

Partes inter se comparatæ eandem habent rationem quam æque multiples.

Sit enim æque multiplex ΑΒ ipsius Γ ac



Γ· καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

ΔΕ ipsius Ζ; dico esse ut Γ ad Ζ ita ΑΒ ad ΔΕ.

A a avec B une plus grande raison que Γ avec B (8. 5). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ a avec Δ une plus grande raison que Γ avec B (13. 5). Mais la grandeur avec laquelle une même grandeur a la plus grande raison est la plus petite (10. 5); donc Δ est plus petit que B, et par conséquent B plus grand que Δ.

Nous démontrerons semblablement que si A est égal à Γ, B sera égal à Δ, et que si A est plus petit que Γ, B sera plus petit que Δ. Donc, etc.

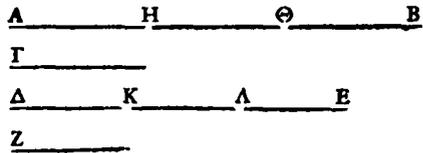
PROPOSITION XV.

Les parties comparées entr'elles ont la même raison que leurs équimultiples.

Que AB soit le même multiple de Γ que ΔΕ l'est de Z; je dis que Γ est à Z comme AB est à ΔΕ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ἴσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διηρήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ Γ μεγέθη ἴσα, τὰ AH, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· ἴσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH, ΗΘ, ΘΒ τῷ πλῆθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ AH, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἴσται δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλή-

Quoniam enim æque est multiplex AB ipsius Γ ac ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur sunt in AB magnitudines æquales ipsi Γ, tot sunt et in ΔΕ æquales ipsi Ζ. Dividatur AB quidem in magnitudines ipsi Γ æquales AH, ΗΘ, ΘΒ, ipsa vero ΔΕ in ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ipsi Ζ æquales; erit utique æqualis multitudo ipsarum AH, ΗΘ, ΘΒ multitudini ipsarum ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Et quoniam æquales sunt AH, ΗΘ, ΘΒ inter se, sunt autem



λοις· ἴσται ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ· ἴσται ἄρα καὶ ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα· ἴσται ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔΕ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν AH τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἴσται ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔΕ. Τα ἄρα μέρη, καὶ τὰ ἐξῆς.

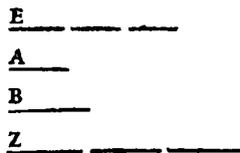
et ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ æquales inter se; est igitur ut AH ad ΔΚ ita ΗΘ ad ΚΛ, et ΘΒ ad ΛΕ; erit igitur et ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut AH ad ΔΚ ita AB ad ΔΕ. Æqualis autem AH quidem ipsi Γ, ipsa vero ΔΚ ipsi Ζ; est igitur ut Γ ad Ζ ita AB ad ΔΕ. Ergo partes, etc.

Puisque AB est le même multiple de Γ que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΔΕ de grandeurs égales à Ζ. Divisons AB en parties égales à Γ, et que ces parties soient AH, ΗΘ, ΘΒ; divisons aussi ΔΕ en parties égales à Ζ, et que ces parties soient ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Le nombre des parties AH, ΗΘ, ΘΒ sera égal au nombre des parties ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Et puisque les parties AH, ΗΘ, ΘΒ sont égales entr'elles, et que les parties ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ sont aussi égales entr'elles, AH est à ΔΚ comme ΗΘ est à ΚΛ, et comme ΘΒ est à ΛΕ (7. 5); donc un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 5); donc AH est à ΔΚ comme AB est à ΔΕ. Mais AH est égal à Γ, et ΔΚ égal à Ζ; donc Γ est à Ζ comme AB est à ΔΕ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Εάν τέσσαρα μεγέθη ανάλογον ἦ, καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἴσται.

Ἐστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἴστίν', ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.



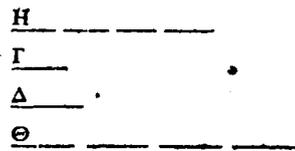
Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἴστί πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα<sup>2</sup>· ἴστίν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor magnitudines proportionales sint, et alterne proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico et alterne proportionales esse, ut Α ad Γ ita Β ad Δ.



Sumantur enim ipsarum quidem Α, Β æque multiples Ε, Ζ, ipsarum vero Γ, Δ aliæ ut-cunque æque multiples Η, Θ.

Et quoniam æque est multiplex Ε ipsius Α ac Ζ ipsius Β; partes autem inter se comparatæ eandem habent rationem, quam earum æque multiples; est igitur ut Α ad Β ita Ε ad Ζ. Ut autem Α ad Β ita Γ ad Δ; et ut igitur

PROPOSITION XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront proportionnelles par permutation.

Soient les quatre grandeurs proportionnelles Α, Β, Γ, Δ, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis que ces grandeurs sont proportionnelles par permutation, c'est-à-dire que Α est à Γ comme Β est à Δ.

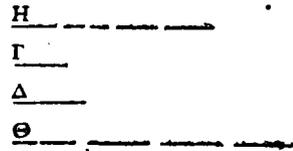
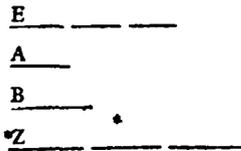
Prenons des équi-multiples quelconques Ε, Ζ de Α et de Β, et d'autres équi-multiples quelconques Η, Θ de Γ et de Δ.

Puisque Ε est le même multiple de Α que Ζ l'est de Β, et que les parties comparées entr'elles ont la même raison que leurs équi-multiples (15. 5), la grandeur Α est à Β comme Ε est à Ζ. Mais Α est à Β comme Γ est à Δ; donc

270 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκις ἴστί πολλαπλάσια· ἴστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· Καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μίζον ᾗ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου

Γ ad Δ ita E ad Z. Rursus, quoniam H, Θ ipsarum Γ, Δ æque sunt multiples; est igitur ut Γ ad Δ ita Η ad Θ. Ut autem Γ ad Δ ita E ad Z; et ut igitur E ad Z ita Η ad Θ. Si autem quatuor magnitudines proportionales sint, prima autem tertiâ major sit, et vero secunda quartâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Si igitur superat E ipsam Η,



μίζον ἴσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλαστον, ἔλασ-  
σον. Εἰ ἄρα ὑπερίχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερίχει καὶ  
τὸ Ζ τοῦ Θ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον,  
ἔλαττον. Καὶ ἴστί τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσά-  
κις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα  
ἂ ἴτυχαν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἴστιν ἄρα ὡς τὸ  
Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ. Ἐὰν ἄρα τέσ-  
σαρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

superat et Z ipsam Θ; et si æqualis, æqualis;  
et si minor, minor. Et sunt ipsæ quidem E, Z  
ipsarum A, B æque multiples, ipsæ vero H,  
Θ ipsarum Γ, Δ aliæ utcunque æque multipli-  
ces; est igitur ut A ad Γ ita B ad Δ. Si igitur  
quatuor, etc.

Γ est à Δ comme Ε est à Ζ (11. 5). De plus, puisque Η, Θ sont des équi-  
multiples de Γ et de Δ; Γ est à Δ comme Η est à Θ. Mais Γ est à Δ comme  
Ε est à Ζ; donc Ε est à Ζ comme Η est à Θ (11. 5). Mais si quatre gran-  
deurs sont proportionnelles, et si la première est plus grande que la troisième,  
la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la  
troisième, la seconde est égale à la quatrième, et si la première est plus  
petite que la troisième, la seconde est plus petite que la quatrième (14. 5).  
Donc si Ε surpasse Η, Ζ surpasse Θ; si Ε est égal à Η, Ζ est égal à Θ; et si  
Ε est plus petit que Η, Ζ est plus petit que Θ. Mais Ε, Ζ sont des équi-  
multiples quelconques de Α et de Β, et Η, Θ sont d'autres équi-multiples quel-  
conques de Γ et de Δ; donc Α est à Γ comme Β est à Δ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

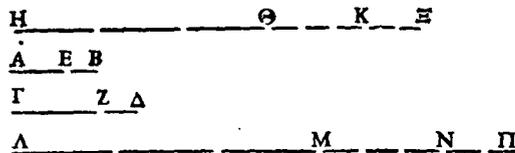
PROPOSITIO XVII.

Εάν συγκείμενα μεγέθη ανάλογον ἦ, καὶ διαι-  
ριθέντα ανάλογον ἔσται.

Ἐστω συγκείμενα μεγέθη ανάλογον τὰ AB, BE, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω ὅτι καὶ διαιριθέντα ἀνά-  
λογον ἔσται, ὡς τὸ AE πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.

Si compositæ magnitudines proportionales sint, et divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales AB, BE, ΓΔ, ΔΖ, ut AB ad BE ita ΓΔ ad ΔΖ; dico et divisas proportionales fore, ut AE ad EB ita ΓΖ ad ΖΔ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν AE, EB, ΓΖ, ΖΔ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ· τῶν δὲ EB, ΖΔ ἄλλα ἂ ἴτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ ΚΞ, ΝΠ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ AE καὶ τὸ ΘΚ τοῦ EB· ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ AE καὶ τὸ ΗΚ τοῦ AB.

Sumantur enim ipsarum quidem AE, EB, ΓΖ, ΖΔ æque multiples ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ; ipsarum vero EB, ΖΔ alia utcunque æque multiples ΚΞ, ΝΠ.

Et quoniam æque est multiplex ΗΘ ipsius AE ac ΘΚ ipsius EB; æque igitur est multiplex ΗΘ ipsius AE ac ΗΚ ipsius AB.

PROPOSITION XVII.

Si des grandeurs étant composées sont proportionnelles, ces grandeurs étant divisées seront encore proportionnelles.

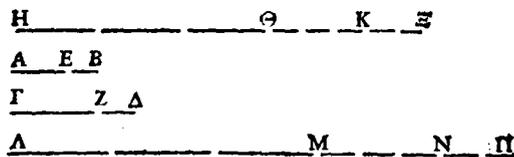
Que les grandeurs composées AB, BE, ΓΔ, ΔΖ soient proportionnelles, c'est-à-dire que AB soit à BE comme ΓΔ est à ΔΖ; je dis que ces grandeurs étant divisées seront encore proportionnelles, c'est-à-dire que AE sera à EB comme ΓΖ est à ΖΔ.

Prenons des équi-multiples quelconques ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ des grandeurs AE, EB, ΓΖ, ΖΔ, et d'autres équi-multiples quelconques ΚΞ, ΝΠ de EB et de ΖΔ.

Puisque ΗΘ est le même multiple de AE que ΘΚ l'est de EB, ΗΘ est le même multiple de AE que ΗΚ l'est de AB (1. 5). Mais ΗΘ est le même multiple de

Ισάκεις δὲ ἐστὶ ἰσάκεις ἀρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ· ἰσάκεις ἀρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ<sup>2</sup>. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ· ἰσάκεις ἀρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΓΔ. ἰσάκεις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάκεις ἀρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΓΔ· τὰ ΗΚ, ΑΝ ἀρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ

Æque autem est multiplex ΗΘ ipsius ΑΕ ac ΑΜ ipsius ΓΖ; æque igitur est multiplex ΗΚ ipsius ΑΒ ac ΑΜ ipsius ΓΖ. Rursus, quoniam æque est multiplex ΑΜ ipsius ΓΖ ac ΜΝ ipsius ΖΔ; æque igitur est multiplex ΑΜ ipsius ΓΖ ac ΑΝ ipsius ΓΔ. Æque autem erat multiplex ΑΜ ipsius ΓΖ ac ΗΚ ipsius ΑΒ; æque igitur est multiplex ΗΚ ipsius ΑΒ ac ΑΝ ipsius ΓΔ; ipsæ ΗΚ, ΑΝ igitur ipsarum ΑΒ, ΓΔ æque sunt multiplices. Rursus, quoniam æque



πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· καὶ συντεθέν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΑΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἂ ἐτυχεν<sup>3</sup> ἰσάκεις πολλαπλά-

est multiplex ΘΚ ipsius ΕΒ ac ΜΝ ipsius ΖΔ; est autem et ΚΞ ipsius ΕΒ æque multiplex ac ΝΠ ipsius ΖΔ; et composita ΘΞ ipsius ΕΒ æque est multiplex ac ΜΠ ipsius ΖΔ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ, et sumptæ sunt ipsarum quidem ΑΒ, ΓΔ æque multiplices ΗΚ, ΑΝ, ipsarum vero ΕΒ, ΖΔ aliæ utcumque æque multiplices ΘΞ, ΜΠ;

AE que ΑΜ l'est de ΓΖ; donc ΗΚ est le même multiple de ΑΒ que ΑΜ l'est de ΓΖ. De plus, puisque ΑΜ est le même multiple de ΓΖ que ΜΝ l'est de ΖΔ, ΑΜ est le même multiple de ΓΖ que ΑΝ l'est de ΓΔ. Mais ΑΜ est le même multiple de ΓΖ que ΗΚ l'est de ΑΒ; donc ΗΚ est le même multiple de ΑΒ que ΑΝ l'est de ΓΔ; donc ΗΚ, ΑΝ sont des équimultiples de ΑΒ et de ΓΔ. De plus, puisque ΘΚ est le même multiple de ΕΒ que ΜΝ l'est de ΖΔ, et que ΚΞ est le même multiple de ΕΒ que ΝΠ l'est de ΖΔ, la grandeur composée ΘΞ est le même multiple de ΕΒ que ΜΠ l'est de ΖΔ (2. 5). Et puisque ΑΒ est à ΒΕ comme ΓΔ est à ΔΖ; que ΗΚ, ΑΝ sont des équimultiples quelconques de ΑΒ et de ΓΔ, et que ΘΞ et ΜΠ sont d'autres équimultiples quelconques de ΕΒ et de ΖΔ; si ΗΚ surpasse ΘΞ, ΑΝ sur-

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 273

σια τὰ ΘΞ, ΜΠ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρέθεις τοῦ ΘΚ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. Ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρέθεις τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΝΠ. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ ΑΜ τῷ ΝΠ· καὶ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν ΗΘ, ΑΜ τῶν ΑΕ, ΓΖ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἅ ἕτιυθεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Ἐὰν ἄρα συγκρίμεν, καὶ τὰ ἐξῆς.

si igitur superat HK ipsam ΘΞ, superat et ΑΝ ipsam ΜΠ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Superet autem HK ipsam ΘΞ, et communi ablatâ ΘΚ, superat igitur et ΗΘ ipsam ΚΞ. Sed si superat HK ipsam ΘΞ, superat et ΑΝ ipsam ΜΠ; superat igitur et ΑΝ ipsam ΜΠ; et communi ΜΝ ablatâ, superat et ΑΜ ipsam ΝΠ; quare si superat ΗΘ ipsam ΚΞ, superat et ΑΜ ipsam ΝΠ. Similiter utique ostendemus et si æqualis sit ΗΘ ipsi ΚΞ, æqualem fore et ΑΜ ipsi ΝΠ; et si minor, minorem. Et sunt ΗΘ, ΑΜ quidem ipsarum ΑΕ, ΓΖ æque multiples, ipsæ vero ΚΞ, ΝΠ ipsarum ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiples; est igitur ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ. Si igitur comparitæ, etc.

passee ΜΠ; si ΗΚ est égal à ΘΞ, ΑΝ est égal à ΜΠ, et si ΗΚ est plus petit que ΘΞ, ΑΝ est plus petit que ΜΠ (déf. 6. 5). Que ΗΚ surpasse ΘΞ; ayant retranché la partie commune ΘΚ, ΗΘ surpassera encore ΚΞ. Mais si ΗΚ surpasse ΘΞ, ΑΝ surpassera ΜΠ. Donc ΑΝ surpassera ΜΠ; retranchons la partie commune ΜΝ; la grandeur ΑΜ surpassera ΝΠ. Donc, si ΗΘ surpasse ΚΞ, ΑΜ surpassera ΝΠ. Nous démontrerons semblablement que si ΗΘ est égal à ΚΞ, ΑΜ sera égal à ΝΠ, et que si ΗΘ est plus petit que ΚΞ, ΑΜ sera plus petit que ΝΠ. Mais ΗΘ, ΑΜ sont des équimultiples quelconques de ΑΕ et de ΓΖ, et ΚΞ et ΝΠ d'autres équimultiples quelconques de ΕΒ et de ΖΔ; donc ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ (déf. 6. 5). Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

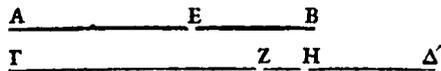
## PROPOSITIO XVIII.

Εὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθίντα ἀνάλογον ἴσται.

Ἐστω διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι καὶ συντεθίντα ἀνάλογον ἴσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.

Si divisæ magnitudines proportionales sint, et compositæ proportionales erunt.

Sint divisæ magnitudines proportionales ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ; dico et compositas proportionales fore, ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΖΔ.



Εἰ γὰρ μὴ ἴσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ· ἴσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ, ἤτοι πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ ΔΖ, ἢ πρὸς μείζον.

Ἐστω πρότερον πρὸς ἑλασσόν τὸ ΔΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἴσται· ὥστε καὶ διαιρεθίντα ἀνάλογον ἴσται· ἴσται ἄρα

Si enim non est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΖΔ; erit ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ, vel ad minorem ipsâ ΔΖ, vel ad majorem.

Sit primum ad minorem ΔΗ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΗ, compositæ magnitudines proportionales sunt; quare et divisæ proportionales erunt; est igitur ut ΑΕ ad ΕΒ

## PROPOSITION XVIII.

Si des grandeurs étant divisées sont proportionnelles, ces grandeurs étant composées seront encore proportionnelles.

Que les grandeurs ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, étant divisées, soient proportionnelles, c'est-à-dire que ΑΕ soit à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ; je dis que ces grandeurs étant composées seront encore proportionnelles, c'est-à-dire que ΑΒ sera à ΒΕ comme ΓΔ est à ΖΔ.

Car, si ΑΒ n'est pas à ΒΕ comme ΓΔ est à ΖΔ, ΑΒ sera à ΒΕ comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ΔΖ ou à une grandeur plus grande.

Que ΑΒ soit premièrement à ΒΕ comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ΖΔ, savoir à ΔΗ. Puisque ΑΒ est à ΒΕ comme ΓΔ est à ΔΗ, ces grandeurs étant composées seront proportionnelles; donc ces grandeurs étant divisées seront

ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Μείζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μείζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἕλασσαν τοῦ ΖΔ. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα. Ἐὰν ἄρα διηρημένα, καὶ τὰ ἕξῃς.

ita  $GH$  ad  $HA$ . Ponitur autem et ut  $AE$  ad  $EB$  ita  $GZ$  ad  $ZD$ ; et ut igitur  $GH$  ad  $HA$  ita  $GZ$  ad  $ZD$ . Major autem prima  $GH$  tertiâ  $GZ$ ; major igitur et secunda  $HA$  quartâ  $ZD$ . Sed, et minor, quod est impossibile; non igitur est ut  $AB$  ad  $BE$  ita  $GA$  ad minorem ipsâ  $ZD$ . Similiter utique ostendemus neque ad majorem; ad ipsam igitur. Si igitur divisæ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

PROPOSITIO XIX.

Ἐὰν ἢ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἴσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Si sit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam, et reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Ἐστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως

Sit enim ut tota  $AB$  ad totam  $GA$  ita ablata

encore proportionnelles (17. 5). Donc  $AE$  est à  $EB$  comme  $GH$  est à  $HA$ . Mais on a supposé que  $AE$  est à  $EB$  comme  $GZ$  est à  $ZD$ ; donc  $GH$  est à  $HA$  comme  $GZ$  est à  $ZD$  (11. 5). Mais la première  $GH$  est plus grande que la troisième  $GZ$ ; donc la seconde  $HA$  est plus grande que la quatrième  $ZD$  (14. 5). Mais elle est plus petite, ce qui est impossible; donc  $AB$  n'est pas à  $BE$  comme  $GA$  est à une grandeur plus petite que  $ZD$ . Nous démontrerons semblablement que  $AB$  n'est pas à  $BE$  comme  $GA$  est à une grandeur plus grande que  $ZD$ ; donc  $AB$  est à  $BE$ , comme  $GA$  est à  $ZD$ . Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Si une grandeur entière est à une autre grandeur entière comme la grandeur retranchée de la première est à la grandeur retranchée de la seconde, la grandeur restante sera à la grandeur restante comme la première grandeur entière est à la seconde grandeur entière.

Que la grandeur entière  $AB$  soit à la grandeur entière  $GA$  comme la grandeur

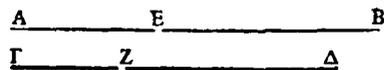
276 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἴσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἑναλλάξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ ὡς τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. Καὶ ἵπεί συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἴσται, καὶ διαιρεθέντα

AE ad ablatam GZ; dico et reliquam EB ad reliquam ZΔ fore ut tota AB ad totam ΓΔ.

Quoniam enim est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ; et alterne ut BA ad AE ita ΔΓ ad ΓΖ. Et quoniam compositæ magnitudines proportionales sunt, et divisæ proportionales



ἀνάλογον ἴσται· ὡς ἄρα<sup>2</sup> τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ ὡς τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΓ, καὶ ἑναλλάξ<sup>3</sup>, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ ὡς τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. Ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν ΔΖ ἴσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα ἦ, καὶ τὰ ἐξῆς.

erunt; ut igitur BE ad EA ita ΔΖ ad ΖΓ; et alterne, ut BE ad ΔΖ ita ΕΑ ad ΖΓ. Ut autem AE ad ΓΖ ita posita est tota AB ad totam ΓΔ; et reliqua igitur EB ad reliquam ΔΖ erit ut tota AB ad totam ΓΔ. Si igitur sit, etc.

retranchée AE est à la grandeur retranchée ΓΖ; je dis que la grandeur restante EB sera à la grandeur restante ΖΔ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ.

Car puisque la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ comme AE est à ΓΖ, par permutation, BA est à AE comme ΔΓ est à ΓΖ (16. 5). Et puisque les grandeurs composées sont proportionnelles, les grandeurs divisées seront encore proportionnelles (17. 5); donc BE est à EA comme ΔΖ est à ΖΓ; donc, par permutation, BE est à ΔΖ comme EA est à ΖΓ. Mais, par supposition, AE est à ΓΖ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ; donc la grandeur restante EB sera à la grandeur restante ΔΖ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ (11. 5). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἔστιν ἀναστρέφαντι. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾦ, καὶ ἀναστρέφαντι ἀνάλογον ἔσται. Ὁπερ ἔδει δείξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δίσσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ᾦ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἑκτου μείζον ἔσται· καὶ ἐὰν<sup>2</sup> ἴσον, ἴσον· καὶ ἐὰν<sup>3</sup> ἔλασσον, ἔλασσον.

COROLLARIUM.

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ; et alterne ut AB ad AE ita ΓΔ ad ΓΖ; compositæ igitur magnitudines proportionales sunt. Ostensum autem est ut AB ad EB ita ΔΓ ad ΖΔ, et est per conversionem. Ex hoc utique manifestum est si compositæ magnitudines proportionales sint, et per conversionem proportionales fore. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Si sint tres magnitudines, et alie ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eadem ratione, ex æquo autem prima tertiâ major sit; et quarta sextâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

COROLLAIRE.

Puisque AB est à ΓΔ comme AE est à ΓΖ, par permutation (16. 5), AB est à AE comme ΓΔ est à ΓΖ; donc ces grandeurs étant composées sont proportionnelles. Mais on a démontré que AB est à EB comme ΔΓ est à ΖΔ; ce qui est par conversion. De là il est évident que si des grandeurs composées sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par conversion. Ce qu'il fallait démontrer.

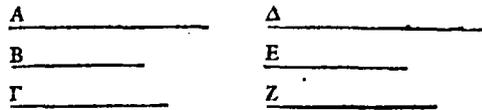
PROPOSITION XX.

Si l'on a trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs, étant prises deux à deux, et en même raison; si, par égalité, la première est plus grande que la troisième, la quatrième sera plus grande que la sixième; si la première est égale à la troisième, la quatrième sera égale à la sixième; et si la première est plus petite que la troisième, la quatrième sera plus petite que la sixième.

278 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω τρία μείζονα τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, δίσσου δὲ μείζον ἴστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μείζον ἴσται· καὶ ἴσον· καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Sint tres magnitudines Α, Β, Γ, et aliae ipsi æquales multitudine Δ, Ε, Ζ, binæ sumptæ in eadem ratione, ut quidem Α ad Β ita Δ ad Ε, ut vero Β ad Γ ita Ε ad Ζ, ex æquo autem major sit Α ipsâ Γ; dico et Δ ipsâ Ζ majorem fore; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem.



Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἴσται τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δὲ τίς τὸ Β, τὸ δὲ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἔλατταν· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. Τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον

Quoniam enim major est Α ipsâ Γ, alia autem quædam Β, et major vero ad eandem majorem rationem habet quam minor; ipsa igitur Α ad Β majorem rationem habet quam Γ ad Β. Sed ut Α quidem ad Β ita Δ ad Ε, ut vero Γ ad Β per inversionem ita Ζ ad Ε; et Δ igitur ad Ε majorem habet rationem quam Ζ ad Ε. Ipsarum autem ad eandem rationem habentium, majorem rationem habens major est; major

Soient Α, Β, Γ trois grandeurs, et Δ, Ε, Ζ d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Δ est à Ε, et que Β soit à Γ comme Ε est à Ζ; que, par égalité, Α soit plus grand que Γ; je dis que Δ sera aussi plus grand que Ζ; que si Α est égal à Γ, Δ sera égal à Ζ, et que si Α est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ.

Puisque la grandeur Α est plus grande que la grandeur Γ, et que Β est une autre grandeur quelconque, la plus grande grandeur aura avec celle-ci une plus grande raison que la plus petite (8. 5); donc Α a avec Β une raison plus grande que Γ avec Β. Mais Α est à Β comme Δ est à Ε, et, par inversion, Γ est à Β comme Ζ est à Ε; donc Δ a avec Ε une plus grande raison que Ζ avec Ε. Mais, parmi les grandeurs qui ont une raison avec une même grandeur, celle-là est la plus grande qui a une plus grande raison (10. 5); donc Δ est plus grand que Ζ. Nous démontrerons semblablement que si Α est égal à Γ,

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 279

μείζον ἔστι· μείζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· κἂν ἕλαττον, ἕλαττον. Ἐὰν ἄρα ᾖ, καὶ τὰ ἐξῆς.

igitur est Δ ipsā Z. Similiter ostendemus, et si A æqualis sit ipsi Γ, æqualem fore et Δ ipsi Z; et si minor, minorem. Si igitur sint, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

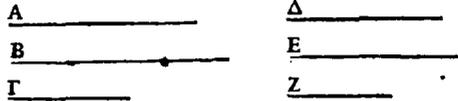
PROPOSITIO XXI.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾗ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δίσσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μείζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἕλασσον, ἕλασσον.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio, ex æquo autem prima tertiâ major sit, et quarta sextâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Ἐστω τρία μεγέθη<sup>1</sup> τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ σύνδυο λαμ-

Sint tres magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine Δ, Ε, Ζ, binæ sumptæ et



βανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ

in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio, ut Α quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut vero Β ad Γ ita Δ ad Ε, ex æquo autem

Δ sera égal à Ζ, et que si Α est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ. Donc, etc.

PROPOSITION XXI.

Si l'on a trois grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, si leur proportion est troublée, et si par égalité la première est plus grande que la troisième, la quatrième sera plus grande que la sixième; et si la première est égale à la troisième, la quatrième sera égale à la sixième; et si la première est plus petite que la troisième, la quatrième sera plus petite que la sixième.

Soient les trois grandeurs Α, Β, Γ, et d'autres grandeurs Δ, Ε, Ζ égales aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison; que leur raison soit troublée, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Ε est à Ζ,

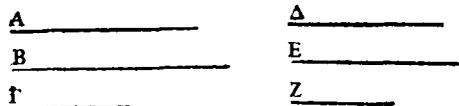
280 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, δίσκου δὲ τὸ Α τοῦ Γ μείζον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, καὶ ἴσον· καὶ ἕλαττον, ἕλαττον.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἔστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δὲ τι τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς

A ipsa Γ major sit; dico et Δ ipsa Ζ majorem fore; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem.

Quoniam enim major est A ipsa Γ, alia vero quædam Β; ergo A ad Β majorem rationem habet quam Γ ad Β. Sed ut A quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut vero Γ ad Β per inversionem ita



τὸ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς τὸ Δ. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἕλασσόν ἐστιν· ἕλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μείζον ἔστι· ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· καὶ ἕλασσον, ἕλασσον. Ἐὰν ἄρα ἢ τρία, καὶ τὰ ἐξῆς.

E ad Δ; et E igitur ad Ζ majorem rationem habet quam E ad Δ. Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est; minor igitur est Ζ ipsa Δ; major est igitur Δ ipsa Ζ. Similiter utique ostendemus et si æqualis sit A ipsi B, æqualem fore et Δ ipsi Ζ; et si minor, minorem. Si igitur tres, etc.

que B soit à Γ comme Δ est à Ε, et que par égalité A soit plus grand que Γ; je dis que Δ sera plus grand que Ζ; que si A est égal à Γ, Δ sera égal à Ζ, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ.

Puisque A est plus grand que Γ, et que B est une autre grandeur, A aura avec B une plus grande raison que Γ avec B (8. 5). Mais A est à B comme E est à Ζ, et par inversion, Γ est à B comme E est à Δ; donc E a avec Ζ une plus grande raison que E avec Δ. Mais la grandeur avec laquelle une même grandeur a une raison plus grande est la plus petite (10, 5); donc Ζ est plus petit que Δ; donc Δ est plus grand que Ζ. Nous démontrerons semblablement que si A est égal à Γ, Δ sera égal à Ζ, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

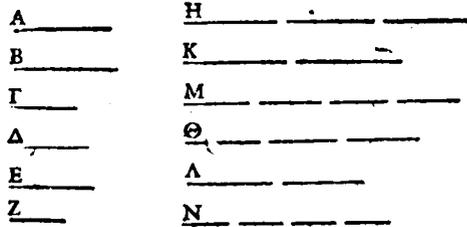
PROPOSITIO XXII.

Εάν ἤ ὅποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ δίσσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἴσται.

Ἐστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ δίσσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἴσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Si sint quotcunque magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eadem ratione; et ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint quotcunque magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine Δ, Ε, Ζ, binæ sumptæ in eadem ratione, ut Α quidem ad Β ita Δ ad Ε, ut Β vero ad Γ ita Ε ad Ζ; dico et ex æquo in eadem ratione fore, ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἅ ἕτυχιν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἅ ἕτυχιν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Δ æque multiplices Η, Θ, ipsarum vero Β, Ε aliæ utcunque æque multiplices Κ, Λ, et insuper ipsarum Γ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Μ, Ν.

PROPOSITION XXII.

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, elles auront la même raison par égalité.

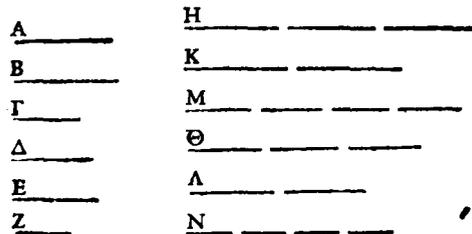
Soient Α, Β, Γ tant de grandeurs que l'on voudra, et Δ, Ε, Ζ d'autres grandeurs égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, aient la même raison, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Δ est à Ε, et que Β soit à Γ comme Ε est à Ζ; je dis que ces grandeurs auront la même raison par égalité, c'est-à-dire que Α sera à Γ comme Δ est à Ζ.

Prenons des équi-multiples quelconques Η, Θ de Α et de Δ; prenons d'autres équi-multiples quelconques Κ, Λ de Β et de Ε, et enfin d'autres équi-multiples quelconques Μ, Ν de Γ et de Ζ.

282 LE CINQUIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἵπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ οὕτως τὸ Λ

Et quoniam est ut A ad B ita Δ ad Ε, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Δ æque multiples Η, Θ, ipsarum vero Β, Ε aliæ ut-  
cunque æque multiples Κ, Λ; est igitur ut Η ad Κ ita Θ ad Λ. Propter eadem utique et ut Κ ad Μ ita Λ ad Ν. Et quoniam tres magnitudi-



πρὸς τὸ Ν. Ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η, Κ, Μ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος Θ, Λ, Ν σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· δίσσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἴστι τὰ μὲν Η, Θ τῶν Α, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ<sup>3</sup>. Ἐὰν ἄρα ᾗ ὀποσαοῦν, καὶ τὰ ἰζῆς.

nes sunt Η, Κ, Μ, et aliæ ipsis æquales multitudi-  
tine Θ, Λ, Ν binæ sumptæ et in eadem ratione; ex æquo igitur si superat Η ipsam Μ, superat et Θ ipsam Ν; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt Η, Θ quidem ipsarum Α, Δ æque multiples, ipsæ vero Μ, Ν ipsarum Γ, Ζ aliæ ut-  
cunque æque multiples; est igitur ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ. Si igitur quot-  
cunque, etc.

Puisque A est à B comme Δ est à Ε, que l'on a pris des équi-multiples quelconques Η, Θ de A et de Δ, et d'autres équi-multiples quelconques Κ, Λ de Β et de Ε; Η est à Κ comme Θ est à Λ (4. 5). Par la même raison, Κ est à Μ comme Λ est à Ν. Donc, puisque l'on a trois grandeurs Η, Κ, Μ, et d'autres grandeurs Θ, Λ, Ν égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison; si, par égalité, Η surpasse Μ, Θ surpasse Ν; si Η est égal à Μ, Θ est égal à Ν, et si Η est plus petit que Μ, Θ est plus petit que Ν (20. 5). Mais Η, Θ sont des équi-multiples quelconques de Α et de Δ, et Μ, Ν d'autres équi-multiples quelconques de Γ et de Ζ; donc Α est à Γ comme Δ est à Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Εὰν ἢ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δίσσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἴσται.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ

A \_\_\_\_\_  
 B \_\_\_\_\_  
 Γ \_\_\_\_\_  
 Δ \_\_\_\_\_  
 Ε \_\_\_\_\_  
 Ζ \_\_\_\_\_

PROPOSITIO XXIII.

Si sint tres magnitudines, et alia ipsi æquales multitudine, binæ sumptæ in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio; et ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint tres magnitudines Α, Β, Γ, et aliae ipsi æquales multitudine, binæ sumptæ in eadem

H \_\_\_\_\_  
 Θ \_\_\_\_\_  
 Λ \_\_\_\_\_  
 Κ \_\_\_\_\_  
 Μ \_\_\_\_\_  
 Ν \_\_\_\_\_

αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, Ε, Ζ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· λέγω ὅτι ἴσται ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε, Ζ ἄλλα ἅ ἕτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

ratione Δ, Ε, Ζ, sit autem perturbata earum proportio, ut Α quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut Β vero ad Γ ita Δ ad Ε; dico esse ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.

Sumantur ipsarum quidem Α, Β, Δ æque multiples Η, Θ, Κ, ipsarum vero Γ, Ε, Ζ aliaæ utcunque æque multiples Λ, Μ, Ν.

PROPOSITION XXIII.

Si l'on a trois grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières; si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, et si leur proportion est troublée, ces grandeurs auront la même raison par égalité.

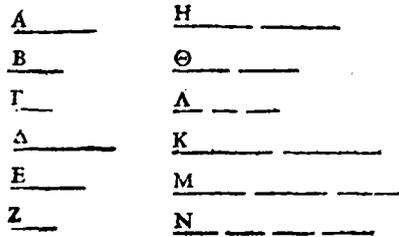
Soient les trois grandeurs Α, Β, Γ, et d'autres grandeurs Δ, Ε, Ζ égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, aient la même raison, et que leur proportion soit troublée, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Ε est à Ζ, et que Β soit à Γ comme Δ est à Ε; je dis que Α est à Γ comme Δ est à Ζ.

Prenons des équi-multiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Β, Δ, et d'autres équi-multiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Γ, Ε, Ζ.

284 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ Η, Θ τῶν Α, Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσαύτως πολλαπλάσιαις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· καὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ ἐναλλάξ

Et quoniam æque sunt multiples Η, Θ ipsarum Α, Β, partes vero eandem habent rationem quam earum æque multiples; est igitur ut Α ad Β ita Η ad Θ. Propter eadem utique ut Ε ad Ζ ita Μ ad Ν; et est ut Α ad Β ita Ε ad Ζ; et ut igitur Η ad Θ ita Μ ad Ν. Et quoniam est ut Β ad Γ ita Δ ad Ε, et alterne ut Β ad Δ ita Γ ad Ε. Et quoniam Θ, Κ ipsarum Β, Δ æque sunt multiples; partes autem eam-



ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ τὰ Θ, Κ τῶν Β, Δ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκεις πολλαπλάσιαις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ.

dem habent rationem quam æque multiples; est igitur ut Β ad Δ ita Θ ad Κ; sed ut Β ad Δ ita Γ ad Ε; et ut igitur Θ ad Κ ita Γ ad Ε. Rursus quoniam Λ, Μ ipsarum Γ, Ε æque sunt multiples; est igitur ut Γ ad Ε ita Λ ad Μ. Sed ut Γ ad Ε ita Θ ad Κ; et ut igitur Θ ad Κ ita Λ ad Μ, et alterne ut Θ ad Λ ita Κ ad Μ. Ostensum autem est et ut Η ad Θ ita Μ ad Ν; et quoniam tres magnitudines sunt

Puisque Η, Θ sont des équimultiples de Α et de Β, et que les parties ont la même raison que leurs équimultiples (15. 5); Α est à Β comme Η est à Θ. Par la même raison, Ε est à Ζ comme Μ est à Ν; mais Α est à Β comme Ε est à Ζ; donc Η est à Θ comme Μ est à Ν (11. 5). Et puisque Β est à Γ comme Δ est à Ε, Β est à Δ par permutation, comme Γ est à Ε. Et puisque Θ, Κ sont des équimultiples de Β et de Δ, et que les parties ont la même raison que leurs équimultiples, Β est à Δ comme Θ est à Κ. Mais Β est à Δ comme Γ est à Ε; donc Θ est à Κ comme Γ est à Ε. De plus, puisque Λ, Μ sont des équimultiples de Γ et de Ε, Γ est à Ε comme Λ est à Μ. Mais Γ est à Ε comme Θ est à Κ; donc Θ est à Κ comme Λ est à Μ, et par permutation, Θ est à Λ

Ἀλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. Εδείχθη δὴ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· ἵπτι οὖν τρία μεγέθη ἴσῃ, τὰ Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Κ, Μ, Ν, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἴστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἢ ἀναλογία· δίδου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἴστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ· ἴστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. Ἐάν ἄρα ἢ τρία, καὶ τὰ ἐξῆς.

H, Θ, Λ, et aliæ ipsis æquales multitudine, ipsæ K, M, N, binæ sumptæ in eadem ratione, et est earum perturbata proportio; ex æquo igitur si superat H ipsam A, superat et K ipsam N; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt H, K quidem ipsarum A, Δ æque multiples, ipsæ vero Λ, N ipsarum Γ, Ζ; est igitur ut A ad Γ ita Δ ad Ζ. Si igitur sint tres, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐάν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχη δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντιθεὶν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

PROPOSITIO XXIV.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam eandem rationem quam sexta ad quartam; et simul sumptæ prima et quinta ad secundam eandem rationem habebunt quam tertia et sexta ad quartam.

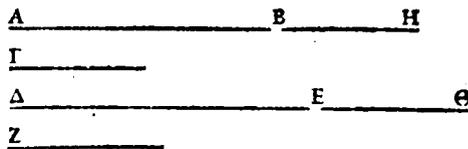
comme K est à M. Mais on a démontré que H est à Θ comme M est à N; donc, puisque l'on a trois grandeurs H, Θ, Λ, et d'autres grandeurs K, Λ, N égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, et que leur proportion est troublée; si, par égalité, H surpasse Λ, K surpasse N; si H est égal à Λ, K est égal à N; et si H est plus petit que Λ, K est plus petit que N (21. 5). Mais H, K sont des équimultiples de A et de Δ, et Λ, N des équimultiples de Γ et de Ζ; donc A est à Γ comme Δ est à Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XXIV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la cinquième a avec la seconde la même raison que la sixième avec la quatrième, la somme de la première et de la cinquième aura la même raison avec la seconde que la somme de la troisième et de la sixième avec la quatrième.

Πρῶτον μὲν γὰρ τὸ AB πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὴν αὐτὸν ἔχεται λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· ἔχεται δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθέν<sup>3</sup> πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.

Prima quidem enim AB ad secundam Γ eandem habeat rationem quam tertia ΔΕ ad quartam Ζ; habeat vero et quinta ΒΗ ad secundam Γ eandem rationem quam sexta ΕΘ ad quartam Ζ; dico et simul sumptas primam et quintam ΑΗ ad secundam Γ eandem habituras esse rationem quam tertia et sexta ΔΘ ad quartam Ζ.



Ἐπεὶ γὰρ ἴσθιν ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. Ἐπιὶ οὖν ἴσθιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ· διίσου ἄρα ἴσθιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. Καὶ ἐπεὶ διηρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἴσθιν, καὶ συντεθέντα ἀνάλογόν ἴσθαι· ἴσθιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΕΘ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· διίσου ἄρα ἴσθιν ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam enim est ut ΒΗ ad Γ ita ΕΘ ad Ζ; per inversionem igitur ut Γ ad ΒΗ ita Ζ ad ΕΘ. Et quoniam est ut ΑΒ ad Γ ita ΔΕ ad Ζ, ut autem Γ ad ΒΗ ita Ζ ad ΕΘ; ex æquo igitur est ut ΑΒ ad ΒΗ ita ΔΕ ad ΕΘ. Et quoniam divisæ magnitudines proportionales sunt, et compositæ proportionales erunt; ut igitur ΑΗ ad ΒΗ ita ΔΘ ad ΕΘ. Est autem et ut ΒΗ ad Γ ita ΕΘ ad Ζ; ex æquo igitur est ut ΑΗ ad Γ ita ΔΘ ad Ζ. Si igitur prima, etc.

Que la première AB ait avec la seconde Γ la même raison que la troisième ΔΕ a avec la quatrième Ζ, et que la cinquième ΒΗ ait avec la seconde Γ la même raison que la sixième ΕΘ avec la quatrième Ζ; je dis que la somme de la première et de la cinquième ΑΗ aura avec la seconde Γ la même raison que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ a avec la quatrième Ζ.

Puisque ΒΗ est à Γ comme ΕΘ est à Ζ, par inversion, Γ est à ΒΗ comme Ζ est à ΕΘ (cor. 4. 5). Mais ΑΒ est à Γ comme ΔΕ est à Ζ, et Γ est à ΒΗ comme Ζ est à ΕΘ; donc, par égalité, ΑΒ est à ΒΗ comme ΔΕ est à ΕΘ (22. 5); donc, puisque ces grandeurs étant divisées sont proportionnelles, ces grandeurs étant composées seront proportionnelles (18. 5); donc ΑΗ est à ΒΗ comme ΔΘ est à ΕΘ. Mais ΒΗ est à Γ comme ΕΘ est à Ζ; donc, par égalité, ΑΗ est à Γ comme ΔΘ est à Ζ (22. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

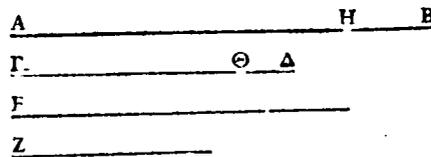
PROPOSITIO XXV.

Εάν τέσσαρα μεγέθη ανάλογον ἦ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον<sup>1</sup> δύο τῶν λοιπῶν μίξονά ἐστιν.

Ἐστω τέσσαρα μεγέθη ανάλογον, τὰ AB, ΓΔ, E, Z, ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ἴστω δὲ μέγιστον μὲν<sup>2</sup> αὐτῶν τὸ AB, ἐλάχιστον δὲ τὸ Z· λέγω ὅτι τὰ AB, Z τῶν ΓΔ, E μίξονά ἐστι.

Si quatuor magnitudines proportionales sint, maxima et minima duabus reliquis majores sunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, ΓΔ, E, Z, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; sit autem maxima quidem ipsarum AB, minima vero Z; dico AB, Z ipsis ΓΔ, E majores esse.



Κείσθω γὰρ τῷ μὲν E ἴσον τὸ AH, τῷ δὲ Z ἴσον τὸ ΓΘ.

Ἐπεὶ οὖν<sup>3</sup> ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ἴσον δὲ τὸ μὲν E τῷ AH, τὸ δὲ Z τῷ ΓΘ<sup>4</sup>· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ ΓΘ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθῆν τὸ AH πρὸς

Ponatur enim ipsi quidem E æqualis AH, ipsi vero Z æqualis ΓΘ.

Quoniam igitur est ut AB ad ΓΔ ita E ad Z, æqualis autem ipsa quidem E ipsi AH, ipsa vero Z ipsi ΓΘ; est igitur ut AB ad ΓΔ ita AH ad ΓΘ. Et quoniam est ut tota AB ad totam ΓΔ ita ablata AH ad ablatam ΓΘ; et reliqua

PROPOSITION XXV.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande et la plus petite sont plus grandes que les deux autres.

Que les quatre grandeurs AB, ΓΔ, E, Z soient proportionnelles, c'est-à-dire que AB soit à ΓΔ comme E est à Z; que AB soit la plus grande, et Z la plus petite; je dis que les grandeurs AB, Z sont plus grandes que les grandeurs ΓΔ, E.

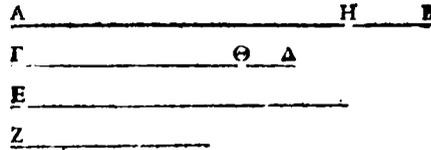
Faisons AH égal à E, et ΓΘ égal à Z.

Puisque AB est à ΓΔ comme E est à Z, et que AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z, AB est à ΓΔ comme AH est à ΓΘ, et puisque la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ comme la grandeur retranchée AH est à la grandeur

288 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς  
λοιπὸν τὸ ΘΔ ἴσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον  
τὸ ΓΔ. Μείζον δὲ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· μείζον ἄρα καὶ  
τὸ ΗΒ τοῦ ΘΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ  
τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ· τὰ ἄρα ΑΗ, Ζ ἴσα ἐστὶ  
τοῖς ΓΘ, Ε. Καὶ ἐπεὶ εἰς ἀνίσους ἴσα προστεθῆ,

igitur HB ad reliquam ΘΔ erit ut tota AB ad  
totam ΓΔ. Major autem AB ipsâ ΓΔ; ma-  
jor igitur et HB ipsâ ΘΔ. Et quoniam æqualis  
est ΑΗ quidem ipsi Ε, ΓΘ vero ipsi Ζ; ipsæ  
igitur ΑΗ, Ζ æquales sunt ipsis ΓΘ, Ε. Et quo-  
niam si inæqualibus æqualia addantur, tota



τὰ ὅλα ἄρῃσα ἐστὶν· εἰς ἀνίσους ἄρα τῶν ΗΒ, ΘΔ ἀνί-  
σων ὄντων, καὶ μείζονος τοῦ ΗΒ, τῷ μὲν<sup>6</sup> ΗΒ  
προσθεθῆ τὰ ΑΗ, Ζ, τῷ δὲ ΘΔ προσθεθῆ τὰ  
ΓΘ, Ε, συνάγεται τὰ ΑΒ, Ζ μείζονα τῶν ΓΔ,  
Ε. Εὐὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

inæqualia sunt; si igitur ipsis ΗΒ, ΘΔ inæque-  
libus existentibus, et majore ipsâ ΗΒ, ipsi  
quidem ΗΒ addantur ΑΗ, Ζ, ipsi vero ΘΔ  
addantur ΓΘ, Ε, fient ΑΒ, Ζ majores ipsis  
ΓΔ, Ε. Si igitur quatuor, etc.

retranchée ΓΘ, la grandeur restante ΗΒ sera à la grandeur restante ΘΔ comme  
la grandeur entière ΑΒ est à la grandeur entière ΓΔ (19. 5). Mais ΑΒ est plus  
grand que ΓΔ; donc ΗΒ est plus grand que ΘΔ. Mais ΑΗ est égal à Ε, et ΓΘ  
à Ζ; donc les grandeurs ΑΗ, Ζ sont égales aux grandeurs ΓΘ, Ε. Mais si on  
ajoute des grandeurs égales à des grandeurs inégales, les grandeurs entières sont  
inégales; donc, puisque les grandeurs ΗΒ, ΘΔ sont inégales, et que ΗΒ est la  
plus grande, si l'on ajoute à ΗΒ les grandeurs ΑΗ, Ζ, et à ΘΔ les grandeurs  
ΓΘ, Ε, les grandeurs ΑΒ, Ζ seront plus grandes que les grandeurs ΓΔ, Ε.  
Donc, etc.

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R S E X T U S.

---

ΟΡΟΙ.

DEFINITIONES.

α. Ομοία σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τὰς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

β. Ἀντιπικνωτότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἐπόμενοι λόγων ᾗσιν.

1. Similes figuræ rectilinæ sunt, quæ et angulos æquales habent singulos singulis, et circa æquales angulos latera proportionalia.

2. Reciprocæ autem figuræ sunt, quando in utraq̃ue figurarum antecedentesque et consequentes rationum sunt.

## LIVRE SIXIEME

# DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

DÉFINITIONS.

1. Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

2. Les figures sont réciproques, lorsque les antécédents et les conséquents des raisons se trouvent dans l'une et l'autre figure.

γ'. Ἀκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμηθεῖσαι  
 λήγεται, ὅταν ἢ ὡς ἢ<sup>2</sup> ὅλη πρὸς τὸ μείζον  
 τμήμα οὕτως τὸ μείζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

δ'. Ὑψος ἐστὶ πάντος σχήματος ἢ ἀπὸ τῆς  
 κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη<sup>3</sup>.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ  
 ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἀλλήλα ἐστὶν ὡς  
 αἱ βάσεις.

Ἐστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλλη-  
 λόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος  
 ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον ἀγο-  
 μένην<sup>1</sup>. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν  
 ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ  
 τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  
 ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Ἐκτελέσω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη,  
 ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεία, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ

3. Secundum extremam et mediam ratio-  
 nem recta secta esse dicitur, quando est ut  
 tota ad majus segmentum ita majus ad minus.

4. Altitudo est omnis figuræ a vertice ad  
 basim perpendicularis ducta.

## PROPOSITIO I.

Triangula et parallelogramma, sub eadem  
 altitudine existentia, inter se sunt ut bases.

Sint triangula quidem ΑΒΓ, ΑΓΔ, paralle-  
 logramma vero ΕΓ, ΓΖ, sub eadem altitudine  
 existentia, ipsâ ab Α ad ΒΔ perpendiculari  
 ductâ; dico esse ut ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita  
 ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum, et ΕΓ  
 parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum.

Producatur enim ΒΔ ex utràque parte ad  
 Θ, Λ puncta, et ponantur ipsi quidem ΒΓ basi

3. Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison, lorsque la  
 droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est  
 au plus petit.

4. La hauteur d'une figure est la perpendiculaire menée du sommet sur  
 la base.

## PROPOSITION PREMIÈRE.

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux  
 comme leurs bases.

Soient les triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, et les parallélogrammes ΕΓ, ΓΖ, ayant la même  
 hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point Α sur ΒΔ; je dis que la  
 base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ, et comme  
 le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΓΖ.

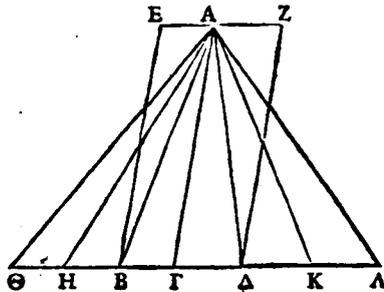
Prolongeons la droite ΒΔ de part et d'autre vers les points Θ, Λ; prenons tant

βάσει ἴσαι ἰσαίδηποτοῦν<sup>2</sup> αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ἰσαίδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλή-  
λαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρί-  
γωνα ἀλλήλοις· ὁσαυταπλάσιόν ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ  
βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστὶ καὶ  
τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. Διὰ τὰ

æquales quotcunque ΒΗ, ΗΘ, ipsi vero ΓΑ  
basi æquales quotcunque ΔΚ, ΚΛ, et jungan-  
tur ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Et quoniam æquales sunt ipsæ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ  
inter se, æquales sunt et ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ trian-  
gula inter se; quam multiplex igitur est ΘΓ basis  
ipsius ΒΓ basis, tam multiplex est et ΑΘΓ trian-  
gulum ipsius ΑΒΓ trianguli. Propter eadem uti-



αὐτὰ δὲ ὁσαυταπλάσιόν ἐστὶν ἡ ΓΑ βάσις τῆς ΒΓ  
βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛΓ τρί-  
γωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ  
βάσις τῇ ΓΑ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον  
τῇ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς  
ΓΑ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ  
ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Τεσσα-  
ρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ,

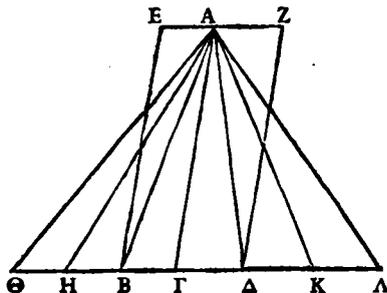
que quam multiplex est ΓΑ basis ipsius ΒΓ  
basis, tam multiplex est et ΑΛΓ triangulum  
ipsius ΑΓΔ trianguli; et si æqualis est ΘΓ basis  
ipsi ΓΑ basi, æquale est et ΑΘΓ triangulum  
ipsi ΑΛΓ triangulo; et si superat, ΘΓ basis ip-  
sam ΓΑ basim, superat et ΑΘΓ triangulum  
ipsum ΑΛΓ triangulum; et si minor, minus.  
Quatuor igitur existentibus magnitudinibus,

de droites qu'on voudra ΒΗ, ΗΘ, égales chacune à la base ΒΓ, et tant de droites  
qu'on voudra ΔΚ, ΚΛ, égales chacune à la base ΓΔ; joignons ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Puisque les droites ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ sont égales entr'elles, les triangles ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ sont égaux entr'eux (38. 1); donc le triangle ΑΘΓ est le même multiple du triangle ΑΒΓ que la base ΘΓ l'est de la base ΒΓ. Par la même raison, le triangle ΑΛΓ est le même multiple du triangle ΑΓΔ que la base ΓΑ l'est de la base ΓΔ. Donc si la base ΘΓ est égale à la base ΓΑ, le triangle ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ; si la base ΘΓ surpasse la base ΓΑ, le triangle ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ (38. 1); et si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΑ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ. Ayant donc quatre

ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἥτις ΘΓ βάση καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον· τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια, ἥτις ΓΛ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον· καὶ δίδικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάση τῆς ΓΔ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ

duabus quidem basibus ΒΓ, ΓΔ, duobus vero triangulis ΑΒΓ, ΑΓΔ, sumpta sunt æque multiplicia basis quidem ΒΓ et ΑΒΓ trianguli, ipsa ΘΓ basis et ΑΘΓ triangulum; basis vero ΓΔ et trianguli ΑΓΔ alia utcunq̄ æque multiplicia, ipsaque ΓΔ basis et ΑΛΓ triangulum. Et ostensum est si superat ΘΓ basis ipsam ΓΔ basim, superare et ΑΘΓ triangulum ipsum ΑΛΓ triangulum;



ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττων, ἔλαττον<sup>3</sup>. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάση πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ

et si æqualis, æquale; et si minor, minus; est igitur ut ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ quidem duplum est ΕΓ parallelogrammum, ipsius vero ΑΓΔ trianguli duplum est ΖΓ parallelogrammum, partes autem eandem habent rationem quam earum æque multiples; est igitur ut ΑΒΓ triangulum ad

grandeurs, les deux bases ΒΓ, ΓΔ; et les deux triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, on a pris des équimultiples quelconques de la base ΒΓ, et du triangle ΑΒΓ, savoir, la base ΘΓ et le triangle ΑΘΓ; on a pris aussi d'autres équimultiples quelconques de la base ΓΔ et du triangle ΑΓΔ, savoir, la base ΓΛ et le triangle ΑΛΓ; et l'on a démontré que si la base ΘΓ surpasse la base ΓΔ, le triangle ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ; que si la base ΘΓ est égale à la base ΓΔ, le triangle ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ, et que si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΔ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ; donc la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ (déf. 6. 5).

Puisque le parallélogramme ΕΓ est double du triangle ΑΒΓ, que le parallélogramme ΖΓ est double aussi du triangle ΑΓΔ (prop. 41. 1), et que les parties

τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἰδέσθην, ὡς ἢ μὲν ἡ ΒΓ βᾶσις πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον<sup>5</sup>, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον<sup>6</sup> οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βᾶσις πρὸς τὴν ΓΔ βᾶσιν οὕτως τὸν ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον<sup>7</sup>. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἰξῆς.

ΑΓΔ triangulum ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est, ut basis quidem ΒΓ ad ΓΔ basim ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum; ut autem ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum; et ut igitur ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum. Ergo triangula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Ἐὰν τριγώνου παρά μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῆ τις εὐθεΐα<sup>1</sup>, ἀνάλογον τιμῆ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἰὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἢ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγμένη εὐθεΐα παρά τὴν λοιπὴν ἴσται τοῦ τριγώνου πλευράν<sup>2</sup>.

Si trianguli juxta unum laterum ducatur quædam recta, illa proportionaliter secabit trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, ipsa sectiones conjungens recta juxta reliquum erit trianguli latus.

ont entr'elles la même raison que leurs équimultiples (prop. 15 5)., le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ. Puisqu'on a démontré que la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ, et puisque le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ, la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ (11. 5). Donc, etc.

PROPOSITION II.

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῆ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

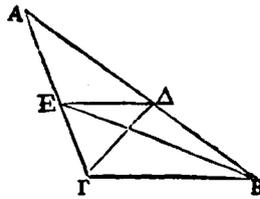
Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΔ.

Ἴσον δὴ<sup>3</sup> ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶ τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ. Ἄλλο δὲ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον· τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα

Trianguli enim ΑΒΓ parallela uni laterum ΒΓ ducatur ΔΕ; dico esse ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΔ.

Æquale utique est ΒΔΕ triangulum ipsi ΓΔΕ triangulo, in eadem enim basi sunt ΔΕ et intra easdem parallelas ΔΕ, ΒΓ. Aliud autem quoddam ΑΔΕ triangulum; æqualia vero ad idem eandem habent rationem; est igitur ut



ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον· οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην, πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ<sup>5</sup> ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

ΒΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum, ita ΓΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum. Sed ut ΒΔΕ quidem triangulum ad ΑΔΕ ita ΒΔ ad ΔΑ; nam cum sub eadem altitudine sint, sub ipsâ ab Ε ad ΑΒ perpendiculari ductâ, inter se sunt ut bases. Propter eadem utique ut ΓΔΕ triangulum ad ΑΔΕ ita ΓΕ ad ΕΑ; et ut igitur ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ.

Menons ΔΕ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ; je dis que ΒΑ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ.

Joignons ΒΕ, ΓΔ.

Le triangle ΒΔΕ sera égal au triangle ΓΔΕ (37. 1), parce qu'ils ont la même base ΔΕ, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles ΔΕ, ΒΓ. Mais ΑΔΕ est un autre triangle; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur (7. 5); donc le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ. Mais le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme ΒΔ est à ΔΑ; car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point Ε sur la droite ΑΒ, sont entr'eux comme leurs bases (1. 6). Par la même raison le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme ΓΕ est à ΕΑ; donc ΒΔ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ (11. 3).

Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, ὡς ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἢ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι παράλληλος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἢ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον<sup>6</sup>, ὡς δὲ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον<sup>7</sup>· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον<sup>8</sup> οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον<sup>9</sup>. Ἐκατέρων ἄρα τῶν ΒΔΕ, ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον<sup>10</sup> τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καὶ εἴσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. Τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ<sup>11</sup> ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

Sed et ΑΒΓ trianguli latera ΑΒ, ΑΓ proportionaliter secta sint in Δ, Ε punctis, ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ, et jungatur ΔΕ; dico parallelam esse ΔΕ ipsi ΒΓ.

Isdem enim constructis, quoniam est ut ΒΑ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ, sed ut ΒΔ quidem ad ΔΑ ita ΒΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum, ut ΓΕ vero ad ΕΑ ita ΓΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum; et ut igitur ΒΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum ita ΓΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum. Utrumque igitur ΒΔΕ, ΓΔΕ triangulorum ad ΑΔΕ triangulum eandem habet rationem. Æquale igitur est ΒΔΕ triangulum ipsi ΓΔΕ triangulo; et sunt super eadem basi ΔΕ. Æqualia autem triangula et super eadem basi constituta et intra easdem parallelas sunt. Parallela igitur est ΔΕ ipsi ΒΓ. Si igitur trianguli, etc.

Mais que les côtés ΑΒ, ΑΓ du triangle ΑΒΓ soient coupés proportionnellement aux points Δ, Ε, c'est-à-dire que ΒΔ soit à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ, et joignons ΔΕ; je dis que ΔΕ est parallèle à ΒΓ.

Faisons la même construction. Puisque ΒΔ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ, que ΒΔ est à ΔΑ comme le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ (1. 6), et que ΓΕ est à ΕΑ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ, le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ (11. 5). Donc chacun des triangles ΒΔΕ, ΓΔΕ a la même raison avec le triangle ΑΔΕ. Donc le triangle ΒΔΕ est égal au triangle ΓΔΕ (9. 5); et ils sont sur la même base ΔΕ. Mais les triangles égaux et construits sur la même base sont entre les mêmes parallèles (39. 1). Donc ΔΕ est parallèle à ΒΓ. Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

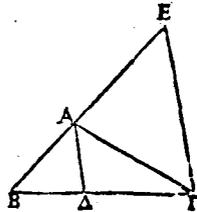
## PROPOSITIO III.

Εάν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῆ, ἢ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνη καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἰὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Ἐστω τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$ , καὶ τετμήσθω ἢ ὑπὸ  $BAG$  γωνία δίχα ὑπὸ τῆς  $AD$  εὐθείας· λέγω ὅτι ἰστὶν ὡς ἢ  $BD$  πρὸς τὴν  $D\Gamma$  οὕτως ἢ  $BA$  πρὸς τὴν  $AG$ ,

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta secet et basim; basis segmenta eandem habebunt rationem quam reliqua trianguli latera; et si basis segmenta eandem habeant rationem quam reliqua trianguli latera, ipsa a vertice ad sectionem ducta recta bifariam secat trianguli angulum.

Sit triangulum  $AB\Gamma$ , et secetur  $BAG$  angulus bifariam ab ipsa  $AD$  recta; dico esse ut  $BD$  ad  $D\Gamma$  ita  $BA$  ad  $AG$ .



Ἐχθω γὰρ διὰ τοῦ  $\Gamma$  τῆ  $DA$  παραλλήλος ἢ  $GE$ , καὶ διαχθεῖσα ἢ  $BA$  συμπίπτει αὐτῇ κατὰ τὸ  $E$ .

Ducatur enim per  $\Gamma$  ipsi  $DA$  perallica  $GE$ , et producta  $BA$  conveniat cum ipsa in  $E$ .

## PROPOSITION III.

Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les côtés restants de ce triangle; et si les segments de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite menée du sommet à la section, partagera l'angle de ce triangle en deux parties égales.

Soit le triangle  $AB\Gamma$ , que l'angle  $BAG$  soit partagé en deux parties égales par la droite  $AD$ ; je dis que  $BD$  est à  $D\Gamma$  comme  $BA$  est à  $AG$ .

Par le point  $\Gamma$  menons  $GE$  parallèle à  $DA$  (31. 1), et que  $BA$  prolongé rencontre  $GE$  au point  $E$ .

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐ-  
θεῖα ἐπέσειν<sup>3</sup> ἢ ΑΓ, ἢ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία  
ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. ΑΛΛ' ἢ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ  
ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἢ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ  
ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλή-  
λους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐπέσειν ἢ ΒΑΕ, ἢ  
ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ  
ὑπὸ ΑΕΓ. Εδείχθη δὲ καὶ ἢ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ  
ἴση, καὶ ἢ ὑπὸ ΑΓΕ ἄρα γωνία<sup>4</sup> τῇ ὑπὸ ΑΕΓ  
ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἢ ΑΕ πλευρᾶ τῇ ΑΓ  
ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρά μίαν  
τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἢ ΑΔ· ἀνάλογον ἄρα  
ἐστὶν ὡς ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἢ ΒΑ πρὸς  
τὴν ΑΕ. Ἰση δὲ ἢ ΑΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα<sup>5</sup> ἢ ΒΔ πρὸς  
τὴν ΔΓ οὕτως ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Αλλὰ δὲ ἔστω ὡς<sup>6</sup> ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως  
ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπιζεύχθω ἢ ΑΔ· λέγω  
ὅτι δίχα τέτμηται ἢ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς  
ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν  
ὡς ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ,  
ἄλλα καὶ ὡς ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἐστὶν<sup>7</sup> ἢ

Et quoniam in parallelas ΑΔ, ΕΓ recta incidit  
ΑΓ; ergo ΑΓΕ angulus æqualis est ipsi ΓΑΔ.  
Sed ΓΑΔ ipsi ΒΑΔ ponitur æqualis; et ΒΑΔ  
igitur ipsi ΑΓΕ est æqualis. Rursus quoniam in  
parallelas ΑΔ, ΕΓ recta incidit ΒΑΕ, exterior  
angulus ΒΑΔ æqualis est interiori ΑΕΓ. Ostensus  
autem est et ΑΓΕ ipsi ΒΑΔ æqualis; et ΑΓΕ  
igitur angulus ipsi ΑΕΓ est æqualis; quare et  
latus ΑΕ lateri ΑΓ est æquale. Et quoniam  
trianguli ΒΓΕ juxta unum laterum ΕΓ ducta  
est ipsa ΑΔ; proportionaliter igitur est ut ΒΔ  
ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΕ. Æqualis autem est ΑΕ  
ipsi ΑΓ; ut igitur ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ.

Sed et sit ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ; et  
jungatur ΑΔ; dico bifariam sectum esse ΒΑΓ  
angulum ab ΑΔ rectâ.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut ΒΔ  
ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ, sed et ut ΒΔ ad ΔΓ ita  
est ΒΑ ad ΑΕ; trianguli enim ΒΓΕ juxta unum

Puisque la droite ΑΓ tombe sur les parallèles ΑΔ, ΕΓ, l'angle ΑΓΕ est égal à  
l'angle ΓΑΔ (29. 1). Mais l'angle ΓΑΔ est supposé égal à l'angle ΒΑΔ; donc l'angle  
ΒΑΔ est égal à l'angle ΑΓΕ. De plus, puisque la droite ΒΑΕ tombe sur les parallèles  
ΑΔ, ΕΓ, l'angle extérieur ΒΑΔ est égal à l'angle intérieur ΑΕΓ (29. 1). Mais on  
a démontré que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΔ; donc l'angle ΑΓΕ est égal  
à l'angle ΑΕΓ; donc le côté ΑΕ sera égal au côté ΑΓ (6. 1). Et puisqu'on a mené  
la droite ΑΔ parallèle à un des côtés ΕΓ du triangle ΒΓΕ, la droite ΒΔ est à ΔΓ  
comme ΒΑ est à ΑΕ (2. 6). Mais ΑΕ est égal à ΑΓ; donc ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ  
est à ΑΓ (7. 5).

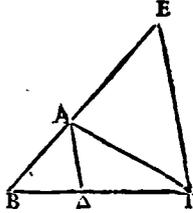
Mais que ΒΔ soit à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΓ; joignons ΑΔ; je dis que l'angle  
ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΔ.

Faisons la même construction. Puisque ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΓ, et  
que ΒΑ est à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΕ (2. 6), car la droite ΑΔ est parallèle à un

298 LE SIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

BA πρὸς τὴν ΑΕ· τριγώνου γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἤκται<sup>8</sup> ἢ ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἴση ἄρα ἢ ΑΓ τῇ ΑΕ, ὥστε καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἴσιν.

laterum ΕΓ ducta est ipsa ΑΔ; et ut igitur ΒΑ ad ΑΓ ita ΒΑ ad ΑΕ; æqualis igitur ΑΓ ipsi ΑΕ; quare et angulus ΑΕΓ angulo ΑΓΕ est æqualis. Sed ΑΕΓ quidem exteriori ΒΑΔ æqualis, ipse vero et ΑΓΕ alterno ΓΑΔ est æqualis;



Αλλ' ἢ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἰκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση, ἢ δὲ καὶ ἢ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλάξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἴσιν<sup>9</sup>· καὶ ἢ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἴσιν ἴση. Η ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα<sup>10</sup> τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας. Εὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

et ΒΑΔ igitur ipsi ΓΑΔ est æqualis. Ipse ΒΑΓ igitur angulus bifariam sectus est ab ΑΔ rectâ. Si igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογος αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί'.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera circa æquales angulos; et homologa æquales angulos subtendunt latera.

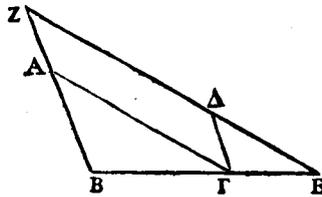
des côtés ΕΓ du triangle ΒΓΕ, la droite ΒΑ est à ΑΓ comme ΒΑ est à ΑΕ; donc ΑΓ est égal à ΑΕ (9. 5); donc l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle ΑΓΕ (5. 1). Mais l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle extérieur ΒΑΔ (29. 1), et l'angle ΑΓΕ égal à l'angle alterne ΓΑΔ; donc l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΓΑΔ; donc l'angle ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΔ. Donc, etc.

PROPOSITION IV.

Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels; et les côtés qui soutendent les angles égaux, sont homologues.

Εστω<sup>2</sup> ἰσογώνια τρίγωνα τὰ  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΓΕ$ , ἴσῃ ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνίαν τῇ ὑπὸ  $ΓΔΕ$ , τὴν δὲ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΓ$ , καὶ ἴτι τὴν ὑπὸ  $ΑΒΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΓΕ$ <sup>3</sup>. λέγω ὅτι τῶν  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΓΕ$  τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ<sup>4</sup>.

Sint æquiangula triangula  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΓΕ$ , æqualem habentia  $ΒΑΓ$  quidem angulum ipsi  $ΓΔΕ$ , ipsum vero  $ΑΓΒ$  ipsi  $ΔΕΓ$ , et præterea ipsum  $ΑΒΓ$  ipsi  $ΔΓΕ$ ; dico  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΓΕ$  triangulorum proportionalia esse latera circa æquales angulos; et homologa æquales angulos subtendere latera.



Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ  $ΒΓ$  τῇ  $ΓΕ$ . Καὶ ἔπει αἱ ὑπὸ  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΓΒ$  γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΓ$ , αἱ ἄρα ὑπὸ<sup>5</sup>  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΓ$  δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν· αἱ  $ΒΑ$ ,  $ΕΔ$  ἄρα ἐκκαλλόμεναι συμπίσονται. Εκτεθλήσθωσαν, καὶ συμπίπτειν κατα τὸ  $Ζ$ .

Καὶ ἔπει ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΔΓΕ$  γωνία τῇ ὑπὸ<sup>6</sup>  $ΑΒΓ$ , παράλληλος ἄρα<sup>7</sup> ἐστὶν ἡ  $ΒΖ$  τῇ  $ΓΔ$ . Πάλιν, ἔπει ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΓ$ , παράλληλος ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΖΕ$ . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΖΑΓΔ$ . ἴση ἄρα ἡ μὲν  $ΖΑ$

Ponatur enim in directum ipsa  $ΒΓ$  ipsi  $ΓΕ$ . Et quoniam  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΓΒ$  anguli duobus rectis minores sunt, æqualis autem  $ΑΓΒ$  ipsi  $ΔΕΓ$ , ipsi igitur  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΓ$  duobus rectis minores sunt; ipsæ  $ΒΑ$ ,  $ΕΔ$  igitur productæ conveniunt. Producantur, et convenient in  $Ζ$ .

Et quoniam æqualis est  $ΔΓΕ$  angulus ipsi  $ΑΒΓ$ , parallela igitur est  $ΒΖ$  ipsi  $ΓΔ$ . Rursus, quoniam æqualis est  $ΑΓΒ$  ipsi  $ΔΕΓ$ , parallela est  $ΑΓ$  ipsi  $ΖΕ$ ; parallelogrammum igitur est  $ΖΑΓΔ$ ; æqualis igitur  $ΖΑ$  quidem ipsi  $ΔΓ$ , ipsa

Soient les triangles équiangles  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΓΕ$ , ayant l'angle  $ΒΑΓ$  égal à l'angle  $ΓΔΕ$ , l'angle  $ΑΓΒ$  égal à l'angle  $ΔΕΓ$ , et l'angle  $ΑΒΓ$  égal à l'angle  $ΔΓΕ$ ; je dis que dans les triangles  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΓΕ$ , les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et que les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues.

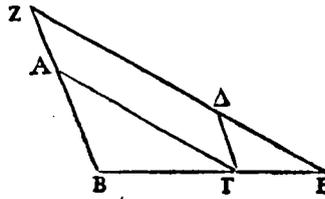
Plaçons la droite  $ΒΓ$  dans la direction de  $ΓΕ$ . Et puisque les angles  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΓΒ$  sont plus petits que deux droits (17. 1), et que l'angle  $ΑΓΒ$  est égal à l'angle  $ΔΕΓ$ , les angles  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΓ$  sont plus petits que deux droits; donc les droites  $ΒΑ$ ,  $ΕΔ$ , étant prolongées, se rencontreront (not. com. 11); qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent en  $Ζ$ .

Et puisque l'angle  $ΔΓΕ$  est égal à l'angle  $ΑΒΓ$ , la droite  $ΒΖ$  est parallèle à la droite  $ΓΔ$  (28. 1). De plus, puisque l'angle  $ΑΓΒ$  est égal à l'angle  $ΔΕΓ$ , la droite  $ΑΓ$  est parallèle à  $ΖΕ$ ; donc la figure  $ΖΑΓΔ$  est un parallélo-

300 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῆ ΔΓ, ἢ δὲ ΑΓ τῆ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΖΕ ἤκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῆ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΖΔ

vero ΑΓ ipsi ΖΔ. Et quoniam trianguli ΖΒΕ juxta unum laterum ΖΕ ducta est ΑΓ, est igitur ut ΒΑ ad ΑΖ ita ΒΓ ad ΓΕ. Æqualis autem ΑΖ ipsi ΓΔ; ut igitur ΒΑ ad ΓΔ ita ΒΓ ad ΓΕ, et alterne ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ. Rursus, quoniam parallela est ΓΔ ipsi ΒΖ, est igitur ut ΒΓ ad ΓΕ ita ΖΔ ad ΔΕ. Æqualis autem ΖΔ ipsi ΑΓ; ut igitur ΒΓ ad ΓΕ ita ΑΓ ad



πρὸς τὴν ΔΕ. Ἴση δὲ ἡ ΖΔ τῆ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΔ, ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. Καὶ ἐπεὶ<sup>10</sup> εἰδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ<sup>11</sup> δίσσου ἄρα ὡς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ. Τῶν ἄρα ἰσογωνίων, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΕΔ, alterne igitur ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ. Et quoniam ostensum est, ut ΑΒ quidem ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ; ut vero ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ; et ex æquo igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ. Æquiangularum igitur, etc.

gramme; donc ΖΑ est égal à ΔΓ, et ΑΓ égal à ΖΔ (34. 1). Et puisqu'un des côtés ΑΓ du triangle ΖΒΕ, est parallèle au côté ΖΕ, ΒΑ est à ΑΖ comme ΒΓ est à ΓΕ (2. 6). Mais ΑΖ est égal à ΓΔ; donc ΒΑ est à ΓΔ comme ΒΓ est à ΓΕ (7. 5), et, par permutation (16. 5), ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΓ est à ΓΕ (16. 5). De plus, puisque ΓΔ est parallèle à ΒΖ, ΒΓ est à ΓΕ comme ΖΔ est à ΔΕ. Mais ΖΔ est égal à ΑΓ; donc ΒΓ est à ΓΕ comme ΑΓ est à ΕΔ, et, par permutation, ΒΓ est à ΓΑ comme ΓΕ est à ΕΔ. Et puisqu'on a démontré que ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΓ est à ΓΕ, et que ΒΓ est à ΓΑ comme ΓΕ est à ΕΔ, ΒΑ sera à ΑΓ comme ΓΔ est à ΔΕ (22. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

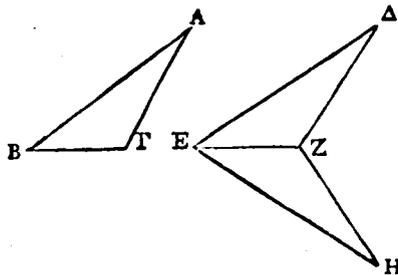
PROPOSITIO V.

Εάν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτί-  
νουσιν.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$  τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν  $AB$  πρὸς τὴν  $BΓ$  οὕτως τὴν  $ΔE$  πρὸς τὴν  $EZ$ , ὡς δὲ τὴν  $BΓ$  πρὸς τὴν  $ΓA$  οὕτως τὴν  $EZ$  πρὸς τὴν  $ZΔ$ , καὶ ἔτι ὡς ἡ

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et æquales habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

Sint duo triangula  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$  latera proportionalia habentia, ut  $AB$  quidem ad  $BΓ$  ita  $ΔE$  ad  $EZ$ , ut  $BΓ$  vero ad  $ΓA$  ita  $EZ$  ad  $ZΔ$ ; et adhuc ut  $BA$  ad  $ΑΓ$  ita  $EA$  ad  $ΔZ$ ;



$BA$  πρὸς τὴν  $ΑΓ$  οὕτως τὴν  $EA$  πρὸς τὴν  $ΔZ$ . λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔEZ$  τρίγῳ, καὶ ἴσας ἔξουσι τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτίουσι, τὴν μὲν ὑπὸ  $ABΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΔEZ$ , τὴν δὲ ὑπὸ  $BΓA$  τῇ ὑπὸ  $EZΔ$ , καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ  $BΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $EΔZ$ .

dico æquiangulum esse  $ABΓ$  triangulum ipsi  $ΔEZ$  triangulo, et æquales illa habitura esse angulos, quos homologa latera subtendunt, ipsum quidem  $ABΓ$  ipsi  $ΔEZ$ , ipsum vero  $BΓA$  ipsi  $EZΔ$ ; et insuper ipsum  $BΑΓ$  ipsi  $EΔZ$ .

PROPOSITION V.

Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, ils seront équiangles, et ils auront les angles soutendus par les côtés homologues égaux entr'eux.

Soient deux triangles  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ , ayant les côtés proportionnels, que  $AB$  soit à  $BΓ$  comme  $ΔE$  est à  $EZ$ , que  $BΓ$  soit à  $ΓA$  comme  $EZ$  est à  $ZΔ$ , et que  $BA$  soit à  $ΑΓ$  comme  $EA$  est à  $ΔZ$ ; je dis que les triangles  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$  sont équiangles, et que les angles soutendus par les côtés homologues seront égaux, l'angle  $ABΓ$  égal à l'angle  $ΔEZ$ , l'angle  $BΓA$  égal à l'angle  $EZΔ$ , et enfin l'angle  $BΑΓ$  égal à l'angle  $EΔZ$ .

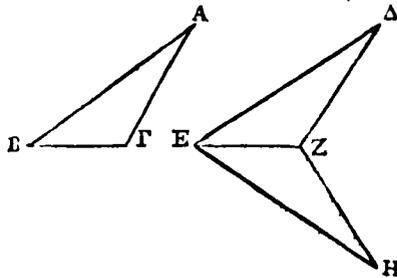
302 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ EZ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς E, Z, τῇ μὲν ὑπὸ ABΓ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ZEH, τῇ δὲ ὑπὸ BΓA ἴση ἢ ὑπὸ EZH· λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ Δ λοιπὴ πρὸς τῷ H ἴστίιν ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα ἴστί τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ EHZ· τῶν ἄρα ABΓ, EHZ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἰ πλευραὶ, αἰ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἰ

Constituatur enim ad EZ rectam, et ad puncta in eâ E, Z, ipsi quidem ABΓ angulo æqualis ZEH, ipsi vero æqualis BΓA ipse EZH; reliquus igitur ad Δ reliquo ad H est æqualis.

Æquiangulum igitur est ABΓ triangulum ipsi EHZ; ipsorum igitur ABΓ, EHZ triangulorum proportionalia sunt latera, circum æquales an-



ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴστίιν ἄρα ὡς ἢ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἢ HE πρὸς τὴν EZ. ἀλλ' ὡς ἢ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ὑπόκειται ἢ ΔE πρὸς τὴν EZ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΔE πρὸς τὴν EZ οὕτως ἢ HE πρὸς τὴν EZ· ἑκάτερα ἄρα τῶν ΔE, HE πρὸς τὴν EZ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἴστίιν ἢ ΔE τῇ HE. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἢ ΔZ τῇ HZ ἴστίιν ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἴστίιν ἢ ΔE τῇ EH, κοινὴ δὲ ἢ EZ, δύο δὲ αἰ ΔE,

gulos, et homologa æquales angulos latera subtendunt; est igitur ut AB ad BΓ ita HE ad EZ. Sed ut AB ad BΓ ita ponitur ΔE ad EZ; et ut igitur ΔE ad EZ ita HE ad EZ; utraque igitur ipsarum ΔE, HE ad EZ eandem habet rationem; æqualis igitur est ΔE ipsi HE. Propter eadem utique et ΔZ ipsi HZ æqualis est. Et quoniam æqualis est ΔE ipsi EH, communis autem EZ; duæ utique ΔE, EZ duabus HE, EZ

Construisons sur EZ et aux points E, z l'angle ZEH égal à l'angle ABΓ et l'angle EZH égal à l'angle BΓA (23. 1); l'angle restant Δ sera égal à l'angle restant H (32. 1).

Les triangles ABΓ, EHZ seront équiangles; donc dans les triangles ABΓ, EHZ, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues (4. 6); donc AB est à BΓ comme HE est à EZ. Mais AB est supposé être à BΓ comme ΔE est à EZ; donc ΔE est à EZ comme HE est à EZ (11. 5); donc chacune des droites ΔE, HE a la même raison avec EZ; donc ΔE est égal à HE (9. 5). La droite ΔZ est égale à HZ, par la même raison. Donc, puisque ΔE est égal à EH, et que la droite EZ est

ΕΖ δύο ταῖς ΗΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βᾶσις ἡ ΖΔ βάσει τῆ ΖΗ ἐστὶν ἴση<sup>5</sup>. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία τῆ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστὶν ἴση. Καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῆ ὑπὸ ΗΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΖ τῆ ὑπὸ ΕΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΕΔ τῆ ὑπὸ ΖΕΗ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῆ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση<sup>6</sup>. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῆ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῆ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση, καὶ ἐπὶ ἡ πρὸς τῷ Α πρὸς τῷ Δ<sup>8</sup>. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Εὖν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἕξῃς.

æquales sunt, et basis ΖΔ basi ΖΗ est æqualis; angulus igitur ΔΕΖ angulo ΗΕΖ est æqualis. Et ΔΕΖ triangulum ipsi ΗΕΖ triangulo æquale, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est et ΔΖΕ quidem angulus ipsi ΗΖΕ, ipse vero ΕΔΖ ipsi ΕΗΖ. Et quoniam ipse quidem ΖΕΔ ipsi ΖΕΗ est æqualis, sed ΗΕΖ ipsi ΑΒΓ est æqualis, et ΑΒΓ igitur angulus ipsi ΔΕΖ est æqualis. Propter eadem utique ipse quidem ΑΒΓ ipsi ΔΖΕ est æqualis, et insuper ipse ad Α ipsi ad Δ; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

PROPOSITIO VI.

Εὖν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχον, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' ἂς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula crunt triangula, et æquales habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

commune, les deux droites ΔΕ, ΕΖ sont égales aux deux droites ΗΕ, ΕΖ; mais la base ΖΔ est égale à la base ΖΗ; donc l'angle ΔΕΖ est égal à l'angle ΗΕΖ (8. 1); donc le triangle ΔΕΖ est égal au triangle ΗΕΖ, et les autres angles que soutendent des côtés égaux sont égaux; donc l'angle ΔΖΕ est égal à l'angle ΗΖΕ, et l'angle ΕΔΖ égal à l'angle ΕΗΖ. Et puisque ΖΕΔ est égal à l'angle ΖΕΗ, et que l'angle ΗΕΖ est égal à l'angle ΑΒΓ, l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ. Par la même raison, l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΔΖΕ, et l'angle en Α égal à l'angle en Δ; donc les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

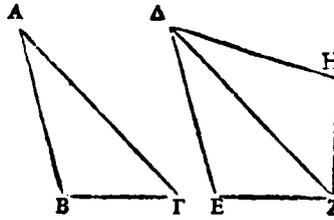
PROPOSITION VI.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, ces deux triangles seront équiangles, et les angles soutendus par des côtés homologues seront égaux.

304 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰ ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἔξει τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Siut duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, unum angulum ΒΑΓ uni angulo ΕΔΖ æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΕΔ ad ΔΖ; dico æquiangulum esse ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo, et æqualem habiturum esse ΑΒΓ quidem angulum ipsi ΔΕΖ, ipsum vero ΑΓΒ ipsi ΔΖΕ.



Συνοστάτω γὰρ πρὸς μὲν τῇ ΔΖ ὀρθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, Ζ, ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ ἴση ἢ ὑπὸ ΖΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἢ ὑπὸ ΔΖΗ.

Constituatur enim ad ΔΖ quidam rectam, et ad puncta in ipsâ Δ, Ζ, alterutri ipsorum quidem ΒΑΓ, ΕΔΖ æqualis angulus ΖΔΗ, ipsi vero ΑΓΒ æqualis ipse ΔΖΗ.

Λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ Β γωνία<sup>2</sup> λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστίν ὡς ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἢ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἢ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΕΔ πρὸς τὴν

Reliquus igitur ad Β angulus reliquo ad Η æqualis est; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΗΖ triangulo; proportionaliter igitur est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΗΔ ad ΔΖ. Ponitur autem et ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΕΔ ad ΔΖ; et ut igitur ΕΔ ad ΔΖ ita ΗΔ ad ΔΖ;

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΕΑΖ, et les côtés autour des angles égaux proportionnels, de manière que ΒΑ soit à ΑΓ comme ΕΑ est à ΔΖ; je dis que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles, et que l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΑΓΒ égal à l'angle ΔΖΕ.

Sur la droite ΔΖ, et aux points Δ, Ζ de cette droite, construisons l'angle ΖΔΗ égal à l'un ou à l'autre des angles ΒΑΓ, ΕΑΖ, et l'angle ΔΖΗ égal à l'angle ΑΓΒ (23. 1).

L'angle restant en Β sera égal à l'angle restant en Η (32. 1); donc les triangles ΑΒΓ, ΔΗΖ sont équiangles; donc ΒΑ est à ΑΓ comme ΗΔ est à ΔΖ (4. 6). Mais on suppose que ΒΑ est à ΑΓ comme ΕΑ est à ΔΖ; donc ΕΑ est à ΔΖ comme ΗΔ

ΔΖ οὕτως ἢ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἴση ἄρα ἢ ΕΔ τῇ ΔΗ, καὶ κοινὴ ἢ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυοὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΕΔΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΔΖ ἴση<sup>3</sup>. βάσις ἄρα ἢ ΕΖ βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται<sup>4</sup>, ὅφ' αἷ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπετείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἢ δὲ ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ<sup>5</sup>. ΑΛΛ' ἢ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ ἢ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση. ὑπόκειται δὲ καὶ ἢ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

æqualis igitur ΕΔ ipsi ΔΗ, et communis ΔΖ; duæ igitur ΕΔ, ΔΖ duabus ΗΔ, ΔΖ æquales sunt, et angulus ΕΔΖ angulo ΗΔΖ æqualis; basis igitur ΕΖ basi ΖΗ est æqualis, et ΔΕΖ triangulum ipsi ΔΗΖ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est ΔΖΗ quidem ipsi ΔΖΕ, ipse vero ΔΗΖ ipsi ΔΕΖ. Sed ipse ΔΖΗ ipsi ΑΓΒ est æqualis, et ΑΓΒ igitur ipsi ΔΖΕ est æqualis. Ponitur autem et ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ æqualis; et reliquus igitur ad Β reliquo ad Ε æqualis est; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo triangula, etc.

est à ΔΖ (11. 5); donc ΕΔ est égal à ΔΗ (9. 5); mais ΔΖ est commun; donc les deux droites ΕΔ, ΔΖ sont égales aux deux droites ΗΔ, ΔΖ; mais l'angle ΕΔΖ est égal à l'angle ΗΔΖ; donc la base ΕΖ est égale à la base ΖΗ (4. 1); donc le triangle ΔΕΖ est égal au triangle ΔΗΖ, et les autres angles seront égaux aux autres angles, savoir, ceux qui sont soutendus par des côtés égaux; donc l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΔΖΕ, et l'angle ΔΗΖ égal à l'angle ΔΕΖ. Mais l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΑΓΒ; donc l'angle ΑΓΒ est égal à ΔΖΕ. Mais l'angle ΒΑΓ est supposé égal à l'angle ΕΔΖ; donc l'angle restant en Β est égal à l'angle restant en Ε (52. 1); donc les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ

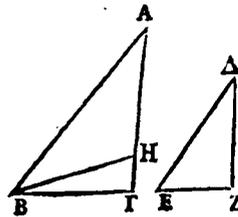
PROPOSITIO VII.

Εάν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μίαν γωνία ἴσην ἔχη, περί δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἢτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, περί αἷ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , μίαν γωνίαν μίαν γωνία ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ  $BAG$  τῆ

Si duo triacula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliquorum vero utrumque simul vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triacula, et æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera.

Sint duo triacula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , unum angulum uni angulo æqualem habentia, ipsum  $BAG$



ὑπὸ  $E\Delta Z$ , περί δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν  $AB$  πρὸς τὴν  $B\Gamma$  οὕτως τὴν  $\Delta E$  πρὸς τὴν  $EZ$ , τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς  $\Gamma$ ,  $Z$  πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ  $AB\Gamma$

ipsi  $E\Delta Z$ , circa alios autem angulos  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , latera proportionalia, ut  $AB$  ad  $B\Gamma$  ita  $\Delta E$  ad  $EZ$ , reliquorum vero ad  $\Gamma$ ,  $Z$  primum utrumque simul minorem recto; dico æquiangulum esse  $AB\Gamma$  triangulum ipsi  $\Delta EZ$

PROPOSITION VII.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, si les côtés autour des autres angles sont proportionnels, et si l'un et l'autre des angles restants sont en même temps ou plus petits ou non plus petits qu'un droit, les triangles seront équiangles, et les angles compris par les côtés proportionnels seront égaux.

Soient les deux triangles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , ayant un angle égal à un angle, savoir, l'angle  $BAG$  égal à l'angle  $E\Delta Z$ , et les côtés autour des autres angles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  proportionnels entr'eux, de manière que  $AB$  soit à  $B\Gamma$  comme  $\Delta E$  est à  $EZ$ , et que chacun des autres angles en  $\Gamma$ ,  $Z$  soit d'abord plus petit qu'un angle droit;

τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἴσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλοῖται ἢ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

Εἰ γὰρ ἀνίσος ἴσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἴσται. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἴσται ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία<sup>3</sup> τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἴσται ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἴσται τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· ἴσται ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ ὑπόκειται οὕτως<sup>4</sup> ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ<sup>5</sup>, ἡ ΑΒ ἄρα<sup>6</sup> πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ, ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἴσται ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ<sup>6</sup>. ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἴσται ἴση<sup>7</sup>. Ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ Γ<sup>8</sup> ἡ ἐλάττων ἄρα ἴσται ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, ὥστε ἡ ἰσότης αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἴσται ὀρθῆς. Καὶ εἰδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα

triangulo, et æqualem fore ΑΒΓ angulum ipsi ΔΕΖ, et reliquum videlicet ad Γ reliquo ad Ζ æqualem.

Si enim inæqualis est ΑΒΓ angulus ipsi ΔΕΖ, unus ipsorum major est. Sit major ΑΒΓ; et constituatur ad ΑΒ rectam et ad punctum in cā Β, ipsi ΔΕΖ angulo æqualis ipse ΑΒΗ.

Et quoniam æqualis est Α quidem angulus ipsi Δ, ipse vero ΑΒΗ angulus ipsi ΔΕΖ, reliquus igitur ΑΗΒ reliquo ΔΖΕ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΗ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo; est igitur ut ΑΒ ad ΒΗ ita ΔΕ ad ΕΖ. Ὡτ autem ΔΕ ad ΕΖ ponitur ita ΑΒ ad ΒΓ; et ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΒ ad ΒΗ, ipsa igitur ΑΒ ad utramque ipsarum ΒΓ, ΒΗ eandem habet rationem; æqualis igitur est ΒΓ ipsi ΒΗ; quare et angulus ad Γ angulo ΒΗΓ est æqualis. Minor autem recto ponitur ipse ad Γ; minor igitur est recto ipse ΒΗΓ, quare ipse ei deinceps angulus ΑΗΒ major est recto. Et ostensus est æqualis esse ipsi ad Ζ, et ipse ad Ζ igitur major est recto. Ponitur autem

je dis que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles, que l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle restant en Γ égal à l'angle restant en Ζ.

Car si l'angle ΑΒΓ n'est pas égal à l'angle ΔΕΖ, l'un des deux sera plus grand. Que l'angle ΑΒΓ soit le plus grand; et construisons sur la droite ΑΒ et au point Β de cette droite, l'angle ΑΒΗ égal à l'angle ΔΕΖ (23. 1).

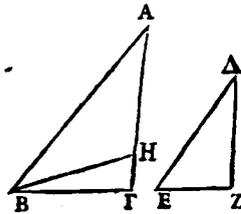
Et puisque l'angle Α est égal à l'angle Δ, et l'angle ΑΒΗ égal à l'angle ΔΕΖ l'angle restant ΑΗΒ est égal à l'angle restant ΔΖΕ (32. 1); donc les triangles ΑΒΗ, ΔΕΖ sont équiangles; donc ΑΒ est à ΒΗ comme ΔΕ est à ΕΖ (4. 6). Mais ΔΕ est supposé être à ΕΖ comme ΑΒ est à ΒΓ (11. 5); donc ΑΒ est à ΒΓ comme ΑΒ est à ΒΗ; donc la droite ΑΒ à la même raison avec chacune des droites ΒΓ, ΒΗ; donc ΒΓ est égal à ΒΗ; donc l'angle en Γ est égal à l'angle ΒΗΓ (5. 1). Mais l'angle en Γ est supposé plus petit qu'un droit; donc l'angle ΒΗΓ est plus petit qu'un droit; donc l'angle de suite ΑΗΒ est plus grand qu'un droit (13. 1). Mais on a démontré qu'il est égal à l'angle Ζ; donc l'angle Ζ est plus grand qu'un

μείζων ἴσθιν ὀρθῆς. Ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ἰρθῆς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἀνισός ἴσθιν ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῆ ὑπὸ ΔEZ, ἴση ἄρα. Ἐσθιν δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ A ἴση τῆ πρὸς τῷ Δ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπὴ τῆ πρὸς τῷ Z ἴση ἴσθιν· ἴσογώνιον ἄρα ἴσθιν τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Z μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν ὅτι καὶ οὕτως ἴσογώνιον ἴσθιν τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

minor recto, quod absurdum; non igitur inæqualis est ABΓ angulus ipsi ΔEZ, æqualis igitur. Est autem et ipse ad A æqualis ei ad Δ, et reliquus igitur ad Γ reliquo ad Z æqualis est; æquiangulum igitur est ABΓ triangulum ipsi ΔEZ triangulo.

Sed et rursus ponatur uterque ipsorum ad Γ, Z non minor recto; dico rursus et sic æquiangulum esse ABΓ triangulum ipsi ΔEZ triangulo.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴση ἴσθιν ἡ BΓ τῆ BH· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῆ ὑπὸ BHΓ ἴση ἴσθιν. Οὐκ ἐλάττων δὲ ἰρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ, οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ BHΓ. Τριγώνου δὴ τοῦ BHΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττονες, ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πάλιν ἀνισός ἴσθιν ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῆ ὑπὸ ΔEZ, ἴση ἄρα. Ἐσθιν

hisdem enim constructis, similiter ostendemus æqualem esse BΓ ipsi BH; quare et angulus ad Γ ipsi BHΓ æqualis est. Non minor autem recto ad Γ; non minor igitur recto neque ipse BHΓ. Trianguli igitur BHΓ duo anguli duobus rectis non sunt minores, quod est impossibile; non igitur rursus inæqualis est ABΓ angulus ipsi ΔEZ; æqualis igitur.

droit. Mais on a supposé qu'il était plus petit qu'un droit, ce qui est absurde; donc les angles ABΓ, ΔEZ ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle en A est égal à l'angle en Δ; donc l'angle restant en Γ est égal à l'angle restant en Z; donc les triangles ABΓ, ΔEZ sont équiangles.

Mais que chacun des angles Γ, Z ne soit pas plus petit qu'un droit; je dis encore que les triangles ABΓ, ΔEZ sont équiangles.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que BΓ est égal à BH; donc l'angle en Γ est égal à l'angle BHΓ. Mais l'angle Γ n'est pas plus petit qu'un droit; donc l'angle BHΓ n'est pas plus petit qu'un droit. Donc deux angles du triangle BHΓ ne sont pas plus petits que deux droits, ce qui est impossible (17. 1), donc les angles ABΓ, ΔEZ ne sont pas encore

δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῆ πρὸς τῷ Δ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπὴ τῆ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τριγώνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Est autem et ipse ad A ipsi ad Δ æqualis, reliquus igitur ad Γ reliquo ad Ζ æqualis est; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo triangula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

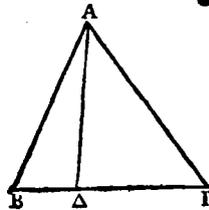
Ἐὰν ἐν ὀρθογώνιῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῆ· τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὁμοιά ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ

PROPOSITIO VIII.

Si in rectangulo triangulo ab recto angulo ad basim perpendicularis ducatur; ipsa ad perpendicularem triangula similia sunt et toti et inter se.

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum habens ΒΑΓ angulum, et ducatur ab Α ad ΒΓ



τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ὁμοίων ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.

perpendicularis ΑΔ; dico simile esse utrumque ipsorum ΑΒΔ, ΑΔΓ triangulorum toti ΑΒΓ et insuper, inter se.

inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle en A est égal à l'angle en Δ; donc l'angle restant en Γ est égal à l'angle restant en Ζ (32. 1); donc les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

PROPOSITION VIII.

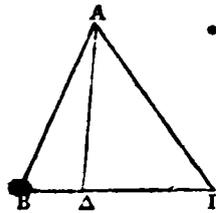
Si dans un triangle rectangle on mène une perpendiculaire de l'angle droit sur la base, les triangles adjacents à la perpendiculaire sont semblables au triangle entier et semblables entr'eux.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, ayant l'angle droit ΒΑΓ; du point Α menons sur la base ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ; je dis que les triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ sont semblables au triangle entier ΑΒΓ et semblables entr'eux.

310 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρω, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦτε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἢ πρὸς τῷ Β· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἢ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ

Quoniam enim æqualis est ΒΑΓ angulus ipsi ΑΔΒ, rectus enim uterque, et communis duobus triangulis et ΑΒΓ et ΑΒΔ ipse ad Β; reliquus igitur ΑΓΒ reliquo ΒΑΔ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΒΔ triangulo. Est igitur ut ΒΓ subtendens rectum ipsius ΑΒΓ trianguli ad ΒΑ subtendentem angulum rectum ipsius ΑΒΔ trianguli, ita eadem ΑΒ subtendens ipsum ad Γ angulum ipsius



ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ, τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου· καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, κοινὴ τῶν δύο τριγώνων· τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιον τὴ ἐστὶ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὁμοίον ἄρα ἐστὶ<sup>3</sup> τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι

ΑΒΓ trianguli ad ΒΑ subtendentem angulum æqualem ipsi ad Γ, ipsum ΒΑΔ ipsius ΑΒΔ trianguli; et etiam ΑΓ ad ΑΔ subtendentem ipsum ad Β angulum, communem duobus triangulis; ipsum ΑΒΓ igitur triangulum ipsi ΑΒΔ triangulo et æquiangulum est, et ipsa circa æquales angulos latera proportionalia habet; simile igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΒΔ trian-

Car puisque l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΑΔΒ, étant droits l'un et l'autre, et que l'angle en Β est commun aux deux triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ, l'angle restant ΑΓΒ est égal à l'angle restant ΒΑΔ (32. 1); donc les deux triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ sont équiangles. Donc le côté ΒΓ qui soutend l'angle droit du triangle ΑΒΓ, est au côté ΒΑ qui soutend l'angle droit du triangle ΑΒΔ, comme le côté ΑΒ qui soutend l'angle en Γ du triangle ΑΒΓ, est au côté ΒΑ qui soutend un angle égal à l'angle Γ, c'est-à-dire l'angle ΒΑΔ du triangle ΑΒΔ, et comme le côté ΑΓ est au côté ΑΔ qui soutend l'angle Β, commun aux deux triangles; donc les triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ sont équiangles, et ils ont les côtés autour des angles égaux proportionnels (4. 6); donc le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ (déf. 1. 6). Nous démontrerons semblablement que le triangle ΑΔΓ est

καὶ τῷ  $\Delta\Delta\Gamma$  τριγώνῳ ὁμοιον ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον<sup>4</sup>. ἑκάτερον ἄρα τῶν  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  τριγώνων ὁμοίον ἐστὶν ὅλῳ τῷ  $AB\Gamma$  τριγώνῳ<sup>5</sup>.

Λίγω δὲ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὁμοια τὰ  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  τρίγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἢ ὑπὸ  $B\Delta A$  ὀρθῇ τῇ ὑπὸ  $\Delta\Delta\Gamma$  ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ  $B\Delta\Delta$  τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$  εἰδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ  $B$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $\Delta\Delta\Gamma$  ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB\Delta$  τρίγωνον τῷ  $\Delta\Delta\Gamma$  τριγώνῳ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἢ  $B\Delta$  τοῦ  $AB\Delta$  τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ  $B\Delta\Delta$ , πρὸς τὴν  $\Delta A$  τοῦ  $\Delta\Delta\Gamma$  τριγώνου, ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ  $\Gamma$  γωνίαν<sup>6</sup>, ἴσην τῇ ὑπὸ  $B\Delta\Delta$ , οὕτως αὐτὴ ἢ  $\Delta\Delta$  τοῦ  $AB\Delta$  τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ  $B$  γωνίαν, πρὸς τὴν  $\Delta\Gamma$  ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ  $\Delta\Delta\Gamma$  τοῦ  $\Delta\Delta\Gamma$  τριγώνου, ἴσην τῇ πρὸς τῷ  $B$ · καὶ ἔτι ἢ  $BA$  ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ  $\Delta\Delta B$ , πρὸς τὴν  $\Delta\Gamma$  ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ  $\Delta\Delta\Gamma$ <sup>7</sup>. ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB\Delta$  τρίγωνον τῷ  $\Delta\Delta\Gamma$  τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογώνῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

Similiter utique ostendemus et ipsi  $\Delta\Delta\Gamma$  triangulo simile esse  $AB\Gamma$  triangulum; utrumque igitur ipsorum  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  triangulorum simile est toti  $AB\Gamma$  triangulo.

Dico etiam et inter se esse similia  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  triangula.

Quoniam enim rectus  $B\Delta A$  recto  $\Delta\Delta\Gamma$  est æqualis, sed quidem et ipse  $B\Delta\Delta$  ipsi ad  $\Gamma$  ostensus est æqualis, et reliquus igitur ad  $B$  reliquo  $\Delta\Delta\Gamma$  est æqualis; æquiangulum igitur est  $AB\Delta$  triangulum ipsi  $\Delta\Delta\Gamma$  triangulo. Est igitur ut  $B\Delta$  ipsius  $AB\Delta$  trianguli, subtendens ipsum  $B\Delta\Delta$ , ad  $\Delta A$  ipsius  $\Delta\Delta\Gamma$  trianguli, subtendentem ipsum ad  $\Gamma$  angulum, æqualem ipsi  $B\Delta\Delta$ , ita eadem  $\Delta\Delta$  ipsius  $AB\Delta$  trianguli, subtendens ipsum ad  $B$  angulum, ad  $\Delta\Gamma$  subtendentem  $\Delta\Delta\Gamma$  angulum ipsius  $\Delta\Delta\Gamma$  trianguli, æqualem ipsi ad  $B$ , et etiam  $BA$  subtendens rectum  $\Delta\Delta B$ , ad  $\Delta\Gamma$  subtendentem rectum  $\Delta\Delta\Gamma$ ; simile igitur est  $AB\Delta$  triangulum ipsi  $\Delta\Delta\Gamma$  triangulo. Si igitur in rectangulo, etc.

semblable au triangle  $AB\Gamma$ ; donc chacun des triangles  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  est semblable au triangle entier  $AB\Gamma$ .

Je dis aussi que les triangles  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  sont semblables entr'eux.

Car puisque l'angle droit  $B\Delta A$  est égal à l'angle droit  $\Delta\Delta\Gamma$ , et qu'en a démontré que l'angle  $B\Delta\Delta$  est égal à l'angle en  $\Gamma$ , l'angle restant en  $B$  est égal à l'angle restant  $\Delta\Delta\Gamma$  (32. 1); donc les deux triangles  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  sont équiangles. Donc le côté  $B\Delta$  du triangle  $AB\Delta$ , qui soutend l'angle  $B\Delta\Delta$ , est au côté  $\Delta A$  du triangle  $\Delta\Delta\Gamma$ , qui soutend l'angle  $\Gamma$ , égal à l'angle  $B\Delta\Delta$ , comme le côté  $\Delta\Delta$  du triangle  $AB\Delta$ , qui soutend l'angle en  $B$ , est au côté  $\Delta\Gamma$ , qui soutend l'angle  $\Delta\Delta\Gamma$  du triangle  $\Delta\Delta\Gamma$ , égal à l'angle en  $B$ ; et comme le côté  $BA$ , qui soutend l'angle droit  $\Delta\Delta B$ , est au côté  $\Delta\Gamma$  qui soutend l'angle droit  $\Delta\Delta\Gamma$  (4. 6); donc le triangle  $AB\Delta$  est semblable au triangle  $\Delta\Delta\Gamma$  (déf. 1. 6). Donc, etc.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι εἰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῆ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστίν<sup>δ</sup>. καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἐνὸς ὁποτέρου τῶν τμημάτων ἢ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστίν.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τῆς δεθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελθῆν.

Ἐστω ἡ δεθείσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ . δεῖ δὴ τῆς  $AB$  τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελθῆν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον· καὶ διήχθω τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ  $A$  ἡ  $AG$ , γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς  $AB$  τυχεύσαν· καὶ εἰληφθῶ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς  $AG$  τὸ  $\Delta$ , καὶ κείσθωσαν τῆ

## COROLLARIUM.

Ex hoc utique evidens est, si in rectangulo triangulo a recto angulo ad basim perpendicularis ducta fuerit, ductam inter basis segmenta mediam proportionalem esse; et etiam inter basim et unum utriuslibet segmentorum, ipsum ad segmentum latus, medium proportionale esse.

## PROPOSITIO IX.

Ab datâ rectâ imperatam partem auferre.

Sit data recta  $AB$ ; oportet igitur ab ipsâ  $AB$  imperatam partem auferre.

Imperetur et tertia; et ducatur quædam recta  $AG$  ab  $A$ , quemlibet angulum continens cum ipsâ  $AB$ ; et sumatur quodlibet punctum  $\Delta$  in  $AG$ , et ponantur ipsi  $\Delta A$  æquales  $\Delta B$ ,  $\Delta G$ ;

## COROLLAIRE.

De là, il est évident que, dans un triangle rectangle, la perpendiculaire menée de l'angle droit sur la base, est moyenne proportionnelle entre les segments de la base, et que chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre la base et le segment contigu.

## PROPOSITION IX.

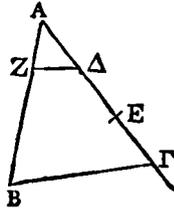
D'une droite donnée retrancher la partie demandée.

Soit  $AB$  la droite donnée; il faut de la droite  $AB$  retrancher la partie demandée.

Soit demandé le tiers; du point  $A$  menons une droite quelconque  $AG$  qui fasse un angle quelconque avec la droite  $AB$ ; prenons dans  $AG$  un point quel-

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 313

ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ· καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ et jungatur ΒΓ, et per Δ parallela huic ductatur ΔΖ. διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΖ.



Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρά μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἤκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπιταχθῆν τρίτον μέρος ἀφῆρηται τὸ ΑΖ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ juxta unum laterum ΒΓ ducta est ipsa ΖΔ; proportionaliter igitur est ut ΓΔ ad ΔΑ ita ΒΖ ad ΖΑ. Dupla autem ΓΔ ipsius ΔΑ; dupla igitur et ΒΖ ipsius ΖΑ; tripla igitur ΒΑ ipsius ΑΖ.

Ab ipsâ igitur datâ rectâ ΑΒ imperata tertia pars ablata est ipsa ΑΖ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τὴν δοθείσαν εὐθεῖαν ἀτμητὸν τῇ ἐδοθείσῃ<sup>1</sup> τετμημένη ὁμοίως τμηεῖν.

PROPOSITIO X.

Datam rectam insectam datæ sectæ similiter secare.

conque Δ, et faisons les droites ΔΕ, ΕΓ égales à ΑΔ (3. 1); joignons ΒΓ, et par le point Δ menons ΔΖ parallèle à ΓΒ (31. 1).

Puisqu'on a mené ΖΔ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ, la droite ΓΔ est à ΔΑ comme ΒΖ est à ΖΑ (2. 6). Mais ΓΔ est double de ΔΑ; donc ΒΖ est double de ΖΑ; donc ΒΑ est triple de ΑΖ.

On a donc retranché de la droite donnée ΑΒ la troisième partie demandée ΑΖ. Ce qu'il fallait faire.

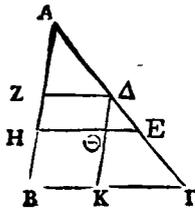
PROPOSITION X.

Partager une droite donnée, qui n'est point partagée de la même manière qu'une droite donnée est partagée.

### 374 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμυτος ἢ  $AB$ , ἢ δὲ τετμήμενη ἢ  $ΑΓ$ , κατὰ τὰ  $\Delta$ ,  $E$  σημεῖα, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπιζεύχθω ἢ  $ΓB$ , καὶ διὰ τῶν  $\Delta$ ,  $E$  τῆ  $BΓ$  παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ  $\Delta Z$ ,  $EH$ , διὰ δὲ τοῦ  $\Delta$  τῆ  $AB$  παράλληλος ἤχθω ἢ  $\Delta\Theta K$ .

Sit data quidem recta insecta  $AB$ , ipsa vero secta  $ΑΓ$  in  $\Delta$ ,  $E$  punctis, et ponantur ita ut angulum quemlibet contineant, et jungatur  $ΓB$ , et per  $\Delta$ ,  $E$  ipsi  $BΓ$  parallelæ ducantur  $\Delta Z$ ,  $EH$ , per  $\Delta$  autem ipsi  $AB$  parallela ducatur  $\Delta\Theta K$ .



Παράλληλόγραμμον ἄρα ἴσθιν ἐκάτερον τῶν  $Z\Theta$ ,  $\Theta B$ . Ἴση ἄρα ἢ μὲν  $\Delta\Theta$  τῆ  $ZH$ , ἢ δὲ  $\Theta K$  τῆ  $HB$ . Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $\Delta KΓ$  παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν  $KΓ$  εὐθεῖα ἤκται ἢ  $\Theta E$  ἀνάλογον ἄρα ἴσθιν ὡς ἢ  $ΓE$  πρὸς τὴν  $E\Delta$  οὕτως ἢ  $K\Theta$  πρὸς τὴν  $\Theta\Delta$ . Ἴση δὲ ἢ μὲν  $K\Theta$  τῆ  $BH$ , ἢ δὲ  $\Theta\Delta$  τῆ  $HZ$ . Ἴσθιν ἄρα ὡς ἢ  $ΓE$  πρὸς τὴν  $E\Delta$  οὕτως ἢ  $BH$  πρὸς τὴν  $HZ$ . Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $AHE$  παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν  $EH$  ἤκται ἢ  $Z\Delta$  ἀνάλογον ἄρα ἴσθιν ὡς ἢ  $E\Delta$  πρὸς τὴν  $\Delta A$  οὕτως ἢ  $HZ$  πρὸς τὴν  $Z A$ . Εδρίχθη δὲ καὶ

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum  $Z\Theta$ ,  $\Theta B$ ; æqualis igitur ipsa quidem  $\Delta\Theta$  ipsi  $ZH$ , ipsa vero  $\Theta K$  ipsi  $HB$ . Et quoniam trianguli  $\Delta KΓ$  juxta unum laterum  $KΓ$  recta ducta est  $\Theta E$ ; proportionaliter igitur est ut  $ΓE$  ad  $E\Delta$  ita  $K\Theta$  ad  $\Theta\Delta$ . Æqualis autem ipsa quidem  $K\Theta$  ipsi  $BH$ , ipsa vero  $\Theta\Delta$  ipsi  $HZ$ ; est igitur ut  $ΓE$  ad  $E\Delta$  ita  $BH$  ad  $HZ$ . Rursus, quoniam trianguli  $AHE$  juxta unum laterum  $EH$  ducta est  $Z\Delta$ ; proportionaliter igitur est ut  $E\Delta$  ad  $\Delta A$  ita  $HZ$  ad  $Z A$ . De-

Soit  $AB$  la droite donnée qui n'est point partagée, et  $ΑΓ$  une droite partagée aux points  $\Delta$ ,  $E$ ; que ces droites soient placées de manière qu'elles comprennent un angle quelconque; joignons  $BΓ$ , et par les points  $\Delta$ ,  $E$ , menons les droites  $\Delta Z$ ,  $EH$  parallèles à  $BΓ$  (31. 1), et par le point  $\Delta$  menons  $\Delta\Theta K$  parallèle à  $AB$ .

Les figures  $Z\Theta$ ,  $\Theta B$  seront des parallélogrammes; donc  $\Delta\Theta$  est égal à  $ZH$ , et  $\Theta K$  égal à  $HB$  (34. 1). Et puisqu'on a mené la droite  $\Theta E$  parallèle à un des côtés  $KΓ$  du triangle  $\Delta KΓ$ , la droite  $ΓE$  est à  $E\Delta$  comme  $K\Theta$  est à  $\Theta\Delta$  (2. 6). Mais  $K\Theta$  est égal à  $BH$ , et  $\Theta\Delta$  est égal à  $HZ$ ; donc  $ΓE$  est à  $E\Delta$  comme  $BH$  est à  $HZ$ . De plus, puisqu'on a mené la droite  $Z\Delta$  parallèle à un des côtés  $EH$  du triangle  $AHE$ , la droite  $E\Delta$  est à  $\Delta A$  comme

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 315

ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ἴστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὅς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμπος ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένη τῇ ΑΓ ἰμοίως τέτμηται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

monstratum autem est et ut GE ad EA ita BH ad HZ; est igitur ut GE quidem ad EA ita BH ad HZ, ut vero EA ad ΔA ita HZ ad ZA.

Data igitur recta insecta AB datæ rectæ sectæ ΑΓ similiter secta est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

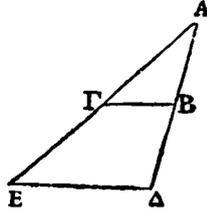
PROPOSTIO XI.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ κείσθω-

Duabus datis rectis, tertiam proportionalem invenire.

Sin<sup>9</sup> datæ AB, ΑΓ, et ponantur ita ut an-



σαν γωνίαν περιέχουσαι τυχούσαν· διὲ δὲ τῶν ΑΒ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν<sup>2</sup>.

gulum quemlibet contineant; oportet igitur ipsis AB, ΑΓ tertiam proportionalem invenire.

HZ est à ZA. Mais on a démontré que GE est à EA comme BH est à HZ; donc GE est à EA comme BH est à HZ, et EA est à ΔA comme HZ est à ZA.

Donc la droite donnée AB, qui n'est pas partagée, a été partagée de la même manière que la droite donnée ΑΓ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XI.

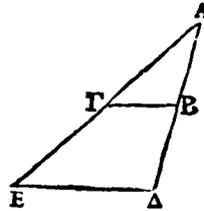
Deux droites étant données, trouver une troisième proportionnelle.

Soient AB, ΑΓ les deux droites données; posons-les de manière qu'elles comprennent un angle quelconque; il faut trouver une troisième proportionnelle aux droites AB, ΑΓ.

### 316 LE SIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εκτελέσθωσαν γὰρ αἱ  $AB, AG$  ἐπὶ τῷ  $\Delta$ ,  
 $E$  σημεία, καὶ κείσθω τῇ  $AG$  ἴση ἡ  $BA$ , καὶ  
 ἐπιζεύχθω ἡ  $BG$ , καὶ διὰ τοῦ  $\Delta$  παράλληλος  
 αὐτῇ<sup>3</sup> ἤχθω ἡ  $DE$ .

Producantur enim  $AB, AG$  ad  $\Delta, E$  puncta,  
 et ponatur ipsi  $AG$  æqualis  $BA$ , et jungatur  
 $BG$ , et per  $\Delta$  parallela huic ducatur  $DE$ .



Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ  $ADE$ , παρά μίαν τῶν  
 πλευρῶν τὴν  $DE$  ἤκται ἡ  $BG$ , ἀνάλογόν ἐστιν  
 ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $BA$  οὕτως ἡ  $AG$  πρὸς τὴν  $GE$ .  
 Ἴση δὲ ἡ  $BA$  τῇ  $AG$ , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  
 $AG$  οὕτως ἡ  $AG$  πρὸς τὴν  $GE$ .

Quoniam igitur trianguli  $ADE$ , juxta unum  
 laterum  $DE$  ducta est  $BG$ , proportionaliter est  
 ut  $AB$  ad  $BA$  ita  $AG$  ad  $GE$ . Æqualis autem  
 $BA$  ipsi  $AG$ , est igitur ut  $AB$  ad  $AG$  ita  $AG$   
 ad  $GE$ .

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν  $AB, AG$ , τρίτη  
 ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρεται ἡ  $GE$ . Ὅπερ ἔδει  
 ποιῆσαι.

Duabus igitur datis rectis  $AB, AG$ , tertia  
 proportionalis inventa est  $GE$ . Quod oportebat  
 facere.

Prolongeons les droites  $AB, AG$  vers les points  $\Delta, E$ ; faisons  $BA$  égal à  $AG$ ; joignons  $BG$ , et par le point  $\Delta$  menons  $DE$  parallèle à  $BG$  (31. 1).

Puisque la droite  $BG$  est parallèle à un des côtés  $DE$  du triangle  $ADE$ , la droite  $AB$  est à  $BA$  comme  $AG$  est à  $GE$  (2. 6). Mais  $BA$  est égal à  $AG$ ; donc  $AB$  est à  $AG$  comme  $AG$  est à  $GE$ .

Donc les deux droites  $AB, AG$  étant données, on a trouvé une troisième proportionnelle  $GE$ . Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

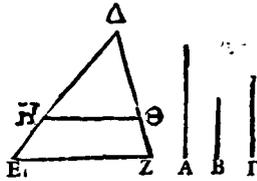
PROPOSITIO XII.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστώσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ' τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ Α, Β, Γ; oportet igitur ipsis Α, Β, Γ quartam proportionalem invenire.



Ἐκκείσθασκεν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΕ, ΔΖ, γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν<sup>2</sup> τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΘ, παράλληλος αὐτῇ ἦχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρά μίαν τῶν πλευρῶν<sup>3</sup> τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἴστιν ἄρα ὡς ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἴστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΕΖ.

Exponantur duæ rectæ ΔΕ, ΔΖ, angulum continentes quemlibet ΕΔΖ; et ponatur ipsi quidem Α ἄqualis ΔΗ, ipsi vero Β ἄqualis ΗΕ, et insuper ipsi Γ ἄqualis ΔΘ; et junctâ ΗΘ, parallela illi ducatur per Ε ipsa ΕΖ.

Et quoniam trianguli ΔΕΖ juxta unum laterum ΕΖ ducta est ΗΘ, est igitur ut ΔΗ ad ΗΕ ita ΔΘ ad ΕΖ. Ἄqualis autem ΔΗ quidem ipsi Α, ipsa vero ΗΕ ipsi Β, ipsa autem ΔΘ ipsi Γ; est igitur ut Α ad Β ita Γ ad ΕΖ.

PROPOSITION XII.

Trois droites étant données, trouver une quatrième proportionnelle.

Soient Α, Β, Γ les trois droites données; il faut trouver une quatrième proportionnelle aux droites Α, Β, Γ.

Soient les deux droites ΔΕ, ΔΖ, comprenant un angle quelconque ΕΔΖ; faisons la droite ΔΗ égale à Α, la droite ΗΕ égale à Β, et la droite ΔΘ égale à Γ; et ayant joint ΗΘ, par le point Ε menons ΕΖ parallèle à ΗΘ.

Puisque la droite ΗΘ est parallèle à un des côtés ΕΖ du triangle ΔΕΖ, la droite ΔΗ est à ΗΕ comme ΔΘ est à ΕΖ (2. 6). Mais ΔΗ est égal à Α, la droite ΗΕ égale à Β, et la droite ΔΘ égale à Γ; donc Α est à Β comme Γ est à ΕΖ.

## 318 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Τριῶν ἄρα δοθειῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ, τετάρτη ἀνάλογον προσεύρεται ἡ ΘΖ. Ὅπρι ἴδει ποιῆσαι.

Tribus igitur datis rectis Α, Β, Γ, quarta proportionalis inventa est ΘΖ. Quod oportebat facere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

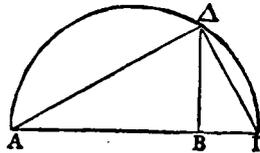
Δύο δοθειῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστώσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ· δι' δὲ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

### PROPOSITIO XIII.

Duabus datis rectis, mediam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ ΑΒ, ΒΓ; oportet igitur ipsis ΑΒ, ΒΓ mediam proportionalem invenire.



Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῆ ΑΓ εὐθείας πρὸς ὀρθῆς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν

Ponantur in directum, et describatur super ipsâ ΑΓ semicirculus ΑΔΓ, et ducatur a B puncto ipsi ΑΓ rectæ ad rectos ΒΔ, et jungantur ΑΔ, ΔΓ.

Et quoniam in semicirculo angulus est ΑΔΓ, rectus est. Et quoniam in rectangulo triangulo ΑΔΓ a recto angulo ad basim per-

Donc trois droites Α, Β, Γ étant données, on a trouvé une quatrième proportionnelle ΘΖ. Ce qu'il fallait faire.

### PROPOSITION XIII.

Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle.

Soient ΑΒ, ΒΓ les deux droites données; il faut trouver une moyenne proportionnelle entre ΑΒ, ΒΓ.

Plaçons ces droites dans la même direction, et sur la droite ΑΓ décrivons le demi-cercle ΑΔΓ; du point Β menons ΒΔ perpendiculaire à ΑΓ, et joignons ΑΔ, ΔΓ (II. 1).

Puisque l'angle ΑΔΓ est dans un demi-cercle, cet angle est droit (31. 3). Et puisque dans le triangle rectangle ΑΔΓ on a mené de l'angle droit la droite

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 319

βάσει κάθετος ἦκται ἡ ΔΒ· ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον ἔστιν.

Δύο ἄρα δοθειῶν ὑθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέση ἀνάλογον προσύρεται ἡ ΒΔ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

perpendicularis ducta est ΔΒ; ipsa ΔΒ igitur inter basis segmenta ΑΒ, ΒΓ media proportionalis est.

Duabus igitur datis rectis ΑΒ, ΒΓ, media proportionalis inventa est ΒΔ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14'.

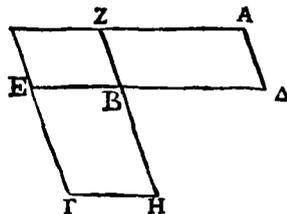
Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων<sup>1</sup> παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων<sup>2</sup>, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἔστιν ἐκεῖνα.

Ἐστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια<sup>3</sup> παραλληλόγραμ-

PROPOSITIO XIV.

Æqualiumque et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos; et quorum æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa.

Sint æqualiaque et æquiangula parallelo-



μα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' ὑθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ,

gramma ΑΒ, ΒΓ, æquales habentia ipsos ad Β angulos, et ponantur in directum ΔΒ, ΒΕ,

ΔΒ perpendiculaire à la base, la droite ΔΒ est moyenne proportionnelle entre les segments ΑΒ, ΒΓ de la base (cor. 8. 6).

Donc les deux droites ΑΒ, ΒΓ étant données, on a trouvé une moyenne proportionnelle ΒΔ. Ce qu'il fallait faire.

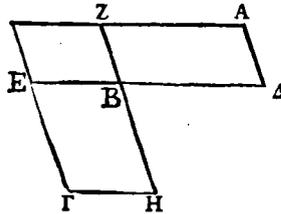
PROPOSITION XIV.

Deux parallélogrammes étant égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et les parallélogrammes équiangles dont les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, sont égaux entr'eux.

Soient ΑΒ, ΒΓ deux parallélogrammes égaux et équiangles, ayant deux angles

ἐπὶ εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιπεπόμεναι αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτίστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

Συμπληρώσθω γὰρ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον.



Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. Τῶν ΔΒ, ΒΓ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόμεναι αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονητέωσαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ<sup>5</sup> ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς

in directum igitur sunt et ΖΒ, ΒΗ; dico ipsorum ΑΒ, ΒΓ reciproca esse latera circa æquales angulos, hoc est esse ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΗΒ ad ΒΖ.

Complectatur enim ΖΕ parallelogrammum.

Et quoniam æquale est ΑΒ parallelogrammum ipsi ΒΓ parallelogrammo, aliud autem quoddam ΖΕ; est igitur ut ΑΒ ad ΖΕ ita ΒΓ ad ΖΕ. Sed ut ΑΒ quidem ad ΖΕ ita ΔΒ ad ΒΕ, ut vero ΒΓ ad ΖΕ ita ΗΒ ad ΒΖ; et ut igitur ΔΒ ad ΒΕ ita ΗΒ ad ΒΖ. Ipsorum ΔΒ, ΒΓ igitur parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos.

Sed et reciproca sint latera circa æquales angulos, et sit ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΗΒ ad ΒΖ; dico

égaux en B, plaçons BE dans la direction de ΔΒ, la droite ΒΗ sera dans la direction de ΖΒ (14. 1); je dis que les côtés des parallélogrammes ΑΒ, ΒΓ autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que ΔΒ est à ΒΕ comme ΗΒ est à ΒΖ.

Achevons le parallélogramme ΖΕ.

Puisque le parallélogramme ΑΒ est égal au parallélogramme ΒΓ, et que ΖΕ est un autre parallélogramme, ΑΒ est à ΖΕ comme ΒΓ est à ΖΕ (7. 5). Mais ΑΒ est à ΖΕ comme ΔΒ est à ΒΕ (1. 6); et ΒΓ est à ΖΕ comme ΗΒ est à ΒΖ; donc ΔΒ est à ΒΕ comme ΗΒ est à ΒΖ (11. 5); donc les côtés des parallélogrammes ΔΒ, ΒΓ autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels.

Mais que les côtés adjacents aux angles égaux soient réciproquement pro-

τὴν BE οὕτως ἢ HB πρὸς τὴν BZ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ BΓ παραλληλόγραμμῳ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BE οὕτως ἢ HB πρὸς τὴν BZ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔB πρὸς τὴν BE οὕτως τὸ AB παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ HB πρὸς τὴν BZ οὕτως τὸ BΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE παραλληλόγραμμον<sup>6</sup>· καὶ ὡς ἄρα τὸ AB πρὸς τὸ ZE οὕτως τὸ BΓ πρὸς τὸ ZE· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ BΓ παραλληλόγραμμῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

æquale esse AB parallelogrammum ipsi BΓ parallelogrammo.

Quoniam enim est ut ΔB ad BE ita HB ad BZ, sed ut ΔB quidem ad BE ita AB parallelogrammum ad ZE parallelogrammum, ut HB vero ad BZ ita BΓ parallelogrammum ad ZE parallelogrammum; et ut igitur AB ad ZE ita BΓ ad ZE; æquale igitur est AB parallelogrammum ipsi BΓ parallelogrammo. Ergo æqualium, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιί.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσων ἔχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν, μίαν μιᾷ ἴσων ἔχόντων γωνίαν τριγώνων<sup>1</sup>, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

PROPOSITIO XV.

Æqualium et unum uni æqualem habentium angulum triangulorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos; et quorum, unum uni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa.

portionnels, c'est-à-dire que ΔB soit à BE comme HB est à BZ; je dis que le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BΓ.

Puisque ΔB est à BE comme HB est à BZ, que ΔB est à BE comme le parallélogramme AB est au parallélogramme ZE (I. 6), et que HB est à BZ comme le parallélogramme BΓ est au parallélogramme ZE, AB est à ZE comme BΓ est à ZE (II. 5); donc le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BΓ (9. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XV.

Si deux triangles égaux ont un angle égal à un angle, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour de ces angles égaux sont réciproquement proportionnels, ces deux triangles sont égaux.

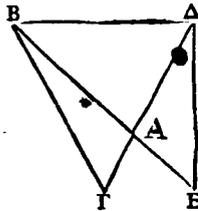
322 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω ἴσα τρίγωνα τὰ  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΔΕ$ , μίαν μὲν ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΑΕ$ . λέγω ὅτι τῶν  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΔΕ$  τριγώνων ἀντιπεπόμενα σὶν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τοῦτ' ἐστὶν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ  $ΓΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΔ$  οὕτως ἡ  $ΕΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΒ$ .

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν  $ΓΑ$  τῇ  $ΑΔ$ · ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  $ΕΑ$  τῇ  $ΑΒ$ . Καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  $ΒΔ$ .

Sint æqualia triangula  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΔΕ$ , unum uni æqualem habentia angulum  $ΒΑΓ$  ipsi  $ΔΑΕ$ ; dico  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΔΕ$  triangulorum reciproca esse latera, circa æquales angulos, hoc est esse ut  $ΓΑ$  ad  $ΑΔ$  ita  $ΕΑ$  ad  $ΑΒ$ .

Ponantur enim ita ut in directum sit  $ΓΑ$  ipsi  $ΑΔ$ ; in directum igitur est et  $ΕΑ$  ipsi  $ΑΒ$ . Et jungatur  $ΒΔ$ .



Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ  $ΑΒΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΑΔΕ$  τριγώνῳ, ἄλλο δὲ τὸ  $ΑΒΔ$ · ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ  $ΓΑΒ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΒΑΔ$  τρίγωνον οὕτως τὸ  $ΑΔΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΒΑΔ$  τρίγωνον<sup>3</sup>. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ  $ΓΑΒ$  πρὸς τὸ  $ΒΑΔ$  οὕτως ἡ  $ΓΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΔ$ , ὡς δὲ τὸ  $ΕΑΔ$ <sup>4</sup> πρὸς τὸ  $ΒΑΔ$  οὕτως ἡ  $ΕΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΒ$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ  $ΓΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΔ$  οὕτως ἡ  $ΕΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΒ$ · τῶν  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΔΕ$  ἄρα τριγώνων<sup>5</sup> ἀντιπεπόμενα σὶν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Et quoniam æquale est  $ΑΒΓ$  triangulum ipsi  $ΑΔΕ$  triangulo, aliud autem  $ΑΒΔ$ ; est igitur ut  $ΓΑΒ$  triangulum ad  $ΒΑΔ$  triangulum ita  $ΑΔΕ$  triangulum ad  $ΒΑΔ$  triangulum. Sed ut  $ΓΑΒ$  quidem ad  $ΒΑΔ$  ita  $ΓΑ$  ad  $ΑΔ$ , ut  $ΕΑΔ$  vero ad  $ΒΑΔ$  ita  $ΕΑ$  ad  $ΑΒ$ ; et ut igitur  $ΓΑ$  ad  $ΑΔ$  ita  $ΕΑ$  ad  $ΑΒ$ ; ipsorum  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΔΕ$  igitur triangulorum reciproca sunt latera circa æquales angulos.

Soient les triangles égaux  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΔΕ$ , ayant un angle égal à un angle, l'angle  $ΒΑΓ$  égal à l'angle  $ΔΑΕ$ ; je dis que les côtés des triangles  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΔΕ$ , qui sont autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que  $ΓΑ$  est à  $ΑΔ$  comme  $ΕΑ$  est à  $ΑΒ$ .

Plaçons ces triangles de manière que  $ΓΑ$  soit dans la direction de  $ΑΔ$ ; la droite  $ΕΑ$  sera dans la direction de  $ΑΒ$  (14. 1). Joignons  $ΒΔ$ .

Puisque le triangle  $ΑΒΓ$  est égal au triangle  $ΑΔΕ$ , et que  $ΑΒΔ$  est un autre triangle, le triangle  $ΓΑΒ$  est au triangle  $ΒΑΔ$  comme le triangle  $ΑΔΕ$  est au triangle  $ΒΑΔ$  (7. 5). Mais le triangle  $ΓΑΒ$  est au triangle  $ΒΑΔ$  comme  $ΓΑ$  est à  $ΑΔ$  (1. 6), et le triangle  $ΕΑΔ$  est au triangle  $ΒΑΔ$  comme  $ΕΑ$  est à  $ΑΒ$ ; donc  $ΓΑ$  est à  $ΑΔ$  comme  $ΕΑ$  est à  $ΑΒ$  (11. 5); donc les côtés des triangles  $ΑΒΓ$ ,  $ΑΔΕ$ , qui sont autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels.

Αλλα δὴ ἀντιπεπονητέωσαν αἱ πλευραὶ τῶν  
 ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν  
 ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ  
 τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

Ἐπιζευχθεὶς γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεὶ ἐστὶν  
 ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ,  
 ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ  
 τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς  
 τὴν ΑΒ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ  
 τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ  
 οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ· ἐκάτερον  
 ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει  
 λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΑΔ  
 τριγώνῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

Sed utique reciproca sint latera ipsorum  
 ΑΒΓ, ΑΔΕ triangulorum, et sit ut ΓΑ ad ΑΔ ita  
 ΕΑ ad ΑΒ; dico æquale esse ΑΒΓ triangulum  
 ipsi ΑΔΕ triangulo.

Junctâ enim rursus ΒΔ, quoniam est ut ΓΑ  
 ad ΑΔ ita ΕΑ ad ΑΒ, sed ut ΓΑ quidem ad ΑΔ  
 ita ΑΒΓ triangulum ad ΒΑΔ triangulum, ut ΕΑ  
 vero ad ΑΒ ita ΕΑΔ triangulum ad ΒΑΔ trian-  
 gulum; ut igitur ΑΒΓ triangulum ad ΒΑΔ ita  
 ΕΑΔ triangulum ad ΒΑΔ; utrumque igitur ip-  
 sorum ΑΒΓ, ΑΔΕ ad ΒΑΔ eandem habet rati-  
 onem; æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi  
 ΕΑΔ triangulo. Æqualium igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

PROPOSITIO XVI.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσι, τὸ ὑπὸ  
 τῶν ἀκρῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ  
 ὑπὸ τῶν μέσων περιεχόμενῳ ὀρθογώνιῳ· καὶ ν'

Si quatuor rectæ proportionales sint, sub  
 extremis contentum rectangulum æquale est  
 ipsi sub mediis contento rectangulo; et si sub

Mais que les côtés des triangles ΑΒΓ, ΑΔΕ soient réciproquement propor-  
 tionnels, c'est-à-dire que ΓΑ soit à ΑΔ comme ΕΑ est à ΑΒ; je dis que le triangle  
 ΑΒΓ est égal au triangle ΑΔΕ.

Joignons encore ΒΔ. Puisque ΓΑ est à ΑΔ comme ΕΑ est à ΑΒ, que ΓΑ est  
 à ΑΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΒΑΔ (1. 6), et que ΕΑ est à ΑΒ  
 comme le triangle ΕΑΔ est au triangle ΒΑΔ, le triangle ΑΒΓ est au triangle ΒΑΔ  
 comme le triangle ΕΑΔ est au triangle ΒΑΔ (11. 5); donc chacun des triangles  
 ΑΒΓ, ΑΔΕ a la même raison avec le triangle ΒΑΔ; donc le triangle ΑΒΓ est égal  
 au triangle ΕΑΔ (9. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

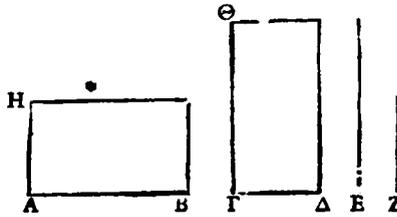
Si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les  
 deux extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes; et si le

τὸ ὑπὸ τῶν ἀκρῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἴσονται.

Ἐστώσαν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB, ΓΔ, E, Z<sup>2</sup>. ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

extremis contentum rectangulum æquale est ipsi sub extremis contento rectangulo, quatuor rectæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales AB, ΓΔ, E, Z, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; dico sub AB, Z contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo.



Ἡθώσαν γὰρ<sup>3</sup> ἀπὸ τῆς A, Γ σημείων ταῖς AB, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ AH, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Z ἴση ἡ AH, τῇ δὲ E ἴση ἡ ΓΘ, καὶ συμπληρώσωσαν τὰ BH, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z, ἴση δὲ ἡ μὲν E τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Z τῇ AH· ἴστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν AH· τῶν BH, ΔΘ ἄρα παραλληλογράμμων<sup>4</sup> ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ,

Ducantur enim ab ipsis A, Γ punctis ipsis AB, ΓΔ rectis ad rectos ipsæ AH, ΓΘ, et ponatur ipsi quidem Z æqualis AH, ipsi vero E æqualis ΓΘ, et compleantur BH, ΔΘ parallelogramma.

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita E ad Z, æqualis autem E quidem ipsi ΓΘ, ipsa vero Z ipsi AH; est igitur ut AB ad ΓΔ ita ΓΘ ad AH; ipsorum BH, ΔΘ igitur parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales an-

rectangle compris sous les extrêmes et égal au rectangle compris sous les moyennes, ces quatre droites sont proportionnelles.

Soient AB, ΓΔ, E, Z quatre droites proportionnelles, de manière que AB soit à ΓΔ comme E est à Z; je dis que le rectangle compris sous AB, Z est égal au rectangle compris sous ΓΔ, E.

Des points A, Γ, et sur les droites AB, ΓΔ, menons les perpendiculaires AH, ΓΘ (II, 1); faisons AH égal à Z, et ΓΘ égal à E; et achevons les parallélogrammes BH, ΔΘ.

Puisque AB est à ΓΔ comme E est à Z, et que E est égal à ΓΘ, et Z égal à AH, AB est à ΓΔ comme ΓΘ est à AH (7. 5); donc les côtés des parallélogrammes BH, ΔΘ, placés autour des angles égaux, sont réciproquement propor-

αί<sup>5</sup> περί τὰς ἴσας γωνίας. Ὡν δὲ ἰσογώνιων παραλληλογράμμων ἀντιπεπύονθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περί τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ BH παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἴσσι τὸ μὲν BH τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z, ἴση γὰρ ἢ AH τῇ Z· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E, ἴση γὰρ ἢ ΓΘ τῇ E<sup>6</sup>. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ· λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ E πρὸς τὴν Z.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB, Z τὸ BH, ἴση γὰρ ἐστὶν ἢ AH τῇ Z<sup>8</sup>. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E τὸ ΔΘ, ἴση γὰρ ἢ ΓΘ τῇ E· τὸ ἄρα BH ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ<sup>9</sup>. καὶ ἔστιν<sup>10</sup> ἰσογώνια. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογώνιων παραλληλογράμμων ἀντιπεπύονθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περί τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα

gulos. Quorum autem æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa; æquale igitur est BH parallelogrammum ipsi ΔΘ parallelogrammo. Et est BH quidem sub AB, Z, æqualis enim AH ipsi Z; ipsum vero ΔΘ ipsum sub ΓΔ, E, æqualis enim ΓΘ ipsi E; ipsum igitur sub AB, Z contentum rectangulum æquale est ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo.

Sed utique ipsum sub AB, Z contentum rectangulum æquale sit ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo; dico quatuor rectas proportionales fore, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z.

Iisdem enim constructis, quoniam ipsum sub AB, Z æquale est ipsi sub ΓΔ, E, et est ipsum quidem sub AB, Z ipsum BH, æqualis enim AH ipsi Z; ipsum vero sub ΓΔ, E ipsum ΔΘ, æqualis enim ΓΘ ipsi E; ipsum igitur BH æquale est ipsi ΔΘ; et sunt æquiangula. Æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa

tionnels. Mais lorsque les côtés des parallélogrammes équiangles, placés autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels, ces parallélogrammes sont égaux (14. 6); donc le parallélogramme BH est égal au parallélogramme ΔΘ. Mais le parallélogramme BH est sous AB, Z, car AH est égal à Z; et le parallélogramme ΔΘ est sous ΓΔ, E, car ΓΘ est égal à E; donc le rectangle compris sous AB, Z est égal au rectangle compris sous ΓΔ, E.

Mais que le rectangle compris sous AB, Z soit égal au rectangle compris sous les droites ΓΔ, E; je dis que ces quatre droites sont proportionnelles, c'est-à-dire que AB est à ΓΔ comme E est à Z.

Faisons la même construction. Puisque le rectangle sous AB, Z est égal au rectangle sous ΓΔ, E, que le rectangle BH est sous AB, Z, car AH est égal à Z, et que le rectangle ΔΘ est sous ΓΔ, E, car ΓΘ est égal à E; donc BH est égal à ΔΘ; et ils sont équiangles. Mais les côtés des parallélogrammes égaux et équiangles, placés autour des angles sont égaux, sont réciproquement propor-

326 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ· ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ. Εὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

æquales angulos; est igitur ut AB ad ΓΔ ita ΓΘ ad ΑΗ. Æqualis autem ΓΘ quidem ipsi Ε, ipsa vero ΑΗ ipsi Ζ; est igitur ut AB ad ΓΔ ita Ε ad Ζ. Si igitur quatuor, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Εὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Εὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων

PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ proportionales sint, sub extremis contentum rectangulum æquale est ipsi ex mediâ quadrato; et si sub extremis contentum rectangulum æquale sit ipsi ex mediâ quadrato, tres rectæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ; dico sub Α, Γ contentum rectangulum æquale esse ipsi ex Β. quadrato.

Ponatur ipsi Β æqualis Δ.

Et quoniam est ut Α ad Β ita Β ad Γ, æqualis autem Β ipsi Δ; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Si autem quatuor rectæ proportionales sint, sub extremis contentum rectangulum æquale

tionnels (14. 6); donc AB est à ΓΔ comme ΓΘ est à ΑΗ; mais ΓΘ est égal à Ε, et ΑΗ à Ζ; donc AB est à ΓΔ comme Ε est à Ζ. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

Si trois droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les extrêmes est égal au carré de la moyenne; et si le rectangle compris sous les extrêmes est égal au carré de la moyenne, ces trois droites seront proportionnelles.

Soient Α, Β, Γ trois droites proportionnelles, de manière que Α soit à Β comme Β est à Γ; je dis que le rectangle compris sous Α, Γ est égal au carré de Β.

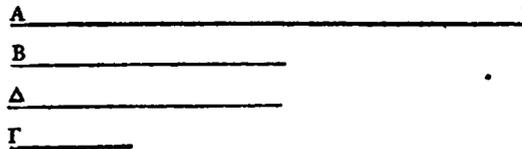
Faisons Δ égal à Β.

Puisque Α est à Β comme Β est à Γ, et que Β égal à Δ, Α est à Β comme Δ est à Γ. Mais si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 327

περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ τὸ ἀπὸ τῆς Β ἐστίν<sup>4</sup>, ἴση γὰρ ἢ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἴστω τῷ ἀπὸ τῆς Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἢ Β πρὸς τὴν Γ.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἐστίν<sup>5</sup>, ἴση γὰρ ἢ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Β, Δ. Ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσων ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἢ Δ πρὸς τὴν Γ. Ἴση δὲ ἢ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἢ Β πρὸς τὴν Γ. Ἐὰν ἄρα τρεῖς, καὶ τὰ ἐξῆς.

est ipsi sub mediis contento rectangulo; ipsum igitur sub Α, Γ æquale est ipsi sub Β, Δ. Sed ipsum sub Β, Δ ipsum ex Β est, æqualis enim Β ipsi Δ; ipsum igitur sub Α, Γ contentum rectangulum æquale est ipsi ex Β quadrato.

Sed et ipsum sub Α, Γ æquale sit ipsi ex Β; dico esse ut Α ad Β ita Β ad Γ.

Iisdem enim constructis, quoniam ipsum sub Α, Γ æquale est ipsi ex Β, sed ipsum ex Β ipsum sub Β, Δ est, æqualis enim Β ipsi Δ; ipsum igitur sub Α, Γ æquale est ipsi sub Β, Δ. Si autem ipsum sub extremis æquale est ipsi sub mediis, quatuor rectæ proportionales sunt; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Æqualis autem Β ipsi Δ; ut igitur Α ad Β ita Β ad Γ. Si igitur tres, etc.

les extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes (16. 6); donc le rectangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous Β, Δ. Mais le rectangle sous Β, Δ est égal au carré de Β, car Β est égal à Δ; donc le rectangle compris sous Α, Γ est égal au carré de Β.

Mais que le rectangle sous Α, Γ soit égal au carré de Β; je dis que Α est à Β comme Β est à Γ.

Faisons la même construction. Puisque le rectangle sous Α, Γ est égal au carré de Β, et que le carré de Β est le rectangle sous Β, Δ, car Β est égal à Δ, le rectangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous les droites Β, Δ. Mais si le rectangle compris sous les extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes, les quatre droites sont proportionnelles (16. 6); donc Α est à Β comme Δ est à Γ. Mais Β est égal à Δ; donc Α est à Β comme Β est à Γ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

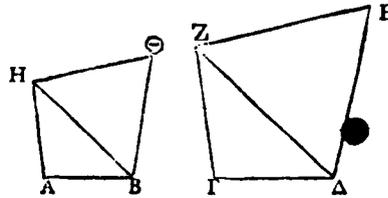
PROPOSITIO XVIII.

Από τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ὁμοίων τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράφαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ , τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ  $ΓΕ$ · δεῖ δὲ ἀπὸ τῆς  $AB$  εὐθείας τῷ  $ΓΕ$  εὐθυγράμμῳ ὁμοίων τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράφαι.

Ex datâ rectâ ipsi dato rectilineo simileque et similiter positum rectilineum describere.

Sit data quidem recta  $AB$ , datum autem rectilineum  $ΓΕ$ ; oportet igitur ex  $AB$  rectâ ipsi  $ΓΕ$  rectilineo simileque et similiter positum rectilineum describere.



Ἐπιζεύχθω ἡ  $\Delta Z$ , καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ  $AB$  εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς  $A, B$  τῇ μὲν πρὸς τῷ  $\Gamma$  γωνία ἴση ἢ ὑπὸ  $HAB$ , τῇ δὲ ὑπὸ  $\Gamma\Delta Z$  ἴση ἢ ὑπὸ  $ABH$ · λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ  $\Gamma Z\Delta$  λοιπῆ<sup>3</sup> τῇ ὑπὸ  $AHB$  ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $Z\Gamma\Delta$  τρίγωνον τῷ  $HAB$  τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $Z\Delta$  πρὸς τὴν  $HB$  οὕτως ἢ

Jungatur  $\Delta Z$ , et constituatur ad  $AB$  rectam et ad puncta in eâ  $A, B$  ipsi quidem ad  $\Gamma$  angulo æqualis ipsi sub  $HAB$ , ipsi vero sub  $\Gamma\Delta Z$  æqualis ipse sub  $ABH$ ; reliquus igitur sub  $\Gamma Z\Delta$  reliquo sub  $AHB$  est æqualis; æquiangulum igitur est  $Z\Gamma\Delta$  triangulum ipsi  $HAB$  triangulo; proportionaliter igitur est ut  $Z\Delta$  ad  $HB$  ita

PROPOSITION XVIII.

Sur une droite donnée, décrire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne, et semblablement placée.

Soit  $AB$  la droite donnée, et  $ΓΕ$  la figure rectiligne donnée; il faut sur la droite  $AB$  décrire une figure rectiligne semblable à la figure rectiligne  $ΓΕ$ , et semblablement placée.

Joignons  $\Delta Z$ , et sur la droite  $AB$  et aux points  $A, B$  de cette droite, faisons l'angle  $HAB$  égal à l'angle en  $\Gamma$ , et l'angle  $ABH$  égal à l'angle  $\Gamma\Delta Z$  (23. 1); l'angle restant  $\Gamma Z\Delta$  sera égal à l'angle restant  $AHB$  (32. 1); donc les triangles  $Z\Gamma\Delta, HAB$  sont équiangles; donc  $Z\Delta$  est à  $HB$  comme  $Z\Gamma$  est à  $HA$ , et comme

ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ. Πάλιν, συνισταῖται πρὸς τῆ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β, Η τῆ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΒΗΘ, τῆ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἢ ὑπὸ ΗΒΘ· λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῆ πρὸς τῷ Θ ἴστί ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἴστί τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἴστί ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἢ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἢ τετὰ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ οὕτως ἢ τε ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἴστί ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῆ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῆ ὑπὸ ΒΗΘ· ὅλη ἄρα ἢ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλη τῆ ὑπὸ ΑΗΘ ἴστί ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆ ὑπὸ ΑΒΘ ἴστί ἴση, ἴστί δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῆ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῆ πρὸς τῷ Θ· ἰσογώνιον ἄρα ἴστί τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὁμοιον ἄρα ἴστί τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

ZG ad HA et GD ad AB. Rursus, constituatur ad BH rectam et ad puncta in eâ B, H ipsi quidem ΔZE angulo æqualis BHΘ, ipsi vero ΖΔΕ æqualis HBΘ; reliquus igitur ad E reliquo ad Θ est æqualis; æquiangulum igitur est ΖΔΕ triangulum ipsi HBΘ triangulo; proportionaliter igitur est ut ΔZ ad HB ita ZE ad ΗΘ, et ΕΔ ad ΘΒ. Ostensum est autem et ut ΖΔ ad HB et ita ΖΓ ad ΗΑ et ΓΔ ad ΑΒ; et ut igitur ΖΓ ad ΑΗ ita et ΓΔ ad ΑΒ et ΖΕ ad ΗΘ, et adhuc ΕΔ ad ΘΒ. Et quoniam æqualis est ipse quidem ΓΖΑ angulus ipsi ΑΗΒ, ipse vero ΔΖΕ ipsi ΒΗΘ; totus igitur ΓΖΕ toti ΑΗΘ est æqualis. Propter eadem utique et ΓΔΕ ipsi ΑΒΘ est æqualis, est autem et ipse quidem ad Γ ipsi ad Α æqualis, ipse vero ad Ε ipsi ad Θ; æquiangulum igitur est ΑΘ ipsi ΓΕ, et circa æquales angulos cum ipso latera proportionalia habet; simile igitur est ΑΘ rectilincum ipsi ΓΕ rectilineo.

ΓΔ est à AB (4. 6). De plus, construisons sur la droite BH, et aux points B, H de cette droite, l'angle BHO égal à l'angle ΔZE, et l'angle HBΘ égal à l'angle ΖΔΕ; l'angle restant en E sera égal à l'angle restant en Θ; donc les triangles ΖΔΕ, ΗΒΘ sont équiangles; donc ΔZ est à HB comme ZE est à ΗΘ, et comme ΕΔ est à ΘΒ (4. 6). Mais on a démontré que ΖΔ est à HB comme ΖΓ est à ΗΑ, et comme ΓΔ est à ΑΒ; donc ΖΓ est à ΑΗ comme ΓΔ est à ΑΒ, comme ΖΕ est à ΗΘ, et comme ΕΔ est à ΘΒ (11. 5). Mais l'angle ΓΖΔ est égal à l'angle ΑΗΒ, et l'angle ΔΖΕ égal à l'angle ΒΗΘ; donc l'angle entier ΓΖΕ est égal à l'angle entier ΑΗΘ. Par la même raison, l'angle ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΒΘ, l'angle en Γ égal à l'angle en Α, et l'angle en Ε égal à l'angle en Θ; donc les figures ΑΘ, ΓΕ sont équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels entr'eux; donc les deux figures ΑΘ, ΓΕ sont semblables (déf. 1. 6).

### 33. LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Απὸ τῆς δεθείσης ἔρα εὐθείας τῆς AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ΓΕ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναζήραπται τὸ ΑΘ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

A datâ igitur rectâ AB dato rectilineo ΓΕ simileque et similiter positum rectilincum descriptum est ΑΘ. Quod oportebat facere.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

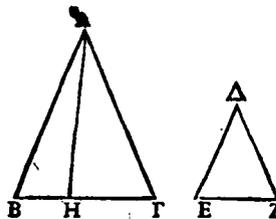
Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἴστί τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἴσῃ ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε,

#### PROPOSITIO XIX.

Similia triangula inter se in duplâ ratione sunt homologorum laterum.

Sint similia triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, æqualem habentia ipsum ad Β angulum ipsi ad Ε, ut



ὡς δὲ τὴν AB πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμολόγον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

autem AB ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, ita ut homologum sit ΒΓ ipsi ΕΖ; dico ΑΒΓ triangulum ad ΔΕΖ triangulum duplam rationem habere ejus quam ΒΓ ad ΕΖ.

Donc, sur la droite donnée AB, on a décrit la figure rectiligne ΑΘ semblable à la figure rectiligne donnée ΓΕ, et semblablement placée. Ce qu'il fallait faire.

#### PROPOSITION XIX.

Les triangles semblables sont entr'eux en raison double des côtés homologues.

Soient les triangles semblables ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant l'angle en Β égal à l'angle en Ε, et que AB soit à ΒΓ comme ΔΕ est à ΕΖ, de manière que le côté ΒΓ soit l'homologue du côté ΕΖ; je dis que le triangle ΑΒΓ a avec le triangle ΔΕΖ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ.

Είλιφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἢ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΗΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ ἄρα τριγώνων<sup>2</sup> ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὡν δὲ, μίαν μιᾷ ἴσῃ ἔχόντων γωνίαν τριγώνων<sup>3</sup>, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἰκίνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται<sup>4</sup> ἢ περ πρὸς τὴν δευτέραν· ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ

Sumatur enim ipsis ΒΓ, ΕΖ tertia proportionalis ΒΗ, ita ut sit ut ΒΓ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΒΗ; et jungatur ΗΑ.

Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ; alterne igitur est ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΒΓ ad ΕΖ. Sed ut ΒΓ ad ΕΖ ita est ΕΖ ad ΒΗ; et ut igitur ΑΒ ad ΔΕ ita ΕΖ ad ΒΗ; ipsorum igitur ΑΒΗ, ΔΕΖ triangulorum reciproca sunt latera circa æquales angulos. Quorum autem unum uni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa; æquale igitur est ΑΒΗ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Et quoniam est ut ΒΓ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΒΗ; si autem tres rectæ proportionales sint, prima ad tertiam duplam rationem habere dicitur ejus quam ad secundam; ΒΓ igitur ad ΒΗ duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Ut autem ΒΓ ad ΒΗ ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΒΗ triangulum; et ΑΒΓ igitur triangulum ad ΑΒΗ duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Æquale autem ΑΒΗ

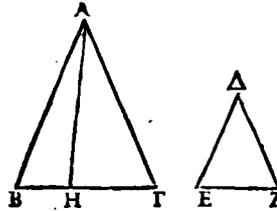
Prenons une troisième proportionnelle ΒΗ aux droites ΒΓ, ΕΖ, de manière que ΒΓ soit à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ; et joignons ΗΑ (11. 6).

Puisque ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΕ est à ΕΖ, par permutation, ΑΒ est à ΔΕ comme ΒΓ est à ΕΖ (16. 6). Mais ΒΓ est à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ; donc ΑΒ est à ΔΕ, comme ΕΖ est à ΒΗ (11. 5); donc les côtés des triangles ΑΒΗ, ΔΕΖ, autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels. Mais deux triangles sont égaux entr'eux lorsqu'ils ont un angle égal à un angle, et les côtés autour des angles égaux, réciproquement proportionnels (15. 6); donc le triangle ΑΒΗ est égal au triangle ΔΕΖ. Et puisque ΒΓ est à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ, et que lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle que la première a avec la seconde (10. 5), la droite ΒΓ a avec la droite ΒΗ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Mais ΒΓ est à ΒΗ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΒΗ (déf. 1. 6); donc le triangle ΑΒΓ a avec le triangle ΑΒΗ une raison double

332 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τρίγωνῳ<sup>6</sup>. καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἰζῆς.

triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo; et ΑΒΓ igitur triangulum ad ΔΕΖ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Ergo similia, etc.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθείαι ἀνάλογον ᾶσιν, ἴστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον<sup>8</sup> πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπεὶ περ ἰδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τουτίστι τὸ ΔΕΖ<sup>9</sup>.

Ex hoc utique manifestum est, si tres rectæ proportionales sint, esse ut prima ad tertiam ita ipsum ex primâ triangulum ad ipsum ex secundâ simile et similiter descriptum; quia ostensum est, ut ΓΒ ad ΒΗ ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΒΗ triangulum, hoc est ΔΕΖ.

de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Mais le triangle ΑΒΗ est égal au triangle ΔΕΖ; donc le triangle ΑΒΓ a avec le triangle ΔΕΖ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ (7. 5). Donc, etc.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme le triangle décrit sur la première est au triangle semblable décrit semblablement sur la seconde; puisqu'il a été démontré que ΒΓ est à ΒΗ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΒΗ, c'est-à-dire ΔΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ.'

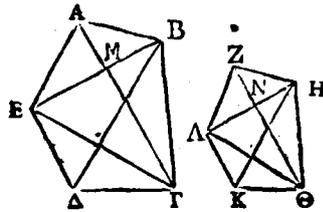
PROPOSITIO XX.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαι-  
ρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς  
ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον δι-  
πλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰ  
πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν.

Ἐστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ,  
ὁμόλογος δὲ ἴστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω ὅτι τὰ

Similia polygona in similia triangula divi-  
duntur, et in æqualia multitudine et homo-  
loga totis; et polygonum ad polygonum duplam  
rationem habet ejus quam homologum latus ad  
homologum latus.

Sint similia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ho-  
mologum vero sit ΑΒ ipsi ΖΗ; dico ΑΒΓΔΕ,



ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρί-  
γωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμό-  
λογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς  
τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει  
ἢ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

ZHΘΚΛ polygona et in similia triangula dividi  
et in æqualia multitudine et homologa totis,  
et ΑΒΓΔΕ polygonum ad ΖΗΘΚΛ polygonum  
duplam rationem habere ejus quam ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

PROPOSITION XX.

Les polygones semblables peuvent être divisés en triangles semblables,  
égaux en nombre, et homologues aux polygones; et le polygone a avec le  
polygone une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté  
homologue.

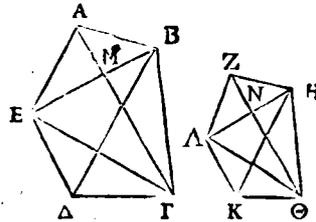
Soient les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et que ΑΒ soit l'homologue de  
ΖΗ; je dis que les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ peuvent être divisés en triangles  
semblables, égaux en nombre, et homologues aux polygones, et que le po-  
lygone ΑΒΓΔΕ a avec le polygone ΖΗΘΚΛ une raison double de celle que ΑΒ  
a avec ΖΗ.

Joignons ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

334 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολυγώνον τῷ ΖΗΘΚΑ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ· καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΖΛ. Ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μίᾳ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὁμοίον· ἴση ἄρα ἐστὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἅλη

Et quoniam simile est ΑΒΓΔΕ polygonum ipsi ΖΗΘΚΑ polygono, æqualis est ΒΑΕ angulus ipsi ΗΖΛ; et est ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΖΗ ad ΖΛ. Et quoniam duo triangula sunt ΑΒΕ, ΖΗΛ unum angulum uni angulo æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangulum igitur est ΑΒΕ triangulum ipsi ΖΗΛ triangulo, quare et simile; æqualis igitur est ΑΒΕ angulus ipsi



ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἔλη τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἴσιν. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γω-

ΖΗΛ. Est autem et totus ΑΒΓ toti ΖΗΘ æqualis, propter similitudinem polygonorum; reliquus igitur ΕΒΓ angulus reliquo ΑΗΘ est æqualis. Et quoniam propter similitudinem ipsorum ΑΒΕ, ΖΗΛ triangulorum, est ut ΕΒ ad ΒΑ ita ΑΗ ad ΗΖ, sed utique et propter similitudinem polygonorum, est ut ΑΒ ad ΒΓ, ita ΖΗ ad ΗΘ; ex æquo igitur est ut ΕΒ ad ΒΓ ita ΑΗ ad ΗΘ, et circa æquales angulos ΕΒΓ,

Puisque le polygone ΑΒΓΔΕ est semblable au polygone ΖΗΘΚΑ, l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΗΖΛ; et ΒΑ est à ΑΕ comme ΖΗ est à ΖΛ. Mais les deux triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ ont un angle égal à un angle, et les côtés autour des angles égaux proportionnels; donc les triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ sont équiangles (6. 6), et par conséquent semblables (4. 6); donc l'angle ΑΒΕ est égal à l'angle ΖΗΛ. Mais l'angle entier ΑΒΓ est égal à l'angle entier ΖΗΘ, à cause de la similitude des polygones; donc l'angle restant ΕΒΓ est égal à l'angle restant ΑΗΘ. Mais à cause de la similitude des triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ, ΕΒ est à ΒΑ comme ΑΗ est à ΗΖ, et à cause de la similitude des polygones, ΑΒ est à ΒΓ comme ΖΗ est à ΗΘ; donc, par égalité, ΕΒ est à ΒΓ comme ΑΗ est à ΗΘ (22. 5);

νίας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΛΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν<sup>3</sup>. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὅμοιον ἐστὶ τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ· τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διήρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω ἔτι καὶ ἰσόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν, ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἐπίμεινα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΑ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ἰσόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΖΘ.

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ἰμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ· ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνία<sup>5</sup> τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ,

ΛΗΘ latera proportionalia sunt; æquiangulum igitur est ΕΒΓ triangulum ipsi ΛΗΘ triangulo, quare et simile adhuc ΕΒΓ triangulum ipsi ΛΗΘ triangulo. Propter eadem utique et ΕΓΔ triangulum simile est ipsi ΛΘΚ triangulo; ergo similia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ et in similia triangula dividuntur et in æqualia multitudine.

Dico et homologa totis, hoc est, ut proportionalia sint triangula, et antecedentia quidem sint ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, consequentia vero eorum ipsa ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, et ΑΒΓΔΕ polygonum ad ΖΗΘΚΑ polygonum duplam rationem habere ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est, ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur enim ΑΓ, ΖΘ.

Et quoniam propter similitudinem polygonorum æqualis est ΑΒΓ angulus ipsi ΖΗΘ, et est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΖΗ ad ΗΘ; æquiangulum est ΑΒΓ triangulum ipsi ΖΗΘ triangulo; æqualis igitur est quidem ΒΑΓ angulus ipsi ΗΖΘ, ipse vero ΒΓΑ ipsi ΗΘΖ. Et quoniam æqualis est ΒΑΜ angulus ipsi ΗΖΝ, ostensum autem est et ΑΒΜ

donc les côtés autour des angles égaux ΕΒΓ, ΛΗΘ sont proportionnels; donc les triangles ΕΒΓ, ΛΗΘ sont équiangles (6. 6); donc le triangle ΕΒΓ est semblable au triangle ΛΗΘ. Le triangle ΕΓΔ est semblable au triangle ΛΘΚ, par la même raison (4. 6); donc les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ sont divisés en triangles semblables et égaux en nombre.

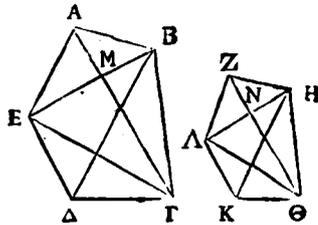
Je dis de plus que ces triangles sont homologues aux polygones, c'est-à-dire que ces triangles sont proportionnels, que les antécédents sont ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ; et que leurs conséquents sont ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ; et que de plus le polygone ΑΒΓΔΕ a avec le polygone ΖΗΘΚΑ une raison double de celle qu'un côté a avec un côté, c'est-à-dire de celle que ΑΒ a avec ΖΗ.

Joignons ΑΓ, ΖΘ.

Puisqu'à cause de la similitude des polygones, l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΖΗΘ, et que ΑΒ est à ΒΓ comme ΖΗ est à ΗΘ, les triangles ΑΒΓ, ΖΗΘ sont équiangles (6. 6); donc l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΗΖΘ, et l'angle ΒΓΑ égal à l'angle ΗΘΖ. Et puisque l'angle ΒΑΜ est égal à l'angle ΗΖΝ, et qu'il a été

ἰδείχθη<sup>6</sup> δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $\text{ABM}$  τῆ ὑπὸ  $\text{ZHN}$  ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $\text{AMB}$  λοιπὴ τῆ ὑπὸ  $\text{ZNH}$  ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $\text{ABM}$  τρίγωνον τῷ  $\text{ZHN}$  τριγώνῳ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ  $\text{BMΓ}$  τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ  $\text{HNΘ}$  τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς μὲν ἡ  $\text{AM}$  πρὸς  $\text{MB}$  οὕτως ἡ  $\text{ZN}$  πρὸς  $\text{NH}$ , ὡς δὲ ἡ  $\text{BM}$  πρὸς  $\text{MΓ}$  οὕτως ἡ  $\text{HN}$  πρὸς  $\text{NΘ}$ · ὥστε καὶ δίσσου, ὡς ἡ  $\text{AM}$  πρὸς  $\text{MΓ}$  οὕτως ἡ  $\text{ZN}$  πρὸς  $\text{NΘ}$ . ΑΛΛ'

ipsi  $\text{ZHN}$  æqualis; et reliquis igitur  $\text{AMB}$  reliquo  $\text{ZNH}$  æqualis est; æquiangulum igitur est  $\text{ABM}$  triangulum ipsi  $\text{ZHN}$  triangulo. Similiter utique ostendemus et  $\text{BMΓ}$  triangulum æquiangulum esse ipsi  $\text{HNΘ}$  triangulo; proportionaliter igitur est ut  $\text{AM}$  quidem ad  $\text{MB}$  ita  $\text{ZN}$  ad  $\text{NH}$ , ut vero  $\text{BM}$  ad  $\text{MΓ}$  ita  $\text{HN}$  ad  $\text{NΘ}$ ; quare et ex æquo ut  $\text{AM}$  ad  $\text{MΓ}$  ita  $\text{ZN}$  ad  $\text{NΘ}$ . Sed ut  $\text{AM}$  ad  $\text{MΓ}$  ita  $\text{ABM}$  triangulum ad



ὡς μὲν<sup>8</sup> ἡ  $\text{AM}$  πρὸς  $\text{MΓ}$  οὕτως τὸ  $\text{ABM}$  τρίγωνον πρὸς  $\text{MBΓ}$ , καὶ τὸ  $\text{AME}$  πρὸς  $\text{EMΓ}$ , πρὸς ἄλληλα γὰρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ ὡς ἄρα<sup>9</sup> ἐν τῶν ἡγούμενων πρὸς ἐν τῶν ἰπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἰπομένα· ὡς ἄρα τὸ  $\text{AMB}$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $\text{BMΓ}$  οὕτως τὸ  $\text{ABE}$  πρὸς τὸ  $\text{ΓBE}$ . ΑΛΛ' ὡς τὸ  $\text{AMB}$  πρὸς τὸ  $\text{BMΓ}$  οὕτως ἡ  $\text{AM}$  πρὸς  $\text{MΓ}$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ  $\text{AM}$  πρὸς  $\text{MΓ}$  οὕτως τὸ  $\text{ABE}$  τρίγωνον πρὸς τὸ

$\text{MBΓ}$ , et  $\text{AME}$  ad  $\text{EMΓ}$ , inter se enim sunt ut bases; et ut igitur unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ut igitur  $\text{AMB}$  triangulum ad  $\text{BMΓ}$  ita  $\text{ABE}$  ad  $\text{ΓBE}$ . Sed ut  $\text{AMB}$  ad  $\text{BMΓ}$  ita  $\text{AM}$  ad  $\text{MΓ}$ ; et ut igitur  $\text{AM}$  ad  $\text{MΓ}$  ita  $\text{ABE}$  triangulum ad  $\text{EBΓ}$  triangulum. Propter eadem utique et ut  $\text{ZN}$  ad  $\text{NΘ}$  ita  $\text{ZHA}$  triangulum ad  $\text{HAΘ}$  triangulum. Et est

démontré que l'angle  $\text{ABM}$  est égal à l'angle  $\text{ZHN}$ , l'angle restant  $\text{AMB}$  est égal à l'angle restant  $\text{ZNH}$  (32. 1); donc les deux triangles  $\text{ABM}$ ,  $\text{ZHN}$  sont équiangles. Nous démontrerons semblablement que les deux triangles  $\text{BMΓ}$ ,  $\text{HNΘ}$  sont équiangles; donc  $\text{AM}$  est à  $\text{MB}$  comme  $\text{ZN}$  est à  $\text{NH}$ , et  $\text{BM}$  est à  $\text{MΓ}$  comme  $\text{HN}$  est à  $\text{NΘ}$  (4. 6); donc, par égalité,  $\text{AM}$  est à  $\text{MΓ}$  comme  $\text{ZN}$  est à  $\text{NΘ}$  (22. 5). Mais  $\text{AM}$  est à  $\text{MΓ}$  comme le triangle  $\text{ABM}$  est au triangle  $\text{MBΓ}$ , et comme le triangle  $\text{AME}$  est au triangle  $\text{EMΓ}$ , car ils sont entr'eux comme leurs bases (1. 6), et un des antécédents est à un des conséquents comme tous les antécédents sont à tous les conséquents (12. 5); donc le triangle  $\text{AMB}$  est au triangle  $\text{BMΓ}$  comme le triangle  $\text{ABE}$  est au triangle  $\text{ΓBE}$ . Mais  $\text{AMB}$  est à  $\text{BMΓ}$  comme  $\text{AM}$  est à  $\text{MΓ}$ ; donc  $\text{AM}$  est à  $\text{MΓ}$  comme le triangle  $\text{ABE}$  est au triangle  $\text{EBΓ}$  (11. 5).

ΕΒΓ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ οὕτως τὸ ΖΗΑ τρίγωνον πρὸς τὸ<sup>10</sup> ΗΑΘ τρίγωνον. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως ἢ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΖΗΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΑ τρίγωνον, καὶ ἑναλλάξ ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΑΘ τρίγωνον<sup>11</sup>. Ομοίως δὴ δειξόμεν, ἐπιζευχθεῖσιν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΑΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓΔ τρίγωνον<sup>12</sup> πρὸς τὸ ΑΘΚ τρίγωνον. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον<sup>13</sup> οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΑΗΘ, καὶ ἔτι ΕΓΔ πρὸς τὸ ΑΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμυνα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΑ πολύγωνον. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον<sup>14</sup> διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ἰσόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευρὰν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς

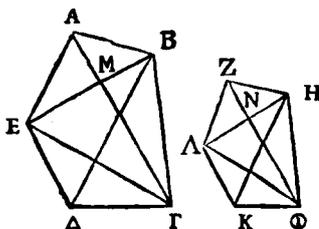
ut AM ad MG ita ZN ad NΘ; et ut igitur ΑΒΕ triangulum ad ΒΕΓ triangulum ita ΖΗΑ triangulum ad ΗΘΑ triangulum, et alterne ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ triangulum ita ΒΕΓ triangulum ad ΗΑΘ triangulum. Similiter utique ostendemus, junctis ΒΔ, ΗΚ, et ut ΒΕΓ triangulum ad ΗΑΘ triangulum ita ΕΓΔ triangulum ad ΑΘΚ triangulum. Et quoniam est ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ ita ΕΒΓ ad ΑΗΘ, et insuper ΕΓΔ ad ΑΘΚ; et ut igitur unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia; est igitur ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ triangulum ita ΑΒΓΔΕ polygonum ad ΖΗΘΚΑ polygonum. Sed ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΑΒ homologum latus ad ΖΗ homologum latus; Similia enim triangula in duplâ ratione sunt homologorum laterum; et ΑΒΓΔΕ igitur polygonum ad ΖΗΘΚΑ polygonum duplam ra-

Par la même raison, ΖΝ est à ΝΘ comme le triangle ΖΗΑ est au triangle ΗΑΘ. Mais ΑΜ est à ΜΓ comme ΖΝ est à ΝΘ; donc le triangle ΑΒΕ est au triangle ΒΕΓ comme le triangle ΖΗΑ est au triangle ΗΘΑ (11. 5), et par permutation, le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme le triangle ΒΕΓ est au triangle ΗΑΘ (16. 5). Nous démontrerons semblablement, après avoir joint ΒΔ, ΗΚ, que le triangle ΒΕΓ est au triangle ΗΑΘ comme le triangle ΕΓΔ est au triangle ΑΘΚ. Et puisque le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme ΕΒΓ est à ΑΗΘ, et comme ΕΓΔ est à ΑΘΚ, un des antécédents est à un des conséquents comme tous les antécédents sont à tous les conséquents (12. 5); donc le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme le polygone ΑΒΓΔΕ est au polygone ΖΗΘΚΑ. Mais le triangle ΑΒΕ a avec le triangle ΖΗΑ une raison double de celle que le côté homologue ΑΒ a avec le côté homologue ΖΗ; car les triangles semblables sont en raison double des côtés homologues; donc le polygone ΑΒΓΔΕ a avec le

### 338 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευρᾶν. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἐξῆς.

tionem habet ejus quam AB homologum latus ad ZH homologum latus. Ergo similia, etc.



#### ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

#### COROLLARIUM. I.

Ὡσαύτως δὴ<sup>15</sup> καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων διχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων ὥστε καὶ<sup>16</sup> καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ὅπερ εἶδει δέξαι<sup>17</sup>.

Similiter utique et in similibus quadrilateris ostendetur, ea in duplâ ratione esse homologorum laterum. Ostensum autem est et in triangulis; quare et universe similes rectilineæ figuræ inter se in duplâ ratione sunt homologorum laterum. Quod oportebat ostendere.

polygone ΖΗΘΚΛ une raison double de celle que le côté homologue AB a avec le côté homologue ΖΗ. Donc, etc.

#### COROLLAIRE I.

On démontrera de la même manière que les quadrilatères sont en raison double des côtés homologues; mais cela a été démontré pour les triangles semblables (cor. 19. 6); donc généralement les figures rectilignes semblables sont entr'elles en raison double des côtés homologues. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.

COROLLARIUM II.

Καὶ ἐὰν τῶν  $AB, ZH$  τρίτην ἀνάλογον λάβω-  
 μιν τὴν  $\Xi$ , ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Xi$  διπλασίονα λόγον  
 ἔχει ἢ πρὸς τὴν  $ZH$ . Ἐχει δὲ καὶ τὸ  
 πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ<sup>18</sup> τὸ τετρά-  
 πλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον  
 ἢ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευ-  
 ράν<sup>19</sup>, τοῦτέστιν ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $ZH$ · εἰδέχθην δὲ  
 τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθό-  
 λου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον  
 ᾖσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως  
 τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δι-  
 τήρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

Et si ipsis  $AB, ZH$  tertiam proportionalem  $\Xi$   
 sumamus,  $AB$  ad  $\Xi$  duplam rationem habet ejus  
 quam  $AB$  ad  $ZH$ . Habet autem et polygonum  
 ad polygonum, et quadrilaterum ad quadrilate-  
 rum duplam rationem ejus quam homologum  
 latus ad homologum latus, hoc est  $AB$  ad  
 $ZH$ ; ostensum est autem hoc et in triangulis;  
 quare et universe manifestum est, si tres  
 rectæ proportionales sint, ut prima ad tertiam  
 ita futuram esse ipsam a-primâ figuram ad ip-  
 sam a secundâ, similem et similiter descriptam.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Δείξομεν δὲ καὶ ἑτέρως προχειρότερον ὁμόλογα  
 τὰ τρίγωνα.

Ostendemus utique et aliter expeditius ho-  
 mologa triangula.

COROLLAIRE II.

Si nous prenons une troisième proportionnelle  $\Xi$  aux droites  $AB, ZH$ , la droite  $AB$  aura avec  $\Xi$  une raison double de celle que  $AB$  a avec  $ZH$  (déf. 10. 5). Mais le polygone a avec le polygone, et le quadrilatère avec le quadrilatère une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire, de celle que  $AB$  a avec  $ZH$ ; et cela a été démontré pour les triangles; il est donc généralement évident que si trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure décrite sur la première est à la figure semblable et décrite semblablement sur la seconde.

AUTREMENT.

Nous démontrerons autrement et plus brièvement que les triangles sont homologues.

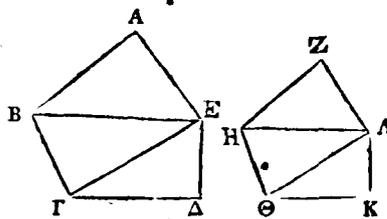
### 340 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ πολύγωνα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΑ, ΑΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΑΗΘ καὶ τὸ ΓΔΕ πρὸς τὸ ΘΚΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΑ τριγώνῳ, τὸ ΑΒΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΗΑ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον πρὸς

Exponantur enim rursus ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ polygona, et jungantur ΒΕ, ΕΓ, ΗΑ, ΑΘ; dico esse ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ ita ΕΒΓ ad ΑΗΘ et ΓΔΕ ad ΘΚΑ.

Quoniam enim simile est ΑΒΕ triangulum ipsi ΖΗΑ triangulo, ΑΒΕ igitur triangulum ad ΖΗΑ duplam rationem habet ejus quam ΒΕ ad ΗΑ. Propter eadem utique et ΕΒΓ triangulum ad ΑΗΘ



τὸ ΗΑΘ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΗΑ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον<sup>20</sup> οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΑΗΘ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ· τὸ ΕΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΑΗΘ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΓΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΑ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΘΚ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΓΕ πρὸς τὴν ΘΑ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον

triangulum duplam rationem habet ejus quam ΒΕ ad ΗΑ; est igitur ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ triangulum ita ΕΒΓ ad ΑΗΘ. Rursus, quoniam simile est ΕΒΓ triangulum ipsi ΑΗΘ triangulo; ΕΒΓ igitur ad ΑΗΘ duplam rationem habet ejus quam ΓΕ recta ad ΘΑ. Propter eadem utique et ΕΓΔ triangulum ad ΑΘΚ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΓΕ ad ΘΑ; est igitur ut ΕΒΓ triangulum ad ΑΗΘ ita ΕΓΔ ad

Soient les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ, et joignons ΒΕ, ΕΓ, ΗΑ, ΑΘ; je dis que le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme ΕΒΓ est à ΑΗΘ, et comme ΓΔΕ est à ΘΚΑ.

Puisque les triangles ΑΒΕ, ΖΗΑ sont semblables, le triangle ΑΒΕ a avec le triangle ΖΗΑ une raison double de celle que ΒΕ a avec ΗΑ (19. 6). Par la même raison, le triangle ΕΒΓ a avec le triangle ΗΑΘ une raison double de celle que ΒΕ a avec ΗΑ; donc le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme le triangle ΕΒΓ est au triangle ΑΗΘ (11. 5). De plus, puisque le triangle ΕΒΓ est semblable au triangle ΑΗΘ, le triangle ΕΒΓ a avec le triangle ΑΗΘ une raison double de celle que la droite ΓΕ a avec ΘΑ (19. 6). Par la même raison, le triangle ΕΓΔ a avec le triangle ΑΘΚ une raison double de celle que ΓΕ a avec ΘΑ; donc le

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 341

πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ καὶ τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ<sup>21</sup>. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΛΘΚ. Ostensum est autem et ut ΕΒΓ ad ΛΗΘ ita ΑΒΕ ad ΖΗΛ; et ut igitur ΑΒΕ ad ΖΗΛ ita ΒΕΓ ad ΗΛΘ et ΕΓΔ ad ΛΘΚ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

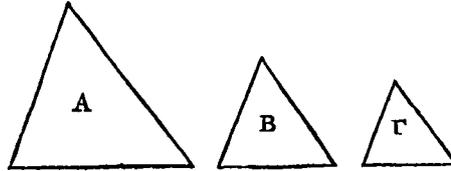
PROPOSITIO XXI.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμω ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἰστὶν ὅμοια.

Ἐστὼ γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἰστὶν ὅμοιον.

Ipsa eidem rectilineo similia, et inter se sunt similia.

Sit enim utrumque ipsorum Α, Β rectilinearum ipsi Γ simile; dico et Α ipsi Β esse simile.



Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιον ἰστὶ τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιον τε ἰστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. Πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιον ἰστὶ

Quoniam enim est simile Α ipsi Γ, et æquiangulum est ipsi, et circa æquales angulos latera proportionalia habet. Rursus, quo-

triangle ΕΒΓ est à ΛΗΘ comme ΕΓΔ est à ΛΘΚ (11. 5). Mais on a démontré que ΕΒΓ est à ΛΗΘ comme ΑΒΕ est à ΖΗΛ; donc ΑΒΕ est à ΖΗΛ comme ΒΕΓ est à ΗΛΘ, et comme ΕΓΔ est à ΛΘΚ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXI.

Les figures rectilignes semblables à une même figure sont semblables entr'elles.

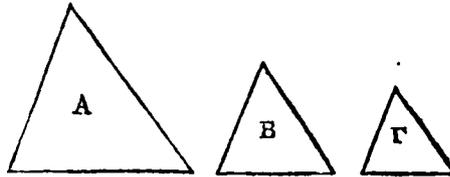
Que chacune des figures rectilignes Α, Β soit semblable à la figure Γ; je dis que la figure Α est semblable à la figure Β.

Car, puisque la figure Α est semblable à la figure Γ, ces deux figures sont équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels (déf. 1. 6).

342 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιον τε ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς  
περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει·  
ἐκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιον τε ἐστὶ

niam simile est B ipsi Γ, et æquiangulum est  
ipsi, et circa æquales angulos latera propor-  
tionalia habet; utrumque igitur ipsorum Α,



καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον  
ἔχει<sup>2</sup>. Ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Ὅπερ εἶδει  
δείξαι.

B ipsi Γ et æquiangulum est et circa æquales  
angulos latera proportionalia habet. Simile igitur  
est Α ipsi Β. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

PROPOSITIO XXII.

Εάν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, καὶ τὰ ἀπ'  
αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀνα-  
γεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται· καὶ τὰ ἀπ' αὐ-  
τῶν εὐθύγραμμα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγε-  
γραμμένα ἀνάλογον ἦ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι  
ἀνάλογον ἔσονται.

Si quatuor rectæ proportionales sint, et ab  
ipsis rectilinea, similiaque et similiter descripta,  
proportionalia erunt; et si ab ipsis rectilinea  
similiaque et similiter descripta proportionalia  
sint, et ipsæ rectæ proportionales erunt.

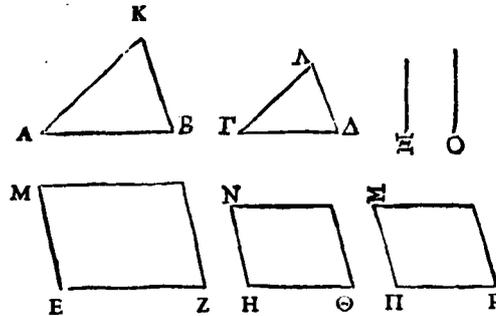
De plus, puisque la figure B est semblable à la figure Γ, ces deux figures  
sont équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels;  
donc chacune des figures A, B est équiangle avec la figure Γ, et elles ont  
les côtés autour des angles égaux proportionnels. Donc la figure A est sem-  
blable à la figure B. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXII.

Si quatre droites sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables et  
semblablement construites sur ces droites, seront proportionnelles; et si des  
figures rectilignes semblables et semblablement construites sur ces droites sont  
proportionnelles, ces mêmes droites seront proportionnelles.

Ἐστῶσαν τέσσαρες εὐθείαι ἀνάλογον αἱ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$ , ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$  οὕτως ἢ  $EZ$  πρὸς τὴν  $H\Theta$ , καὶ ἀναγεγράφωσαν ἀπὸ μὲν τῶν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ  $KAB$ ,  $\Lambda\Gamma\Delta$ , ἀπὸ δὲ τῶν  $EZ$ ,  $H\Theta$  ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ  $MZ$ ,  $N\Theta$ ; λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ  $KAB$  πρὸς τὸ  $\Lambda\Gamma\Delta$  οὕτως τὸ  $MZ$  πρὸς τὸ  $N\Theta$ .

Sint quatuor rectæ proportionales  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$ , ut  $AB$  ad  $\Gamma\Delta$  ita  $EZ$  ad  $H\Theta$ , et describantur ab ipsis quidem  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  similiaque et similiter posita rectilinea  $KAB$ ,  $\Lambda\Gamma\Delta$ , ab ipsis vero  $EZ$ ,  $H\Theta$  similiaque et similiter posita rectilinea  $MZ$ ,  $N\Theta$ ; dico esse ut  $KAB$  ad  $\Lambda\Gamma\Delta$  ita  $MZ$  ad  $N\Theta$ .



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  τρίτη ἀνάλογον ἢ  $\Xi$ , τῶν δὲ  $EZ$ ,  $H\Theta$  τρίτη ἀνάλογον ἢ  $O$ . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς μὲν ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$  οὕτως ἢ  $EZ$  πρὸς τὴν  $H\Theta$ , ὡς δὲ  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὴν  $\Xi$  οὕτως ἢ  $H\Theta$  πρὸς τὴν  $O$ ; δίσκου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Xi$  οὕτως ἢ  $EZ$  πρὸς τὴν  $O$ . Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ  $AB$

Sumatur enim ipsis quidem  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  tertia proportionalis  $\Xi$ , ipsis vero  $EZ$ ,  $H\Theta$  tertia proportionalis  $O$ . Et quoniam est ut  $AB$  quidem ad  $\Gamma\Delta$  ita  $EZ$  ad  $H\Theta$ , ut  $\Gamma\Delta$  vero ad  $\Xi$  ita  $H\Theta$  ad  $O$ ; ex æquo igitur est ut  $AB$  ad  $\Xi$  ita  $EZ$  ad  $O$ . Sed ut  $AB$  quidem ad  $\Xi$  ita  $KAB$  ad

Soient  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$  quatre droites proportionnelles, de manière que  $AB$  soit à  $\Gamma\Delta$  comme  $EZ$  est à  $H\Theta$ ; soient décrites sur les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  les figures rectilignes semblables et semblablement placées  $KAB$ ,  $\Lambda\Gamma\Delta$ , et sur les droites  $EZ$ ,  $H\Theta$ , les figures semblables et semblablement placées  $MZ$ ,  $N\Theta$ ; je dis que  $KAB$  est à  $\Lambda\Gamma\Delta$  comme  $MZ$  est à  $N\Theta$ .

Prenons une troisième proportionnelle  $\Xi$  aux droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , et une troisième proportionnelle  $O$  aux droites  $EZ$ ,  $H\Theta$  (11. 6). Puisque  $AB$  est à  $\Gamma\Delta$  comme  $EZ$  est à  $H\Theta$ , [et que  $\Gamma\Delta$  est à  $\Xi$  comme  $H\Theta$  est à  $O$ ], par égalité,  $AB$  est à  $\Xi$  comme  $EZ$  est à  $O$  (22. 5). Mais  $AB$  est à  $\Xi$  comme  $KAB$  est

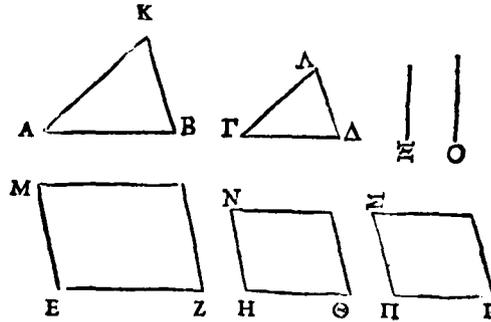
344 LE SIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πρὸς τὴν Ε οὕτως τὸ<sup>2</sup> KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἢ EZ πρὸς τὴν Ο οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ<sup>3</sup> ὡς ἄρα τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ ΝΘ.

ΛΓΔ, ut EZ vero ad O ita MZ ad ΝΘ; et ut igitur KAB ad ΛΓΔ ita MZ ad ΝΘ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΗΘ.

Sed et sit ut KAB ad ΛΓΔ ita MZ ad ΝΘ; dico esse et ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ.



Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως EZ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω<sup>5</sup> ὡς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠΡ ὁποτέρῳ τῶν MZ, ΝΘ ὁμοίων τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ.

Si enim non est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ, sit ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠΡ, et describatur a ΠΡ alterutri ipsorum MZ, ΝΘ simileque et similiter positum rectilineum ΣΡ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγράφεται ἀπὸ μὲν τῶν AB, ΓΔ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ KAB, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν EZ, ΠΡ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠΡ, et descripta sunt ab ipsis quidem AB, ΓΔ, similiaque et similiter posita KAB, ΛΓΔ, ab ipsis vero EZ, ΠΡ, similiaque et similiter posita

ἀ ΛΓΔ (cor. 2. prop. 20. 6), et EZ est à O comme MZ est à ΝΘ; donc KAB est à ΛΓΔ comme MZ est à ΝΘ (II. 5).

Mais que KAB soit à ΛΓΔ comme MZ est à ΝΘ; je dis que AB est à ΓΔ comme EZ est à ΗΘ.

Car si AB n'est pas à ΓΔ comme EZ est à ΗΘ, que AB soit à ΓΔ comme EZ est à ΠΡ (12. 6), et sur ΠΡ décrivons la figure rectiligne ΠΡ de manière qu'elle soit semblable à chacune des figures MZ, ΝΘ, et semblablement placée (18. 6).

Puisque AB est à ΓΔ comme EZ est à ΠΡ, que les figures KAB, ΛΓΔ décrites sur AB, ΓΔ sont semblables et semblablement placées, et que les figures

κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ· ἴστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ<sup>6</sup>. τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΝΘ, ΣΡ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ. Ἐστὶ δὲ αὐτῶ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἢ<sup>8</sup> ΗΘ τῇ ΠΡ. Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὡς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἢ ΠΡ τῇ ΗΘ· ἴστιν ἄρα ὡς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΜΖ, ΣΡ; est igitur ut ΚΑΒ ad ΛΓΔ ita ΜΖ ad ΣΡ. Ponitur autem et ut ΚΑΒ ad ΛΓΔ ita ΜΖ ad ΝΘ; et ut igitur ΜΖ ad ΣΡ ita ΜΖ ad ΝΘ; ergo ΜΖ ad utrumque ipsorum ΝΘ, ΣΡ eandem habet rationem; æquale igitur est ΝΘ ipsi ΣΡ. Est autem ipsi simile et similiter positum; æqualis igitur ΗΘ ipsi ΠΡ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΠΡ, æqualis autem ΠΡ ipsi ΗΘ; est igitur ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΗΘ. Si igitur quatuor, etc.

Λ Η Μ Μ Α.

LEMMA.

Ὅτι δὲ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα ἢ καὶ ὁμοία, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἴσι, δείξομεν οὕτως.

Ἐστω ἴσα καὶ ὁμοία εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἢ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ἢ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἢ ΡΠ τῇ ΘΗ.

Si autem rectilinea æqualia sint et similia, homologa ipsorum latera æqualia inter se esse, sic ostendemus.

Sint æqualia et similia rectilinea ΝΘ, ΣΡ, et sit ut ΘΗ ad ΗΝ ita ΡΠ ad ΠΣ; dico æqualem esse ΡΠ ipsi ΘΗ.

ΜΖ, ΣΡ décrites sur les droites ΕΖ, ΠΡ sont semblables et semblablement placées, la figure ΚΑΒ est à la figure ΛΓΔ comme ΜΖ est à ΣΡ. Mais on a supposé que ΚΑΒ est à ΛΓΔ comme ΜΖ est à ΝΘ; donc ΜΖ est à ΣΡ comme ΜΖ est à ΝΘ; donc la figure ΜΖ a la même raison avec chacune des figures ΝΘ, ΣΡ (11. 5); donc la figure ΝΘ est égale à la figure ΣΡ (9. 5). Mais elle lui est semblable, et elle est semblablement placée; donc ΗΘ est égal à ΠΡ (lem. suiv.). Et puisque ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΖ est à ΠΡ, et que ΠΡ est égal à ΗΘ, ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΖ est à ΗΘ (7. 5). Donc, etc.

LEMME.

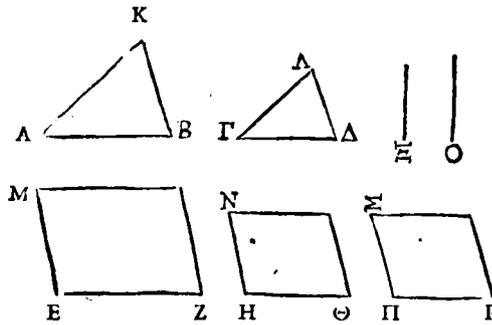
Si des figures rectilignes sont égales et semblables, nous démontrerons de cette manière que leurs côtés homologues sont égaux entr'eux.

Que les figures rectilignes ΝΘ, ΣΡ soient égales et semblables, et que ΗΘ soit à ΗΝ comme ΡΠ est à ΠΣ; je dis que ΡΠ est égal à ΘΗ.

346 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ ἀνισοὶ εἴσι, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. Καὶ ἐπεὶ ἐστίν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ. Μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων

Si enim inæquales sint, una ipsarum major est. Sit major ΡΠ ipsâ ΘΗ. Et quoniam est ut ΡΠ ad ΠΣ ita ΘΗ ad ΗΝ, et alterne ut ΡΠ ad ΘΗ ita ΠΣ ad ΗΝ. Major autem ΠΡ ipsâ ΘΗ; major igitur et ΠΣ ipsâ



ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μείζον ἐστὶ τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἀνισοὶ ἐστὶν ἡ ΠΡ τῆς ΗΘ, ἴση ἄρα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

HN; quare et ΡΣ majus est ipso ΘΝ; sed et æquale, quod est impossibile; non igitur inæqualis est ΗΡ ipsi ΗΘ, æqualis igitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Æquiangula parallelogramma inter se rationem habent compositam ex lateribus.

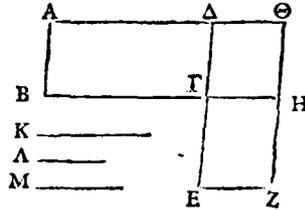
Car si ces droites sont inégales, une d'elles est plus grande. Que ΡΠ·soit plus grand que ΘΗ. Puisque ΡΠ est à ΠΣ comme ΘΗ est à ΗΝ, par permutation, ΡΠ est à ΘΗ comme ΠΣ est à ΗΝ (16. 5). Mais ΗΡ est plus grand que ΘΗ; donc ΠΣ est plus grand que ΗΝ; donc la figure ΡΣ est plus grande que la figure ΘΝ (20. 6); mais elle lui est égale, ce qui est impossible; donc les droites ΗΡ, ΗΘ ne sont pas inégales; donc elles sont égales. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIII.

Les parallélogrammes équiangles ont entr'eux une raison composée des côtés.

Ἐστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ, ἴσων ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τοῦ τε ὄν ἔχει ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἢ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ'.

Sint æquiangula parallelogramma ΑΓ, ΓΖ, æqualem habentia ΒΓΔ angulum ipsi ΕΓΗ; dico ΑΓ parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum rationem habere compositam ex lateribus, ex eâ quam habet ΒΓ ad ΓΗ et ex eâ quam habet ΔΓ ad ΓΕ.



Κεῖσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ· καὶ συμπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γηγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.

Ponantur enim ita ut in directum sit ΒΓ ipsi ΓΗ; in directum igitur est et ΔΓ ipsi ΓΕ; et compleatur ΔΗ parallelogrammum, et exponatur quædam recta Κ, et fiat ut ΒΓ quidem ad ΓΗ ita Κ ad Λ, ut ΔΓ vero ad ΓΕ ita Λ ad Μ.

Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοὶ εἰσὶ τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ΑΛΛ' ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς

Rationes igitur et ipsius Κ ad Λ et ipsius Λ ad Μ eadem sunt quæ rationes laterum, et ipsius ΒΓ ad ΓΗ et ipsius ΔΓ ad ΓΕ. Sed ipsius Κ ad Μ ratio componitur et ex ratione ipsius Κ ad Λ et ex ratione ipsius Λ ad Μ;

Soient les parallélogrammes équiangles ΑΓ, ΓΖ, ayant l'angle ΒΓΔ égal à l'angle ΕΓΗ; je dis que le parallélogramme ΑΓ a avec le parallélogramme ΓΖ une raison composée des côtés, c'est-à-dire de celle que ΒΓ a avec ΓΗ, et de celle que ΔΓ a avec ΓΕ.

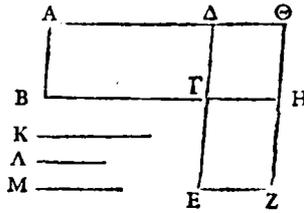
Plaçons ces parallélogrammes de manière que la droite ΒΓ soit dans la direction de la droite ΓΗ; la droite ΔΓ sera dans la direction de ΓΕ (14. 1). Achevons le parallélogramme ΔΗ; prenons une droite quelconque Κ; faisons en sorte que ΒΓ soit à ΓΗ comme Κ est à Λ, et que ΔΓ soit à ΓΕ comme Λ est à Μ (12. 6).

Les raisons de Κ à Λ et de Λ à Μ seront les mêmes que les raisons des côtés, c'est-à-dire que celle de ΒΓ à ΓΗ et que celle de ΔΓ à ΓΕ. Mais la raison de Κ à Μ est composée de celle de Κ à Λ, et de celle de Λ à

348 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὴν  $M^2$ . ἄσπε καὶ ἡ  $K$  πρὸς τὴν  $M$  λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΗ$  οὕτως τὸ  $ΑΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΘ$ . ἀλλ' ὡς ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΗ$  οὕτως ἡ  $K$  πρὸς τὴν  $Λ$  καὶ ὡς ἄρα ἡ  $K$  πρὸς τὴν  $Λ$  οὕτως τὸ  $ΑΓ$  πρὸς τὸ  $ΓΘ$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $ΔΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΕ$  οὕτως τὸ  $ΓΘ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$ . ἀλλ' ὡς ἡ  $ΔΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΕ$

quare et  $K$  ad  $M$  rationem habet compositam ex lateribus. Et quoniam est ut  $BΓ$  ad  $ΓΗ$  ita  $ΑΓ$  parallelogrammum ad  $ΓΘ$ ; sed ut  $BΓ$  ad  $ΓΗ$  ita  $K$  ad  $Λ$ ; et ut igitur  $K$  ad  $Λ$  ita  $ΑΓ$  ad  $ΓΘ$ . Rursus, quoniam est ut  $ΔΓ$  ad  $ΓΕ$  ita  $ΓΘ$  parallelogrammum ad  $ΓΖ$ ; sed ut  $ΔΓ$  ad  $ΓΕ$  ita  $Λ$  ad  $M$ ; et ut igitur  $Λ$  ad  $M$  ita  $ΓΘ$  parallelogrammum ad  $ΓΖ$  parallelogrammum.



οὕτως ἡ  $Λ$  πρὸς τὴν  $M$  καὶ ὡς ἄρα ἡ  $Λ$  πρὸς τὴν  $M$  οὕτως τὸ  $ΓΘ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$  παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ  $K$  πρὸς τὴν  $Λ$  οὕτως τὸ  $ΑΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΘ$  παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ  $Λ$  πρὸς τὴν  $M$  οὕτως τὸ  $ΓΘ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$  παραλληλόγραμμον<sup>3</sup>. διῶσιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $K$  πρὸς τὴν  $M$  οὕτως τὸ  $ΑΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$  παραλληλόγραμμον<sup>4</sup>. Ἡ δὲ  $K$  πρὸς τὴν  $M$

Quoniam igitur ostensum est ut  $K$  quidem ad  $Λ$  ita  $ΑΓ$  parallelogrammum ad  $ΓΘ$  parallelogrammum, ut  $Λ$  vero ad  $M$  ita  $ΓΘ$  parallelogrammum ad  $ΓΖ$  parallelogrammum; ex æquo igitur est ut  $K$  ad  $M$  ita  $ΑΓ$  parallelogrammum ad  $ΓΖ$  parallelogrammum. At vero  $K$  ad  $M$  rationem habet compositam ex lateribus; et  $ΑΓ$  igitur ad  $ΓΖ$  rationem ha-

$M$ ; donc la droite  $K$  a avec la droite  $M$  une raison composée des côtés. Et puisque  $BΓ$  est à  $ΓΗ$  comme le parallélogramme  $ΑΓ$  est au parallélogramme  $ΓΘ$  (1. 6), et que  $BΓ$  est à  $ΓΗ$  comme  $K$  est à  $Λ$ ,  $K$  est à  $Λ$  comme le parallélogramme  $ΑΓ$  est au parallélogramme  $ΓΘ$  (11. 5). De plus, puisque  $ΔΓ$  est à  $ΓΕ$  comme le parallélogramme  $ΓΘ$  est au parallélogramme  $ΓΖ$ , et que  $ΔΓ$  est à  $ΓΕ$  comme  $Λ$  est à  $M$  (1. 6),  $Λ$  est à  $M$  comme le parallélogramme  $ΓΘ$  est au parallélogramme  $ΓΖ$  (11. 5). Mais on a démontré que  $K$  est à  $Λ$  comme le parallélogramme  $ΑΓ$  est au parallélogramme  $ΓΘ$ , et  $Λ$  est à  $M$  comme le parallélogramme  $ΓΘ$  est au parallélogramme  $ΓΖ$ ; donc, par égalité,  $K$  est à  $M$  comme le parallélogramme  $ΑΓ$  est au parallélogramme  $ΓΖ$  (22. 5). Mais la

λόγον ἔχει τὴν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Τὰ ἄρα ἰσογῶνια, καὶ τὰ ἐξῆς.

bet compositam ex lateribus. Ergo æquiangula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

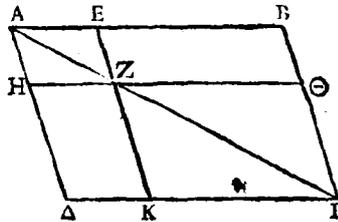
PROPOSITIO XXIV.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περιὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Omnis parallelogrammi circa diametrum parallelogramma similia sunt et toti et inter se.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περιὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω ὅτι ἐκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὁμοίον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.

Sit parallelogrammum ΑΒΓΔ, diameter autem ejus ipsa ΑΓ, circa ΑΓ autem parallelogramma sint ΕΗ, ΘΚ; dico utrumque ipsorum ΕΗ, ΘΚ parallelogrammorum simile esse toti ΑΒΓΔ et inter se.



Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρά μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἕκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς

Quoniam enim trianguli ΑΒΓ juxta unum laterum ΒΓ ducta est ΕΖ, proportionaliter est

droite κ a avec la droite m une raison composée des côtés; donc le parallélogramme ΑΓ a avec le parallélogramme ΓΖ une raison composée des côtés. Donc, etc.

PROPOSITION XXIV.

Dans tout parallélogramme, les parallélogrammes autour de la diagonale sont semblables au parallélogramme entier et semblables entr'eux.

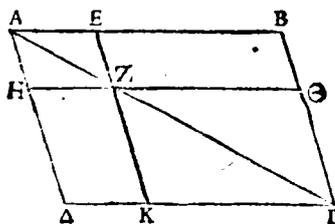
Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de la diagonale ΑΓ soient les parallélogrammes ΕΗ, ΘΚ; je dis que les parallélogrammes ΕΗ, ΘΚ sont semblables au parallélogramme entier ΑΒΓΔ, et semblables entr'eux.

Puisqu'on a mené ΕΖ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ, la droite

350 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἢ BE πρὸς τὴν EA οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρά μίαν τῶν πλευρῶν<sup>2</sup> τὴν ΓΔ ἤκται ἢ ΖΗ, ἀνάλογον ἄρα<sup>3</sup> ἴστίν ὡς ἢ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἢ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. Αλλ' ὡς ἢ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως εἰδείχθη καὶ ἢ BE πρὸς τὴν EA καὶ ὡς ἄρα ἢ<sup>4</sup> BE πρὸς τὴν EA οὕτως ἢ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συντιθέντι<sup>5</sup> ὡς ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἢ ΔΑ πρὸς τὴν<sup>6</sup> ΑΗ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἢ ΒΑ πρὸς

ut BE ad EA ita ΓΖ ad ΖΑ. Rursus, quoniam trianguli ΑΓΔ juxta unum laterum ΓΔ ducta est ΖΗ, proportionaliter igitur est ut ΓΖ ad ΖΑ ita ΔΗ ad ΗΑ. Sed ut ΓΖ ad ΖΑ ita ostensa est et BE ad EA; et ut igitur BE ad EA ita ΔΗ ad ΗΑ, et per compositionem, ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΔΑ ad ΑΗ, et alterne ut ΒΑ ad ΔΑ ita ΕΑ ad ΑΗ; ipsorum igitur ΑΒΓΔ, ΕΗ parallelogrammorum proportionalia sunt latera



τὴν ΑΔ οὕτως ἢ EA πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ<sup>7</sup> παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἢ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἴστίν ἢ μὲν ὑπὸ ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἢ δὲ ὑπὸ ΗΖΑ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ<sup>8</sup>, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἢ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἴστί τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ΑΓΒ

circa communem angulum ΒΑΔ. Et quoniam parallela est ΗΖ ipsi ΔΓ, æqualis est ipse quidem ΑΗΖ angulus ipsi ΑΔΓ, ipse vero ΗΖΑ ipsi ΔΓΑ, et communis duobus triangulis ΑΔΓ, ΑΗΖ ipse ΔΑΓ angulus; æquiangulum igitur est ΑΔΓ triangulum ipsi ΑΗΖ triangulo. Propter eadem utique et ΑΓΒ triangulum æquiangulum est ipsi ΑΖΕ triangulo; et totum igitur ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsi ΕΗ parallelo-

BE est à EA' comme ΓΖ est à ΖΑ (2. 6). De plus, puisqu'on a mené ΖΗ parallèle à un des côtés ΓΔ du triangle ΑΓΔ, la droite ΓΖ est à ΖΑ comme ΔΗ est à ΗΑ. Mais on a démontré que ΓΖ est à ΖΑ comme BE est à EA; donc BE est à EA comme ΔΗ est à ΗΑ (11. 5); et par composition, ΒΑ est à ΑΕ comme ΔΑ est à ΑΗ (18. 5), et par permutation, ΒΑ est à ΔΑ comme ΕΑ est à ΑΗ (16. 5); donc les côtés des parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΗ autour de l'angle commun ΒΑΔ sont proportionnels. Et puisque ΗΖ est parallèle à ΔΓ, l'angle ΑΗΖ est égal à l'angle ΑΔΓ (29. 1), et l'angle ΗΖΑ égal à l'angle ΔΓΑ; mais l'angle ΔΑΓ est commun aux deux triangles ΑΔΓ, ΑΗΖ; donc les triangles ΑΔΓ, ΑΗΖ sont équi-

τριγώνων ἰσογώνιόν ἐστι τῶ AZE τριγώνῳ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον τῶ EH παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιόν ἐστίν<sup>9</sup>. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ AH πρὸς τὴν HZ. Ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ AΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ AZ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς ἡ<sup>10</sup> ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ἔπει εἰδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ AΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ AZ πρὸς τὴν ΖΕ· διῆσθαι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ΖΕ· τῶν ἄρα ABΓΔ, EH παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἰ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὁμοίον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον τῶ EH παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ<sup>11</sup> τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῶ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὁμοίον ἐστίν· ἐκείτηρον ἄρα τῶν EH, ΘΚ παραλληλογράμμων τῶ ABΓΔ παραλληλογράμμῳ<sup>12</sup> ὁμοίον ἐστὶ. Τὰ δὲ τῶ αὐτῶ εὐθυγράμμῳ ὁμοία καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὁμοία· καὶ τὸ EH ἄρα παραλληλόγραμμον τῶ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὁμοίον ἐστὶ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

grammo æquiangulum est; proportionaliter igitur est ut AΔ ad ΔΓ ita AH ad HZ. Ut autem ΔΓ ad ΓΑ ita HZ ad ΖΑ, ut AΓ vero ad ΓΒ ita AZ ad ZE, et insuper ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΖΕ ad ΕΑ; et quoniam ostensum est ut ΔΓ quidem ad ΓΑ ita HZ ad ΖΑ, ut AΓ vero ad ΓΒ ita AZ ad ZE; ex æquo igitur est ut ΔΓ ad ΒΓ ita HZ ad ZE. Ipsorum igitur ABΓΔ, EH parallelogrammorum proportionalia sunt latera circa æquales angulos; simile igitur est ABΓΔ parallelogrammum ipsi EH parallelogrammo. Propter eadem utique et ABΓΔ parallelogrammum et ipsi ΘΚ parallelogrammo simile est; utrumque igitur ipsorum EH, ΘΚ parallelogrammorum ipsi ABΓΔ parallelogrammo simile est. Ipsa autem eidem rectilineo similia, et inter se sunt similia; et EH igitur parallelogrammum ipsi ΘΚ parallelogrammo simile est. Omnis igitur, etc.

angles. Les triangles ATB, AZE sont équiangles, par la même raison; donc le parallélogramme entier ABΓΔ, et le parallélogramme EH sont équiangles; donc AΔ est à ΔΓ comme AH est à HZ (4. 6). Mais AΓ est à ΓΑ comme HZ est à ΖΑ, et AΓ est à ΓΒ comme AZ est à ZE, de plus, ΓΒ est à ΒΑ comme ZE est à ΕΑ, et l'on a démontré que ΔΓ est à ΓΑ comme HZ est à ΖΑ, et que AΓ est à ΓΒ comme AZ est à ZE; donc, par égalité, ΔΓ est à ΒΓ comme HZ est à ZE (22. 5); donc les côtés des parallélogrammes ABΓΔ, EH, autour des angles égaux, sont proportionnels; donc le parallélogramme ABΓΔ est semblable au parallélogramme EH (déf. 1. 6). Le parallélogramme ABΓΔ est semblable au parallélogramme ΘΚ, par la même raison; donc chacun des parallélogrammes EH, ΘΚ est semblable au parallélogramme ABΓΔ. Mais les figures qui sont semblables chacune à une même figure, sont semblables entr'elles (21. 6); donc le parallélogramme EH est semblable au parallélogramme ΘΚ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

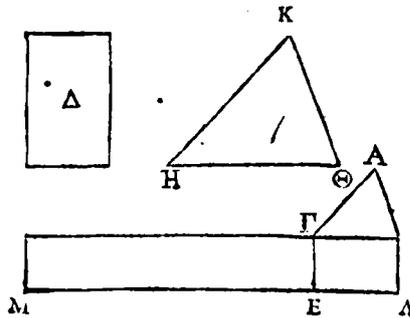
PROPOSITIO XXV.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὁμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ δεῖ ἴσον, τὸ Δ. δεῖ δὲ τῷ μὲν ΑΒΓ ὁμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Dato rectilineo simile, et alteri dato æquale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere, ipsum ΑΒΓ, cui vero oportet æquale ipsum Δ; oportet igitur ipsi quidem ΑΒΓ simile, ipsi vero Δ æquale idem constituere.



Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἣ ἴστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΑ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΑΕ

Applicetur enim ad ipsam quidem ΒΓ Ipsi ΑΒΓ triangulo æquale parallelogrammum ΒΕ, ad ipsam vero ΓΕ ipsi Δ æquale parallelogrammum ΓΜ in angulo ΖΓΕ, qui est æqualis ipsi ΓΒΑ; in directum igitur est ΒΓ quidem

PROPOSITION XXV.

Construire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne donnée et égale à une autre figure rectiligne donnée.

Soit ΑΒΓ la figure rectiligne donnée, à laquelle il faut construire une figure semblable, et Δ la figure rectiligne à laquelle il faut la faire égale; il faut construire une figure qui soit semblable à la figure ΑΒΓ et égale à la figure Δ.

Construisons sur ΒΓ un parallélogramme ΒΕ qui soit égal au triangle ΑΒΓ (44 et 45. 1), et sur ΓΕ et dans l'angle ΖΓΕ qui est égal à l'angle ΓΒΑ, construisons un parallélogramme ΓΜ qui soit égal à la figure Δ; la droite ΒΓ sera dans la direction de ΓΖ, et ΑΕ dans la direction de ΕΜ (14. 1). Prenons

τῆ EM. Καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μίση ἀνάλογον ἢ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῶ ABΓ ὁμοίον τε<sup>2</sup> καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾶσιν, ἐστὶν<sup>3</sup> ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὁμοίον καὶ ὁμοίως ἀναγερόμενον· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ABΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον<sup>4</sup>. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ BE παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ EZ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ABΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον οὕτως τὸ BE παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ EZ παραλληλόγραμμον· ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ ABΓ τρίγωνον πρὸς τὸ BE παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ EZ παραλληλόγραμμον. Ἴσον δὲ τὸ ABΓ τρίγωνον τῶ BE παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῶ EZ παραλληλογράμμῳ. Ἀλλὰ τὸ EZ παραλληλόγραμμον τῶ Δ ἐστὶν ἴσον· καὶ

ipsi ΓΖ, ipsa vero ΑΕ ipsi EM. Et sumatur inter ipsas ΒΓ, ΓΖ media proportionalis ΗΘ, et describatur ex ΗΘ ipsi ABΓ simileque et similiter positum ipsum ΚΗΘ.

Et quoniam est ut ΒΓ ad ΗΘ ita ΗΘ ad ΓΖ, si autem tres rectæ proportionales sint, est ut prima ad tertiam ita ipsa ex primâ figura ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam; est igitur ut ΒΓ ad ΓΖ ita ABΓ triangulum ad ΚΗΘ triangulum. Sed et ut ΒΓ ad ΓΖ ita BE parallelogrammum ad EZ parallelogrammum; et ut igitur ABΓ triangulum ad ΚΗΘ triangulum ita BE parallelogrammum ad EZ parallelogrammum; alterne igitur ut ABΓ triangulum ad BE parallelogrammum ita ΚΗΘ triangulum ad EZ parallelogrammum. Æquale autem ABΓ triangulum ipsi BE parallelogrammo; æquale igitur et ΚΗΘ triangulum ipsi EZ parallelogrammo. Sed EZ parallelogrammum ipsi Δ est æquale; et ΚΗΘ igitur ipsi Δ est æquale. Est autem ΚΗΘ et ipsi ABΓ simile; ipsi igitur dato

une moyenne proportionnelle ΗΘ entre les droites ΒΓ, ΓΖ (13. 6), et sur ΗΘ construisons une figure ΚΗΘ semblable à la figure ABΓ et semblablement placée (18. 6).

Puisque ΒΓ est à ΗΘ comme ΗΘ est à ΓΖ, et puisque, lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure construite sur la première est à la figure semblable construite sur la seconde, et semblablement placée (cor. 2. prop. 20. 6), la droite ΒΓ est à la droite ΓΖ comme le triangle ABΓ est au triangle ΚΗΘ. Mais ΒΓ est à ΓΖ comme le parallélogramme BE est au parallélogramme EZ (1. 6); donc le triangle ABΓ est au triangle ΚΗΘ comme le parallélogramme BE est au parallélogramme EZ; donc, par permutation, le triangle ABΓ est au parallélogramme BE comme le triangle ΚΗΘ est au parallélogramme EZ (16. 5). Mais le triangle ABΓ est égal au parallélogramme BE; donc le triangle ΚΗΘ est égal au parallélogramme EZ. Mais le parallélogramme EZ est égal à la figure Δ; donc le triangle ΚΗΘ est égal à la figure Δ.

354 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἴστί· ἴσον. Ἐστὶ δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον· τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συνίσταται τὸ ΚΗΘ. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι.

rectilineo ABΓ simile, et alteri dato Δ æquale idem constitutum est ΚΗΘ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

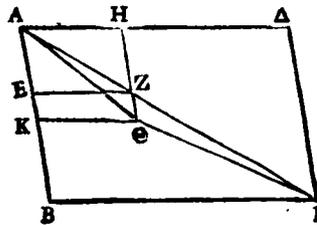
Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρηθῇ, ὅμοιον τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἴστί τῷ ὅλῳ.

Ἀπὸ παραλληλογράμμου γάρ<sup>1</sup> τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφηρήσθω<sup>2</sup> τὸ ΑΕΖΗ, ὅμοιον

PROPOSITIO XXVI.

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur, et simile toti et similiter positum, communem angulum habens cum ipso, circa eandem diametrum est circa quam totum.

A parallelogrammo enim ΑΒΓΔ parallelogrammum auferatur ΑΕΖΗ, simile ipsi ΑΒΓΔ



τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἴστί τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΕΖΗ.

et similiter positum, communem angulum habens ΔΑΒ cum ipso; dico circa eandem diametrum esse ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΑΕΖΗ.

Mais le triangle ΚΗΘ est semblable au triangle ΑΒΓ; on a donc construit la figure ΚΗΘ semblable à la figure rectiligne donnée ΑΒΓ, et égale à une autre figure donnée Δ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXVI.

Si d'un parallélogramme on retranche un parallélogramme, semblable au parallélogramme entier, et semblablement placé, et ayant avec lui un angle commun, ces parallélogrammes seront autour de la même diagonale.

Que du parallélogramme ΑΒΓΔ on retranche le parallélogramme ΑΕΖΗ, semblable au parallélogramme ΑΒΓΔ et semblablement placé, et ayant avec lui l'angle commun ΔΑΒ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est autour de la même diagonale que le parallélogramme ΑΕΖΗ.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω αὐτοῦ ἡ διάμετρος ἢ ΑΘΓ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθῃ ἐπὶ τὸ Θ<sup>3</sup>, καὶ ἤχθῃ διὰ τοῦ Θ ἑποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἢ ΘΚ.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τῆν αὐτὴν διάμετρον ἔστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ὁμοίον ἔστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ<sup>5</sup>. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἢ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. Ἐπεὶ δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ, καὶ<sup>6</sup> ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἢ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ οὕτως ἢ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἢ ΗΑ ἄρα<sup>7</sup> πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἔστιν ἢ ΑΕ τῇ ΑΚ, ἢ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οὐκ<sup>8</sup> ἔστι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἔστι διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παράλληλογραμμον τῷ ΑΕΖΗ παραλληλογράμμῳ. Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἐξῆς.

Non enim, sed si possibile, sit ipsius diameter ΑΘΓ, et ejecta ΗΖ producat ad Θ, et ducatur per Θ alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΓ parallela ΘΚ.

Quoniam igitur circa eandem diametrum est ipsum ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΚΗ, simile est ΑΒΓΔ ipsi ΚΗ; est igitur ut ΔΑ ad ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΚ. Est autem et, propter similitudinem ipsorum ΑΒΓΔ, ΕΗ, et ut ΔΑ ad ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΕ; et ut igitur ΗΑ ad ΑΚ ita ΗΑ ad ΑΕ; ipsa ΗΑ igitur ad utramque ipsarum ΑΚ, ΑΕ eandem habet rationem; æqualis igitur est ΑΕ ipsi ΑΚ, minor majori, quod est impossibile; non igitur non est circa eandem diametrum ipsum ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΚΗ; circa eandem igitur est diametrum ipsum ΑΒΓΔ parallelogrammum quam ΑΕΖΗ parallelogrammum. Si igitur a parallelogrammo, etc.

Que cela ne soit point, mais, si cela est possible, que ΑΘΓ soit sa diagonale; prolongeons ΗΖ vers Θ, et par le point Θ menons ΘΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΒΓ.

Puisque les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΚΗ sont autour de la même diagonale, le parallélogramme ΑΒΓΔ est semblable au parallélogramme ΚΗ (24. 6); donc ΔΑ est à ΑΒ comme ΗΑ est à ΑΚ (déf. 1. 6). Mais à cause de la similitude des parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΗ, la droite ΔΑ est à ΑΒ comme ΗΑ est à ΑΕ; donc ΗΑ est à ΑΚ comme ΗΑ est à ΑΕ (11. 5); donc ΗΑ a la même raison avec chacune des droites ΑΚ, ΑΕ; donc ΑΕ est égal à ΑΚ (9. 5), le plus petit au plus grand, ce qui est impossible; donc les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΚΗ ne peuvent point ne pas être autour de la même diagonale; donc les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΑΕΖΗ sont autour de la même diagonale. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

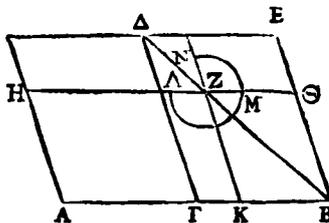
PROPOSITIO XXVII.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἑλλειπόντων εἰδῶσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισίας ἀναγραφόμενῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισίας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον δὲ τῷ ἑλλείμματι.

Omnium ad eandem rectam applicatorum parallelogrammorum et deficientium figuris parallelogrammis, similibusque et similiter positis ipsi ex dimidiâ descripto, maximum est ipsum ad dimidiam applicatum parallelogrammum, simile existens defectui.

Ἐστω εὐθεῖα ἡ  $AB$ , καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ  $\Gamma$ , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν αὐτὴν  $AB$  εὐθεῖαν τὸ  $AD$  παραλληλόγραμμον ἑλλειπόντων εἶδῶσι

Sit recta  $AB$ , et secetur bifariam in  $\Gamma$ , et applicetur ad eandem  $AB$  rectam ipsum  $AD$  parallelogrammum deficiens figurâ parallelo-



παραλληλογράμμῳ τῷ  $GE$ , ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισίας ἀναγραφέντι τῆς  $AB^2$ , τουτέστι τῆς  $GB$ . λέγω ὅτι πάντων τῶν

grammâ  $GE$ , similique et similiter positâ ei ex dimidiâ  $AB$  descriptæ, hoc est ex ipsâ  $GB$ ; dico omnium ad  $AB$  applicatorum parallelogram-

PROPOSITION XXVII.

De tous les parallélogrammes qui sont appliqués à une même droite, et qui sont défaits de parallélogrammes semblables au parallélogramme décrit sur la moitié de cette droite, et semblablement placés, le plus grand est celui qui est appliqué à la moitié de cette droite, et qui est semblable à son défaut.

Soit la droite  $AB$ ; que cette droite soit coupée en deux parties égales au point  $\Gamma$ , et qu'à la droite  $AB$  soit appliqué le parallélogramme  $AD$ , défaillant du parallélogramme  $GE$ , semblable à celui qui est décrit sur la moitié de la droite  $AB$ , c'est-à-dire sur  $GB$ , et semblablement placé; je dis que de tous les parallélo-

παρὰ τὴν  $AB$  παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἑλλειπόντων εἶδει παραλληλογράμμοις<sup>3</sup> ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ  $ΓΕ$ , μέγιστόν ἐστι τὸ  $ΑΔ$ . Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν  $AB$  εὐθείαν τὸ  $AZ$  παραλληλόγραμμον, ἑλλειπόντων εἶδει παραλληλογράμμου τῷ  $ΚΘ$ , ὁμοίω τε καὶ ὁμοίως κειμένω τῷ  $ΓΕ$ . λέγω ὅτι μείζον ἐστὶ τὸ  $ΑΔ$  τοῦ  $AZ$ .

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ  $ΓΕ$  παραλληλόγραμμον τῷ  $ΚΘ$  παραλληλογράμμου, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον. Ἡχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ  $ΔΒ$ , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ  $ΓΖ$  τῷ  $ΖΕ$ , κοινὸν προσκείσθω τὸ  $ΚΘ$ <sup>4</sup>. ὅλον ἄρα τὸ  $ΓΘ$  ὅλον τῷ  $ΚΕ$  ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ  $ΓΘ$  τῷ  $ΓΗ$  ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΓΒ$  ἴση ἐστίν<sup>5</sup>. καὶ τὸ  $ΗΓ$  ἄρα τῷ  $ΕΚ$  ἐστὶν ἴσον<sup>6</sup>. Κοινὸν προσκείσθω τὸ  $ΓΖ$ . ὅλον ἄρα τὸ  $AZ$  τῷ  $ΑΜΝ$  γνόμονι ἐστὶν ἴσον<sup>7</sup>. ὥστε τὸ  $ΓΕ$  παραλληλόγραμμον, τουτίστι τὸ  $ΑΔ$ , τοῦ  $AZ$  παραλληλογράμμου μείζον ἐστίν.

morum, et deficientium figuris parallelogrammis similibusque et similiter positis ipsi  $ΓΕ$ , maximum esse  $ΑΔ$ . Applicetur enim ad  $AB$  rectam ipsum  $AZ$  parallelogrammum, deficient figurâ parallelogrammâ  $ΚΘ$ , similique et similiter positâ ipsi  $ΓΕ$ ; dico majus esse  $ΑΔ$  ipso  $AZ$ .

Quoniam simile enim est  $ΓΕ$  parallelogrammum ipsi  $ΚΘ$  parallelogrammo, circa eandem sunt diametrum. Ducatur eorum diameter  $ΔΒ$ , det describatur figura.

Quoniam igitur æquale est  $ΓΖ$  ipsi  $ΖΕ$ , commune addatur  $ΚΘ$ ; totum igitur  $ΓΘ$  toti  $ΚΕ$  est æquale. Sed  $ΓΘ$  ipsi  $ΓΗ$  est æquale, quoniam et ipsa  $ΑΓ$  ipsi  $ΓΒ$  æqualis est; et  $ΗΓ$  igitur ipsi  $ΕΚ$  est æquale. Commune addatur  $ΓΖ$ ; totum igitur  $AZ$  ipsi  $ΑΜΝ$  gnomoni est æquale; quare et  $ΓΕ$  parallelogrammum, hoc est  $ΑΔ$ , ipso  $AZ$  parallelogrammo majus est.

grammes qui sont appliqués à la droite  $AB$ , et qui sont défailants de parallélogrammes semblables au parallélogramme  $ΓΕ$ , et semblablement placés, le plus grand est le parallélogramme  $ΑΔ$ . Car appliquons à la droite  $AB$  le parallélogramme  $AZ$ , défailant du parallélogramme  $ΚΘ$  semblable au parallélogramme  $ΓΕ$ , et semblablement placé; je dis que le parallélogramme  $ΑΔ$  est plus grand que le parallélogramme  $AZ$ .

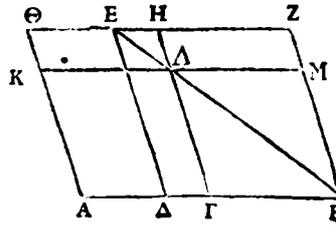
Car puisque le parallélogramme  $ΓΕ$  est semblable au parallélogramme  $ΚΘ$ , ces deux parallélogrammes sont placés autour de la même diagonale (26. 6). Menons leur diagonale  $ΔΒ$ , et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme  $ΓΖ$  est égal au parallélogramme  $ΖΕ$  (43. 1), ajoutons le parallélogramme commun  $ΚΘ$ ; le parallélogramme entier  $ΓΘ$  sera égal au parallélogramme entier  $ΚΕ$ . Mais  $ΓΘ$  est égal à  $ΓΗ$  (36. 1), parce que la droite  $ΑΓ$  est égale à la droite  $ΓΒ$ ; donc  $ΗΓ$  est égal à  $ΕΚ$ . Ajoutons le parallélogramme commun  $ΓΖ$ , le parallélogramme entier  $AZ$  sera égal au gnomon  $ΑΜΝ$ ; donc le parallélogramme  $ΓΕ$ , c'est-à-dire le parallélogramme  $ΑΔ$ , est plus grand que le parallélogramme  $AZ$  (36. 1).

358 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω γάρ πάλιν ἡ  $AB$  τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ  $\Gamma$ , καὶ παραβλήθην τὸ  $AA$  ἑλλείπον εἶδει τῷ  $\Gamma M$ , καὶ παραβελήσθω πάλιν παρὰ τὴν  $AB$  τὸ  $AE$  παραλληλόγραμμον ἑλλείπον τῷ  $\Delta Z$ , ὁμοίω τε καὶ ὁμοίως κειμένω τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς  $AB$ , τῷ  $\Gamma M$ . λῖγω ὅτι μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ  $AA$  τοῦ  $AE$ .

Sit enim rursus  $AB$  secta bifariam in  $\Gamma$ , et applicatum ipsum  $AA$ , deficiens figurâ  $\Gamma M$ , et applicetur rursus ad  $AB$  ipsum  $AE$  parallelogrammum, deficiens ipso  $\Delta Z$ , similique et similiter posito ipsi  $\Gamma M$  ex dimidiâ  $AB$ ; dico majus esse ipsum ad dimidiam applicatum  $AA$  ipso  $AE$ .



Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ  $\Delta Z$  τῷ  $\Gamma M$ , περὶ τὴν αὐτὴν εἶσι διάμετρον· ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ  $EB$ , καὶ καταγράφω τὸ σχῆμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ  $AZ$  τῷ  $\Lambda\Theta$ , ἐπεὶ καὶ ἡ  $ZH$  τῷ  $H\Theta$ · μείζον ἄρα τὸ  $AZ$  τοῦ  $KE$ . ἴσον δὲ τὸ  $AZ$  τῷ  $\Delta\Lambda$ · μείζον ἄρα καὶ τὸ  $\Delta\Lambda$  τοῦ  $EK$ . Κοινὸν προσκείσθω τὸ  $K\Delta$ · ὅλον ἄρα τὸ  $AA$  ὅλου τοῦ  $AE$  μείζον ἐστίν. Πάντων ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam enim simile est  $\Delta Z$  ipsi  $\Gamma M$ , circa eandem sunt diametrum; sit eorum diameter  $EB$ , et describatur figura.

Et quoniam æquale est  $AZ$  ipsi  $\Lambda\Theta$ , quoniam et ipsa  $ZH$  ipsi  $H\Theta$ ; majus igitur  $AZ$  ipso  $KE$ . Æquale autem  $AZ$  ipsi  $\Delta\Lambda$ ; majus igitur et  $\Delta\Lambda$  ipso  $EK$ . Commune addatur  $K\Delta$ ; totum igitur  $AA$  toto  $AE$  majus est. Omnium igitur, etc.

Coupons de nouveau la droite  $AB$  en deux parties égales au point  $\Gamma$ , et appliquons à cette droite le parallélogramme  $AA$ , défailant du parallélogramme  $\Gamma M$ , et de plus appliquons à la droite  $AB$  le parallélogramme  $AE$  défailant du parallélogramme  $\Delta Z$ , semblable au parallélogramme décrit sur la moitié de  $AB$ , et semblablement placé; je dis que le parallélogramme  $AA$  qui est appliqué à la moitié de cette droite est plus grand que le parallélogramme  $AE$ .

Car, puisque les parallélogrammes  $\Delta Z$ ,  $\Gamma M$  sont semblables, ces deux parallélogrammes sont autour de la même diagonale (26. 6); soit  $EB$  leur diagonale, et décrivons la figure.

Puisque  $AZ$  est égal à  $\Lambda\Theta$  (36. 1), car  $ZH$  est égal à  $H\Theta$ ,  $AZ$  est plus grand que  $KE$ . Mais  $AZ$  est égal à  $\Delta\Lambda$  (43. 1); donc  $\Delta\Lambda$  est plus grand que  $EK$ . Ajoutons le parallélogramme commun  $K\Delta$ ; le parallélogramme entier  $AA$  sera plus grand que le parallélogramme entier  $AE$ . Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς.

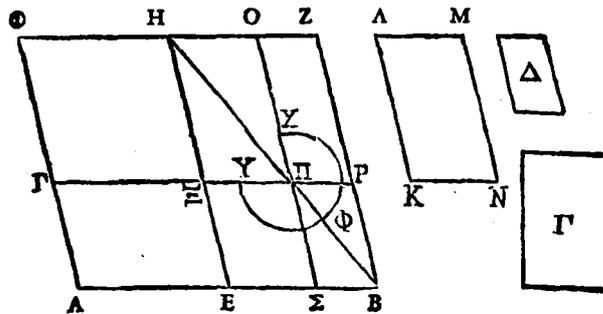
PROPOSITIO XXVIII.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἑλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι· διὲ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ διὲ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μείζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἑλλειμάτων τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ διὲ ὁμοιον ἑλλείπεν<sup>2</sup>.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθέν

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ simili ipsi dato; oportet utique datum rectilineum cui oportet æquale applicare, non majus esse ipso ad dimidiam applicato, similibus existentibus defectibus et ipso ad dimidiam et ipso cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta AB, datum vero Γ



εὐθύγραμμον, ᾧ διὲ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν, τὸ Γ, μὴ μείζον ὂν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας

rectilineum, cui oportet æquale ad AB applicare, non majus existens eo ad dimidiam

PROPOSITION XXVIII.

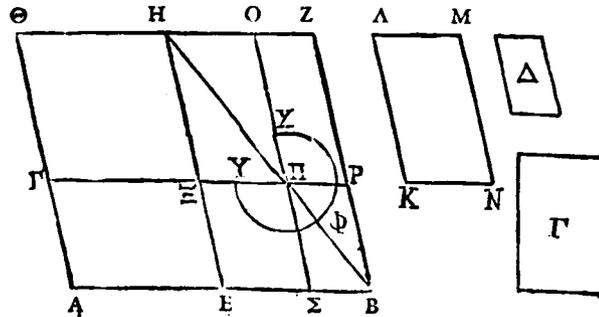
A une droite donnée appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit défailant d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné : il faut que la figure rectiligne donnée ne soit pas plus grande que le parallélogramme appliqué à la moitié de la droite donnée ; le défaut du parallélogramme appliqué à la moitié de cette droite et le défaut de celui qui doit être défailant d'un parallélogramme semblable étant semblables entr'eux.

Soit AB la droite donnée, et Γ la figure rectiligne à laquelle doit être égal le parallélogramme qu'il faut appliquer à la droite AB ; que la figure recti-

360 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἑλλειμμάτων<sup>3</sup>, ᾧ δὲ δι᾽ ὁμοιον ἐλλείπειν τὸ Δ· δεῖ δὲ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλείπον εἶδει παραλληλογράμμου, ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.

applicato, similibus existentibus defectibus, ipsum autem Δ cui oportet simile deficere; oportet igitur ad datam rectam AB dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ, simili existente ipsi Δ.



Τετμήσθω ἡ AB δίχῃ κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς EB τῷ Δ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ EBZH, καὶ συμπληρώσθω τὸ AH παραλληλόγραμμον· τὸ δὲ AH ἢ τοῦ ἴσον ἔστι τῷ Γ, ἢ μείζον αὐτοῦ, διὰ τὸν ὁρισμὸν<sup>4</sup>. Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἔστι τὸ AH τῷ Γ, γεγονός εἴη τὸ ἐπιταχθῆναι παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ AH, ἐλλείπον

Secetur AB bifariam in E puncto, et describatur ex ipsâ EB ipsi Δ simile et similiter positum EBZH, et compleatur AH parallelogrammum; AH utique vel æquale est ipsi Γ, vel majus ipso, ob determinationem. Et si quidem æquale est AH ipsi Γ, factum erit propositum; applicatum erit enim ad datam rectam AB dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum AH, deficiens figurâ parallelogrammâ

ligne ne soit pas plus grande que le parallélogramme appliqué à la moitié de AB, les défauts étant semblables, et soit Δ le parallélogramme auquel le défaut doit être semblable; il faut à la droite donnée AB appliquer un parallélogramme qui soit égal à la figure rectiligne donnée Γ, et qui soit défailant d'un parallélogramme semblable au parallélogramme Δ.

Coupons la droite AB en deux parties égales au point E (10. 1); sur EB décrivons le parallélogramme EBZH semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (18. 6), et terminons le parallélogramme AH; le parallélogramme AH sera égal à la figure Γ, ou plus grand, d'après ce qui a été dit. Si le parallélogramme AH est égal à la figure Γ, on aura fait ce qui était proposé; car on aura appliqué à la droite AB un parallélogramme AH semblable à la figure rectiligne

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 361

εἶδει παραλληλογράμμω τῷ ΕΖ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. Εἰ δὲ οὐ, μείζον ἐστὶ τὸ ΘΕ τοῦ Γ. Ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΗΒ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ. Ω δὴ μείζον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ, ταύτη τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὁμοίον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΑΜΝ. ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΗΒ ἐστὶν ὁμοίον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΗΒ ἐστὶν ὁμοίον. Ἐστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΑ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΑΜ τῇ ΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῖς Γ, ΚΜ, μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΚΜ· μείζον ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΑΚ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΑΜ. Κείσθω τῇ μὲν<sup>6</sup> ΚΑ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΑΜ ἴση ἡ ΗΘ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΞΗΘΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τῷ ΚΜ τὸ ΗΠ<sup>7</sup>. ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΗΒ ὁμοίον ἐστὶ<sup>8</sup>· καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ ΗΒ ὁμοίον ἐστὶ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὸ ΗΠ τῷ ΗΒ. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΗ τοῖς Γ, ΚΜ, ὡν τὸ

EZ simili existenti ipsi Δ. Si autem non, majus est ΘΕ ipso Γ. Æquale autem ΘΕ ipsi ΗΒ; majus igitur et ΗΒ ipso Γ. Quo utique majus est ΗΒ ipso Γ, ei excessui æquale, ipsi autem Δ simile et similiter positum idem constituantur ΚΑΜΝ. Sed Δ ipsi ΗΒ est simile; et ΚΜ igitur ipsi ΗΒ est simile. Sit igitur homologa quidem ΚΑ ipsi ΗΕ, ipsa vero ΑΜ ipsi ΗΖ. Et quoniam æquale est ΗΒ ipsis Γ, ΚΜ, majus igitur est ΗΒ ipso ΚΜ; major igitur est et ipsa quidem ΗΕ ipsâ ΑΚ, ipsa vero ΗΖ ipsâ ΑΜ. Ponatur ipsi quidem ΚΑ æqualis ΗΞ, ipsi vero ΑΜ æqualis ΗΘ, et compleatur ΞΗΘΠ parallelogrammum; æquale igitur et simile est ipsi ΚΜ ipsum ΗΠ. Sed ΚΜ ipsi ΗΒ simile est; et ΗΠ igitur ipsi ΗΒ simile est; circa eandem igitur diametrum est ΗΠ circa quam ΗΒ. Sit eorum diameter ΗΠΒ, et describatur figura.

Et quoniam æquale est ΒΗ ipsis Γ, ΚΜ,

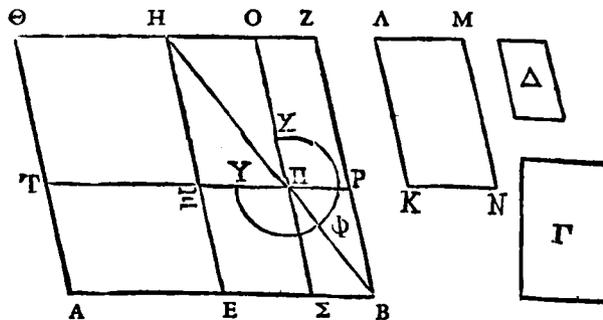
donnée  $\Gamma$ , et défailant d'un parallélogramme EZ semblable au parallélogramme Δ. Mais si cela n'est point, ΘΕ est plus grand que  $\Gamma$ . Mais ΘΕ est égal à ΗΒ; donc ΗΒ est plus grand que  $\Gamma$ . Construisons le parallélogramme ΚΑΜΝ égal à l'excès du parallélogramme ΗΒ sur la figure  $\Gamma$ , et semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (25. 6). Mais le parallélogramme Δ est semblable au parallélogramme ΗΒ; donc le parallélogramme ΚΜ est semblable au parallélogramme ΗΒ. Que la droite ΚΑ soit l'homologue de la droite ΗΕ, et la droite ΑΜ l'homologue de la droite ΗΖ. Puisque le parallélogramme ΗΒ est égal aux deux figures  $\Gamma$ , ΚΜ, le parallélogramme ΗΒ est plus grand que le parallélogramme ΚΜ; donc ΗΕ est plus grand que ΑΚ, et ΗΖ plus grand que ΑΜ (20. 6). Faisons ΗΞ égal à ΚΑ, et ΗΘ égal à ΑΜ (3. 1), et achevons le parallélogramme ΞΗΘΠ (31. 1); le parallélogramme ΗΠ sera égal et semblable au parallélogramme ΚΜ (24. 6). Mais le parallélogramme ΚΜ est semblable au parallélogramme ΗΒ; donc le parallélogramme ΗΠ est semblable au parallélogramme ΗΒ (21. 6); donc les parallélogrammes ΗΠ, ΗΒ sont autour de la même diagonale (26. 6). Soit ΗΠΒ leur diagonale, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme ΒΗ est égal aux deux figures  $\Gamma$ , ΚΜ, et que

### 362 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΗΠ τῷ ΚΜ ἴστων ἴσον· λοιπὸς ἄρα ὁ γφχ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴστος ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλω τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἴστων ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἴστων ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἴστων ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλω τῷ γφχ γνώμονι ἴστων ἴσον. Ἀλλὰ ὁ γφχ γνώμων τῷ Γ ἰδέχθη ἴστος· καὶ ΑΠ ἄρα τῷ Γ ἴστων ἴσον.

quorum ΗΠ ipsi ΚΜ est æquale; reliquus igitur γφχ gnomon reliquo Γ est æqualis. Et quoniam æquale est ΟΡ ipsi ΞΣ, commune apponatur ΠΒ; totum igitur ΟΒ toti ΞΒ æquale est. Sed ΞΒ ipsi ΤΕ est æquale, quoniam et latus ΑΕ lateri ΕΒ est æquale; et ΤΕ igitur ipsi ΟΒ est æquale. Commune apponatur ΞΣ; totum igitur ΤΣ toti γφχ gnomoni est æquale. Sed γφχ gnomon ipsi Γ ostensus est æqualis; et ΑΠ igitur ipsi Γ est æquale.



Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παρατίθηται τὸ ΣΤ, ἰλλεῖπον εἶδει παραλληλόγραμμῳ τῷ ΠΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπειδὴ περ τὸ ΠΒ τῷ ΗΠ ὁμοίον ἐστίν. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Ad datam igitur rectam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicatum est ΣΤ, deficiens figurâ parallelogrammâ ΠΒ simili existenti ipsi Δ, quandoquidem ΠΒ ipsi ΗΠ simile est. Quod oportebat facere.

ΗΠ est égal à ΚΜ, le gnomon restant γφχ est égal à la figure restante Γ. Et puisque ΟΡ est égal à ΞΣ (43. 1), ajoutons le parallélogramme commun ΠΒ; le parallélogramme entier ΟΒ sera égal au parallélogramme entier ΞΒ. Mais ΞΒ est égal à ΤΕ (36. 1), parce que le côté ΑΕ est égal au côté ΕΒ; donc ΤΕ est égal à ΟΒ. Ajoutons le parallélogramme commun ΞΣ; le parallélogramme entier ΤΣ sera égal au gnomon entier γφχ. Mais on a démontré que le gnomon γφχ est égal à Γ; donc ΑΠ est égal à Γ.

On a donc appliqué à la droite ΑΒ un parallélogramme ΣΤ, égal à la figure rectiligne donnée Γ, et défailant d'un parallélogramme ΠΒ semblable à Δ, puisque ΠΒ est semblable à ΗΠ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

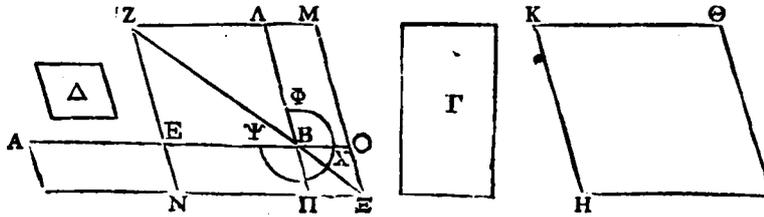
PROPOSITIO XXIX.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερέχον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ , τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρά τὴν  $AB$  παραβαλεῖν, τὸ  $\Gamma$ , ᾧ δὲ δεῖ ὁμοιον ὑπερβαλεῖν, τὸ  $\Delta$ . δεῖ δὴ παρά τὴν  $AB$  εὐθεῖαν τῷ  $\Gamma$  εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερέχον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ  $\Delta$ .

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ simili datæ.

Sit data quidem recta  $AB$ , datum vero rectilineum  $\Gamma$ , cui oportet æquale ad  $AB$  applicare,  $\Delta$  autem cui oportet simile applicare; oportet igitur ad  $AB$  rectam ipsi  $\Gamma$  rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ simili ipsi  $\Delta$ .



Τετμήσθω ἡ  $AB$  δίχα κατὰ τὸ  $E$ , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς  $EB$  τῷ  $\Delta$  ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ  $BZ$ , καὶ συναμφο-

Secetur  $AB$  bifariam in  $E$ , et describatur ex  $EB$  ipsi  $\Delta$  simile et similiter positum parallelogrammum  $BZ$ , et utrisque simul quidem  $BZ$ ,

PROPOSITION XXIX.

Appliquer à une droite donnée, un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné.

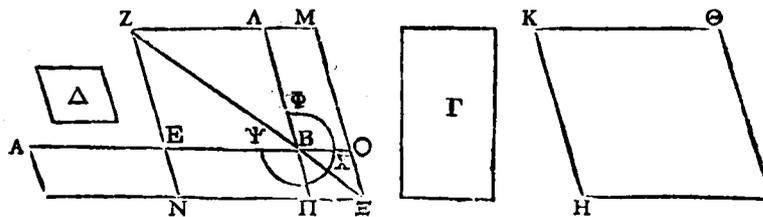
Soit  $AB$  la droite donnée, à laquelle il faut appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée  $\Gamma$ , et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme  $\Delta$ ; il faut à la droite  $AB$  appliquer un parallélogramme qui soit égal à la figure rectiligne  $\Gamma$ , et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable au parallélogramme  $\Delta$ .

Coupons  $AB$  en deux parties égales au point  $E$  (g. 1), sur la droite  $EB$  décrivons le parallélogramme  $BZ$  semblable au parallélogramme  $\Delta$  et semblable-

364 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τέρεις μὲν τοῖς BZ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνιστάτω τὸ ΗΘ· ὅμοιον ἄρα ἔστί τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ'. Ομόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἔστι τὸ ΗΘ τοῦ ΖΒ, μείζων ἄρα ἔστι καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. Εκτελέσθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΑΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ συμπεπλη-

Γ æquale, ipsi vero Δ simile et similiter positum idem constitutatur ΗΘ; simile igitur est ΗΘ ipsi ΕΛ. Homologa autem sit ΚΘ quidem ipsi ΖΛ, ipsa vero ΚΗ ipsi ΖΕ. Et quoniam majus est ΗΘ ipso ΖΒ, major igitur est et ipsa quidem ΚΘ ipsâ ΖΛ, ipsa vero ΚΗ ipsâ ΖΕ. Producantur ipsæ ΖΛ, ΖΕ, et ipsi quidem ΚΘ æqualis sit ΖΑΜ, ipsi vero ΚΗ æqualis ΖΕΝ



ρώσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τε ἔστι καὶ ὅμοιον. Ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἔστιν ὅμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΛ ὅμοιον ἔστι· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἔστι τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. Ἦχθω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἔστι τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ

et compleatur MN; ipsum MN igitur ipsi ΗΘ æqualeque est et simile. Sed ΗΘ ipsi ΕΛ est simile; et MN igitur ipsi ΕΛ simile est; circa eandem igitur diametrum est ipsum ΕΛ circa quam MN. Ducatur eorum diameter ΖΞ, et describatur figura.

Et quoniam æquale est ΗΘ ipsis ΕΛ, Γ,

ment placé (18. 6), et construisons le parallélogramme ΗΘ égal aux deux figures ΕΛ, Γ, et semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (25. 6); le parallélogramme ΗΘ sera semblable au parallélogramme ΕΛ. Que ΚΘ soit l'homologue de ΖΛ, et ΚΗ l'homologue de ΖΕ. Puisque ΗΘ est plus grand que ΖΒ, la droite ΚΘ est plus grande que ΖΛ, et la droite ΚΗ plus grande que ΖΕ. Prolongeons ΖΛ, ΖΕ, que ΖΑΜ soit égal à ΚΘ, et ΖΕΝ égal à ΚΗ (3. 1), et achevons le parallélogramme ΜΝ. Le parallélogramme ΜΝ sera égal et semblable au parallélogramme ΗΘ. Mais le parallélogramme ΗΘ est semblable au parallélogramme ΕΛ; donc le parallélogramme ΜΝ est semblable au parallélogramme ΕΛ (21. 6); donc les deux parallélogrammes ΕΛ, ΜΝ sont autour de la même diagonale (26. 6). Menons leur diagonale ΖΞ, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme ΗΘ est égal aux figures ΕΛ, Γ, et que

τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστὶ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστὶ. Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἐστὶν ἴσος. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, ταυτίσθω τῷ ΛΟ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμωνι. Ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τὸ Γ ἴσος ἐστὶ· καὶ το ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστὶν.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβηται τὸ ΑΞ, ὑπερβάλλον εἶδος παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὁμοίον τὸ ΟΠ<sup>5</sup>, ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΗΘ est égal à ΜΝ, le parallélogramme ΜΝ est égal aux figures ΕΛ, γ. Retranchons le parallélogramme commun ΕΛ; le gnomon restant ΨΧΦ sera égal à γ. Et puisque ΑΕ est égal à ΕΒ, le parallélogramme ΑΝ est égal au parallélogramme ΝΒ (36. 1), c'est-à-dire au parallélogramme ΛΟ (43. 1). Ajoutons le parallélogramme commun ΕΞ, le parallélogramme entier ΑΞ sera égal au gnomon entier ΦΧΨ. Mais le gnomon ΦΧΨ est égal à γ; donc le parallélogramme ΑΞ est égal à γ.

On a donc appliqué à la droite donnée ΑΒ un parallélogramme ΑΞ qui est égal à la figure rectiligne donnée γ, et qui est excédent d'un parallélogramme ΠΟ semblable au parallélogramme Δ, parce le parallélogramme ΕΛ est semblable au parallélogramme ΟΠ. Ce qu'il fallait faire.

sed ΗΘ ipsi ΜΝ æquale est; et ΜΝ igitur ipsis ΕΛ, Γ æquale est. Commune auferatur ΕΛ; reliquus igitur ΨΧΦ gnomon ipsi Γ est æqualis. Et quoniam æqualis est ΑΕ ipsi ΕΒ, æquale est et ΑΝ ipsi ΝΒ, hoc est ipsi ΛΟ. Commune apponatur ΕΞ; totum igitur ΑΞ æquale est ipsi ΦΧΨ gnomoni. Sed ΦΧΨ gnomon ipsi Γ æqualis est; et ΑΞ igitur ipsi Γ æquale est.

Ad datam igitur rectam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicatum est ΑΞ, excedens figurâ parallelogrammâ ΠΟ simili existenti ipsi Δ, quoniam et ipsi ΕΛ est simile ΟΠ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ΄.

PROPOSITIO XXX.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

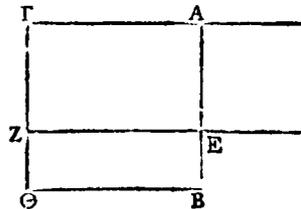
Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ  $AB$ · διὲ δὴ τὴν  $AB$  εὐθείαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἀναγεγράφθω γάρ τι ἀπὸ τῆς  $AB$  τετράγωνον τὸ  $BΓ$ , καὶ παραβελήσθω παρὰ τὴν  $ΑΓ$  τῷ  $BΓ$  ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ  $ΓΔ$ , ὑπερέβαλλον εἶδει τὸ  $ΑΔ$  ὁμοίω τῷ  $BΓ$ .

Datam rectam terminatam secundum extremam et mediam rationem secare.

Sit data recta terminata  $AB$ ; oportet igitur  $AB$  rectam secundum extremam et mediam rationem secare.

Describatur enim ex  $AB$  quadratum  $BΓ$ , et applicetur ad  $ΑΓ$  ipsi  $BΓ$  æquale parallelogrammum  $ΓΔ$ , excedens figurâ  $ΑΔ$  simili ipsi  $BΓ$ .



Τετράγωνον δὲ ἐστὶ τὸ  $BΓ$ · τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ  $ΑΔ$ . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ  $BΓ$  τῷ  $ΓΔ$ , κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ  $ΓΕ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ  $BΖ$  λοιπῷ τῷ  $ΑΔ$  ἐστὶν ἴσον. Ἐστὶ δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν  $BΖ$ ,  $ΑΔ$  ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἰπλευραὶ

Quadratum autem est  $BΓ$ ; quadratum igitur est et  $ΑΔ$ . Et quoniam æquale est  $BΓ$  ipsi  $ΓΔ$ , commune auferatur  $ΓΕ$ ; reliquum igitur  $BΖ$  reliquo  $ΑΔ$  est æquale. Est autem ei et æquiangulum; ipsorum  $BΖ$ ,  $ΑΔ$  igitur reciproca

PROPOSITION XXX.

Couper une droite finie et donnée en moyenne et extrême raison.

Soit donnée la droite finie  $AB$ ; il faut couper la droite  $AB$  en moyenne et extrême raison.

Sur la droite  $AB$  construisons le carré  $BΓ$  (46. 1), et à la droite  $ΑΓ$  appliquons un parallélogramme  $ΓΔ$ , qui soit égal au carré  $BΓ$ , et qui soit excédent d'un parallélogramme  $ΑΔ$  semblable à  $BΓ$  (29. 6).

Puisque  $BΓ$  est un carré,  $ΑΔ$  est un carré. Et puisque  $BΓ$  est égal à  $ΓΔ$ , retranchons la partie commune  $ΓΕ$ ; le reste  $BΖ$  sera égal au reste  $ΑΔ$ . Mais ces deux figures sont équiangles; donc les côtés des parallélogrammes  $BΖ$ ,  $ΑΔ$ ,

LE SIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 367

αὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΑΓ, τουτέστι τε ΑΒ², ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΑΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. Μείζων δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ.

Ἡ ἄρα ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ³ μείζον αὐτῆς τμήμα ἔστι τὸ ΑΕ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΑΛΛΩΣ.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· διγ' δὲ τὴν ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμῆν.



Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ

sunt latera circa æquales angulos; est igitur ut ZE ad EA ita AE ad EB. Æqualis autem ipsa quidem ZE ipsi ΑΓ, hoc est ipsi ΑΒ, ipsa vero ΕΔ ipsi ΑΕ; est igitur ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΑΕ ad ΕΒ. Major autem ΑΒ ipsa ΑΕ; major igitur et ΑΕ ipsa ΕΒ.

Ipsa igitur ΑΒ recta secundum extremam et mediam rationem secta est in Ε, et majus ejus segmentum est ΑΕ. Quod oportebat facere.

ALITER.

Sit data recta ΑΒ; oportet igitur ΑΒ secundum extremam et mediam rationem secare.

Secetur enim ΑΒ in Γ, ita ut ipsum sub ΑΒ, ΒΓ æquale sit ipsi ex ipsa ΑΓ quadrato.

Et quoniam ipsum sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsi ex ΓΑ; est igitur ut ΑΒ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΒ;

autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels (14. 6); donc ZE est à EA comme AE est à EB. Mais ZE est égal à ΑΓ (34. 1), c'est-à-dire à ΑΒ, et ΕΔ est égal à ΑΕ; donc ΒΑ est à ΑΕ comme ΑΕ est à ΕΒ. Mais ΑΒ est plus grand que ΑΕ; donc ΑΕ est plus grand que ΕΒ.

Donc la droite ΑΒ a été coupée au point Ε en moyenne et extrême raison, et ΑΕ est son plus grand segment. Ce qu'il fallait faire.

AUTREMENT.

Soit ΑΒ la droite donnée; il faut couper ΑΒ en moyenne et extrême raison. Coupons ΑΒ au point Γ, de manière que le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ soit égal au carré de ΑΓ (11. 2).

Puisque le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est égal au carré de ΓΑ, ΑΒ est à ΑΓ

### 368 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἡ ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον  
τέτμηται κατὰ τὸ Γ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ipsa igitur AB secundum extremam et mediam  
rationem secta est in Γ. Quod oportebat facere.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

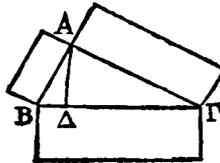
#### PROPOSITIO XXXI.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν  
ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς εἶδος ἴσον  
ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχο-  
σῶν πλευρῶν εἶδει, τοῖς ὁμοίοις τε<sup>1</sup> καὶ ὁμοίως  
ἀναγραφόμενοις.

In rectangulis triangulis, figura ex latere  
rectangulum angulum subtendente æqualis est  
figuris ex lateribus rectum angulum subten-  
dentibus, similibusque et similiter descriptis.

Ἐστὼ τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν  
ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum  
habens ΒΑΓ angulum; dico figuram ex ΒΓ



ΒΓ εἶδος ἴσον ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδει,  
τοῖς ὁμοίοις τε<sup>2</sup> καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις.

æqualem esse figuris ex ΒΑ, ΑΓ, similibusque  
et similiter descriptis.

Ἡχθῶ κάθετος ἡ ΑΔ.

Ducatur perpendicularis ΑΔ.

comme ΑΓ est à ΓΒ (17. 6); donc la droite ΑΒ a été coupée en moyenne et  
extrême raison au point Γ (déf. 3. 6). Ce qu'il fallait faire.

#### PROPOSITION XXXI.

Dans les triangles rectangles, la figure construite sur le côté qui soutend  
l'angle droit, est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur  
les côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, ayant l'angle droit ΒΑΓ; je dis que la figure  
construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur  
les côtés ΒΑ, ΑΓ.

Menons la perpendiculaire ΑΔ.

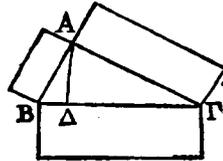
Ἐπὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ, ἀπὸ τῆς πρὸς τὸ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἤκται ἡ ΑΔ· τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα<sup>3</sup> πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὁμοίον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ ὁμοίον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τὰ ὁμοία καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. Ἴση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδισι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις. Ἐν ἄρα τοῖς, καὶ τὰ ἰξῆς,

Et quoniam in recto triangulo ΑΒΓ, ab ipso ad Α recto angulo super ΒΓ basim perpendicularis ducta est ΑΔ; ipsa ΑΒΔ, ΑΔΓ igitur ad perpendicularem triangula similia sunt et toti ΑΒΓ et inter se. Et quoniam simile est ΑΒΓ ipsi ΑΒΔ, est igitur ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΑΒ ad ΒΔ. Et quoniam tres rectæ proportionales sunt, est ut prima ad tertiam ita ipsa ex primâ figurâ ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam; ut igitur ΓΒ ad ΒΔ ita ex ipsâ ΓΒ figura ad ipsam ex ΒΑ, similem et similiter descriptam. Propter eadem utique et ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ipsâ ΒΓ figura, ad ipsam ex ΓΑ; quare et ut ΒΓ ad ipsas ΒΔ, ΔΓ ita ex ipsâ ΒΓ figura ad ipsas ex ΒΑ, ΑΓ, similes et similiter descriptas. Æqualis autem ΒΓ ipsis ΒΔ, ΔΓ; æquale igitur et ex ipsâ ΒΓ figura ipsis ex ΒΑ, ΑΓ figuris, similibusque et similiter descriptis. Ergo in rectangulis, etc.

Puisque dans le triangle rectangle ΑΒΓ, on a mené de l'angle droit Α sur la base ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ, les triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ, autour de la perpendiculaire, sont semblables au triangle entier ΑΒΓ, et semblables entr'eux (8. 6). Et puisque le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ, ΓΒ est à ΒΑ comme ΑΒ est à ΒΔ. Mais lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure construite sur la première est à la figure semblable, et semblablement construite sur la seconde (2. cor. 20. 6); donc ΓΒ est à ΒΔ comme la figure construite sur ΓΒ est à la figure semblable, et semblablement construite sur ΒΑ. Par la même raison, ΒΓ est à ΓΔ comme la figure construite sur ΒΓ est à la figure construite sur ΓΑ; donc ΒΓ est à ΒΔ, ΔΓ comme la figure ΒΓ est aux figures semblables, et semblablement décrites sur ΒΑ, ΑΓ (24. 5). Mais la droite ΒΓ est égale aux droites ΒΔ, ΔΓ; donc la figure construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables, et semblablement décrites sur ΒΑ, ΑΓ. Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἴσται<sup>5</sup> τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἄρα εἶδος<sup>6</sup> πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΒΑ. Ἐχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἢ πρὸς τὴν ΒΑ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος<sup>7</sup> οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον



πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ ἴδι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ εἶδος οὕτως τὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετράγωνον· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδη οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα.

ALITER.

Quoniam similes figuræ in duplâ ratione sunt homologorum laterum, ipsa ex ΒΓ igitur figura ad ipsam ex ΒΑ figuram duplam rationem habet ejus quam ΓΒ ad ΒΑ. Habet autem et ex ΒΓ quadratum ad ipsum ex ΒΑ quadratum duplam rationem ejus quam ΓΒ ad ΒΑ; et ut igitur ex ΒΓ figura ad ipsam ex ΒΑ figuram ita ex ΓΒ quadratum ad ipsum ex ΒΑ quadratum.

Propter eadem utique et ut ex ΒΓ figura ad ipsam ex ΓΑ figuram ita ex ΒΓ quadratum ad ipsum ex ΓΑ quadratum; quare et ut ex ΒΓ figura ad ipsas ex ΒΑ, ΑΓ figuras ita ex ΒΓ quadratum ad ipsas ex ΒΑ, ΑΓ quadrata. Æquale autem ex ΒΓ quadratum ipsis ex ΒΑ, ΑΓ qua-

AUTREMENT.

Puisque les figures semblables sont entr'elles en raison double des côtés homologues (23. 6), la figure construite sur ΒΓ a avec la figure construite sur ΒΑ une raison double de celle que ΓΒ a avec ΒΑ. Mais le carré de ΒΓ a avec le carré de ΒΑ une raison double de celle que ΓΒ a avec ΒΑ (1. cor. 20. 6); donc la figure construite sur ΓΒ est à celle qui est construite sur ΒΑ comme le carré de ΓΒ est au carré de ΒΑ (11. 5). Par la même raison, la figure construite sur ΒΓ est à la figure construite sur ΓΑ comme le carré de ΒΓ est au carré de ΓΑ; donc la figure construite sur ΒΓ est aux figures construites sur ΒΑ, ΑΓ comme le carré de ΒΓ est aux carrés des droites ΒΑ,

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 371

Ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδησι, τοῖς<sup>8</sup> ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ὁπερ εἶδει δεῖξαι<sup>9</sup>.

dratis; æqualis igitur et ex ΒΓ figura ipsis ex ΒΑ, ΑΓ figuris, similibusque et similiter descriptis. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

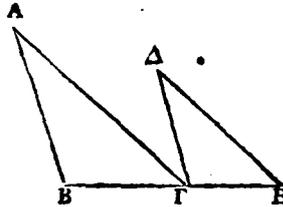
PROPOSITIO XXXII.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῆ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἰπ' εὐθείας ἔσονται.

Si duo triangula componantur secundum unum angulum, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, ita ut homologa eorum latera et parallela sint; reliqua triangulorum latera in directum erunt.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, τὰς δύο

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΓΕ, duo latera



πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς

BA, ΑΓ duobus lateribus ΓΔ, ΔΕ proportionalia habentia, ut ΑΒ quidem ad ΑΓ ita ΔΓ

ΑΓ (24. 5). Mais le carré de ΒΓ est égal aux carrés des droites ΒΑ, ΑΓ (47. 1); donc la figure construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les droites ΒΑ, ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXII.

Si deux triangles, ayant deux côtés proportionnels à deux côtés, se touchent par un angle, de manière que leurs côtés homologues soient parallèles, les côtés restants des triangles seront dans la même direction.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ, ayant les deux côtés ΒΑ, ΑΓ proportionnels aux deux côtés ΓΔ, ΔΕ, de manière que ΑΒ soit à ΑΓ comme ΔΓ

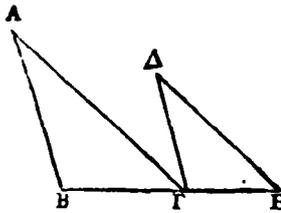
372 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωσιν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἔστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν

ad ΔΕ, parallela vero ΑΒ quidem ipsi ΔΓ, ipsa vero ΑΓ ipsi ΔΕ; dico in directum esse ipsam ΒΓ ipsi ΓΕ.

Quoniam enim parallela est ΑΒ ipsi ΔΓ, et in ipsas incidit recta ΑΓ, et alterni anguli ΒΑΓ, ΑΓΔ æquales inter se sunt. Propter eadem utique et ΓΔΕ ipsi ΑΓΔ est æqualis; quare et ΒΑΓ ipsi ΓΔΕ est æqualis. Et quoniam duo



ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνα ἐστὶ τὰ<sup>2</sup> ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μίαν γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ

triangula sunt ΑΒΓ, ΔΓΕ unum angulum ad Α uni angulo ad Δ æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΓΕ triangulo; æqualis igitur ΑΒΓ angulus ipsi ΔΓΕ. Ostensus autem est et ΑΓΔ ipsi ΒΑΓ æqualis; totus igitur ΑΓΕ duobus ΑΒΓ, ΒΑΓ æqualis est. Communis

est à ΔΕ; et que ΑΒ soit parallèle à ΔΓ, et ΑΓ parallèle à ΔΕ; je dis que ΒΓ est dans la direction de ΓΕ.

Puisque ΑΒ est parallèle à ΔΓ, et que ΑΓ tombe sur ces deux droites, les angles alternes ΒΑΓ, ΑΓΔ sont égaux entr'eux (29. 1.). Par la même raison, l'angle ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΓΔ; donc l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΓΔΕ. Et puisque les deux triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ ont un angle en Α égal à un angle en Δ, et que les côtés qui comprennent ces angles égaux sont proportionnels, c'est-à-dire que ΒΑ est à ΑΓ comme ΓΔ est à ΔΕ, les triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ sont équiangles (6. 6); donc l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΓΕ. Mais on a démontré que l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΒΑΓ; donc l'angle entier ΑΓΕ est égal aux deux

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 373

ταῖς ὑπὸ  $ABΓ$ ,  $BAΓ$  ἴση ἰστί. Κοινὴ προσκείμεθα ἢ ὑπὸ  $ΑΓΒ$ · αἱ ἄρα ὑπὸ  $ΑΓΕ$ ,  $ΑΓΒ$  ταῖς ὑπὸ  $BAΓ$ ,  $ABΓ$ ,  $ΑΓΒ$  ἴσαι εἰσίν. ΑΛΛ' αἱ ὑπὸ  $BAΓ$ ,  $ABΓ$ ,  $ΑΓΒ$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ<sup>3</sup>. καὶ αἱ ὑπὸ  $ΑΓΕ$ ,  $ΑΓΒ$  ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Πρὸς δὲ τινι εὐθείᾳ τῇ  $ΑΓ$ , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $Γ$ , δύο εὐθείαι αἱ  $BΓ$ ,  $ΓΕ$ , μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ  $ΑΓΕ$ ,  $ΑΓΒ$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἰστὶν ἢ  $BΓ$  τῇ  $ΓΕ$ . Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

opponatur  $ΑΓΒ$ ; ipsi igitur  $ΑΓΕ$ ,  $ΑΓΒ$  ipsis  $BAΓ$ ,  $ABΓ$ ,  $ΑΓΒ$  æquales sunt. Sed ipsi  $BAΓ$ ,  $ABΓ$ ,  $ΑΓΒ$  duobus rectis æquales sunt; et ipsi  $ΑΓΕ$ ,  $ΑΓΒ$  igitur duobus rectis æquales sunt. Ad quamdam utique rectam  $ΑΓ$ , et ad punctum in eâ  $Γ$ , duæ rectæ  $BΓ$ ,  $ΓΕ$ , non ad easdem partes positæ, ipsos deinceps angulos  $ΑΓΕ$ ,  $ΑΓΒ$  duobus rectis æquales faciunt; in directam igitur est  $BΓ$  ipsi  $ΓΕ$ . Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ἃν βεβήκασιν, εἴαν τε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴαν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὡς βεβηκυῖαι· ἔτι δὲ καὶ οἱ τομῆς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι<sup>1</sup>.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , καὶ πρὸς

PROPOSITIO XXXIII.

In æqualibus circulis anguli eamdem rationem habent quam circumferentiæ in quas insistent, sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes; adhuc etiam et sectores quippe ad centra constituti.

Sint æquales circuli  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , et ad centra

angles  $ABΓ$ ,  $BAΓ$ . Ajoutons l'angle commun  $ΑΓΒ$ ; les angles  $ΑΓΕ$ ,  $ΑΓΒ$  seront égaux aux angles  $BAΓ$ ,  $ABΓ$ ,  $ΑΓΒ$ . Mais les angles  $BAΓ$ ,  $ABΓ$ ,  $ΑΓΒ$  sont égaux à deux angles droits (32. 1); donc les angles  $ΑΓΕ$ ,  $ΑΓΒ$  sont égaux à deux angles droits. Donc avec une droite quelconque  $ΑΓ$ , et au point  $Γ$  de cette droite, les deux droites  $BΓ$ ,  $ΓΕ$ , placées de différents côtés, font les angles de suite  $ΑΓΕ$ ,  $ΑΓΒ$  égaux à deux angles droits; donc la droite  $BΓ$  est dans la direction de  $ΓΕ$  (14. 1). Donc, etc.

PROPOSITION XXXIII.

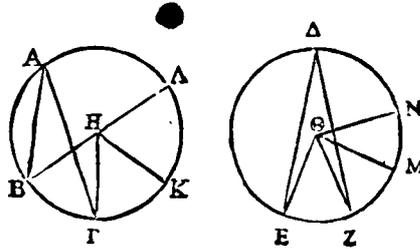
Dans les cercles égaux, les angles ont la même raison que les arcs qu'ils comprennent, soit que les angles soient placés aux centres ou bien aux circonférences; il en est de même des secteurs qui sont construits aux centres.

Soient les cercles égaux  $ΑΒΓ$ ,  $ΔΕΖ$ ; que les angles  $BΗΓ$ ,  $ΕΘΖ$  soient placés à

374 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς Η, Θ γωνίαι ἴστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερίαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἴστίν ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἦτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομῆς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομῆα<sup>2</sup>.

quidem ipsorum Η, Θ anguli sint ΒΗΓ, ΕΘΖ, ad circumferentias vero ipsi ΒΑΓ, ΕΔΖ; dico esse ut ΒΓ circumferentia ad ΕΖ circumferentiam ita ΒΗΓ angulum ad ΕΘΖ, et ipsum ΒΑΓ ad ΕΔΖ; et adhuc ΗΒΓ sectorem ad ΘΕΖ sectorem.



Κτίσθωσαν γὰρ τῇ μὲν ΒΓ περιφερίᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἕξῃς ὁσαυδηποτοῦν<sup>3</sup> αἱ ΓΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΖ περιφερίᾳ ἴσαι ὁσαυδηποτοῦν<sup>4</sup> αἱ ΖΜ, ΜΝ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Ponantur enim ipsi ΒΓ quidem circumferentiæ æquales deinceps quotcumque ΓΚ, ΚΛ, ipsi vero ΕΖ circumferentiæ æquales quotcumque ΖΜ, ΜΝ, et jungantur ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΑ γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαυπλασίον ἄρα ἴστίν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῇ ΒΓ, τοσαυταπλασίον ἴστί καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ. Διὰ τὰ

Et quoniam igitur æquales sunt ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ circumferentiæ inter se, æquales sunt et ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΑ anguli inter se. Quam multiplex igitur est ΒΑ circumferentia ipsius ΒΓ, tam multiplex et est ΒΗΑ angulus ipsius ΒΗΓ. Propter

leurs centres Η, Θ, et que les angles ΒΑΓ, ΕΔΖ soient placés à leurs circonferences; je dis que l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme l'angle ΒΗΓ est à l'angle ΕΘΖ, comme l'angle ΒΑΓ est à l'angle ΕΔΖ, et comme le secteur ΗΒΓ est au secteur ΘΕΖ.

Faisons tant d'arcs de suite ΓΚ, ΚΛ, qu'on voudra égaux chacun à l'arc ΒΓ, et tant d'arcs qu'on voudra ΖΜ, ΜΝ, égaux chacun à l'arc ΕΖ, et joignons ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Puisque les arcs ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ sont égaux entr'eux, les angles ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΑ sont aussi égaux entr'eux (27. 3); donc l'angle ΒΗΑ est le même multiple de ΒΗΓ, que l'arc ΒΑ l'est de l'arc ΒΓ. Par la même raison, l'angle ΕΘΝ est

αὐτὰ δὲ καὶ ὁσαυπλασίῳ ἐστὶν ἢ  $EN$  περιφέρεια τῆς  $EZ$ , τοσαυπλασίῳ ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ  $EON$  γωνία τῆς ὑπὸ  $EØZ$ . Εἰ ἄρα<sup>δ</sup> ἴση ἐστὶν ἡ  $BA$  περιφέρεια τῇ  $EN$  περιφέρειᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $BHA$  τῇ ὑπὸ  $EON$ · καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ  $BA$  περιφέρεια τῆς  $EN$  περιφέρειας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ  $BHA$  γωνία τῆς ὑπὸ  $EON$  γωνίας<sup>ε</sup>· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· τῶν δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν  $BΓ$ ,  $EZ$ , δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ  $BHΓ$ ,  $EØZ$ , εἴληπται τῆς μὲν  $BΓ$  περιφέρειας καὶ τῆς ὑπὸ  $BHΓ$  γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίῳ, ἢ τε  $BA$  περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ  $BHA$  γωνία, τῆς δὲ  $EZ$  περιφέρειας καὶ τῆς ὑπὸ  $EØZ$  γωνίας, ἢ τε  $EN$  περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ  $EON$  γωνία· καὶ δὲ δικάται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ  $BA$  περιφέρεια τῆς  $EN$  περιφέρειας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ  $BHA$  γωνία τῆς ὑπὸ  $EON$ · καὶ εἰ ἴση, ἴση· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· ἴστιν ἄρα ὡς  $BΓ$  περιφέρεια πρὸς τὴν  $EZ$  οὕτως ἡ ὑπὸ  $BHΓ$  γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ  $EØZ$ . Ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ  $BHΓ$  γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ  $EØZ$  οὕτως ἡ ὑπὸ  $BAG$  πρὸς τὴν ὑπὸ  $EΔZ$ , διπλα-

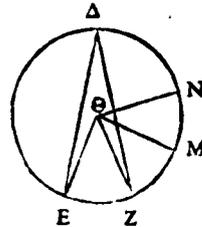
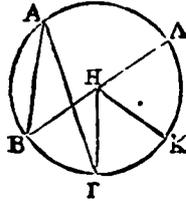
eadem utique et quam multiplex est  $EN$  circumferentia ipsius  $EZ$ , tam multiplex est et  $EON$  angulus ipsius  $EØZ$ . Si igitur æqualis est  $BA$  circumferentia ipsi  $EN$  circumferentiæ, æqualis est et angulus  $BHA$  ipsi  $EON$ ; et si major est  $BA$  circumferentia ipsâ  $EN$  circumferentiâ, major est et  $BHA$  angulus ipso  $EON$  angulo; et si minor, minor; quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem circumferentiis  $BΓ$ ,  $EZ$ , duobus vero angulis  $BHΓ$ ,  $EØZ$ , sumpta sunt ipsius quidem  $BΓ$  circumferentiæ, et ipsius  $BHΓ$  anguli æque multiplicia, et  $BA$  circumferentia et  $BHA$  angulus, ipsius vero  $EZ$  circumferentiæ et ipsius  $EØZ$  anguli, et  $EN$  circumferentia et  $EON$  angulus; et ostensum est si superat  $BA$  circumferentia ipsam  $EN$  circumferentiam, superare et  $BHA$  angulum ipsum  $EON$ ; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; est igitur ut  $BΓ$  circumferentia ad ipsam  $EZ$  ita  $BHΓ$  angulus ad ipsum  $EØZ$ . Sed ut  $BHΓ$  angulus ad ipsum  $EØZ$  ita ipse  $BAG$  ad ipsum  $EΔZ$ ; duplus

le même multiple de  $EØZ$ , que l'arc  $EN$  l'est de l'arc  $EZ$ . Donc si l'arc  $BA$  est égal à l'arc  $EN$ , l'angle  $BHA$  est égal à l'angle  $EON$  (27. 3); si l'arc  $BA$  est plus grand que l'angle  $EN$ , l'angle  $BHA$  est plus grand que l'angle  $EON$ ; et si l'arc  $BA$  est plus petit que l'arc  $EN$ , l'angle  $BHA$  est plus petit que l'angle  $EON$ . Ayant donc quatre grandeurs, deux arcs  $BΓ$ ,  $EZ$ , et deux angles  $BHΓ$ ,  $EØZ$ , on a pris des équimultiples de l'arc  $BΓ$  et de l'angle  $BHΓ$ , savoir, l'arc  $BA$  et l'angle  $BHA$ ; on a pris aussi des équimultiples de l'arc  $EZ$  et de l'angle  $EØZ$ , savoir, l'arc  $EN$  et l'angle  $EON$ ; et l'on a démontré que si l'arc  $BA$  surpasse l'arc  $EN$ , l'angle  $BHA$  surpasse l'angle  $EON$ ; que si l'arc  $BA$  est égal à l'arc  $EN$ , l'angle  $BHA$  est égal à l'angle  $EON$ ; que l'arc  $BA$  est plus petit que l'arc  $EN$ , l'angle  $BHA$  est plus petit que l'angle  $EON$ ; donc l'arc  $BΓ$  est à l'arc  $EZ$  comme l'angle  $BHΓ$  est à l'angle  $EØZ$  (déf. 6. 5). Mais l'angle  $BHΓ$  est à l'angle  $EØZ$  comme l'angle  $BAG$  est à l'angle  $EΔZ$  (15. 5), car ils sont

376 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

σίαν<sup>7</sup> γὰρ ἰκατέρᾳ ἰκατέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἦτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ<sup>8</sup> ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

enim uterque utriusque; et ut igitur ΒΓ circumferentia ad ΕΖ circumferentiam ita et ΒΗΓ angulus ad ipsum ΕΘΖ, et ipse ΒΑΓ ad ipsum ΕΔΖ.



Εν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερίαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν· ἴαν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἴαν τε πρὸς ταῖς περιφερίαις ὡς βεβηκυῖαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

In æqualibus igitur circulis anguli eandem habent rationem quam circumferentiæ in quas insistent; sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes. Quod oportebat ostendere.

Λέγω ὅτι καὶ ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ὁ ΗΒΓ τομὴς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομῆα.

Dico et ut ΒΓ circumferentia ad ΕΖ circumferentiam ita ΗΒΓ sectorem ad ΘΕΖ sectorem.

Ἐπιζεύχωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΓΚ, καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ξ, Ο σημεῖων, ἐπιζεύχωσαν καὶ αἱ ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Jungantur enim ΒΓ, ΓΚ, et sumptis in ΒΓ, ΓΚ circumferentiis punctis Ξ, Ο, jungantur et ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Καὶ ἐπὶ δύο αἱ ΒΗ, ΗΓ δυτὶ ταῖς ΓΗ, ΗΚ,

Et quoniam duo ΒΗ, ΗΓ duabus ΓΗ, ΗΚ

doubles les uns des autres (2 o. 5); donc l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme l'angle ΒΗΓ est à l'angle ΕΘΖ, et comme l'angle ΒΑΓ est à l'angle ΕΔΖ.

Donc, dans des cercles égaux, les angles sont proportionnels aux arcs, soit que ces angles soient placés aux centres ou bien aux circonférences. Ce qu'il fallait démontrer.

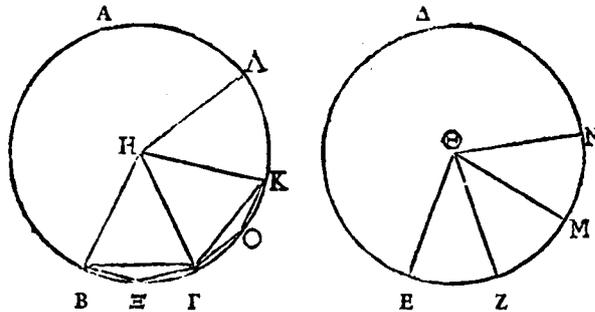
Je dis de plus que l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme le secteur ΗΒΓ est au secteur ΘΕΖ.

Joignons ΒΓ, ΓΚ, et ayant pris sur les arcs ΒΓ, ΓΚ, les points Ξ, Ο, joignons ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Puisque les deux droites ΒΗ, ΗΓ sont égales aux deux droites ΓΗ, ΗΚ,

ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ  
 βάσις ἡ ΒΓ τῆ ΓΚ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα ἐστὶ  
 καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ. Καὶ  
 ἵπεί ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῆ ΓΚ περιφε-  
 ρείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ ἢ εἰς τὸν ὅλον κύκλον πε-  
 ριφέρεια ἴση ἐστὶ τῆ λοιπῆ τῆ εἰς τὸν ὅλον  
 κύκλον περιφέρειᾳ<sup>10</sup>. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΞΓ<sup>11</sup>

æquales sunt, et angulos æquales comprehen-  
 dunt, et basis ΒΓ ipsi ΓΚ est æqualis; æquale  
 igitur est et ΒΗΓ triangulum ipsi ΗΓΚ trian-  
 gulo. Et quoniam æqualis est ΒΓ circumfe-  
 rentia ipsi ΓΚ circumferentiæ, et reliqua  
 totius circuli circumferentia æqualis est reli-  
 quæ totius circuli circumferentiæ; quare et



τῆ ὑπὸ ΓΟΚ ἐστὶν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ  
 ΒΞΓ τμήμα τῷ ΓΟΚ τμήματι· καὶ εἰσιν ἐπὶ  
 ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΓΚ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐ-  
 θειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις  
 ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμήμα τῷ ΓΟΚ  
 τμήματι. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ  
 ΗΓΚ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΗΒΓ τομὴς

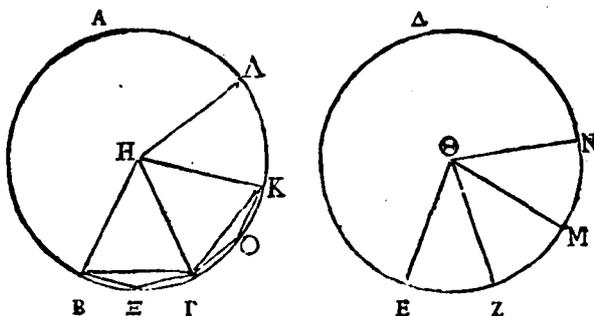
angulus ΒΞΓ angulo ΓΟΚ est æqualis; simile  
 igitur est ΒΞΓ segmentum ipsi ΓΟΚ segmento;  
 et sunt super æquales rectas ΒΓ, ΓΚ. Sed  
 super æquales rectas similia segmenta circu-  
 lorum æqualia inter se sunt; æquale igitur est  
 ΒΞΓ segmentum ipsi ΓΟΚ segmento. Est autem  
 et ΒΗΓ triangulum ipsi ΗΓΚ triangulo æquale;

et qu'elles comprennent des angles égaux, la base ΒΓ est égale à la base  
 ΓΚ; donc le triangle ΒΗΓ est égal au triangle ΗΓΚ (4. 1). Mais l'arc ΒΓ  
 est égal à l'arc ΓΚ; donc le reste de la circonférence du cercle entier  
 est égal au reste de la circonférence du cercle entier (ax. 3), l'angle ΒΞΓ  
 est égal à l'angle ΓΟΚ (27. 3); donc le segment ΒΞΓ est semblable au  
 segment ΓΟΚ (déf. 11. 3), et ces deux segments sont sur les droites égales ΒΓ,  
 ΓΚ. Mais les segments de cercles semblables placés sur des droites égales, sont  
 égaux entr'eux (24. 3); donc le segment ΒΞΓ est égal au segment ΓΟΚ. Mais  
 le triangle ΒΗΓ est égal au triangle ΗΓΚ; donc le secteur entier ΗΒΓ est égal

378 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴλω τῶ ΗΓΚ τομῆϊ ἴσος ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΚΑ τομῆς ἑκατέρω τῶν ΗΚΓ, ΗΓΒ ἴσος ἐστίν· οἱ τρεῖς ἄρα τομῆς οἱ ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΑ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομῆς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶν<sup>12</sup>. ὅσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας, τοσαυταπλασίων

et totus igitur ΗΒΓ sector toti ΗΓΚ sectori æqualis est. Propter eadem utique et ΗΚΑ sector utriusque ipsorum ΗΚΓ, ΗΓΒ æqualis est; tres igitur sectores ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΑ æquales inter se sunt. Propter eadem utique et ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ sectores æquales inter se sunt; quam multiplex igitur est ΒΑ circumferentiæ



ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΑ τομῆς τοῦ ΗΒΓ τομῆως. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΘΕΝ τομῆς τοῦ ΘΕΖ τομῆως. Εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ<sup>13</sup>, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΑ τομῆς τῶ ΘΕΝ τομῆϊ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΑ περιφέρεια

ipsius ΒΓ circumferentiæ, tam multiplex est et ΗΒΑ sector ipsius ΗΒΓ sectoris. Propter eadem utique et quam multiplex est ΕΝ circumferentiæ ipsius ΕΖ circumferentiæ, tam multiplex est et ΘΕΝ sector ipsius ΘΕΖ sectoris; si igitur æqualis est ΒΑ circumferentiæ ipsi ΕΝ circumferentiæ, æqualis est et ΗΒΑ sector ipsi

au secteur entier ΗΚΑ (ax. 2). Par la même raison, le secteur ΗΚΑ est égal à l'un et l'autre des secteurs ΗΚΓ, ΗΓΒ; donc les trois secteurs ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΑ sont égaux entr'eux. Les secteurs ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ sont égaux entr'eux, par la même raison; donc le secteur ΗΒΑ est le même multiple du secteur ΗΒΓ que l'arc ΒΑ l'est de l'arc ΒΓ. Par la même raison, le secteur ΘΕΝ est le même multiple du secteur ΘΕΖ que l'arc ΕΝ l'est de l'arc ΕΖ. Donc si l'arc ΒΑ est égal à l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ est égal au secteur ΘΕΝ; si l'arc ΒΑ surpasse l'arc

τῆς EN περιφέρειας, ὑπερέχει καὶ ὁ HBA τομῆς τοῦ ΘEN τομῆος καὶ εἰ ἔλλείπει, ἔλλείπει<sup>14</sup>. Τεσσάρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν BΓ, EZ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν HBG, ΘEZ τομῆων, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν BΓ περιφέρειας καὶ τοῦ HBG τομῆος, ἥτε BA περιφέρεια καὶ ὁ HBA τομῆος, τῆς δὲ EZ περιφέρειας καὶ τοῦ ΘEZ τομῆος ἰσάκεις πολλαπλάσια, ἥτε EN περιφέρεια καὶ ὁ ΘEN τομῆος. Καὶ δίδικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ BA περιφέρεια τῆς EN περιφέρειας, ὑπερέχει καὶ ὁ HBA τομῆος τοῦ ΘEN τομῆος καὶ εἰ ἴση, ἴσος καὶ εἰ ἔλλείπει, ἔλλείπει ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BΓ περιφέρεια πρὸς τὴν EZ οὕτως ὁ HBG τομῆος πρὸς τὸν ΘEZ τομῆος.

ΘEN sectori ; et si superat BA circumferentia ipsam EN circumferentiam, superat et HBA sector ipsum ΘEN sectorem ; et si deficit, deficit. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duobus quidem BΓ, EZ circumferentiis, duobus vero HBG, ΘEZ sectoribus, sumpta sunt æque multiplicia ipsius BΓ quidem circumferentiæ et ipsius HBG sectoris, ipsa et BA circumferentia et HBA sector, ipsius vero EZ circumferentiæ et ipsius ΘEZ sectoris æque multiplicia, ipsa et EN circumferentia et ipse ΘEN sector. Et ostensum est si superat BA circumferentia ipsam EN circumferentiam, superare et HBA sectorem ipsum ΘEN sectorem ; et si æqualis, æqualem ; et si deficit, deficere ; est igitur ut BΓ circumferentia ad EZ ita HBG sector ad ΘEZ sectorem.

EN, le secteur HBA surpasse le secteur ΘEN, et si l'arc BA est plus petit que l'arc EN, le secteur HBA est plus petit que le secteur ΘEN. Ayant donc quatre grandeurs, les deux arcs BΓ, EZ, et les deux secteurs HBG, ΘEZ, on a pris des équimultiples de l'arc BΓ et du secteur HBG, savoir, l'arc BA et le secteur HBA ; on a pris aussi des équimultiples de l'arc EZ et du secteur ΘEZ, savoir, l'arc EN et le secteur ΘEN. Et on a démontré que si l'arc BA surpasse l'arc EN, le secteur HBA surpasse le secteur ΘEN, que si l'arc BA est égal à l'arc EN, le secteur HBA est égal au secteur ΘEN, et que si l'arc BA est plus petit que l'arc EN, le secteur HBA est plus petit que le secteur ΘEN ; donc l'arc BΓ est à l'arc EZ comme le secteur HBG est au secteur ΘEZ (déf. 6. 5).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Καὶ δῆλον ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν το-  
μία οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Et manifestum est et ut sector ad sectorem ita  
et angulum ad angulum.

COROLLAIRE.

Il est évident que le secteur est au secteur comme l'angle est à l'angle  
(II. 5).

FIN DU SIXIÈME LIVRE.

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R S E P T I M U S.

---

ΟΡΟΙ.

DEFINITIONES.

α. Μονάς ἴστι, καθ' ἣν ὁ ἕκαστος τῶν ὄντων ἐν λέγεται.

β. Ἀριθμὸς δὲ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

γ. Μέρος ἴστιν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρηῖ τὸν μείζονα.

1. Unitas est secundum quam unumquodque existentium unum dicitur.

2. Numerus autem, ex unitatibus composita multitudo.

3. Pars est numerus numeri, minor majoris, quando metitur majorem.

## LIVRE SEPTIEME

# DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

DÉFINITIONS.

1. L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.
2. Un nombre est un assemblage composé d'unités.
3. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand.

382 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

- δ'. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρήῃ.  
 ε'. Πολλαπλάσιος δὲ, ὁ μείζων τοῦ ἐλάττο-  
 νος, ὅταν καταμετρήται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.  
 ς'. Ἀρτιος δὲ ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ δίχα διαιρού-  
 μινος.  
 ζ'. Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμινος δίχα ἢ  
 ὁ μόνῳ διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.  
 η'. Ἀρτιάκις ἀρτιος ἀριθμὸς ἐστὶν, ὁ ὑπὸ  
 ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμινος κατὰ ἄρτιον ἀριθ-  
 μόν.  
 θ'. Ἀρτιάκις δὲ περισσὸς ἀριθμὸς<sup>3</sup> ἐστὶν, ὁ  
 ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμινος κατὰ περισσὸν  
 ἀριθμόν.  
 ι'. Περισσάκις δὲ ἀρτιός ἐστὶν, ὁ ὑπὸ περισ-  
 σοῦ ἀριθμοῦ μετρούμινος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν<sup>4</sup>.  
 ια'. Περισσάκις δὲ περισσὸς ἀριθμὸς ἐστὶν<sup>5</sup>, ὁ  
 ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμινος κατὰ περισσὸν  
 ἀριθμόν.  
 ιβ'. Πρῶτος ἀριθμὸς ἐστὶν, ὁ μόνῳ μόνῳ  
 μετρούμινος.

4. Parties autem, quando non metitur.  
 5. Multiplex autem, major minoris, quando  
 mensuratur a minore.  
 6. Par autem numerus est ipse bifariam di-  
 visus.  
 7. Impar vero, ipse non divisus bifariam ;  
 vel ipse unitate differens a pari numero.  
 8. Pariter par numerus est, ipse a pari nu-  
 mero mensuratus per parem numerum.  
 9. Pariter autem impar numerus est, ipse a  
 pari numero mensuratus per imparem nume-  
 rum.  
 10. Impariter vero par est, ipse ab impari  
 numero mensuratus per parem numerum.  
 11. Impariter vero impar numerus est, ipse  
 ab impari numero mensuratus per imparem  
 numerum.  
 12. Primus numerus est, ipse ab unitate  
 solà mensuratus.

4. Un nombre est parties d'un nombre, quand il ne le mesure pas.  
 5. Un nombre est multiple d'un nombre, le plus grand du plus petit, quand  
 il est mesuré par le plus petit.  
 6. Le nombre pair est celui qui peut se partager en deux parties égales.  
 7. Le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties  
 égales, ou bien celui qui diffère d'une unité du nombre pair.  
 8. Le nombre parement pair est celui qui est mesuré par un nombre pair  
 multiplié par un nombre pair.  
 9. Le nombre parement impair est celui qui est mesuré par un nombre  
 pair multiplié par un nombre impair.  
 10. Le nombre impairement pair est celui qui est mesuré par un nombre  
 impair, multiplié par un nombre pair.  
 11. Le nombre impairement impair est celui qui est mesuré par un nombre  
 impair multiplié par un nombre impair.  
 12. Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seule.

17'. Πρῶτοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

18'. Σύνθετος ἀριθμὸς ἐστίν, ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

19'. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

20'. Αριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες τοσαυτάκις συντιθῆ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γίνηται τις.

21'. Ὄταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, ὁ γινόμενος ἐπίπεδος καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

22'. Ὄταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, ὁ γινόμενος στερεὸς καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

13. Primi autem inter se numeri sunt, ipsi unitate solâ mensurati communi mensurâ.

14. Compositus numerus est, ipse a numero aliquo mensuratus.

15. Compositi vero inter se numeri sunt, ipsi a numero aliquo mensurati communi mensurâ.

16. Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt in eo unitates toties additur multiplicatus, et gignitur aliquis.

17. Quando autem duo numeri sese multiplicantes fecerint aliquem, factus planus appellatur; latera vero ipsius, multiplicantes sese numeri.

18. Quando autem tres numeri sese multiplicantes fecerint aliquem, factus solidus appellatur; latera vero ipsius, multiplicantes sese numeri.

13. Les nombres premiers entr'eux sont ceux qui ont l'unité seule pour commune mesure.

14. Le nombre composé est celui qui est mesuré par quelque nombre.

15. Les nombres composés entr'eux sont ceux qui ont quelque nombre pour commune mesure.

16. Un nombre est dit multiplier un nombre, lorsque le multiplié est ajouté autant de fois qu'il y a d'unités dans celui qui le multiplie, et qu'un nombre est produit.

17. Lorsque deux nombres se multipliant font un nombre, celui qui est produit se nomme plan; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés de ce produit.

18. Lorsque trois nombres se multipliant entr'eux font un nombre, celui qui est produit est appelé solide; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés du produit.

ιβ'. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστὶν ὁ ἰσάκεις ἴσος ἢ ὁ ἰὸ ὑπὸ δύο ἀριθμῶν περιεχόμενος.

κ'. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκεις ἴσος ἰσάκεις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἀριθμῶν ἴσων<sup>11</sup> περιεχόμενος.

κα'. Αριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρους, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ᾖσιν.

κβ'. Ομοιοὶ ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοὶ εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

κγ'. Τέλειος ἀριθμός ἐστὶν, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ἄν.

19. Quadratus numerus est ipse æqualiter æqualis, vel ipse sub duobus æqualibus numeris contentus.

20. Cubus autem, ipse æqualiter æqualis æqualiter; vel ipse sub tribus numeris æqualibus contentus.

21. Numeri proportionales sunt, quando primus secundi et tertius quarti æque est multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes sunt.

22. Similes plani et solidi numeri sunt, ipsi proportionalia habentes latera.

23. Perfectus numerus est, ipse suis ipsius partibus æqualis existens.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρούμενου δὲ αἰὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος,

#### PROPOSITIO I.

Duobus numeris inæqualibus expositis, deducto autem semper minore de majore, si

19. Le nombre quarré est celui qui est également égal, ou celui qui est contenu sous deux nombres égaux.

20. Le nombre cube est celui qui est également égal également, ou bien celui qui est contenu sous trois nombres égaux.

21. Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second que le troisième l'est du quatrième, ou lorsque le premier est la même partie ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième.

22. Les nombres plans et solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés proportionnels.

23. Le nombre parfait est celui qui est égal à ses parties.

#### PROPOSITION PREMIÈRE.

Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché

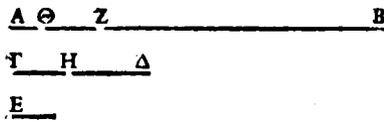
LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 385

ἴαν' ὁ λιπόμινος μηδέποτε καταμετρή τὸν πρὸς ἑαυτοῦ ἕως οὗ ληφθῆ μονάς· οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἴσονται.

Δύο γὰρ ἀείων<sup>2</sup> ἀριθμῶν τῶν AB, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου αἰ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λιπόμινος μηδέποτε καταμετρεῖται τὸν πρὸς ἑαυτοῦ ἕως οὗ ληφθῆ μονάς· λέγω ὅτι οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, τουτίστιν, ὅτι τοὺς AB, ΓΔ μονάς μόνη μετρεῖ<sup>3</sup>.

relictus nunquam metiatur ipsum præ se ipso quoad assumpta fuerit unitas; a principio numeri primi inter se erunt.

Duobus enim inæqualibus numeris AB, ΓΔ detracto semper minore de majore, relictus nunquam metiatur eum præ se ipso quoad assumpta fuerit unitas; dico ipsos AB, ΓΔ primos inter se esse, hoc est, ipsos AB, ΓΔ unitate solà mensurari.



Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρεῖται, καὶ ἴστω ὁ E, καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν AB μετρῶν λιπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ZA, ὁ δὲ ZA τὸν ΔΓ μετρῶν λιπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΗΓ, ὁ δὲ ΗΓ, τὸν ZA μετρῶν λιπέτω μονάδα τὴν ΘΑ.

Ἐπεὶ οὖν ὁ E τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ZB μετρεῖ καὶ ὁ E ἄρα τὸν ZB μετρεῖ. Μετρεῖ

Si enim non sunt AB, ΓΔ primi inter se, metietur aliquis ipsos numerus. Metiatur, et sit E, et ΓΔ quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorem ZA, ipse vero ZA ipsum ΔΓ metiens relinquat se ipso minorem ΗΓ, ipse ΗΓ autem ipsum ZA metiens relinquat unitatem ΘΑ.

Quoniam et E ipsum ΓΔ metitur, ipse autem ΓΔ ipsum ZB metitur; et ipse igitur E ipsum ZB

du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux.

Soient les deux nombres inégaux AB, ΓΔ; que le plus petit étant toujours retranché du plus grand, le nombre restant ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité; je dis que les nombres AB, ΓΔ sont premiers entr'eux, c'est-à-dire que l'unité seule les mesure.

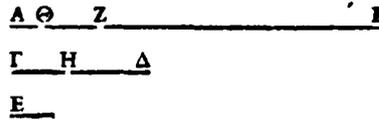
Car si les nombres AB, ΓΔ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit E; que ΓΔ mesurant AB laisse ZA plus petit que lui-même; que ZA mesurant ΔΓ laisse ΗΓ plus petit que lui-même; et qu'enfin ΗΓ mesurant ZA laisse l'unité ΘΑ.

Puisque E mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure ZB, le nombre E mesure ZB. Mais

386 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δι καὶ ὅλον τὸν AB· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν AZ μετρήσει<sup>4</sup>. Ὁ δὲ AZ τὸν ΔΗ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΔΗ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΗ μετρήσει<sup>5</sup>. Ὁ δὲ ΓΗ τὸν ΖΘ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΖΘ μετρήσει<sup>6</sup>. Με-

metitur. Metitur autem et totum AB; et reliquum igitur AZ metietur. Ipse autem AZ ipsum ΔΗ metitur; et Ε igitur ipsum ΔΗ metietur. Metitur autem et totum ΓΔ; et reliquum igitur ΓΗ metietur. Ipse autem ΓΗ ipsum ΖΘ metitur;



τρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΖΑ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὴν ΑΘ μονάδα μετρήσει, ἀριθμὸς ὢν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμούς μετρήσει τις ἀριθμὸς· οἱ AB, ΓΔ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

et Ε igitur ipsum ΖΘ metietur. Metitur autem et totum ΖΑ; et reliquam igitur ΑΘ unitatem metietur, numerus existens, quod est impossibile; non igitur AB, ΓΔ numeros metietur aliquis numerus; ipsi AB, ΓΔ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

PROPOSITIO II.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρῶτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram invenire.

il mesure AB tout entier; donc il mesurera le reste AZ. Mais AZ mesure ΔΗ; donc Ε mesurera ΔΗ. Mais il mesure ΓΔ tout entier; donc il mesurera le reste ΓΗ. Mais ΓΗ mesure ΖΘ; donc Ε mesurera ΖΘ. Mais il mesure ΖΑ tout entier; donc un nombre mesurera l'unité restante ΑΘ, ce qui est impossible (déf. 3. 7). Donc, aucun nombre ne mesurera les nombres AB, ΓΔ. Donc les nombres AB, ΓΔ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

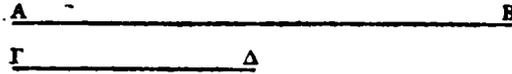
PROPOSITION II.

Deux nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 387

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ AB, ΓΔ, καὶ ἔστω ἐλάττω ὁ ΓΔ· δεῖ δὲ τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Sint dati duo numeri non primi inter se AB, ΓΔ, et sit minor ΓΔ; oportet igitur ipsorum AB, ΓΔ maximam communem mensuram invenire.

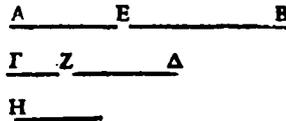


Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν AB μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ ΓΔ ἄρα τῶν AB, ΓΔ<sup>2</sup> κοινὸν μέτρον ἐστὶ. Καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.

Si ΓΔ quidem ipsum AB metitur, metitur vero et se ipsum; ipse ΓΔ igitur ipsorum AB, ΓΔ communis mensura est. Et manifestum est et maximam; nullus enim major ipso ΓΔ ipsum ΓΔ metietur.

Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν AB, τῶν AB, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀλλὰ τοῦ ἐλάττωτος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ληφθήσεται τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει

Si autem non metitur ΓΔ ipsum AB, ipsorum AB, ΓΔ detracto semper minore de majore, relinquetur aliquis numerus, qui me-



τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Μονὰς μὲν γὰρ οὐ ληφθήσεται. Εἰ δὲ μὴ, ἴσονται οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ληφθήσεται ἄρα τις

tietur eum præ se ipso. Unitas quidem non enim relinquetur. Si autem non, erunt AB, ΓΔ primi inter se, quod non ponitur; relin-

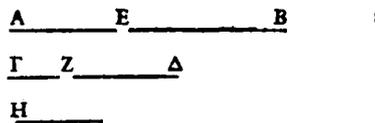
Soient donnés les deux nombres AB, ΓΔ non premiers entr'eux, et que ΓΔ soit le plus petit; il faut trouver la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ.

Si ΓΔ mesure AB, le nombre ΓΔ sera une commune mesure des nombres ΓΔ, AB, parce que ΓΔ se mesure lui-même; et il est évident qu'il en sera la plus grande, car aucun nombre plus grand que ΓΔ ne peut mesurer ΓΔ.

Mais si ΓΔ ne mesure pas AB, et si on retranche toujours le plus petit des nombres AB, ΓΔ du plus grand, il restera quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. On n'aura pas l'unité pour reste; car si cela était, les nombres AB, ΓΔ seraient premiers entr'eux, ce qui n'est pas supposé;

ἀριθμὸς, ἕς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΑΒ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΕΑ, ὁ δὲ ΕΑ τὸν ΔΓ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΕΑ μετρεῖτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. Ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ

quetur igitur aliquis numerus, qui metietur eum præ se ipso. Et ipse quidem ΓΔ ipsum ΑΒ metiens relinquat se ipso minorem ΕΑ, ipse vero ΕΑ ipsum ΔΓ metiens relinquat se ipso minorem ΖΓ, ipse autem ΓΖ ipsum ΕΑ metiatur. Et quoniam ΓΖ ipsum ΑΕ metitur, ipse autem ΑΕ ipsum ΔΖ metitur; et ΓΖ igitur ipsum ΔΖ metietur. Metitur autem et se ipsum; et totum igitur ΓΔ metietur. Ipse



μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ἵ ΓΖ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὁ ΓΖ τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓΖ. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Η. Καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΒΕ μετρήσει<sup>3</sup>. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν

autem ΓΔ ipsum ΒΕ metitur; et ΓΖ igitur ipsum ΒΕ metitur. Metitur autem et ipsum ΕΑ; et totum igitur ΒΑ metietur. Metitur autem et ipsum ΓΔ; ipse ΓΖ igitur ipsos ΑΒ, ΓΔ metitur; ΓΖ igitur ipsorum ΑΒ, ΓΔ communis mensura est. Dico utique et maximam. Si enim non est ΓΖ ipsorum ΑΒ, ΓΔ maxima communis mensura, metietur aliquis ΑΒ, ΓΔ numeros numerus major existens ipso ΓΖ. Me-

il restera donc quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. Que ΓΔ mesurant ΑΒ laisse ΕΑ plus petit que lui-même; que ΕΑ mesurant ΔΓ laisse ΖΓ plus petit que lui-même; et enfin que ΓΖ mesure ΕΑ. Puisque ΓΖ mesure ΑΕ, et que ΑΕ mesure ΔΖ, le nombre ΓΖ mesurera ΔΖ. Mais il se mesure lui-même; donc il mesurera ΓΔ tout entier. Mais ΓΔ mesure ΒΕ; donc ΓΖ mesure ΒΕ. Mais il mesure ΕΑ; donc il mesurera ΒΑ tout entier. Mais il mesure ΓΔ; donc ΓΖ mesure ΑΒ et ΓΔ; donc ΓΖ est une commune mesure des nombres ΑΒ, ΓΔ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si ΓΖ n'est pas la plus grande commune mesure des nombres ΑΒ, ΓΔ, quelque nombre plus grand que ΓΖ mesurera les nombres ΑΒ, ΓΔ. Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit Η. Puisque Η mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure ΒΕ, le nombre Η mesurera ΒΕ. Mais il mesure ΒΑ tout entier; donc il mesurera le reste

BA· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΕ μετρήσει. Ο δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΖ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσει, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει, μείζων ὢν τοῦ ΓΖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ μίγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον. Ὅπρι ἔδει δεῖξαι.

tiatur, et sit H. Et quoniam H ipsum ΓΑ metitur, ipse vero ΓΑ ipsum ΒΕ metitur; et ipse H igitur ipsum ΒΕ metietur. Metitur autem et totum ΒΑ; et reliquum igitur ipsum ΑΕ metietur. Ipse autem ΑΕ ipsum ΔΖ metitur; et H igitur ipsum ΔΖ metitur. Metitur autem et totam ΔΓ; et reliquum igitur ΓΖ metietur, major minorem, quod est impossibile; non igitur ΑΒ, ΓΔ numeros numerus aliquis metietur, major existens ipso ΓΖ; ipse ΓΖ igitur ipsorum ΑΒ, ΓΔ maxima est communis mensura. Quod oportebat ostendere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Εκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμοὺς δύο ἀριθμοὺς μετρή, καὶ τὸ μίγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Ex hoc utique manifestum est, si numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem mensuram mensurum esse.

ΑΕ. Mais ΑΕ mesure ΔΖ; donc Η mesure ΔΖ. Mais il mesure ΔΓ tout entier; donc il mesurera le reste ΓΖ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc quelque nombre plus grand que ΓΖ ne mesurera pas les nombres ΑΒ, ΓΔ; donc ΓΖ est la plus grande commune mesure des nombres ΑΒ, ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment de là, que si un nombre en mesure deux autres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

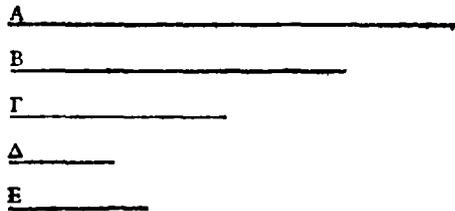
## PROPOSITIO III.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἐστώσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ  $A, B, \Gamma$ . δεῖ δὴ τῶν  $A, B, \Gamma$  τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram invenire.

Sint dati tres numeri non primi inter se  $A, B, \Gamma$ ; oportet igitur ipsorum  $A, B, \Gamma$  maximam communem mensuram invenire.



Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν  $A, B$  τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ  $\Delta$ . ὁ δὲ  $\Delta$  τὸν  $\Gamma$  ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖται πρότερον, μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς  $A, B$ . ὁ  $\Delta$  ἄρα τοὺς  $A, B, \Gamma$  μετρεῖ. ὁ  $\Delta$  ἄρα τῶν  $A, B, \Gamma$  κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ  $\Delta$  τῶν  $A, B, \Gamma$  μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τοὺς  $A, B, \Gamma$  ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ἂν τοῦ  $\Delta$ . Με-

Sumatur enim duorum  $A, B$  maxima communis mensura  $\Delta$ ; ipse utique  $\Delta$  ipsum  $\Gamma$  vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum, metitur autem et ipsos  $A, B$ ; ipse  $\Delta$  igitur ipsos  $A, B, \Gamma$  metitur; ipse  $\Delta$  igitur ipsorum  $A, B, \Gamma$  communis mensura est. Dico et maximam. Si enim non est  $\Delta$  ipsorum  $A, B, \Gamma$  maxima communis mensura, metietur  $A,$

## PROPOSITION III.

Trois nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient donnés les trois nombres  $A, B, \Gamma$  non premiers entr'eux; il faut trouver leur plus grande commune mesure.

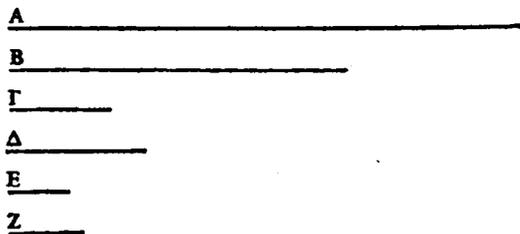
Prenons la plus grande commune mesure  $\Delta$  des deux nombres  $A, B$ ; le nombre  $\Delta$  mesure, ou ne mesure pas le nombre  $\Gamma$ . Premièrement, qu'il le mesure; mais il mesure aussi les nombres  $A, B$ ; donc il mesure les nombres  $A, B, \Gamma$ ; donc  $\Delta$  est une commune mesure des nombres  $A, B, \Gamma$ . Je dis qu'il en est la plus grande. Car si  $\Delta$  n'est pas la plus grande commune mesure des nombres  $A, B, \Gamma$ , un nombre plus grand que  $\Delta$  mesurera les nombres  $A, B, \Gamma$ .

τρέιτω, καὶ ἴστω ὁ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β ἄρα μετρήσει<sup>2</sup>, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἴστί· ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἴστί· ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μετρήσει μείζων τοῦ Δ<sup>3</sup>. ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Μὴ μετρεῖται δὲ ὁ Δ τὸν Γ· λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Δ, Γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς· ὁ δὲ τοὺς Α, Β, Γ με-

B, Γ numeros numerus major existens ipso Δ. Metiatur, et sit E. Et quoniam E ipsos A, B, Γ metitur, et ipsos A, B igitur metietur, et ipsorum igitur A, B maximam communem mensuram metietur. Ipsorum autem A, B maxima communis mensura est Δ; ipse igitur E ipsum Δ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsos A, B, Γ numeros numerus aliquis metietur major ipso Δ; ipse Δ igitur ipsorum A, B, Γ maxima est communis mensura.

Non metiatur autem Δ ipsum Γ; dico primum numeros Δ, Γ non esse primos inter se. Quoniam enim A, B, Γ non sunt primi inter se, metietur aliquis eos numerus; qui autem



τρῶν, καὶ τοὺς Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· τοὺς Δ, Γ ἄρα ἀριθμὸς τις μετρη-

ipsos A, B, Γ metitur, et ipsos A, B metietur, et ipsorum A, B maximam mensuram Δ metietur. Metiatur autem et ipsum Γ; ipsos Δ, Γ igitur

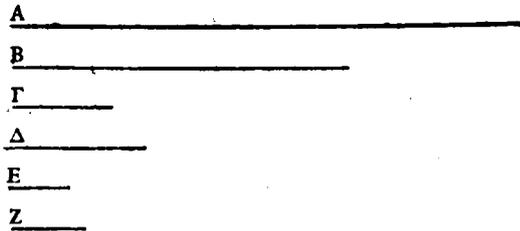
Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit E. Puisque E mesure les nombres A, B, Γ, il mesurera les nombres A, B, et par conséquent leur plus grande commune mesure (cor. 2. 7). Mais Δ est la plus grande commune mesure des nombres A, B; donc E mesure Δ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc un nombre plus grand que Δ ne mesurera pas les nombres A, B, Γ; donc Δ est la plus grande commune mesure des nombres A, B, Γ.

Que Δ ne mesure pas Γ; je dis premièrement que les nombres Δ, Γ ne sont pas premiers entr'eux. Car puisque les nombres A, B, Γ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera, et celui qui mesure les nombres A, B, Γ, mesurera les nombres A, B, et mesurera aussi leur plus grande commune mesure Δ (cor. 2. 7). Mais il mesure aussi Γ; donc quelque nombre mesurera

392 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

σι· οἱ Δ, Γ ἄρα οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλή-  
λους. Εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν  
μέτρον, ὁ Ε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, ὁ  
δὲ Δ τοὺς Α, Β μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τοὺς Α,  
Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς  
Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν  
ἴστι μέτρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ  
γὰρ μὴ ἴσθιν ὁ Ε τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον

numerus aliquis metietur; ipsi Δ, Γ igitur non  
sunt primi inter se. Sumatur igitur eorum  
maxima communis mensura Ε. Et quoniam Ε  
ipsum Δ metitur, ipse autem Δ ipsos Α, Β  
metitur; et Ε igitur ipsos Α, Β, metitur. Me-  
titur autem et ipsum Γ; ipse Ε igitur ipsos Α,  
Β, Γ metitur; ipse Ε igitur ipsorum Α, Β, Γ  
communis est mensura. Dico autem et maximam.



κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς Α, Β, Γ  
ἀριθμούς ἀριθμὸς μείζων ἢ τοῦ Ε. Μετρεῖτω,  
καὶ ἴστω ὁ Ζ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τοὺς Α, Β, Γ  
μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β μετρεῖ, καὶ τὸ τῶν Α, Β  
ἄρα<sup>5</sup> μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ  
τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἴσθιν ὁ Δ· ὁ  
Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ  
Ζ ἄρα τοὺς Δ, Γ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Δ, Γ ἄρα  
μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει<sup>6</sup>. Τὸ δὲ τῶν Γ,

Si enim non est Ε ipsorum Α, Β, Γ maxima  
communis mensura, metietur aliquis ipsos Α,  
Β, Γ numeros numerus major existens ipso Ε;  
metiatur, et sit Ζ. Et quoniam Ζ ipsos Α, Β, Γ  
metitur, et ipsos Α, Β metitur, et ipsorum Α, Β  
igitur maximam communem mensuram me-  
tietur. Ipsorum autem Α, Β maxima communis  
mensura est Δ; ipse Ζ igitur ipsum Δ metitur.  
Metitur autem et ipsum Γ; ipse Ζ igitur ipsos Δ, Γ

les nombres Δ, Γ; donc Δ, Γ ne sont pas premiers entr'eux. Prenons leur plus grande commune mesure Ε. Puisque Ε mesure Δ, et que Δ mesure les nombres Α, Β, le nombre Ε mesure Α et Β. Mais il mesure Γ; donc Ε mesure les nombres Α, Β, Γ; donc Ε est une commune mesure des nombres Α, Β, Γ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si Ε n'est pas la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ, un nombre plus grand que Ε mesurera les nombres Α, Β, Γ. Qu'il les mesure, et que ce soit z. Puisque z mesure les nombres Α, Β, Γ, il mesure Α et Β, et il mesurera par conséquent leur plus grande commune mesure. Mais Δ est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β; donc z mesure Δ. Mais il mesure aussi Γ; donc z mesure Δ et Γ; donc il mesure la plus grande commune mesure des nombres Δ, Γ. Mais Ε est la plus grande

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 393

Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἔστιν ὁ Ε· ὁ Ζ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς τις μετρήσει μείζων ἢ τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστιν κοινὸν μέτρον.

Τριῶν ἄρα ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, εὔρηται τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοὺς τρεῖς μετρήῃ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ πλειόνων ἀριθμῶν δοθέντων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὔρησομεν<sup>8</sup>.

metitur; et ipsorum Δ, Γ igitur maximam communem mensuram metitur. Ipsorum autem Γ, Δ maxima communis mensura est Ε; ipse Ζ igitur ipsum Ε metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β, Γ numerus aliquis metietur major existens ipso Ε; ipse Ε igitur ipsorum Α, Β, Γ maxima est communis mensura.

Tribus igitur numeris datis non primis inter se, inventa est maxima communis mensura. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Ex his utique manifestum est, si numerus numeros tres metiatur, et maximam eorum communem mensuram mensurum esse.

Eodem modo et pluribus numeris datis, maximam communem mensuram inveniemus.

commune mesure des nombres Γ, Δ; donc Ζ mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc un nombre plus grand que Ε ne mesurera pas les nombres Α, Β, Γ; donc Ε est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ.

Donc, trois nombres non premiers entr'eux étant donnés, on a trouvé leur plus grande commune mesure. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

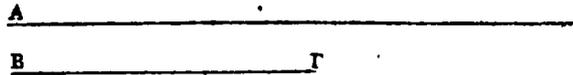
Il suit évidemment de là que si un nombre en mesure trois autres, il mesurera aussi leur plus grande commune mesure.

Plusieurs nombres étant donnés, on trouvera de la même manière leur plus grande commune mesure.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὃ ἰλάσσων τοῦ  
μείζονος, ἢτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Ἐστώσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ  $A$ ,  $BΓ$ , καὶ ἔστω  
ἰλάσσων ὁ  $BΓ$ . λέγω ὅτι ὁ  $BΓ$  τοῦ  $A$  ἢτοι μέρος  
ἐστὶν ἢ μέρη.



Οἱ  $A$ ,  $BΓ$  γὰρ ἢτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους  
εἰσὶν, ἢ οὐ. Ἐστώσαν πρῶτερον οἱ  $A$ ,  $BΓ$  πρῶ-  
τοι πρὸς ἀλλήλους, διαιρεθέντος δὲ τοῦ  $BΓ$  εἰς  
τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἔσται ἑκάστη μονὰς τῶν  
ἐν τῷ  $BΓ$  μέρος τι τοῦ  $A$ . ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ  $BΓ$   
τοῦ  $A$ .

Μὴ ἔστώσαν δὲ οἱ  $A$ ,  $BΓ$  πρῶτοι πρὸς ἀλλή-  
λους· ὁ δὲ  $BΓ$  τὸν  $A$  ἢτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ.  
Εἰ μὲν οὖν ὁ  $BΓ$  τὸν  $A$  μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ  $BΓ$   
τοῦ  $A$ .

Omnis numerus omnis numeri, minor ma-  
joris, vel pars est vel partes.

Sint duo numeri  $A$ ,  $BΓ$ , et sit minor  $BΓ$ ;  
dico  $BΓ$  ipsius  $A$  vel partem esse vel partes.

Ipsi  $A$ ,  $BΓ$  enim vel primi inter se sunt, vel  
non; sint primum  $A$ ,  $BΓ$  primi inter se, et diviso  
 $BΓ$  in unitates quæ in ipso, erit quæque unitas  
earum quæ in  $BΓ$  pars aliqua ipsius  $A$ ; quare  
partes est  $BΓ$  ipsius  $A$ .

Non sint autem  $A$ ,  $BΓ$  primi inter se; ipse  
utique  $BΓ$  ipsum  $A$  vel metitur, vel non meti-  
tur. Si autem  $BΓ$  ipsum  $A$  metitur, pars est  
 $BΓ$  ipsius  $A$ .

## PROPOSITION IV.

Tout nombre est ou une partie ou plusieurs parties de tout autre nombre, le plus petit du plus grand.

Soient deux nombres  $A$ ,  $BΓ$ , et que  $BΓ$  soit le plus petit; je dis que  $BΓ$  est ou une partie ou plusieurs parties de  $A$ .

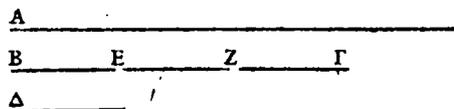
Car les nombres  $A$ ,  $BΓ$  sont premiers entr'eux, ou non; qu'ils soient d'abord premiers entr'eux; ayant divisé le nombre  $BΓ$  en ses unités, chacune des unités de  $BΓ$  sera quelque partie de  $A$  (déf. 1 et 2. 7); donc  $BΓ$  sera plusieurs parties de  $A$ .

Que les nombres  $A$ ,  $BΓ$  ne soient pas premiers entr'eux; le nombre  $BΓ$  mesure  $A$  ou ne le mesure pas. Si  $BΓ$  mesure  $A$ , le nombre  $BΓ$  est une partie de  $A$ .

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 395

Εἰ δὲ οὐ. Εἰλήφθω τῶν Α, ΒΓ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ διηρήσθω ὁ ΒΓ εἰς τοὺς τῶ Δ ἴσους, τοὺς ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Α. Ἴσος δὴ ἕκαστω

Si autem non. Sumatur ipsorum Α, ΒΓ maxima communis mensura Δ, et dividatur ΒΓ in numeros ipsi Δ æquales ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. Et quoniam Δ ipsum Α metitur, pars est Δ ipsius Α.



τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ τοῦ Α μέρος ἐστίν· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α. Ἀπας ἄρα ἀριθμὸς, καὶ τὰ ἐξῆς.

Æqualis igitur unicuique ipsorum ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ; et unusquisque igitur ipsorum ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ ipsius Α pars est; quare partes est ΒΓ ipsius Α. Omnis igitur numerus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἶ.

PROPOSITIO V.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ συναμφοτέρως συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ἕπερ ὁ εἰς τοῦ ἐνός.

Si numerus numeri pars est, et alter alterius eadem pars; et uterque simul utriusque simul eadem pars erit, quæ unus unius.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω,

Numerus enim Α numeri ΒΓ pars sit, et alter

S'il ne le mesure pas, prenons la plus grande commune mesure Δ des nombres Α, ΒΓ (2. 7), et partageons ΒΓ en parties ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ égales à Δ. Puisque Δ mesure Α, le nombre Δ est une partie de Α. Mais Δ est égal à chacune des parties ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ; donc chacune des parties ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ est une partie de Α; donc ΒΓ est plusieurs parties de Α. Donc, etc.

PROPOSITION V.

Si un nombre est une partie d'un nombre, et si un autre nombre est la même partie d'un autre nombre, leur somme sera aussi la même partie de leur somme, qu'un seul l'est d'un seul.

Que le nombre Α soit une partie du nombre ΒΓ, et qu'un autre nombre

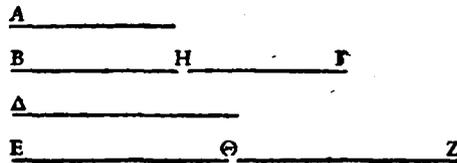
396 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρος ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ ΕΖ· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοὶ εἰσὶ καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. Διηρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ· ὁ δὲ ΕΖ

Δ alterius ΕΖ eadem pars, quæ ipse Α ipsius ΒΓ; dico et utrumque simul Α, Δ utriusque simul ΒΓ, ΕΖ eandem partem esse quæ ipse Α ipsius ΒΓ.

Quoniam enim quæ pars est Α ipsius ΒΓ, eadem pars est et Δ ipsius ΕΖ; quot igitur sunt in ΒΓ numeri æquales ipsi Α, tot sunt et in ΕΖ numeri æquales ipsi Δ. Dividatur ΒΓ quidem in numeros ipsi Α æquales ΒΗ, ΗΓ; ipse



εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ, ΘΖ· ἴσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν ΒΗ τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ· καὶ οἱ ΒΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ ΗΓ τῷ Α ἴσος ἐστὶν, ὁ δὲ ΘΖ τῷ Δ· καὶ οἱ ΗΓ, ΘΖ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι εἰσὶν<sup>3</sup>. ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοὶ εἰσὶ καὶ ἐν τοῖς ΒΓ, ΕΖ ἴσοι τοῖς Α, Δ· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ<sup>4</sup> Α, τοσαυταπλασίων ἐστὶ, καὶ συναμφοτέρος ὁ ΒΓ, ΕΖ

vero ΕΖ in numeros ipsi Δ æquales ΕΘ, ΘΖ; erit utique æqualis multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΓ multitudini ipsorum ΕΘ, ΘΖ. Et quoniam æqualis est ΒΗ quidem ipsi Α, ipse vero ΕΘ ipsi Δ; et ΒΗ, ΕΘ igitur ipsi Α, Δ æquales. Propter eadem utique et ΗΓ ipsi Α æqualis est, ipse autem ΘΖ ipsi Δ; et ΗΓ, ΘΖ igitur ipsi Α, Δ æquales sunt; quot igitur sunt in ΒΓ numeri æquales ipsi Α, tot sunt et in ipsis ΒΓ, ΕΖ æquales ipsis Α, Δ; quammultiplex igitur est ΒΓ ipsius Α, tam mul-

Α soit la même partie d'un autre nombre ΕΖ, que Α l'est de ΒΓ; je dis que la somme de Α et de Δ est la même partie de la somme de ΒΓ et de ΕΖ, que Α l'est de ΒΓ.

Car puisque Α est la même partie de ΒΓ, que Δ l'est de ΕΖ, il y aura dans ΒΓ autant de nombres égaux à Α, qu'il y a dans ΕΖ de nombres égaux à Δ. Partageons ΒΓ en nombres ΒΗ, ΗΓ égaux à Α, et ΕΖ en nombres ΕΘ, ΘΖ égaux à Δ, la quantité des nombres ΒΗ, ΗΓ sera égale à la quantité des nombres ΕΘ, ΘΖ. Mais ΒΗ est égal à Α, et ΕΘ égal à Δ; donc la somme de ΒΗ et de ΕΘ est égale à la somme de Α et de Δ. Par la même raison, ΗΓ est égal à Α, et ΘΖ égal à Δ; donc la somme de ΗΓ et de ΘΖ est égale à la somme de Α et de Δ; il y a donc dans ΒΓ autant de nombres égaux à Α, qu'il y a dans ΒΓ, ΕΖ de

συναμφοτέρου τοῦ Α, Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέ-  
ρος ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ. Ὅπερ εἶδει  
δείξαι.

tiplez est et uterque simul ΒΓ, ΕΖ utriusque  
simul Α, Δ; quæ igitur pars est Α ipsius ΒΓ,  
eadem pars est et uterque simul Α, Δ utrius-  
que simul ΒΓ, ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

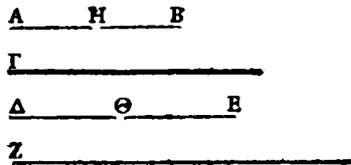
Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ῥ', καὶ ἕτερος ἑτέ-  
ρου τὰ αὐτὰ μέρη ῥ'· καὶ συναμφοτέρος συναμ-  
φοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἴσται, ἅπερ ὁ εἰς τοῦ  
ἴσος.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἴστω,  
καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη  
ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρος  
ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ τὰ αὐτὰ μέρη  
ἴσται, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ·

PROPOSITIO VI.

Si numerus numeri partes est, et alter alte-  
rius eadem partes est; et uterque simul utriusque  
simul eadem partes erit quæ unus unius.

Numerus enim ΑΒ numeri Γ partes sit, et  
alter ΔΕ alterius Ζ eadem partes quæ ΑΒ ip-  
sius Γ; dico et utrumque simul ΑΒ, ΔΕ utrius-  
que simul Γ, Ζ eadem partes esse, quæ ΑΒ  
ipsius Γ.



Ἐπι γὰρ ἅ μέρη ἴσται ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ  
μέρη ἴσται· καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἴσται ἐν

Quoniam enim quæ partes est ΑΒ ipsius Γ  
eadem partes est et ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur

nombrez égaux aux nombrez Α, Δ; donc ΒΓ est le même multiple de Α, que la  
somme de ΒΓ et de ΕΖ l'est de la somme de Α et de Δ; donc Α est la même partie  
de ΒΓ que la somme de Α et de Δ, l'est de la somme de ΒΓ et de ΕΖ. Ce qu'il fallait  
démontrer.

PROPOSITION VI.

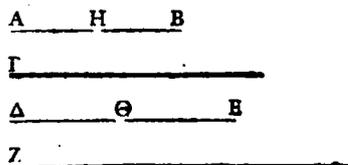
Si un nombre est plusieurs parties d'un nombre, et si un autre nombre est  
les mêmes parties d'un autre nombre, leur somme sera les mêmes parties de  
leur somme, qu'un seul l'est d'un seul.

Que le nombre ΑΒ soit plusieurs parties du nombre Γ, et qu'un autre nombre  
ΔΕ soit les mêmes parties d'un autre nombre Ζ, que ΑΒ l'est de Γ; je dis que la  
somme de ΑΒ et de ΔΕ est les mêmes parties de la somme de Γ et de Ζ que ΑΒ l'est de Γ.

398 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῶν AB μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῶν ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. Διηρήσθω ὁ μὲν AB εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ.

sunt in AB partes ipsius Γ, tot sunt et in ΔΕ partes ipsius Ζ. Dividatur AB quidem in ipsius Γ partes ΑΗ, ΗΒ, ipse vero ΔΕ in ipsius Ζ partes ΔΘ, ΘΕ.



• Ἐσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῶν πλῆθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ<sup>3</sup> μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρως ὁ ΑΗ, ΔΘ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ Γ, καὶ ὁ ΘΕ τοῦ Ζ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ καὶ συναμφοτέρως ὁ ΗΒ, ΘΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ· ἂ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφοτέρως ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. Ὅπρι εἶδει δειξαι.

Erit utique æqualis multitudo ipsorum ΑΗ, ΗΒ multitudini ipsorum ΔΘ, ΘΕ. Et quoniam quæ pars est ΑΗ ipsius Γ, eadem pars est et ΔΘ ipsius Ζ; quæ igitur pars est ΑΗ ipsius Γ, eadem pars est et uterque simul ΑΗ, ΔΘ utriusque simul Γ, Ζ. Propter eadem utique et quæ pars est ΗΒ ipsius Γ, et ipse ΘΕ ipsius Ζ; ipse igitur pars est ΗΒ ipsius Γ et uterque simul ΗΒ, ΘΕ utriusque simul Γ, Ζ; quæ igitur partes est ΑΒ ipsius Γ, eadem partes est et uterque simul ΑΒ, ΔΕ utriusque simul Γ, Ζ. Quod oportebat ostendere.

Puisque AB est les mêmes parties de Γ que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de parties de Γ, qu'il y a dans ΔΕ de parties de Ζ. Partageons AB en parties de Γ, et que ces parties soient ΑΗ, ΗΒ; partageons aussi ΔΕ en parties de Ζ, et que ces parties soient ΔΘ, ΘΕ.

Le nombre des parties ΑΗ, ΗΒ sera égal au nombre des parties ΔΘ, ΘΕ. Et puisque ΑΗ est la même partie de Γ, que ΔΘ l'est de Ζ, ΑΗ est la même partie de Γ, que la somme de ΑΗ et de ΔΘ l'est de la somme de Γ et de Ζ (5. 7). Par la même raison, ΗΒ est la même partie de Γ, que ΘΕ l'est de Ζ; donc ΗΒ est la même partie de Γ, que la somme de ΗΒ et de ΘΕ l'est de la somme de Γ et de Ζ; donc la somme de ΑΒ et de ΔΕ est les mêmes parties de la somme de Γ et de Ζ, que ΑΒ l'est de Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ

PROPOSITIO VII.

Εάν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ἦ, ὅπερ ἀφαιρέθεις ἀφαιρέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρος ἔστω, ὅπερ ἀφαιρέθεις ὁ AE ἀφαιρέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ EB λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἔστιν, ὅπερ ὁ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ ΓΔ.

Si numerus numeri pars est, quæ ablati ablati; et reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri ΓΔ pars sit, quæ ablati AE ablati ΓΖ; dico et reliquum EB reliqui ΖΔ eandem partem esse, quæ totus AB totius ΓΔ.



Ο γὰρ μέρος ἔστιν ὁ AE τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω καὶ ὁ EB τοῦ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἔστιν ὁ AE τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔστι καὶ ὁ EB τοῦ ΓΗ· ὁ ἄρα μέρος ἔστιν ὁ AE τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔστι καὶ ὁ AB τοῦ ΗΖ, ὁ δὲ μέρος ἔστιν ὁ AE τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ὑπόκειται καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ· ὁ ἄρα μέρος ἔστι καὶ

Quæ enim pars est AE ipsius ΓΖ, eadem pars sit et EB ipsius ΓΗ. Et quoniam quæ pars est AE ipsius ΓΖ, eadem pars est EB ipsius ΓΗ; quæ igitur pars est AE ipsius ΓΖ, eadem pars est et AB ipsius ΗΖ; quæ autem pars est AE ipsius ΓΖ, eadem pars ponitur et AB ipsius ΓΔ; quæ igitur pars est et AB ipsius

PROPOSITION VII.

Si un nombre est la même partie d'un nombre, que le nombre retranché l'est du nombre retranché, le nombre restant sera la même partie du nombre restant, que le tout l'est du tout.

Que le nombre AB soit la même partie du nombre ΓΔ, que le nombre retranché AE l'est du nombre retranché ΓΖ; je dis que le nombre restant EB est la même partie du nombre restant ΖΔ, que le nombre entier AB l'est du nombre entier ΓΔ.

Que EB soit la même partie de ΓΗ, que AE l'est de ΓΖ. Puisque AE est la même partie de ΓΖ, que EB l'est de ΓΗ; le nombre AE est la même partie de ΓΖ, que AB l'est de ΗΖ (5. 7); mais on a supposé que AE est la même partie de ΓΖ, que AB l'est de ΓΔ; donc AB est la même partie de ΗΖ, que

400 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ AB τοῦ HZ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ<sup>α</sup>. ὁ AB ἄρα ἑκατέρου τῶν HZ, ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ HZ τῷ ΓΔ. Κοινὸς ἀφηρήσθω ὁ ΓΖ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἐστὶν ἴσος<sup>β</sup>. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσος δὲ ὁ ΗΓ τῷ ΖΔ<sup>γ</sup>· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ

HZ, eadem pars est et AB ipsius ΓΔ; ipse AB igitur utriusque ipsorum HZ, ΓΔ eadem pars est; æqualis igitur est HZ ipsi ΓΔ. Communis aufertur ΓΖ; reliquus igitur ΗΓ reliquo ΖΔ est æqualis. Et quoniam quæ pars est ΑΕ ipsius ΓΖ, eadem pars est et ΕΒ ipsius ΗΓ, æqualis autem ΗΓ ipsi ΖΔ; quæ igitur pars est ΑΕ ipsius



ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ<sup>α</sup>· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ<sup>β</sup>· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ ΓΔ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΓΖ, eadem pars est et ΕΒ ipsius ΖΔ. Sed quæ pars est ΑΕ ipsius ΓΖ, eadem pars est et AB ipsius ΓΔ; quæ igitur pars est ΕΒ ipsius ΖΔ, eadem pars est et AB ipsius ΓΔ; et reliquus igitur ΕΒ reliqui ΖΔ eadem pars est quæ totus AB totius ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

AB l'est de ΓΔ; donc AB est la même partie de HZ et de ΓΔ; donc HZ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΖ; la partie restante ΗΓ sera égale à la partie restante ΖΔ. Mais ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que ΕΒ l'est de ΗΓ, et ΗΓ est égal a ΖΔ; donc ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que ΕΒ l'est de ΖΔ. Mais ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que AB l'est de ΓΔ; donc ΕΒ est la même partie de ΖΔ, que AB l'est de ΓΔ; donc le nombre restant ΕΒ est la même partie du nombre restant ΖΔ, que le nombre entier AB l'est du nombre entier ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

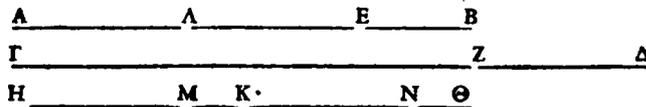
PROPOSITIO VIII.

Εάν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ἦ, ἅπερ ἀφαιρέθεις ἀφαιρέθιντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρη ἴσται, ἅπερ ἀφαιρέθεις ὁ ΑΕ ἀφαιρέθιντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσται, ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Si numerus numeri partes est, quæ ablatu ablati; et reliquus reliqui eadem partes erit, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri ΓΔ partes sit, quæ ablatu AE ablati ΓΖ; dico et reliquum EB reliqui ΖΔ easdem partes esse, quæ totus AB totius ΓΔ.



Κείσθω γὰρ τῷ AB ἴσος ὁ ΗΘ· ἃ ἄρα μέρη ἴσται ὁ ΗΘ τοῦ ΓΔ, τὰ αὐτὰ μέρη ἴσται καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ. Διηγήσθω ὁ μὲν ΗΘ εἰς τὰ τοῦ ΓΔ μέρη τὰ ΗΚ, ΚΘ, ὁ δὲ ΑΕ εἰς τὰ τοῦ ΓΖ μέρη τὰ ΑΛ, ΑΕ· ἴσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΗΚ, ΚΘ τῷ πλῆθει τῶν ΑΛ, ΑΕ. Καὶ ἵπται ὁ μέρος ἴσται ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται καὶ ὁ ΑΛ τοῦ ΓΖ· μίζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ· μίζων ἄρα καὶ ὁ ΗΚ τοῦ ΑΛ. Κείσθω τῷ ΑΛ ἴσος ὁ ΗΜ· ὃ ἄρα μέρος ἴσται ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ,

Ponatur enim ipsi AB æqualis ΗΘ; quæ igitur partes est ΗΘ ipsius ΓΔ, eadem partes est et ΑΕ ipsius ΓΖ. Dividatur ΗΘ quidem in ipsius ΓΔ partes ΗΚ, ΚΘ, ipse vero ΑΕ in ipsius ΓΖ partes ΑΛ, ΑΕ; erit igitur æqualis multitudo ΗΚ, ΚΘ ipsi multitudini ΑΛ, ΑΕ. Et quoniam quæ pars est ΗΚ ipsius ΓΔ, eadem pars est et ΑΛ ipsius ΓΖ; major autem ΓΔ ipso ΓΖ; major igitur et ΗΚ ipso ΑΛ. Po-

PROPOSITION VIII.

Si un nombre est les mêmes parties d'un nombre, que le nombre retranché l'est du nombre retranché, le nombre restant sera aussi les mêmes parties du nombre restant, que le tout l'est du tout.

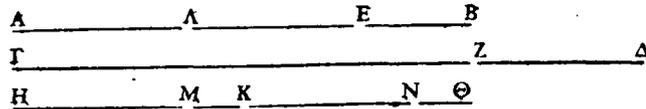
Que le nombre AB soit les mêmes parties du nombre ΓΔ, que le nombre retranché ΑΕ l'est du nombre retranché ΓΖ; je dis que le nombre restant ΕΒ est les mêmes parties du nombre restant ΖΔ, que le tout ΑΒ l'est du tout ΓΔ.

Faisons ΗΘ égal à ΑΒ; le nombre ΗΘ sera les mêmes parties de ΓΔ, que ΑΕ l'est de ΓΖ. Divisons ΗΘ en parties de ΓΔ, et que ces parties soient ΗΚ, ΚΘ; divisons ΑΕ en parties de ΓΖ, et que ces parties soient ΑΛ, ΑΕ; le nombre des parties ΗΚ, ΚΘ sera égal au nombre des parties ΑΛ, ΑΕ. Et puisque ΗΚ est la même partie de ΓΔ, que ΑΛ l'est de ΓΖ, et que ΓΔ est plus grand que ΓΖ, ΗΚ est plus grand que ΑΛ. Faisons ΗΜ égal à ΑΛ; ΗΚ sera la même partie

402 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΜ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΛΕ τοῦ ΓΖ, μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΚΘ τοῦ ΛΕ. Κείσθω τῷ ΛΕ ἴσος ὁ ΚΝ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΚΝ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ἔ ΝΘ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ

natur ipsi ΔΑ ἄqualis ipse ΗΜ; quæ igitur pars est ΗΚ ipsius ΓΔ, eadem pars est et ΗΜ ipsius ΓΖ; et reliquus igitur ΜΚ reliqui ΖΔ eadem pars est quæ totus ΗΚ totius ΓΔ. Rursus, quoniam quæ pars est ΚΘ ipsius ΓΔ, eadem pars est et ΛΕ ipsius ΓΖ, major autem ΓΔ ipso ΓΖ; major igitur et ΚΘ ipso ΛΕ. Ponatur ipsi ΛΕ ἄqualis ipse ΚΝ; quæ igitur pars est ΚΘ ipsius ΓΔ, eadem pars est et ΚΝ ipsius ΓΖ; et reliquus igitur ΝΘ reliqui ΖΔ eadem pars est, quæ totus ΚΘ totius ΓΔ. Ostensum autem est et reliquum ΜΚ reliqui ΖΔ eandem partem esse quæ totus ΚΗ totius ΔΓ; et uterque simul igitur ΜΚ, ΝΘ ipsius ΔΖ eandem partes est quæ totus ΘΗ totius ΔΓ. Ἐqualis autem uterque simul ΜΚ, ΝΘ quidem ipsi ΕΒ, ipse vero ΘΗ ipsi ΒΑ; et reliquus igitur ΕΒ reliqui ΖΔ eandem partes est quæ totus ΑΒ totius ΓΔ. Quod oportebat ostendere.



ὅλος ὁ ΚΘ ὅλου τοῦ ΓΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ὡν ὅπερ ὅλος ὁ ΚΗ ὅλου τοῦ ΔΓ· καὶ συναμφοτέρος ἄρα ὁ ΜΚ, ΝΘ τοῦ ΔΖ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἄπερ ὅλος ὁ ΘΗ ὅλου τοῦ ΔΓ. Ἴσος δὲ συναμφοτέρος μὲν ὁ ΜΚ, ΝΘ τῷ ΕΒ, ὁ δὲ ΘΗ τῷ ΒΑ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἄπερ ὅλος ἔ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

liquus igitur ΝΘ reliqui ΖΔ eadem pars est, quæ totus ΚΘ totius ΓΔ. Ostensum autem est et reliquum ΜΚ reliqui ΖΔ eandem partem esse quæ totus ΚΗ totius ΔΓ; et uterque simul igitur ΜΚ, ΝΘ ipsius ΔΖ eandem partes est quæ totus ΘΗ totius ΔΓ. Ἐqualis autem uterque simul ΜΚ, ΝΘ quidem ipsi ΕΒ, ipse vero ΘΗ ipsi ΒΑ; et reliquus igitur ΕΒ reliqui ΖΔ eandem partes est quæ totus ΑΒ totius ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

de ΓΔ, que ΗΜ l'est de ΓΖ; donc le reste ΜΚ est la même partie du reste ΖΔ, que le tout ΗΚ l'est du tout ΓΔ. De plus, puisque ΚΘ est la même partie de ΓΔ, que ΛΕ l'est de ΓΖ, et que ΓΔ est plus grand que ΓΖ, ΚΘ est plus grand que ΛΕ. Faisons ΚΝ égal à ΛΕ; ΚΘ sera la même partie de ΓΔ, que ΚΝ l'est de ΓΖ; donc le reste ΝΘ est la même partie du reste ΖΔ, que le tout ΚΘ l'est du tout ΓΔ. Mais on a démontré que le reste ΜΚ est la même partie du reste ΖΔ, que le tout ΚΗ l'est du tout ΔΓ; donc la somme de ΜΚ et de ΝΘ, est les mêmes parties de ΔΖ, que le tout ΘΗ l'est du tout ΔΓ. Mais la somme de ΜΚ et de ΝΘ est égale à ΕΒ, et ΘΗ égal à ΒΑ; donc, le reste ΕΒ est les mêmes parties du reste ΖΔ, que le tout ΑΒ l'est du tout ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

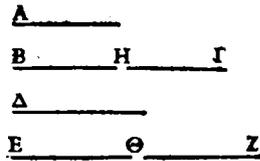
PROPOSITIO IX.

Εάν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ἦ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἦ<sup>1</sup>· καὶ ἑναλλάξ ὁ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται ἢ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τοῦ ΒΓ μέρος ἴστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ, ἑλάσσων δὲ ἴστω ὁ Α τοῦ Δ<sup>2</sup>· λέγω ὅτι καὶ ἑναλλάξ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἢ μέρη.

Si numerus numeri pars est, et alter alterius eadem pars est; et alterne quæ pars est, vel partes primus tertii, eadem pars erit vel eadem partes et secundus quarti.

Numerus enim Α numeri ΒΓ pars sit, et alter Δ alterius ΕΖ eadem pars quæ Α ipsius ΒΓ, minor autem sit Α ipso Δ; dico et alterne quæ pars est Α ipsius Δ vel partes, eadem partem esse et ΒΓ ipsius ΕΖ vel partes.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ<sup>3</sup> ὁ Δ τοῦ ΕΖ· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοὶ εἰσὶ καὶ ἐν

Quoniam enim quæ pars est Α ipsius ΒΓ, eadem pars est et Δ ipsius ΕΖ; quot igitur sunt in ΒΓ numeri æquales ipsi Α, tot sunt

PROPOSITION IX.

Si un nombre est une partie d'un nombre, et si un autre nombre est la même partie d'un autre nombre, le premier est, par permutation, la même partie ou les mêmes parties du troisième, que le second l'est du quatrième.

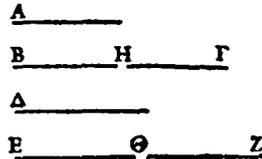
Que le nombre Α soit une partie du nombre ΒΓ, et qu'un autre nombre Δ soit la même partie d'un autre nombre ΕΖ, que Α l'est de ΒΓ, et que Α soit plus petit que Δ; je dis que, par permutation, Α est la même partie ou les mêmes parties de Δ, que ΒΓ l'est de ΕΖ.

Puisque Α est la même partie de ΒΓ, que Δ l'est de ΕΖ, il y a dans ΒΓ autant de nombres égaux à Α, qu'il y a dans ΕΖ de nombres égaux

404 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῶ EZ ἴσοι τῶ Δ. Διηρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῶ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ EZ εἰς τοὺς τῶ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ, ΟΖ· ἴσον ἴσται δὴ τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῶ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΟΖ.

et in EZ æquales ipsi Δ. Dividatur ΒΓ quidem in ipsos ipsi Α æquales ΒΗ, ΗΓ, ipse vero EZ in ipsos ipsi Δ æquales ΕΘ, ΟΖ; æqualis erit utique multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΓ multitudini ipsorum ΕΘ, ΟΖ.



Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΗ, ΗΓ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΟΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἴσται τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῶ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΟΖ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΓ τοῦ ΟΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ ΒΓ συναμφοτέρου τοῦ EZ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἴσος δὴ ὁ μὲν ΒΗ τῶ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῶ Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ EZ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

Et quoniam æquales sunt ΒΗ, ΗΓ numeri inter se, sunt autem et ΕΘ, ΟΖ numeri æquales inter se, et est æqualis multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΓ multitudini ipsorum ΕΘ, ΟΖ; quæ igitur pars est ΒΗ ipsius ΕΘ vel partes, eadem pars est et ΗΓ ipsius ΟΖ vel eadem partes; quare et quæ pars est ΒΗ ipsius ΕΘ vel partes, eadem pars est et uterque simul ΒΓ, utriusque simul EZ vel eadem partes; æqualis utique ΒΗ quidem ipsi Α, ipse vero ΕΘ ipsi Δ; quæ igitur pars est et Α ipsius Δ vel partes, eadem pars est et ΒΓ ipsius EZ vel eadem partes. Quod oportebat ostendere.

à Δ. Partageons ΒΓ en parties égales à Α, et que ces parties soient ΒΗ, ΗΓ; partageons aussi EZ en parties égales à Δ, et que ces parties soient ΕΘ, ΟΖ; le nombre des parties ΒΗ, ΗΓ sera égal au nombre des parties ΕΘ, ΟΖ.

Puisque les nombres ΒΗ, ΗΓ sont égaux entr'eux, que les nombres ΕΘ, ΟΖ sont aussi égaux entr'eux, et que la quantité des nombres ΒΗ, ΗΓ est égale à la quantité des nombres ΕΘ, ΟΖ, le nombre ΒΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΕΘ, que ΗΓ l'est de ΟΖ; donc ΒΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΕΘ, que la somme ΒΓ l'est de la somme EZ (5 et 6. 7). Mais ΒΗ est égal à Α, et ΕΘ égal à Δ; donc Α est la même partie ou les mêmes parties de Δ, que ΒΓ l'est de EZ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

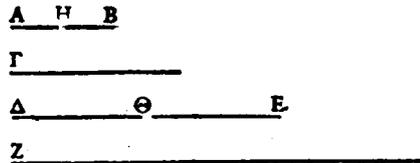
PROPOSITIO X.

Εάν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ἦ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ἐναλλάξ ἅ μέρη ἴσθιν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἴστα καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ τὸ αὐτὸ<sup>1</sup> μέρος.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἴστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη, ἴστω δὲ ὁ AB τοῦ ΔΕ ἐλάσσων<sup>2</sup> λόγῳ καὶ ἐναλλάξ ἅ μέρη ἴσθιν ὁ AB τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἴσθι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτὸ<sup>3</sup> μέρος.

Si numerus numeri partes est, et alter alterius eadem partes; et alterne quæ partes est primus tertii vel pars, eadem partes erit et secundus quarti vel eadem pars.

Numerus enim AB numeri Γ partes sit, et alter ΔΕ alterius Ζ eadem partes, sit autem AB ipso ΔΕ minor; dico et alterne quæ partes est AB ipsius ΔΕ vel pars, eadem partes esse et Γ ipsius Ζ vel eandem partem.



Ἐπι γὰρ ἅ μέρη ἴσθιν ὁ AB τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἴσθι καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ἴσα ἄρα ἴσθιν ἐν τῷ AB μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. Διηρήσθω ὁ μὲν AB εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ AH, HB, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ· ἴσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH,

Quoniam enim quæ partes est AB ipsius Γ, eadem partes est et ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur sunt in AB partes ipsius Γ, tot sunt et in ΔΕ partes ipsius Ζ. Dividatur AB quidem in partes AH, HB ipsius Γ, ipse vero ΔΕ in partes ΔΘ, ΘΕ ipsius Ζ; erit utique æqualis multi-

PROPOSITION X.

Si un nombre est les mêmes parties d'un nombre, qu'un autre l'est d'un autre, le premier sera aussi, par permutation, les mêmes parties ou la même partie du troisième, que le second l'est du quatrième.

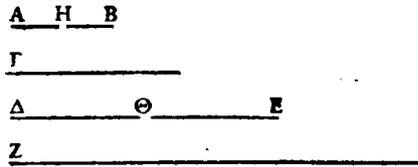
Que le nombre AB soit les mêmes parties du nombre Γ, qu'un autre nombre ΔΕ l'est d'un autre nombre Ζ, et que AB soit plus petit que ΔΕ; je dis que, par permutation, AB est les mêmes parties ou la même partie de ΔΕ, que Γ l'est de Ζ.

Puisque AB est les mêmes parties de Γ, que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de parties de Γ, qu'il y a dans ΔΕ de parties de Ζ. Divisons AB en parties de Γ, et que ces parties soient AH, HB; divisons aussi ΔΕ en parties de Ζ, et que ces parties soient ΔΘ, ΘΕ; le nombre des parties AH, HB sera égal

406 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

HB τῶν πλείους τῶν ΔΘ, ΘΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ<sup>4</sup> Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, καὶ ἐναλλάξ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ<sup>5</sup> ΘΕ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ

tudo ipsarum AH, HB multitudini ipsarum ΔΘ, ΘΕ. Et quoniam quæ pars est AH ipsius Γ, eadem pars est et ΔΘ ipsius Ζ, et alterne quæ pars est AH ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Ζ vel eadem partes. Propter eadem utique et quæ pars est HB ipsius ΘΕ vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Ζ vel eadem partes; quare et quæ pars est AH ip-



μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη<sup>6</sup>· ἀλλ' ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐδείχθη<sup>7</sup> καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, κατ' αὐτὰ ἄρα<sup>8</sup> μέρος ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτὸ μέρος. Ὅτι ἐν ἰσῶν δειξάται.

sius ΔΘ vel partes, eadem pars est et HB ipsius ΘΕ vel eadem partes; et quæ igitur pars est AH ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars est et AB ipsius ΔΕ vel eadem partes; sed quæ pars est AH ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars ostensa est et Γ ipsius Ζ vel eadem partes, et quæ igitur partes est AB ipsius ΔΕ vel pars, eadem partes est et Γ ipsius Ζ vel eadem pars. Quod oportebat ostendere.

au nombre des parties ΔΘ, ΘΕ. Et puisque AH est la même partie de Γ, que ΔΘ l'est de Ζ; par permutation, AH est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que Γ l'est de Ζ (9. 7). Par la même raison, HB est la même partie ou les mêmes parties de ΘΕ, que Γ l'est de Ζ; donc AH est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que HB l'est de ΘΕ (5 et 6. 7); donc AH est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que AB l'est de ΔΕ; mais on a démontré que AH est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que Γ l'est de Ζ; donc AB est les mêmes parties ou la même partie de ΔΕ, que Γ l'est de Ζ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

PROPOSITIO XI.

Εάν ἡ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρέθηνα· καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Ἐστω ὡς ὅλος ὁ AB πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ AE πρὸς ἀφαιρέθηνα τὸν ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ EB πρὸς λοιπὸν τὸν ΖΔ ἔστιν ὡς ὅλος ὁ AB πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

Si est ut totus ad totum ita ablatum ad ablatum; et reliquus ad reliquum erit ut totus ad totum.

Sit ut totus AB ad totum ΓΔ ita ablatum AE ad ablatum ΓΖ; dico et reliquum EB ad reliquum ΖΔ esse ut totus AB ad totum ΓΔ.



Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως ὁ AE πρὸς τὸν ΓΖ· ὁ ἄρα μέρος ἔστιν ὁ AB τοῦ ΓΔ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἔστι καὶ ὁ AE τοῦ ΓΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ EB λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἔστιν ἢ μέρη, ἅπερ AB τοῦ ΓΔ· ἔστιν ἄρα ὡς EB πρὸς τὸν ΖΔ οὕτως ὁ AB πρὸς τὸν ΓΔ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ; quæ igitur pars est AB ipsius ΓΔ vel partes, eadem pars est et AE ipsius ΓΖ vel eadem partes; et reliquus igitur EB reliqui ΖΔ eadem pars est vel partes, quæ AB ipsius ΓΔ; est igitur ut EB ad ΖΔ ita AB ad ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XI.

Si le tout est au tout comme le nombre retranché est au nombre retranché, le nombre restant sera aussi au nombre restant comme le tout est au tout.

Que le tout AB soit au tout ΓΔ comme le nombre retranché AE est au nombre retranché ΓΖ; je dis que le nombre restant EB est au nombre restant ΖΔ comme le tout AB est au tout ΓΔ.

Car, puisque AB est à ΓΔ comme AE est à ΓΖ, AB est la même partie ou les mêmes parties de ΓΔ que AE l'est de ΓΖ; donc le reste EB est la même partie ou les mêmes parties du reste ΖΔ que AB l'est de ΓΔ (7 et 8. 7); donc EB est à ΖΔ comme AB est à ΓΔ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12.

PROPOSITIO XII.

Εάν ἴσιν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγουμένοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἐπομένους.

Ἐστῶσαν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ.

Si sunt quotcunque numeri proportionales, erit ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque numeri proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico esse ut Α ad Β ita ipsos Α, Γ ad ipsos Β, Δ.

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{E} \quad \text{B} \\ \hline \text{Γ} \quad \text{Z} \quad \text{Δ} \end{array}$$

Ἐπι γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ μέρος· καὶ συναμφοτέρως ἄρα ὁ Α, Γ συναμφοτέρως τοῦ Β, Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ Α τοῦ Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ. Ὅπρι ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Γ ad Δ; quæ igitur pars est Α ipsius Β vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Δ vel partes; et uterque simul igitur Α, Γ utriusque simul Β, Δ eadem pars est vel eadem partes, quæ Α ipsius Β; est igitur ut Α ad Β ita ipsi Α, Γ ad ipsos Β, Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont proportionnels, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

Soient Α, Β, Γ, Δ tant de nombres proportionnels qu'on voudra; que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis que Α est à Β comme la somme des nombres Α, Γ est à la somme des nombres Β, Δ.

Car, puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, Α est la même partie ou les mêmes parties de Β, que Γ l'est de Δ (déf. 20. 7); donc Α est la même partie ou les mêmes parties de Β que Γ l'est de Δ; donc la somme des nombres Α, Γ est la même partie ou les mêmes parties de la somme des nombres Β, Δ, que Α l'est de Β (5 et 6. 7); donc Α est à Β comme la somme des nombres Α, Γ est à la somme des nombres Β, Δ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

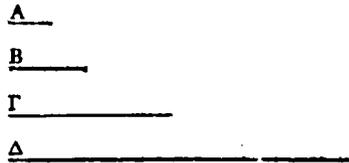
PROPOSITIO XIII.

Εάν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾧσι καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἴσονται.

Ἐστώσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἴσονται, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ.

Si quatuor numeri proportionales sunt; et alterne proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico et alterne proportionales fore, ut Α ad Γ ita Β ad Δ.



Ἐπεὶ γὰρ ἴστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ ἄρα μέρος ἴστιν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἴστι καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἐναλλάξ ἄρα ὁ μέρος ἴστιν ὁ Α τοῦ Γ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἴστι καὶ ὁ Β τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Γ ad Δ; quæ igitur pars est Α ipsius Β vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Δ vel eadem partes; alterne igitur quæ pars est Α ipsius Γ vel partes, eadem pars est et Β ipsius Δ vel eadem partes; est igitur ut Α ad Γ ita Β ad Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XIII.

Si quatre nombres sont proportionnels; ils seront encore proportionnels par permutation.

Soient Α, Β, Γ, Δ quatre nombres proportionnels, et que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis qu'ils seront encore proportionnels, par permutation, c'est-à-dire que Α est à Γ comme Β est à Δ.

Car, puisque Α est à Β comme Γ est à Δ; Α est la même partie ou les mêmes parties de Β, que Γ l'est de Δ (déf. 20. 7); donc, par permutation, Α est la même ou les mêmes parties de Γ, que Β l'est de Δ (9 et 10. 7); donc Α est à Γ comme Β est à Δ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14'.

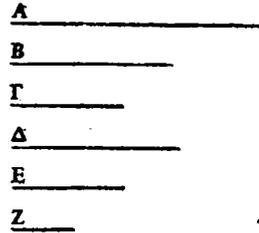
PROPOSITIO XIV.

Εάν ὦσιν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ δίσσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἴσονται.

Ἐστώσαν γάρ ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω ὅτι καὶ δίσσου ἴσῃν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Si sunt quotcunque numeri, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eadem ratione; et ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint enim quotcunque numeri Α, Β, Γ, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eadem ratione Δ, Ε, Ζ, ut Α quidem ad Β ita Δ ad Ε, ut Β vero ad Γ ita Ε ad Ζ; dico et ex æquo esse ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.



Ἐπεὶ γὰρ ἴσῃν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλάξ ἄρα ἴσῃν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεὶ ἴσῃν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλάξ

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Δ ad Ε; alterne igitur est ut Α ad Δ ita Β ad Ε. Rursus, quoniam est ut Β ad Γ ita Ε ad Ζ; alterne igitur est ut Β ad Ε ita Γ ad Ζ. Ut autem Β ad

PROPOSITION XIV.

Si l'on a tant de nombres qu'on voudra, et d'autres nombres égaux en quantité aux premiers, et si ces nombres étant pris deux à deux sont en même raison, ils seront aussi en même raison par égalité.

Soient Α, Β, Γ tant de nombres qu'on voudra, et d'autres nombres Δ, Ε, Ζ égaux en quantité à ceux-ci, que ces nombres soient pris deux à deux et en même raison, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Δ est à Ε, et que Β soit à Γ comme Ε est à Ζ; je dis que, par égalité, Α est à Γ comme Δ est à Ζ.

Car, puisque Α est à Β comme Δ est à Ε, par permutation, Α est à Δ comme Β est à Ε (13. 7). De plus, puisque Β est à Γ comme Ε est à Ζ; par permu-

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 411

ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

E ita A ad Δ; et ut igitur A ad Δ ita Γ ad Z; alterne igitur est ut A ad Γ ita Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

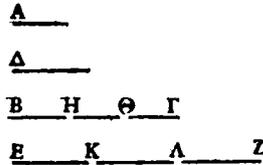
PROPOSITIO XV.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμὸν τινα μετρῆ, ἰσάκεις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινα ἀριθμὸν μετρῆ· καὶ ἐναλλάξ ἰσάκεις ἢ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσῃ καὶ ὁ δεύτερος τέταρτον.

Si unitas numerum aliquem metitur, æqualiter autem alter numerus alium aliquem numerum metitur; et alterne æqualiter unitas tertium numerum metietur ac secundus quartum.

Μονὰς γὰρ ἢ Α ἀριθμὸν τινα τὸν ΒΓ μετρίτω, ἰσάκεις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ ἄλλον τινα ἀριθ-

Unitas enim A numerum aliquem ΒΓ metiatur, æqualiter autem alter numerus Δ alium



μὸν τὸν ΕΖ μετρίτω· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἰσάκεις ἢ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ.

aliquem numerum EZ metiatur; dico et alterne æqualiter A unitatem ipsum Δ numerum metiri ac ΒΓ ipsum EZ.

tation, B est à E comme Γ est à Z. Mais B est à E comme A est à Δ; donc A est à Δ comme Γ est à Z; donc, par permutation, A est à Γ comme Δ est à Z. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XV.

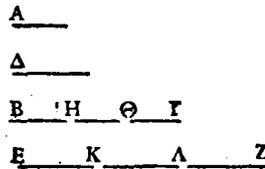
Si l'unité mesure un nombre autant de fois qu'un autre nombre mesure un autre nombre; par permutation, l'unité mesurera autant de fois le troisième nombre que le second mesure le quatrième.

Que l'unité A mesure un nombre ΒΓ autant de fois qu'un autre nombre Δ mesure un autre nombre ΕΖ; je dis que, par permutation, l'unité A mesure le nombre Δ autant de fois que ΒΓ mesure ΕΖ.

412 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἡ Α μονὰς τὸν ΒΓ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ μονάδες τσαοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. Διηρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας τὰς ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους, τοὺς ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ· ἴσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ τῷ πλῆθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. Καὶ ἐπιὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ

Quoniam enim æqualiter A unitas ipsum ΒΓ numerum metitur ac Δ ipsum ΕΖ; quot igitur sunt in ΒΓ unitates tot sunt et in ΕΖ numeri æquales ipsi Δ. Dividatur ΒΓ quidem in ipsas in eo unitates ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ipse vero ΕΖ in ipsos ipsi Δ æquales ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ; erit igitur æqualis multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ multitudini ipsorum ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. Et quoniam æquales sunt ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ unitates inter



ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδων τῷ πλῆθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμῶν· ἴσται<sup>3</sup> ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν οὕτως ἡ ΗΘ μονὰς πρὸς τὸν ΚΛ ἀριθμὸν, καὶ ἡ ΘΓ μονὰς πρὸς τὸν ΛΖ ἀριθμὸν. Ἐσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἰπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἰπομένους· ἴστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς

se, sunt autem et ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ numeri æquales inter se, et est æqualis multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ unitatum multitudini ipsorum ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ numerorum; erit igitur ut ΒΗ unitas ad ΕΚ numerum ita ΗΘ unitas ad ΚΛ numerum, et ΘΓ unitas ad ΛΖ numerum. Erit igitur et ut unus antecedentium ad unum consequentium ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut ΒΗ

Puisque l'unité A mesure le nombre ΒΓ autant de fois que Δ mesure ΕΖ, il y aura dans ΒΓ autant d'unités, qu'il y a dans ΕΖ de nombres égaux à Δ. Partageons ΒΓ en ses unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, et partageons ΕΖ en nombres égaux à Δ, et que ces nombres soient ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ; la quantité des unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ sera égale à la quantité des nombres ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. Puisque les unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ sont égales entr'elles, que les nombres ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ sont égaux entr'eux, et que la quantité des unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ est égale à la quantité des nombres ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ, l'unité ΒΗ sera au nombre ΕΚ comme l'unité ΗΘ est au nombre ΚΛ, et comme l'unité ΘΓ est au nombre ΛΖ. Donc un antécédent sera à son conséquent comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 7); donc l'unité ΒΗ est au nombre ΕΚ comme ΒΓ est

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 413

τὸν EZ. Ἴση δὲ ἡ BH μονὰς τῇ A μονάδι, ὁ δὲ EK ἀριθμὸς τῷ Δ ἀριθμῷ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ BG πρὸς τὸν EZ· ἰσάκεις ἄρα ἡ A μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν<sup>5</sup> μετρεῖ καὶ ὁ BG τὸν EZ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

unitas ad EK numerum ita BF ad EZ. Æqualis autem BH unitas ipsi A unitati, ipse vero EK numerus ipsi Δ numero; est igitur ut A unitas ad Δ numerum ita BF ad EZ; æqualiter igitur A unitas ipsum Δ numerum metitur ac BG ipsum EZ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

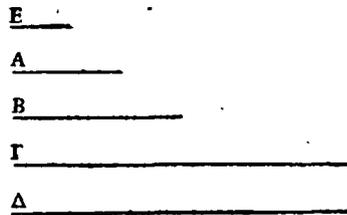
PROPOSITIO XVI.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινὰς· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Si duo numeri multiplicantes sese faciunt aliquos; facti ex ipsis æquales inter se erunt.

Ἐστώσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B, καὶ ὁ μὲν A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ B

Sint duo numeri A, B, et A quidem ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat, ipse vero B



τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ.

ipsum A multiplicans ipsum Δ faciat; dico æqualem esse Γ ipsi Δ.

à EZ. Mais l'unité BH est égale à l'unité A, et le nombre EK au nombre Δ; donc l'unité A est au nombre Δ comme BG est à EZ; donc l'unité A mesure le nombre Δ autant de fois que BG mesure EZ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XVI.

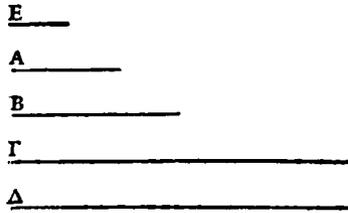
Si deux nombres se multipliant l'un et l'autre en produisent d'autres; les nombres produits seront égaux entr'eux.

Soient les deux nombres A, B; que A multipliant B produise Γ, et que B multipliant A produise Δ; je dis que Γ est égal à Δ.

414 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν<sup>1</sup> κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ· ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκεν· ὁ Α ἄρα τὸν

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; B igitur ipsum Γ metitur per ipsas in A unitates. Metitur autem et E unitas ipsum A numerum per ipsas in eo unitates; æqualiter igitur E unitas ipsum A numerum metitur ac B ipsum Γ; alterne igitur æqualiter E unitas ipsum B numerum metitur ac A ipsum Γ. Rursus, quoniam B ipsum A multiplicans



Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Β μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Β κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Δ. Ἰσάκεις δὲ ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ· ἰσάκεις ἄρα ὁ Α ἐκάτερον τῶν Γ, Δ μετρεῖ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

ipsum Δ fecit; ipse A igitur ipsum Δ metitur per ipsas in B unitates. Metitur autem et E unitas ipsum B per ipsas in eo unitates; æqualiter igitur E unitas ipsum B numerum metitur ac A ipsum Δ. Æqualiter autem E unitas ipsum B numerum metitur ac Δ ipsum Γ. Æqualiter igitur A utrumque ipsorum Γ, Δ metitur; æqualis igitur est Γ ipsi Δ. Quod oportebat ostendere.

Car, puisque A multiplie B a produit Γ; B mesure Γ par les unités qui sont en A (déf. 15. 7). Mais l'unité E mesure le nombre A par les unités qu'il contient; donc l'unité E mesure le nombre A autant de fois que B mesure Γ; donc, par permutation, l'unité E mesure le nombre B autant de fois que A mesure Γ (15. 7). De plus, puisque B multiplie A a produit Δ, A mesure Δ par les unités qui sont en B. Mais l'unité E mesure le nombre B par les unités qu'il contient; donc l'unité E mesure le nombre B autant de fois que A mesure Δ. Mais l'unité E mesure le nombre B autant de fois que A mesure Γ; donc A mesure également Γ et Δ; donc Γ est égal à Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

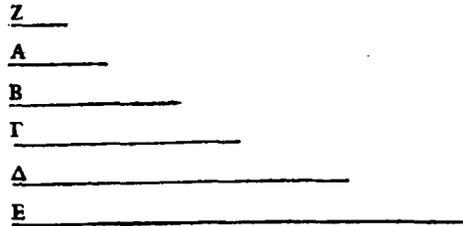
PROPOSITIO XVII.

Εάν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινὰς· οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔξουσι λόγον πολλαπλασιασθεῖσιν.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Γ πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε ποιείτω· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Si numerus duos numeros multiplicans facit aliquos, facti ex ipsis eandem rationem habebunt quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros B, Γ multiplicans ipsos Δ, Ε faciat; dicō esse ut B ad Γ ita Δ ad Ε.



Ἐπὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκειν· ὁ Β ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum Δ fecit; B igitur ipsum Δ metitur per ipsas in A unitates. Metitur autem et Z unitas ipsum A numerum per ipsas in eo unitates; æqualiter igitur Z unitas ipsum A numerum metitur ac B ipsum Δ; est igitur ut Z unitas ad A numerum ita B ad Δ. Propter eadem uti-

PROPOSITION XVII.

Si un nombre multipliant deux nombres en produit d'autres; les nombres produits auront la même raison que les nombres multipliés.

Que le nombre A multipliant les nombres B, Γ produise les nombres Δ, Ε; je dis que B est à Γ comme Δ est à Ε.

Car, puisque A multipliant B a produit Δ; B mesure Δ par les unités qui sont en A (déf. 15. 7). Mais l'unité Z mesure le nombre A par les unités qu'il contient; donc l'unité Z mesure le nombre A autant de fois que B mesure Δ; donc l'unité Z est au nombre A comme B est à Δ. Par la même raison,

## 416 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε<sup>3</sup>. ἑναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ὅπερ εἶδει δειξάει.

que et ut Z unitas ad A numerum ita Γ ad E; et ut igitur B ad Δ ita Γ ad E; alterne igitur est ut B ad Γ ita Δ ad E. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσιν τινὰς· οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν καὶ αὐτὸν ἔχουσι τὸν ἴσον τοῖς πολλαπλασιάσασιν.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμὸν τινα τὸν

### PROPOSITIO XVIII.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes faciunt aliquos; facti ex ipsis et eandem habebunt rationem quam multiplicantes.

Duo enim numeri A, B numerum aliquem Γ

A \_\_\_\_\_  
 B \_\_\_\_\_  
 Γ \_\_\_\_\_  
 Δ \_\_\_\_\_  
 Ε \_\_\_\_\_

Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε ποιήτωσαν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

multiplicantes ipsos Δ, Ε faciant; dico esse ut A ad B ita Δ ad E.

L'unité Z est au nombre A comme Γ est à E; donc B est à Δ comme Γ est à E; donc, par permutation, B est à Γ comme Δ est à E (13. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XVIII.

Si deux nombres multipliant un autre nombre en produisent d'autres; les nombres produits auront la même raison que les multiplicateurs.

Que les deux nombres A, B multipliant un nombre Γ produisent Δ, Ε; je dis que A est à B comme Δ est à E.

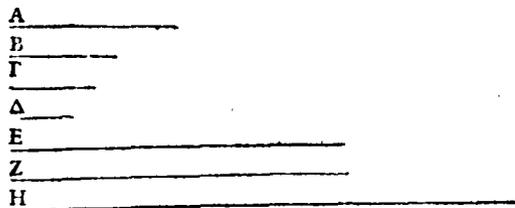
LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 417

Επί γάρ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Οἱπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Εάν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾖσιν, ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου γινόμενῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστώσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β,



Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε

Quoniam enim A ipsum Γ multiplicans ipsum Δ fecit; et Γ igitur ipsum Α multiplicans ipsum Δ fecit. Propter eadem utique et Γ ipsum Β multiplicans ipsum Ε fecit; numerus utique Γ duos numeros Α, Β multiplicans ipsos Δ, Ε fecit; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Ε. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XIX.

Si quatuor numeri proportionales sunt, ipse ex primo et quarto factus numerus æqualis erit ipsi ex secundo et tertio facto numero; et si ipse ex primo et quarto factus numerus æqualis est ipsi ex secundo et tertio, quatuor numeri proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales Α, Β,

Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et Α quidem ipsum Δ multiplicans ipsum Ε faciat, ipse vero Β

Puisque Α multipliant Γ produit Δ, Γ multipliant Α produit Δ (16. 7). Par la même raison Γ multipliant Β produit Ε; donc Γ multipliant les deux nombres Α, Β produit les nombres Δ, Ε; donc Α est à Β, comme Δ est à Ε (17. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIX.

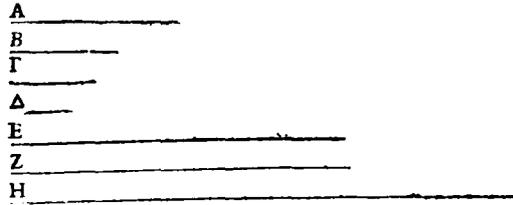
Si quatre nombres sont proportionnels, le nombre produit par le premier et par le quatrième sera égal au nombre produit par le second et par le troisième; et si le nombre produit par le premier et par le quatrième est égal au nombre produit par le second et par le troisième, les quatre nombres seront proportionnels.

Soient les quatre nombres proportionnels Α, Β, Γ, Δ; que Α soit à Β comme Γ

418 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ποιίτω, ὁ δὲ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ  
ποιίτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

ipsum Γ multiplicans faciat ipsum Ζ; dico æqua-  
lem esse Ε ipsi Ζ.



Οὐ γὰρ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιίτω.  
Ἐπεὶ οὖν ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πι-  
ποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πι-  
ποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ  
πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν· ἴστιν  
ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε.  
Ἀλλ' ὡς<sup>2</sup> ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β·  
καὶ ὡς ἄρα<sup>3</sup> ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε.  
Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η  
πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλα-  
σιάσας τὸν Ζ πεποίηκε· δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β  
ἀριθμὸν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς  
Η, Ζ πεποίηκασιν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν  
Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ Α  
πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα  
ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ· ὁ Η ἄρα  
πρὸς ἐκάτερον τῶν Ε, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον·  
ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ipsè enim Α ipsum Γ multiplicans ipsum Η  
faciat. Et quoniam Α ipsum Γ multiplicans ipsum  
Η fecit, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ε fecit;  
numerus utique Α duos numeros Γ, Δ multi-  
plicans ipsos Η, Ε fecit; est igitur ut Γ ad Δ  
ita Η ad Ε. Sed ut Γ ad Δ ita Α ad Β; et ut  
igitur Α ad Β ita Η ad Ε. Rursus, quoniam Α ipsum  
Γ multiplicans ipsum Η fecit, sed et Β ipsum Γ  
multiplicans ipsum Ζ fecit; duo utique numeri  
Α, Β numerum aliquem Γ multiplicantes ipsos  
Η, Ζ fecerunt; est igitur ut Α ad Β ita Η ad Ζ.  
Sed et ut Α ad Β ita Η ad Ε; et ut igitur Η ad Ε  
ita Η ad Ζ; ipse Η igitur ad utrumque ipsorum  
Ε, Ζ eandem habet rationem; æqualis igitur  
est Ε ipsi Ζ.

est à Δ; que Α multipliant Δ produise Ε, et que Β multipliant Γ produise Ζ; je  
dis que Ε est égal à Ζ.

Que Α multipliant Γ produise Η. Puisque Α multipliant Γ produit Η, et que  
Α multipliant Δ produit Ε, le nombre Α multipliant les deux nombres Γ, Δ pro-  
duit Η, Ε; donc Γ est à Δ comme Η est à Ε (17. 7). Mais Γ est à Δ comme Α est  
à Β; donc Α est à Β comme Η est à Ε. De plus, puisque Α multipliant Γ produit Η,  
et que Β multipliant Γ produit Ζ; les deux nombres Α, Β multipliant un nom-  
bre Γ produisent Η, Ζ (18. 7). Donc Α est à Β comme Η est à Ζ. Mais Α est à Β  
comme Η est à Ε; donc Η est Ε comme Η est Ζ; donc Η a la même raison avec  
chacun des nombres Ε, Ζ; donc Ε est égal à Ζ.

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 419

Ἐστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ Ε τῷ Ζ· λέγω ὅτι ἴσθιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε ποιήκεν· ἴσθιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Ἴσος δὲ ὁ Ε τῷ Ζ· ἴσθιν ἄρα ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ΑΛΛ' ὡς μὲν ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾖσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου<sup>2</sup>· ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ<sup>3</sup> τῶν ἄκρων ἴσων ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται<sup>4</sup>.

Ἐστῶσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ Α ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

De plus, que E soit égal à Z; je dis que A est à B comme Γ est à Δ.

Faisons la même construction. Puisque A multipliant les nombres Γ, Δ produit Η, Ε; le nombre Γ est à Δ comme Η est à Ε. Mais Ε est égal à Ζ; donc Η est à Ε comme Η est à Ζ. Mais Η est à Ε comme Γ est à Δ (18. 7); donc Γ est à Δ comme Η est à Ζ. Mais Η est à Ζ comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Γ est à Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

Si trois nombres sont proportionnels, le produit des extrêmes est égal au carré du moyen; et si le produit des extrêmes est égal au carré du moyen, les trois nombres seront proportionnels.

Soient Α, Β, Γ trois nombres proportionnels; que Α soit à Β comme Β est à Γ; je dis que le produit des nombres Α, Γ est égal au carré de Β.

Sit autem rursus æqualis Ε ipsi Ζ; dico esse ut Α ad Β ita Γ ad Δ.

Iisdem enim constructis, quoniam Α ipsos Γ, Δ multiplicans ipsos Η, Ε fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Η ad Ε. Æqualis autem Ε ipsi Ζ; est igitur ut Η ad Ε ita Η ad Ζ. Sed ut Η quidem ad Ε ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita Η ad Ζ. Ut autem Η ad Ζ ita Α ad Β; et ut igitur Α ad Β ita Γ ad Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XX.

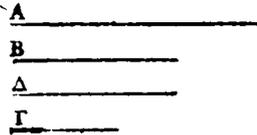
Si tres numeri proportionales sunt, ipse ex extremis æqualis est ipsi ex medio; si autem ipse ex extremis æqualis est ipsi ex medio, tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ; dico ipsum ex Α, Γ æqualem esse ipsi ex Β.

420 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Κείσθω γὰρ τῶν Β ἴσος ὁ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῶν ἐκ τῶν Β, Δ. Ο δὲ ἐκ τῶν Β, Δ ἴσος ἐστὶ τῶν ἀπὸ τοῦ Β· ἴσος γὰρ ὁ Β τῶν Δ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῶν ἀπὸ τοῦ Β.

Ponatur enim ipsi B æqualis Δ'; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ; ipse igitur ex A, Γ æqualis est ipsi ex B, Δ. Ipse autem ex B, Δ æqualis est ipsi ex B; æqualis enim B ipsi Δ; ipse igitur ex A, Γ æqualis est ipsi ex B.



Ἀλλὰ δὴ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἔστω τῶν ἀπὸ τοῦ Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ.

Sed et ipse ex A, Γ æqualis sit ipsi ex B; dico esse ut A ad B ita B ad Γ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῶν ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἴσος τῶν ὑπὸ<sup>5</sup> τῶν Β, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Ἴσος δὲ ὁ Β τῶν Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim ipse ex A, Γ æqualis est ipsi ex B, ipse autem ex B æqualis ipsi ex B, Δ; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Æqualis autem B ipsi Δ; est igitur ut A ad B ita B ad Γ. Quod oportebat ostendere.

Que Δ soit égal à B; A sera à B comme Δ est à Γ; donc le produit des nombres A, Γ est égal au produit des nombres B, Δ (19. 7). Mais le produit des nombres B, Δ est égal au carré de B; parce que B est égal à Δ; donc le produit des nombres A, Γ est égal au carré de B.

Mais que le produit des nombres A, Γ soit égal au carré de B; je dis que A est à B comme B est à Γ.

Car puisque le produit des nombres A, Γ est égal au carré de B, et que le carré de B est égal au produit des nombres B, Δ; le nombre A est à B comme Δ est à Γ (19. 7). Mais B est égal à Δ; donc A est à B comme B est à Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

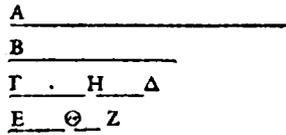
PROPOSITIO XXI.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα.

Ἐστωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, οἱ ΓΔ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἰσάκεις ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β.

Minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis metiuntur æqualiter eos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem.

Sint enim minimi numeri ΓΔ, ΕΖ ipsorum eandem rationem habentium cum Α, Β; dico æqualiter ΓΔ ipsum Α metiri ac ΕΖ ipsum Β.



Ο ΓΔ γὰρ τοῦ Α οὐκ ἔστι μέρη. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω καὶ ὁ ΕΖ ἄρα τοῦ Β τὰ αὐτὰ μέρη ἔστιν ἄπειρ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ὅσα ἄρα ἔστιν ἐν τῷ ΓΔ μέρη τοῦ Α, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΕΖ μέρη τοῦ Β. Διηρήσθω ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ τοῦ Α μέρη τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ τοῦ Β μέρη τὰ ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι οἱ ΓΗ, ΗΔ

Ipsæ enim ΓΔ ipsius Α non est partes. Si enim possibile, sit; et ΕΖ igitur ipsius Β eadem partes est quæ ΓΔ ipsius Α; quot igitur sunt in ΓΔ partes ipsius Α, tot sunt et in ΕΖ partes ipsius Β. Dividatur ΓΔ quidem in ipsas ipsius Α partes ΓΗ, ΗΔ, ipse vero ΕΖ in ipsas ipsius Β partes ΕΘ, ΘΖ; erit utique æqualis multitudo ipsarum ΓΗ, ΗΔ multitudini ipsarum ΕΘ, ΘΖ.

PROPOSITION XXI.

Les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit.

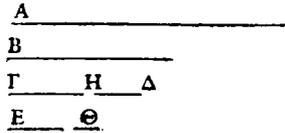
Que ΓΔ, ΕΖ soient les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec Α, Β; je dis que ΓΔ mesure Α autant de fois que ΕΖ mesure Β.

Le nombre ΓΔ n'est pas plusieurs parties de Α; car, que cela soit, s'il est possible; ΕΖ sera les mêmes parties de Β que ΓΔ l'est de Α (déf. 20. 7). Il y aura donc dans ΓΔ autant de parties de Α qu'il y dans ΕΖ de parties de Β. Partageons ΓΔ en parties de Α, et que ces parties soient ΓΗ, ΗΔ; et ΕΖ en parties de Β, et que ces parties soient ΕΘ, ΘΖ. Le nombre des parties ΓΗ, ΗΔ sera égal au nombre

422 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

είσιν ἀλλήλοις<sup>2</sup>, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις<sup>3</sup>, καὶ ἔστιν ἴσον πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΘΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΘΖ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαιτας τοὺς

Et quoniam æquales ΓΗ, ΗΔ sunt inter se, sunt autem et ΕΘ, ΘΖ numeri inter se æquales, et est æqualis multitudo ipsarum ΓΗ, ΗΔ multitudini ipsarum ΕΘ, ΘΖ; est igitur ut ΓΗ ad ΕΘ ita ΗΔ ad ΘΖ; erit igitur et ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes



ἐπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ· οἱ ΓΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς ΓΔ, ΕΖ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάττονας ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκεινται γὰρ οἱ ΓΔ, ΕΖ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΓΔ τοῦ Α· μέρος ἄρα· καὶ ὁ ΕΖ τοῦ Β τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ἰσάκεις ἄρα ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut ΓΗ ad ΕΘ ita ΓΔ ad ΕΖ; ipsi ΓΗ, ΕΘ igitur cum ipsis ΓΔ, ΕΖ in eadem ratione sunt, minores existentes ipsis, quod est impossibile; ponuntur enim ΓΔ, ΕΖ minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis; non igitur partes est ΓΔ ipsius Α; pars igitur; et ΕΖ ipsius Β eadem pars est quæ ΓΔ ipsius Α; æqualiter igitur ΓΔ ipsum Α metitur ac ΕΖ ipsum Β. Quod oportebat ostendere.

des parties ΕΘ, ΘΖ; et puisque les parties ΓΗ, ΗΔ sont égales entr'elles, que les parties ΕΘ, ΘΖ sont aussi égales entr'elles, et que le nombre des parties ΓΗ, ΗΔ est égal au nombre des parties ΕΘ, ΘΖ; la partie ΓΗ est à la partie ΕΘ comme ΗΔ est à ΘΖ; donc un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme de tous les antécédents est à la somme de tous les conséquents (12. 7); donc ΓΗ est à ΕΘ comme ΓΔ est à ΕΖ; donc les nombres ΓΗ, ΕΘ sont en même raison que les nombres ΓΔ, ΕΖ qui sont plus petits que ces derniers, ce qui est impossible; car on a supposé que ΓΔ, ΕΖ sont les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux; donc ΓΔ n'est pas plusieurs parties de Α. Donc il en est une partie; mais ΕΖ est la même partie de Β que ΓΔ l'est de Α; donc ΓΔ mesure Α autant de fois que ΕΖ mesure Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

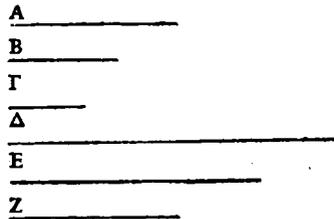
PROPOSITIO XXII.

Εάν ὡςι τρεῖς ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δίσσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἐστῶσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, οἱ A, B, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος οἱ Δ, E, Z, σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z, ὡς δὲ ὁ B πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E· λέγω ὅτι καὶ δίσσου ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z.

Si sunt tres numeri, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eadem ratione, sit autem perturbata eorum proportio; et ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint tres numeri A, B, Γ, et alii Δ, E, Z, ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eadem ratione, sit autem perturbata eorum proportio, ut A quidem ad B ita E ad Z, ut B vero ad Γ ita Δ ad E; dico et ex æquo esse ut A ad Γ ita Δ ad Z.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Z ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν B, E. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Γ, Δ ἴσος

Quoniam enim est ut A ad B ita E ad Z; ipse igitur ex A, Z æqualis est ipsi ex B, E. Rursus, quoniam ut B ad Γ ita Δ ad E; ipse igitur ex Γ, Δ æqualis est ipsi ex B, E. Os-

PROPOSITION XXII.

Si l'on a trois nombres et autant d'autres nombres, si ces nombres pris deux à deux sont en même raison, et si leur proportion est troublée, ces nombres seront en même raison par égalité.

Soient A, B, Γ trois nombres, et autant d'autres nombres Δ, E, Z; que ces nombres pris deux à deux soient en même raison, et que leur proportion soit troublée; c'est-à-dire que A soit à B comme E est à Z, et que B soit à Γ comme Δ est à E; je dis que par égalité A est à Γ comme Δ est à Z.

Car puisque A est à B comme E est à Z, le produit des nombres A, Z est égal au produit des nombres B, E (19. 7). De plus, puisque B est à Γ comme Δ est à E; le produit des nombres Γ, Δ est égal au produit des nombres B, E. Mais

## 424 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔστι τῷ ἰξ τῶν Β, Ε. Εδείχθη δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ζ ἴσος τῷ ἐκ τῶν Β, Ε· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ζ ἄρα ἴσος τῷ ἐκ τῶν Γ, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tensus est autem et ipse A, Z æqualis ipsi ex B, E; et ipse ex A, Z igitur æqualis ipsi ex Γ, Δ; est igitur ut A ad Γ ita Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοὶ εἰσὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Ἐστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ἐλάχιστοὶ εἰσὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

### PROPOSITIO XXIII.

Primi inter se numeri minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis.

Sint primi inter se numeri A, B; dico ipsos A, B minimos esse eorum eandem rationem habentium cum ipsis.

A \_\_\_\_\_  
 B \_\_\_\_\_  
 Γ \_\_\_\_\_  
 Δ \_\_\_\_\_  
 Ε \_\_\_\_\_

Εἰ γὰρ μὴ<sup>1</sup>, ἔσονται τινες τῶν Α, Β ἐλάσσονες<sup>2</sup> ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔντες τοῖς Α, Β. Ἐστωσαν οἱ Γ, Δ.

Si enim non, erunt aliqui ipsis A, B minores numeri in eadem ratione existentes cum ipsis A, B. Sint Γ, Δ.

on a démontré que le produit des nombres A, Z est égal au produit des nombres B, E; donc le produit des nombres A, Z est égal au produit des nombres Γ, Δ; donc A est à Γ comme Δ est à Z (19. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXIII.

Les nombres premiers entr'eux sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

Que A, B soient des nombres premiers entr'eux; je dis que les nombres A, B sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

Car s'ils ne le sont pas, il y aura des nombres plus petits que A, B qui auront la même raison avec A, B. Que ce soient Γ, Δ.

Ἐπεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὃ τε μίζων τὸν μίζωνα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν, ὃ τε ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον ἰσάκεις ἄρα ὁ  $\Gamma$  τὸν  $A$  μετρεῖ καὶ ὁ  $\Delta$  τὸν  $B$ . Ὁσάκεις δὴ ὁ  $\Gamma$  τὸν  $A$  μετρεῖ, τσαυταὶ μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ  $E$ · καὶ ὁ  $\Delta$  ἄρα τὸν  $B$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $E$  μονάδας. Καὶ ἔπει ὁ  $\Gamma$  τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $E$  μονάδας· καὶ ὁ  $E$  ἄρα τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Gamma$  μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ  $E$  τὸν  $B$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Delta$  μονάδας· ὁ  $E$  ἄρα τοὺς  $A, B$  μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἴσονται τινες τῶν  $A, B$  ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς  $A, B$ · οἱ  $A, B$  ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς. Ὅπερ ἴδι διῆξαι.

Et quoniam minimi numeri eorum eandem rationem habentium metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; æqualiter igitur  $\Gamma$  ipsum  $A$  metitur ac  $\Delta$  ipsum  $B$ . Quoties autem  $\Gamma$  ipsum  $A$  metitur, tot unitates sint in  $E$ ; et  $\Delta$  igitur ipsum  $B$  metitur per unitates quæ in  $E$ . Et quoniam  $\Gamma$  ipsum  $A$  metitur per unitates quæ in  $E$ ; et  $E$  igitur ipsum  $A$  metitur per unitates quæ in  $\Gamma$ . Propter eadem utique et  $E$  ipsum  $B$  metitur per unitates quæ in  $\Delta$ ; ipse  $E$  igitur ipsos  $A, B$  metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur erunt aliqui ipsis  $A, B$  minores numeri in eadem ratione existentes cum ipsis  $A, B$ ; ipsi  $A, B$  igitur minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis. Quod oportebat ostendere.

Puisque les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison (21. 7), le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent; le nombre  $\Gamma$  mesurera le nombre  $A$  autant de fois que  $\Delta$  mesurera  $B$ . Qu'il y ait dans  $E$  autant d'unités que  $\Gamma$  mesure de fois  $A$ ; le nombre  $\Delta$  mesurera  $B$  par les unités qui sont en  $E$ . Mais  $\Gamma$  mesure  $A$  par les unités qui sont en  $E$ ; donc le nombre  $E$  mesure  $A$  par les unités qui sont en  $\Gamma$ . Par la même raison,  $E$  mesure  $B$  par les unités qui sont en  $\Delta$ ; donc  $E$  mesure les nombres  $A, B$  qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc il n'y a point de nombres plus petits que  $A, B$  qui ayent la même raison avec les nombres  $A, B$ ; donc les nombres  $A, B$  sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

PROPOSITIO XXIV.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

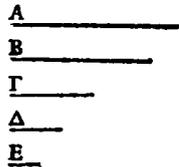
Ἐστῶσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς οἱ  $A, B$ · λέγω ὅτι οἱ  $A, B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μὴ εἴσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ  $A, B$ , μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ  $\Gamma$ . Καὶ ὅσάκις μὲν ὁ  $\Gamma$  τὸν  $A$  μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ  $\Delta$ , ὅσάκις δὲ ὁ  $\Gamma$  τὸν  $B$  μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ  $E$ .

Minimi numeri eorum eandem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt.

Sint minimi numeri eorum eandem rationem habentium cum ipsis  $A, B$ ; dico  $A, B$  primos inter se esse.

Si enim non sunt primi inter se  $A, B$ , metietur aliquis ipsos numerus. Metiatur, et sit  $\Gamma$ . Et quoties  $\Gamma$  quidem ipsum  $A$  metitur, tot unitates sint in  $\Delta$ , quoties vero  $\Gamma$  ipsum  $B$  metitur, tot unitates sint in  $E$ .



Καὶ ἐπεὶ ὁ  $\Gamma$  τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Delta$  μονάδας· ὁ  $\Gamma$  ἄρα τὸν  $\Delta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $A$  πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ  $\Gamma$  τὸν  $E$  πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποιήκειν· ἀριθμὸς δὲ ὁ  $\Gamma$  δύο ἀριθμοὺς τοὺς  $\Delta, E$  πολλαπλασιάσας τοὺς

Et quoniam  $\Gamma$  ipsum  $A$  metitur per unitates quæ in  $\Delta$ ; ipse  $\Gamma$  igitur ipsum  $\Delta$  multiplicans ipsum  $A$  fecit. Propter eadem utique et  $\Gamma$  ipsum  $E$  multiplicans ipsum  $B$  fecit; numerus igitur  $\Gamma$  duos numeros  $\Delta, E$  multiplicans ipsos  $A, B$

PROPOSITION XXIV.

Les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux, sont premiers entr'eux.

Que  $A, B$  soient les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux; je dis que les nombres  $A, B$  sont premiers entr'eux.

Car si les nombres  $A, B$  ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit  $\Gamma$ . Qu'il y ait dans  $\Delta$  autant d'unités que  $\Gamma$  mesure de fois  $A$ , et qu'il y ait dans  $E$  autant d'unités que  $\Gamma$  mesure de fois  $B$ .

Puisque  $\Gamma$  mesure  $A$  par les unités qui sont dans  $\Delta$ , le nombre  $\Gamma$  multipliant  $\Delta$  produira  $A$ . Par la même raison,  $\Gamma$  multipliant  $E$  produit  $B$ ; donc le nombre  $\Gamma$  multipliant les deux nombres  $\Delta, E$  produira  $A, B$ ; donc  $\Delta$  est à  $E$  comme  $A$  est

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 427

A, B πεποιήκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Δ, Ε ἄρα τοῖς Α, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

fecit; est igitur ut Δ ad Ε ita Α ad Β; ipsi Δ, Ε igitur cum ipsis Α, Β in eadem ratione sunt, minores existentes ipsis, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β numeros numerus aliquis metietur; ipsi Α, Β igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

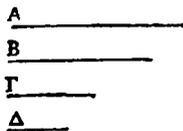
PROPOSITIO XXV.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, ὃ τὸν ἕνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Si duo numeri primi inter se sunt, numerus unum eorum metiens ad reliquum primus erit.

Ἐστῶσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, τὸν δὲ Α μετρίτω τις ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι καὶ οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

Sint duo numeri primi inter se Α, Β, ipsum autem Α metiatur aliquis numerus Γ; dico et ipsos Β, Γ primos inter se esse.



Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. Μετρίτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, ὁ δὲ

Si enim non sint Β, Γ primi inter se, metietur aliquis ipsos numerus. Metiatur, et sit Δ. Et quoniam Δ ipsum Γ metitur, ipse autem Γ

à Β (17. 7); donc les nombres Δ, Ε ont la même raison que les nombres Α, Β, qui sont plus petits qu'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres Α, Β; donc Α, Β sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXV.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le nombre qui mesure l'un d'eux sera premier avec l'autre.

Que les deux nombres Α, Β soient premiers entr'eux; et que quelque nombre Γ mesure Α; je dis que Β, Γ sont premiers entr'eux.

Car que Β, Γ ne soient pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera; que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure Γ, et que

428 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Γ τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ.  
Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ,  
πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύ-  
νατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις  
μετρήσει· οἱ Γ, Β ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους  
εἰσίν. Ὅπερ ἴδιαι δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινα ἀριθμὸν πρώτοι  
ᾧσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν  
πρώτος ἴσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς τινα ἀριθμὸν  
τὸν Γ πρώτοι ἴστωσαν', καὶ ὁ Α τὸν Β πολλα-  
πλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Γ, Δ  
πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

A  
B  
Γ  
Δ  
E  
Z

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Γ, Δ πρώτοι πρὸς ἀλλή-  
λους, μετρήσει τις τοὺς Γ, Δ<sup>2</sup> ἀριθμὸς. Με-  
τρέιτω, καὶ ἴστω ὁ Ε. Καὶ ἵπαι οἱ Γ, Α πρώτοι

Γ mesure A, le nombre Δ mesurera A. Mais il mesure B; donc Δ mesure A, B qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible (déf. 12. 7); donc quelque nombre ne mesurera pas A, B; donc Γ, B sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVI.

Si deux nombres sont premiers avec quelque nombre, le produit de ces deux nombres sera un nombre premier avec ce nombre.

Que les deux nombres A, B soient deux nombres premiers avec quelque nombre Γ, et que A multipliant B fasse Δ; je dis que Γ, Δ sont premiers entr'eux.

Car si Γ, Δ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre mesurera Γ, Δ. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit E. Puisque Γ, A sont premiers entr'eux,

ipsum A metitur; et Δ igitur ipsum A metitur. Metitur autem et ipsum B; ipse Δ igitur ipsos A, B metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur ipsos A, B numeros numerus aliquis metietur; ipsi Γ, B igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi sunt, et ipse ex ipsis factus ad eum primus erit.

Duo enim numeri A, B ad aliquem numerum Γ primi sint, et A ipsum B multiplicans ipsum Δ faciat; dico Γ, Δ primos inter se esse.

Si enim non sint Γ, Δ primi inter se, metietur aliquis ipsos Γ, Δ numerus. Metiatur, et sit E. Et quoniam Γ, A primi inter se sunt, ipsum

πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, τὸν δὲ Γ μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ Ε· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὁσαῖς δὲ<sup>3</sup> ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάζας τὸν Δ πεποιήκειν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἔ Α τὸν Β πολλαπλασιάζας τὸν Δ πεποιήκειν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Ζ τῷ ἐκ τῶν Α, Β. Ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τίσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον εἰσίν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὃ τε μίζων τὸν μίζωσα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτίστιν, ὃ τε ἠγούμενος τὸν ἠγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Β, Γ μετρεῖ πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Δ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

autem Γ metitur aliquis numerus Ε; ipsi Ε, Α igitur primi inter se sunt. Quoties autem Ε ipsum Δ metitur, tot unitates sint in Ζ; et Ζ igitur ipsum Δ metitur per unitates quæ in Ε; ipse Ε igitur ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit. Sed et Α ipsum Β multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis igitur est ipse ex Ε, Ζ ipsi ex Α, Β. Si autem ipse ex extremis æqualis est ipsi ex mediis, quatuor numeri proportionales sunt; est igitur ut Ε ad Α ita Β ad Ζ. Ipsi autem Α, Ε primi, ipsi vero primi et minimi, minimi autem numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse Ε igitur ipsum Β metitur. Metitur autem et ipsum Γ; ipse Ε igitur ipsos Β, Γ metitur primos existentes inter se, quod est impossibile. Non igitur ipsos Γ, Δ numeros numerus aliquis metietur; ipsi Γ, Δ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

et qu'un nombre Ε mesure Γ, les nombres Ε, Α seront premiers entr'eux (25. 7). Qu'il y ait dans Ζ autant d'unités que Ε mesure de fois Δ; le nombre Ζ mesurera Δ par les unités qui sont dans Ε; donc Ε multipliant Ζ produira Δ. Mais Α multipliant Β produit Δ; donc le produit de Ε par Ζ est égal au produit de Α par Β. Mais lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre nombres sont proportionnels (19. 7); donc Ε est à Α comme Β est à Ζ. Mais les nombres Α, Ε sont premiers entr'eux; et les nombres premiers entr'eux sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (23. 7), et les nombres qui sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, mesurent également ceux qui ont la même raison (21. 7), le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent; donc Ε mesure Β; mais il mesure Γ; donc Ε mesure les nombres Β, Γ qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible. Donc quelque nombre ne mesurera pas Γ, Δ; donc Γ, Δ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

PROPOSITIO XXVII.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἴσται.

Si duo numeri primi inter se sunt, ipse ex uno ipsorum factus ad reliquum primus erit.

Ἐστώσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Γ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ.

Sint duo numeri primi inter se Α, Β, et Α se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ, Β primos inter se esse.

$$\begin{array}{r} \underline{A} \\ \underline{B} \\ \underline{\Gamma} \\ \underline{\Delta} \end{array}$$

Κείσθω γὰρ τῷ Α ἴσος ὁ Δ. Καὶ ἔπει οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἴσος δὲ ὁ Α τῷ Δ· καὶ οἱ Δ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Δ, Α πρὸς τὸν Β πρῶτος ἐστί· καὶ ὁ ἐκ τῶν Δ, Α ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Β πρῶτος ἴσται. Ὁ δὲ ἐκ τῶν Α, Δ γενόμενος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ Γ· οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ponatur enim ipsi Α æqualis Δ. Et quoniam Α, Β primi inter se sunt, æqualis autem Α ipsi Δ; et Δ, Β igitur primi inter se sunt; uterque igitur ipsorum Δ, Α ad Β primus est; et ipse ex Δ, Α igitur factus ad ipsum Β primus erit. Ipse autem ex Α, Δ factus numerus est Γ; ipsi Γ, Β igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXVII.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le carré de l'un d'eux est premier avec l'autre.

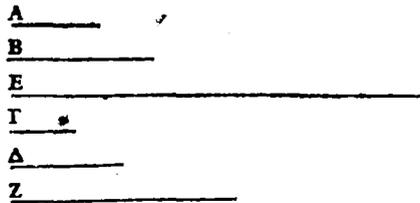
Que les deux nombres Α, Β soient premiers entr'eux, et que Α multiplié par lui-même produise Γ; je dis que Γ, Β sont premiers entr'eux.

Que Δ soit égal à Α. Puisque Α, Β sont premiers entr'eux, et que Α est égal à Δ, les nombres Δ, Β sont premiers entr'eux; donc chacun des nombres Δ, Α est premier avec Β; donc le produit de Δ par Α sera premier avec Β (26. 7). Mais le produit de Α par Δ est Γ; donc les nombres Γ, Β sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς, ἀμφοτέ-  
ροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ᾧσι· καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν  
γενόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ  $A, B$  πρὸς δύο ἀριθμοὺς  
τοὺς  $\Gamma, \Delta$ , ἀμφοτέροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι  
ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν  $A$  τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας  
τὸν  $E$  ποιείτω, ὁ δὲ  $\Gamma$  τὸν  $\Delta$  πολλαπλασιάσας  
τὸν  $Z$  ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ  $E, Z$  πρῶτοι πρὸς  
ἀλλήλους εἰσίν.



Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν  $A, B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$   
πρῶτός ἐστι, καὶ ὁ ἐκ τῶν  $A, B$  ἄρα γενόμενος  
πρὸς τὸν  $\Gamma$  πρῶτος ἔσται<sup>1</sup>. Ὁ δὲ ἐκ τῶν  $A, B$   
γενόμενός ἐστιν ὁ  $E$ · οἱ  $E, \Gamma$  ἄρα πρῶτοι πρὸς  
ἀλλήλους εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ<sup>2</sup>  $E, \Delta$   
πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἑκάτερος ἄρα τῶν  
 $\Gamma, \Delta$  πρὸς τὸν  $E$  πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ἐκ τῶν

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad  
utrumque, primi sunt; et ipsi ex ipsis facti  
primi inter se erunt.

Duo enim numeri  $A, B$  ad duos numeros  
 $\Gamma, \Delta$ , uterque ad utrumque, primi sint, et  
 $A$  quidem ipsum  $B$  multiplicans ipsum  $E$  faciat,  
ipse vero  $\Gamma$  ipsum  $\Delta$  multiplicans ipsum  $Z$  faciat;  
dico  $E, Z$  primos inter se esse.

Quoniam enim uterque ipsorum  $A, B$  ad  $\Gamma$   
primus est, et ipse ex  $A, B$  igitur factus ad  $\Gamma$   
primus erit. Ipse autem ex  $A, B$  factus est  $E$ ;  
ipsi  $E, \Gamma$  igitur primi inter se sunt. Propter  
eamdem utique  $E, \Delta$  primi inter se sunt; uter-  
que igitur ipsorum  $\Gamma, \Delta$  ad  $E$  primus est; et  
ipse ex  $\Gamma, \Delta$  igitur factus ad  $E$  primus erit.

PROPOSITION XXVIII.

Si deux nombres sont premiers avec deux autres, l'un et l'autre avec l'un  
et l'autre, leurs produits seront premiers entr'eux.

Que les deux nombres  $A, B$  soient premiers avec les deux nombres  $\Gamma, \Delta$ , l'un  
et l'autre avec l'un et l'autre; que  $A$  multipliant  $B$  produise  $E$ , et que  $\Gamma$  multipliant  
 $\Delta$  produise  $Z$ ; je dis que les nombres  $E, Z$  sont premiers entr'eux.

Puisque chacun des nombres  $A, B$  est premier avec  $\Gamma$ , le produit de  $A$  par  $B$   
sera premier avec  $\Gamma$  (26. 7). Mais le produit de  $A$  par  $B$  est  $E$ ; donc les nombres  
 $E, \Gamma$  sont premiers entr'eux. Par la même raison  $E, \Delta$  sont premiers entr'eux;  
donc chacun des nombres  $\Gamma, \Delta$  est premier avec  $E$ ; donc le produit de  $\Gamma$  par  $\Delta$

432 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Γ, Δ ἄρα γεόμενος πρὸς τὸν Ε πρῶτος ἔσται. Οὐδὲ ἐκ τῶν Γ, Δ γεόμενος ἔστιν ὁ Ζ· οἱ Ε, Ζ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

Ipsa autem ex Γ, Δ factus est Ζ; ipsi Ε, Ζ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

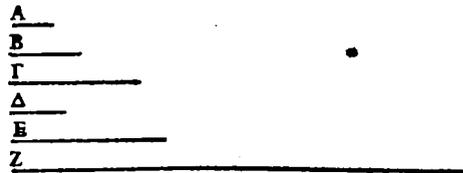
PROPOSITIO XXIX.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινὰς<sup>1</sup>, οἱ γεόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γεομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσι τινὰς, καμῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ αἰεὶ περὶ τοῦ ἀκροῦ τοῦτο συμβαίνει.

Si duo numeri primi inter se sint, et multiplicans uterque se ipsum faciat aliquos, facti ex ipsis primi inter se erunt; et si ipsi a principio factos multiplicantes faciant aliquos, et illi primi inter se erunt; et semper circa extremos hoc continget.

Ἐστώσαν ἀριθμοὶ δύο<sup>2</sup> πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν

Sint duo numeri Α, Β primi inter se, et Α se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat, ipsum



Γ ποιείτω, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν μὲν<sup>3</sup> πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ τε Γ, Ε καὶ οἱ Δ, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

autem Γ multiplicans ipsum Ε faciat, ipse autem Β quidem se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ζ faciat; dico et ipsos Γ, Ε et ipsos Δ, Ζ primos inter se esse.

sera premier avec Ε (16. 7). Mais le produit de Γ par Δ est Ζ; donc les nombres Ε, Ζ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, et si ces nombres étant multipliés par eux-mêmes font des nombres, les produits de ces nombres seront premiers entr'eux; et si les nombres proposés multipliant les produits font d'autres nombres, ces derniers seront aussi premiers entr'eux, et il en sera toujours ainsi pour les derniers nombres qui auront été produits.

Que les deux nombres Α, Β soient premiers entr'eux, que Α étant multiplié par lui-même fasse Γ, que Α multipliant Γ fasse Ε, que Β étant multiplié par lui-même fasse Δ, que Β multipliant Δ fasse Ζ; je dis que Γ, Ε et Δ, Ζ sont premiers entr'eux.

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 433

Ἐπεὶ γὰρ οἱ  $A, B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ  $A$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποιήκεν· οἱ  $\Gamma, B$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Ἐπεὶ οὖν οἱ  $\Gamma, B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ  $B$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποιήκεν, οἱ  $\Gamma, \Delta$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Πάλιν, ἔπει οἱ  $A, B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ  $B$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποιήκει· οἱ  $A, \Delta$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ  $A, \Gamma$  πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς  $B, \Delta$  ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι εἰσὶ· καὶ ὁ ἐκ τῶν  $A, \Gamma$  ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν  $B, \Delta$  πρῶτός ἐστι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν  $A, \Gamma$  ὁ  $E$ , ὁ δὲ ἐκ τῶν  $B, \Delta$  ὁ  $Z$ · οἱ  $E, Z$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται· καὶ ἂν συναμφότερος πρὸς ἕνα τινὰ αὐτῶν πρῶτος ᾦ, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Puisque les nombres  $A, B$  sont premiers entr'eux, et que  $A$  étant multiplié par lui-même fait  $\Gamma$ , les nombres  $\Gamma, B$  sont premiers entr'eux (27. 7); et puisque  $\Gamma, B$  sont premiers entr'eux,  $B$  multiplié par lui-même fait  $\Delta$ , les nombres  $\Gamma, \Delta$  sont premiers entr'eux. De plus, puisque  $A, B$  sont premiers entr'eux, et que  $B$  multiplié par lui-même a fait  $\Delta$ , les nombres  $A, \Delta$  sont premiers entr'eux. Mais les deux nombres  $A, \Gamma$  sont premiers avec les deux nombres  $B, \Delta$ , l'un et l'autre avec l'un et l'autre; donc le produit de  $A$  par  $\Gamma$  est premier avec le produit de  $B$  par  $\Delta$  (28. 7.) Mais le produit de  $A$  par  $\Gamma$  est  $E$ , et le produit de  $B$  par  $\Delta$  est  $Z$ . Donc les nombres  $E, Z$  sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, leur somme sera un nombre premier avec chacun d'eux; et si leur somme est un nombre premier avec chacun d'eux, les deux nombres proposés seront premiers entr'eux.

Quoniam enim  $A, B$  primi inter se sunt, et  $A$  se ipsum multiplicans ipsum  $\Gamma$  fecit; ipsi  $\Gamma, B$  igitur primi inter se sunt. Et quoniam  $\Gamma, B$  primi inter se sunt, et  $B$  se ipsum multiplicans ipsum  $\Delta$  fecit, ipsi  $\Gamma, \Delta$  igitur primi inter se sunt. Rursus, quoniam  $A, B$  primi inter se sunt, et  $B$  se ipsum multiplicans ipsum  $\Delta$  fecit; ipsi  $A, \Delta$  igitur primi inter se sunt; et quoniam duo numeri  $A, \Gamma$  ad duos numeros  $B, \Delta$  uterque ad utrumque primi sunt; et ipse ex ipsis  $A, \Gamma$  igitur factus ad ipsum ex ipsis  $B, \Delta$  primus est. Et est ipse quidem ex  $A, \Gamma$  ipse  $E$ , ipse vero ex  $B, \Delta$  ipse  $Z$ ; ipsi  $E, Z$  igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

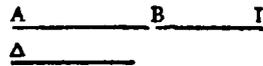
PROPOSITIO XXX.

Si duo numeri primi inter se sunt, et uterque simul ad utrumque eorum primus erit; et si uterque simul ad unum aliquem eorum primus est, et ipsi a principio numeri primi inter se erunt.

434 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ  $AB$ ,  $BΓ$ . λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρως ὁ  $ΑΓ$  πρὸς ἑκάτερον τῶν<sup>1</sup>  $AB$ ,  $BΓ$  πρῶτός ἐστιν.

Componantur duo numeri primi inter se  $AB$ ,  $BΓ$ ; dico et utrumque simul  $ΑΓ$  ad utrumque eorum  $AB$ ,  $BΓ$  primum esse.



Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ  $ΓΑ$ ,  $AB$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς  $ΓΑ$ ,  $AB$ <sup>2</sup> ἀριθμὸς. Μετρήτω, καὶ ἔστω ὁ  $\Delta$ . Ἐπεὶ οὖν ὁ  $\Delta$  τοὺς  $ΓΑ$ ,  $AB$  μετρεῖ<sup>3</sup> καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν  $BΓ$  μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν  $BA$ <sup>4</sup> ὁ  $\Delta$  ἄρα τοὺς  $AB$ ,  $BΓ$  μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς  $ΓΑ$ ,  $AB$  ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ  $ΓΑ$ ,  $AB$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ  $ΑΓ$ ,  $ΓB$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν<sup>5</sup>. ὁ  $ΓΑ$  ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  πρῶτός ἐστιν.

Si enim non sint  $ΓΑ$ ,  $AB$  primi inter se, metietur aliquis ipsos  $ΓΑ$ ,  $AB$  numerus. Metietur, et sit  $\Delta$ . Et quoniam  $\Delta$  ipsos  $ΓΑ$ ,  $AB$  metitur; et reliquum igitur  $BΓ$  metietur. Metitur autem et ipsum  $BA$ ; ipse  $\Delta$  igitur ipsos  $AB$ ,  $BΓ$  metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur  $ΓΑ$ ,  $AB$  numeros numerus aliquis metietur; ipsi  $ΓΑ$ ,  $AB$  igitur primi inter se sunt. Propter eadem utique et  $ΑΓ$ ,  $ΓB$  primi inter se sunt; ipse  $ΓΑ$  igitur ad utrumque ipsorum  $AB$ ,  $BΓ$  primus est.

Ἐστωσαν δὴ πάλιν οἱ  $ΓΑ$ ,  $AB$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους<sup>4</sup>. λέγω ὅτι καὶ οἱ  $AB$ ,  $BΓ$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Sint et  $ΓΑ$ ,  $AB$  primi inter se; dico et  $AB$ ,  $BΓ$  primos inter se esse.

Εἰ γὰρ μὴ εἴσι πρῶτοι οἱ  $AB$ ,  $BΓ$  πρὸς ἀλλήλους<sup>5</sup>, μετρήσει τις τοὺς  $AB$ ,  $BΓ$ <sup>6</sup> ἀριθμὸς. Μετρήτω, καὶ ἔστω ὁ  $\Delta$ . Καὶ ἵπεί ὁ  $\Delta$  ἑκάτερον

Si enim non sint primi  $AB$ ,  $BΓ$  inter se, metietur aliquis ipsos  $AB$ ,  $BΓ$  numerus. Metietur, et sit  $\Delta$ . Et quoniam  $\Delta$  utrumque eorum  $AB$ ,

Ajoutons les deux nombres premiers entr'eux  $AB$ ,  $BΓ$ ; je dis que leur somme  $ΑΓ$  est un nombre premier avec chacun des nombres  $AB$ ,  $BΓ$ .

Car si les nombres  $ΓΑ$ ,  $AB$  ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre mesurera  $ΓΑ$ ,  $AB$ . Que quelque nombre les mesure, et que ce soit  $\Delta$ . Puisque  $\Delta$  mesure  $ΓΑ$ ,  $AB$ , il mesurera le reste  $BΓ$ ; mais il mesure  $BA$ ; donc  $\Delta$  mesure  $AB$ ,  $BΓ$  qui sont deux nombres premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres  $ΓΑ$ ,  $AB$ ; donc  $ΓΑ$ ,  $AB$  sont premiers entr'eux. Par la même raison  $ΑΓ$ ,  $ΓB$  sont premiers entr'eux; donc le nombre  $ΓΑ$  est premier avec chacun des nombres  $AB$ ,  $BΓ$ .

De plus, que  $ΓΑ$ ,  $AB$  soient premiers entr'eux; je dis que  $AB$ ,  $BΓ$  sont premiers entr'eux.

Car si  $AB$ ,  $BΓ$  ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit  $\Delta$ . Puisque  $\Delta$  mesure chacun

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 435

τῶν AB, ΒΓ μετρεῖ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΑ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν AB· ὁ Δ ἄρα τοὺς ΓΑ, AB μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΒΓ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ AB, ΒΓ ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

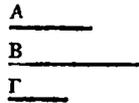
ΒΓ metitur; et totum igitur ΓΑ metietur. Metitur autem et ipsum AB; ipse Δ igitur ipsos ΓΑ, AB metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur ipsos AB, ΒΓ numeros numerus aliquis metietur; ipsi AB, ΒΓ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

Ἄπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν.  
Ἐστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Α, καὶ τὸν Β μὴ μετρεῖται· λέγω ὅτι οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.  
Sit primus numerus Α, et ipsum Β non metiatur; dico Β, Α primos inter se esse.



Εἰ γὰρ μὴ εἰσίν οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. Μετρεῖται, καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Α τὸν Β οὐ μετρεῖ· ὁ Γ ἄρα τῶ Α οὐκ ἐστὶν ὁ αὐτός. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τοὺς Β, Α μετρεῖ· καὶ τὸν Α ἄρα

Si enim non sint Β, Α primi inter se, metietur aliquis eos numerus. Metiatur, et sit Γ. Et quoniam Γ ipsum Β metitur, ipse autem Α ipsum Β non metitur; ipse Γ igitur cum ipso Α non est idem. Et quoniam Γ ipsos Β, Α metitur;

des nombres AB, ΒΓ, il mesurera leur somme ΓΑ. Mais il mesure AB; donc Δ mesure ΓΑ, AB, qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres AB, ΒΓ; donc AB, ΒΓ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXI.

Tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas.  
Soit le nombre premier Α, et que Α ne mesure pas Β; je dis que Β, Α sont premiers entr'eux.  
Car si Β, Α ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Γ. Puisque Γ mesure Β, et que Α ne mesure pas Β, le nombre Γ n'est pas le même nombre que Α. Et puisque Γ

436 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετρεῖ πρώτον ὄντα, μὴ ὡν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ἔπερ ἴστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Β, Α μετρήσει τις ἀριθμὸς· οἱ Α, Β ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

et ipsum A igitur metitur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; non igitur ipsos B, A metietur aliquis numerus; ipsi A, B igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛϚ.

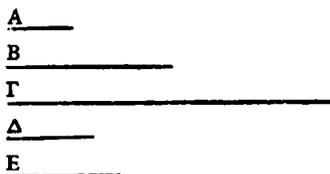
PROPOSITIO XXXII.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τινα, τὸν δὲ γεγόμενον ἐξ αὐτῶν μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς· καὶ ἓνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.

Si duo numeri sese multiplicantes faciant aliquem, eum vero factum ex ipsis metiatur aliquis primus numerus; et unum eorum qui a principio metietur.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν Γ ποιήτωσαν, τὸν δὲ Γ μετρήτω τις πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Δ ἓνα τῶν Α, Β μετρεῖ.

Duo enim numeri A, B sese multiplicantes ipsum Γ faciant, ipsum autem Γ metiatur aliquis primus numerus Δ; dico Δ unum eorum A, B metiri.



Τὸν γὰρ Α μὴ μετρεῖται, καὶ ἴστι πρῶτος ὁ Δ· οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· καὶ ὁσάκις ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴσ-

Ipsum enim A non metiatur, et est primus Δ; ipsi A, Δ igitur primi inter se sunt. Et quoties Δ ipsum Γ metitur, tot unitates sint in E. Et

mesure B, A, il mesure A qui est un nombre premier, quoique Γ ne soit pas le même que A, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas B, A; donc A, B sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXII.

Si deux nombres se multipliant l'un l'autre font un nombre, et si quelque nombre premier mesure leur produit, il mesurera un des nombres proposés.

Car que les deux nombres A, B se multipliant l'un l'autre fassent Γ, et que quelque nombre premier Δ mesure Γ; je dis que Δ mesure un des nombres A, B.

Qu'il ne mesure pas A; puisque Δ est un nombre premier, les nombres A, Δ seront premiers entr'eux (31. 7). Qu'il y ait autant d'unités dans E que Δ mesure

τωσαν ἐν τῷ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάζας τὸν Γ πεποιήκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάζας τὸν Γ πεποιήκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε τῷ ἐκ τῶν Α, Β· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Δ, Α πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὁ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ὁ Δ τὸν Β μὴ μετρῇ, τὸν Α μετρήσει· ὁ Δ ἄρα ἵνα τῶν Α, Β μετρεῖ. Ὅσον ἴδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἄπας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

de fois  $\Gamma$ . Puisque  $\Delta$  mesure  $\Gamma$  par les unités qui sont en  $E$ , le nombre  $\Delta$  multipliant  $E$  fera  $\Gamma$ . Mais  $A$  multipliant  $B$  fait  $\Gamma$ ; donc le produit de  $\Delta$  par  $E$  est égal au produit de  $A$  par  $B$ ; donc  $\Delta$  est à  $A$  comme  $B$  est à  $E$  (19. 7). Mais  $\Delta, A$  sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont avec eux la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc  $\Delta$  mesure  $B$ . Nous démontrerons de la même manière que si  $\Delta$  ne mesure pas  $B$ , il mesurera  $A$ ; donc  $\Delta$  mesure un des nombres  $A, B$ . Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier.

Que  $A$  soit un nombre composé; je dis que  $A$  est mesuré par quelque nombre premier.

quoniam  $\Delta$  ipsum  $\Gamma$  metitur per ipsas quæ in  $E$  unitates, ipse  $\Delta$  igitur ipsum  $E$  multiplicans ipsum  $\Gamma$  fecit. Sed quidem et  $A$  ipsum  $B$  multiplicans ipsum  $\Gamma$  fecit; æqualis igitur est ipse ex  $\Delta, E$ , ipsi ex  $A, B$ ; est igitur ut  $\Delta$  ad  $A$  ita  $B$  ad  $E$ . Ipsi autem  $\Delta, A$  primi, ipsi vero primi et minimi, ipsi autem minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse  $\Delta$  igitur ipsum  $B$  metitur. Similiter utique ostendemus et si  $\Delta$  ipsum  $B$  non metitur, ipsum  $A$  mensurum esse; ipse  $\Delta$  igitur unum eorum  $A, B$  metitur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXXIII.

Omnis compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur.

Sit compositus numerus  $A$ ; dico ipsum  $A$  a primo aliquo numero mensurari.

## 438 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Μετρεῖται, καὶ ἔστω ὁ Β. Καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Β, γιγνηὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν<sup>1</sup>. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Μετρεῖται, καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Β τὸν Α μετρεῖ, καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. Καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ,

Quoniam enim compositus est Α, metietur aliquis ipsum numerus. Metiatur, et sit Β. Et si quidem primus est Β, factum erit propositum. Si vero compositus, metietur aliquis eum numerus. Metiatur, et sit Γ. Et quoniam Γ ipsum Β metitur, ipse autem Β ipsum Α metitur; et Γ igitur ipsum Α metitur. Et si quidem primus

$$\begin{array}{l} \text{A} \\ \hline \text{B} \\ \hline \text{Γ} \\ \hline \end{array}$$

γιγνηὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν<sup>2</sup>. εἰ δὲ σύνθετος μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Τοιαύτης δὲ γινόμενης ἐπισκέψεως ληφθήσεται τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει. Εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν Α ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοὶ, ὧν ὁ<sup>3</sup> ἕτερος τοῦ ἑτέρου ἐλάσσων ἐστίν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς<sup>4</sup>. ληφθήσεται τις ἄρα πρῶτος ἀριθμός<sup>5</sup>, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει. Ἄπας ἄρα, καὶ τὰ ἕξῃς<sup>5</sup>.

est Γ, factum erit propositum; si vero compositus, metietur aliquis ipsum numerus. Tali utique factâ consideratione, relinquetur aliquis primus numerus, qui metietur eum qui præ se ipso, et qui ipsum Α metietur. Si enim non relinquatur, metientur ipsum Α numerum infiniti numeri quorum alter altero minor est, quod est impossibile in numeris. Relinquetur aliquis igitur primus qui metietur eum qui præ se ipso, et qui ipsum Α metietur. Omnis igitur, etc.

Puisque A est un nombre composé, quelque nombre le mesurera (déf. 13. 7). Que quelque nombre le mesure, et que ce soit B. Si B est un nombre premier, on aura ce qui est proposé; et si B est un nombre composé, quelque nombre le mesurera. Que quelque nombre le mesure, et que ce soit Γ. Puisque Γ mesure B, et que B mesure A, le nombre Γ mesurera A; et si Γ est un nombre premier, on aura ce qui est proposé. Si Γ est composé, quelque nombre le mesurera; d'après une telle considération, il restera quelque nombre premier qui mesurera le nombre qui est avant lui, et le nombre A. Car s'il ne restait pas de nombre premier, il y aurait une infinité de nombres qui mesureraient A, et qui seraient plus petits les uns que les autres, ce qui ne peut pas arriver dans les nombres (déf. 2. 7). Il restera donc quelque nombre premier qui mesurera le précédent, et le nombre A. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἀπας ἀριθμὸς ἢτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐστω ἀριθμὸς ὁ  $A$ . λέγω ὅτι ὁ  $A$  ἢτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ  $A$ , γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθεῖν<sup>1</sup>. Εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός. Ἀπας ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

PROPOSITIO XXXIV.

Omnis numerus vel primus est, vel a primo aliquo numero mensuratur.

Sit numerus  $A$ ; dico  $A$  vel primum esse, vel a primo aliquo mensurari.

Si quidem igitur primus est  $A$ , factum erit propositum. Si vero compositus, metietur aliquis eum primus numerus. Omnis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν, εὔρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, οἱ  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ . δεῖ δὲ εὔρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ .

Οἱ  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  γὰρ ἢτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ. Εἰ μὲν οὖν οἱ  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  πρῶτοι πρὸς

PROPOSITIO XXXV.

Numeris datis quotcumque, invenire minimos eorum eandem rationem habentium cum eis.

Sint dati quotcumque numeri  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ; oportet igitur invenire minimos eorum eandem rationem habentium cum ipsis  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ .

Ipsi  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  enim vel primi inter se sunt, vel non. Si quidem igitur  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  primi inter

PROPOSITION XXXIV.

Tout nombre est premier, ou il est mesuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre  $A$ ; je dis que  $A$  est un nombre premier, ou qu'il est mesuré par quelque nombre premier.

Si  $A$  est un nombre premier, on aura ce qui est proposé; s'il est composé, quelque nombre premier le mesurera (33. 7). Donc, etc.

PROPOSITION XXXV.

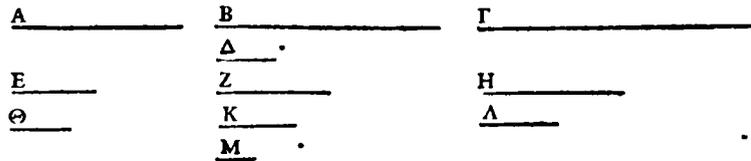
Tant de nombres qu'on voudra étant donnés, trouver les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

Soient  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  tant de nombres donnés qu'on voudra; il faut trouver les plus petits de ceux qui ont la même raison avec  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ .

Les nombres  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  sont ou premiers entr'eux, ou ne le sont pas. S'il sont

440 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀλλήλους εἰσὶν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς. se sunt, minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis.



Εἰ δὲ αὐτὸν εἰλήφθω τῶν A, B, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ ὅσάκις ὁ Δ ἕκαστον τῶν A, B, Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν E, Z, H καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν E, Z, H ἕκαστον τῶν A, B, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· οἱ E, Z, H ἄρα τοῖς A, B, Γ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ E, Z, H ἄρα τοῖς A, B, Γ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ E, Z, H ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων<sup>2</sup> τοῖς A, B, Γ, ἔσονται τινεῖς<sup>3</sup> τῶν E, Z, H ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς A, B, Γ. Ἐστωσαν οἱ Θ, Κ, Λ ἰσάκις ἄρα ὁ Θ τὸν A μετρεῖ καὶ ἑκάτερος τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν B, Γ. Ὅσάκις δὲ ὁ Θ τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν τῷ M καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν B, Γ

Si autem non; sumatur ipsorum A, B, Γ maxima communis mensura Δ, et quoties Δ unumquemque eorum A, B, Γ metitur, tot unitates sint in unoquoque eorum E, Z, H; et unusquisque igitur E, Z, H unumquemque eorum A, B, Γ metitur per unitates quæ in Δ; ipsi E, Z, H igitur ipsos A, B, Γ æqualiter metiuntur; ipsi E, Z, H igitur cum ipsis A, B, Γ in eadem ratione sunt. Dico utique et minimos. Si enim non sunt E, Z, H minimi eorum eandem rationem habentium cum ipsis A, B, Γ, erunt aliqui ipsis E, Z, H minores numeri in eadem ratione existentes cum ipsis A, B, Γ. Sint Θ, Κ, Λ; æqualiter igitur Θ ipsum A metitur ac uterque eorum Κ, Λ utrumque eorum B, Γ. Quoties autem Θ ipsum A metitur, tot unitates sint in M; et uterque igitur eorum Κ, Λ

premiers entr'eux, ils seront les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (25. 7).

S'ils ne le sont pas, prenons la plus grande commune mesure Δ des nombres A, B, Γ (3. 7), et qu'il y ait dans chacun des nombres E, Z, H autant d'unités que Δ mesure de fois chacun des nombres A, B, Γ. Chacun des nombres E, Z, H mesurera chacun des nombres A, B, Γ par les unités qui sont dans Δ; donc les nombres E, Z, H mesurent également les nombres A, B, Γ; donc les nombres E, Z, H sont en même raison que les nombres A, B, Γ (18. 7). Je dis de plus qu'ils sont les plus petits. Car si E, Z, H ne sont pas les plus petits de ceux qui ont avec A, B, Γ la même raison, il y aura quelques nombres plus petits que E, Z, H qui auront la même raison avec A, B, Γ; que ce soient Θ, Κ, Λ; le nombre Θ mesurera A autant de fois que chacun des nombres Κ, Λ mesure chacun des nombres B, Γ (21. 7). Qu'il y ait dans

μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $M$  μονάδας. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $\Theta$  τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $M$  μονάδας· καὶ ὁ  $M$  ἄρα τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Theta$  μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ  $M$  ἑκάτερον τῶν  $B, \Gamma$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν  $K, \Lambda$  μονάδας· ὁ  $M$  ἄρα τοὺς  $A, B, \Gamma$  μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $\Theta$  τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $M$  μονάδας· ὁ  $\Theta$  ἄρα τὸν  $M$  πολλαπλασιάσας τὸν  $A$  πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ  $E$  τὸν  $\Delta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $A$  πεποιήκει· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν  $E, \Delta$  τῷ ἐκ τῶν  $\Theta, M$ · ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $\Theta$  οὕτως ὁ  $M$  πρὸς τὸν  $\Delta$ . Μείζων δὲ ὁ  $E$  τοῦ  $\Theta$ · μείζων ἄρα καὶ ὁ  $M$  τοῦ  $\Delta$ , καὶ μετρεῖ τοὺς  $A, B, \Gamma$ , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὑπόκειται γὰρ ὁ  $\Delta$  τῶν  $A, B, \Gamma$  τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον· οὐκ ἄρα ἴσονται τινες τῶν  $E, Z, H$  ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς  $A, B, \Gamma$ · οἱ  $E, Z, H$  ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς  $A, B, \Gamma$ . Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

utrumque eorum  $B, \Gamma$  metitur per unitates quæ in  $M$ . Et quoniam  $\Theta$  ipsum  $A$  metitur per unitates quæ in  $M$ ; et  $M$  igitur ipsum  $A$  metitur per unitates quæ in  $\Theta$ . Propter eadem utique et  $M$  utrumque eorum  $B, \Gamma$  metitur per unitates quæ in ipsis  $K, \Lambda$ ; ipse  $M$  igitur ipsos  $A, B, \Gamma$  metitur; et quoniam  $\Theta$  ipsum  $A$  metitur per unitates quæ in  $M$ ; ipse  $\Theta$  igitur ipsum  $M$  multiplicans ipsum  $A$  fecit. Propter eadem utique et  $E$  ipsum  $\Delta$  multiplicans ipsum  $A$  fecit; æqualis igitur est ipse ex  $E, \Delta$  ipsi ex  $\Theta, M$ ; est igitur ut  $E$  ad  $\Theta$  ita  $M$  ad  $\Delta$ . Major autem  $E$  ipso  $\Theta$ ; major igitur et  $M$  ipso  $\Delta$ , et metitur ipsos  $A, B, \Gamma$ , quod est impossibile; ponitur enim  $\Delta$  eorum  $A, B, \Gamma$  maxima communis mensura; non igitur erunt aliqui ipsis  $E, Z, H$  minores numeri in eadem ratione in quâ  $A, B, \Gamma$ ; ipsi  $E, Z, H$  igitur minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis  $A, B, \Gamma$ . Quod oportebat ostendere.

$M$  autant d'unités que  $\Theta$  mesure de fois  $A$ ; chacun des nombres  $K, \Lambda$  mesurera chacun des nombres  $B, \Gamma$  par les unités qui sont en  $M$ . Et puisque  $\Theta$  mesure  $A$  par les unités qui sont en  $M$ , le nombre  $M$  mesurera  $A$  par les unités qui sont en  $\Theta$ . Par la même raison,  $M$  mesurera chacun des nombres  $B, \Gamma$  par les unités qui sont dans chacun des nombres  $K, \Lambda$ ; donc  $M$  mesure  $A, B, \Gamma$ . Mais  $\Theta$  mesure  $A$  par les unités qui sont en  $M$ ; donc  $\Theta$  multipliant  $M$  fait  $A$ . Par la même raison,  $E$  multipliant  $\Delta$  fait  $A$ ; donc le produit de  $E$  par  $\Delta$  est égal au produit de  $\Theta$  par  $M$ ; donc  $E$  est à  $\Theta$  comme  $M$  est à  $\Delta$  (19.7). Mais  $E$  est plus grand que  $\Theta$ ; donc  $M$  est plus grand que  $\Delta$ , et  $M$  mesure  $A, B, \Gamma$ , ce qui est impossible; car on a supposé que  $\Delta$  est la plus grande commune mesure des nombres  $A, B, \Gamma$ ; donc il n'y a pas de nombres plus petits que  $E, Z, H$  qui ayent la même raison que  $A, B, \Gamma$ ; donc  $E, Z, H$  sont les plus petits nombres qui ayent la même raison avec  $A, B, \Gamma$ . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 35'

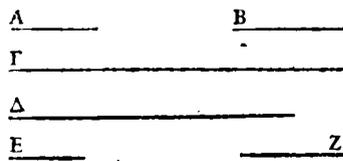
PROPOSITIO XXXVI.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμὸν.

Ἐστώσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ  $A, B$ . δεῖ δὴ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμὸν.

Duobus numeris datis, invenire quem minimum metiantur numerum.

Sint dati duo numeri  $A, B$ ; oportet igitur invenire quem minimum metiantur numerum.



Οἱ  $A, B$  γὰρ ἢτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν, ἢ οὐ. Ἐστώσαν πρότερον οἱ  $A, B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ  $A$  τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  ποιείτω· καὶ ὁ  $B$  ἄρα τὸν  $A$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποιήκεν· οἱ  $A, B$  ἄρα τὸν  $\Gamma$  μετροῦσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ  $A, B$  ἐλάσσονα ὄντα τοῦ  $\Gamma$ . Μετρεῖτωσαν τὸν  $\Delta$ . Καὶ ὅσάκις ὁ  $A$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ  $E$ . ὅσάκις δὲ ὁ  $B$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ  $Z$ . ὁ μὲν  $A$  ἄρα τὸν  $E$  πολλαπλασιάσας τὸν

Ipsi  $A, B$  enim vel primi inter se sunt, vel non. Sint primum  $A, B$  primi inter se, et  $A$  ipsam  $B$  multiplicans ipsum  $\Gamma$  faciat; et  $B$  igitur ipsam  $A$  multiplicans ipsum  $\Gamma$  fecit; ipsi  $A, B$  igitur ipsum  $\Gamma$  metiuntur. Dico utique et minimum. Si enim non, metientur aliquem numerum ipsi  $A, B$  minorem existentem ipso  $\Gamma$ . Metiantur  $\Delta$ . Et quoties  $A$  ipsum  $\Delta$  metitur, tot unitates sint in  $E$ ; quoties autem  $B$  ipsum  $\Delta$  metitur, tot unitates sint in  $Z$ ; ipse quidem  $A$  igitur ipsum  $E$  multiplicans ipsum  $\Delta$  fecit, ipse

PROPOSITION XXXVI.

Deux nombres étant donnés, trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Soient  $A, B$  les deux nombres donnés; il faut trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Car les nombres  $A, B$  sont premiers entr'eux, ou ne le sont pas. Que les nombres  $A, B$  soient d'abord premiers entr'eux, et que  $A$  multipliant  $B$  produise  $\Gamma$ ; le nombre  $B$  multipliant  $A$  produira  $\Gamma$  (16. 7); donc les nombres  $A, B$  mesureront  $\Gamma$ ; je dis que  $\Gamma$  est le plus petit. Car si cela n'est pas, les nombres  $A, B$  mesureront quelque nombre plus petit que  $\Gamma$ . Qu'ils mesurent  $\Delta$ . Qu'il y ait dans  $E$  autant d'unités que  $A$  mesure de fois  $\Delta$ ; et qu'il y ait dans  $Z$  autant d'unités que  $B$  mesure de fois  $\Delta$ ; donc  $A$  multipliant  $E$  produira  $\Delta$ , et  $B$  multipliant  $Z$  pro-

Δ πεποιήκεν, ὁ δὲ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῶ ἐκ τῶν Β, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσακίς, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὡς ἐπόμενος ἐπόμενον. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Β, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποιήκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Ε· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ, ὃ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετρήσουσι<sup>2</sup> τινὰ ἀριθμὸν ἐλάσσονα ἔντα τοῦ Γ, ὅταν οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσιν<sup>3</sup>. ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται.

Μὴ ἕστωσαν δὴ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφτωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, οἱ Ζ, Ε· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῶ ἐκ τῶν Β, Ζ. Καὶ ὁ Α τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν·

vero B ipsum Z multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis igitur est ipse ex A, E ipsi ex B, Z; est igitur ut A ad B ita Z ad E. Ipsi autem A, B primi, ipsi vero primi et minimi, minimi autem metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem; ipse B igitur ipsum E metitur, ut consequens consequentem. Et quoniam A ipsos B, E multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut B ad E ita Γ ad Δ; metitur autem B ipsum E; metitur igitur et Γ ipsum Δ, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B metiuntur aliquem numerum minorem existentem ipso Γ, quoniam A, B primi inter se sunt; ipse Γ igitur minimus existens ab ipsis A, B mensuratur.

Non sint autem A, B primi inter se, et sumantur minimi numeri Z, E eorum eandem rationem habentium quam ipsi A, B; æqualis igitur est ex A, E ipsi ex B, Z. Et A ipsum E multiplicans ipsum Γ faciat; et B igitur ipsum Z multiplicans ipsum Γ fecit. Ipsi A, B igitur ipsum Γ metiun-

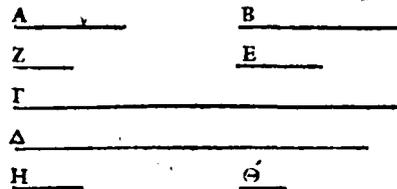
duira Δ; donc le produit de A par E est égal au produit de B par Z; donc A est à B comme Z est à E (19. 7). Mais les nombres A, B sont premiers entr'eux; les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont une même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit (21. 7); donc le nombre B mesure E, c'est-à-dire le conséquent le conséquent. Mais A multipliant B, E a fait Γ, Δ; donc B est à E comme Γ est à Δ (18. 7); mais B mesure E; donc Γ mesure Δ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres A, B ne mesureront pas quelque nombre plus petit que Γ, puisque A, B sont premiers entr'eux; donc Γ est le plus petit nombre qui soit mesuré par A, B.

Que les nombres A, B ne soient pas premiers entr'eux. Prenons les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec A, B (35. 7), et que ces nombres soient Z, E; le produit de A par E sera égal au produit de B par Z (19. 7). Que A multipliant E fasse Γ; donc B multipliant Z fera Γ; donc A, B mesurent Γ; je dis que Γ est le

444 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. Μετρήτωσαν τὸν Δ. Καὶ ὅσakis μὲν ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν τῷ Η, ὅσakis δὲ ὁ Β τὸν Δ

tur. Dico utique et minimum. Si enim non, metientur aliquem numerum ipsi Α, Β, minorem existentem ipso Γ. Metiantur ipsum Δ. Et quoties Α quidem ipsum Δ metitur, tot unitates sint in Η, quoties vero Β ipsum Δ metitur, tot



μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν τῷ Θ· ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἔστιν ὁ ἐκ τῶν Α, Η τῶ ἐκ τῶν Β, Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε· ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Οἱ δὲ Ζ, Ε ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Ε ἄρα τὸν Η μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Ε, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

unitates sint in Θ; ipse quidem Α igitur ipsum Η multiplicans ipsum Δ fecit, ipse vero Β ipsum Θ multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis est ipse ex Α, Η ipsi ex Β, Θ; est igitur ut Α ad Β ita Θ ad Η. Ut autem Α ad Β ita Ζ ad Ε; sed ut Α ad Β ita Θ ad Η; et ut igitur Ζ ad Ε ita Θ ad Η. Ipsi autem Ζ, Ε minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem; ipse Ε igitur ipsum Η metitur. Et quoniam Α ipsos Ε, Η multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut Ε ad Η ita Γ ad Δ. Ipse autem Ε ipsum Η metitur; et Γ

plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres Α, Β mesureront quelque nombre plus petit que Γ. Qu'ils mesurent Δ, et qu'il y ait dans Η autant d'unités, que Α mesure de fois Δ, et dans Θ autant d'unités que Β mesure de fois Δ. Le nombre Α multipliant Η fera Δ, et Β multipliant Θ fera Δ; donc le produit de Α par Η est égal au produit de Β par Θ; donc Α est à Β comme Θ est à Η (19. 7). Mais Α est à Β comme Ζ est à Ε; et Α est à Β comme Θ est à Η; donc Ζ est à Ε comme Θ est à Η. Mais Ζ, Ε sont les plus petits nombres, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit (21. 7); donc Ε mesure Η. Mais Α multipliant Ε, Η fait Γ, Δ; donc Ε est à Η comme Γ est à Δ (17. 7). Mais Ε mesure Η;

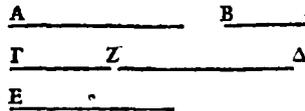
LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 445

Ο δὲ Β τὸν Η μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετρήσουσι τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα τοῦ Γ· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ΄.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινα μετῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσῃ.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμὸν τινα τὸν ΓΔ μετρήτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ.



Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, ὁ Ε τὸν ΖΔ μετῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε μετροῦσιν, ὁ δὲ Ε τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν ΔΖ μετροῦσι<sup>1</sup>. Μετροῦσι δὲ

igitur ipsum Δ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur Α, Β metientur aliquem numerum minorem ipso Γ; ipse Γ igitur minimus existens ab Α, Β mensuratur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXXVII.

Si duo numeri numerum aliquem metiantur, et minimus ab illis mensuratus eundem mensurabit.

Duo enim numeri Α, Β numerum aliquem ΓΔ metiantur, minimum autem ipsum Ε; dico et Ε ipsum ΓΔ metiri.

Si enim non metitur Ε ipsum ΓΔ, Ε metiens ΖΔ relinquat se ipso minorem ΓΖ. Et quoniam Α, Β ipsum Ε metiantur, ipse autem Ε ipsum ΔΖ metitur; et Α, Β igitur ipsum ΔΖ metiuntur.

donc Γ mesure Δ (déf. 20. 7), le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres Α, Β ne mesurent pas quelque nombre plus petit que Γ; donc Γ est le plus petit nombre qui soit mesuré par Α, Β. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXVII.

Si deux nombres mesurent quelque nombre, le plus petit qu'ils mesurent mesurera ce même nombre.

Que les deux nombres Α, Β mesurent quelque nombre ΓΔ, et que Ε soit le plus petit nombre qu'ils mesurent; je dis que Ε mesure ΓΔ.

Car si Ε ne mesure pas ΓΔ, que Ε mesurant ΖΔ laisse ΓΖ plus petit que lui-même. Puisque les nombres Α, Β mesurent Ε, que Ε mesure ΔΖ, les nombres

446 LE SEPTIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσουσιν, ἐλάττωνα ὄντα τοῦ Ε, ἕπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, μετρεῖ ἄρα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tur. Metiuntur autem et totum ΓΔ; et reliquum igitur ΓΖ metientur, minorem existentem ipso Ε, quod est impossibile; non igitur non metitur Ε ipsum ΓΔ, metitur igitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

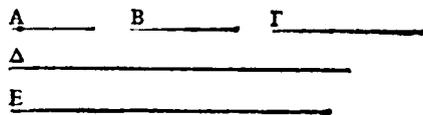
Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμὸν.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετρήσουσιν ἀριθμὸν.

PROPOSITIO XXXVIII.

Tribus numeris datis, invenire quem minimum metiantur numerum.

Sint dati numeri Α, Β, Γ; oportet igitur invenire quem minimum metientur numerum.



Εἰλήφθω γὰρ ὑπὸ δύο τῶν Α, Β ἐλάχιστος μετρούμενος ὁ Δ. Ὁ δὲ Γ τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖται πρότερον. Μετροῦσι δὲ καὶ οἱ Α, Β τὸν Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Δ μετρήσουσι<sup>3</sup>. Λέγω ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσιν τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β, Γ, ἐλάττωνα ὄντα τοῦ Δ. Μετρεῖτωσαν τὸν Ε. Ἐπεὶ οὖν οἱ Α, Β, Γ τὸν Ε μετροῦσι, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε

Sumatur enim a duobus Α, Β minimus mensuratus ipse Δ. Ipse utique Γ ipsum Δ vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Metiuntur autem et Α, Β ipsum Δ; ipsi Α, Β, Γ igitur ipsum Δ metientur. Dico et minimum. Si enim non, metientur aliquem numerum ipsi Α, Β, Γ, minorem existentem ipso Δ. Metiantur ipsum Ε. Et quoniam Α, Β, Γ ipsum Ε metiuntur, et Α, Β

Α, Β mesureront ΔΖ; mais ils mesurent ΓΔ tout entier; donc ils mesureront le reste ΓΖ plus petit que Ε, ce qui est impossible; donc Ε ne peut pas ne point mesurer ΓΔ; donc il le mesure. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXVIII.

Trois nombres étant donnés, trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Soient Α, Β, Γ les nombres donnés; il faut trouver le plus petit nombre qu'ils mesurent.

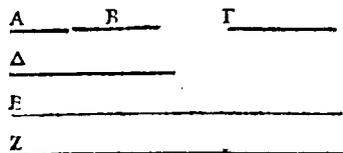
Prenons le plus petit nombre Δ mesuré par les deux nombres Α, Β (36. 7). Le nombre Γ mesurera Δ, ou ne le mesurera pas. Premièrement qu'il le mesure. Puisque les nombres Α, Β mesurent Δ, les nombres Α, Β, Γ mesureront Δ. Je dis aussi que Δ est le plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres Α, Β, Γ mesureront quelque nombre plus petit que Δ. Qu'ils mesurent Ε. Puisque les nombres Α, Β, Γ me-

● μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν A, B μετρούμενος τὸν E<sup>5</sup> μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν A, B μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν E μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάχιστον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, B, Γ μετρήσουσι<sup>6</sup> τινὰ ἀριθμὸν ἐλάχιστον ὄντα τοῦ Δ· οἱ A, B, Γ ἄρα ἐλάχιστον τὸν Δ μετρήσουσι<sup>7</sup>.

Μὴ μετρεῖτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ, καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ E. Ἐπεὶ οὖν οἱ A, B τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν E μετρεῖ· καὶ οἱ A, B ἄρα τὸν E μετρή-

igitur ipsum E metiuntur; et minimus igitur ab A, B mensuratus ipsum E metietur. Minimus autem ab A, B mensuratus est Δ; ipse Δ igitur ipsum E metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B, Γ metientur aliquem numerum minorem existentem ipso Δ; ipsi A, B, Γ igitur minimum Δ metiuntur.

Non metiatur autem rursus Γ ipsum Δ, et sumatur a Γ, Δ minimus mensuratus numerus E. Et quoniam A, B ipsum Δ metiuntur, ipse autem Δ ipsum E metitur; et A, B igitur ipsum E me-



σουσι<sup>8</sup>. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ<sup>9</sup> καὶ οἱ A, B, Γ ἄρα τὸν E μετρήσουσι<sup>10</sup>. Λέγω δὴ<sup>11</sup> ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσι τινὰ οἱ A, B, Γ, ἐλάχιστον ὄντα τοῦ E. Μετρεῖτωσαν τὸν Z. Καὶ ἐπεὶ οἱ A, B, Γ τὸν Z μετροῦσι· καὶ οἱ A, B ἄρα τὸν Z μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν A, B με-

tientur. Metitur autem et ipse Γ; et A, B, Γ igitur ipsum E metientur. Dico et minimum. Si enim non, metientur aliquem ipsi A, B, Γ, minorem existentem ipso E. Metiantur Z. Et quoniam A, B, Γ ipsum Z metiuntur; et A, B igitur ipsum Z metiuntur; et minimus igitur ab A, B mesu-

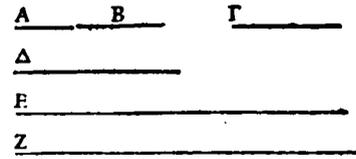
surent E, les nombres A, B mesureront E, et le plus petit nombre mesuré par A, B mesurera E (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par A, B est Δ; donc Δ mesure E, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres A, B, Γ ne mesurent pas un nombre plus petit que Δ; donc Δ est le plus petit nombre mesuré par les nombres A, B, Γ.

Que Γ ne mesure pas Δ. Prenons le plus petit nombre E mesuré par Γ, Δ (36. 7). Puisque A, B mesurent Δ, et que Δ mesure E, les nombres A, B mesureront E. Mais Γ mesure E; donc les nombres A, B, Γ mesureront E. Je dis que E est le plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres A, B, Γ mesureront quelque nombre plus petit que E. Qu'ils mesurent Z. Puisque les nombres A, B, Γ mesurent Z, les nombres A, B mesureront Z, et le plus petit nombre mesuré par AB me-

448 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τρούμενος τὸν Z μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν A, B μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Z μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Z· οἱ Δ, Γ ἄρα τὸν Z μετροῦσιν· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα<sup>12</sup> ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενος τὸν Z μετρήσει<sup>13</sup>. Ὁ δὲ ἐλά-

ratus ipsum Z metietur. Minimus autem ab A, B mensuratus est Δ; ipse Δ igitur ipsum Z metitur. Metitur autem et Γ ipsum Z; ipsi Δ, Γ igitur ipsum Z metiuntur; et minimus igitur a Δ, Γ mensuratus ipsum Z metietur. Ipse autem mini-



χιστος ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ E· ὁ E ἄρα τὸν Z μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, B, Γ μετρήσουσι<sup>14</sup> τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ E· ὁ E ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν A, B, Γ μετρεῖται. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

mus a Δ, Γ mensuratus est E; E igitur ipsum Z metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B, Γ metientur aliquem numerum minorem existentem ipso E; ipse E igitur minimus existens ab A, B, Γ mensuratur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

PROPOSITIO XXXIX.

Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπὸ τινος ἀριθμοῦ μετρεῖται, ὁ μετρούμενος ὁμῶνυμον μέρος ἔξει τῷ μετροῦντι.

Si numerus ab aliquo numero mensuratur, mensuratus denominatam partem habebit a metiente.

surera z. Mais le plus petit mesuré par A, B est Δ; donc Δ mesure z. Mais Γ mesure z; donc Δ, Γ mesurent z. Donc le plus petit nombre mesuré par Δ, Γ mesurera z (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Δ, Γ est E; donc E mesure z, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc les nombres A, B, Γ ne mesureront pas quelque nombre plus petit que E; donc E est le plus petit nombre qui soit mesuré par A, B, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

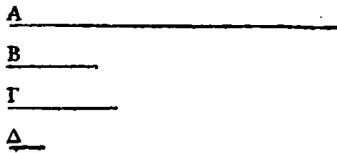
PROPOSITION XXXIX.

Si un nombre est mesuré par quelque nombre, le nombre mesuré aura une partie dénommée par le nombre qui le mesure.

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 449

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ὑπὸ τινος ἀριθμοῦ τοῦ Β μετρεῖσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὀμώνυμον μέρος ἔχει τῷ Β.

Numerus enim A ab aliquo numero B mensuretur; dico A denominatam partem habere ab ipso B.



Ὅσάκις γὰρ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Γ· καὶ ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α· ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Α. Ἡ δὲ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ μέρος ἐστὶν ὀμώνυμον αὐτῷ· καὶ ὁ Γ ἄρα τοῦ Α μέρος ἐστὶν ὀμώνυμον τῷ Β· ὥστε ὁ Α μέρος ἔχει τὸν Γ ὀμώνυμον ὄντα τῷ Β. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

Quoties enim B ipsum A metitur, tot unitates sint in Γ; et quoniam B ipsum A metitur per unitates quæ in Γ, metitur autem et Δ unitas ipsum Γ numerum per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur Δ unitas ipsum Γ numerum metitur ac B ipsum A; alterne igitur æqualiter Δ unitas ipsum B numerum metitur ac Γ ipsum A; quæ igitur pars est Δ unitas ipsius B numeri, eadem pars est et Γ ipsius A. Ipsa autem Δ unitas ipsius B numeri pars est denominata ab eo; et Γ igitur ipsius A pars est denominata ab ipso B; quare A partem habet Γ denominatam ab ipso B. Quod oportebat ostendere.

Que le nombre A soit mesuré par le nombre B; je dis que A a une partie dénommée par B.

Qu'il y ait dans Γ autant d'unités que B mesure de fois A. Puisque B mesure A par les unités qui sont en Γ, et que l'unité Δ mesure Γ par les unités qui sont en lui, l'unité Δ mesurera Γ autant de fois que B mesure A; donc, par permutation, l'unité Δ mesurera B autant de fois que Γ mesure A (15. 7); donc Γ est la même partie de A que l'unité Δ l'est de B. Mais l'unité Δ est une partie de B dénommée par lui; donc Γ est une partie de A dénommée par B; donc A a une partie Γ dénommée par B. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ΄.

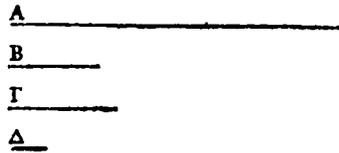
PROPOSITIO XL.

Εάν ἀριθμὸς μέρος ἔχη ὅτιοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α μέρος ἔχεται ὅτιοῦν τὸν Β, καὶ τῷ Β μέρει ὁμωνύμος ἔστω ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ.

Si numerus partem habeat quamcumque, mensurabitur a denominato a parte numero.

Numerus enim A partem habeat quamcumque B, et a B parte denominatus sit Γ; dico Γ ipsum A metiri.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Α μέρος ἐστὶ καὶ ὁμωνύμου τῷ Γ, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ μέρος ὁμωνύμου αὐτῷ· ὁ μέρος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ ἀριθμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Α· ἰσάκεις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α· ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim B ipsius A pars est et denominata ab ipso Γ, est autem Δ unitas ipsius Γ pars denominata ab eo; quæ igitur pars est Δ unitas ipsius Γ numeri eadem pars est et B ipsius A; æqualiter igitur Δ unitas ipsum Γ numerum metitur ac B ipsum A; alterne igitur æqualiter Δ unitas ipsum B numerum metitur ac Γ ipsum A; ipse Γ igitur ipsum A metitur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XL.

Si un nombre a une partie quelconque, ce nombre sera mesuré par le nombre dénommé par cette partie.

Que le nombre A ait une partie quelconque B, et que le nombre Γ soit dénommé par B; je dis que Γ mesure A.

Puisque B est une partie de A dénommée par Γ, et que l'unité Δ est une partie de Γ dénommée par lui, l'unité Δ est la même partie du nombre Γ que B l'est de A; donc l'unité Δ mesure le nombre Γ autant de fois que B mesure A; donc par permutation l'unité Δ mesure le nombre B autant de fois que Γ mesure A (15. 7); donc Γ mesure A. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μλ.

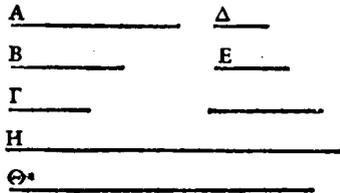
PROPOSITIO XLI.

Αριθμὸν εὐρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ἂν ἔξει τὰ δοθέντα μέρη.

Ἐστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὲ ἀριθμὸν εὐρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ἂν ἔξει τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ'.

Numerum invenire, qui minimus existens, habeat datas partes.

Sint datae partes Α, Β, Γ; oportet igitur numerum invenire, qui minimus existens habeat datas partes Α, Β, Γ.



Ἐστωσαν τοῖς Α, Β, Γ μέρεισιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί<sup>2</sup>, οἱ Δ, Ε, Ζ, καὶ εἰλήφθω δ<sup>3</sup> ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Η· ὁ Η ἄρα ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς Δ, Ε, Ζ. Τοῖς δὲ Δ, Ε, Ζ ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ Α, Β, Γ· ὁ Η ἄρα ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη. Λέγω δὲ ὅτι ἐλάχιστος ἂν. Εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμὸς ὃς ἔξει τὰ Α, Β, Γ μέρη, ὁ Θ<sup>5</sup>. Ἐπεὶ ὁ Θ ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων

Sint ab ipsis Α, Β, Γ partibus denominati numeri, Δ, Ε, Ζ, et sumatur ab ipsis Δ, Ε, Ζ minimus mensuratus numerus Η; ipse Η igitur denominatas partes habet ab ipsis Δ, Ε, Ζ. Ab ipsis autem Δ, Ε, Ζ denominatae partes sunt Α, Β, Γ. Ipse Η igitur habet Α, Β, Γ partes. Dico et minimum esse. Si enim non, sit aliquis Θ ipso Η minor numerus qui habeat Α, Β, Γ partes. Quoniam Θ habet Α, Β, Γ partes; ipse Θ igitur a

PROPOSITION XLI.

Trouver un nombre, qui étant le plus petit, ait des parties données.

Soient Α, Β, Γ les parties données; il faut trouver un nombre, qui étant le plus petit, ait les parties données Α, Β, Γ.

Que les nombres Δ, Ε, Ζ soient dénommés par les parties Α, Β, Γ; prenons le plus petit nombre Η qui est mesuré par Δ, Ε, Ζ (38. 7); le nombre Η aura des parties dénommées par Δ, Ε, Ζ (39. 7). Mais les parties dénommées par Δ, Ε, Ζ sont Α, Β, Γ; donc Η a les parties Α, Β, Γ. Je dis que Η est le plus petit. Car si cela n'est pas, soit un nombre Θ plus petit que Η qui ait les parties Α, Β, Γ. Puisque Θ a les parties Α, Β, Γ, le nombre Θ sera mesuré par les nombres dénommés par les parties Α, Β, Γ (40. 7). Mais les nombres dénommés

452 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς Α, Β, Γ μέρει. Τοῖς δὲ Α, Β, Γ μέρειν ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ εἰσιν οἱ Δ, Ε, Ζ· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ μετρεῖται, καὶ ἔστιν ἐλάσσων τοῦ Η, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμὸς, ὃς ἔξει τὰ Α, Β, Γ μέρη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

denominatis numeris ab Α, Β, Γ partibus mensurabitur. Ab ipsis autem Α, Β, Γ partibus denominati numeri sunt Δ, Ε, Ζ; ipse Θ igitur ab ipsis Δ, Ε, Ζ mensuratur, et est minor ipso Η, quod est impossibile; non igitur erit aliquis ipso Η minor numerus, qui habeat Α, Β, Γ partes. Quod oportebat ostendere.

par les parties Α, Β, Γ sont Δ, Ε, Ζ; donc Θ plus petit que Η sera mesuré par Δ, Ε, Ζ, ce qui est impossible; il n'y a donc pas quelque nombre plus petit que Η qui ait les parties Α, Β, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU SEPTIÈME LIVRE.

**COLLATIO**  
**CODICIS 190 BIBLIOTHECÆ**  
**IMPERIALIS,**  
**CUM EDITIONE OXONIÆ,**  
**CUI ADJUNGUNTUR**

LECTIONES VARIANTES ALIORUM CODICUM EJUSDEM BIBLIOTHECÆ, QUÆCUMQUE NON PARVI  
SUNT MOMENTI.

Litterà *a* antecedente designatur codex 190; litterà *b*, editio Oxoniæ; litterà *c*, codex 1038; litterà *d*, codex 2466; litterà *e*, codex 2344; litterà *f*, codex 2345; litterà *g*, codex 2342; litterà *h*, codex 2346; litterà *k*, codex 2481; litterà *l*, codex 2531; litterà *m*, codex 2547; litterà *n*, codex 2343 (\*).

~~~~~

**EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.**

**DEFINITIONES.**

| EDITIO PARISIENSIS.                    | CODEX 190.                         | EDITIO OXONIÆ.                                             |
|----------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| θ' (1) εἰρημνένην . . . . .            | <i>Idem. a</i> . . . . .           | deest. <i>b, d, e, f, h, k, l, m, n.</i>                   |
| ι' (2) ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἴστι·   | <i>Id. a, d, m.</i> . . . . .      | ἴστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν·<br><i>b, e, f, h, k, n.</i> |
| ιί (3) πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν | <i>Id. a, d, e, h, k, l, m.</i>    | desunt. <i>b, f, n.</i>                                    |
| ιή (4) τῆς . . . . .                   | <i>Id. a, d, e, f, h, k, l, n.</i> | deest. <i>b.</i>                                           |
| (5) αὐτῆς . . . . .                    | <i>Id. a, d, e, h, m.</i>          | αὐτῆς τῆς <i>b, h.</i>                                     |
| ιβ' (6) σχῆμα . . . . .                | <i>Id. a, d, e, f, k, l, m, n.</i> | deest. <i>b.</i>                                           |
| (7) ἡ μείζωνος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου. | <i>Id. a, d, e, h, k, l, m, n.</i> | desunt. <i>b, f.</i>                                       |
| κ' (8) Σχήματα εὐθύγραμμά . .          | <i>Id. a, d, m.</i> . . . . .      | Εὐθύγραμμα σχήματά <i>b, e, f, h, k, l, m, n.</i>          |

---

(\*) Initium codicis 1038 deest usque ad propositionem octavam secundi libri elementorum, et initium codicis 2342 usque ad propositionem trigesimam secundam primi libri.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                             |                                       |                             |
|-----------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|
| κδ' (9) τὰς . . . . .       | <i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i> | deest. <i>b.</i>            |
| κς' (10) ἀγίστους . . . . . | <i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m.</i>    | ἀγίστας <i>b, n.</i>        |
| κζ' (11) τι . . . . .       | δὲ. <i>a.</i> . . . . .               | τὲ <i>b, d, e, f, k, l.</i> |
| κθ' (12) τὰς . . . . .      | <i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i> | deest. <i>b.</i>            |
| λα' (13) εἰς . . . . .      | <i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i> | ἐπὶ <i>b.</i>               |

## POSTULATA.

|                                                                                                                                                                                                                                    |                                       |                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------------------|
| β' (1) ἐπὶ εὐθείας κατὰ τὸ συνεχές                                                                                                                                                                                                 | <i>Id. a, d.</i> . . . . .            | κατὰ τὸ συνεχές ἐπὶ εὐθείας <i>b, c, f, h, k.</i> |
| δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.                                                                                                                                                                                | <i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i> | deest. <i>b.</i>                                  |
| ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθειᾶ τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπέπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι. | <i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i> | deest. <i>b.</i>                                  |
| ς'. Καὶ δύο εὐθείας μὴ περιέχειν.                                                                                                                                                                                                  | <i>Id. a, e, h, k.</i> . . . . .      | deest. <i>b, d, f, k, l, m, n.</i>                |

Hoc postulatam in codice *e* exaratur eadem manu in postulatis, et alienâ in not. com.; in codice *f* alienâ in postulatis, et eadem in not. com.; in codicibus *h, k* in post. et in com. not. eadem manu exaratur.

## NOTIONES COMMUNES.

|                                 |                                          |                                                                                                                            |
|---------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| θ'. (1) ἴσσι. . . . .           | εἶναι. . . . .                           | ἴσσι.                                                                                                                      |
| ι'. deest. . . . .              | <i>Id. a, d, f, h, k, l, m, n.</i>       | ι'. καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσας ἀλλήλαις εἰσὶ. <i>b.</i>                                                                |
| ια'. deest. <i>a.</i> . . . . . | <i>Id. b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.</i> | ια'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθειᾶ ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκαλλομένης |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

αἱ δύο αὐταὶ εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον  
συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ  
μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν  
ἐλάσσονες γωνίαι. *b.*

ιβ'. deest. . . . . deest. *a.* . . . . . ιβ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρὶον οὐ πι-  
μίχουσιν. *b, d, f, h, k, l, m, n.*

PROPOSITIO I.

- |                                 |                             |                                    |
|---------------------------------|-----------------------------|------------------------------------|
| 1. Ἐπίσεις. . . . .             | <i>Id. a, d, e.</i> . . . . | deest. <i>b, f, h, k, l, m, n.</i> |
| 2. Εὐθεία . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                             |
| 3. Προσδιορισμὸς. . . . .       | <i>Id. a, d, e.</i> . . . . | deest. <i>b, f, h, k, m, n.</i>    |
| 4. πεπερασμένης . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                             |
| 5. Κατασκευή. . . . .           | <i>Id. a, d, e.</i> . . . . | deest. <i>b, f, h, k, m, n.</i>    |
| 6. Ἀποδείξεις. Καὶ ἐπιδ . . . . | <i>Id. a, d, e.</i> . . . . | Ἐπιδ οὖν <i>b, f, h, k, m, n.</i>  |
| 7. ἴση ἐστίν. . . . .           | <i>Id.</i> . . . . .        | ἴσθιν ἴση.                         |
| 8. Σύμπερασμα. . . . .          | <i>Id. a, d, e.</i> . . . . | deest. <i>b, f, h, k, m, n.</i>    |
| 9. συνίσταται . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . .        | συνίσταται                         |

PROPOSITIO II.

- |                                  |                      |                         |
|----------------------------------|----------------------|-------------------------|
| 1. τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τῇ ΒΓ εὐθείᾳ            |
| 2. ὁ . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                  |
| 3. τῷ Δ, καὶ διαστήματι . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ |
| 4. Πάλιν, . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | Καὶ πάλιν,              |

PROPOSITIO III.

- |                  |                      |        |
|------------------|----------------------|--------|
| 1. γὰρ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
|------------------|----------------------|--------|

PROPOSITIO IV.

- |                      |                      |        |
|----------------------|----------------------|--------|
| 1. ταῖς . . . . .    | deest. . . . .       | ταῖς   |
| 2. σημείων . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 3. ἴσθιν . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

PROPOSITIO VI.

| EDITIO PARIISIENSIS.            | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.        |
|---------------------------------|----------------------|-----------------------|
| 1. AB πλευρᾷ τῆ ΑΓ . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | ΑΓ πλευρᾷ τῆ ΑΒ       |
| 2. ΑΒ τῆ ΑΓ, μία . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | ΑΓ τῆ ΑΒ ἑτέρα        |
| 3. ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΒ   |
| 4. τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι. . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ ἐλάσσονι τὸ μείζον |

PROPOSITIO VII.

|                                                           |                                                           |                                |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------------|
| 1. αἰ . . . . .                                           | deest. . . . .                                            | αἰ                             |
| 2. τὰ Α, Β . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . .                                      | τὰ Α, Β ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις |
| 3. Καὶ αἰ ΒΓ, ΒΔ ἐκτελέσθωσαν<br>ἐπ' εὐθείας ἐπ' τὰ Ε, Ζ. | Desunt in omnibus codicibus et in omnibus<br>editionibus. |                                |

PROPOSITIO VIII.

|                  |                |     |
|------------------|----------------|-----|
| 1. τὰς . . . . . | deest. . . . . | τὰς |
| 2. αἰ . . . . .  | deest. . . . . | αἰ  |

PROPOSITIO IX.

|                       |                      |           |
|-----------------------|----------------------|-----------|
| 1. γὰρ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.    |
| 2. ἴση ἴστίν. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί ἴση. |

PROPOSITIO X.

|                                |                      |           |
|--------------------------------|----------------------|-----------|
| 1. εὐθείαν πεπεραμένην . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.    |
| 2. ἴση ἴστίν. . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί ἴση. |
| 3. ἴση ἴστίν . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί ἴση  |

PROPOSITIO XI.

|                                    |                      |                              |
|------------------------------------|----------------------|------------------------------|
| 1. ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἴστίν . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν |
| 2. εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | γραμμὴ ἤκται εὐθεῖα          |

PROPOSITIO XII.

|                                    |                      |                              |
|------------------------------------|----------------------|------------------------------|
| 1. εὐθεῖα . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                       |
| 2. εὐθεῖαι . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                       |
| 3. ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἴστίν . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν |

PROPOSITIO XIII.

| EDITIO PARISIENSIS.   | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE. |
|-----------------------|----------------------|----------------|
| 1. Εάν . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | Ὡς ἂν          |
| 2. ἤτοι . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | ἢ              |
| 3. εὐθεία . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.         |
| 4. ἴσαι εἰσί. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | εἰσὶν ἴσαι.    |
| 5. ἄρα . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα γωνίαι αἰ  |
| 6. Εάν . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | Ὡς ἂν          |

PROPOSITIO XV.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

|        |                                                                                                                                 |                                                                                                                                                           |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| deest. | deest. <i>a, h, i, k, n.</i><br>In codicibus <i>d, e, f</i><br>hoccorollarium exa-<br>ratum est in margine<br>vel inter lineas. | Εκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ<br>ἔσαι δὴ ποτὶ οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν<br>ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ<br>γωνίας τέτρασιν ἄρθαῖς ἴσαι<br>ποιήσουσι. <i>b, m.</i> |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

PROPOSITIO XVI.

|                               |                      |              |
|-------------------------------|----------------------|--------------|
| 1. προσεκβληθείσας, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | εκβληθείσας, |
| 2. γωνιῶν . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |
| 3. ἐπ' εὐθείας . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |

PROPOSITIO XVII.

|                  |                      |        |
|------------------|----------------------|--------|
| 1. γάρ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
|------------------|----------------------|--------|

PROPOSITIO XX.

|                      |                      |                                                  |
|----------------------|----------------------|--------------------------------------------------|
| 1. desunt. . . . .   | desunt. . . . .      | ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ<br>ΑΓΔ μείζων ἐστὶ. |
| 2. ΔΑ τῇ ΑΓ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ΔΒ ταῖς ΑΒ, ΑΓ.                                  |

PROPOSITIO XXI.

|                           |                      |             |
|---------------------------|----------------------|-------------|
| 1. πλευραὶ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.      |
| 2. πλευραὶ . . . . .      | deest. . . . .       | πλευραὶ     |
| 3. ταῦτα τοίνυν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τὰ αὐτὰ ἄρα |

## PROPOSITIO XXII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                         | CODEX 190.                                 | EDITIO OXONIE.                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1. εὐθείαις, . . . . .                                                                                      | deest. . . . .                             | εὐθείαις,                                     |
| 2. διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου<br>τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς<br>μείζονας εἶναι, πάντη μετα-<br>λαμβανομένας. | <i>Id.</i> . . . . .                       | desunt.                                       |
| 3. καὶ πάλιν, κέντρον μὲν τῷ Η,<br>διαστήματι δὲ                                                            | πάλιν, κέντρον μὲν τῷ Η,<br>καὶ διαστήματι | καὶ πάλιν, κέντρον μὲν τῷ Η,<br>διαστήματι δὲ |
| 4. συνίσταται . . . . .                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                       | συνίστηκει                                    |
| 5. οὖν . . . . .                                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                       | γὰρ                                           |

## PROPOSITIO XXIII.

|                  |                      |        |
|------------------|----------------------|--------|
| 1. δύο . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | αἱ δύο |
|------------------|----------------------|--------|

## PROPOSITIO XXIV.

|                                             |                                              |                                      |
|---------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. γωνία δὲ ἢ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας<br>τῆς ὑπὸ ΕΔΖ | ἢ δὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς<br>πρὸς τῷ Δ γωνίας | γωνία δὲ ἢ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας ὑπὸ<br>ΕΔΖ |
| 2. ἰστὶν . . . . .                          | deest. . . . .                               | ἰστὶν                                |
| 3. αὐτῇ . . . . .                           | αὐτῷ . . . . .                               | αὐτῇ                                 |
| 4. ἰστί . . . . .                           | deest. . . . .                               | ἰστί                                 |
| 5. ἢ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . .                         | γωνία ἢ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία                |
| 6. καὶ . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . .                         | deest.                               |

## PROPOSITIO XXV.

|                                                    |                      |                        |
|----------------------------------------------------|----------------------|------------------------|
| 1. ταῖς . . . . .                                  | deest. . . . .       | ταῖς                   |
| 2. διὰ βάσιν . . . . .                             | <i>Id.</i> . . . . . | βάσιν δὲ               |
| 3. ἢχη . . . . .                                   | deest. . . . .       | ἢχη                    |
| 4. ΒΑΓ . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . . | ΒΑΓ γωνία              |
| 5. ἀν ἢν . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . . | ἢ                      |
| 6. γωνία ἢ ὑπὸ ΒΑΓ . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | Η ὑπὸ ΒΑΓ γωνία        |
| 7. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἰστί ἢ ὑπὸ<br>ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ, | <i>Id.</i> . . . . . | ἀλλ' οὐδὲ μὴν ἐλάσσων, |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                    |                      |           |
|--------------------|----------------------|-----------|
| 8. ἀν ἤν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἦ         |
| 9. ΒΑΓ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | ΒΑΓ γωνία |

PROPOSITIO XXVI.

|                                            |                                                       |                                   |
|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. ταῖς . . . . .                          | <i>deest.</i> . . . . .                               | ταῖς                              |
| 2. ἦτοι . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . .                                  | ἦτον                              |
| 3. Ἐστω . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . .                                  | Ἐστώσαν                           |
| 4. ἴστί. . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . .                                  | ἴσται.                            |
| 5. ἴστί, . . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . .                                  | ἴστα,                             |
| 6. ἴσονται, . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . .                                  | ἴσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα,         |
| 7. τῆ . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . .                                  | <i>deest.</i>                     |
| 8. τῆ λοιπῆ γωνία . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . .                                  | λοιπῆ                             |
| 9. ἡ . . . . .                             | <i>Id.</i> . . . . .                                  | <i>deest.</i>                     |
| 10. Ἐστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἢ ΒΓ τῆς ΕΖ,  | <i>Id.</i> . . . . .                                  | Ἐστω εἰ δυνατόν μείζων ἢ ΒΓ,      |
| 11. ἴσονται, . . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . .                                  | ἴσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα          |
| 12. ΒΓΑ . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . .                                  | ΒΓΑ γωνία                         |
| 13. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἄρα τῆ ὑπὸ ΒΓΑ ἴστί ἴση· | <i>hæc verba in margine alienâ manu exarata sunt.</i> | <i>concordat cum edit. Paris.</i> |
| 14. ἴσον, καὶ λοιπῆ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .                                  | ἴσον ἴστί, καὶ ἡ λοιπῆ            |
| 15. ἴση. . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . .                                  | ἴση ἴστί.                         |

PROPOSITIO XXVII.

|                                                 |                      |                                                                        |
|-------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------------|
| 1. ΓΔ . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . . | ΓΔ εὐθεία.                                                             |
| 2. ἴση ἴστί τῆ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆ ὑπὸ ΕΖΗ, | <i>Id.</i> . . . . . | μείζων ἴστί τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΖΗ· ἀλλὰ καὶ ἴση, |

PROPOSITIO XXVIII.

|                         |                         |                                  |
|-------------------------|-------------------------|----------------------------------|
| 1. ποιῆ· . . . . .      | <i>deest.</i> . . . . . | ποιῆ·                            |
| 2. ἀπεναντίον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .    | ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη |

## PROPOSITIO XXIX.

| EDITIO PARISIENSIS.           | CODEX 190.      | EDITIO OXONIÆ.                                           |
|-------------------------------|-----------------|----------------------------------------------------------|
| 1. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη . . . | desunt. . . . . | καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη                                     |
| 2. τε . . . . .               | deest. . . . .  | τε                                                       |
| 3. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη . . . | desunt. . . . . | καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη                                     |
| 4. ἢ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ. .   | Id. . . . .     | ἢ ὑπὸ ΑΗΘ. Καὶ ἐπὶ μίζαν ἐστὶν<br>ἢ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ. |
| 5. Ἀλλὰ . . . . .             | Id. . . . .     | Ἀλλὰ καὶ                                                 |
| 6. αἰ . . . . .               | Id. . . . .     | καὶ αἰ                                                   |

## PROPOSITIO XXX.

|                              |                       |                  |
|------------------------------|-----------------------|------------------|
| 1. τὰς . . . . .             | deest. . . . .        | τὰς              |
| 2. ἰσθείας . . . . .         | δύο ἰσθείας . . . . . | ἰσθείας          |
| 3. αἰ ἄρα, καὶ τὰ ἰξῆς . . . | conclusio deest . . . | conclusio adest. |

## PROPOSITIO XXXI.

|                         |                                   |           |
|-------------------------|-----------------------------------|-----------|
| 1. σημείου, . . . . .   | σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπὶ<br>αὐτῆς, | σημείου,  |
| 2. ἔμπίπτουσα . . . . . | Id. . . . .                       | ἔμπισούσα |

## PROPOSITIO XXXII.

|                    |                |       |
|--------------------|----------------|-------|
| 1. ταῖς . . . . .  | deest. . . . . | ταῖς  |
| 2. ἑκτός . . . . . | deest. . . . . | ἑκτός |

## PROPOSITIO XXXIII.

|                             |                |                  |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| 1. τε . . . . .             | Id. . . . .    | deest.           |
| 1. γὰρ . . . . .            | deest. . . . . | γὰρ              |
| 3. ἐστίν . . . . .          | deest. . . . . | ἐστίν            |
| 4. τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ . . . . | deest. . . . . | τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ |

## PROPOSITIO XXXIV.

|                      |             |            |
|----------------------|-------------|------------|
| 1. χωρίον . . . . .  | Id. . . . . | deest.     |
| 2. πλευράν . . . . . | Id. . . . . | πλευράν τῆ |

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                                         |                                   |                                                      |
|---------------------------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------------|
| 3. καὶ ἐπὶ ἴση ἰστὶν . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . .              | desunt.                                              |
| 4. ὅλη τῆ ὑπὸ ΑΓΔ ἰστὶν ἴση. .                          | <i>Id.</i> . . . . .              | ὅλη τῆ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἰστὶν.                            |
| 5. δὲ . . . . .                                         | deest. . . . .                    | δὲ                                                   |
| 6. ἴση ἰστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ<br>βάσι τῆ ΒΔ ἴση ἰστί· | ἴση· καὶ βάσις ἡ ΑΓ τῆ<br>ΒΔ ἴση. | ἴση ἰστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ<br>βάσι τῆ ΒΔ ἴση ἰστί. |

PROPOSITIO XXXV.

|                                 |                      |                       |
|---------------------------------|----------------------|-----------------------|
| 1. ὄντα . . . . .               | deest. . . . .       | ὄντα                  |
| 2. EBZ. . . . .                 | EBZ παραλληλογράμμω. | EBZ.                  |
| 3 ἴση ἰστὶν ἡ ΑΔ τῆ ΒΓ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τῆ ΒΓ ἴση ἰστὶν ἡ ΑΔ. |
| 4. ἰστὶν ἴση. . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἰστὶν.            |
| 5. ἰστὶν ἴση. . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἰστί.             |
| 6. ἰστὶν ἴση, . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἰστὶν,            |
| 7. ἴσται. . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | ἰστί.                 |
| 8. ἰστὶν ἴσον. . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἰστί.            |

PROPOSITIO XXXVI.

|                        |                      |            |
|------------------------|----------------------|------------|
| 1. τῶν . . . . .       | deest. . . . .       | τῶν        |
| 2. ὄντα . . . . .      | deest. . . . .       | ὄντα       |
| 3. ἀλλὰ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | ἀλλὰ καὶ   |
| 4. τε . . . . .        | deest. . . . .       | τε         |
| 5. ἰστὶν ἴσον. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἰστί. |

PROPOSITIO XXXVII.

|                         |                      |                       |
|-------------------------|----------------------|-----------------------|
| 1. ὄντα . . . . .       | deest. . . . .       | ὄντα.                 |
| 2. E, Z, . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | E, Z σημεῖα,          |
| 3. εἰσιν ἴσα· . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον τὸ EBΓΑ τῶ ΔΒΓΖ, |
| 4. εἰσι . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ἰστί                  |

PROPOSITIO XXXVIII.

|                   |                      |        |
|-------------------|----------------------|--------|
| 1. ἰστὶν. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | εἰσίν. |
| 2. τὰ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                        |                |           |
|------------------------|----------------|-----------|
| 3. ὄντα . . . . .      | deest. . . . . | ὄντα      |
| 4. ἐπὶ . . . . .       | κατὰ . . . . . | ἐπὶ       |
| 5. αὐτὸ δίχα . . . . . | Id. . . . .    | δίχα αὐτὸ |
| 6. αὐτὸ δίχα . . . . . | Id. . . . .    | δίχα αὐτὸ |

PROPOSITIO XXXIX.

|                          |                       |              |
|--------------------------|-----------------------|--------------|
| 1. καὶ . . . . .         | Id. . . . .           | deest.       |
| 2. ἴσα τρίγωνα . . . . . | Id. . . . .           | τρίγωνα ἴσα  |
| 3. μέρη . . . . .        | μέρη τῆς ΒΓ . . . . . | μέρη         |
| 4. καὶ . . . . .         | Id. . . . .           | deest.       |
| 5. ἄρα . . . . .         | δὴ . . . . .          | ἄρα          |
| 6. ταῖς ΒΓ, ΑΕ. . . . .  | deest. . . . .        | ταῖς ΒΓ, ΑΕ. |
| 7. τρίγωνον . . . . .    | Id. . . . .           | deest.       |
| 8. ἴστιν . . . . .       | Id. . . . .           | deest.       |

PROPOSITIO XL.

|                                   |                |                       |
|-----------------------------------|----------------|-----------------------|
| 1. τῶν . . . . .                  | deest. . . . . | τῶν                   |
| 2. καὶ . . . . .                  | Id. . . . .    | καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, |
| 3. ἴσα τρίγωνα . . . . .          | Id. . . . .    | τρίγωνα ἴσα           |
| 4. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη . . . . . | deest. . . . . | καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη  |
| 5. ἄρα . . . . .                  | δὴ . . . . .   | ἄρα                   |
| 6. τριγώνω . . . . .              | deest. . . . . | τριγώνω               |
| 7. τρίγωνον . . . . .             | deest. . . . . | τρίγωνον              |
| 8. ἴστιν . . . . .                | Id. . . . .    | deest.                |
| 9. ἴστιν . . . . .                | Id. . . . .    | ἴστιν                 |
| 10. ἴστι παράλληλος . . . . .     | Id. . . . .    | παράλληλος ἴστι.      |

PROPOSITIO XLI.

|                               |                |                  |
|-------------------------------|----------------|------------------|
| 1. ἴστι . . . . .             | Id. . . . .    | ἴσται            |
| 2. τε . . . . .               | deest. . . . . | τε               |
| 3. παραλλήλοις ἴστω . . . . . | Id. . . . .    | ἴστω παραλλήλοις |
| 3. τρίγωνον . . . . .         | Id. . . . .    | deest.           |

PROPOSITIO XLII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                     |                |                      |
|-------------------------------------|----------------|----------------------|
| 1. γωνία εὐθυγράμμου . . . . .      | Id. . . . .    | εὐθυγράμμου γωνία.   |
| 2. γωνία εὐθυγράμμος ἢ Δ' . . . . . | Id. . . . .    | εὐθύγραμμος γωνία Δ' |
| 3. ἴση . . . . .                    | deest. . . . . | ἴση                  |
| 4. τρίγωνον . . . . .               | Id. . . . .    | deest.               |
| 5. συνίσταται . . . . .             | Id. . . . .    | συνιστάθη            |
| 6. ἢ τις . . . . .                  | Id. . . . .    | ἢ                    |

PROPOSITIO XLIII.

|                                                                               |             |                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------|-------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1. παραλληλόγραμμόν ἐστὶ τὸ ΕΚΘΑ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἴσιν ἢ ΑΚ, ἴσον ἄρα ἐστὶ | Id. . . . . | τὸ ΕΚΘΑ παραλληλόγραμμόν ἐστὶ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἢ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ |
| 2. τριγώνῳ . . . . .                                                          | Id. . . . . | deest.                                                            |
| 3. λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῶ τῶ ΗΔ παραπλήρωματι ἴσιν ἴσον.          | Id. . . . . | λοιπῶ ἄρα τῶ ΚΔ παραπλήρωματι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα.        |

PROPOSITIO XLIV.

|                               |             |                  |
|-------------------------------|-------------|------------------|
| 1. ὅσπερ . . . . .            | Id. . . . . | ὅσπερ            |
| 2. ἐπιπέτων . . . . .         | Id. . . . . | ἐπιπέτων         |
| 3. ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΒ ἄρα . . . . . | Id. . . . . | ἄρα ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΒ |
| 4. ἴσαι εἰσίν . . . . .       | Id. . . . . | ἴσαι εἰσίν       |
| 5. τὴν . . . . .              | Id. . . . . | deest.           |
| 6. τὰ . . . . .               | Id. . . . . | deest.           |
| 7. ἀλλὰ . . . . .             | Id. . . . . | ἀλλὰ καὶ         |
| 8. ἄρα . . . . .              | Id. . . . . | deest.           |

PROPOSITIO XLV.

|                                |             |                    |
|--------------------------------|-------------|--------------------|
| 1. γωνία εὐθυγράμμου . . . . . | Id. . . . . | εὐθυγράμμου γωνία. |
| 2. μὴν . . . . .               | Id. . . . . | deest.             |
| 3. τῇ δοθείσῃ . . . . .        | Id. . . . . | ἴση                |
| 4. ἴση ἐστὶ . . . . .          | Id. . . . . | ἴσιν ἴση           |
| 5. ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα . . . . .       | Id. . . . . | ἄρα ὑπὸ ΘΚΖ        |

464 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.

| EDITIO PARISIENSIS.   | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE. |
|-----------------------|----------------------|----------------|
| 6. ἴσιν ἴση. . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴσιν.      |
| 7. εὐθεία . . . . .   | εὐθείας . . . . .    | εὐθεία         |
| 8. ἴσιν . . . . .     | ἴσιν καὶ . . . . .   | ἴσιν           |
| 9. ἴσιν ἴσον. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἴσιν.     |
| 10. τῆ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.         |

PROPOSITIO XLVI.

|                   |                      |          |
|-------------------|----------------------|----------|
| 1. ἀλλὰ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἀλλὰ καὶ |
|-------------------|----------------------|----------|

PROPOSITIO XLVII.

|                                                               |                      |                |
|---------------------------------------------------------------|----------------------|----------------|
| 1. γωνίαν . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.         |
| 2. εὐθεία . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.         |
| 3. καὶ ἐπεὶ ἴση ἴσιν ἢ μὲν ΔΒ τῆ<br>ΒΓ, ἢ δὲ ΖΒ τῆ ΒΑ· δύο δὲ | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἐπεὶ δύο.  |
| 4. ἴση . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴσιν.      |
| 5. ἴση, . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσιν ἴση,      |
| 6. ἴσιν . . . . .                                             | deest. . . . .       | ἴσιν           |
| 7. εἰσι παραλλήλοις . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . . | παραλλήλοις ὡς |
| 8. τετράγωνον . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . . | τετράγωνον ΒΒ  |

PROPOSITIO XLVIII.

|                                |                      |                   |
|--------------------------------|----------------------|-------------------|
| 1. εὐθεία πρὸς ὀρθὰς . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | πρὸς ὀρθὰς εὐθεία |
| 2. ἴση . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσιν ἴση.         |
| 3. ἴση. . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσιν ἴση.         |

---

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

|                            |             |                     |
|----------------------------|-------------|---------------------|
| EDITIO PARISIENSIS.        | CODEX 190.  | EDITIO OXONIÆ.      |
| β' (1) παραλληλογράμμον ἐν | Id. . . . . | ἐν παραλληλογράμμον |

PROPOSITIO I.

|           |        |        |
|-----------|--------|--------|
| 1. τε ὑπὸ | Id.    | ὑπὸ τε |
| 2. τε ὑπὸ | Id.    | ὑπὸ τε |
| 3. ἔτι    | deest. | ἔτι    |
| 4. μὲν    | Id.    | deest. |
| 5. τῶν    | Id.    | deest. |
| 6. τὸ     | τῷ     | τὸ     |
| 7. τὸ     | τῷ     | τὸ     |
| 8. τὸ     | τῷ     | τὸ     |

PROPOSITIO II.

|                              |                              |                           |
|------------------------------|------------------------------|---------------------------|
| 1. τὰ                        | τὸ                           | τὰ                        |
| 2. περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα | περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον | περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα |
| 3. τῆς                       | Id.                          | τῶν                       |
| 4. τῶν                       | deest.                       | τῶν                       |
| 5. ἴστί                      | deest.                       | ἴστί                      |

PROPOSITIO III.

|                    |     |                 |
|--------------------|-----|-----------------|
| 1. τμηθῆ ὡς ἔτυχι, | Id. | ὡς ἔτυχι τμηθῆ, |
| 2. Γ'              | Id. | Γ σημείον       |
| 3. τῆς             | τοῦ | τῆς             |
| 4. διήχθω          | Id. | ἤχθω            |
| 5. τὸ              | Id. | deest.          |

PROPOSITIO IV.

| EDITIO PARISIENSIS.             | CODEX 190.                             | EDITIO OXONIÆ.                |
|---------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------|
| 1. τῶν . . . . .                | deest. . . . .                         | τῶν                           |
| 3. ἀλλὰ ἢ μὲν . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . .                   | ἀλλὰ καὶ ἢ                    |
| 3. καὶ εἰς αὐτὰς ἐπέπαιον ἢ ΓΒ. | verba in margine recenti manu exarata. | καὶ εἰς αὐτὰς ἐπέπαιον ἢ ΓΒ.* |
| 4. εἰσὶν ἴσαι. . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .                   | ἴσαι εἰσίν.                   |
| 5. ἀπὸ . . . . .                | deest. . . . .                         | ἀπὸ                           |
| 6. τῶν . . . . .                | deest. . . . .                         | τῶν                           |
| 7. τισσάρα . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . .                   | deest.                        |
| 8. τὸ . . . . .                 | deest. . . . .                         | τὸ                            |

A L I T E R.

Hæc altera demonstratio exarata est in chartâ paginæ contiguâ.

|                         |                      |               |
|-------------------------|----------------------|---------------|
| 1. καὶ ἄλλως. . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | Ἐτέρα δίδξις. |
| 2. ἐντὸς καὶ . . . . .  | desunt. . . . .      | ἐντὸς καὶ     |
| 3. τῶ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ            |
| 4. καὶ . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.        |
| 5. ἐστί. . . . .        | deest. . . . .       | ἐστί.         |
| 6. ἐστὶν ἴσον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἐστὶ     |
| 7. ἴση ἐστὶ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση           |
| 8. ἄρα . . . . .        | deest. . . . .       | ἄρα           |

C O R O L L A R I U M.

|                    |                |       |
|--------------------|----------------|-------|
| 9. ἐστὶν . . . . . | deest. . . . . | ἐστὶν |
|--------------------|----------------|-------|

PROPOSITIO V.

|                                                                          |                      |                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἤχθω ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποῦντα τῶν ΓΑ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἢ ΑΚ. | <i>Id.</i> . . . . . | ἤχθω πάλιν ἢ ΚΑΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποῦντα τῶν ΓΛ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἢ ΑΚ. |
| 2. ἐστὶν ἴση. . . . .                                                    | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶ                                                                       |
| 3. ΝΕΟ γνώμονι . . . . .                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | ΔΖ καὶ ΔΛ                                                                      |
| 4. μὲν . . . . .                                                         | deest. . . . .       | μὲν                                                                            |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                    |                      |                                         |
|--------------------|----------------------|-----------------------------------------|
| 5. γὰρ ἢ . . . . . | ἢ γὰρ . . . . .      | γὰρ ἢ                                   |
| 6. ΔΒ. . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | ΔΒ· τὸ δὲ ΖΔ· ΔΛ ἴσθιν ὁ ΝΞΟ<br>γνώμων· |
| 7. τῷθ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                  |

PROPOSITIO VI.

|                                      |                                                           |                         |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------|
| 1. ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι . . . . . | Hæc verba manu re-<br>centi inter lineas<br>exarata sunt. | ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι |
| 2. ἴσθιν . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . .                                      | deest.                  |
| 3. Ἀλλὰ . . . . .                    | <i>Id.</i> . . . . .                                      | Ἀλλὰ καὶ                |
| 4. ὀρθογωνίῳ. . . . .                | deest. . . . .                                            | ὀρθογωνίῳ.              |

PROPOSITIO VII.

|                          |                      |             |
|--------------------------|----------------------|-------------|
| 1. Ἐπιὶ οὖν . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἐπιὶ    |
| 2. ἴσον ἴσθιν· . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσθιν ἴσον· |
| 3. τῷ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ τε       |

PROPOSITIO VIII.

|                                |                      |                   |
|--------------------------------|----------------------|-------------------|
| 1. ἀπὸ τοῦ . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.            |
| 2. ἴση τῇ ΓΒ ἢ ΒΔ, . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | τῇ ΓΒ ἴση ἢ ΒΔ,   |
| 3. ἄρα . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.            |
| 4. μὲν . . . . .               | deest. . . . .       | μὲν               |
| 5. καὶ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.            |
| 6. μὲν . . . . .               | deest. . . . .       | μὲν               |
| 7. ἴσθιν ἴσον, . . . . .       | ἴσον ἴσθι, . . . . . | ἴσθιν ἴσον,       |
| 8. ἴσον ἴσθι· . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσθιν ἴσον·       |
| 9. ἴσθιν . . . . .             | deest. . . . .       | ἴσθιν             |
| 10. ἴσθιν ἴση· . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴσθι·         |
| 11. ἴση ἴσθι. . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσθιν ἴση.        |
| 12. μὲν . . . . .              | deest. . . . .       | μὲν               |
| 13. τετραπλάσιά ἴσθιν. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσθι τετραπλάσια. |

# 468 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                                                                                                       |                                                                            |              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 14. ἐστὶ τοῦ AK. . . . .                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                       | τοῦ AK ἐστὶ. |
| 15. γὰρ . . . . .                                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                                                       | γὰρ καὶ      |
| 16. τῆς . . . . .                                                                                                     | deest. . . . .                                                             | τῆς          |
| 17. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB,<br>ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον<br>ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνῳ.<br>Ἴση δὲ ἢ ΒΔ τῇ ΒΓ. | <i>Id.</i> . . . . .<br><br><br><br>in codice a legitur ἀπὸ<br>ΑΓ, ἀπὸ ΑΔ. | desunt.      |

## PROPOSITIO IX.

|                                                    |                      |                                        |
|----------------------------------------------------|----------------------|----------------------------------------|
| 1. παράλληλος ἢ χθῶ . . . . .                      | desunt. . . . .      | adsunt.                                |
| 2. καὶ ἰσὶν ἴσαι . . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                                |
| 3. ἐστὶν . . . . .                                 | deest. . . . .       | ἐστὶν                                  |
| 4. πλευρᾶ . . . . .                                | deest. . . . .       | πλευρᾶ                                 |
| 5. ἐστὶ πάλιν . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . . | πάλιν ἐστὶ                             |
| 6. τῆς . . . . .                                   | deest. . . . .       | τῆς                                    |
| 7. τῆς . . . . .                                   | deest. . . . .       | τῆς                                    |
| 8. τῆς . . . . .                                   | deest. . . . .       | τῆς                                    |
| 9. τῆς . . . . .                                   | deest. . . . .       | τῆς                                    |
| 10. ἴσον ἐστὶ . . . . .                            | ἐστὶν ἴσον . . . . . | ἴσον ἐστὶ                              |
| 11. EZ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ<br>τῆς EZ.           | <i>Id.</i> . . . . . | EZ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EZ τετρά-<br>γωνον. |
| 12. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς HZ ἴσον<br>ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση δὲ ἢ HZ τῇ ΓΔ.                     |
| 13. ἐστὶν . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                 |

## PROPOSITIO X.

|                                 |                        |                                           |
|---------------------------------|------------------------|-------------------------------------------|
| 1. ἀναγραφέντος τετραγώνου. . . | ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. | concordat cum edit. Paris.                |
| 2. πάλιν . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .   | deest.                                    |
| 3. ἐστὶν . . . . .              | deest. . . . .         | ἐστὶν                                     |
| 4. ὀρθῆς ἐστὶν . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . .   | ὀρθῆς ἐστὶν                               |
| 5. ΔΗΒ . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . .   | ΔΗΒ ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ἢ ἄρα<br>ὑπὸ ΔΗΒ |

|                                                      |                     |                            |
|------------------------------------------------------|---------------------|----------------------------|
| EDITIO PARISIENSIS.                                  | CODEX 190.          | EDITIO OXONIÆ.             |
| 6. ἴση ἴστιν ἢ ΕΓ τῆ ΓΑ, ἴσον ἴστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ | ἴσον ἴστι τὸ ἀπὸ ΕΓ | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ΗΖ . . . . .                                      | Id. . . . .         | ΔΖ τετράγωνον              |
| 8. ΖΕ . . . . .                                      | Id. . . . .         | ΖΕ τετραγώνω.              |
| 9. ΕΗ . . . . .                                      | Id. . . . .         | ΕΗ τετράγωνον.             |
| 10. ΑΗ . . . . .                                     | Id. . . . .         | ΑΗ τετράγωνα.              |
| 11. ΓΔ . . . . .                                     | Id. . . . .         | ΓΔ τετραγώνων.             |

PROPOSITIO XI.

|                                                                  |                |                                                                                   |
|------------------------------------------------------------------|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ποιεῖν . . . . .                                              | Id. . . . .    | εἶναι                                                                             |
| 2. τῆς ΕΒ τετραγώνω . . . . .                                    | ΕΒ . . . . .   | concordat cum edit. Paris.                                                        |
| 3. τῆς . . . . .                                                 | deest. . . . . | τῆς                                                                               |
| 4. ὀρθογώνιον . . . . .                                          | deest. . . . . | ὀρθογώνιον                                                                        |
| 5. Καὶ ἴστι τὸ μὲν ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ δὲ ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ. | Id. . . . .    | Καὶ ἴστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ, ἴση γὰρ ἢ ΑΕ τῆ ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ. |
| 6. τῆς . . . . .                                                 | deest. . . . . | τῆς                                                                               |
| linea decima.                                                    |                |                                                                                   |
| 7. ποιεῖν . . . . .                                              | Id. . . . .    | εἶναι                                                                             |

PROPOSITIO XII.

|                                   |                 |                        |
|-----------------------------------|-----------------|------------------------|
| 1. ἐκκληθεῖσαν . . . . .          | deest. . . . .  | ἐκκληθεῖσαν            |
| 2. γωνίαν, . . . . .              | deest. . . . .  | γωνίαν,                |
| 3. περιεχομένη ὀρθογωνίω. . . . . | desunt. . . . . | περιεχομένη ὀρθογωνίω. |
| 4. τῆς . . . . .                  | Id. . . . .     | τὸ.                    |
| 5. ἴσον . . . . .                 | Id. . . . .     | ἴσον ἴστι              |
| 6. τετραγώνον . . . . .           | Id. . . . .     | deest.                 |

PROPOSITIO XIII.

|                  |                |     |
|------------------|----------------|-----|
| 1. τοῦ . . . . . | Id. . . . .    | τῆς |
| 2. τῆς . . . . . | deest. . . . . | τῆς |

470 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

| EDITIO PARIISIENSIS. | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE. |
|----------------------|----------------------|----------------|
| 3. ἴστί . . . . .    | deest. . . . .       | ἴστί           |
| 4. ἴστί . . . . .    | deest. . . . .       | ἴστί           |
| 5. τῶν . . . . .     | deest. . . . .       | τῶν            |
| 6. τὸ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.         |

PROPOSITIO XIV.

|                               |                      |              |
|-------------------------------|----------------------|--------------|
| 1. γὰρ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |
| 2. μὲν . . . . .              | deest. . . . .       | μὲν          |
| 3. τῆς HE ἴσον . . . . .      | HE ἴσον . . . . .    | τῆς HE ἴσα   |
| 4. τὸ ὑπὸ τῶν BE, ΕΔ ἴστιν, . | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ ΒΔ ἴστιν, |
| 5. καὶ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |

---

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

| EDITIO PARISIENSIS.                 | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.         |
|-------------------------------------|----------------------|------------------------|
| α. (1) ἴσαι εἰσίν. . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | εἰσὶν ἴσαι.            |
| β. (2) ἐπὶ μηδέτερα μερῆ. . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                 |
| δ. (3) ἀπὸ . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                 |
| ή. (4) τις . . . . .                | deest. . . . .       | τις                    |
| ί. (5) τοῦ κύκλου συσταθῆ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῆ |

PROPOSITIO I.

|                                         |                      |                    |
|-----------------------------------------|----------------------|--------------------|
| 1. Ηχθω . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | Διήχθω.            |
| 2. κύκλου. . . . .                      | deest. . . . .       | κύκλου.            |
| 3. linea 12 paginæ 119 δύο δὲ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | δύο δὲ             |
| 4. ἴσιν ἴση, . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴσιν,          |
| 5. τοῦ Η. . . . .                       | deest. . . . .       | τοῦ Η.             |
| 6. ἴση ἴσιν. . . . .                    | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσιν ἴση.          |
| 7. ἴσων . . . . .                       | deest. . . . .       | ἴσων               |
| 8. ἐλάττων τῇ μίζονι, . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | μίζων τῇ ἐλάττωνι  |
| 9. κύκλου. . . . .                      | deest. . . . .       | κύκλου.            |
| 10. ὅπερ ἴδει ποιῆσαι. . . . .          | desunt. . . . .      | Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι. |

COROLLARIUM.

|                          |                            |            |
|--------------------------|----------------------------|------------|
| 11. εὐθεῖα τις . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .       | τις εὐθεῖα |
| 12. κύκλου. . . . .      | κύκλου. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι. | κύκλου.    |

PROPOSITIO II.

|                                              |                      |              |
|----------------------------------------------|----------------------|--------------|
| 1. αὐτὰ . . . . .                            | deest. . . . .       | αὐτὰ         |
| 2. δύο τυχόντα . . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . . | τυχόντα δύο  |
| 3. ΔΖΕ. . . . .                              | <i>Id.</i> . . . . . | ΔΖ ἐπὶ τὸ Ε. |
| 4. linea 10 paginæ 122 πῶς<br>σῖται. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |

## PROPOSITIO III.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                  | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| linea 1 paginæ 123 τέμνει .                                                          | <i>Id.</i> . . . . . | τεμνί.                                                                       |
| linea 2 paginæ 123 τέμνει .                                                          | <i>Id.</i> . . . . . | τεμνί.                                                                       |
| 1. δὴ . . . . .                                                                      | deest. . . . .       | δὴ                                                                           |
| 2. εἰσι , . . . . .                                                                  | deest. . . . .       | εἰσι.                                                                        |
| 3. γωνία ἄρα . . . . .                                                               | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ γωνία                                                                    |
| 4. ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν<br>ἴστί· ὀρθὴ ἄρα ἴστί· ἑκατέρα<br>τῶν ὑπὸ AZE, BZE. | <i>Id.</i> . . . . . | ὀρθὴ ἴστί· ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ AZE, BZE ὀρθὴ ἴστί·. |
| 5. οὖσα . . . . .                                                                    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                       |
| 6. αὐτὴν . . . . .                                                                   | deest. . . . .       | αὐτὴν                                                                        |
| 7. καὶ . . . . .                                                                     | deest. . . . .       | καὶ                                                                          |
| 8. ἢ EA . . . . .                                                                    | <i>Id.</i> . . . . . | ἢ ἐκ τοῦ κέντρου EA                                                          |
| 9. ἄρα . . . . .                                                                     | deest. . . . .       | ἄρα                                                                          |

## PROPOSITIO IV.

|                        |                      |                 |
|------------------------|----------------------|-----------------|
| 1. σημεῖον , . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.          |
| 2. κέντρου . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | κέντρου ἡγμένην |
| 3. τέμνει . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | τεμνί.          |
| 4. ἄρα ἴστί· . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί· ἄρα       |
| 5. τέμνει . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | τεμνί.          |
| 6. ἢ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.          |
| 7. ἴστί· . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.          |

## PROPOSITIO V.

|                          |                      |             |
|--------------------------|----------------------|-------------|
| 1. ἢ EG καὶ , . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἢ EG ,  |
| 2. ἴστί· ἴση , . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴστί· , |
| 3. ἴστί· . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.      |

## PROPOSITIO VI.

|                           |                      |              |
|---------------------------|----------------------|--------------|
| 1. ἐντός , . . . . .      | deest. . . . .       | ἐντός ,      |
| 2. ἐφαπτίσθωσαν . . . . . | ἀπτίσθωσαν . . . . . | ἐφαπτίσθωσαν |

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                        |                         |               |
|------------------------|-------------------------|---------------|
| 3. ἴσται . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . .    | ἴσται         |
| 4. καὶ . . . . .       | <i>deest.</i> . . . . . | καὶ           |
| 5. ἴσται ἴση . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .    | ἴση ἴσται     |
| 6. ἴσται . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . .    | <i>deest.</i> |

PROPOSITIO VII.

|                                                  |                         |                                               |
|--------------------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------------------|
| 1. πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν<br>εὐθεῖαι τινες | <i>Id.</i> . . . . .    | προσπίπτωσιν εὐθεῖαι τινες πρὸς<br>τὸν κύκλον |
| 2. μόνον . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . .    | μόνον εὐθεῖαι                                 |
| 3. EB, EZ ἄρα . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . .    | ἄρα EB, EZ                                    |
| 4. δὲ . . . . .                                  | <i>deest.</i> . . . . . | δὲ                                            |
| 5. ἴσται . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . .    | <i>deest.</i>                                 |
| 6. ἴσται . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . .    | ἴσται εὐθεῖαι                                 |
| 7. ἴσται ἴση, . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . .    | ἴση ἴσται,                                    |
| 8. μὲν καὶ ἡ ΖΘ τῆ ΖΗ . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . .    | ἡ ΖΘ τῆ ΖΗ ἴση ἴσται                          |
| 9. ἴσται ἴση, . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . .    | ἴση ἴσται,                                    |
| 10. τῆ . . . . .                                 | τῆς . . . . .           | τῆ                                            |
| 11. HEZ . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .    | HEZ γωνία                                     |
| 12. ἴσται . . . . .                              | <i>Id.</i> . . . . .    | <i>deest.</i>                                 |

PROPOSITIO VIII.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Εὰν κύκλου ληθῆ τι σημεῖον<br>ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς<br>τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι<br>τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέν-<br>τρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε<br>τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περι-<br>φέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν<br>μεγίστη μὲν ἴσται ἡ διὰ τοῦ<br>κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἡ<br>ἔγγιον τῆς διὰ κέντρου τῆς<br>ἀπάτερον μείζων ἴσται· τῶν δὲ<br>πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν | Εὰν κύκλου ληθῆ τι ση-<br>μεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ<br>σημείου πρὸς τὸν κύ-<br>κλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι<br>τινες, ὧν μία μὲν διὰ<br>τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοι-<br>παὶ ὡς ἔτυχε τῶν μὲν<br>πρὸς τὴν κοίλην περι-<br>φέρειαν προσπιπτουσῶν<br>εὐθειῶν μεγίστη μὲν<br>ἴσται ἡ διὰ τοῦ κέντρου,<br>ἐλαχίστη δὲ ἡ μεταξύ | Εὰν κύκλου ληθῆ τι σημεῖον ἐκ-<br>τὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς<br>τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι<br>τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέν-<br>τρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε<br>τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περι-<br>φέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν<br>μεγίστη μὲν ἡ διὰ τοῦ κέντρου·<br>τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς<br>διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπάτερον<br>μείζων ἴσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν<br>κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπ- |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## EDITIO PARISIENSIS.

προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἔστιν ἢ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἢ ἕγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπισοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες αἰ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἔστιν ἢ διὰ τοῦ κέντρου ἢ ΔΑ· αἰεὶ δὲ ἢ ἕγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται, ἢ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἢ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΑΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· ἐλαχίστη

## CODEX 190.

τοῦ τε σημείου, καὶ τῆς διαμέτρου προσπίπτουσα· τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἢ ἕγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔστί· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἔστί· ἢ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἢ ἕγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπισοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες αἰ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἔστιν ἢ διὰ τοῦ κέντρου ἢ ΔΑ· ἐλαχίστη δὲ ἢ μὲν ἢ ΔΗ, ἢ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς

## EDITIO OXONIÆ.

τουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἔστιν ἢ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἢ ἕγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπισοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες πρὸς τὸν κύκλον αἰ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι μὲν τῶν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἔστιν ἢ διὰ τοῦ κέντρου ἢ ΔΑ· αἰεὶ δὲ ἢ ἕγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται, ἢ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἢ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὸν ΘΑΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐ-

EDITIO PARISIENSIS.

μὲν ἢ ΔΗ, ἢ μεταξὺ τοῦ ση-  
μείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ·  
αἰὲ δὲ ἢ ἕγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχί-  
στης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον,  
ἢ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἢ δὲ ΔΛ  
τῆς ΔΘ.

CODEX 190.

διαμέτρου ἢ ΑΗ· μείζων  
δὲ ἢ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἢ  
δὲ ΔΖ τῆς ΑΓ· τῶν δὲ  
πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν  
περιφέρειαν προσπιπ-  
τουςῶν εὐθειῶν· αἰὲ ἢ  
ἕγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχί-  
στης ἐλάττων ἐστὶ τῆς  
ἀπώτερον, ἢ μὲν ΔΚ  
τῆς ΔΛ, ἢ δὲ ΔΛ τῆς

EDITIO OKONIE.

θειῶν ἐλαχίστη μὲν ἢ ΔΗ, ἢ  
μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς  
διαμέτρου ΑΗ· αἰὲ δὲ ἢ ἕγγιον  
τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ  
τῆς ἀπώτερον, ἢ μὲν ΔΚ τῆς  
ΔΛ, ἢ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

ΔΘ.

|                             |                      |                          |
|-----------------------------|----------------------|--------------------------|
| 2. Αἰ δὲ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ἀλλ' αἰ                  |
| 3. προσκείσθω . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | δὲ                       |
| 4. αἰ ΜΚ, ΚΔ ἄρα . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | αἰ ΜΚ, ΚΔ, αἰ ἄρα ΜΚ, ΚΔ |
| 5. ἴση δὲ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | ῶν ἐστὶν ἴση             |
| 6. ἴσαι . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσαι εὐθεῖαι             |
| 7. προσπιπτοῦνται . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | συμπιπτοῦνται            |
| 8. ἴση· . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶ·                |
| 9. δὴ . . . . .             | deest. . . . .       | δὴ                       |
| 10. ἐστὶν ἴση, . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶν,               |
| 11. Ἐπεὶ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἐπεὶ                 |
| 12. ἐστὶν ἴση· . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶν·               |
| 13. ἄρα . . . . .           | deest. . . . .       | ἄρα                      |
| 14. ἐστὶν . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                   |
| 15. ἴσαι . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | εὐθεῖαι                  |

PROPOSITIO IX.

|                                        |                      |                                          |
|----------------------------------------|----------------------|------------------------------------------|
| 1. ἴσαι εὐθεῖαι, . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | εὐθεῖαι ἴσαι,                            |
| 2. ἴσαι εὐθεῖαι, . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | εὐθεῖαι ἴσαι,                            |
| 3. ἐστὶν ἴση . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶν                                |
| 4. ἴση· . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶ                                 |
| 5. τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς<br>τέμνει. |
| 6. ΑΒΓ . . . . .                       | deest. . . . .       | ΑΒΓ                                      |
| 7. κύκλου. . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                   |

## A L I T E R.

| EDITIO PARISIENSIS.                    | CODEX 190.                | EDITIO OXONIÆ.                      |
|----------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|
| 8. ἡ ΖΗ ἄρα . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . .      | ἡ δὲ ΖΗ                             |
| 9. τὸ Δ, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, | <i>Id.</i> . . . . .      | ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ Δ, |
| 10. κύκλου. . . . .                    | κύκλου. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι. | κύκλου.                             |

## PROPOSITIO X.

|                                                                                 |                      |                            |
|---------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . . | Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον    |
| 2. διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπὶ τὰ ΑΕ διήχθωσαν        |
| 3. καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . . | τέμνει καὶ πρὸς ὀρθὰς,     |
| 4. ἀλλήλαις . . . . .                                                           | deest. . . . .       | ἀλλήλαις                   |
| 5. δύο ἄρα κύκλων τεμονόντων ἀλλήλους, τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ αὐτό ἐστὶ κέντρον τὸ Ο, | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## A L I T E R.

|                            |                      |               |
|----------------------------|----------------------|---------------|
| 6. εὐθείαι ἴσαι, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσαι εὐθείαι, |
| 7. κέντρον ἴστί . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶ κέντρον  |
| 8. ἀλλήλους . . . . .      | ἀλλήλων . . . . .    | ἀλλήλους      |

## PROPOSITIO XI.

|                                            |                      |                                                 |
|--------------------------------------------|----------------------|-------------------------------------------------|
| 1. Καὶ . . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                          |
| 2. ἐφαπτίθωσαν . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . . | ἀπτίθωσαν                                       |
| 3. κύκλου . . . . .                        | κύκλου τὸ . . . . .  | κύκλου                                          |
| 4. τὸ Α . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ Α συμμεῖον                                   |
| 5. τῆς ΖΘ, . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | τῆς ΖΘ, ἴση γὰρ ἢ ΖΑ τῇ ΖΘ ἀπὸ κέντρον γὰρ ἄμφω |
| 6. ἐστὶν . . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                          |
| 7. κατὰ τὸ Α ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πισεῖται. | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπ' αὐτὴν ἄρα.                                  |

## A L I T E R.

|                         |                           |               |
|-------------------------|---------------------------|---------------|
| 8. ἐκβεβλήσθω . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .      | προσικεβλήσθω |
| 9. ἄτοπον. . . . .      | ἄτοπον. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι. | ἄτοπον.       |

PROPOSITIO XII.

| EDITIO PARISIENSIS.     | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE. |
|-------------------------|----------------------|----------------|
| 1. ἰσάπτωνται . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἄπτωται        |
| 2. εὐθειᾶ . . . . .     | deest. . . . .       | εὐθειᾶ         |
| 3. κύκλου . . . . .     | deest. . . . .       | κύκλου         |

PROPOSITIO XIII.

|                                       |                      |                            |
|---------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἰσαπύπτηται εἰάν τε ἑκτός. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | εἰάν τε ἑκτός ἰσαπύπτηται. |
| 2. ἰσαπύπτεσθω . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | ἀπύπτεσθω                  |
| 3. εὐθειᾶ . . . . .                   | deest. . . . .       | εὐθειᾶ                     |
| 4. ὅπερ . . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . . | ὅπερ ἴσθιν                 |
| 3. τοῦ . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . . | ἡ                          |
| 6. ἄρα . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 7. αὐτὰ . . . . .                     | deest. . . . .       | αὐτὰ                       |

PROPOSITIO XIV.

|                                            |                                       |                            |
|--------------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| 1. αἱ AB, ΓΔ . . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . .                  | deest.                     |
| 2. ἡ . . . . .                             | <i>Id.</i> . . . . .                  | deest.                     |
| 3. λοιπῶ τῶ ἀπὸ τῆς EH ἴσον ἴσθιν, ἴση ἄρα | τῶ ἀπὸ τῆς EH ἴσον ἴσθιν, ἴση ἄρα καὶ | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἴσθι . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . .                  | ἴσθι καὶ                   |
| 5. ἴσθιν ἴσον, . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . .                  | ἴσον ἴσθιν,                |
| 6. λοιπῶ τῶ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἴσθιν.         | ἴσον ἴσθι τῶ ἀπὸ τῆς ΓΗ.              | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XV.

|                            |                                       |                                                  |
|----------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1. ἴσθιν . . . . .         | deest. . . . .                        | ἴσθιν <i>b, c, d, e, f, g, h, k, l, m.</i>       |
| 2. τοῦ E κέντρου . . . . . | τῆς ΑΔ διαμέτρου <i>a, c, d.</i>      | τοῦ E κέντρου                                    |
| 3. E . . . . .             | <i>Id. e, f, g, h, k, l, m.</i>       | deest.                                           |
| 4. ἄρα . . . . .           | deest. <i>a, f, g, h, k, l, m.</i>    | ἄρα <i>b, c, d, e, h.</i>                        |
| 5. μειζων . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . .                  | μειζων ἴσθι <i>b, c, d, e, f, g, h, k, l, m.</i> |
| 6. μὲν . . . . .           | <i>Id. a, c, d, e, g, h, k, l, m.</i> | deest. <i>b, f.</i>                              |

PROPOSITIO XVI.

| EDITIO PARISIENSIS.                                   | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.                                    |
|-------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------------|
| 1. παρεμπεσῖται . . . . .                             | <i>Id.</i> . . . . . | παραμπεσῖται                                      |
| 2. γωνίας ὀξείας . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . . | ἰξείας γωνίας                                     |
| 3. καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία<br>τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν. | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία<br>τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. |
| 4. τριγώνου δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο<br>γωνίαι αἱ            | <i>Id.</i> . . . . . | αἱ ἄρα                                            |
| 5. δὴ . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                            |
| 6. γωνίας ὀξείας . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . . | ὀξείας γωνίας                                     |
| 7. ἢ . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | ἢ                                                 |
| 8. εὐθεῖα παρεμπεσῖται, . . .                         | <i>Id.</i> . . . . . | παραμπεσῖται εὐθεῖαι,                             |
| 9. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. . . . .                         | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                        |

COROLLARIUM.

|                       |                              |           |
|-----------------------|------------------------------|-----------|
| 10. τούτου . . . . .  | τούτου . . . . .             | τουτῶν    |
| 11. εἰδείχθη. . . . . | εἰδείχθη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. | εἰδείχθη. |

PROPOSITIO XVII.

|                              |                      |                      |
|------------------------------|----------------------|----------------------|
| 1. τὸ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.               |
| 2. τὴν . . . . .             | deest. . . . .       | τὴν                  |
| 3. ἢ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ. . . | <i>Id.</i> . . . . . | τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἢ ὑπὸ ΕΒΑ |
| 4. ΒΓΑ . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.               |

PROPOSITIO XVIII.

|                          |                      |           |
|--------------------------|----------------------|-----------|
| 1. ἑφαπτομένην . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἀπτομένην |
| 2. ἑφαπτίσθω . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | ἀπτίσθω   |
| 3. καὶ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.    |

PROPOSITIO XIX.

|                               |                      |                  |
|-------------------------------|----------------------|------------------|
| 1. ὀρθὰς . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | ὀρθὰς γωνίας     |
| 2. τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΕ |
| 3. οὖν . . . . .              | deest. . . . .       | οὖν              |

PROPOSITIO XX.

| EDITIO PARISIENSIS.                       | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.                               |
|-------------------------------------------|----------------------|----------------------------------------------|
| 1. ἴση καὶ γωνία ἢ ὑπὸ EAB τῆ<br>ὑπὸ EBA· | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ γωνία ἢ ὑπὸ EAB τῆ ὑπὸ EBA<br>ἴση ἰστίν· |
| 2. ἑτέρα γωνία . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | γωνία ἑτέρα                                  |

PROPOSITIO XXI.

|                   |                      |        |
|-------------------|----------------------|--------|
| 1. αὐτῶ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
|-------------------|----------------------|--------|

PROPOSITIO XXII.

|                           |                      |                    |
|---------------------------|----------------------|--------------------|
| 1. Ἐπεὶ οὖν . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἐπεὶ . . . . . |
| 2. ἄρα τριγώνου . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.             |
| 3. ἄρα . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.             |

PROPOSITIO XXIII.

|                           |                      |               |
|---------------------------|----------------------|---------------|
| 1. συσταθίσεται . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | συσταθίσονται |
|---------------------------|----------------------|---------------|

PROPOSITIO XXIV.

|                                                                                                        |                                                       |                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἰστίν. . . . .                                                                                      | <i>Id. a, c, d, e, f, g, h,</i><br><i>k, l, m, n.</i> | ἰσίν· <i>b.</i>                                                                                                                                                                     |
| 2. τῆς δὲ AB ἐπὶ τὴν ΓΔ ἰφαρ-<br>μοσάσης,                                                              | <i>Id. a.</i> . . . . .                               | ἰφαρμοσάσης δὲ τῆς AB εὐθείας<br>ἐπὶ τὴν ΓΔ <i>b, c, d, e, f,</i><br><i>g, h, k, l, m, n.</i>                                                                                       |
| 3. ἢτοι ἐντὸς αὐτοῦ πιεῖται, ἢ<br>ἐκτὸς, ἢ παραλλάξει ὡς τὸ<br>ΓΘΗΔ καὶ κύκλος κύκλον τέμ-<br>νει κατὰ | <i>Id. a.</i> . . . . .                               | ἀλλὰ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ.<br>Κύκλος δὲ κύκλον οὐ τέμνει<br>κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο·<br>ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ ΓΘΗΔ τὸν<br>ΓΖΔ κατὰ <i>b, c, d, e, f, g,</i><br><i>h, k, l, m, n.</i> |

PROPOSITIO XXV.

|                            |                       |               |
|----------------------------|-----------------------|---------------|
| 1. δὴ . . . . .            | δὴ τοῦ ΑΒΓ τμήματος . | δὴ            |
| 2. γωνία ἄρα . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . .  | ἄρα γωνία     |
| 3. ἢ ΔΒ ἐπὶ τὸ Ε . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .  | ἐπὶ τὸ Ε ἢ ΑΒ |
| 4. εὐθεία . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.        |

480 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

| EDITIO PARISIENSIS.               | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.             |
|-----------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 5. ἴσιν ἴση, . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴσιν,                  |
| 6. βάσεις . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ βάσεις                 |
| 7. ἴσιν ἴση. . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴσιν.                  |
| 8. τῷ . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ                         |
| 9. κύκλος. . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 10. ἐκτὸς αὐτοῦ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτοῦ ἐκτὸς                |
| 11. καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ ABΔ γωνία ἴση ἢ | <i>Id.</i> . . . . . | κἂν ἢ ὑπὸ ABA γωνία ἴση    |
| 12. πρὸς αὐτῇ σημείω τὸ A, .      | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ A σημείω                |
| 13. ὡς τὸ E, . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 14. οὐπὲρ ἴσιν τὸ τμήμα. . .      | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XXVI.

|                                                                                                |                      |                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. γὰρ . . . . .                                                                               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                     |
| 2. πρὸς μὲν τοῖς κέντροις ἴσαι<br>γωνίας ἴστωσαν,                                              | <i>Id.</i> . . . . . | ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίας ἴστωσαν,<br>πρὸς μὲν τοῖς κέντροις                                   |
| 3. εἰσί· . . . . .                                                                             | deest. . . . .       | εἰσί·                                                                                      |
| 4. ἐστί· . . . . .                                                                             | deest. . . . .       | ἐστί·                                                                                      |
| 5. ἴσιν ἴση. . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴσιν.                                                                                  |
| 6. ἴσιν· . . . . .                                                                             | deest. . . . .       | εἰσίν.                                                                                     |
| 7. τμήματι. . . . .                                                                            | deest. . . . .       | τμήματι                                                                                    |
| 8. λοιπὸν ἄρα BΚΓ τμήμα λοιπῷ<br>ΕΔΖ ἴσον· ἢ ἄρα BΚΓ περιφέρεια<br>ἴσιν ἴση τῇ ΕΔΖ περιφέρειᾳ. | deest. . . . .       | λοιπὸν ἄρα BΚΓ τμήμα λοιπῷ ΕΔΖ<br>ἴσον· ἢ ἄρα BΚΓ περιφέρεια τῇ<br>ΕΔΖ περιφέρειᾳ ἴσιν ἴση |

PROPOSITIO XXVII.

|                                                                           |                                       |                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἐπὶ . . . . .                                                          | <i>Id.</i> a, c, d, e, f, g, h, l, m. | καὶ ἐπὶ b, k.                                                                                                                                                          |
| 2. γωνία . . . . .                                                        | <i>Id.</i> a. . . . .                 | deest. b, c, d, e, f, g, h, k, l, m.                                                                                                                                   |
| 3. ἴσιν ἴση. . . . .                                                      | <i>Id.</i> a, k. . . . .              | deest. b, c, d, e, f, g, h, l, m.                                                                                                                                      |
| 4. Εἰ γὰρ ἄνισος ἴσιν ἢ ὑπὸ<br>BΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν<br>μείζων ἴσται. | <i>Id.</i> a. . . . .                 | Εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ BΗΓ ἴση ἴσιν<br>τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, φανέρον ὅτι καὶ<br>ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση<br>ἴσιν· Εἰ δὲ οὐ μία, αὐτῶν<br>μείζων ἴσιν. b, c, d, e, f,<br>g, h, k, l, m. |

PROPOSITIO XXVIII.

| EDITIO PARISIENSIS.                  | CODEX 190.             | EDITIO OXONIE.                    |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 1. αὐτοῖς . . . . .                  | τοῖς κύκλοις . . . . . | αὐτοῖς                            |
| 2. τῇ ΔΘΕ ἐλάττονι. . . . .          | τῇ ΔΘΕ. . . . .        | Ἦση τῇ ΔΘΕ ἐλάττονι.              |
| 3. ΑΗΒ περιφέρεια τῆ ΔΘΕ περιφέρεια. | ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ. | περιφέρεια ΑΗΒ τῆ ΔΘΕ περιφέρεια. |
| 4. καὶ . . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . .   | deest.                            |

PROPOSITIO XXIX.

|                          |                                                   |             |
|--------------------------|---------------------------------------------------|-------------|
| 1. ὑπὸ . . . . .         | deest. . . . .                                    | ὑπὸ         |
| 2. εὐθεία . . . . .      | hoc verbum manu aliena inter lineas exaratum est. | εὐθεῖα      |
| 3. καὶ ἴστω . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . .                              | deest.      |
| 4. γωνίας ἴσας . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .                              | ἴσας γωνίας |

PROPOSITIO XXX.

|                                |                      |           |
|--------------------------------|----------------------|-----------|
| 1. τεμῖν. . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | τέμνειν.  |
| 2. τεμῖν. . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | τέμνειν.  |
| 3. βίσις ἄρα . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ βίσις |
| 4. κατὰ τὸ Δ σημεῖον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.    |

PROPOSITIO XXXI.

|                                                 |                      |                                     |
|-------------------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|
| 1. ἐμήματι . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                              |
| 2. ὀρθῆς. . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστιν ὀρθῆς.                        |
| 3. ἢ ὑπὸ ΒΑΓ . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                              |
| 4. ἢ ὑπὸ ΑΔΓ . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                              |
| 5. καὶ . . . . .                                | deest. . . . .       | καὶ                                 |
| 6. ΒΑΓ . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . . | ΒΑΓ γωνία                           |
| 7. γωνία μείζων ὀρθῆς ἴστι, καὶ ἴστιν ἐν τῇ ΑΔΓ | <i>Id.</i> . . . . . | μείζων ἴστιν ὀρθῆς, καὶ ἴστιν ἐν τῇ |
| 8. λέγω . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . . | λέγω δὲ                             |

EDITIO PARIISIENSIS. CODEX 190. EDITIO OXONIE.

|                           |                      |        |
|---------------------------|----------------------|--------|
| 9. τε . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 10. τε . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 11. γωνία . . . . .       | deest. . . . .       | γωνία  |
| 12. περιεχομένη . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

A L I T E R.

|                 |                      |        |
|-----------------|----------------------|--------|
| 13. Η . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
|-----------------|----------------------|--------|

C O R O L L A R I U M.

|                                                                                                                                                                                          |                                                                             |                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 14. Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι εἰν ἡ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ἢ, ὀρθή ἐστίν ἡ γωνία· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐκτὸς ταῖς αὐταῖς ἴσων εἶναι. Όταν δὲ ἐπιζῆς ἴσαι ὄσιν, ὀρθαί εἰσιν. | <i>Id.</i> . . . . .<br>hoc corollarium eadem manu in margine exaratum est. | Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι εἰν τριγώνου ἡ μία γωνία δυσὶν ἴση ἢ, ὀρθή ἐστίν· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐπιζῆς ταῖς αὐταῖς ἴσων εἶναι. Όταν δὲ αἱ ἐπιζῆς γωνίαι ἴσαι ὄσιν, ὀρθαί εἰσιν. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

PROPOSITIO XXXII.

|                                                                                                                               |                      |                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. εἰς . . . . .                                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπὶ                                                                                          |
| 2. εἰς . . . . .                                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπὶ                                                                                          |
| 3. γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένη γωνία, ἢ δὲ ὑπὸ ΔΒΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένη γωνία. | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΑΒ τμήματι συνισταμένη γωνία, ἢ δὲ ὑπὸ ΕΒΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι. |
| 4. ἀπὸ δὲ τῆς . . . . .                                                                                                       | <i>Id.</i> . . . . . | σημεῖον, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β                                                               |
| 5. ἄρα . . . . .                                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                       |
| 6. Η ΒΑ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.                                                                                   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                       |
| 7. Εἴσι δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.                                                                             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                       |

PROPOSITIO XXXIII.

|                                 |                      |               |
|---------------------------------|----------------------|---------------|
| 1. τῷ Γ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ Γ γωνία.   |
| 2. δὲ πρὸς τῷ Γ γωνία . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | γὰρ πρὸς τῷ Γ |

| EDITIO PARISIENSIS.                                        | CODEX 190.             | EDITIO OXONIE.                                   |
|------------------------------------------------------------|------------------------|--------------------------------------------------|
| 3. ὡς . . . . .                                            | καὶ ὡς . . . . .       | ὡς                                               |
| 4. καὶ . . . . .                                           | deest. . . . .         | καὶ                                              |
| 5. Καὶ . . . . .                                           | deest. . . . .         | Καὶ                                              |
| 6. γωνία . . . . .                                         | Id. . . . .            | deest.                                           |
| 7. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ABE .                               | Id. . . . .            | Καὶ ἐπεὶ τοῦ ABE κύκλου                          |
| 8. εἰς . . . . .                                           | Id. . . . .            | ἐπὶ                                              |
| 9. τῷ ἑναλλάξ τοῦ κύκλου . .                               | ἑναλλάξ τοῦ κύκλου . . | τῷ ἑναλλάξ                                       |
| 10. ἴστω πάλιν . . . . .                                   | Id. . . . .            | πάλιν ἴστω                                       |
| 11. γωνία . . . . .                                        | Id. . . . .            | deest.                                           |
| 12. Ἴση ἴστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΔ<br>γωνία τῇ ἐν τῷ AEB τμημάτι, | Id. . . . .            | ἴστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ἐν τῷ<br>AEB τμηματι ἴση, |
| 13. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ<br>ἴση ἴστί.                | Id. . . . .            | ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἴστι<br>ἴση.              |
| 14. Καὶ ἡ ἐν τῷ AEB τμηματι<br>ἄρα ἴση ἴστί τῇ πρὸς τῷ Γ   | Id. . . . .            | deest.                                           |
| 15. ἡ . . . . .                                            | Id. . . . .            | deest.                                           |
| 16. ἰσχύσθω ὡς ὁ AEB. . . . .                              | Id. . . . .            | οἰσχύσθω ὡς AEB.                                 |
| 20. ἦκται . . . . .                                        | ἴστιν . . . . .        | ἦκται                                            |
| 21. ἄρα δοθείσης . . . . .                                 | Id. . . . .            | δοθείσης ἄρα                                     |

PROPOSITIO XXXIV.

|                                               |                |                              |
|-----------------------------------------------|----------------|------------------------------|
| 1. δοθείση γωνία εὐθυγράμμου τῇ<br>πρὸς τῷ Δ. | Id. . . . .    | πρὸς τὸ Δ γωνία.             |
| 2. κύκλου . . . . .                           | deest. . . . . | κύκλου                       |
| 3. ἴση ἴστί τῇ πρὸς τῷ Δ γωνία.               | Id. . . . .    | γωνία ἴση ἴστί τῇ πρὸς τῷ Δ. |

PROPOSITIO XXXV.

|                                |                |                            |
|--------------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. τῶν . . . . .               | deest. . . . . | τῶν                        |
| 2. Μὴ ἴστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ .   | Id. . . . .    | Ἐστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ μὴ    |
| 3. κύκλου, . . . . .           | Id. . . . .    | deest.                     |
| 4. τμήμι . . . . .             | Id. . . . .    | τμήμι                      |
| 5. προσκείσθω κοινὸν . . . . . | Id. . . . .    | κοινὸν προσκείσθω          |
| 7. εἰδείχθη δὲ ὅτι . . . . .   | ὡστί . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXXVI.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                                                   | CODEX 190.     | EDITIO OXONIE.                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. περιεχόμενον ὀρθογώνιον . . .                                                                                                      | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                                              |
| 2. ἢ ἄρα ΔΓΑ . . . . .                                                                                                                | Id. . . . .    | ἢ ΔΓΑ                                                                                                                   |
| 3. ΑΔ, ΔΓ . . . . .                                                                                                                   | ΑΔΓ . . . . .  | ΑΔ, ΔΓ                                                                                                                  |
| 4. τῶ δὲ ἀπὸ τῆς Ζ ἴσα ἐστὶ τὰ                                                                                                        | Id. . . . .    | ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ τοῖς                                                                                              |
| 5. ὀρθὴ γὰρ ἢ ὑπὸ ΖΒΔ . . . .                                                                                                         | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                                              |
| 6. σημείον, . . . . .                                                                                                                 | Id. . . . .    | deest.                                                                                                                  |
| 7. ἴσον . . . . .                                                                                                                     | Id. . . . .    | ἴσα                                                                                                                     |
| 8. Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ<br>ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ὀρθὴ γὰρ<br>ἢ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ<br>τῶν ΕΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ<br>τῆς ΕΔ· | Id. . . . .    | τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον<br>τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ, ὀρθὴ γὰρ ἢ<br>ὑπὸ ΕΖΔ· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ,<br>ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ· |

## PROPOSITIO XXXVII.

|                                                 |               |                              |
|-------------------------------------------------|---------------|------------------------------|
| 1. τῆς . . . . .                                | Id. . . . .   | deest.                       |
| 2. ΑΔ, ΔΓ . . . . .                             | ΑΔΓ . . . . . | ΑΔ, ΔΓ                       |
| 3. τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου,<br>καὶ ἴστω τὸ Ζ, | Id. . . . .   | τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, |
| 4. Ἦν δὲ καὶ . . . . .                          | Id. . . . .   | ὑποκειται δὲ                 |
| 5. ἐστὶ . . . . .                               | Id. . . . .   | deest.                       |
| linea 10 paginae 194.                           |               |                              |
| 6. καὶ τοῦ κύκλου· ἢ ΔΒ ἄρα<br>ἐράπτται         | Id. . . . .   | deest.                       |

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

| EDITIO PARIISIENSIS.                                                      | CODEX 190.     | EDITIO OXONIE.                                              |
|---------------------------------------------------------------------------|----------------|-------------------------------------------------------------|
| β'. (1) δὲ . . . . .                                                      | deest. . . . . | δὲ                                                          |
| δ'. (2) τοῦ περιγραφομένου ἐφάπ-<br>τται τῆς τοῦ κύκλου περιφε-<br>ρείας. | Id. . . . .    | τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας τοῦ<br>περιγραφομένου ἐφάπτεται. |
| ε'. (3) εἰς σχῆμα ὁμοίως . . .                                            | Id. . . . .    | ὁμοίως εἰς σχῆμα                                            |

PROPOSITIO I.

|                        |                |                                                     |
|------------------------|----------------|-----------------------------------------------------|
| 1. δὲ . . . . .        | Id. . . . .    | δὲ οὐ                                               |
| 2. κείσθω . . . . .    | Id. . . . .    | καὶ κείσθω                                          |
| 3. μὲν . . . . .       | deest. . . . . | μὲν                                                 |
| 4. τῆ Δ ἢ ΓΕ . . . . . | Id. . . . .    | ἢ Δ τῆ ΓΕ                                           |
| 5. εὐθεία, . . . . .   | Id. . . . .    | εὐθεία, μὴ μείζονι οὐσῇ τῆς τοῦ<br>κύκλου διαμέτρου |

PROPOSITIO II.

|                                                                                                |                |                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|---------------------------------------------|
| 1. πρὸς . . . . .                                                                              | Id. . . . .    | πρὸς μὲν                                    |
| 2. πάλιν, πρὸς . . . . .                                                                       | Id. . . . .    | πρὸς δὲ                                     |
| 3. ΖΔΕ . . . . .                                                                               | Id. . . . .    | ΖΔΕ γωνία                                   |
| 4. ἡ ΘΑ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α<br>ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται<br>εὐθεῖα ἢ ΑΓ.                | Id. . . . .    | ἡ ΘΑΗ, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς διῆκται<br>τις ἢ ΑΓ. |
| 5. ἰσογώνιον ἄρα ἴστί τὸ ΑΒΓ<br>τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ<br>ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒ κύκλον. | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                  |

PROPOSITIO III.

|                                  |             |                                               |
|----------------------------------|-------------|-----------------------------------------------|
| 1. ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκατέρα τὰ μέρη κατὰ | Id. . . . . | ἐφ' ἑκατέρα τὰ μέρη ἢ ΕΖ ἐπὶ                  |
| 2. σημεῖα, καὶ . . . . .         | Id. . . . . | ἀπὸ δὲ τοῦ Κ κέντρου ἐπέκτα Α, Β,<br>Γ σημεῖα |

486 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUARTUS.

EDITIO PARIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

3. καὶ εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΜΑΚ, *Id.* . . . . . τετράπλευρον ὧν αἱ ὑπὸ ΚΑΜ,  
 ΚΒΜ γωνίαι  
 ΚΒΜ γωνίας δύο ὀρθαί εἰσιν
4. λοιπῇ . . . . . *deest.* . . . . . λοιπῇ

PROPOSITIO IV.

1. ΔΒΓ, . . . . . *Id.* . . . . . ΓΒΔ, δίχα γὰρ τέμνεται ἢ ὑπὸ  
 ΑΒΓ,  
 2. ταῖς . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*  
 3. τῶν . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*  
 4. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθείαι αἱ ΔΕ, *Id.* . . . . . *deest.*  
 ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν·  
 5. καὶ . . . . . *Id.* . . . . . μὲν  
 6. ἐδίχθη· . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*  
 7. ὁ . . . . . *deest.* . . . . . ὁ  
 8. εἰς . . . . . *Id.* . . . . . ἐπὶ  
 9. Εγγεγράφθω ὡς ΖΕΗ. . . . . *Id.* . . . . . *deest.*  
 10. ὁ . . . . . *deest.* . . . . . ὁ

PROPOSITIO V.

1. εὐθεῖα . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*  
 2. οὖν ἐντὸς πρότερον . . . . . *Id.* . . . . . πρότερον ἐντὸς  
 3. ἴσιν ἴση. . . . . *Id.* . . . . . ἴση ἴσιν.  
 4. ἴσιν . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*  
 5. Περιγραφέσθω . . . . . *Id.* . . . . . Καὶ περιγραφέσθω  
 6. ἴσιν . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*  
 7. πάλιν . . . . . *deest.* . . . . . πάλιν  
 8. Καὶ γεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓ. . . . . *deest.* . . . . . concordat cum. edit. Paris.

COROLLARIUM.

9. εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἢ *Id. a.* . . . . . ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα, ὀρθή  
 ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ  
 τυγχάνουσα ὀρθή ἐστίν· ὁ τε δὲ  
 κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τρι-  
 γώνου πίπτει,

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUARTUS. 487

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                            |                            |              |
|----------------------------|----------------------------|--------------|
| 10. τοῦ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .       | deest.       |
| 11. συμπίσσωνται . . . . . | πίσσωνται . . . . .        | συμπίσσωνται |
| 12. τῆς ΒΓ . . . . .       | τῆς ΒΓ. Ὁπερ ἴδει ποιῆσαι. | τῆς ΒΓ.      |

PROPOSITIO VI.

|                                  |                      |                            |
|----------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ὄν . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. δύο . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. Διὰ . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | κατὰ                       |
| 4. γωνία. . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 5. δοθέντα ΑΒΓΔ κύκλον . . . . . | ΑΒΓΔ κύκλον. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἄρα δοθέντα . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | δοθέντα ἄρα                |

PROPOSITIO VII.

|                                                                          |                      |                            |
|--------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ὁμοίους κύκλους ὁ . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . . | ὁμοίους κύκλους            |
| 2. δὴ . . . . .                                                          | <i>Id.</i> . . . . . | δὴ                         |
| 3. καὶ . . . . .                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. ἴστί παράλληλος. . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . . | παράλληλός ἴστιν.          |
| 5. Ὡστε καὶ ἡ ΗΘ τῆ ΖΚ ἴστί<br>παράλληλος. . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 6. καὶ . . . . .                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 7. ΖΚ . . . . .                                                          | <i>Id.</i> . . . . . | ΖΚ ἴστί ἴση.               |
| 8. καὶ ἑκατέρω ἄρα τῶν ΗΘ,<br>ΖΚ ἑκατέρω τῶν ΗΖ, ΘΚ ἴστί<br>ἴση. . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 9. δὴ . . . . .                                                          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 10. τετράπλευρον . . . . .                                               | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO VIII.

|                          |                      |             |
|--------------------------|----------------------|-------------|
| 1. εἰσί. . . . .         | deest. . . . .       | εἰσί.       |
| 2. ἴσαι εἰσίν, . . . . . | deest. . . . .       | ἴσαι εἰσίν, |
| 3. εἰσίν. . . . .        | deest. . . . .       | εἰσίν.      |
| 4. ἰδίχθη . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.      |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

- |                           |                      |              |
|---------------------------|----------------------|--------------|
| 5. μὲν . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |
| 6. ἄρα τὸ δοθὲν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ δοθὲν ἄρα |

PROPOSITIO IX.

- |                                                       |                      |                                                      |
|-------------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------------------|
| 1. ἴση . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσῃ ἐστίν.                                           |
| 2. γωνία ἄρα ἴση ἐστίν ἢ ὑπὸ ΔΑΓ<br>γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ. | <i>Id.</i> . . . . . | ἢ ἄρα γωνία ἢ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία<br>τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐστίν ἴση. |

PROPOSITIO X.

- |                                                |                      |                                          |
|------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------|
| 1. καὶ κέντρον τῷ Α, καὶ δια-<br>στήματι τῷ ΑΒ | <i>Id.</i> . . . . . | κέντρον μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ<br>τῷ ΑΒ |
| 2. τῶν . . . . .                               | deest. . . . .       | τῶν                                      |
| 3. Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται μὲν ἢ ΒΔ,                | <i>Id.</i> . . . . . | Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἢ ΒΔ,                 |
| 4. ἢ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴση . . .                     | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἢ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴση                    |
| 5. γωνία . . . . .                             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                   |
| 6. εἰσι διπλασίους. . . . .                    | <i>Id.</i> . . . . . | διπλασίους εἰσίν.                        |
| 7. καὶ . . . . .                               | deest. . . . .       | καὶ                                      |
| 8. τῆς ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ διπλῆ. .                   | <i>Id.</i> . . . . . | διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ.                  |

PROPOSITIO XI.

- |                                                                                                                       |                      |                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ.<br>δεῖ δὲ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον<br>πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ<br>ἰσογώνιον ἐγγράψαι | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τῷ πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν .                                                                                         | λοιπῶν . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἑκατέρας . . . . .                                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. ΔΕ, ΕΑ . . . . .                                                                                                   | ΓΕ, ΔΕ, ΕΑ . . . . . | ΔΕ, ΕΑ                     |
| 5. ἐστίν ἴση, . . . . .                                                                                               | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶ,                  |
| 6. ἐστίν ἴση. . . . .                                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶ.                  |
| 7. ἄρα γωνία . . . . .                                                                                                | <i>Id.</i> . . . . . | γωνία ἄρα                  |
| 8. ἐστίν ἴση. . . . .                                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶ.                  |

PROPOSITIO XII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                          | CODEX 190.                                                                                 | EDITIO OXONIE.                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἴσθιν . . . . .                                                                                           | <i>Id.</i> . . . . .                                                                       | deest.                                                                                 |
| 2. ἴσον ἴσθι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ .                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .                                                                       | τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον                                                                     |
| 3. Ὡστε τὰ . . . . .                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                                                                       | τὰ ἄρα                                                                                 |
| 4. λοιπῶ . . . . .                                                                                           | deest. . . . .                                                                             | λοιπῶ                                                                                  |
| 5. ΓΚ τῆ ΒΚ . . . . .                                                                                        | <i>Id.</i> . . . . .                                                                       | ΒΚ τῆ ΓΚ.                                                                              |
| 6. ἴσθιν ἴση γωνία ἄρα ἢ μὲν ὑπὸ<br>ΒΖΚ γωνία τῆ ὑπὸ ΚΖΓ ἴσθιν<br>ἴση, ἢ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῆ ὑπὸ ΖΚΓ<br>ἴσθιν ἴση. | <i>Id.</i> γωνία ἄρα ἢ μὲν ὑπὸ<br>ΒΖΚ τῆ ὑπὸ ΚΖΓ ἴσθιν,<br>ἴση ἢ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῆ<br>ὑπὸ ΖΚΓ. | concordat cum edit. Paris.                                                             |
| 7. διπλῆ . . . . .                                                                                           | deest. . . . .                                                                             | διπλῆ                                                                                  |
| 8. ἴσθι δὲ καὶ ἢ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία<br>τῆ ὑπὸ ΖΓΔ ἴση.                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                                                                       | deest.<br>deest.                                                                       |
| 9. ἴσθι . . . . .                                                                                            | deest. . . . .                                                                             | ἴσθι                                                                                   |
| 10. ἱκατέραν ἱκατέρα, . . . . .                                                                              | desunt. . . . .                                                                            | concordat cum edit. Paris.                                                             |
| 11. Καὶ ἴσθιν ἢ ΒΚ τῆ ΚΓ ἴση                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .                                                                       | Καὶ ἐπεὶ εἰδείχθη ἴση ἢ ΒΚ τῆ Γ,<br>καὶ ἴσθι διπλῆ ἢ μὲν ΛΔ τῆς<br>ΚΓ, ἢ δὲ ΘΚ τῆς ΒΚ. |

PROPOSITIO XIII.

|                                          |                      |                                       |
|------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------|
| 1. ἰσόπλευρόν . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσθιν ἰσόπλευρόν                      |
| 2. ὑπὸ . . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . . | ὑφ                                    |
| 3. ἴσθι . . . . .                        | deest. . . . .       | ἴσθι                                  |
| 4. ἴσθιν ἴσον, . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἴσθι,                            |
| 5. ἴσονται, . . . . .                    | <i>Id.</i> . . . . . | εἰσὶν                                 |
| 6. διπλῆ ἴσθιν ἢ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς<br>ὑπὸ ΓΔΖ, | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσθιν ἢ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ<br>διπλῆ, |
| 7. ὀρθῆ . . . . .                        | deest. . . . .       | ὀρθῆ                                  |
| 8. ταῖς . . . . .                        | deest. . . . .       | ταῖς                                  |
| 9. κύκλος . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                |

PROPOSITIO XIV.

|                 |                      |        |
|-----------------|----------------------|--------|
| 1. ζ . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | ὑπερ   |
| 2. αἰ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

490 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUARTUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

- |                              |                      |                                                                                   |
|------------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 3. καὶ διαστήματι . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | διαστήματι δὲ                                                                     |
| 4. περιγεγραμμένος . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ<br>πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρον<br>καὶ ἰσογώνιον. |
| 5. ἄρα τὸ δοθὲν . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ δοθὲν ἄρα                                                                      |

PROPOSITIO XV.

- |                          |                      |                  |
|--------------------------|----------------------|------------------|
| 1. ἴση ἐστίν· . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶν ἴση·       |
| 2. αἰ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |
| 3. ΖΑΒΓΔ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ΖΑΒΓΔ περιφέρεια |
| 4. ΕΔΓΒΑ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ΕΔΓΒΑ περιφέρεια |
| 5. περιφέρειας . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |
| 6. δὴ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | δὲ               |
| 7. ἐστὶ . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |

COROLLARIUM.

- |                                             |                                                                      |                            |
|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 8. Καὶ ἰὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων | Ὁ ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἰὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλον διαμερῶν | concordat cum edit. Paris. |
| 9. τε καὶ περιγράφωμεν, . . .               | Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι. . .                                               | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XVI.

- |                                         |                        |                            |
|-----------------------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1. Εγγεγράφω . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . .   | Γεγράφω                    |
| 2. ἴσται . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . .   | ἐστὶ                       |
| 3. εὐθείας, . . . . .                   | deest. . . . .         | εὐθείας,                   |
| 4. εἰρημένους, . . . . .                | δείξω . . . . .        | εἰρημένους                 |
| 5. ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, | deest. . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 6. deest. . . . .                       | Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι. . . | deest.                     |

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                                                                                                         | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| γ'. (1) πρὸς ἄλληλα . . . .                                                                                                                                                                 | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                                                         |
| δ'. (2) Αναλογία δὲ, ἢ τῶν λόγων<br>ταυτότης.                                                                                                                                               | Id. a. c. . . . .    | hæc definitio, quæ est octava<br>in edit. Oxoniæ, ita se<br>habet : Αναλογία δὲ ἐστὶν ἢ<br>τῶν ὁμοιότης. <i>b.</i> |
| ε'. (3) ὑπερέχη, ἢ ἅμα ἴσα ἤ, ἢ<br>ἅμα ἐλλείπη                                                                                                                                              | Id. . . . .          | ἐλλείπη, ἢ ἅμα ἴσα ἤ, ἢ ἅμα<br>ὑπερέχη                                                                             |
| ζ'. (4) λόγον μεγέθη, . . . .                                                                                                                                                               | Id. . . . .          | μεγέθη λόγον,                                                                                                      |
| θ'. (5) ἐλαχίστη . . . . .                                                                                                                                                                  | Id. . . . .          | ἐλαχίστοις                                                                                                         |
| ια'. (6) τὸ . . . . .                                                                                                                                                                       | deest. . . . .       | τὸ                                                                                                                 |
| (7) ὁμοίως ὡς . . . . .                                                                                                                                                                     | Id. . . . .          | ἐνὶ πλείον, ὡς                                                                                                     |
| ιβ'. (8) λέγεται, . . . . .                                                                                                                                                                 | Id. . . . .          | λέγεται εἶναι,                                                                                                     |
| ισ'. (9) δὲ . . . . .                                                                                                                                                                       | deest. . . . .       | δὲ                                                                                                                 |
| ιη'. (10) αὐτοῖς ἴσων . . . .                                                                                                                                                               | Id. . . . .          | ἴσων αὐτοῖς                                                                                                        |
| ιθ'. (11) Τεταγμένη ἀναλογία ἐσ-<br>τίν, ὅταν ἢ ὡς ἠγούμενον πρὸς<br>ἐπόμενον οὕτως ἠγούμενον πρὸς<br>τὸ ἐπόμενον, ἢ δὲ καὶ ὡς ἐπί-<br>μενον πρὸς ἄλλο τι οὕτως ἐπί-<br>μενον πρὸς ἄλλο τι. | deest. a. c. . . . . | concordat cum edit. Paris. <i>b.</i>                                                                               |
| κ'. (12) αὐτοῖς ἴσων . . . .                                                                                                                                                                | Id. . . . .          | ἴσων αὐτοῖς                                                                                                        |
| (13) μετίθεσιν . . . . .                                                                                                                                                                    | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                                                         |

PROPOSITIO I.

|                                 |             |                         |
|---------------------------------|-------------|-------------------------|
| 1. μεγέθων . . . . .            | Id. . . . . | deest.                  |
| 2. ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθη . . .  | Id. . . . . | μεγέθη ἐστὶν ἐν τῷ AB   |
| 2. AH, HB τῷ πλάθει τῶν ΓΘ, ΘΔ. | Id. . . . . | ΓΘ, ΘΔ τῷ πλάθει AH, HB |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. ἴσα ἄρα καὶ τὰ AH, ΓΘ τοῖς ἴσον ἄρα τὸ AH τῷ E, concordat cum edit. Paris.  
 E, Z. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ καὶ τὰ AH, ΓΘ τοῖς his tantum exceptis : in  
 τὸ HB τῷ E, καὶ τὸ ΘΔ τῷ Z. E, Z. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ edit. Paris. legitur ἴσον ἐστὶ,  
 ἴσα ἄρα καὶ τὰ HB, ΘΔ τοῖς ἴσον ἐστὶ τὸ HB τῷ E, in edit. vero Oxoniæ legi-  
 E, Z. καὶ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z. tur ἐστὶν ἴσον.

PROPOSITIO II.

1. μεγέθη . . . . . deest. . . . . μεγέθη  
 2. ἄρα . . . . . Id. . . . . ἄρα τὸ

PROPOSITIO III.

1. ἴσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον. . . ἴσαπλάσιον . . . . . concordat cum edit. Paris.  
 2. τοσαῦτα . . . . . Id. . . . . τοσαῦτα δὴ  
 3. μὴν . . . . . Id. . . . . deest.  
 4. δὴ . . . . . Id. . . . . δὴ

PROPOSITIO IV.

1. ἐστὶν ὡς τὸ E πρὸς τὸ H, . . Id. . . . . ὡς τὸ E πρὸς τὸ H ἐστὶν,  
 2. ἀλλὰ ἔτυχεν . . . . . Id. . . . . deest.  
 3. ἑλαττων. Καὶ ἐστὶ . . . ἑλαττων. Καὶ ἐπι ὑπερί- ἐλάττων. Καὶ ἐστὶ  
 χει τὸ K τοῦ M, καὶ τὸ  
 Λ τοῦ N, καὶ εἰ ἴσον, .  
 ἴσον, καὶ εἰ ἐλάττων,  
 ἑλαττων. Καὶ ἐστὶ

COROLLARIUM.

4. ὅτι . . . . . deest. . . . . ὅτι

PROPOSITIO V.

1. καὶ τὸ EB τοῦ HG ἴσάκεις ἄρα Id. . . . . deest.  
 ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AE τοῦ  
 ΓZ,  
 2. ἴσται . . . . . Id. . . . . ἐστὶ

PROPOSITIO VI.

| EDITIO PARISIENSIS.     | CODEX 190.          | EDITIO OXONIE.             |
|-------------------------|---------------------|----------------------------|
| 1. τῷ Z ἴσον . . . . .  | ἴσον τῷ Z . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ . . . . .        | deest. . . . .      | καὶ                        |
| 3. τῷ Z τὸ ΚΓ . . . . . | Id. . . . .         | τὸ ΚΓ τῷ Z                 |
| 4. ἐστὶν ἴσον. . . . .  | Id. . . . .         | ἴσον ἐστὶν.                |
| 5. εἰ . . . . .         | Id. . . . .         | ὅτε                        |

PROPOSITIO VII.

|                                 |                                                                                                                              |                                        |
|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| 1. τι . . . . .                 | Id. . . . .                                                                                                                  | deest.                                 |
| 2. μὲν . . . . .                | Id. . . . .                                                                                                                  | deest.                                 |
| 3. τοῦ Γ πολλαπλάσιον . . . . . | deest. . . . .                                                                                                               | concordat cum edit. Paris.             |
| 4. ἐστὶν . . . . .              | Id. . . . .                                                                                                                  | deest.                                 |
| 5. δὴ . . . . .                 | deest. . . . .                                                                                                               | δὴ                                     |
| 6. δὴ . . . . .                 | Id. . . . .                                                                                                                  | deest.                                 |
| 7. τὸ Z . . . . .               | Id. . . . .                                                                                                                  | deest.                                 |
| 8. deest. . . . .               | Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου<br>φανερὸν ὅτι εἰάν μεγέθη<br>τινὰ ἀνάλογον ἦ, καὶ<br>ἀναπάλιν ἀνάλογον ἔσ-<br>ται. Ὅπρι εἶδει διῆξαι. | deest in omnibus aliis codi-<br>cibus. |

PROPOSITIO VIII.

|                                                                                                                                                                                                                              |             |                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-------------------------------------------------------|
| 1. AB, . . . . .                                                                                                                                                                                                             | Id. . . . . | AB τοῦ Γ                                              |
| 2. καὶ ἔστω . . . . .                                                                                                                                                                                                        | Id. . . . . | ἕως τοῦ τὸ γινόμενον μείζον ἔσται<br>τοῦ Δ. Καὶ ἔσται |
| 3. οὗ . . . . .                                                                                                                                                                                                              | Id. . . . . | ἄν                                                    |
| 4. τὸ . . . . .                                                                                                                                                                                                              | Id. . . . . | deest.                                                |
| 5. ἐπειδήπερ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλά-<br>σιόν ἐστι, συναμφότερα δὲ τὰ<br>Δ, Μ τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια,<br>ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετρα-<br>πλάσιον· συναμφότερα ἄρα τὰ<br>Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ<br>ΖΘ τῶν Δ, Μ μείζων ἐστίν· | Id. . . . . | desunt.                                               |
| 6. τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ . . . . .                                                                                                                                                                                                  | Id. . . . . | τοῦ δὲ ΖΘ                                             |

PROPOSITIO IX.

| EDITIO PARISIENSIS.          | CODEX 190.       | EDITIO OXONIE.       |
|------------------------------|------------------|----------------------|
| 7. τοῦ EB μίζον ἴστω . . .   | <i>Id.</i> . . . | μίζων ἴστω τοῦ EB.   |
| 8. μὴ ἔλασσον εἶναι, . . .   | <i>Id.</i> . . . | οὐκ ἐστὶν ἔλασσον,   |
| 9. ὡσαύτως . . .             | <i>Id.</i> . . . | ὡσαύτως              |
| 1. ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις . . . | ἐκεῖνα ἴσα. . .  | κακεῖνα ἴσα ἀλλήλοις |

PROPOSITIO X.

|                                |                         |                         |
|--------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1. τὸν . . .                   | deest. . .              | τὸν                     |
| 2. τὸν ἐλάσσονα εἶχε λόγον . . | ἐλάσσονα εἶχε λόγον . . | τὸν ἐλάσσονα λόγον εἶχε |
| 3. ὅτι . . .                   | deest. . .              | ὅτι                     |

PROPOSITIO XI.

|                                                    |                         |                                         |
|----------------------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------------|
| 1. λόγοι . . .                                     | λόγῳ . . .              | λόγοι                                   |
| 1. μὲν . . .                                       | deest. . .              | μὲν                                     |
| 2. μὲν . . .                                       | <i>Id.</i> . . .        | deest.                                  |
| 3. ἀλλὰ ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλα-<br>πλάσια τὰ Λ, Μ. |                         | ἰσάκεις πολλαπλάσια ἂ ἔτυχε τὰ<br>Λ, Μ. |
| 4. ἴσον, ἴσον . . .                                | ἴσον ἐστὶν, ἴσον . . .  | concordat cum edit. Paris.              |
| 5. ἔλαττον, ἔλαττον . . .                          | ἐλλείπει, ἐλλείπει. . . | concordat cum edit. Paris.              |
| 6. μὲν . . .                                       | <i>Id.</i> . . .        | deest.                                  |

PROPOSITIO XII.

|                                  |                               |                            |
|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 1. τὰ Η, Θ, Κ, τῶν Λ, Μ, Ν.      | τὸ Η, Θ, Κ τῶν Λ, Μ, Ν.       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἴσα καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσονα. | ἴσον καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἂν . . .                      | <i>Id.</i> . . .              | εἰάν                       |
| 4. πολλαπλάσια, . . .            | πολλαπλάσιον, . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τὰ . . .                      | τὰ . . .                      | τὸ                         |

PROPOSITIO XIII.

|                                  |                      |                            |
|----------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἥπερ . . .                    | ἡ . . .              | ἥπερ                       |
| 2. ἥπερ . . .                    | ἡ . . .              | ἥπερ                       |
| 3. μὲν . . .                     | <i>Id.</i> . . .     | deest.                     |
| 4. ἥπερ . . .                    | <i>Id.</i> . . .     | ἥπερ                       |
| 5. πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ. | τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ . . . | concordat cum edit. Paris. |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

6. τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον *deest.* . . . . . concordat cum edit. Paris.  
 ἔχει ἥπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ<sup>ο</sup>
7. τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου ὑπερ- *Id.* . . . . . ὑπερήχει τοῦ Δ πολλαπλασίου,  
 ἔχει,
8. μὴ . . . . . *Id.* . . . . . οὐχ

PROPOSITIO XIV.

1. μείζον ἔστι τὸ Α τοῦ Γ, . . . *Id.* . . . . . τὸ Α τοῦ Γ μείζον ἔστιν,  
 2. μέγεθος . . . . . *deest.* . . . . . μέγεθος  
 3. καὶ . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*

PROPOSITIO XV.

1. μέγεθι . . . . . *deest.* . . . . . μέγεθι

PROPOSITIO XVI.

1. ἀνάλογον ἔστιν, . . . . . ἔστιν . . . . . ἀνάλογον ἔσται,  
 2. ληφθέντα κατάλληλα<sup>ο</sup> . . . *deest.* . . . . . concordat cum edit. Paris.  
 3. καὶ εἰ . . . . . *Id.* . . . . . καὶ  
 4. καὶ εἰ . . . . . *Id.* . . . . . καὶ

PROPOSITIO XVII.

1. ἔστι . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*  
 2. τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΜ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ *concordat cum edit. Paris.*  
 τοῦ ΓΖ. ΗΚ τοῦ ΑΒ.  
 3. ἀλλὰ ἂ ἔτυχεν . . . . . *deest.* . . . . . concordat cum edit. Paris.  
 4. τὰ . . . . . *Id.* . . . . . διὰ τὰ

PROPOSITIO XVIII.

1. τὸ . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*

PROPOSITIO XIX.

1. τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ . . . . . *Id.* . . . . . ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ  
 2. ἄρα . . . . . *deest.* . . . . . ἄρα  
 3. ἰσαλλάξ . . . . . *Id.* . . . . . ἰσαλλάξ ἄρα ἔστιν

C O R O L L A R I U M .

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

4. Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἔστιν ἀναστρέφαντι.

concordat cum edit. Oxoniæ.

Καὶ ἐπεὶ εἰδείχθη ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ ἔστιν ἀναστρέφαντι.

PROPOSITIO XX.

- |                                        |                                 |                                  |
|----------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 1. καὶ . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . .            | deest.                           |
| 2. καὶ ἰάν . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . .            | κᾶν                              |
| 3. καὶ ἰάν . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . .            | κᾶν                              |
| 4. τι . . . . .                        | <i>Id.</i> . . . . .            | ὁ ἔτυχε                          |
| 5. οὕτως . . . . .                     | deest. . . . .                  | οὕτως                            |
| 6. δὲ τὸ Γ πρὸς τὴ Β . . . . .         | δὲ Γ πρὸς Β . . . . .           | concordat cum edit Paris.        |
| 7. τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον . . . . . | τὸ μείζονα λόγον ἔχον . . . . . | τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον ἰκείνο |

PROPOSITIO XXI.

- |                                           |                           |                                                                |
|-------------------------------------------|---------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 1. μεγέθη . . . . .                       | μεγέθη ἀνάλογον . . . . . | μεγέθη                                                         |
| 2. ἴστί . . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . .      | deest.                                                         |
| 3. ἢ τὸ A τῶ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῶ Ζ· | <i>Id.</i> . . . . .      | ἴσον· δηλονότι κᾶν ἴσον ἢ τὸ A τῶ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῶ Ζ· |

PROPOSITIO XXII.

- |                                                   |                                                              |                            |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. καὶ . . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . .                                         | deest.                     |
| 2. ἔσται, ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. | ἔσται . . . . .                                              | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸ Ζ.                                          | Καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἴστί ὡς τὸ A πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ. | deest.                     |

PROPOSITIO XXIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIENSIS.

1. καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ τὰ Θ, Κ τῶν Β, Δ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκεις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ. Ἀλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ.

*Id. a, c, d.*

καὶ εἴληπται τῶν Β, Δ ἰσάκεις πολλαπλασία τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε ἄλλα ἂ ἐτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὸ Α, Μ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Α οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. *b.*

PROPOSITIO XXIV.

- |                           |                      |           |
|---------------------------|----------------------|-----------|
| 1. ἔχη . . . . .          | ἔχει . . . . .       | ἔχη       |
| 2. μὲν . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.    |
| 3. πρῶτον . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ πρῶτον |
| 4. ἔστιν ἄρα ὡς . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ὡς ἄρα    |

PROPOSITIO XXV.

- |                                   |                      |                                |
|-----------------------------------|----------------------|--------------------------------|
| 1. δύο . . . . .                  | τὰ δύο . . . . .     | δύο                            |
| 2. μὲν . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                         |
| 3. οὖν . . . . .                  | deest. . . . .       | οὖν                            |
| 4. τὸ μὲν Ε τῶ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ τῶ ΓΘ· | <i>Id.</i> . . . . . | τῶ μὲν Ε τὸ ΑΗ, τῶ δὲ Ζ τὸ ΓΘ· |
| 5. ἄνισα ἐστίν· . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶν ἄνισα·                   |
| 6. μὲν . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                         |

## LIBER SEXTUS.

## DEFINITIONES.

| EDITIO PARISIENSIS.     | CODEX 190.                                                                                        | EDITIO OXONIÆ.                                                                                                                                                                |
|-------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| β'. (1) λόγων . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .                                                                              | ὄροι                                                                                                                                                                          |
| γ'. (2) ἢ . . . . .     | deest. . . . .                                                                                    | ἢ                                                                                                                                                                             |
| ι. (3) deest. . . . .   | hæc definitio, quæ in<br>Euclide nullum ha-<br>bet usum, in mar-<br>gine tantum exa-<br>rata est. | Λόγος ἐκ λόγων συγκείσθαι λέγεται,<br>ἔταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες<br>ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖ-<br>σαι, τριῶσι τινάς. <i>a, b, c,</i><br><i>d, e, f, g, h, k, l, m, n.</i> |

## PROPOSITIO I.

|                                                     |                                           |                            |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ὅτι τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν<br>ΒΔ κάθετον ἀγμένην· | τὸ ΑΓ . . . . .                           | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ὅσαι διηχοῦν . . . . .                           | deest. . . . .                            | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἕλαττων,<br>ἕλαττον·           | ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἕλατ-<br>τον, ἕλαττον· | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἢ μὲν . . . . .                                  | μὲν ἢ . . . . .                           | ἢ μὲν                      |
| 5. τρίγωνον, . . . . .                              | <i>Id.</i> . . . . .                      | deest.                     |
| 6. τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον                    | <i>Id.</i> . . . . .                      | πρὸς τὸ ΑΓΔ                |
| 7. παραλληλόγραμμον. . . . .                        | <i>Id.</i> . . . . .                      | deest.                     |

## PROPOSITIO II.

|                        |                      |                     |
|------------------------|----------------------|---------------------|
| 1. εὐθεῖα, . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | εὐθεῖα παράλληλος   |
| 2. πλευράν. . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | πλευράν παράλληλος. |
| 3. δὴ . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα                 |
| 4. τρίγωνον . . . . .  | deest. . . . .       | τρίγωνον            |
| 5. δὴ . . . . .        | δὴ καὶ . . . . .     | δὴ                  |
| 6. τρίγωνον, . . . . . | τρίγωνον . . . . .   | deest.              |
| 7. τρίγωνον· . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.              |
| 8. τρίγωνον . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.              |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                        |                      |          |
|------------------------|----------------------|----------|
| 9. τρίγωνον . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | : deest. |
| 10. τρίγωνον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.   |
| 11. καὶ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.   |

PROPOSITIO III.

|                                                                |                      |                                                         |
|----------------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------------------|
| 1. τῆς . . . . .                                               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                  |
| 2. ἡ . . . . .                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                  |
| 3. ἐρέπεσεν . . . . .                                          | <i>Id.</i> . . . . . | ἐμπέπτωκεν                                              |
| 4. ἄρα γωνία . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                  |
| 5. ὡς ἄρα . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστιν ἄρα                                               |
| 6. ὡς . . . . .                                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                  |
| 7. ἐστὶν . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                  |
| 8. ἦκται . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . . | ἦται παράλληλος                                         |
| 9. ἴση, ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῆ<br>ἐναλλάξ τῆ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση. | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστιν ἴση, ἴση δὲ καὶ ὑπὸ ΑΓΕ τῆ<br>ἐναλλάξ τῆ ὑπὸ ΓΑΔ. |
| 10. γωνία . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                  |

PROPOSITIO IV.

|                                                                                                       |                                     |                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. πλευραὶ . . . . .                                                                                  | deest. . . . .                      | πλευραὶ                                                                                     |
| 2. Ἐστω . . . . .                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                | Ἐτώσαν                                                                                      |
| 3. μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῆ ὑπὸ<br>ΓΔΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῆ ὑπὸ<br>ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΒΓ τῆ<br>ὑπὸ ΔΓΕ. | <i>Id.</i> . . . . .                | ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆ ὑπὸ ΔΓΕ, τὴν<br>δὲ ὑπὸ ΑΓΕ τῆ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ<br>ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῆ ὑπὸ ΓΔΕ. |
| 4. πλευραί. . . . .                                                                                   | deest. . . . .                      | πλευραί.                                                                                    |
| 5. ὑπὸ . . . . .                                                                                      | <i>Id.</i> . . . . .                | περὶ                                                                                        |
| 6. ὑπὸ . . . . .                                                                                      | <i>Id.</i> . . . . .                | περὶ                                                                                        |
| 7. ἄρα . . . . .                                                                                      | deest. . . . .                      | ἄρα                                                                                         |
| 8. τῶν πλευρῶν . . . . .                                                                              | desunt. . . . .                     | concordat cum edit. Paris.                                                                  |
| 9. ἐναλλάξ ἄρα . . . . .                                                                              | καὶ ἐναλλάξ . . . . .               | concordat cum edit. Paris.                                                                  |
| 10. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ . . . . .                                                               | Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ μὲν . . . . . | Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ                                                                   |
| 11. καὶ . . . . .                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                | deest.                                                                                      |

PROPOSITIO V.

| EDITIO PARISIENSIS.                                     | CODEX 190. | EDITIO OXONIAE.          |
|---------------------------------------------------------|------------|--------------------------|
| 1. <i>linea 4 paginæ 302, πρὸς τῷ Δ λοιπῇ πρὸς τῷ Η</i> | <i>Id.</i> | ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ |
| 2. ΕΗΖ                                                  | <i>Id.</i> | ΕΑΖ τριγώνω              |
| 3. οὕτως                                                | deest.     | οὕτως                    |
| 4. καὶ                                                  | <i>Id.</i> | deest.                   |
| 5. ἴσιν                                                 | deest.     | ἴσιν                     |
| 6. ἴσιν ἴση                                             | deest.     | ἴσιν ἴση,                |
| 7. μὲν                                                  | <i>Id.</i> | deest.                   |
| 8. Δ                                                    | <i>Id.</i> | Δ ἴσιν ἴση               |

PROPOSITIO VI.

|                        |            |                          |
|------------------------|------------|--------------------------|
| 1. ἴση                 | <i>Id.</i> | γωνία ἴση                |
| 2. γωνία               | <i>Id.</i> | deest.                   |
| 3. ἴση                 | <i>Id.</i> | ἴσιν ἴση                 |
| 4. ἴσονται,            | <i>Id.</i> | ἴσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, |
| 5. ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. | <i>Id.</i> | πρὸς τῷ Η τῇ πρὸς τῷ Ε.  |

PROPOSITIO VII.

|                                                        |            |                                         |
|--------------------------------------------------------|------------|-----------------------------------------|
| 1. τὰς                                                 | deest.     | τὰς                                     |
| 2. τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον,             | <i>Id.</i> | τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, |
| 3. γωνία                                               | deest.     | γωνία                                   |
| 4. ὑπόκειται οὕτως                                     | <i>Id.</i> | οὕτως ὑπόκειται                         |
| 5. καὶ ὡς ἄρα ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, | deest.     | concordat cum edit. Paris.              |
| 6. ἴσιν                                                | <i>Id.</i> | deest.                                  |
| 7. πρὸς τῷ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ                          | <i>Id.</i> | ὑπὸ τῷ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΗ             |
| 8. τῷ                                                  | <i>Id.</i> | τὸ                                      |
| 9. ὀρθῆς                                               | <i>Id.</i> | ὀρθῆς καὶ                               |
| 10. ἰσωνίων ἴσιν                                       | <i>Id.</i> | ἴσιν ἰσωνίων                            |
| 11. δὴ                                                 | <i>Id.</i> | δὴ                                      |

PROPOSITIO VIII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                         | CODEX 190.                             | EDITIO OXONIE.                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1. γωνία . . . . .                                                                          | deest. . . . .                         | γωνία                                         |
| 2. τῆ πρὸς τῷ Γ, . . . . .                                                                  | deest. . . . .                         | concordat cum edit. Paris.                    |
| 3. ἐστὶ . . . . .                                                                           | deest. . . . .                         | ἐστὶ                                          |
| 4. τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶ<br>τὸ ΑΒΓ τρίγωνον.                                           | Id. . . . .                            | τὸ ΑΔΓ τριγώνον ὁμοίον ἐστὶ τῷ<br>ΑΒΓ τριγώνῳ |
| 5. ὁμοίον ἐστὶν ὄλῳ τῷ ΑΒΓ τρί-<br>γώνῳ.                                                    | Id. . . . .                            | ὄλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ὁμοίον<br>ἐστὶν.           |
| 6. γωνίαν, . . . . .                                                                        | Id. . . . .                            | γωνίαν,                                       |
| 7. ὑποτείνουσα τὴν ἑρθὴν τὴν ὑπὸ<br>ΑΔΒ, πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαν<br>τὴν ἑρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ. | πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαν<br>τὰς ὀρθὰς. | concordat cum edit. Paris.                    |

COROLLARIUM.

|                    |                       |       |
|--------------------|-----------------------|-------|
| 8. ἐστὶν . . . . . | Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. . . | ἐστὶν |
|--------------------|-----------------------|-------|

PROPOSITIO IX.

|                            |                |                  |
|----------------------------|----------------|------------------|
| 1. καὶ . . . . .           | deest. . . . . | καὶ              |
| 2. αὐτῆ ἤχθῳ ἢ ΔΖ. . . . . | Id. . . . .    | ἤχθῳ τῷ ΒΓ ἢ ΔΖ. |

PROPOSITIO X.

|                      |                      |                                                                                     |
|----------------------|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. δοθείση . . . . . | Id. . . . .          | δοθείση εὐθείη                                                                      |
| 2. ΑΓ, . . . . .     | Id. a, c, d. . . . . | δεῖ δὴ τὴν ΑΒ ἄτμητον τῇ ΑΓ τετ-<br>μημένη ὁμοίως τεμεῖν.<br>Ἐστω τετμημένη ἡ ΑΓ β. |

PROPOSITIO XI.

|                        |                 |                |
|------------------------|-----------------|----------------|
| 1. αὶ . . . . .        | Id. . . . .     | δύο εὐθείαι αὶ |
| 2. προσευρεῖν. . . . . | εὐρεῖν. . . . . | προσευρεῖν.    |
| 3. αὐτῷ . . . . .      | Id. . . . .     | αὐτῷ           |

PROPOSITIO XII.

|                          |                |                            |
|--------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. Γ . . . . .           | Id. . . . .    | Γ εὐθειῶν                  |
| 2. τυχοῦσαν . . . . .    | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τῶν πλευρῶν . . . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XIV.

| EDITIO PARISIENSIS.                                           | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.                                   |
|---------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------|
| 1. ἰσογωνίων . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | μίαν μιᾷ ἴσῃ ἔχόντων γωνίαν                      |
| 2. ἰσογωνίων παραλληλογραμμῶν,                                | <i>Id.</i> . . . . . | παραλληλογραμμῶν μίαν μιᾷ ἴσῃ<br>ἔχόντων γωνίαν, |
| 3. τε καὶ ἰσογώνια . . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                           |
| 4. ΔΒ, ΒΓ ἄρα . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα ΔΒ, ΒΓ                                       |
| 5. ἐντισπεσθετώσαν αἱ πλευραὶ<br>αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                       |
| 6. παραλληλόγραμμον . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                           |

## PROPOSITIO XV.

|                           |                      |              |
|---------------------------|----------------------|--------------|
| 1. τριγώνων, . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |
| 2. αἱ . . . . .           | deest. . . . .       | αἱ           |
| 3. τριγώνων. . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |
| 4. ΕΑΔ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ΕΑΔ τριγώνων |
| 5. ἄρα τριγώνων . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τριγώνων ἄρα |

## PROPOSITIO XVI.

|                                                     |                              |                                                |
|-----------------------------------------------------|------------------------------|------------------------------------------------|
| 1. καὶ . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . .         | καὶ εἰ                                         |
| 2. αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ<br>ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ' | <i>Id.</i> . . . . .         | τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ<br>ἀνάλογον,  |
| 3. γὰρ . . . . .                                    | deest. . . . .               | γὰρ                                            |
| 4. ἄρα παραλληλογραμμῶν . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . .         | παραλληλογραμμῶν ἄρα                           |
| 5. αἱ . . . . .                                     | deest. . . . .               | αἱ                                             |
| 6. ἴση γὰρ ἢ ΓΘ τῇ Ε' . . . . .                     | ἴση γὰρ ἢ Ε τῇ ΓΘ' . . . . . | περιεχόμενον ἑρθογώνιον, ἴση γὰρ<br>ἢ ΓΘ τῇ Ε' |
| 7. τῶν . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . .         | deest.                                         |
| 8. ἴσῃ ἢ ΑΗ τῇ Ζ' . . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . .         | τῇ Ζ' ἢ ΑΗ'                                    |
| 9. ἴση γὰρ ἢ ΓΘ τῇ Ε' τὸ ἄρα ΒΗ<br>ἴσον ἴσῃ τῷ ΔΘ'  | deest. . . . .               | concordat cum edit. Paris.                     |
| 10. καὶ ἴσῃ . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . .         | εἴσιν                                          |

## PROPOSITIO XVII.

|                  |                      |               |
|------------------|----------------------|---------------|
| 1. καὶ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ εἰ        |
| 2. ἀπὸ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἀπὸ τῆς μίσης |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                 |                |                          |
|---------------------------------|----------------|--------------------------|
| 3. οὕτως . . . . .              | deest. . . . . | οὕτως                    |
| 4. τὸ ἀπὸ τῆς Β ἴστιν, . . .    | Id. . . . .    | τῶ ἀπὸ τῆς Β ἴστιν ἴσον, |
| 5. τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἴστιν, . . . | Id. . . . .    | τῶ ἀπὸ τῶν Β, Δ          |

PROPOSITIO XVIII.

|                             |                 |                |
|-----------------------------|-----------------|----------------|
| 1. ἴση ἢ ὑπὸ HAB, . . . . . | Id. . . . .     | ἢ ὑπὸ HAB ἴση, |
| 2. ἴση . . . . .            | Id. . . . .     | deest.         |
| 3. λοιπῇ . . . . .          | deest. . . . .  | λοιπῇ          |
| 4. τε . . . . .             | Id. . . . .     | deest.         |
| 5. αὐτῶ . . . . .           | αὐτῶν . . . . . | αὐτῶ           |

PROPOSITIO XIX.

|                            |                |                            |
|----------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. τῶ . . . . .            | Id. . . . .    | τὸ                         |
| 2. ἄρα τριγώνων . . . . .  | Id. . . . .    | τριγώνων ἄρα               |
| 3. τριγώνων . . . . .      | Id. . . . .    | deest.                     |
| 4. ἔχειν λέγεται . . . . . | ἔχει . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τριγώνω . . . . .       | Id. . . . .    | deest.                     |

COROLLARIUM.

|                       |                                 |                            |
|-----------------------|---------------------------------|----------------------------|
| 7. ἐάν . . . . .      | Id. . . . .                     | ἐάν                        |
| 8. τρίγωνον . . . . . | εἶδος . . . . .                 | concordat cum edit. Paris. |
| 9. ΔΕΖ. . . . .       | ΔΕΖ. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XX.

|                                           |                |                            |
|-------------------------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. τὸ . . . . .                           | Id. . . . .    | deest.                     |
| 2. λοιπῇ . . . . .                        | deest. . . . . | λοιπῇ                      |
| 3. εἶσιν . . . . .                        | Id. . . . .    | deest.                     |
| 4. ἐτι τὸ ΕΒΓ τριγώνον τῶ ΑΗΘ<br>τριγώνω. | Id. . . . .    | deest.                     |
| 5. γωνία . . . . .                        | Id. . . . .    | deest.                     |
| 6. εἰδείχθη . . . . .                     | ἴστι . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ἴση ἴστιν . . . . .                    | Id. . . . .    | ἴστιν ἴση.                 |
| 8. μὲν . . . . .                          | Id. . . . .    | deest.                     |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                        |                      |        |
|------------------------|----------------------|--------|
| 9. ἄρα . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 10. τὸ . . . . .       | deest. . . . .       | τὸ     |
| 11. τρίγωνον. . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 12. τρίγωνον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 13. τρίγωνον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 14. τρίγωνον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

COROLLARIUM I.

|                      |                             |                            |
|----------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 15. δὴ . . . . .     | δε . . . . .                | δὴ                         |
| 16. καὶ . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . .        | deest.                     |
| 17. πλευρῶν. . . . . | πλευρῶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. | concordat cum edit. Paris. |

COROLLARIUM II.

|                        |                      |        |
|------------------------|----------------------|--------|
| 18. καὶ . . . . .      | ἢ . . . . .          | καὶ    |
| 19. πλευρῶν, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

ALITER.

|                        |                      |                                                                                                                                         |
|------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 20. τρίγωνον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                                                                  |
| 21. deest. . . . .     | dcest. . . . .       | καὶ ὡς ἔρα ἐν τῶν ἠγούμενων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἄπαιτα τὰ ἠγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμεσα, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐν τῇ προτέρᾳ δεῖξει. |

*Nota.* In demonstratione propositionis XX, codicibus *a, c*, articulus τὴν non ponitur ante litteras figuram designantes, ante quas poni solet.

PROPOSITIO XXI.

|                          |                      |                                                                                          |
|--------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ὁμοίον ἴστι . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστιν ὁμοιον                                                                             |
| 2. deest. . . . .        | deest. . . . .       | ὥστε καὶ τὸ A τῷ B ἰσογώνιον τε ἴστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. |

PROPOSITIO XXII.

|                    |                      |        |
|--------------------|----------------------|--------|
| 1. μὲν ἢ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἢ μὲν  |
| 2. τὸ . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ τὸ |

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS. 505

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

3. καὶ . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
 4. καὶ . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
 5. Εἰ γὰρ μὴ ἴσθιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω . . . . . *Id.* . . . . . Γεγονέτω γάρ  
 6. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ. *Id.* . . . . . deest.  
 7. ΣΡ . . . . . *Id.* . . . . . καὶ ΣΡ  
 8. ἡ . . . . . *Id.* . . . . . ἴσθιν ἡ

Λ Η Μ Μ Α.

9. ἡ καὶ ὅμοια, . . . . . *Id.* . . . . . καὶ ὅμοια ἡ,

PROPOSITIO XXIII.

1. τοῦ τε ἐν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ἐν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
 2. τὴν Μ λόγος σύγκριται ἐκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Α· λόγου καὶ τοῦ τῆς Α πρὸς τὴν Μ· Μ λόγος σύγκριται ἐκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς Α· λόγου καὶ τοῦ τῆς Α πρὸς Μ· concordat cum edit. Paris.  
 3. παραλληλόγραμμον. . . . . *Id.* . . . . . concordat cum edit. Paris.  
 4. παραλληλόγραμμον. . . . . *Id.* . . . . . deest.

PROPOSITIO XXIV.

1. αὐτοῦ . . . . . *Id.* . . . . . αὐτῷ  
 2. τῶν πλευρῶν . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
 3. ἄρα . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
 4. ἡ . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
 5. συντεθέντι . . . . . *Id.* . . . . . συντεθέντι ἄρα  
 6. τὴν ΑΗ, καὶ . . . . . ΑΗ . . . . . concordat cum edit. Paris.  
 7. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ . . . . . *Id.* . . . . . τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ ἄρα  
 8. ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΖΔ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ, ΑΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. concordat cum edit. Paris.  
 9. ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιον ἴσθιν· ἄρα deest, et reliquum concordat cum edit. Paris. ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἰσογώνιον ἴσθι τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ

| EDITIO PARISIENSIS.            | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.             |
|--------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 10. ἢ . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 11. καὶ . . . . .              | deest. . . . .       | καὶ                        |
| 12. παραλληλογράμμου . . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXV.

|                      |                      |        |
|----------------------|----------------------|--------|
| 1. δεῖ . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 2. τε . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 3. ἔστιν . . . . .   | deest. . . . .       | ἔστιν  |
| 4. τριγώνον. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 5. τῷ Δ . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

## PROPOSITIO XXVI.

|                                                                                  |                                |                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 1. παραλληλογράμμου γὰρ . . . . .                                                | <i>Id.</i> . . . . .           | γὰρ παραλληλογράμμου                                                     |
| 2. ἀφαιρήσθω . . . . .                                                           | <i>Id.</i> . . . . .           | ἀφαιρήσθω                                                                |
| 3. αὐτοῦ ἢ διάμετρος ἢ ΑΘΓ, καὶ<br>ἐκβληθεῖσα ἢ ΗΖ διήχθω ἐπὶ<br>τὸ Θ, . . . . . | <i>Id.</i> <i>a.</i> . . . . . | αὐτῶν ἢ διάμετρος ΑΘΓ, <i>b, c, d,</i><br><i>e, f, g, h, k, l, m, n.</i> |
| 4. αὐτὴν . . . . .                                                               | <i>Id.</i> . . . . .           | deest. <i>b.</i>                                                         |
| 5. ὅμοιον ἔστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ,                                                    | deest. . . . .                 | concordat cum edit. Paris.                                               |
| 6. καὶ . . . . .                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .           | deest.                                                                   |
| 7. ἄρα . . . . .                                                                 | deest. . . . .                 | ἄρα                                                                      |
| 8. οὐκ . . . . .                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .           | deest.                                                                   |

## PROPOSITIO XXVII.

|                                  |                              |                            |
|----------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| 1. αὐτὴν . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . .         | deest.                     |
| 2. ἀναγραφέντι τῆς ΑΒ, . . . . . | τῆς ΑΒ ἀναγραφέντι . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. παραλληλογράμμοις . . . . .   | deest. . . . .               | concordat cum edit. Paris. |
| 4. προσκείσθω τὸ ΚΘ . . . . .    | δὲ τὸ ΖΒ . . . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἴση ἔστιν . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . .         | ἴστιν ἴση.                 |
| 6. ἴστιν ἴσον . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .         | ἴσον ἔστι.                 |
| 7. ὥστε . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . .         | ὥστε καὶ                   |
| 8. τῆς , . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . .         | τὴν                        |
| 9. προσκείσθω . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .         | ἔστω                       |

PROPOSITIO XXVIII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                        | CODEX 190.                             | EDITIO OXONIE.                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ὁμοίω . . . . .                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                   | ὁμοίῳ ὄντι                                                                              |
| 2. τῶν ἑλλειμμάτων τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἑλλείπειν. | <i>Id.</i> . . . . .                   | τοῦ τε ἑλλειμματος τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δεῖ ἰσίων ἑλλείπειν παραλληλογράμμου. |
| 3. ἡμισείας παραβαλλεμένου, ὁμείων ὄντων τῶν ἑλλειμμάτων,                  | AB ἀναγραφόμενου ὁμοίου τῷ ἑλλειμμάτι, | concordat cum edit. Paris.                                                              |
| 4. τὸ δὴ AH ἤτοι ἴσον ἐστὶ τῷ Γ, ἢ μείζον αὐτοῦ, διὰ τὸν ὄρισμον.          | desunt. . . . .                        | concordat cum edit. Paris.                                                              |
| 4. ἐστὶν . . . . .                                                         | deest. . . . .                         | ἐστὶν                                                                                   |
| 5. οὖν . . . . .                                                           | deest. . . . .                         | οὖν                                                                                     |
| 6. μὲν τῇ Λ . . . . .                                                      | τῇ AK μί . . . . .                     | μὲν τῇ Λ                                                                                |
| 7. τῷ KM τὸ ΗΠ. . . . .                                                    | <i>Id.</i> . . . . .                   | τὸ ΕΟ τῷ KM.                                                                            |
| 9. ἐστὶν ἴσον. . . . .                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                   | ἴσον ἐστίν.                                                                             |

PROPOSITIO XXIX.

|                                      |                      |                            |
|--------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ.      | desunt. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τῷ . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ                         |
| 3. οὖν . . . . .                     | deest. . . . .       | οὖν                        |
| 4. ἐστὶν ἴσος. . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσος ἐστὶ.                 |
| 5. τῷ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον τὸ ΟΠ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον τῷ ΟΠ.  |

PROPOSITIO XXX.

|                                  |                      |                            |
|----------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. γὰρ . . . . .                 | deest. . . . .       | γὰρ                        |
| 2. ΑΓ, τουτίστι τε AB, . . . . . | AB, . . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸ . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

A L I T E R.

|                 |                      |            |
|-----------------|----------------------|------------|
| 4. AB . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | AB εὐθείαν |
|-----------------|----------------------|------------|

PROPOSITIO XXXI.

|                 |                      |        |
|-----------------|----------------------|--------|
| 1. τε . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 2. τε . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                  |                |        |
|------------------|----------------|--------|
| 3. ἄρα . . . . . | deest. . . . . | ἄρα    |
| 4. ἡ . . . . .   | Id. . . . .    | deest. |

## A L I T E R.

|                               |                |           |
|-------------------------------|----------------|-----------|
| 5. ἐστὶ . . . . .             | Id. . . . .    | εἰς       |
| 6. ἄρα εἶδος . . . . .        | Id. . . . .    | εἶδος ἄρα |
| 7. εἶδος . . . . .            | Id. . . . .    | deest.    |
| 8. τοῖς . . . . .             | deest. . . . . | τοῖς      |
| 9. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. . . . . | deest. . . . . | deest.    |

Hæc altera demonstratio in infimâ paginâ codicis 190 exarata est, vocabulis contractis.

## PROPOSITIO XXXII.

|                                                         |                |                            |
|---------------------------------------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. αἱ . . . . .                                         | Id. . . . .    | deest.                     |
| 2. τὰ . . . . .                                         | Id. . . . .    | deest.                     |
| 3. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ<br>δυσὶν ἑρβαῖς ἴσαι εἰσί. | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXXIII.

|                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                |                            |
|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς<br>τοῖς κέντροις συγκιτάμενοι. | hæc verba inter lineas<br>exarata sunt manu<br>alienâ, et secunda<br>pars demonstratio-<br>nis, quæ ad secto-<br>res attinet; nec-<br>non corollarium, in<br>margine manu alie-<br>nâ exarata sunt, vo-<br>cabulis contractis. | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν<br>ΘΕΖ τομέα.                   | desunt. . . . .                                                                                                                                                                                                                | concordat cum edit. Paris. |
| 3. κατὰ τὸ ἐξῆς ἰσαιδηποτοῦν .                                   | Id. . . . .                                                                                                                                                                                                                    | ἰσαιδηποτοῦν κατὰ τὸ ἐξῆς  |
| 4. ἴσαι ἰσαιδηποτοῦν . . . . .                                   | Id. . . . .                                                                                                                                                                                                                    | ἰσαιδηποτοῦν ἴσαι          |
| 5. Εἰ ἄρα . . . . .                                              | Id. . . . .                                                                                                                                                                                                                    | καὶ εἰ                     |

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS. 509

| EDITIO PARISIENSIS.                                                              | CODEX 190.         | EDITIO OXONIE.                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 6. γωνίας . . . . .                                                              | deest. . . . .     | γωνίας                                                                            |
| 7. διπλασίων . . . . .                                                           | διπλασια . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                        |
| 8. ὑπὸ . . . . .                                                                 | deest. . . . .     | ὑπὸ                                                                               |
| 9. ἴστί . . . . .                                                                | Id. . . . .        | deest.                                                                            |
| 10. κύκλον περιφέρεια ἴση ἴστί τῆ<br>λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον<br>περιφέρειᾶ. | Id. . . . .        | ΑΒΓ κύκλον περιφέρεια ἴση ἴστί τῆ<br>λοιπῇ τῇ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον<br>περιφέρειᾶ. |
| 11. ΒΞΓ . . . . .                                                                | Id. . . . .        | ΒΞΓ γωνία                                                                         |
| 12. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ,<br>ΘΖΜ, ΘΜΝ τομῆς ἴσοι ἀλλή-<br>λοις εἰσίν.        | desunt. . . . .    | concordat cum edit. Paris.                                                        |
| 13. Εἰ ὅρα ἴση ἴστιν ἡ ΒΑ περι-<br>φέρεια τῆ ΕΝ περιφέρειᾶ,                      | Id. . . . .        | καὶ εἰ ἴση ἴστιν ἡ ΒΑ περιφέρεια<br>τῆ ΕΝ,                                        |
| 14. ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΑ τομῆς<br>τοῦ ΘΕΝ τομῆως καὶ εἰ ἐλλεί-<br>πει, ἐλλείπει.   | desunt. . . . .    | concordat cum edit. Paris.                                                        |

LIBER SEPTIMUS.

DEFINITIONES.

| EDITIO PARIISIENSIS.                                                                               | CODEX 190.                                         | EDITIO OXONIÆ.      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------------------|
| α. (1) ἦν . . . . .                                                                                | <i>Id.</i> . . . . .                               | ἦν ὁ                |
| ζ. (2) ὁ . . . . .                                                                                 | <i>deest.</i> . . . . .                            | ὁ                   |
| θ. (3) ἀριθμός . . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . .                               | <i>deest.</i>       |
| ι. (4) Πιρισσάκις δι' ἀρτίς ἐστίν,<br>ἔ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρού-<br>μενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. | <i>Id. a, c, e, f, g,</i><br><i>h, k, l, m, n.</i> | <i>deest. b, d.</i> |
| ια. (5) ὀρθμός ἐστίν, . . . . .                                                                    | <i>Id.</i> . . . . .                               | ἐστίν ἀριθμός,      |
| ιγ. (6) δι' . . . . .                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                               | <i>deest.</i>       |
| ιδ. (7) ἴσαι . . . . .                                                                             | ἴσαι . . . . .                                     | ἴσαι ἴσαι           |
| (8) ποσαυτάκις . . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . .                               | ποσαύκις            |
| ιη. (9) καλεῖται . . . . .                                                                         | ἰστί . . . . .                                     | καλεῖται*           |
| ιβ. (10) ὁ . . . . .                                                                               | <i>deest.</i> . . . . .                            | ὁ                   |
| ιγ. (11) ἀριθμῶν ἴσων . . . . .                                                                    | <i>Id.</i> . . . . .                               | ἴσων ἀριθμῶν        |

PROPOSITIO I.

|                                                                                                      |                         |                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων,<br>ἀνθυφαιρουμενοῦ δὲ ἀεὶ τοῦ ἐλάσ-<br>σονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἴαν | <i>Id.</i> . . . . .    | Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων<br>ἀνθυφαιρουμενοῦ ἀεὶ τοῦ ἐλάσ-<br>σονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, |
| 2. ἀνίσων . . . . .                                                                                  | <i>deest.</i> . . . . . | ἀνίσων                                                                                        |
| 3. μετρεῖ . . . . .                                                                                  | <i>Id.</i> . . . . .    | μετρεῖ.                                                                                       |
| 4. μετρήσει . . . . .                                                                                | <i>Id.</i> . . . . .    | μετρήσει ὁ Ε.                                                                                 |
| 5. μετρήσει . . . . .                                                                                | <i>Id.</i> . . . . .    | μετρήσει ὁ Ε.                                                                                 |
| 6. μετρήσει . . . . .                                                                                | μετρεῖ . . . . .        | μετρήσει.                                                                                     |

PROPOSITIO II.

|                                                    |                          |                                    |
|----------------------------------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| 1. καὶ ἴστω ἐλάσσων ο ΓΔ . . . . .                 | <i>desunt.</i> . . . . . | <i>concordat cum. edit. Paris.</i> |
| 2. ΑΒ, ΓΔ . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .     | ΓΔ, ΑΒ                             |
| 3. linea secunda et tertia pa-<br>ginæ 589 μετρεῖ. | <i>Id.</i> . . . . .     | μετρήσει.                          |

COROLLARIUM.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

4. μετρήσει. . . . . μετρήσει. Οτι ἐπέδει δείξαι. μετρήσει.

PROPOSITIO III.

- |                                  |                      |                               |
|----------------------------------|----------------------|-------------------------------|
| 1. μέγιστον κοινὸν μέτρον, . . . | <i>Id.</i> . . . . . | κοινὸν μέγιστον μέτρον,       |
| 2. μετρήσει, . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | μετρήσας                      |
| 3. μετρήσει μείζων τοῦ Δ' . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | τις μετρήσει μείζων ἂν τοῦ Δ' |
| 4. δὴ . . . . .                  | deest. . . . .       | δὴ                            |
| 5. ἄρα . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                        |
| 6. μετρήσει. . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | μετρεῖ                        |
| 7. ποιῆσαι. . . . .              | δείξαι. . . . .      | concordat cum edit. Paris.    |

COROLLARIUM.

1. Hoc corollarium deest in codice a.

PROPOSITIO IV.

- |                                |                      |                             |
|--------------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 1. Οἱ Α, ΒΓ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | οἱ Α, ΒΓ πρότερον           |
| 2. πρότερον οἱ Α, ΒΓ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                     |
| 3. οἱ Α, ΒΓ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                     |
| 4. δὴ ἐκάστῳ τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ' . | <i>Id.</i> . . . . . | δὲ ὁ Δ' ἐκάτερα τῶν ΒΕ, ΕΖ. |

PROPOSITIO V.

- |                                                                                                                                         |                      |                                                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἀριθμοῦ . . . . .                                                                                                                    | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                 |
| 2. εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ . . .                                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | ἀριθμοὶ εἰσὶν ἐν τῷ ΕΓ                                                                                                                     |
| 3. καὶ οἱ ΒΗ, ΕΘ ἄρα Α, Δ. Διὰ<br>τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΓ τῷ Α ἴσος<br>ἔστιν, ὁ δὲ ΘΖ τῷ Δ' καὶ οἱ ΗΓ,<br>ΘΖ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι εἰσὶν.<br>ξ | <i>Id.</i> . . . . . | ὁ ΒΗ ἄρα καὶ ΕΘ τοῖς Α, Δ ἴσοι<br>εἰσὶ. Καὶ διὰ ταῦτα ὁ ΗΓ τῷ Α<br>ἴσος ἔστι, καὶ ὁ ΘΖ τῷ Δ' καὶ<br>οἱ ΗΓ, ΘΖ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι<br>εἰσὶν. |
| 4. τοῦ . . . . .                                                                                                                        | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ                                                                                                                                         |

PROPOSITIO VI.

| EDITIO PARISIENSIS.                                | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.           |
|----------------------------------------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. $\frac{\alpha}{\beta}$ . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                   |
| 2. ἴστί . . . . .                                  | deest. . . . .       | ἴστί                     |
| 3. τὸ αὐτὸ . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτὸ τὸ                  |
| 4. καὶ ὁ ΘΕ τοῦ Ζ· ὁ ἄρα μέρος<br>ἴστί τὸ ΗΒ τοῦ Γ | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἴστί |

PROPOSITIO VII.

|                                                                            |                                                           |                            |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ὁ . . . . .                                                             | deest. . . . .                                            | ὁ                          |
| 2. ὁ ΑΒ ἄρα ἑκατέρου τῶν ΗΖ,<br>ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἴστί·                     | haec verba aliená ma-<br>nu in margine exa-<br>rata sunt. | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἴστί· ἴσος . . . . .                                                    | <i>Id.</i> . . . . .                                      | ἴσος ἴστί.                 |
| 4. ἴστί . . . . .                                                          | deest. . . . .                                            | ἴστί                       |
| 5. τῷ . . . . .                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                                      | τοῦ                        |
| 6. ὁ ἄρα μέρος ἴστί ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ,<br>τὸ αὐτὸ μέρος ἴστί καὶ ὁ ΑΒ<br>τοῦ ΓΔ· | desunt. . . . .                                           | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO VIII.

|                         |                      |            |
|-------------------------|----------------------|------------|
| 1. τῷ ΑΕ ἴσος . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσος τῷ ΑΕ |
| 2. ἴστί . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.     |

PROPOSITIO IX.

|                                     |                      |                            |
|-------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. $\frac{\alpha}{\beta}$ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. ἐλάσσων δὲ ἴστω ὁ Α τοῦ Δ·       | desunt. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 3. καὶ . . . . .                    | deest. . . . .       | καὶ                        |
| 4. δὲ . . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . . | δὲ                         |

PROPOSITIO X.

|                                 |                      |                            |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τὸ αὐτὸ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                    |
| 2. ἴστω δὲ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἐλάσσων· | desunt. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                      | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE. |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------|
| 3. τὸ αὐτὸ . . . . .                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.         |
| 4. τοῦ . . . . .                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ             |
| 5. τοῦ . . . . .                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ             |
| 6. καὶ ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ<br>τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος<br>ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ<br>αὐτὰ μέρη* | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.        |
| 7. εἰδείχθη . . . . .                                                                                    | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶ           |
| 8. ἄρα . . . . .                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.         |

PROPOSITIO XIII.

|                      |                      |         |
|----------------------|----------------------|---------|
| 1. τὰ αὐτὰ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | desunt. |
|----------------------|----------------------|---------|

PROPOSITIO XIV.

|                  |                |     |
|------------------|----------------|-----|
| 1. γὰρ . . . . . | deest. . . . . | γὰρ |
| 2. καὶ . . . . . | deest. . . . . | καὶ |

PROPOSITIO XV.

|                                      |                      |                            |
|--------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ὁ . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. δὲ . . . . .                      | δὲ . . . . .         | δὲ                         |
| 3. ἴσται . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστιν                      |
| 4. ἀριθμὸν . . . . .                 | deest. . . . .       | ἀριθμὸν                    |
| 5. ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν . . . . . | ὁ Α τὸν Δ . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XVI.

|                      |                      |        |
|----------------------|----------------------|--------|
| 1. ἀριθμὸν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
|----------------------|----------------------|--------|

PROPOSITIO XVII.

|                                                         |                      |                            |
|---------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἔξουσι λόγον . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . . | λόγον ἔχουσι               |
| 2. ἀριθμὸν . . . . .                                    | deest. . . . .       | ἀριθμὸν                    |
| 3. καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὐ-<br>τως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε* | desunt. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XVIII.

EDITIO PARIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. τὸν αὐτὸν ἔχουσι . . . , . *Id.* . . . . . καὶ αὐτὸν ἔξουσι

PROPOSITIO XIX.

1. ὁ πρῶτου καὶ τετάρτου . . . πρῶτου καὶ τετάρτου . . . τοῦ πρῶτου καὶ δευτέρου  
 2. ἀλλ' ὡς . . . . . *Id.* . . . . . ὡς δὲ  
 3. ἄρα . . . . . ὥσπερ . . . . . ἄρα  
 4. τῶν . . . . . *Id.* . . . . . τὸν

PROPOSITIO XX.

1. Hæc propositio in margine codicis 190 eadem manu exarata est, vocabulis contractis.

2. εἰάν δὲ . . . . . καὶ εἰάν . . . . . εἰάν δὲ  
 3. ὑπὸ . . . . . *Id.* . . . . . ἀπὸ  
 4. ἴσονται . . . . . εἰσίν . . . . . ἴσονται  
 5. ὑπὸ . . . . . *Id.* . . . . . ἀπὸ

PROPOSITIO XXI.

1. ἔχοντας . . . . . *Id.* . . . . . ἔχοντας αὐτοῖς  
 2. ἴσοι οἱ ΓΗ, ΗΔ εἰσὶν ἀλλήλοισι, *Id.* . . . . . οἱ ΓΗ, ΗΔ ἴσοι ἀλλήλοισι εἰν,  
 3. ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοισι, . . . *Id.* . . . . . ἀλλήλοισι ἴσοι,  
 4. τὸ αὐτὸ . . . . . *Id.* . . . . . αὐτὸ τὸ

PROPOSITIO XXII.

1. Hæc propositio in margine codicis 190 alienâ manu exarata est, vocabulis contra ctis.

2. πλῆθος οἱ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, *Id.* . . . . . πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ

\* PROPOSITIO XXIII.

1. μὴ . . . . . *Id.* . . . . . εἰσὶν οἱ Β, Β εἰλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς,  
 2. εἰλάσσονες . . . . . *Id.* . . . . . εἰλάχιστοι

PROPOSITIO XXVI.

| EDITIO PARISIENSIS.          | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.  |
|------------------------------|----------------------|-----------------|
| 1. πρώτοι ἴστωσαν, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστωσαν πρώτοι, |
| 2. τοὺς Γ, Δ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτοὺς          |
| 3. δὴ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | δε              |
| 4. τε . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.          |

PROPOSITIO XXVII.

|                  |                |     |
|------------------|----------------|-----|
| 1. Καὶ . . . . . | deest. . . . . | Καὶ |
|------------------|----------------|-----|

PROPOSITIO XXVIII.

|                                     |                      |                         |
|-------------------------------------|----------------------|-------------------------|
| 1. πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν Γ. |
| 2. οἱ . . . . .                     | <i>Id.</i> . . . . . | ὁ                       |

PROPOSITIO XXIX.

|                          |                      |             |
|--------------------------|----------------------|-------------|
| 1. τινες, . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | τινα,       |
| 2. ἀριθμοὶ δύο . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | δύο ἀριθμοὶ |
| 3. μὲν . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.      |
| 4. οὖν . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα         |

PROPOSITIO XXX.

|                                                             |                      |                          |
|-------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. τῶν . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . . | τῶν                      |
| 2. τοὺς ΓΑ, ΑΒ . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτοὺς                   |
| 3. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                  |
| 4. πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους . . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . . | πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι     |
| 5. οἱ ΑΒ, ΒΓ πρὸς ἀλλήλους, . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΒΓ, |
| 6. τοὺς ΑΒ, ΒΓ . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτοὺς                   |

PROPOSITIO XXXI.

|                          |                      |                                       |
|--------------------------|----------------------|---------------------------------------|
| 1. καὶ ἔστω ὁ Γ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἔστω ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα οὐκ ἔστι μονάς. |
|--------------------------|----------------------|---------------------------------------|

PROPOSITIO XXXII.

|                       |                      |                |
|-----------------------|----------------------|----------------|
| EDITIO PARISIENSIS.   | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE. |
| 1. ἀλλήλους . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.         |
| 2. ὁ Δ . . . . .      | deest. . . . .       | ὁ Δ            |

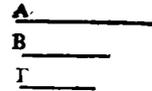
PROPOSITIO XXXIII.

|                                |                      |                             |
|--------------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 1. γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθῆν | <i>Id.</i> . . . . . | δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον  |
| 2. γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθῆν | <i>Id.</i> . . . . . | δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον. |
| 3. ὁ . . . . .                 | deest. . . . .       | ὁ                           |
| 4. πρῶτος ἀριθμὸς, . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                     |

A L I T E R.

deest. . . . . deest. *a, c, d, e, f, g, h, n.* Εἶτω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Επεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρηθήσεται ὑπὸ ἀριθμοῦ. Καὶ ἔστω ἐλάχιστος τῶν μετρούντων αὐτὸν ὁ Β· λέγω ὅτι ὁ Β πρῶτός ἐστιν.



Εἰ γὰρ μὴ, σύνθετός ἐστι μετρηθήσεται ἄρα ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος. Μετρήσθω, καὶ ἔστω ὁ Γ ὁ μετροῦν αὐτόν· ὁ Γ ἄρα τοῦ Β ἐλάχιστός ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Β μετρεῖ, ἀλλὰ καὶ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ, ἐλάχιστων ἂν τοῦ Β, ἐλάχιστου ὄντος τῶν μετρούντων Α, ὅπερ ἀτοπον· οὐκ ἄρα ὁ Β σύνθετος ἀριθμὸς ἐστι πρῶτος ἄρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *b, h, l.*

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS. CODEX 190. EDITIO OXONIE.  
 1. γεγονός ἄν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. *Id.* . . . . . δῆλον ἄν εἴη τὸ ζητούμενον.

PROPOSITIO XXXV.

1. ἐν . . . . . deest. . . . . ἐν  
 2. ἰχόντων . . . . . *Id.* . . . . . ἰχόντων αὐτοῖς  
 3. τῶς . . . . . deest. . . . . τινος

PROPOSITIO XXXVI.

1. ὁ Α . . . . . *Id.* . . . . . ὁ  
 2. μετρήσουσί . . . . . *Id.* . . . . . μετροῦσί  
 3. ὅταν ὁι Α, Β πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν· hæc verba inter lineas alienâ manu exarata sunt. concordat cum edit. Paris.  
 4. ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η· *Id.* . . . . . desunt.

PROPOSITIO XXXVII.

1. μετροῦσι, . . . . . *Id.* . . . . . μετρήσουσι.

PROPOSITIO XXXVIII.

1. μετρήσουσιν . . . . . *Id.* . . . . . μετροῦσιν  
 2. δι . . . . . *Id.* . . . . . δι  
 3. οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Δ μετρήσουσι. deest. . . . . οἱ ἄρα Α, Β, Γ τὸν Δ μετροῦσι  
 4. οὖν . . . . . deest. . . . . οὖν  
 5. τὸν Ε . . . . . deest. . . . . τὸν Ε  
 6. μετρήσουσί . . . . . *Id.* . . . . . μετροῦσι  
 7. μετρήσουσι. . . . . *Id.* . . . . . μετροῦσι.  
 8. μετρήσουσι. . . . . *Id.* . . . . . μετροῦσι.  
 9. ὁ Γ . . . . . *Id.* . . . . . ὁ Γ τὸν Ε  
 10. μετρήσουσι. . . . . *Id.* . . . . . μετροῦσι.

518 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEPTIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

COEDEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                               |                      |                      |
|-------------------------------|----------------------|----------------------|
| 11. δὴ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.               |
| 12. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος |
| 13. τὸν Z μετρήσει . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | μετρήσει τὸν . .     |
| 14. μετρήσουσί . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | μετροῦσι             |

PROPOSITIO XL.

|                        |                      |              |
|------------------------|----------------------|--------------|
| 1. ἔστω . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστω ἀριθμὸς |
| 2. μέρος ἄρα . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα μέρος    |

PROPOSITIO XLI.

|                                                                         |                       |                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. τὰ δοθέντα μέρη τὰ A, B, Γ.                                          | τὰ A, B, Γ μέρη . . . | τὰ δοθέντα μέρη τὰ A, B, Γ.                                                                                      |
| 2. ἀριθμοὶ . . . . .                                                    | deest. . . . .        | ἀριθμοὶ                                                                                                          |
| 3. ὁ . . . . .                                                          | deest. . . . .        | ὁ                                                                                                                |
| 4. ὁ H ἄρα . . . . .                                                    | <i>Id.</i> . . . . .  | ἐπεὶ οὖν ὁ H ὑπὸ τῶν Δ, E, Z με-<br>τρεῖται, ὁ H                                                                 |
| 5. ἔστω τις τοῦ H ἐλάσσων ἀριθ-<br>μὸς ὃς ἕξει τὰ A, B, Γ μέρη,<br>ὁ Θ. | <i>Id.</i> . . . . .  | ὁ H ἐλάχιστος ἂν ἔχει τὰ A, B, Γ<br>μέρη, ἔσται τοῦ H ἐλάσσων ἀριθ-<br>μὸς ὃς ἕξει τὰ A, B, Γ μέρη.<br>Ἐστω ὁ Θ. |

FINIS TOMI PRIMI.

