PLANORVM, AC SOLIDORVM
EVCLIDIS
ELEMENTA

Facilioribus Auctorum demonstrationibus

A HIEMYNIANO RONDELLI

PHILOSOPHIÆ DOCT.

In Vniuersali Studio Bononiæ Scientiarum Mathemat. de mane Professore explicata,

A C

Illustrissimis, atque Amplissimis

SENATVS BONONIEN.

PATRIBVS CONSECRATA.

Bononiæ, apud Longum 1693. *Superiorum permissu.*

ILLVSTRISSIMI, ATQVE AMPLISSIMI PATRES.

CVm sępe sępius mente recogitarem sub veteri lege vltra quotidiana hominum sacrificia, spontaneas etiam extitisse oblationes, illa quidem propter Diuinum cultum, has verò, vt recipientes Deos ipsos munerum largitores grato affectu prosequerentur, animo reuoluebam quodnam seruitutis meæ, gratique animi testimonium humillimè offerem, vobis Felsinei Senatus, Patres sapientissimi, quibus, vt cecinit Vates,

De meliore luto finxit pręcordia Titan.

Ve-

Verum in hoc rerum turbine, in quo ferè omnium Europæ Principum sæuo Marte in apertum progrediuntur conatus, belliq; machinamenta campos inimico sanguine inundant, haud incongruum existimaui, vobis fauentibus, denuò publici iuris facere geometrica Euclidis Elementa, quibus sublatis nostro hoc æuo bella gerere esset omnino frustraneum, ne dicam temerarium. Hac sola arte non tantum legitimæ habentur temporum emendationes, quibus deficientibus nec ciuilium negotiorum ordo, nec sacrorum solemnia satis constare possent; verum etiam fauentibus Geometriæ principijs datum est vagantium aquarum cursum dirigere, aggeribusque extructis audaciam, & potentes vires compescere fluminum, de quibus vera inquit Poeta.

Aggere sublato rapidus montano flumine
terrens
Sternit agros, sternit sata læta, bouumq; labores,
Præcipitesque trahit syluas, camposque per omnes,
Cum stabulis armenta rapit.

Huiuscemodi autem Geometricas demonstrationes, quas primo aspectu magno cum

my-

mysterio Aristippus ille Cyrenaicus hominum diiudicauit vestigia, nullius tutamini potiori iure committere decet, quam vestro, Sapientissimi Patres, quorum summam prudentiam secula apud homines perennabunt. Ego quidem summo pudore fateor muneris tenuitatem nulla ratione ab ingenijs vestris grandiora exposcentibus æquo animo excipiendam; sola enim materiæ nobilitas, ac necessitas in Republica spem grati animi promittit: satis, superque, vt spero, offerentis audaciam iuuabit desiderium publicæ vtilitatis, quam studiorum meorum, qualiacunque fuerint, semper obiectum firmaui, ex quo summa amplissimi Senatus munificentia celeberrimo in hoc studio me publici Mathematum professoris munere condecorauit. Hoc autem tantummodo superest, vt supremum Numen vos tantorum munerum largitores in Felsineæ Vrbis commodum, ac decus, nec non etiam ad iuuandos meorum studiorum vtiliora meditantium conatus diu faustè, feliciterque conseruet; nam dubio procul vobis patrocinantibus non interrupta annorum serie fœcundissimum Bononiæ Coelum studiorum parens supra reli-

quas

quas mundi nationes docebit in æternitatem, vti supra omnes ex voto precatur, qui inclytos Bononiæ Senatus Viros veneratur, & colit

DD. VV. Illustriss.

Bononiæ 30. Nouembris 1693.

Humillim. Addictiss. & Obsequentiss. Seruus, & Cliens

Hieronymus Rondelli.

Lectori Beneuolo.

Optimè mihi compertum est, Amice Lector, frustraneum penitus fore existimandum laborem meum ex eo quod curauerit toties vulgata Euclidis Elementa denuo Typis committere, & hoc maximè quia circa hanc materiam elaborandam celeberrima desudarunt ingenia. Verum cum ferè nulla amplius apud Bibliopolas inueniantur exemplaria, animus fuit pro parte huic defectui supplere; quamobrem sex prioribus planorum Elementis opportunum duxi duos solidorum libros adnectere, hoc solo fine, vt Bononiensis Archigymnasij studiosa Iuuentus nullo negotio ad manus haberet Geometriæ principia, quorum auxilio nemo non videt quam feracissimos, ac huberrimos fructus ætas nostra receperit non tantum in exponendis naturæ operationibus, verum etiam in bellicis, alijsque rebus pertractandis; adeo vt contemnentibus Geometriæ studium æquo iure liceat repetere illud Margitis elogium apud Homerum;

Non fodere ille bonus, durisue ligonibus
arua
Vertere, non vlli viuebat idoneus arti.

Hoc autem inter cætera tibi monitum volo, me

tan-

tantummodo in votis habuisse omnimodam claritatem, at breuitatem circa illas demonstrationes, quæ ab hoc studio nobilissima remouent addiscentium ingenia: quod vt melius præstarem opportunum duxi, aliàs satis laudabilem Algebraticorum consuetudinem, penitus relinquere, cum Tyrones hanc Spartam primitus ingredientes solis notis caracteristicis secundum æquationum leges vsurpatis haud valeant geometrica Theoremata demonstrare. Scio equidem in hoc sæculo ingeniorum valdè sublimium Opera in lucem prodijsse, veruntamen cum non detur ad Musas currere lata via, ne dedigneris æquo animo recipere, quod in gratiam nobilissimæ Iuuentutis huius Studij prælo commisi; nam propitiante Deo supra fortunæ nouercantis aleam iuxta ingenij tenuitatem vtiliora promitto. Vale.

PRI-

PRIMVM EVCLIDIS ELEMENTVM.

DEFINITIONES.

I.

PVnctum eſt illud, cuius nulla pars eſt. *B*.

II.

Linea verò, eſt longitudo latitudinis expers.

A

III.

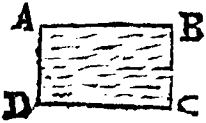
Lineæ autem termini, ſunt puncta.

IV.

Recta linea eſt, quæ ex æquo ſua interiacet puncta.

V.

Superficies eſt illa, quæ longitudinem, ac latitudinem tantum habet.



VT patet exempligratia in quantitate ABCD à lineis AB, BC, CD, DA, comprehenſa, quæ conſiderata ſecundum longitudinem AB, & ſecundum latitudinem AD, (remota omni profunditate) ſuperficies appellatur.

VI.

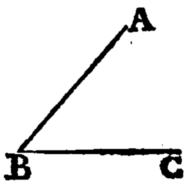
Superficiei autem extrema, ſunt lineæ.

VII.

Plana ſuperficies eſt illa, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas.

VIII.

Planus verò angulus, eſt duarum linearum in plano ſeſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.



EXempli gratia, quia duæ lineæ BC, BA, concurrunt in B, & non iacent in directum, ideò efficiunt angulum A, planum in eadem exiſtentem ſuperficie, in qua duæ illæ lineæ conſtituuntur. Dicentur autem duæ lineæ non in directum iacere, quando altera earum verſus concurſum protenſa non coincidit cum altera, ſed vel eam ſecat, vel ſtatim poſt punctum concurſus ab ea recedit. Quæ ſecunda conditio ponitur propter angulum contactus, in quo lineæ non ſe ſecant, at ſolumodo ſe tangunt, & poſtmodum recedunt.

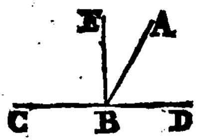
IX.

Cum autem lineæ, quæ angulum continent, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

X.

Cum recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam

neam eos, qui deinceps ſunt angulos, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterque æqualium angulorum; & quæ inſiſtit recta linea, perpendicularis vocatur eius, cui inſiſtit.



PRo clariori intelligentia huius definitionis dico, quod ſi recta EB, rectæ CD, inſiſtens efficiat duos angulos, propè punctum B, nempe EBC, & EBD, (qui ſanè à Mathematicis vocantur anguli deinceps) inter ſe æquales, vocabitur vterque angulus rectus; & recta EB, inſiſtens perpendicularis erit rectæ CD, cui inſiſtit.

XI.

Obtuſus angulus, recto maior eſt.

IN ſuperiori enim figura ducta recta AB, angulus ABC, eſt obtuſus, quia maior eſt recto EBC.

XII.

Acutus vero angulus eſt, qui minor eſt recto.

Vt v. g. angulus ABD, qui eſt minor angulo recto EBD.

XIII.

Terminus eſt, quod alicuius extremum eſt.

IVxta hanc definitionem tres ſolummodo ſunt termini ideſt Punctum, Linea, & Superficies. Punctum enim terminus eſt lineæ: Linea eſt terminus ſuperficiei, & ſuperficies terminus eſt corporis.

X I V.

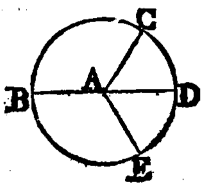
Figura est illa, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

QVantum ad hanc definitionem est aduertendum, quod omnis quantitas terminos possidens, figura dici non potest, siquidem linea finita, licet habeat terminos, nempe extrema puncta, adhuc tamen figura non appellatur, quia linea finita non propriè dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur: Vnde colligitur terminos debere quantitatem, quæ figura vocatur, ambire, & non tantum terminare.

X V.

Circulus, est figura plana sub vna linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

IN hac definitione Euclides exponit circulum, docens figuram illam planam, quæ vnica linea circumscribitur, & ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sunt æquales, circulum vocari. Vt si superficies aliqua concludatur vnica linea B C D E, & insuper habuerit hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intra dictam lineam suscepto, nempe A, omnes rectæ linæ cadentes ad terminum



num BCDE, sint æquales inter se, huiusmodi figura plana circulus appellatur.

XVI.

Hoc vero punctum, centrum circuli appellatur.

IN hac definitione Euclides docet, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam ductæ, sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est punctum A, positum in præcedenti figura; quo stante lineæ rectæ AC, AD, & AE, sunt inter se æquales.

XVII.

Diameter autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.

HVius definitionis exemplum habemus in superiori figura, in qua linea recta BD, per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, nec non etiam diuidens circulum in duas partes æquales, diameter vocatur.

XVIII.

Semicirculus verò est figura, quæ continetur sub diametro, & sub illa linea, quæ de circuli peripheria à diametro aufertur.

EXempli gratia in superiori circulo figura B C D, contenta sub diametro B D, & peripheria BCD, dicitur semicirculus, quia, vt supra visum est, huiusmodi figura eſt dimediata pars circuli. Si verò aliqua recta in circulo non per centrum ducatur conſtituit duas figuras, quæ circuli ſegmenta vocantur, quorum vnum ſemicirculo maius eſt, alterum vero minus.

XIX.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur.

X X.

Trilateræ quidem, quæ ſub tribus.

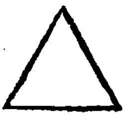
X X I.

Quadrilateræ vero, quæ ſub quatuor.

X X I I.

Multilateræ autem, quæ ſub pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

X X I I I.



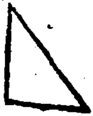
Trilaterarum autem figurarum, æquilaterum triangulum eſt illud, quod tria latera habet æqualia.

X X I V.

Triangulum Iſoſceles eſt, quod duo tantùm habet latera æqualia.

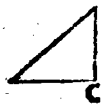
X X V.

Triangulum ſcalenum eſt, quod tria inæqualia habet latera.



XXVI.

XXVI.



Trilaterarum figurarum rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet, vt eſt anguls C, in ſuperiori figura.

XXVII.

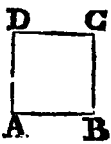
Amblygonium autem, quod obtuſum angulum habet.

XXVIII.

Oxygonium vero, quod tres habet acutos angulos.

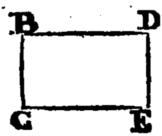
VT in triangulo æquilatero clarum eſt.

XXIX.



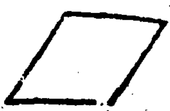
Quadrilaterarum autem figurarum, Quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum, & rectangulum eſt.

XXX.



Altera vero parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, at æquilatera non eſt.

XXXI.

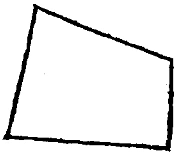


Rhombus autem figura eſt, quæ æquilatera, ſed rectangula non eſt.

XXXII.

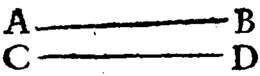
Rhomboides vero figura eſt, quæ oppoſita latera, & angulos habet inter ſe æquales, cum nec æquilatera, nec æquiangula ſit.

XXXIII.



Præter has autem figuras, reliquæ quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.

XXXIV.



Parallelæ rectæ linæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, ſi ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuo incidunt.

XXXV.

Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cuius bina oppoſita latera ſunt parallela, ſeu æquidiſtantia. Vt patet in romboide ſupra poſito.

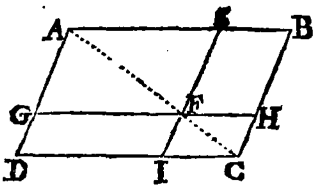
XXXVI.

Cum vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ ſeçantes diametrum in vno, eodemque puncto, ita vt parallelogrammum ab hiſce

pa-

parallelis in quatuor diſtribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non tranſit, Complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incidit, circa diametrum conſiſtentia.

HOc totum patet in parallelogrammo ABCD, in quo diameter AC, & linea GH ſecans diametrum in puncto F, exiſtenſque parallela lateribus AB, & DC. Item linea IE ſecans diametrum in eodem puncto F, parallelaq; exiſtens lateribus AD & BC. Quibus ita ſtantibus perſpicuum eſt parallelogrammum totum ABCD, diuiſum eſſe in quatuor parallelogramma, quorum duo, nempe GFID, EBHF, per quæ diameter non tranſit, vocantur complementa, ſiue ſupplementa reliquorum duorum AEFG, FHCI exiſtentium circa diametrum.



PETITIONES, SIVE Poſtulata.

I.

POſtuletur, vt a quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

I I.

Et rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

I I I.

Item quouis centro, & interuallo circulum describere.

I V.

Item quacumque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem, vel maiorem, vel minorem.

AXIOMATA, SIVE Communes notiones, quæ etiam Pronunciata, vel Dignitates dici solent.

I.

QVæ eidem ęqualia, & inter se sunt ęqualia. Et quod vno æqualium maius est, aut minus, maius quoque est, aut minus altero æqualium. Et si vnum æqualium maius est, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoque æqualium eadem magnitudine maius est, aut minus.

I I.

Et si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

I I I.

Et si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

IV.

I V.

Et ſi inæqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt inæqualia. Et ſi inæqualibus inæqualia adiecta ſint, maiori maius, & minori minus, tota ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

V.

Et ſi ab inæqualibus æqualia ablata ſint, reliqua ſunt inæqualia. Et ſi ab inæqualibus inæqualia ablata ſint à maiori minus; & à minori maius, reliqua ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

V I.

Quæ eiuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia; Et quod vnius æqualium duplũ eſt, & alterius æqualium duplum erit.

V I I.

Et quæ eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe ſunt æqualia. Et è contra, quæ æqualia ſunt, eiuſdem ſunt dimidia.

V I I I.

Et quæ ſibi mutuo congruunt, ea inter ſe ſunt æqualia.

SEnſus huius Axiomatis eſt, quod ſi dentur duæ quantitates, quarum vna alteri ſuperpoſita, neutra alteram excedat, ſed ambæ inter ſe congruant, illæ quantitates æquales erunt.

IX.

IX.

Et totum ſua parte maius eſt.

X.

Duæ lineæ rectæ non habent vnum, & idem ſegmentum commune.

ISTud Axioma, ſi benè intelligatur natura rectæ lineæ, non eſt difficile. Proculus vero vt tollat omnem dubitationem, ipſum demonſtrat, vt videre eſt apud P. Clauium in ſuis commentarijs.

XI.

Duæ rectæ in vno puncto concurrentes, ſi producantur ambæ, neceſſario ſe mutuo in eo puncto interſecabunt.

XII.

Item omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales.

PRæſens Axioma apertiſſimum eſt ex decima definitione, qua angulus rectus deſcribitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum conſtituentium augeri, vel minui nequit, ſed prorſus eſt immutabilis, cum angulus rectus efficiatur à perpendiculari, quæ alteri rectæ inſiſtat. Quæ perpendicularis eſt omninò immobilis, nec ad vnam, nec ad alteram partem deflectere poteſt, ſecus non erit amplius perpendicularis.

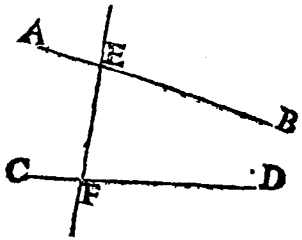
XIII.

Et ſi in duas rectas lineas altera recta incidens, internos, & ad eaſdem partes angu-

los

los duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

EXempligratia si in duas rectas lineas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte vid. BEF, DFE minores duobus rectis, vult Euclides illas tandem in vnum punctum concurrere, versus eam partem in qua sunt anguli minores duobus rectis.



Quia verò (vt notat Clauius) huiusmodi Axioma maximā dubietatem secum trahit, ipsius probationem ommittere non debemus, at solummodo ipsam ad Prop. 29 remittimus, cum ibi solum incipiat apparere vsus huius Axiomatis: & hoc ne vllus dubitationi locus relinquatur.

X I V.

Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

HViusmodi principium nullam potest habere difficultatem; nam si duæ lineæ rectæ versus vnam partem coeant in punctum, angulumque efferment, necessariò ex altera parte semper magis, ac magis disiungentur, vt perspicuum est. Quamobrem, vt spatium aliquod rectilineum ex omni parte claudatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda est. Si quis vero cuperet demonstrationem huius Axiomatis Clauium consulat.

X V.

Si æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis.

X V I.

Si inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus excessui eorum, quę à principio erant, æqualis.

X V I I.

Si ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

X V I I I.

Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.

XIX.

Omne totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

X X.

Si totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT verbi gratia quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10. Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3 propterea reliquus illius 14. duplus etiam est reliqui huius 7. Aduertant tamen, quod hoc Axioma in vniuersum demonstrabitur Prop. 5 lib. 5.

XXI.

Si fuerint tres quantitates, quarum prima ſuperet ſecundam,& ſecunda ſuperet tertiam, etiam prima tertiam ſuperabit.

In primo Elemento.

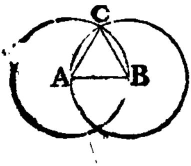
EVclides in primo Libro quamplurima circa rectilineas figuras, triangula ſcilicet, & parallelogramma, demonſtrat. Et primum triangulorum ortus, & proprietates oſtendit, ipſos tùm iuxta angulos, tùm iuxta latera inter ſe comparando. Poſtmodum vero parallelogrammorum proprietates interijciens tranſitum facit ad parallelogramma, quorum ortum declarat, nec non etiam ſymptomata ipſorum demonſtrat. Rurſus triangulorum, ac parallelogrammorum commutationem manifeſtat, & quonam pacto parallelogrammum æquale triangulo conſtituatur. Demum agit de ijs, quæ in rectangulis triangulis à lateribus deſcribuntur, quadratis: videlicet quam habeat proportionem quadratum illud, quod à latere rectum angulum ſubtendente, deſcribitur, ad ea quadrata, quæ à reliquis lateribus rectum angulum comprehendentibus, fiunt.

PRO-

PROPOS. I. PROBL. I.

Super data recta linea terminata, triangulum æquilaterum constituere.

ANte demonstrationem huius propositionis est aduertendum in omni problemate duo potissimum esse consideranda, nempe constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, qua ostenditur, constructionem rectè esse institutam. Quæ duo etiam reperiuntur fere in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonstretur id, quod proponitur, construendum est aliquid; vt ex sequentibus fiet manifestum, cum pauca admodum sint theoremata, quæ nullam requirant constructionem.



Sit igitur proposita recta linea terminata AB, super quam constituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ AB, [*per 3. pet.*] describatur circulus CB: Item centro B, & interuallo eiusdē rectæ BA, alius circulus describatur CA, secans priorem in puncto C. Ex quo [*per 1. pet.*] ducantur duæ rectæ lineæ CA, CB, ad puncta A, & B; Eritque super rectam AB, constitutum triangulum ABC, hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico hoc triangulum ita constructum esse æquilaterum. Probatur. Quoniam rectæ AB, AC, ducuntur ex centro A, ad circumpherentiā circuli CB; [*per 15. def.*] erit recta AC, rectæ AB, æqualis: Rursus quia rectæ BC, BA, ducuntur ex centro B, ad circumpherentiam circuli CA, erit recta BC, rectæ BA æqualis. Tàm

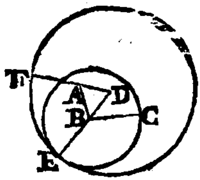
igitur

igitur AC, quàm BC, ęqualis est rectę AB. Quare [*per* 1. *axi.*] AC, & BC inter se æquales erunt; atque idcirco triangulum ABC, erit æquilaterum. Supra data ergo recta linea terminata, &c. Quod erat faciendum.

PROPOS. 2. PROBL. 2.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ, æqualem rectam lineam ponere.

SIt punctum datum A, & data recta linea BC, cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ BC; nempe B. centro [*per* 3. *pet.*] describatur circulus CE, interuallo rectæ BC. Hoc facto ex puncto A, ad centrum B, [*per* 1. *pet.*] recta ducatur AB; (nisi punctum A, fuerit intra rectam BC, vel in aliqua extremitate lineæ BC. Tunc enim pro linea ducta sumetur portio lineę BC.) Super recta vero AB, [*per* 1. *primi.*] constituatur triangulum æquilaterum ABD, sursum, aut deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modo constituta DA, DB, versus rectam AB [*per* 2. *pet.*] extendantur; DB, quidem oppositum puncto dato A, vsque ad circumferentiam in E; DA, vero oppositum centro B, quantumlibet in F. Deinde centro D, interuallo lineæ DE per centrum B transeuntis [*per* 3. *pet.*] alter circulus describatur FE, secans rectam DF, in F. Dico rectam AF, positam ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ BC. Probatur. Quoniam DE, DF, ductæ sunt ex centro D, ad circumferentiam FE, [*per* 15. *def.*] ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur DA, DB, æqualibus, cum sint

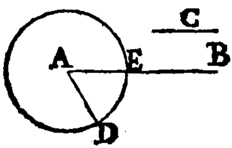


latera trianguli æquilateri ADB, [*per 3. pron.*] remanebit AF, æqualis rectæ BF. Sed eidem BE, [*per 15. def.*] æqualis est recta BC, (cum ambæ cadant ex centro B, ad circumferentiam EC.) Igitur rectæ AF, BC, quandoquidem vtraque æqualis est ostensa rectę BE, inter se [*per 1. pron.*] æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. Quod erat faciendum.

PROPOS. 3. PROBL. 3.

Datis duabus rectis lineis inæqualibus, de maiore lineam minori ęqualem detrahere.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales C, minor, & AB maior, oporteatq; ex maiore AB detrahere lineam æqualem minori C. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris AB, nempe ad punctum A, [*per 3. pri.*] ponatur aliqua linea, quæ sit AD, æqualis minori C. Deinde centro A, interuallo AD [*per 3. pet.*] circulus describatur secans AB, in E; Dico AE detractam esse æqualem ipsi C. Probatur. Quoniam AE, [*per 15. def.*] æqualis est ipsi AD, & eidem AD per constructionem æqualis est linea C; [*per 1. pun.*] erunt AD, & C, inter se æquales. Duabus igitur datis, &c. Quod erat faciendum.

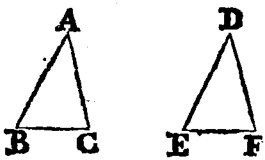


PROPOS. 4. THEOR. 1.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant vero, & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum

tum: Et basim basi æqualem habebunt: eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulus æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

SInt duo triangula ABC, DEF, & vnius vtrumq; latus AB, AC, æquale sit alterius vtrique lateri DE, DF, hoc est AB ipsi DE, & AC, ipsi DF; angulusque A, contentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi EF; & totum triangulum ABC, triangulo DEF; & vtrumque angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, idest, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus, AC, DF inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoque esse æquales. Probatur: Quoniam enim recta AB, rectæ DE, ponitur æqualis, fit, vt si altera alteri superponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, [*per 8.pron.*] ipsæ sibi mutuo congruant, punctumque B, in puncto E, cadat. Neque enim dicere quis poterit, partem rectæ AB, rectæ DE, congruere, & partem non quia tunc duæ rectæ haberent idem segmentum commune, quod [*per 10.pron.*] est impossibile. Quod si quis dicat posito puncto A in D, cadere quidem punctum B, in E, sed rectam AB, cadere, vel ad dextram, vel ad sinistram, claudent duæ rectæ lineæ superficiem, quod [*per 14.pron.*] fieri non potest. Quare recta AB, rectæ DE, congruet, vt dictum est. Cum

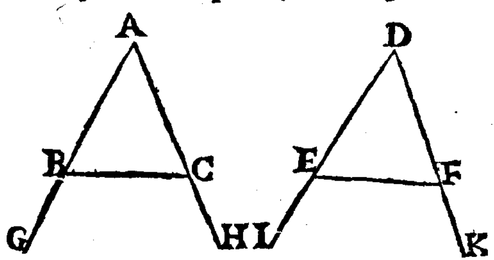


ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [*per* 8. *pron.*] congruet quoque alter alteri, hoc est recta AC, rectæ DF, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum AC, DF; Basis igitur BC, basi EF, congruet quoque: alias si recta BC, caderet supra, vel infra EF, cum punctum B, cadat in puncto E, & punctum C, cadat in puncto F, duæ rectæ clauderent spatium quod [*per* 14. *pron.*] est absurdum. Quo circa basis BC, cum basi EF congruit, ac proinde [*per* 8. *pron.*] æqualis erit. Et triangulum ABC, triangulo DEF, & angulus B, angulo E, & angulus C, angulo F, ob eandem causam existet æqualis. Quare si duo triangula, &c. Quod erat demonstrandum.

PROP. 5. THEOR. 2.

Isoscelium triangulorum anguli supra basim sunt inter se æquales: & productis æqualibus trianguli lateribus anguli infra basim pariter sunt inter se æquales.

SIt datum triangulum isosceles ABC, cuius duo latera AB, AC sint æqualia, dico angulos ABC,



ACB supra basim esse inter se æquales. Pariter dico, quod

quod productis æqualibus lateribus AB, AC in G, & H, angulos infra basim CBG, BCH existere æquales.

Intelligamus triangulum ABC esse replicatum in triangulo DEF, & latera AB, AC trianguli ABC esse æqualia lateribus DE, DF trianguli DEF; & ideò quattuor lineas AB, AC, DE, DF esse æquales; necnon & angulum A æqualem angulo D, angulum B angulo E, & angulum C angulo F.

Demonstr. Quoniam enim duo triangula ABC, DEF per suppositionem habent duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE, DF alterum alteri hoc est latus AB æquale lateri DF, & latus AC æquale lateri DE, & angulum A æqualem angulo D; [*per 4. huius*] erunt reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur, sicque angulus ACB, cui subtenditur latus AB æqualis erit angulo DEF cui subtenditur latus DF; sed angulus ABC ponitur æqualis angulo DEF, cum sit idem angulus replicatus in triangulo DEF: ergo [*per 1. axiom.*] erit angulus ABC æqualis angulo ACB, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex hac propos. 5. liquet, omne triangulum æquilaterum esse quoque æquiangulum: hoc est, tres angulos trianguli æquilateri esse inter se æquales, nam semper duo latera quomodocumque sumpta sunt æqualia, sicque anguli ad basim erunt æquales.

Notatio Prima.

Altera pars huius quintæ propositionis, angulos scilicet GBC, HCB infra basim BC pariter existere æquales demonstrabitur post propositionem 13. huius libri.

Notatio Secunda.

Sexta propositio Euclidis post 18. propositionem nullo negotio demonstrabitur.

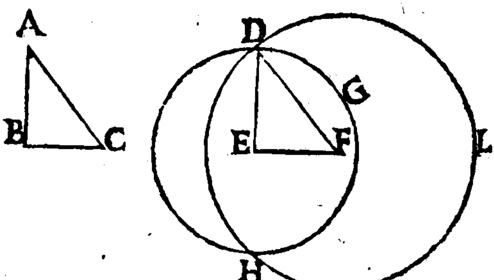
Notatio Tertia.

Septima Euclidis propositio tantummodo ad octauam propositionem demonstrandam inseruit; qua de re cum sequens propositio aliter demonstrari possit, ideo penitus de relinquitur, & solum septimum locum ad confusionem euitandam illi reseruamus.

PROP. 8. THEOR. 5.

Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus æqualia vtrumque vtrique; habuerint vero, & basim basi æqualem; angulos quoque sub æqualibus rectis lineis contentos æquales habebunt.

SInt data duo triangula ABC, DEF, quæ habeant duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE,



DF, alterum alteri, hoc est AB adæquet DE, & AC DF: vti pariter basis BC sit æqualis basi EF: dico angugulum A æqualem esse angulo D, quippequi sub æqualibus lateribus comprehenduntur.

Centro E interuallo ED [*per* 3.*post.*] describatur circulus DGH; & pariter centro F interuallo FD notetur alius circulus DLH, qui priorem circulum secabit in puncto D.

Demonst. Intelligatur basis BC superposita basi EF, & quod punctum B cadat in E, cum hæ duæ bases supponantur æquales, etiam punctum C cadet in F, habebuntq; congruentiam: quo stante si denuò concipiamus triangulum ABC superpositum triangulo DEF manente basi BC supra basim EF, punctum A necessario cadet in D, non autem extra, quia cum BA ponatur æqualis ipsi ED, punctum A cadet in circumferentiam DGH: pariter cum CA statuta sit æqualis ipsi FD, idem punctum A erit in circumferentia alterius circuli LDH: inde sequitur punctum A cadere in D, cum solum punctum D sit commune vtrique circumferentiæ: Si ergo punctum A cadit in D etiam lineæ BA, AC congruent lineis ED, DF, & angulus A congruet angulo D: quare [*per* 8. *axiom.*] duo Anguli A, & B sub æqualibus rectis lineis contenti erunt æquales: quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

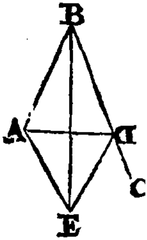
Porrò ex hac octaua propositione non solum colligi potest, angulos ab æqualibus lateribus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, vtrumque vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immo totum triangulum toti triangulo æquales esse, vt constat ex eadem superpositione vnius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent, & dicti anguli, & tota triangula, vt perspicuum est. Quod etiam ex quarta propositione colligi poterit.

PROP.

PROPOS. 9. PROBL. 4.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

SIt diuidendus angulus rectilineus ABC, bifariam, hoc est in duos angulos æquales. A recta BC, maiori [*per 3. pri.*] abſcindatur BD, æqualis ipſi BA, ducaturque recta AD. Deinde ſuper AD, [*per 1. pri.*] conſtituatur triangulum æquilaterum AED, & ducatur recta BE, diuidens angulum rectilineum ABC, in angulos ABE, EBC. Dico hos angulos inter ſe eſſe æquales. Probatur. Cum enim latera AB, BE, trianguli ABE, æqualia ſint lateribus DB, BE, trianguli DBE, vtrumque vtrique (nam DB, per conſtructionem ipſi AB, factum fuit æquale) & BE, eſt commune; & baſis AE, ſit æqualis baſi ED; ex eo quod ſint latera trianguli æquilateri; ſequitur, quod duo triangula ABE, DBE, habeant conditiones octauæ Propoſitionis, vnde erit angulus ABE, angulo DBE, æqualis; quapropter angulus ABC, erit bifariam diuiſus; quod erat faciendum.

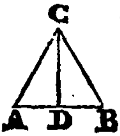


PROPOS. 10. PROBL. 5.

Datam rectam lineam finitam bifariam secare.

SIt recta finita AB, diuidenda bifariam, ideſt in duas partes æquales [*per 1. pri.*] Deſcribatur ſuper

AB triangulum æquilaterum ABC, cuius angulus C, recta C D, [*per 9. pri.*] diuidatur bifariam, rectaque CD, rectam AB, secet in D. Dico rectam AB, bifariam esse diuisam in D. Probatur. Quoniam duo latera AC, CD, trianguli ACD, æqualia sunt duobus lateribus BC, CD, trianguli BCD, vtrumque vtrique, nempe AC, ipsi BC, cum sint ambo latera trianguli æquilateri, & CD, est commune; Est autem, & angulus ACD, angulo BCD, æqualis per constructionem: [*per 4. pri.*] erit basis AD, basi DB, æqualis. Data igitur recta AB, fuit bifariam secta in D. Quod erat faciendum.



PROPOS. 11. PROBL. 6.

Data recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

SIt data recta linea AB, & in ipsa sit datum punctum C, a quo iubemur erigere super AB, lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur [*per 3. primi*] recta CD, æqualis ipsi CA. Deinde super AD, [*per 1. pri.*] constituatur triangulum æquilaterum AED, atque ex puncto E, ad punctum C, ducatur linea EC, quam dico esse perpendicularem ad AB. Probatur. Quoniam latera AC, CE, trianguli ACE, æqualia sunt lateribus DC, CE, trianguli DCE, vtrumque vtrique, nempe AC, ipsi CD, per constructionem; & CE, commune; Est vero, & basis AE, basi ED, æqualis, cum sint latera trianguli æquilateri: [*per 8. pri.*] Erunt anguli ad C, dictis lateribus com-

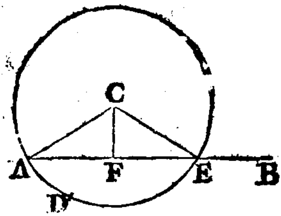
pre-

prehensi æquales: quare [*per* 10 *pri.*] dicetur vterque rectus; atque adeo EC, recta ad AB, perpendicularis erit. Data igitur recta linea a puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.

PROPOS. 12. PROBL. 7.

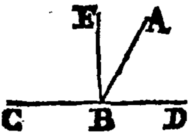
Super datam rectam lineam etiam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam ducere.

SIt recta AB, etiam interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C, à quo oporteat lineam perpendicularem ducere ad rectam AB. Centro C, interuallo vero quolibet circulus describatur secans AB, in A, & E, (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt transcendant rectam AB; alias eam non secaret) [*per* 10. *pri.*] diuisa autem recta AE, bifariam in F, ducatur recta CF, quam dico perpendicularem esse ad AB. Probatur. Si enim ducantur CA, CE, erunt duo latera AF, & FC, trianguli AFC, æqualia duobus lateribus EF, FC, trianguli EFC, vtrumque vtrique, per constructionem; est autem & basis CA, basi CE æqualis, cum sint ex centro C, ad circumferentiam ADE. Quare [*per* 8. *pri*] erit angulus AFC, angulo EFC æqualis, & propterea [*per* 10. *def*] vterque rectus. Ducta est igitur CF, perpendicularis ad AB. Quod erat faciendum.



PROPOS. 13. THEOR. 6.

Dum recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit.



Sit recta AB consistens super rectam CD, quæ faciat duos angulos ABC, ABD: dico huiusmodi angulos esse rectos, vel simul acceptos adæquare summam duorum rectorum.

Demonſ. Vel recta linea AB est perpendicularis ad CD. vel non est perpendicularis; si est perpendicularis [*per* 10. *def.*] anguli deinceps ABC, ABD erunt recti, & consequenter [*per* 12. *axiom.*] duobus rectis æquales. Si verò linea AB non existat perpendicularis ad CD, faciatque angulum ABC obtusum, & ABD acutum, à puncto B [*per* 11. *primi.*] ducatur BE perpendicularis ad CD. Cum ergo recta BE sit perpendicularis ad CD [*per* 10. *def*] duo anguli EBC, EBD erunt ambo recti, & [*per* 12. *axiom*] duobus rectis æquales; sed tres anguli DBA, ABE, EBC sunt partes duorum angulorum EBC, EBD qui sunt recti: ergo [*per* 1. *axiom*] dicti tres anguli ABD, ABE, EBC erunt æquales duobus rectis; sed ijdem tres anguli ABD, ABE, EBC sunt omnes partes duorum angulorum ABC, ABD; & ideo illis æquales: ergo [*per* 1. *axioma*] & duo anguli ABC, ABD erunt æquales duobus rectis, Quod erat demonstrandum.

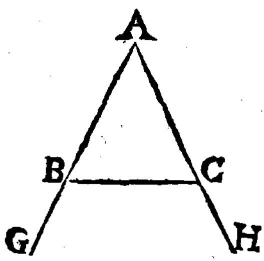
Altera

Altera pars propositionis quintæ Euclidis.

In triangulo Isosceli productis æqualibus lateribus anguli, qui fiunt infra basim, sunt inter se æquales.

SIt triangulum Isosceles ABC, in quo æqualia latera sint AB, AC, & infra basim BC producantur in G, & H. Dico angulos infra basim, GBC, HCB esse inter se æquales.

Demonst. Cum enim recta CB cadat super rectam AG [*per* 13. *huius*.] duo anguli CBA, CBG erunt duobus rectis æquales: quod pariter est dicendum circa rectam BC cadentem super rectam AH, & efficientem duos angulos BCA, BCH duobus rectis æquales: quare cum omnes recti anguli [*per* 12 *prō*.] sint inter se æquales, erunt duo anguli CBA, CBG æquales duobus angulis BCA, BCH: si ergo ab huiusmodi quantitatibus æqualibus demantur anguli ABC, ACB supra basim [*per* 1. *par*.5.] æquales; remanebunt anguli CBG, BCH infra basim æquales. Quod erat demonstrandum.

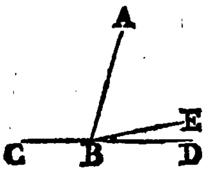


PRO-

PROPOS. 14. THEOR. 7.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ, eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

SIt data recta AB, in qua punctum B, ad quod ex diuersis partibus ductæ sint duæ rectæ lineæ BC, BD, facientes cum AB, duos angulos ABC, ABD, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas BD, BC, taliter esse inter se constitutas, vt CBD, sit vna linea recta. Probatur. Si enim CBD, non est recta producta CB, in directum, & continuum cadet aut supra BD, aut infra. Si cadit supra, verbi gratia, in E, cum super rectam CBE, insistat recta AB, [*per* 13.*pri.*] fient duo anguli ABC, ABE, duobus rectis ęquales: Ponuntur autem, & duo anguli ABC, ABD, duobus rectis æquales; sunt autem [*per* 12.*pron.*] omnes recti inter se ęquales: Quare duo anguli ABC, ABE, duobus angulis ABC, ABD, erunt æquales: Ablato igitur communi angulo ABC, [*per* 3.*pron.*] remanebunt anguli ABE, ABD, inter se æquales, pars, & totum, quod est absurdum. Non igitur recta BE, cadit supra rectam BD. Quoquo modo ostendetur, ipsam nec cadere infra ipsam BD: igitur CB, in directum producta eadem efficietur, quæ BD: ideoq; si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

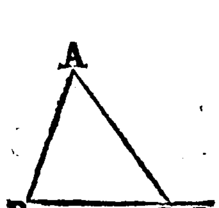


PRO-

cta BEF, ita vt EF, [*per* 3. *pri.*] abscissa sit æqualis rectæ EB, ducaturque recta FC. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus CE, EF, trianguli CEF, vtrumque vtrique per constructionem; sunt autem, & anguli ad E, dictis lateribus æqualibus comprehensi [*per* 15. *pri.*] inter se equales, cum sint circa verticem, & oppositi: Erit per secundam partem quartę propositionis angulus EAB, ęqualis angulo ECF; est autem angulus ACD, externus maior angulo ECF, cum ille sit totus, & hic pars: igitur, & externus angulus ACD, [*per* 1. *ax.*] maior erit interno, & opposito EAB; Denuo si latus AC, producatur ad G, & latus BC diuidatur bifariam, & a puncto A, per punctum sectionis, eo prorsus modo, quo supra factum fuit, ducatur linea facile erit demonstrare angulum BCG, maiorem esse angulo interno, & opposito ABC, quo stante cum angulus BCG, [*per* 15. *pri.*] sit æqualis angulo ACD, etiam angulus ACD [*per* 1. *ax.*] maior erit angulo ABC: cuiuscumque ergo trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 17. THEOR. 10.

Cuiuscumque trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.



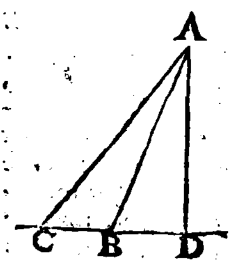
SIt triangulum ABC; dico duos angulos ABC, ACB, minores esse duobus rectis quomodocumque sumantur. Producatur enim quoduis latus, nempe BC, in I. Quoniam igitur [*per* 16. *pri.*] angulus ACI, externus maior est interno, no, & opposito ABC; si addatur communis angulus ACB, [*per 4. pron.*] erunt duo anguli ACI, ACB, maiores duobus angulis ABC, ACB; sed duo ACI, ACB, [*per 13. pri.*] æquales sunt duobus rectis. Igitur duo ABC, ACB, erunt minores duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli CBA, BAC, minores duobus rectis, dummodo latus BA, producatur ita, vt angulus externus efformetur. Cuiuscunq; igitur trianguli duo anguli, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM 1.

Ex dictis constat in omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos. Cum enim per hanc propositionem duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, vt si vnus fuerit rectus, vel obtusus quæmcunque reliquorum esse acutum, ne in triangulo duos angulos rectos, aut rectis maiores esse fateamur.

COROLLARIVM 2.

Sequitur etiam ex hac Propositione: quod si linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum scilicet acutum, & alterum obtusum, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam lineam rectam demissam, cadere versus partem acuti anguli. Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtusum; demittaturque ex puncto A, quocunque [*per 12. pri.*] ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes an-



guli acuti ABD. Nam si non cadit ad partes anguli acuti, si fieri potest cadat ad partes anguli obtusi ABC, & sit verbi gratia AC; igitur duo anguli ABC, ACB, sunt maiores duobus rectis, cum vnus sit rectus, & alter obtusus quod est absurdum [*per* 17 *pri.*]: quare perpendicularis cadet ad partes anguli acuti; quod erat ostendendum.

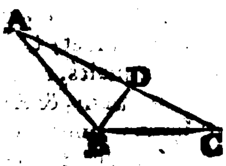
COROLLARIVM 3.

Pari ratione fit manifestum omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli isoscelis supra basim esse acutos. Nam cum [*per* 5. *pri.*] & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in isoscele supra basim sint inter se æquales: sintque [*per* 17. *pri.*] simul tam illi, quam isti duobus rectis minores, erit quilibet illorum recto minor; hoc est acutus.

PROPOS. 18. THEOR. 11.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

IN triangulo ABC, sit latus AC, maius latere AB. Dico angulum ABC, maiorem esse angulo ACB. Prob. E maiori latere AC, [*per* 3. *pri.*] auferatur AD, æqualis ipsi AB, ducaturque recta BD. Quoniam igitur duo latera AD, AB, per constructionem sunt inter se æqualia; [*per* 5. *pri.*] erunt anguli ABD, ADB, inter se æquales: Est autem angulus ADB, [*per* 16. *pri.*] maior angulo ACB: igitur, & angulus ABD, maior erit angulo ACB,



ACB. Quamobrem cum [*per 9 pron.*] angulus totus ABC, sit etiam maior angulo ABD, erit angulus ABC, multo maior angulo ACB. Eadem ratione si latus AC, ponatur maius latere BC, facile erit ostendere, angulum ABC, maiorem esse angulo A. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit. Quod demonstrandum erat.

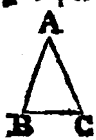
COROLLARIVM.

Ex hoc sequitur omnes tres angulos trianguli scaleni esse inæquales, cum latera in huiusmodi triangulis sint inter se inæqualia.

Propos. VI. lib. I. Elem. Euclid.

Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint; etiam sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

IN triangulo ABC, sint duo anguli ABC, ACB, super latus BC, inter se æquales. Dico etiam duo



latera æqualibus angulis opposita, nempe AB, AC, esse æqualia. Probatur. Si enim non sunt æqualia latera AB, AC, erit alterum maius. Sit ergo AB, maius quàm AC, [*per 18. pri.*] iam sequitur quod angulus C, maiori lateri oppositus sit maior angulo B, qui minori lateri opponitur: quod est contra suppositum; anguli enim B, & C, supponuntur æquales. Si ergo trianguli duo anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

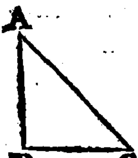
COROLLARIVM.

Sequitur ex hac propositione, omne triangulum æquiangulum, idest cuius omnes anguli sunt æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conuersum est Corollarij 5. Propos. vt patet; & suadetur, quia in triangulo æquiangulo duo anguli quomodocumque sumpti inter se sunt æquales, vnde & latera subtensa æqualia erunt.

PROPOS. 19. THEOR. 12.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.

IN triangulo ABC, angulus B, maior sit angulo C. Dico latus AC, subtendens maiorem angulum B, maius esse latere AB, quod angulum minorem C, subtendit. Probatur. Si enim latus AC, maius non est latere AB, erit vel æquale illi, vel minus: Si dicatur AC, æquale esse ipsi AB; [*per* 5. *pri.*] erit angulus, B, æqualis angulo C; est autem, & maior per hypothesin, quod est absurdum. Si verò AC, minus esse dicatur latere AB, [*per* 18. *hui.*] erit angulus B, subtensus à minori lateri AC, minor angulo C, subtenso à maiori latere AB; ponitur autem maior, quod maius est absurdum. Cum igitur AC, latus neque æquale sit lateri AB, neque minus, sequitur, quod sit maius. Qua etiã ratione probabitur latus AC, maius esse latere BC, si angulus B, concedatur maior angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur, quod demonstrandum erat.



CO-

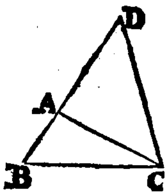
COROLLARIVM.

Sequitur ex hac Prop. omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis est, esse minimam. Nam perpendicularis linea facit angulum rectum cum alia linea, vnde si ducatur alia linea, quæ non sit perpendicularis, & constituat triangulum, angulus à tali linea constitutus erit acutus, ne in triangulo duo anguli sint æquales duobus rectis. Quo stante maior erit linea, quæ non est perpendicularis, cum ipsa subtendat angulum maiorem, nempe rectum, perpendicularis verò subtendat angulum minorem, nempè acutum.

PROPOS. 20. THEOR. 13.

Omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

Sit triangulum ABC, dico quælibet eius duo latera, nempe AB, AC, simul maiora esse reliquo latere BC. Producatur vnum ex illis lateribus, nempe AB, vsque ad D, taliter vt sit recta AD, [*per 3 pri.*] æqualis alteri lateri non producto AC, & ducatur recta DC. Quoniam igitur duo latera AD, AC, per constructionem sunt inter se æqualia [*per 5. pri.*] erunt anguli ADC, ACD, inter se æquales: Est autem angulo ACD, maior angulus BCD; [*per 9. pron.*] Igitur & angulus BCD, maior erit angulo ADC. In triangulo ergo BCD, latus BD, oppositum maiori angulo BCD, [*per 19. pri.*] maius erit latere BC. opposito minori angulo BDC: Cum igitur duo latera AB, AC, simul æqualia sint ipsi BD, (si enim

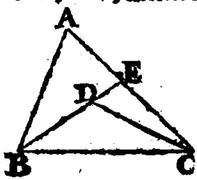


æqualibus, AD, AC, commune addatur AB, [*per 2. pron.*] erunt tota æqualia, nimirum linea composita ex BA,& AC,& linea composita ex BA,& AD) erunt, quoq; latera AB. AC, simul maiora latere BC. Eodem modo demonstrabitur quęlibet alia duo latera reliquo esse maiora. Quare omnis trianguli duo latera, &c. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 21. THEOR. 14.

Si super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

IN triangulo ABC, super extremitates B, & C, lateris BC, intra triangulum constituantur duæ rectæ lineæ BD, & CD, in puncto D, concurrentes. Dico BD, CD, simul minores esse duobus lateribus BA, CA, simul; At vero angulum BDC, maiorem angulo BAC. Probatur. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe BD, ad punctum E, lateris CA. Quoniam igitur in triangulo BAE, duo latera BA, AE, [*per 20. pri.*] maiora sunt latere, BE, si addatur commune EC, [*per 4. pron.*] erunt BA, & AC, maiora quam BE, & EC. Rursus quia in triangulo CED, duo latera CE, & ED [*per 20. pri.*] maiora sunt reliquo CD; si commune apponatur DB [*per 4. pron.*] erunt CE, EB, maiora quam CD, & DB. Cum vero ostensum fuerit etiam BA, & AC, maiora esse quam CE, & EB; & rursus

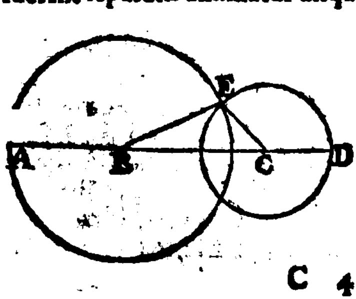


sus CE, & EB, demonstrata sunt maiora quam CD, & DB, [*per* 21.*axi*.] sequitur quod BA, & AC, maiora sint quam CD, & DB. Quod in primis erat probandum. Prӕterea quoniam angulus BDC, [*per* 16. *pri*.] maior est angulo DEC, externus interno, & opposito; & angulus DEC, ob eandem causam maior est angulo BAC; [*per* 21.*ax*.] Erit angulus BDC, maior angulo BAC, quod secundo propositum fuit. Si igitur super trianguli vno latere, &c Quod erat ostendendũ.

PROPOS. 22. PROBL. 8.

Ex tribus rectis lineis, quæ sint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

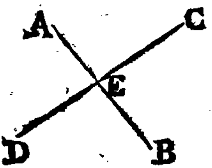
Sint datæ tres lineæ rectæ AB, BC, CD, quarum quælibet duæ reliqua sint maiores (alias ex ipsis non posset constitui triangulum, vt constat ex Propos. 20.) oporteatque construere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Si datæ rectæ lineæ fuerint separatæ assumatur aliqua linea indefinitè próducta, à qua abscindantur [*per* 3. *pri*.] tres lineæ ęquales tribus iam datis, quo posito iuxtà regulas mox tradendas triangulum constituatur. Si verò datæ lineæ, vt in nostra figura, com-



PROPOS. 15. THEOR. 8.

Si duæ rectæ lineę se se mutuo secuerint, angulos ad verticem ęquales inter se efficient.

SEcent se duæ rectæ AB,CD, in puncto E, vtcumque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, esse inter se æquales, angulum videlicet AEC, angulo DEB, & angulum AED, angulo CEB. Probatur. Quoniam enim recta AE, consistit super rectam CD, [*per 13.pri.*] erunt duo anguli AEC, AED, duobus rectis æquales. Rursus quia recta DE, consistit super rectam AB, [*per 12.pron.*] erunt duo anguli DEA, DEB, æquales duobus rectis. Cum igitur omnes anguli recti [*per 3.pron.*] sint inter se æquales; erunt duo anguli AEC, AED, duobus angulis DEA, DEB, æquales. Dempto igitur communi angulo AED; [*per 13.pron.*] remanebit angulus AEC, angulo DEB, æqualis. Eadem ratione demonstrabitur, angulos AED, CEB, inter se æquales esse: Si igitur duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.



COROLLARIVM. 1.

Euclides colligit ex demonstratione huius Theorematis (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc Corollarium non habent) duas lineas rectas se se mutuo secantes, efficere ad punctum sectiones quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in de-

demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos AEC, AED, quam duos AED, DEB, duobus esse rectis æquales per Propos. 13. Quare omnes anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis.

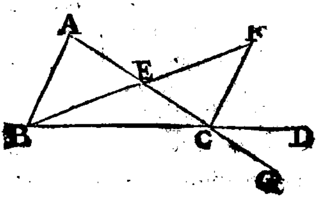
COROLLARIVM. 2.

Eadem ratione colligemus, omnes angulos circa vnum, & idem punctum constitutos quoscumque fuerint, quatuor dumtaxat rectis angulis æquales esse: Si enim ex E, aliæ quotlibet lineæ educantur, diuidentur solummodo illi quatuor anguli ad E, constituti in plures partes, [per 19. pron.] quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Ex quo perspicuum est omne spatium punctum aliquod in plano circumstans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi authores asserunt; quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales 4. rectis.

PROPOS. 16. THEOR. 9.

Cuiuscumque trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito maior est.

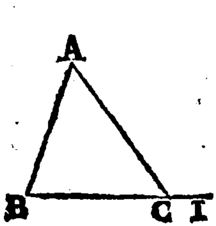
TRianguli ABC, latus BC, producatur ad D; Dico angulum externum ACD, maiorem esse interno, & opposito BAC, itemque maiorem interno, & opposito ABC. Diuidatur [per 10. pri.] AC, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur re-



cta BEF, ita vt EF, [*per* 3.*pri.*] abſciſſa ſit æqualis rectæ EB, ducaturque recta FC. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia ſunt lateribus CE, EF, trianguli CEF, vtrumque vtrique per conſtructionem; ſunt autem, & anguli ad E, dictis lateribus æqualibus comprehenſi [*per* 15.*pri.*] inter ſe ęquales, cum ſint circa verticem, & oppoſiti: Erit per ſecundam partem quartę propoſitionis angulus EAB, ęqualis angulo ECF; eſt autem angulus ACD, externus maior angulo ECF, cum ille ſit totus, & hic pars: igitur, & externus angulus ACD, [*per* 1. *ax.*] maior erit interno, & oppoſito EAB; Denuo ſi latus AC, producatur ad G, & latus BC diuidatur bifariam, & a puncto A, per punctum ſectionis, eo prorſus modo, quo ſupra factum fuit, ducatur linea facile erit demonſtrare angulum BCG, maiorem eſſe angulo interno, & oppoſito ABC, quo ſtante cum angulus BCG, [*per* 15.*pri.*] ſit æqualis angulo ACD, etiam angulus ACD [*per* 1.*ax.*] maior erit angulo ABC: cuiuſcumque ergo trianguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 17. THEOR. 10.

Cuiuſcumque trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti.



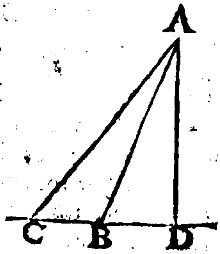
SIt triangulum ABC; dico duos angulos ABC, ACB, minores eſſe duobus rectis quomodocumque ſumantur. Producatur enim quoduis latus, nempe BC, in I. Quoniam igitur [*per* 16. *pri.*] angulus ACI, externus maior eſt interno, no, & oppoſito ABC; ſi addatur communis angulus ACB, [*per 4. pron.*] erunt duo anguli ACI, ACB, maiores duobus angulis ABC, ACB; ſed duo ACI, ACB, [*per 13. pri.*] æquales ſunt duobus rectis. Igitur duo ABC, ACB, erunt minores duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli CBA, BAC, minores duobus rectis, dummodo latus BA, producatur ita, vt angulus externus efformetur. Cuiuſcunq; igitur trianguli duo anguli, &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM 1.

Ex dictis conſtat in omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, reliquos eſſe acutos. Cum enim per hanc propoſitionem duo quilibet anguli ſint duobus rectis minores, neceſſe eſt, vt ſi vnus fuerit rectus, vel obtuſus quæmcunque reliquorum eſſe acutum, ne in triangulo duos angulos rectos, aut rectis maiores eſſe fateamur.

COROLLARIVM 2.

Sequitur etiam ex hac Propoſitione; quod ſi linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum ſcilicet acutum, & alterum obtuſum, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam lineam rectam demiſſam, cadere verſus partem acuti anguli. Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtuſum; demittaturque ex puncto A, quocunque [*per 12. pri.*] ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli



guli acuti ABD. Nam si non cadit ad partes anguli acuti, si fieri potest cadat ad partes anguli obtusi ABC, & sit verbi gratia AC; igitur duo anguli ABC, ACB, sunt maiores duobus rectis, cum vnus sit rectus, & alter obtusus quod est absurdum [*per 17 pri.*]: quare perpendicularis cadet ad partes anguli acuti; quod erat ostendendum.

COROLLARIVM 3.

Pari ratione fit manifestum omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli isoscelis supra basim esse acutos. Nam cum [*per 5. pri.*] & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in isoscele supra basim sint inter se æquales: sintque [*per 17. pri.*] simul tam illi, quam isti duobus rectis minores, erit quilibet illorum recto minor; hoc est acutus.

PROPOS. 18. THEOR. 11.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

IN triangulo ABC, sit latus AC, maius latere AB. Dico angulum ABC, maiorem esse angulo ACB. Prob. E maiori latere AC, [*per 3. pri.*] auferatur AD, æqualis ipsi AB, ducaturque recta BD. Quoniam igitur duo latera AD, AB, per constructionem sunt inter se æqualia; [*per 5. pri.*] erunt anguli ABD, ADB, inter se æquales: Est autem angulus ADB, [*per 16. pri.*] maior angulo ACB: igitur, & angulus ABD, maior erit angulo ACB,

ACB. Quamobrem cum [*per 9 pron.*] angulus totus ABC, sit etiam maior angulo ABD, erit angulus ABC, multo maior angulo ACB. Eadem ratione si latus AC, ponatur maius latere BC, facile erit ostendere, angulum ABC, maiorem esse angulo A. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit. Quod demonstrandum erat.

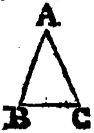
COROLLARIVM.

Ex hoc sequitur omnes tres angulos trianguli scaleni esse inæquales, cum latera in huiusmodi triangulis sint inter se inæqualia.

Propos. VI. lib. 1. Elem. Euclid.

Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint; etiam sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

IN triangulo ABC, sint duo anguli ABC, ACB, super latus BC, inter se æquales. Dico etiam duo



latera æqualibus angulis opposita, nempe AB, AC, esse æqualia. Probatur. Si enim non sunt æqualia latera AB, AC, erit alterum maius. Sit ergo AB, maius quàm AC, [*per 18. pri.*] iam sequitur quod angulus C, maiori lateri oppositus sit maior angulo B, qui minori lateri opponitur: quod est contra suppositum; anguli enim B, & C, supponuntur æquales. Si ergo trianguli duo anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

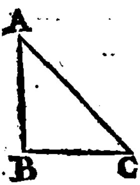
COROLLARIVM.

Sequitur ex hac propositione, omne triangulum æquiangulum, ideſt cuius omnes anguli ſunt æquales, eſſe æquilaterum. Quod quidem conuerſum eſt Corollarij 5. Propoſ. vt patet; & ſuadetur, quia in triangulo æquiangulo duo anguli quomodocumque ſumpti inter ſe ſunt æquales, vnde & latera ſubtenſa æqualia erunt.

PROPOS. 19. THEOR. 12.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.

IN triangulo ABC, angulus B, maior ſit angulo C. Dico latus AC, ſubtendens maiorem angulum B, maius eſſe latere AB, quod angulum minorem C, ſubtendit. Probatur. Si enim latus AC, maius non eſt latere AB, erit vel æquale illi, vel minus: Si dicatur AC, æquale eſſe ipſi AB; [*per 5. pri.*] erit angulus, B, æqualis angulo C; eſt autem, & maior per hypotheſin, quod eſt abſurdum. Si verò AC, minus eſſe dicatur latere AB, [*per 18. hui.*] erit angulus B, ſubtenſus à minori lateri AC, minor angulo C, ſubtenſo à maiori latere AB; ponitur autem maior, quod maius eſt abſurdum. Cum igitur AC, latus neque æquale ſit lateri AB, neque minus, ſequitur, quod ſit maius. Qua etiã ratione probabitur latus AC, maius eſſe latere BC, ſi angulus B, concedatur maior angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur, quod demonſtrandum erat.



CO-

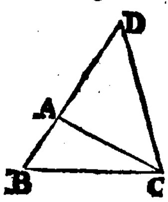
COROLLARIVM.

Sequitur ex hac Prop. omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis est, esse minimam. Nam perpendicularis linea facit angulum rectum cum alia linea, vnde si ducatur alia linea, quæ non sit perpendicularis,& constituat triangulum, angulus à tali linea constitutus erit acutus, ne in triangulo duo anguli sint æquales duobus rectis. Quo stante maior erit linea, quæ non est perpendicularis, cum ipsa subtendat angulum maiorem, nempe rectum, perpendicularis verò subtendat angulum minorem, nempè acutum.

PROPOS. 20. THEOR. 13.

Omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

SIt triangulum ABC, dico quælibet eius duo latera, nempe AB, AC, simul maiora esse reliquo latere BC. Producatur vnum ex illis lateribus, nempe AB, vsque ad D, taliter vt sit recta AD, [*per 3 pri.*] æqualis alteri lateri non producto AC, & ducatur recta DC. Quoniam igitur duo latera AD, AC, per constructionem sunt inter se æqualia [*per 5. pri.*] erunt anguli ADC, ACD, inter se æquales: Est autem angulo ACD, maior angulus BCD; [*per 9. pron.*] Igitur & angulus BCD, maior erit angulo ADC. In triangulo ergo BCD, latus BD, oppositum maiori angulo BCD, [*per 19. pri.*] maius erit latere BC. opposito minori angulo BDC: Cum igitur duo latera AB, AC, simul æqualia sint ipsi BD, (si enim

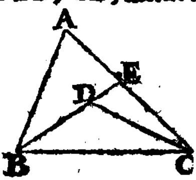


æqualibus, AD, AC, commune addatur AB, [*per 2. pron.*] erunt tota æqualia, nimirum linea composita ex BA, & AC, & linea composita ex BA, & AD) erunt, quoq; latera AB, AC, simul maiora latere BC. Eodem modo demonstrabitur quælibet alia duo latera reliquo esse maiora. Quare omnis trianguli duo latera, &c. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 21. THEOR. 14.

Si super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

IN triangulo ABC, super extremitates B, & C, lateris BC, intra triangulum constituantur duæ rectæ lineæ BD, & CD, in puncto D, concurrentes. Dico BD, CD, simul minores esse duobus lateribus BA, CA, simul; At vero angulum BDC, maiorem angulo BAC. Probatur. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe BD, ad punctum E, lateris CA. Quoniam igitur in triangulo BAE, duo latera BA, AE, [*per 20. pri.*] maiora sunt latere, BE, si addatur commune EC, [*per 4. pron.*] erunt BA, & AC, maiora quam BE, & EC. Rursus quia in triangulo CED, duo latera CE, & ED [*per 20. pri.*] maiora sunt reliquo CD; si commune apponatur DB [*per 4. pron.*] erunt CE, EB, maiora quam CD, & DB. Cum vero ostensum fuerit etiam BA, & AC, maiora esse quam CE, & EB; & rursus

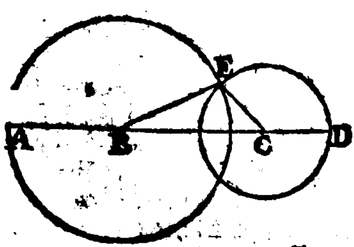


sus CE, & EB, demonstrata sunt maiora quam CD, & DB, [*per* 21.*axi.*] sequitur quod BA, & AC, maiora sint quam CD, & DB. Quod in primis erat probandum. Præterea quoniam angulus BDC, [*per* 16. *pri.*] maior est angulo DEC, externus interno, & opposito; & angulus DEC, ob eandem causam maior est angulo BAC; [*per* 21.*ax.*] Erit angulus BDC, maior angulo BAC, quod secundo propositum fuit. Si igitur super trianguli vno latere, &c Quod erat ostendendũ.

PROPOS. 22. PROBL. 8.

Ex tribus rectis lineis, quæ sint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

Sint datæ tres lineæ rectæ AB, BC, CD, quarum quælibet duæ reliqua sint maiores (alias ex ipsis non posset constitui triangulum, vt constat ex Propos. 20.) oporteatque construere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Si datæ rectæ lineæ fuerint separatæ assumatur aliqua linea indefinitè producta, à qua abscindantur [*per* 3. *pri.*] tres lineæ ęquales tribus iam datis, quo posito iuxtà regulas mox tradendas triangulum constituatur. Si verò datæ lineæ, vt in nostra figura, com-



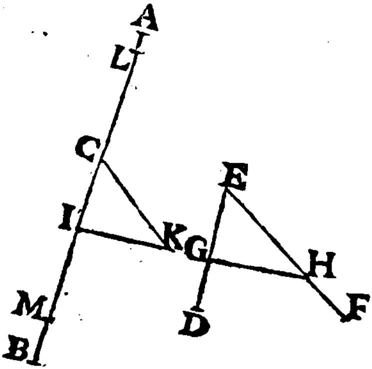
ponant vnam lineam rectam AD; facto centro in B, interuallo lineæ BA [*per 3.post.*] describatur circulus AE. Item centro C, interuallo lineæ CD, describatur circulus alius DE, qui necessariò secabit priorem circulum in puncto E; cùm enim duæ AB, CD, maiores ponantur recta BC; & circulus AE, ex linea BC abscindat lineam æqualem ipsi BA; non poterit circulus DE, ex CB abscindere lineam ęqualem ipsi CD, nisi cadat, & secet circulum AE, secus si se tangerent ipsa BC, esset æqualis duabus AB, & CD; quod est contra suppositum. Ex puncto igitur sectionis E, ad puncta B, & C, ducantur rectæ EB, EC, factumque erit triangulum BEC, cuius latera dico æqualia esse datis lineis AB, BC, & CD. Probatur. Recta BE [*per 15.def.*] æqualis est rectæ BA, & recta CE æqualis est rectæ CD: Igitur omnia tria latera sunt tribus datis linæis æqualia, quo stante constituimus triangulum ex tribus rectis lineis, tribus datis rectis lineis æqualibus: Quod erat faciendum.

PROPOS. 23. PROBL. 9.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

DAta recta sit AB, datumque in ea punctum C, & datus angulus DEF: Oportet igitur ad rectam AB, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis ED, EF, vtcunque duo puncta G, & H, & conectantur recta GH: Deinde constituatur triangulum CIK, [*per 22.pri.*] habens tria latera æqualia tribus rectis EG, GH, HE, ita vt CI æquale sit ipsi EG, & CK, ipsi EH, & IK, ipsi GH, (quod

(quod facile fiet si CI, sumatur æqualis ipsi EG, & CL, ipsi EH, & IM, ipsi GA. Deinde ex centris C, & I, interuallis vero CL, & IM, circuli describantur secantes se in K, &c.) Dico angulum ICK, æqualem esse angulo E. Probatur] Quoniam enim duo latera CI, & CK, æqualia sunt duobus lateribus EG, & EH, vtrumque vtrique, & basis IK, basi GH, per constructionem; [*per* 8.*pri.*] erit angulus C, angulo E æqualis Ad punctum igitur C, posuimus angulum æqualem angulo E. Quod facere oportebat.

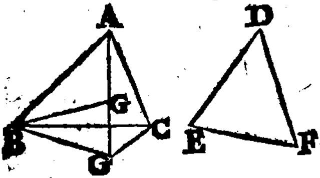


PROPOS. 24. THEOR. 15.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus ęqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem sub ęqualibus rectis lineis contentum: & basim basi maiorem habebunt.

DVo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus, DE, DF, trianguli DEF, vtrumquę vtrique, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Angulus vero BAC, maior sit angulo D. Dico basim

basim BC, maiorem esse base EF. Ad lineam enim BA, atque ad eius punctum A, [*per* 23. *pri.*] constituatur angulus BAG, æqualis angulo D, (cadetque recta AG, intra triangulum BAC, cum angulus BAC, ponatur maior angulo D;) [*per* 3. *pri.*] ponaturque AG, æqualis ipsi DF, hoc est ipsi AC; ducta denique recta BG, cadet vel supra rectam BC, vel in ipsa BC, aut infra.



Cadat in primis supra rectam BC, vt est BG. Intra triangulū ACB, ab ijsdem extremitatibus A & B, ad punctum G, ductæ fuerunt duæ rectæ lineæ AG, BG, minores ipsis AC, CB; [*per* 21. *pri.*] rursus quia AG, per constructionem facta fuit æqualis ipsi AC, si auferantur [*per* 4. *pron.*] remanebit BC, maior quam BG; Rursus per constructionem BA, AG, æqualia sunt lateribus ED, DF, & Angulus BAG, æqualis angulo EDF: quare [*per* 4. *pri.*] etiam basis BG, æqualis erit basi EF: si igitur BC demonstrata fuerit maior quam BG, maior etiam erit ipsa EF. Quod erat demonstrandum. Si vero BG, cadat infra BC; fiat pariter AG, æqualis ipsi DF, vel AC, ducaturque GC. Quoniam enim duo latera AC, AG, in triangulo ACG, sunt æqualia; [*per* 5. *primi.*] erunt anguli supra basim inter se æquales, nempe ACG, AGC; Est autem angulus BGC, [*per* 9. *pron.*] maior angulo AGC; quare etiam maior erit angulo ACG; sed angulus ACG, [*per* 9. *pron.*] maior est angulo GCB, quare multo maior erit totus angulus BGC, angulo GCB. In triangulo igitur BGC, [*per* 19. *pri.*] maius erit latus BC, latere BG. Per quartam autem primi ostenditur BG, æqualis ipsi EF; vnde maior quoque erit BC, quam EF; quod pariter demonstrandum erat. Si

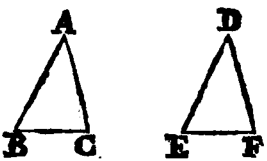
igitur

Igitur duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 25. THEOR. 16.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint vtrumque vtrique, basim vero basi maiorem; & angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus, DE, DF, trianguli DEF. vtrumque vtrique, hoc est AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; basis autem BC, maior sit base EF. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Probatur. Si enim non est angulus A, maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur quod sit æqualis, cum etiam duo latera circa angulum A, æqualia sint duobus lateribus circa angulum D, vtrumque vtrique per hypothesim; [*per 4. primi.*] erit & basis BC, æqualis basi EF: quod est absurdum, cum basis BC, ponatur maior base EF. Si vero angulus A, dicatur esse minor angulo D; erit propter æqualitatem laterum circa istos angulos, basis EF, [*per 24. pri.*] maior base BC, quod magis est absurdum, cum EF, ponatur minor quam BC. Quare angulus A, cum neque possit æqualis esse angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat ostendendum.

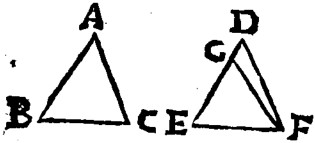


PRO-

PROP. 26. THEOR. 17.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, siue quod ęqualibus adiacet angulis, siue quod vni æqualium angulorum subtenditur, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

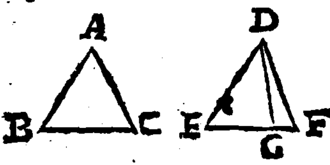
Sint duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales duobus angulis E, & EFD, trianguli DEF, vterque vtrique, hoc est B, ipsi E, & C, ipsi EFD; sitque primo latus BC, quod angulis B, & C, adiacet, lateri EF; quod angulis E, & EFD, adiacet, æquale. Dico reliqua quoque latera AB, & AC, reliquis lateribus DE, DF, æqualia esse vtrumque vtrique, hoc est AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum A, ęqualem esse reliquo angulo D. Probatur. Si enim latus AB, non est æquale lateri DE sit DE, maius à quo [*per 3. pri.*] abscindatur recta linea EG, æqualis rectæ lineæ AB, ducaturque recta GF. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus GE, & EF, vtrumque vtrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesim: [*per 4. pri.*] erit angulus C, æqualis angulo EFG. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo EFD. Quare, & angulus



EFG,

EFG, eidem angulo EFD, æqualis erit, pars toti: quod est absurdum; non est igitur latus AB, inæquale lateri DE, sed æquale. Quamobrem cum latera AB, BC, æqualia sint lateribus DE, EF, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; [*per 4. pri.*] erunt, & bases AC, DF, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod fuit propositum.

Sint deinde latera AB, DE, subtendentia æquales angulos C, & EFD, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera BC, CA, reliquis lateribus EF, FD, esse



æqualia vtrumque vtriq; hoc est BC, ipsi EF, & CA, ipsi FD, reliquumq; angulum A, reliquo angulo D, æqualē. Si enim latus BC, non est æquale lateri EF, sit EF, maius, ex quo [*per 3. pri.*] sumatur recta EG, æqualis ipsi BC, ducaturque recta DG. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus DE, & EG, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales per hypothesim; [*per 4 pri.*] erit angulus C, æqualis angulo EGD; Ponitur autem angulus C, angulo EFD, æqualis; igitur & angulus EGD, eidem angulo EFD, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum [*per 16. pri.*] est quia maior. Non est ergo latus BC, lateri EF, inæquale. Quocirca, vt prius, colligetur institutum ex quarta Propos. huius Libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis, &c. Quod erat demonstrandum.

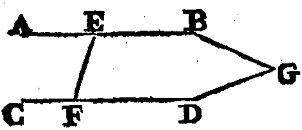
COROLLARIVM.

Sequitur ex demonstratione huius Theorematis tota etiam triangula, quo ad areas esse æqualia. Nam si la-si latera AB, BC, lateribus DE, EF, æqualia sunt, vt ostensum fuit, contineantque ex hypothesi, angulos B, & E, æquales: [*per 4. pri.*] erunt quoque tota triangula inter se æqualia.

PROPOS. 27. THEOR. 18.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelę erunt inter se illæ rectę lineę.

IN duas rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat angulos alternatim AEF, EFD, inter se æquales. Dico lineas AB, CD, esse parallelas. Probatur. Si enim non sunt parallelæ coibunt, si producantur infinite. Si autem nunquam coirent parallelæ essent, vt habetur ex definitione parallelarum. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto G. Quoniam igitur triangulum est EGF, (cum AB, & CD, continuatæ sint rectæ vsque ad punctum G;) & angulus AEF, positus est æqualis angulo EFD; erit externus angulus AEF, æqualis interno, & opposito EFD; quod est absurdum. Hoc etiam inconueniens demonstrabitur, si dicatur lineas AB, CD, coire ad partes A, & C; non igitur coibunt lineæ AB, CD. Quare parallelæ erunt. Eodem prorsus modo, si ponantur anguli alterni BEF, EFC, æquales, demonstrabitur lineas AB, CD, esse parallelas. Si igitur in duas rectas, &c. Quod ostendendum erat.

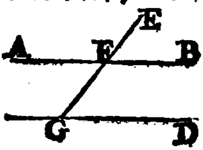


PRO-

PROPOS. 28. THEOR. 19.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, ęqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales; Parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ.

IN duas rectas AB, GD, recta incidens EG, faciat primo externum angulum EFB, æqualem angulo interno, & opposito, & ad easdem partes FGD. Dico rectas AB; GD esse parallelas. Probatur. Quoniam enim angulo EFB, æqualis ponitur angulus FGD; & eidem angulo EFB. [*per 15. pri.*] æqualis est angulus AFG; erunt [*per 1. pron.*] anguli alterni AFG, FGD, æquales. Quare lineæ AB, GD, [*per 27. pri.*] parallelæ erunt.



Deinde si faciat recta EG, angulos internos, & ad easdem partes, nempe BFG, FGD, duobus rectis æquales. Dico rursus, rectas AB; GD, esse parallelas. Probatur. Quoniam enim anguli BFG, DGF, duobus rectis æquales ponuntur; sunt autem, & anguli BFG, AFG, [*per 13. pri.*] duobus rectis æquales; erunt duo anguli AFG, BFG, duobus angulis BFG; DGF, æquales; ablato igitur communi angulo BFG, remanebunt duo anguli alterni AFG, DGF, inter se ęquales. Quare [*per 27. primi*] parallelæ erunt rectæ AB, GD; Si igitur in duas rectas recta incidens, &c, Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Vsque adhuc pronunciatum 13. à principiorum numero reiecimus. Verum quia sequens Propos. 29. cum alij multis illi ita innititur, vt sine eius auxilio demonstrari nequeat, opere pretium erit illud hoc loco demonstrare, vt in expositione dicti axiomatis pollicit. sumus.

Quia vero demonstratio 13. theorematis: dependet à nonnullis alijs theorematibus a Proclo, & alijs adductis, bonum erit ipsa in medium afferre; relinquendo tamen breuitatis gratia demonstrationes, quæ videri possunt apud Clauium, qui exactissimè post 28. Propos. primi libri hanc materiam proponit.

THEOREMA 1.

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.

THEOREMA 2.

Si duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit.

THEOREMA 3.

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.

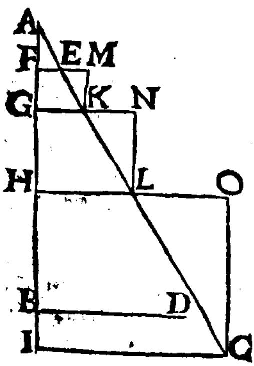
Demon-

Demonstrationes istorum Theorematum ommittuntur breuitatis gratia; cum videri possint apud citatum Clauium in hoc loco. Pro nunc vero vti demonstrata habeantur.

THEOREMA 4. & AXIOMA 13.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea internos, ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

Hoc est axioma 13. quod taliter demonstratur. Recta incidens AB, in rectas AC, BD, faciat internos, & ad easdem partes angulos ABD, BAC, duobus rectis minores. Dico rectas AC, BD, ad partes C, D, productas coire. Probatur. Sit enim primum alter angulorum, nempe ABD, rectus, & alter BAC, acutus. Sumpto in recta AC, quolibet puncto E, [per 12. pri.] *ducatur ex eo ad rectam AB, perpendicularis EF, & rectæ AF, æqualis accipiatur FG, & GH, æqualis ipsi AG, & HI, ipsi AH, ita vt AG, ipsius AF, & AH ipsius AG, & AI ipsius AH, dupla sit. Et quoniam si rectæ AF, abscindantur continuè æquales rectæ ex AB, aliqua tandem pars vltra B, punctum cadet, quod finita recta AB, per continuam ablationem vnius, eiusdemque*

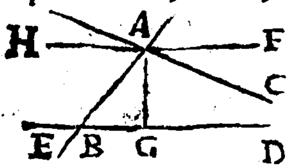


quantitatis absumatur tandem, quandoquidem linea AF, ita multiplicari potest, vt tandem aliquando finitam lineam AB, superet. Id quod Euclides frequenter assumit in libro 5, & alijs sequentibus; vbi datis duabus magnitudinibus inæqualibus proportionem inter se habentibus iubet plerumque minorem ita multiplicari, donec maiorem superet. Fit vt multo magis, si ipsi AE, æqualis abscindatur FG, & toti deinde AG, non autem soli AF, æqualis auferatur GH. Item toti AH, non autem soli AF, vel AG, æqualis dematur HI, & sic deinceps, cadet tandem pars aliqua vltra punctum B. Statuatur ergo punctum I, terminans tertiam duplam in dato exemplo existere vltra punctum B. Accipiatur quoque in recta AC, recta EK, ipsi AE, & KL, ipsi AK, & LC, ipsi AL, æqualis, ita vt tot sint partes in recta AC, quot sunt in recta AI; ducanturque rectæ KG; LH, CI, producanturque vna cum EF, vt EM, KN, LO, ipsis EF, KG, LH, fiant æquales, ac tandem rectæ iungantur MK, NL, OC. Itaque quoniam duo latera KE, & EM, trianguli KEM, duobus lateribus AE, EF, trianguli AEF, per constructionem vtrumque vtrique sunt æqualia, angulosque [per 15. pri.] continent ad verticem æquales, erit & basis MK, [per 4. pri.] basi AF, & angulus M, angulo F, æqualis. Est autem & FG, eidem AF, æqualis, & angulus F, rectus per constructionem. Igitur & MK, FG, [per 1. pron.] æquales erunt inter se, & angulus M, quoque rectus. Quare cum ad FM, excitatæ sint duæ perpendiculares æquales FG, & MK, erit per antecedens theorema angulus G, rectus. Rursus quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt ex constructione, angulosque [per 15. pri.] comprehendunt æquales ad verticem K; [per 4. pri.] erit & basis NL, basi AG, & angulus N, angulo G, æqualis. Est autem & GH, ex constructione eidem AG, æqualis,

& an-

& angulus G, rectus, vt proximè demonstratum est: igitur & NL, GH, [per 1. pron.] *inter se æquales erunt, & angulus N, quoque rectus. Quo circa per præcedens theorema erit etiam angulus A, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, esse rectum, atque ita deinceps, si plures essent partes rectæ AB. Est autem & angulus B, per hypothesim rectus: igitur rectæ IC, BD,* [per 28. pri.] *parallelæ sunt, ac propterea per secundum theorema BD; producta rectam AC, secabit supra punctum C, atque adeo in puncto illo sectionis rectæ AC, BD, coibunt. Quod erat demonstrandum.*

Si autem neuter angulorum ABD, BAC, rectus sit, at quidem ABD, acutus, & BAC, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli ABD, BAC, duobus rectis ponuntur minores; sunt autem [per 13. pri.] *duo anguli ABD, DBE, duobus rectis æquales: erunt hi duo illis duobus maiores; ablato ergo communi ABD, maior erit reliquus DBE, reliquo BAC. Constituatur in A,* [per 23. pri.] *ad rectam AB, angulus BAF, angulo DBE, æqualis, cadatque recta AF, supra rectam AC, cum AF, maiorem angulum cum AB, contineat, quàm AC. Quia igitur externus angulus DBE, interno BAF, ex eadem parte opposito æqualis est,* [per 28. pri.] *erunt rectæ AF, BD, inter se parallelæ. Demittatur quoque ex A, ad BD,* [per 12. pri.] *perpendicularis AG, quæ ex Coroll. 2. prop. 17. huius libri ad partes acuti anguli ABD, cadet: eritque angulus GAF, rectus. Nam si acutus esse dicatur efficiet recta AG, in rectas AF, BD, incidens angulum AGD, rectum, & GAE, acutum; ac proinde, vt proximè demonstrauimus, rectæ AF, BD, ad partes F, & D, tandem productæ coibunt. Quod est absurdum: ostensæ*



enim

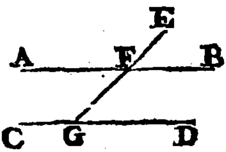
enim sunt parallelæ. Si autem angulus GAF, dicatur obtusus erit GAH, acutus; quare ex proximè demonstratis coibunt rectæ AF, BD, ad partes H, & B, productæ, quod est absurdum, cùm parallelæ sint ostensæ. Non est ergo angulus GAF, acutus, aut obtusus: Igitur rectus, ac proinde eius pars acutus. Quoniam igitur recta AG, in rectas AC, BD, incidens facit angulum G, rectum, & GAC, acutum, concurrent rectæ AC, BD, ad partes C, & D, vt proximè demonstrauimus. Si igitur recta AB, in rectas AC, BD, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, quorum neuter rectus, sit ipsæ rectæ productæ tandem coibunt ad illas partes, ad quas sunt anguli duobus rectis minores. Quod erat ostendendum. Quod si quando accidat, rectam AC, existere inter AB, AG, clarè constat rectas AC, BD. coire, quod tunc AC, basim BG, trianguli BAG, secaret. Quibus positis ad seriem propositionis Euclidis reuertamur.

PROPOS. 29. THEOR. 20.

In parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas AB, CD, incidat recta EG. Dico primò, angulos alternos AFG, FGD, inter se esse æquales. Probatur. Si enim non sunt æquales sit alter, nempe AFG, maior. Quoniam igitur angulus AFG, maior est angulo FGD, si addatur communis angulus BFG, [*per 4. pron.*] erunt duo AFG, BFG,

BFG, maiores duobus BFG, FGD; At duo AFG, BFG, [*per* 13.*pron.*] sunt æquales duobus rectis: igitur duo BFG, FGD, duobus rectis minores erunt, Quare cum sint interni, & ad easdem partes B, & D, [*per* 13.*pron.*] coibunt lineæ AB, CD, ad eas partes; quod est absurdum, cum ponantur esse parallelæ. Non igitur angulus AFG, maior est angulo FGD; sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A, & C; Igitur æquales erunt anguli alterni AFG, FGD. Eademque est ratio de angulis alternis BFG, FGC.

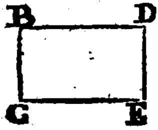


Dico secundò, angulum externum EFB, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito FGD. Probatur. Quoniam enim angulo DGF, æqualis est angulus alternus AFG, vt ostensum est; & eidem AFG, [*per* 15.*pri.*] æqualis est angulus EFB; erunt anguli EFB, DGF, [*per* 1.*pron.*] inter se æquales. Eodem modo demonstrabitur angulum EFA, æqualem esse angulo FGC.

Dico tertiò, angulos internos, & ad easdem partes BFG, FGD, æquales esse duobus rectis. Prob. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum EFB, æqualem esse angulo interno, & opposito FGD; si addatur communis BFG, [*per* 2.*pron.*] erunt duo EFB, BFG, æquales duobus BFG, FGD: Sed duo EFB, BFG, [*per* 13.*pri.*] sunt æquales duobus rectis; igitur & duo anguli BFG, FGD duobus rectis æquales erunt. Eodem modo anguli AFG, FGC, erunt duobus rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex hac Propos. sequitur, quod si in parallelogrammo vnus angulus sit rectus, etiam reliqui recti sunt.

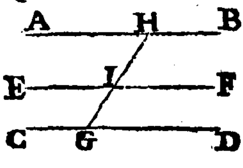


Cum enim lineæ oppositæ in parallelogrammo sint parallelæ, vt BD, CE, & in ipsas incidat recta BC, [*per* 29. *pri.*] erunt duo anguli DBC, ECB, æquales duobus rectis; sed vnus, nempe DBC, supponitur rectus; igitur & ECB, rectus erit. Rursus quia in parallelas BC, DE, incidit recta BD, [*per* 29 *pri*] erunt duo anguli interni CBD, BDE, duobus rectis æquales; sed B, supponitur rectus igitur & D, rectus erit; quod idem demonstrabitur de angulo E, ergo, &c.

PROPOS. 30. THEOR. 21.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SInt rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico, & ipsas AB, CD, esse parallelas. Probatur. Quoniam enim omnes hæ lineę in eodem ponuntur

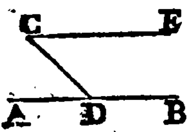


esse plano, (nam in propos. 9. vndecimi agitur de lineis in diuersis planis) ducta recta HG, secabit omnes in punctis H, I, G. Quia igitur AB, ponitur parallela ipsi EF [*per* 29. *pri.*] erit angulus AHI, æqualis angulo HIF. Rursus quia CD, ponitur parallela ipsi EF, erit angulus externus HIF, [*per* 29. *pri.*] æqualis interno, & opposito IGD. Quare anguli AHI, IGD, [*per* 1. *pron.*] quoque inter se æquales erunt. Cum igitur sint alterni;

terni; [*per* 27. *pri.*] erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ, &c. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 31. PROBL. 10.

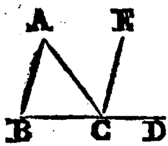
A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.



EX puncto C, ducenda sit linea parallela ipsi AB. Ducatur ex C, ad AB, linea CD, vtcumque faciens angulum quemcunq; CDA; cui ad C; [*per* 23. *pri.*] æqualis constituatur angulus DCE. Dico rectam EC, extensam quantumlibet parallelam esse ipsi AB. Probatur. Cum enim anguli alterni CDA, DCE, æquales sint, per constructionem; [*per* 27. *pri.*] erunt rectæ AB, CE, parallelæ. A dato igitur puncto datæ rectæ lineæ &c. Quod faciendum erat.

PROPOS. 32. THEOR. 22.

Cuiuscunque trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus rectis sunt æquales.



IN triangulo ABC, producatur latus BC, ad D. Dico primò, angulum externum ACD, æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. Probatur. [*per* 31. *pri.*] Ducatur enim ex C, linea CE, parallela rectæ AB. Quoniam igitur recta AC, incidit in parallelas AB, CE; [*per* 29. *pri.*] erunt anguli alterni, A, & ACE, æquales. Rursus quia recta BD, incidit in parallelas AB, CE; [*per* 29. *pri.*] erit angulus externus ECD, æqualis interno, & opposito B; Additis igitur æqualibus ACE, & A, [*per* 1. *prõ.*] fiet totus ACD, (qui ex duobus DCE, ACE, componitur) duobus A, & B, simul; æqualis. Quod fuit propositum.

Dico secundò, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & ACB, duobus esse rectis æquales. Cum enim externus angulus ACD, vt ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis ACB, [*per* 2. *pron.*] erunt duo anguli ACD, ACB, æquales tribus A, B, & ACB: sed duo ACD, ACB, [*per* 13. *pri.*] æquales sunt duobus rectis: igitur, & tres interni A, B, ACB, duobus erunt rectis æquales. Quare cuiuscunque trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM 1.

Ex hac Propo. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos æquales esse tribus angulis cuiuscunque alterius trianguli simul sumptis. Quia omnes sunt æquales duobus rectis. Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius, reliquo huius æqualis, æquiangulaque erunt ipsa triangula.

COROLLARIVM 2.

Constat etiam in omni triangulo isoscele, cuius angulus à lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam si reliqui duo simul conficiunt vnum rectum, [*per* 32. *pri.*] cum omnes tres sint æquales duobus rectis, & tertius ille ponatur rectus, cum [*per* 5. *primi.*] reli-

qui

qui duo sint ęquales, erit quilibet eorum semirectus. Si vero angulus fuerit obtusus, reliqui duo anguli æquales, semirecto minores erunt, & ė contra, si erit acutus.

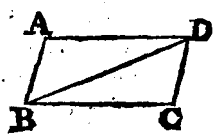
COROLLARIVM 3.

Pariter perspicuum est in triangulo æquilatero, quemuis angulum esse duas tertias partes vnius recti, vel tertiam partem duorum rectorum; nam duo anguli recti diuisi in tres angulos faciunt duas tertias partes vnius recti.

PROPOS. 33. THEOR. 23.

Rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad easdem partes coniungunt; & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

SInt rectæ lineę AD, BC, æquales, & parallelæ, ipsas autem coniungant ad easdem partes rectę AB, DC. Dico ipsas AB, DC, æquales quoque esse, & parallelas. Probatur. Ducatur enim recta BD. Quoniam igitur BD, incidit in parallelas AD, BC; [*per* 29.*pri.*] erunt anguli alterni ADB, DBC, inter se æquales. Quare cum duo latera AD, DB, trianguli A D B, æqualia sint duobus lateribus, CB, BD, trianguli CBD, vtrumque vtrique; & anguli quoque a dictis lateribus inclusi ęquales; [*per* 4 *pri.*] erunt bases AB, DC, æquales, & angulus ABD, angulo BDC, æqualis. Cum igitur hi anguli sint alterni inter rectas AB, DC; [*per*.27. *pri.*] erunt AB, DC, parallelæ. Probatum autem iam fuit easdem esse æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas, &c. Quod erat demonstrandum.

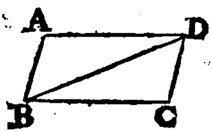


PRO-

PROPOS. 34. THEOR. 24.

Parallelogrammorum ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo & latera, & anguli; atque illa bifariam ſecat diameter.

SIt parallelogrammum ABCD, quale definiuimus definitione 35. Dico latera oppoſita AB, DC, nec non etiam AD, BC, inter ſe eſſe æqualia. Item angulos oppoſitos B, D, & A, C, eſſe inter ſe æquales: Denique ducta diametro BD, parallelogrammum ipſum bifariam ſecari Probatur. Cum enim AD, BC, ſint parallelæ, [*per* 29. *pri.*] erunt anguli alterni ADB, DBC, æquales. Rurſus quia AB, DC, ſunt parallelæ; [*per* 29. *pri.*] erunt & anguli alterni BDC, DBA, æquales. Itaque cum anguli CDB, DBC, trianguli CDB, æquales ſint duobus angulis ABD, BDA, trianguli DAB, vterque vtrique: & latus BD, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; [*per* 26. *pri.*] erit recta AD, æqualis oppoſitæ rectæ BC, & recta AB, oppoſitæ rectæ DC, quod eſt primum. Erit rurſus eadem de cauſa angulus A, angulo C, æqualis. Et quia ſi æqualibus angulis ADB, DBC, addantur æquales anguli ABD, BDC, [*per* 2. *pron.*] toti quoque anguli ADC, ABC, fient æquales: vnde cõſtat ſecundum, angulos oppoſitos eſſe æquales Quoniam vero duo latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia ſunt duobus lateribus CB, BD, trianguli CBD vtrumque vtrique, & angulus ADB, æqualis angulo CBD, vt oſtenſum eſt; erunt triangula DAB, DCB, æqualia, idcque parallelogrammum ABCD, diuiſum erit bifariam à diametro BD, quod tertio loco



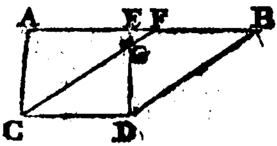
fuit

ſuit propoſitum. Parallelogrammorum igitur ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, &c. Quod oſtendendum erat.

PROPOS. 35. THEOR. 25.

Parallelogramma ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

INter duas parallelas AB, CD, ſuper baſi CD, exiſtant duo parallelogramma CDEA, CDBF, (dicuntur autem parallelogramma in eiſdem eſſe parallelis, quando dua latera oppoſita partes ſunt parallelarum, vt in exemplo propoſito cernitur. Dico ipſa

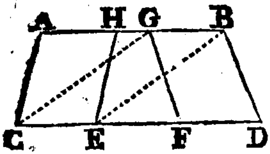


parallelogramma inter ſe eſſe æqualia, non quo ad angulos, & latera, ſed quo ad aream, ſeu capacitatem. Probatur. Quoniam igitur in parallelogrammo CDEA, recta AE, [*per 34 pri.*] æqualis eſt rectæ CD, oppoſitæ, & eidem CD, æqualis eſt oppoſita FB, in parallelogrammo CDFB; [*per 1. pron.*] erunt AE, FB, inter ſe æquales; ſi communis addatur EF, [*per 2. pron.*] erit tota AF, toti EB, æqualis; nec non etiam angulus BED, [*per 29. pri.*] equalis eſt interno, & oppoſito FAC; eſt autem AC, [*per 34. pri.*] ipſi ED, æqualis. Quare triangulum BED, triangulo FAC, [*per 4. pri.*] æquale erit; ablato ergo communi triangulo EGF, [*per 3. prõ.*] remanebit trapezium ACGE, trapezio FGBD, æquale: Quocirca addito communi triangulo CDG, fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Parallelogramma igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem paralrallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 36. THEOR. 26.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SInt duo parallelogramma ACEH, GFDB; super æquales bases CE, FD, & inter easdem parallelas AB, CD. Dico ea esse æqualia. Probatur. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad easdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ FD, & eidem FD, [*per 34. pri*] æqualis est GB, in parallelogrammo GFDB, opposita; [*per 1. pron.*] erunt CE, GB, æquales inter se: sunt autem & parallelę per hypothesim. Quare & CG, EB, ipsas coniungentes, [*per 33 pri.*] parallelæ erunt, & æquales; ideoque CEBG, parallelogrammum erit. Itaque



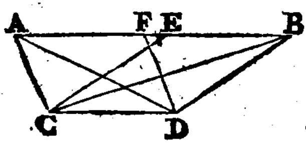
cum parallelogramma ACEH, GCEB, sint inter easdem parallelas, & super eandem basim CE; [*per 35. pri*] erit parallelogrammum ACEH, parallelogrammo GCEB, equale. Rursus quia parallelogramma GCEB, GFDB, sunt inter easdem parallelas, & super eandem basim GB; [*per 35 pri.*] erit quoque parallelogrammum GFDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare, & parallelogramma ACEH, GFDB, [*per 1. pron.*] inter se æqualia erunt. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, &c. Quod ostendendum erat.

PRO-

PROPOS. 37. THEOR. 27.

Triangula super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INter parallelas AB, CD, & super basim CD, sint constituta, duo triangula ACD, BCD, (dicitur autem triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quando basis est pars vnius, & angulus oppositus alteram attingit.) Dico ea triangula esse æqualia. Probatur. Per D, enim [*per* 31. *pri.*] ducatur DF, parallela rectæ AC, & CE, parallela ipsi DB. Erunt igitur [*per* 35. *pri.*] parallelogramma ACDF, ECDB, æqualia; sunt enim super eandem basim CD, & inter easdem parallelas AB, CD. Sed horum parallelogrammorum dimidia sunt triangula ACD, BCD; [*per* 34. *primi.*] quod AD, BC, diametri bifariam secent parallelogramma ACDF, ECDB; Igitur & triangula ACD, CDB, [*per* 7. *pron.*] æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.

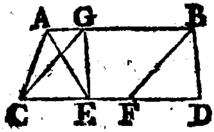


PROPOS. 38. PROBL. 28.

Triangula super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INter parallelas AB, CD, & super æquales bases CE, FD, sint constituta triangula ACE, BFD. Dico ipsa esse æqualia. Probatur. Ducatur enim ex C, linea

nea CG, parallela ipsi FB, deinde a puncto G, ad punctum E, ducatur linea GE. Quoniam vero CG,

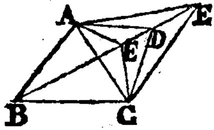


FB, sunt latera opposita in parallelogrammo GCFB; [*per* 34. *primi*.] erunt inter se æqualia; rursus bases CE, & FD, supponuntur æquales; nec non etiam angulus BFD, [*per* 29. *primi*] æqualis est interno, & opposito GCE: iam habemus duo triangula BFD, GCE, quæ habent duo latera BF, FD, duobus lateribus GC, CE, æqualia alterum alteri, & angulos dictis lateribus comprehensos æquales: Quare ista duo triangula [*per* 4. *pri*.] erunt æqualia. Sed etiam triangulum ACE, æquale est eidem triangulo GCE, (quia sunt super eadem basi, & in eisdem parallelis) ergo etiam triangula ACE, & BFD, [*per* 1. *pron*.] erunt inter se æqualia. Triangula igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis &c. Quod fuit propositum.

PROPOS. 39. THEOR. 29.

Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta in eisdem sunt parallelis.

Sint duo triangula æqualia ABC, DBC, super eandem basim BC, & ad easdem partes. Dico ipsa



esse inter easdem parallelas constituta, hoc est rectam ductam à puncto A, ad punctum D, parallelam esse ipsi BC. Probatur. Si enim non est, [*per* 31. *pri*.] ducatur ex A, parallela ipsi BC, quę vel cadet supra AD, vel infra. Cadat primum supra, & sit AE, coeatque

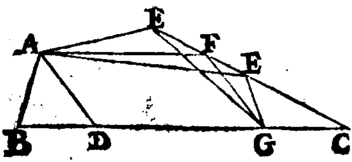
cum

cum BD, protracta in E, ducaturque recta EC. Quoniam enim parallelæ ponuntur AE, BC, [per 37. pri.] erit triangulo BAC, æquale triangulum BEC; Est autem per suppositionem eidem triangulo BAC, æquale triangulum BDC. Igitur [per 1. pron.] erunt triangula BEC, BDC, inter se æqualia; quod est impossibile, quia BDC, est pars, BEC, vero est totum. Si vero parallela cadit infra AD, vt in data figura est alia AE, facile erit eisdem rationibus demonstrare aliud absurdum, nempe triangulum BEC, æquale esse triangulo BDC, quod est impossibile cum vnum sit pars, & aliud totum. Erit igitur AD, parallela ipsi BC. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 40. THEOR. 30.

Triangula æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta, in eisdem sunt parallelis.

SInt duo triangula BAD, GFC, super æquales bases BD, GC, (quæ in eadem recta linea collocentur) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est rectam ex A, ad F, ductam



parallelam esse rectæ BC. Probatur. Si enim non est, parallela ducta ipsi BC, ex A, cadet vel supra AF, vel infra. Cadat primum supra, coeatque cum CF, producta in E, & ducatur recta EG. Quoniam igitur parallelæ sunt AE, BC, [per 38. pri.] erit triangulum GEC, æquale triangulo BAD; po-

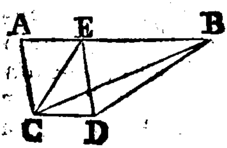
nitus

nitur autem, & triangulum GFC, æquale triangulo BAD: Igitur triangula GEC, GFC, [*per 1. pron,*] erunt æqualia inter se, pars, & totum. Quod est absurdum. Quod si vero parallela ducta per A, cadat infra AF, qualis est denuo alia AE, ducatur alia recta GE, erunt eadem prorsus argumentatione triangula GFC, GEC, æqualia, totum, & pars. Quod est absurdum. Est igitur AF, parallela ipsi BC; quare triangula æqualia super æqualibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 41. PROBL. 31.

Si parallelogrammum cum triangulo eandem basim habuerit, in eisdemque fuerit parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

INter parallelas AB, CD, & super basim CD, constituantur parallelogrammum ACDE, & triangulum CBD. Dico parallelogrammum ACDE, duplum esse trianguli CBD. Probatur; Ducta enim diametro CE, in parallelogrammo ACDE, [*per 34. pri.*] erunt ACE, ECD, æqualia: quare parallelogrammum ACDE, duplum erit trianguli ECD: sed triangulum ECD, [*per 37. pri.*] æquale est triangulo CBD, cum sint super eadem basi, & in eisdem parallelis: Quare & trianguli CBD, [*per 6. pron.*] duplum erit parallelogrammum ACDE. Quapropter si parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonstrandum.

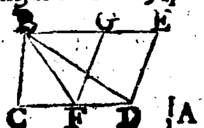


PRO-

PROPOS. 42. PROBL. 11.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

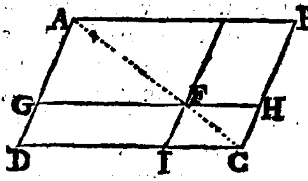
DAtum triangulum sit BCD, & datus angulus Rectilineus A; oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo BCD, habens angulum æqualem angulo A. Diuidatur vnum latus trianguli, nempe CD, [*per 10. pri.*] bifariam in F, & fiat angulus GFD, [*per 23. pri.*] æqualis angulo A, pro vt libet, hoc est siue angulus GFD, vergat ad partes D, siue ad partes C, pro vt magis videbitur expedire. Ducatur item per B, [*per 31. pri.*] rectæ CD, parallela BE, quæ secet FG, in G; Rursus per D, vel C, ducatur ipsi FG, [*per 31. pri.*] parallela DE, occurrens rectæ BG, productæ in E; Eritque in angulo GFD, qui dato angulo rectilineo A, factus est æqualis, constitutum parallelogrammum GFDE. Quod dico esse æquale triangulo CBD. Probatur. Ducatur enim recta BF. Quoniam vero parallelogrammum GFDE, [*per 41. pri.*] duplum est trianguli DBF, & triangulum BCD, duplum est eiusdem trianguli DBF, [*per 38. pri.*] quod sint super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis; Erunt parallelogrammum GFDE, & triangulum BCD, [*per 6. pron.*] æqualia inter se. Cum igitur angulus GFD, factus sit æqualis angulo A, constat propositum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.



PROPOS. 43. THEOR. 32.

In omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.

IN parallelogrammo ABCD, ſint circa diametrum AC, parallelogramma AEFG, CHFI, & complementa GFID, EBHF, vt in 36. definitione diximus. Dico complementa hæc inter ſe eſſe æqualia. Probatur. Cum enim triangula ABC, CDA, [*per 34. primi.*] æqualia ſint; Itemque triangula AEF, FGA; ſi hæc ab illis demantur, [*per 3. pron.*] remanebunt trapezia EFCB, GFCD, æqualia: ſunt autem & [*per 34. pri.*] triangula FIC, FHC, æqualia: quare ſi detrahantur ex trapezijs, [*per 3. pron.*] remanebunt æqualia complementa EFHB, GFID. In omni igitur parallelogrammo complementa, &c. Quod oſtendendum erat.



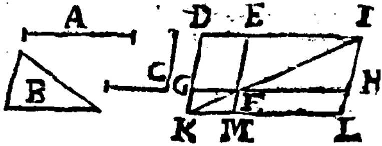
PROPOS. 44. PROBL. 12.

Ad datum rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

DAta recta linea ſit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur conſtituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & vnum latus

æqua-

æquale rectæ A. Constituatur triangulo B, [*per* 42. *pri.*] æquale parallelogrammum DEFG, habens angulum EFG, angulo C, æqualem, producaturque G F, ad H, vt FH, sit æqualis rectæ A; & per H, [*per* 31. *primi*] ducatur



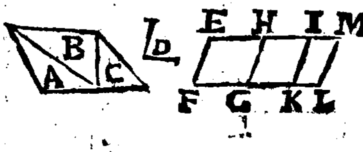
HI, parallela ipsi FE, occurrens ipsi DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectæ DG, productæ in K; & [*per* 31 *pri.*] per K, ducatur KL, parallela ipsi GH, secans IH, protractam in L, producaturque EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, esse id, quod quæritur. Habet enim latus FH, æquale datæ rectæ A, & angulum HFM, angulo dato C, æqualem, cum angulus HFM, [*per* 15. *pri.*] æqualis sit angulo EFG, (sunt enim ad verticem) & angulus EFG, factus est æqualis angulo C; Denique parallelogrammum LMFH, æquale est triangulo B, [*per* 43. *pri.*] cum æquale sit complemento DEFG, quod factum est æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

PROPOS. 45. PROBL. 13.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

QVamuis Euclides proponat hoc problema absolutè non astringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propos. 44. fecerat; tamen quia in sequentibus frequenter vsurpatur

patur in data recta linea, placuit ipsum proponere vna cum data recta linea. Sit ergo recta data EF; re-



ctilineum ABC, & datus angulus D. Oportet igitur ad datam rectam EF, constituere parallelogrammum æquale rectilineo ABC, quod habeat angulum, æqualem angulo D. Resolut. rectilineum in triangula A,B,& C. Deinde triangulo A, [*per* 44.*pri.*] ęquale parallelogrammum constituatur EFGH, super rectam EF, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item super rectam HG, parallelogrammum GHIK, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam IK, parallelogrammum IKLM, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D: & sic deinceps procedatur si plura fuerint triangula in dato rectilineo: factumque erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem ęqualia sunt rectilineo dato ABC, conficiunt totum vnum parallelogrammum; quod sic demonstratur. Duo anguli EFG, HGK, [*per* 1.*pron.*] inter se sunt æquales, cum vterque sit æqualis angulo D: addito igitur communi angulo FGH, erunt duo anguli EFG, FGH, qui [*per* 29.*pri.*] duobus rectis equiualent, [*per* 2.*pron.*] æquale duobus angulis HGK, FGH; ideoque hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt: quare [*per* 14.*pri.*] FG, GK, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione ostendemus EH, HI, vnam rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli EHG, HIK, æquales inter se sunt, cum [*per* 34. *pri.*] sint æquales oppositis angulis æqualibus EFG, HGK, & [*per* 29.*pri.*] duo anguli HIK, IHG, duobus sunt rectis æquales, &c. Cũ igitur EI, FK, sint paralle-

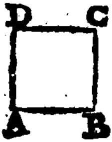
læ,

læ, [*per* 30. *pri.*] itemque EF, IK, quod vtraque parallela sit rectæ HG; parallelogrammum erit EFKI. Eodem modo demonstrabitur parallelogrammum IKLM, adiunctum parallelogrammo EFKI, constituere totum vnum parallelogrammum EFLM. Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectilineo ABC, constituimus æquale parallelogrammum EFLM, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

PROPOS. 46. PROBL. 14.

A data recta linea quadratum describere.

SIt data recta AB, super quam oporteat quadratum describere. Ex A, & B, [*per* 11. *pri.*] educantur AD, BC, perpendiculares ad AB, sintque ipsi AB, æquales, connectanturque recta CD. Dico ABCD,

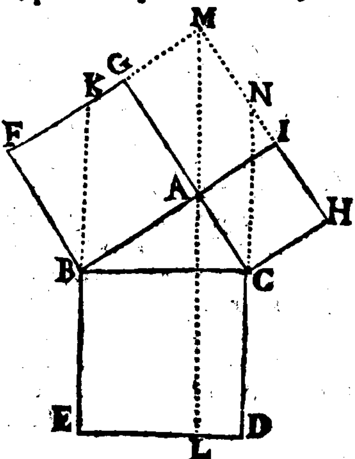


esse quadratum. Probatur. Cum enim anguli A, & B, sint recti, [*per* 28. *primi*] erunt AD, BC, parallelæ: sunt autem & æquales, quod vtraque sit æqualis ipsi AB. Igitur [*per* 33. *pri.*] & AB, DC, parallelæ sunt, & æquales: & ideo parallelogrammum est ABCD, in quo cum AD, DC, CB, æquales sint ipsi AB, omnes quatuor lineæ æquales existunt: sunt autem, & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, [*per* 34. *pri.*] æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratum igitur est ABCD, ex definitione, ac proinde à data recta linea descriptum fuit quadratum. Quod faciendum erat.

PROPOS. 47. THEOR. 33.

In quocunque triangulo rectangulo quadratum, quod fit à latere rectum angulum subtendente, æquale est duobus quadratis factis à lateribus rectum angulum continentibus.

Sit datum triangulum rectangulum ABC, & angulus A sit rectus: super BC latus subtendens angulum rectum; quod peculiari nomine dicitur Hypothenusa; [*per 46. huius*] describatur quadratum BCDE: pariter super latera AB, AC angulum rectum comprahendentia, quæ etiam Catheti nuncupantur, alia duo quadrata ABFG, ACHI efformentur: quo facto dico quadratum BD descriptũ à latere BC rectũ angulum subtendente, adæquare duo quadrata BG, CI facta à lateribus BA, AC rectũ angulum A, comprahendentibus.



Producatur latus EB vsque quo occurrat ipsi FG in K: deinde [*per 31 pri.*] à puncto A ducatur recta LAM parallela ipsi BE, vel CD, & producatur quousque concurrat cum FG in M. Eodem prorsus pacto producatur HI, vt concurrat cum DC protracta in N, & cum LA in M.

Demonstratio Angulus FBA rectus est [*per def. Quad.*] angulus vero KBC rectus est [*per* 10. *defin.*] ergo [*per* 12. *axiom.*] sunt æquales; dempto communi angulo KBA [*per* 3. *axiom.*] remanentes anguli FBK, ABC erunt æquales. Considerentur modo duo triangula BFK, BAC, in quibus non solum anguli FBK, ABC, ex dictis, sunt æquales, verum etiam æquales sunt anguli BFK, BAC, vtpote recti; latusque BF in triangulo BFK [*per def. quad.*] æquale lateri BA in triangulo BAC: ergo [*per* 26. *huius*] erit latus BK æquale ipsi BC; sed BC in eodem quadrato adæquat BE: ergo [*per* 1. *axiom.*] lineæ BK, & BE erunt æquales. Stante igitur æqualitate inter EB, & BK [*per* 36. *pri.*] parallelogrammum BL adæquabit parallelogrammum BM; sed quadratum BG [*per* 35. *huius*] est æquale eidem paralellogrammo BM: ergo [*per* 1. *ax.*] parallelogrammum BL adæquabit quadratum BG. Eodem prorsus modo demõstrabitur parallelogrammum CL æquale esse quadrato CI: ergo duo quadrata BG, CI erunt æqualia duobus parallelogrammis BL, CL; sed hæc duo parallelogrammata [*per* 19. *axiom.*] adęquant quadratum BD: ergo etiam duo quadrata BG, CI adæquabunt idem quadratum BD: quod erat demonstrandum.

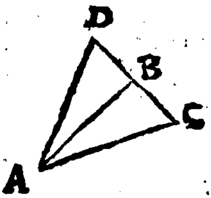
SCHOLIVM.

Quoniam huiusmodi Theorema vtilitates habet insignes in Geometria bonum erit non solum ipsum bene intelligere, verum etiam diligenter aduertere ea, quæ à P. Clauio circa hoc Theorema in suis comentarijs adiunguntur; quæ breuitatis gratia omittuntur.

PROPOS. 48. THEOR. 34.

Si quadratum, quod ab vno latere trianguli deſcribitur, æquale ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur quadratis, angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.

DEtur triangulum ABC, ſitque quadratum lateris AC, æquale quadratis reliquorum laterum BA, BC. Dico angulum ABC, eſſe rectum. Probatur. Ducatur namque BD, [*per 11. pri.*] perpendicularis ad BA, & æqualis rectæ BC, connectaturque recta DA. Quoniam igitur in triangulo ABD, angulus ABD, rectus eſt; [*per 47. pri.*] erit quadratum rectæ AD, æquale quadratis rectarum BA, BD: Eſt autem quadratum rectæ BD, quadrato rectæ BC, æquale, ob linearum æqualitatem; quare quadratum rectæ AD, quadratis rectarum BA, BC, æquale erit. Cum ergo quadratum rectæ AC, eiſdem quadratis rectarum BA, BC, æquale ponatur; [*per 1. pron.*] erunt quadrata rectarum AD, AC, inter ſe æqualia, ac propterea & rectæ ipſæ AD, AC, æquales. Quoniam igitur latera BA, BD, trianguli ABD, æqualia ſunt lateribus BA, BC, trianguli ABC; & baſis AD, oſtenſa eſt æqualis baſi AC, [*per 8. pri.*] erunt anguli ABD, ABC, æquales: Eſt autem angulus ABD, rectus ex conſtructione. Igitur & angulus ABC, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.



TAIAN-

TRIANGVLORVM Comparationes.

Nouem modis duo triangula inter se comparauit Euclides in hoc libro. Primum, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, continentque angulum angulo æqualem, [per 4 primi.] *colligit æqualitatem basium, reliquorumq; angulorum, atque adeo totorum triangulorum.*

Secundò, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, basisque basi est æqualis, [per 8.pri.] *infert æqualitatem angulorum illis lateribus comprehensorum. Vbi alij etiam concludunt æqualitatem reliquorum angulorum, totaque triangula probant æqualia.*

Tertiò, cum duo latera duobus lateribus sunt æqualia vtrumque, vtrique comprehendunt autem angulos inæquales. [per 24.pri.] *ostendit basim maiori angulo oppositam esse maiorem base minori angulo opposita.*

Quartò, cum duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & bases inæquales, [per 25. pri.] *demonstrauit angulum maiori basi oppositum esse maiorem angulo minori basi opposito.*

Quintò, quando duo anguli duobus angulis æquales sunt, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus angulis adiacet, siue quod vni æqualium angulorum opponitur, [per 26. pri.] *probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius esse æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus sequi etiam, tota triangula esse æqualia.*

Sextò [per 37.pri.] *demonstrauit, duo triangula super eandem basim, & inter easdem parallelas constituta, esse æqualia.*

Septi-

Septimò, [per 38. pri.] *ostendit, duo triangula super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, æqualia esse.*

Octauò [per 39 pri.] *docuit, duo triangula æqualia super eandem basim, & versus eandem partem constituta, esse inter easdem parallelas.*

Nonò tandem [per 40. pri.] *probauit, duo triangula æqualia super æquales bases in eadem linea, in eandemque partem constituta, esse inter easdem parallelas.*

Finis Elementi Primi.

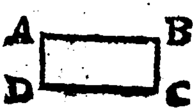
EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

DEFINITIONES.

I.

Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub duabus rectis lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

IN hoc ſecundo libro agit Euclides de potentijs linearum rectarum, inquirendo quanta ſint, & quadrata partium cuiuſuis lineæ rectæ diuiſæ, & parallelogramma rectangula ſub partibus eiuſdem lineæ diuiſæ comprehenſa, tàm inter ſe, quàm comparata cum quadrato totius lineæ, &c.



Quod vt melius exequatur duas proponit definitiones, quarum prima eſt modo adducta, in qua exponit ſub quibus rectis lineis contineri dicatur quodcunque parallelogrammum rectangulum: & quid ſit parallelogrammum contineri ſub duabus lineis rectis: Quod totum, vt perfectè intelligatur, aduertendum eſt, parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli ſunt recti.

Rur-

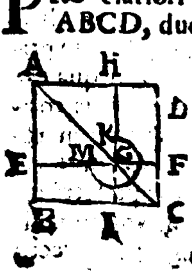
Rursus parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ vnum angulum rectum comprehendunt, non importat aliud quam duas huiusmodi lineas exprimere totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem exprimit longitudinem, alia vero latitudinem Quod totum patet in parallelogrammo rectangulo ABCD, in quo linea AD, exprimi latitudinem, AB, vero longitudinem: quare si multiplicetur vnum latus per aliud, productum, erit totum parallelogrammum, quo ad capacitatem.

Demum est considerandum, Geometras, ne toties eædem lineæ repetantur, solere exprimere omnia prorsus parallelogramma duabus dumtaxat litteris quæ per diametrum opponuntur; exempli gratia AC, vel BD.

II.

In omni parallelogrammo spatio, vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

PRo clariori intelligentia, in parallelogrammo ABCD, ducatur diameter AC; & rursus ex quouis eius puncto G, ducantur rectæ EF, HI, parallelæ lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammum ABCD, diuisum sit in 4. parallelogramma, quorum duo EH, IF, dicuntur esse circa diametrum, alia vero duo hI, & FH, complementa, vt manifestum est ex vltima defin. primi



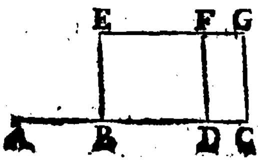
mi libri. Quo posito figura composita ex vno parallelogrammo circa diametrum, vt IF, vna cum duobus complementis BG, GD qualis est figura EBCDHG, quæ designatur circumferentia KLM, dicitur Gnomon.

His positis ad propos. 2. lib. deueniamus, in quibus perfectè intelligendis operæ pretium erit multum laboris impendere, non solum propter quamplurimos istarum vsus in rebus geometricis, tum etiam in humanis comercijs, adeo vt hic liber aureus dici mereatur, cum mole quidem sit perexiguus, vtilitates vero contineat prope infinitas.

PROPOS. 1. THEOR. 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, quarum vna secetur in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

Sint duæ rectæ AB, & BC, quarum BC, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta BD, DC. Dico rectangulum sub AB, & BC, comprehensum, æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa AB, & quolibet segmento lineæ sectæ comprehenduntur, nempe rectangulo sub AB, & BD, atque sub AB, & DC.



Probatur. Rectangulum enim BG, comprehendatur sub AB, & BC, hoc est recta BE, æqualis sit rectæ AB. Quod quidem fiet si erigatur

tur ad BC, duæ perpendiculares BE,CG, æquales re-ctæ AB, ducaturque recta EG. Nam rectæ BE,CG, [*per 28.pri.*] parallelæ erunt ob rectos angulos B, C: sed & æquales [*per 1.pron.*] inter se sunt, quia vtraque rectæ AB, ponitur æqualis: Igitur [*per 33. pri.*] erunt quoque EG, BC, parallelæ, & æquales inter se: ac proinde rectangulum erit BG, contentum sub AB, siue BE, & BC, ex defin. 1. huius libri. Deinde ex D, (& ex alijs sectionibus si plures fuerint) ducatur recta DF, parallela ipsi BE, vel CG; iamque constituta erunt duo parallelogramma BF, DG, quare [*per 1. pron.*] etiam DF, æqualis erit, ipsi AB, cum [*per 34. pri.*] sit æqualis ipsi BE, cui etiam est æqualis ipsa AB, per constructionem. Quoniam igitur recta BE, æqualis est rectæ AB, erit rectangulum BF, comprehensum sub insecta linea AB, & segmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DG, comprehensum sub AB, (ostensa enim est æqualis ipsi DF,) & segmento DC; Quare cum rectangula BF, DG, æqualia sint toti rectangulo BG, hoc enim est totum, & illæ sunt omnes partes, perspicuum est rectangulum comprehensum sub AB, & BC, æquale esse omnibus rectangulis, quæ sub AB, & segmentis BD, DC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

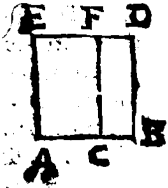
PROPOS. 2. THEOR. 2.

Si recta linea secta sit vtcunque: rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

Recta linea AB, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehensa sub

tota

tota AB, & segmentis AC, CB, simul sumpta æqualia esse quadrato totius lineæ AB. Probatur. Describatur enim AD, [*per 46. pri.*] quadratum lineæ AB, & ex C, [*per 31. pri.*] ducatur CF, parallela rectæ AE, vel BD, quæ [*per 34. pri.* æqualis erit rectæ AE, hoc

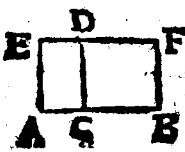


est rectæ AB, cui æqualis est recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis est rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC: similiter erit rectangulum CD, comprehensum sub tota AB, & segmento CB; Quare cum rectangula AF, CD, æqualia sint quadrato AD, perspicuum est, rectangula comprehensa sub AB, & segmentis AC, CB, æqualia esse quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

Si recta linea secta sit vtcumque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur quadrato.

Linea recta AB, diuisa sit vtcumque in puncto C. Dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & vtrouis segmento, nempe BC, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehenso, & quadrato segmenti CB, prius assumpti.

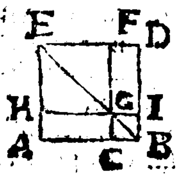


sumpti. Probatur. Constituatur enim quadratum dicti segmenti BC, quod sit CF; & ex A, educatur AE, [*per 31. pri.*] parallela ipsi CD, vel BF, donec coeat cum FD, protracta in E. Quoniam igitur recta BF, rectæ BC, æqualis est, ex quadrati defin. erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento BC. Rursus quia recta CD, eadem ratione æqualis est rectæ CB; erit rectangulum AD, comprehensum sub segmentis AC, CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale sit quadrato CF, & rectangulo AD; liquido constat rectangulum sub AB, tota, & segmento BC, comprehensum, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis AC, CB, & quadrato prædicti segmenti BC. Quare si recta linea secta sit vtcunque, rectangulum, quod à tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Si recta linea secta sit vtcunque: quod à tota describitur, quadratum, æquale est illis, quæ à segmentis describuntur quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

Recta linea AB, diuisa sit vtcunque in C. Dico quadratum totius rectæ AB, esse æquale quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub dictis segmentis AC, CB. Probatur. Describatur enim super AB [*per 46. pri.*] quadratum AD, ducaturq; diameter BE. Deinde ex C, ducatur CF, [*per 31. pri.*] parallela rectæ BD,



BD, secans diametrum in puncto G; per quod rursus ducatur HI, parallela rectæ AB. Eritque quadratum AD, diuisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia sunt; [per 5. pri.] erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui tres anguli [per 32. pri.] ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis sunt æquales, & BAE, rectus est, cum sit angulus in quadrato: Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, erunt semirecti. Eademque ratione ostendetur, angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quod etiam constat ex ijs, quæ ad 34. propos. lib. primi demonstrauimus. Nam, vt ibi ostensum est, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, bifariam. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, [per 32. pri.] æquales sunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus est, [per 29. pri.] cum sit æqualis recto D, externus interno, nec non FEG, ostensus semirectus; erit & reliquus EGF, semirectus; ideoq; æqualis angulo FEG. Quare [per 6. pri.] æqualia erunt latera EF, FG, quæ cum sint [per 34. primi.] æqualia, appositis lateribus GH, HE, erit parallelogrammum HF, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti; propterea, quod existente vno angulo recto, nempe FEH, vel F, in parallelogrammo FH, omnes quatuor recti sunt, vt ad Corollarium Propos. 29. primi libri demonstrauimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata sunt segmentorum AC, CB; eo quod latus HG, [per 34. pri.] æquale sit rectæ AC. Rectangula quoq; AG, GD, comprehensa erunt sub segmentis, AC, CB, propterea quod CG, GI, æquales sint rectæ CB, ob quadratum CI; & FG, æqualis rectæ GA, ob quadratum FA, [per 34. pri.] hoc est rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale sit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, GD; constat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub iisdem segmentis AC, CB, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcumque quadratum, quod à tota describitur, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM 1.

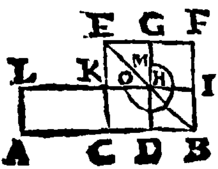
Ex hac Propos. fit manifestum, parallelogramma circa diametrum quadrati, esse quadrata.

COROLLARIVM. 2.

Sequitur etiam ex demonstratione huius 4. Propos. diametrum cuiusuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos, AEB, DEB, esse semirectos.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Si recta linea secetur in partes æquales, & inæquales; rectangulum sub inæqualibus segmẽtis totius lineę comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum describitur, æquale est ei, quod à dimidia describitur quadrato.



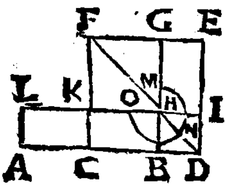
Diuidatur recta AB, bifariam in C, & non bifariam in D, ita vt sectionum inter media sit recta CD, qua nimirum dimidia CB, superat minus segmentum DB, vel qua maius segmentum AD, dimidium AC, excedit. Dico, rectangulum sub segmentis

tis inæqualibus totius AD, DB, comprehensum, vna cum quadrato inter mediæ CD, æquale esse quadrato dimidiæ CB. Super dimidia CB, [*per.46. pri.*] describatur quadratum CF, ductaque diametro BE, ex D, ducatur recta DG, [*per 31. pri.*] parallela rectæ BF, secans diametrum BE, in H, puncto, per quod ducatur [*per 31. pri.*] recta IK parallela ipsi BC; item ex A, rectæ CE, parallela ducatur AL, secans lineam IK, productam in L. Erunt igitur per Corollarium prçcedentis Propos. DI, KG, quadrata, ideoque DH, recta æqualis rectæ DB: Est autem [*per 34. pri.*] & KH, ipsi CD, æqualis. Quare rectangulum AH, comprehendetur sub AD, & DB; & rursus KG, erit quadratum rectæ CD, cum demonstrata sit æqualis ipsi KH. Probandum itaque est, rectangulum AH, vna cum quadrato KG, æquale esse quadrato CF. Quoniam ergo [*per 43. pri.*] complementa CH, FH, æqualia sunt, si addatur commune quadratum DI, erit parallelogrammum DF, æquale parallelogrammo CI; est autem & AK, [*per 36. pri.*] eidem CI, æquale, eo quod sint super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis: Igitur AK, & DF, etiam inter se æqualia erunt: quibus si commune apponatur CH, erit Gnomon MO, rectangulo AH, æqualis. Quocirca cum Gnomon MO, & quadratum KG, æqualia sint quadrato CF, erit & rectangulum AH, vna cum quadrato KG, æquale eidem quadrato CF. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Si recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur. Rectangulum comprehenſum ſub tota, & adiecta, tanquam vna linea, & adiecta, tanquam altera, vna cum quadrato à dimidia deſcripto, æquale eſt quadrato, quod ex dimidia, & adiecta, tanquam vna linea deſcribitur.

SEcetur recta AB, biſariam in C, & ei in rectum adijciatur BD. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota AD, & adiecta DB, vna cum quadrato dimidię CB, ęquale eſſe quadrato lineę CD, quæ ex dimidia CB, & adiecta BD, tanquam vna linea componitur. Probatur. Deſcribatur namque [*per* 46. *pri.*] quadratū CE ſuper CD, & ducta diametro DF, ducatur ex B, recta BG, [*per* 31. *primi.*] parallela rectæ DE, ſecans diametrum, DF, in H, puncto, per quod punctum rurſus ducatur IK, parallela reſtæ CD: Item ex A, rectæ CF, agatur parallela AL, ſecans IK, productam in puncto L. Erunt igitur, per Corollarium 1. Propoſ. 4. huius libri BI, KG, quadrata, ideoque recta DI, rectæ DB, æqualis: eſt autem [*per* 34. *pri.*] & KH, rectæ CB, æqualis: quare rectangulum AI, comprehendetur ſub rectis AD, DB; & KG, erit quadratum rectæ CB. Probandum itaque eſt rectangulum AI, vna cum quadrato KG, æquale eſſe quadrato CE; quod taliter demonſtratur.

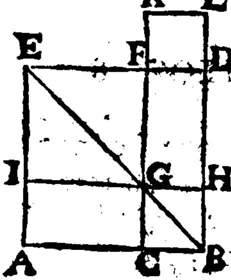


Quo-

Quoniam vero parallelogrammum AK, [per 36. pri.] æquale est parallelogrammo CH, eo quod sint super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis. Est autem & parallelogrammum HE, [per 43. pri.] eidem CH, æquale, sunt enim duo complementa; erunt AK, & HE, æqualia inter se. Addito ergo communi CI, erit rectangulum AI, Gnomoni MNO, æquale. Quocirca cum Gnomon MNO, & quadratum KG, quadrato CE, sint æqualia, partes omnes, & totum; erit & rectangulum AI, vna cum eodem quadrato KG, eidem quadrato CE æquale. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur &c. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

Si recta linea in duo segmenta vtcumque secetur; duo quadrata, quorum vnum fit à tota, & alterum ab vno segmentorum simul accepta, æqualia sunt rectangulo bis facto à tota linea, & dicto segmento vna cum quadrato alterius segmenti.



SIt recta linea AB secta vtcumque in C. Dico quadratum totius lineæ AB vna cum quadrato vnius segmenti (siue postea sit segmentum AC, vel CB) nempe CB æquale esse duobus rectangulis factis à tota AB, & dicto segmento BC vna cum quadrato alterius segmenti AC.

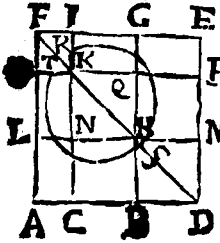
Demonstratio. Super AB [per 46. pri.] describatur quadratum AD, ductaque diametro EB ex puncto sectionis [per 31. pri.] ducatur CF parallela ipsi BD, vel AE secans diametrum in G; per punctum G ducatur IH parallela ipsi AB: demum supra FD constituatur quadratum DK. Quoniam enim duo parallelogramma IF, CH sunt circa diametrum quadrati EB (per corollar. 4. propos. huius lib.) erunt quadrata. Pariter cum FD [per 34. pri.] adæquat CB, erit quadratum DK æquale quadrato segmenti CB; & ob eandem rationem quadratum IF erit quadratum alterius segmenti AC. Vlterius cum linea BH [per def. quad.] adæquet BC, erit rectangulum AH factum à tota AB, & a segmento BC: nec non etiam cum recta GK sit æqualis ipsi AB, quia GF adæquat GI [per def. quadr.] & GI est æqualis ipsi AC, latera opposita in parallelogrammo; vti pariter FK latus quadrati DK adæquat CB; erit rectangulum HK factum pariter à tota AB, & à segmento BC; sed hæc duo rectangula AH, HK vna cum quadrato IF, cum sint eorum partes, adæquant duo quadrata AD, DK: ergo duo quadrata rectarum AB, BC sunt æqualia duobus rectangulis sub AB, BC comprehensis, vna cum quadrato alterius segmenti CA: Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Si recta linea secetur vtcumque Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit quadrato, æquale est ei, quod

quod à tota, & dicto segmento, tanquam vna linea describitur, quadrato.

Sit recta AB, diuisa vtcunque in C. Dico rectangulum quater comprehensum sub tota AB, & vno

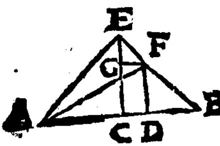


segmento, nempe CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto segmento CB, componitur. Prob. Producatur enim AB, versus partem segmenti CB, nempe ad D, ita vt BD, producta sit æqualis segmento CB; & postea super tota AD, [*per 46. primi*] describatur quadratum AE. Ducta autem diametro DF, ducantur BG, CI, [*per 31. pri.*] parallelæ ipsi DE, secantes diametrum in punctis H, & K, per quæ ducantur denuo [*per 31. primi*] LM, OP, parallelæ ipsi AD, quæ secent priores parallelas in N, & Q. Erunt igitur per Coroll. 1. Propos. 4. huius libri OI, NQ, BM, LG, CP, circa diametrum DF, quadrata. Et quia OK, [*per 34. pri.*] æqualis est rectæ AC, erit OI, quadratum segmenti AC. Rursus quia NH, [*per 34. pri.*] æqualis est rectæ CB, erit NQ. Quadratum segmenti CB; ideoq; quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales sint. Quare rectæ BH, HQ, æquales sunt segmento CB; atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehensa erunt sub tota AB, & segmento CB, cum LH, [*per 34. pri.*] sit æqualis rectæ AB, sunt enim latera opposita in parallelogrammo. Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE, comprehensa sub AB, & CB, cum NH, HM, rectæ [*per 34. pri.*] æquales sint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ FL, hoc est rectæ LH, hoc ast rectæ AB. Et quia quadrata NQ, BM, æqualia sunt; si addatur commune KG, erunt BM, KG, simul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinque rectangula AH, LQ. HE, BM, & KG; gnomonem RST, componentia æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub tota AB, & segmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia sint quadrato AE, erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento CB. Quare si recta linea vtcunque secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Si recta linea secetur in ęqualia, & non ęqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius lineæ segmentis fiunt simul, duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SEcetur recta AB, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium AD, BD, simul dupla esse quadratorum, quæ fiunt ex dimidia AC, & ex inter media sectionum CD, simul. Prob. Ducatur enim ex C, ad AB, [per 11. pri.] perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB, ducanturque rectæ EA, EB. Deinde



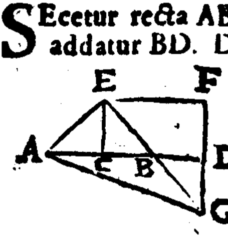
ex D, ducatur quoque ad AB, perpendicularis DF, secans EB, in puncto F, per quod ducatur FG, parallela, ipsi AB, secans CE, in G, puncto, & demum ducatur tacitur AF. Quoniam igitur in triangulo ACE, latera CA, CE, æqualia sunt per constructionem; [*per 5. pri.*] erunt anguli CAE, CEA, inter se æquales: Est autem angulus ACE, rectus, cum CE, sit perpendicularis; reliqui igitur anguli [*per 32. primi.*] alium rectum conficient; ideoque AEC, semirectus erit. Eadem ratione angulus BEC, erit semirectus: ac propterea totus Angulus AEB, ex duobus semirectis compositus, rectus erit. Rursus, quia trianguli FGE, angulus EGF, æqualis est recto ECB, [*per 29. pri.*] externus interno, & opposito; [*per 32. pri.*] erunt reliqui duo anguli GFE, GEF, vni recto æquales: Ostensum autem est, angulum GEF, esse semirectum; igitur & GFE, semirectus erit, proptereaque anguli EFG, GEF, æquales erunt, ideoque [*per 6. pri.*] & latera EG, GF, æqualia inter se erunt. Eodem prorsus modo ostendetur in triangulo BDF, latera BD, DF, æqualia esse. Nam angulus BDF, est rectus, cum DF, sit perpendicularis, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE, angulus C, rectus sit, [*per 47. primi*] erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum AC, CE: Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia, quod & lineæ AC, CE, sint ostensæ æquales. Igitur quadratum lateris AE, duplum erit quadrati lateris AC. Rursus quia in triangulo EGF, angulus G, rectus est, [*per 47. pri.*] erit quadratum lateris EF, æquale duobus quadratis laterum EG, GF: At duo hæc quadrata sunt inter se æqualia ob æqualitatem linearum EG, GF; Igitur quadratum lateris EF, duplum erit quadrati lateris GF, hoc est quadrati lineæ CD; Est enim recta CD. [*per 34. pri.*] æqualis rectæ GF; cum CF, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum AE, & EF, dupla erunt quadratorum linearum AC, & CD: sunt autem duo quadrata rectarum AE, & EF, [*per 47. pri.*] æqualia

lia quadrato rectæ AF; & quadratum rectæ AF, æquale est duobus quadratis rectarum AD, DF; Igitur & duo quadrata rectarum AD, DF, dupla sunt quadratorum rectarum AC, CD. Atqui quadratum rectæ DF, æquale est quadrato rectæ DB; Ostensum enim est, rectas DF, DB, esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum AD, DB, segmentorum inæqualium dupla sunt quadratorum rectarum AC, CD, dimidiæ scilicet lineæ, & intermediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 10. THEOR. 10.

Si recta linea bifariam secetur, & ei in rectum alia quæpiam linea adijciatur: Quod à tota, cum adiuncta tanquam vna linea, & ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt, & eius, quod à dimidia, & eius quod à composita ex dimidia, & adiuncta, tanquam ab vna linea, descriptum, sit, quadrati.

SEcetur recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico, duo quadrata rectarum AD, & BD, simul, dupla esse duorum quadratorum simul, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Probatur. Super AB, ex puncto C, [*per* 11. *pri.*] erigatur perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB, iunganturque rectæ AE, EB. Deinde per D, ducatur DF, ipsi CE, parallela, occur-



cur-

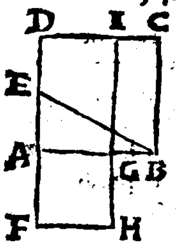
currens rectæ EB, protractæ in G, puncto; & per E, rectæ CD, parallela ducatur EF, secans DF, in F, puncto, iungaturque recta AG. Ostendetur iam, angulum AEB, esse rectum, vt in præcedenti Propos. & CEB, semirectum; ideoque [*per 29. primi*] eius alternum EGF, quoque semirectum: est autem angulus F, [*per 34. pri.*] rectus, cum in parallelogrammo CF, opponatur angulo C, qui factus est rectus. Igitur [*per 32 pri.*] & reliquus FEG, semirectus erit, ac propterea ipsi EGF, æqualis. Quare [*per 6. pri.*] rectæ EF, FG, æqualibus angulis oppositæ inter se æquales erunt. Eodem modo ostendes, rectas BD, DG, esse æquales, ex eo quod angulus BDG, sit rectus, BGD, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, [*per 47. pri.*] æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium AC, CE; erit quadratum rectæ AE, duplum quadrati rectæ AC. Rursus quia quadrum rectæ EG, [*per 47 pri.*] est æquale duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FG; erit quoque quadratum rectæ EG, duplum quadrati rectæ EF, hoc est rectæ CD, cum CD, [*per 34. pri.*] recta æqualis sit rectæ EF. Duo igitur quadrata rectarum AE, EG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum AE, EG, [*per 47. pri.*] æquale est quadratum rectæ lineæ AG; & quadrato rectæ lineæ AG, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis AD, DG, describuntur (angulus enim D est rectus). Quadrata ergo rectarum AD, DG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Demum cum quadratum rectæ DG, æquale sit quadrato rectæ BD, ob linearum æqualitatem; erunt quoque quadrata rectarum AD, DB, dupla quadratorum, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod demonstrandum erat.

PRO-

PROPOS. 11. PROBL. 1.

Datam rectam lineam taliter secare, vt rectangulum comprehensum sub tota, & altero segmentorum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

DAta sit recta AB, quam secare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehensum sub tota, & altero eius segmento, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nempe maiori. Describatur ex AB, quadratum AC, & diuiso latere AD, quod cum data recta AB angulum rectum efficit, bifariam in E, iungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis sumatur EF; & ipsi AF, abscindatur ex data recta AB, æqualis AG. Quod fieri potest cum AB, maior sit quam AF; nam cum EB, sit æqualis ipsi EF, ex constructione; [*per* 20.*pri.*] sint autem latera AE, AB, maiora latere EB; erunt quoque rectæ EA, & AB, maiores recta EF; ac proinde ablata communi AE, reliqua AB, maior erit reliqua AF. Dico rectam AB, sectam esse in G, taliter, vt rectangulum sub AB, & BG, comprehensum, æquale sit quadrato rectæ AG; adeo vt AG, sit maius segmentum, & BG, minus. Probatur. Ducatur enim per G, recta HI, parallela rectæ DF, secans CD, in I: ac per F, ducatur FH, ipsi AG, parallela secans HI, in H, puncto. Erit igitur parallelogrammum AH, quadratum segmenti AG, cum omnia eius quatuor latera sint æqualia, cum [*per* 34 *pri.*] FH, HG, æqualia sint oppositis AG, AF, pariter æqualibus, omnesque anguli recti ob



re-

rectum A, vt in Corollario 29. Propos. libri primi habetur. Rectangulum quoque CG, comprehensum erit sub AB, & segmento BG, quod AB, æqualis sit ipsi BC. Quare probandum est rectangulum CG, & quadratum AH æqualia esse. Quoniam igitur recta DA, est secta bifariam in E,& ei addita fuit in rectum AF, [*per 6. sec.*] erit rectangulum sub DF, & FA, hoc est rectangulum DH,(cum FH, sit æqualis ipsi FA) vna cum quadrato dimidiæ AE, æquale quadrato rectæ EF, hoc est quadrato rectæ EB, quæ rectæ EF, æqualis est per constructionem. Est autem quadratum rectæ EB, [*per 47. pri.*] æquale quadratis rectarum AE, AB. Quare rectangulum DH, vna cum quadrato rectæ AE, æquale quoque erit quadratis rectarum AE, AB. Dempto ergo communi quadrato rectæ AE, remanebit rectangulum DH, æquale quadrato rectæ AB, hoc est quadrato AC; Ablato rursus communi rectangulo AI, remanebunt rectangulum CG, & quadratum AH, inter se æqualia. Quod fuit propositum. Datam igitur rectam AB taliter secuimus, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

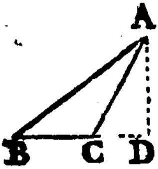
Hoc problema nulla ratione numeris accomodari potest, vt monet Clauius in hoc loco, & demonstrat ad Propos. 14. lib. 9. Siquidem numerus nullus potest taliter in duos diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis. Quod sane non accidit in 10. antecedentibus theorematibus, quæ lib. 9. in numeris clarius demonstrantur.

PRO-

PROPOS. 12. THEOR. 11.

In amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo, & ab vno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod cum protractum fuerit cadit perpendicularis, & ab aſſumpta exterius linea ſub perpendiculari prope angulum obtuſum.

TRiangulum ABC, habeat angulum ACB, obtuſum, & ex A, in latus BC, ad partes anguli obtuſi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AB, quod obtuſo angulo opponitur, maius eſſe quadratis laterum AC, CB, rectangulo bis comprehenſo ſub BC & CD, hoc eſt quadratum lateris AB, æquale eſſe duobus quadratis laterum AC, CB, vna



cum rectangulo bis ſub BC, CD, comprehenſo Probat. Cum enim recta BD, vt cum que diuiſa ſit in C. [*per 4 ſec.*] erit quadratū rectæ BD, æquale duobus quadratis rectarum BC, & CD, vna cum rectangulo bis ſub BC, CD comprehenſo. Addito igitur communi quadrato rectæ AD; erunt duo quadrata rectarum BD, & DA, æqualia tribus quadratis rectarum BC, CD, DA, & rectangulo bis ſub BC, CD, comprehenſo: Eſt autem quadratis rectarum BD, DA, [*per 47. pri.*] æquale quadratum rectæ AB. Quare, & quadratum

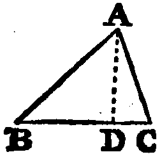
rectæ

rectæ AB, æquale erit tribus quadratis rectarum BC, CD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub BC, CD. Cum igitur quadratis rectarum CD, DA, [*per 47.pri.*] æquale sit quadratum rectæ AC; erit quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum BC, CA, & rectangulo bis comprehenso sub BC, CD. Quod est propositum. In Amblygonijs ergo triangulis quadratum, &c. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 13. THEOR. 12.

In Oxygonijs triangulis, quadratum factum à latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus angulum acutum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope angulum acutum.

IN triangulo ABC, omnes anguli sint acuti, & ex A, demissa perpendicularis AD, cadat in latus BC. Dico quadratum lateris AB, quod



acuto angulo C, opponitur, minus esse quadratis laterum AC, CB, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, hoc est quadratum lateris AB, vna cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD æquale esse duobus quadratis laterum AC, CB. Prob. Cum enim recta BC, diuisa sit vtcumque in D, erunt quadrata rectarum BC, CD, [*per 7.sec.*] æqualia rectangulo bis compre-

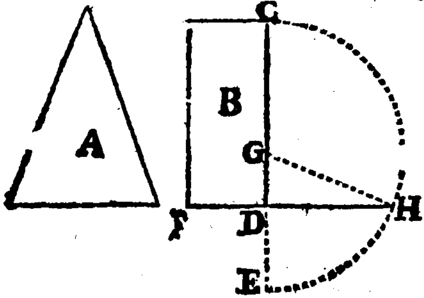
henso

henso sub BC, CD, & quadrato rectæ BD. Addito ergo communi quadrato rectæ DA, erunt tria quadrata rectarum BC, CD, DA, æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA. Duobus autem quadratis rectarum CD, & DA, [*per* 47. *pri.*] æquale est quadratum rectæ CA. Duo igitur quadrata rectarum BC, CA, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA. Cum ergo duobus quadratis rectarum BD, DA, [*per* 47. *pri.*] æquale sit quadratum rectæ AB; erunt duo quadrata rectarum BC, CA, æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & quadrato rectæ AB, quod est propositum. In Oxygoniis ergo triangulis, quadratum à latere, &c. Quod erat demonstrandum,

PROPOS. 14. PROBL. 2.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. Constituatur parallelogrammum B, [*per* 45. *pri.*] æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, vt CD, producatur ad E; sitque DE, recta æqualis rectæ DF. Diuidatur quoque CE, bifariam in G, puncto, quod cadet



dit aut in punctum D, aut non; si cadit in punctum D, erit recta DF, (cum æqualis ponatur rectæ DE) rectæ CD, æqualis. Quare rectangulum B, erit quadratum, cum alia dua latera opposita [*per 34. pri.*] æqualia sint lateribus æqualibus DC, DF, & vnus angulus per constructionem sit rectus; & consequenter omnes recti per Corroll. prop. 29. lib. 1. Atque adeo constitutum est quadratum æquale rectilineo A: quod erat faciendum. Si vero punctum G, non cadit in D, facto G, centro interuallo GC, describatur semicirculus CHE; producaturque FD, donec circumferentiam secet in H. Dico igitur quadratum rectæ DH, esse æquale rectilineo A. Probatur. Ducta enim recta GH, quia recta CE, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in D; erit rectangulum comprehensum sub CD, DE, hoc est rectanctulum B, vna cum quadrato rectæ GD [*per 5. sec.*] æquale quadrato rectæ GE; hoc est quadrato rectæ GH; cum GH, & GE, sint æquales, sunt enim à centro ad circumferentiam. Sed quadratum rectæ GH, [*per 47. pri.*] æquale est quadratis rectarum GD, DH. Quamobrem dempto communi quadrato rectæ GD, remanebit rectangulum B, hoc est rectilineum A, quadrato rectæ DH, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus. Quod facere oportebat.

Explicatio Materiæ in hac Secundo Libro contentæ in capite huius Elementi ob incuriam Typographi omissæ, in hoc loco adiungere visum est.

In Secundo Elemento.

AVctor in Secundo Libro proponit definitiones rectanguli, & gnomonis. Deinde rectangulorum parallelogrammorum, & quadratorum, quæ ex rectarum linearum sectionibus fiunt, proportiones declarat. Postea vero adducit proportionem illam, quam habent quadrata à lateribus obtusum, vel acutum angulum comprehendentibus facta, ad illa quadrata à latere obtusum, vel acutum angulum subtendente descripta. Et demum exponit modum, quo mediante rectilineo dato æquale constituatur quadratum.

Finis Elementi Secundi.

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

DEFINITIONES.

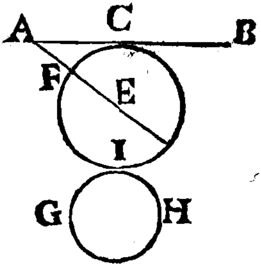
I.

ÆQuales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales; vel quorum, quæ ex centris ad periferias ducuntur rectæ lineæ, ſunt æquales.

EVclides in hoc 3. Libro varias circuli proprietates demonſtrat, exponendo prius quoſdam terminos, ad meliorem dicendorum intelligentiam. Primo enim loco docet, eos circulos eſſe æquales, quorum diametri, vel ſemidiametri ſunt æquales. Nam cum circulus, ex iam dictis, deſcribatur ex circumuolutione ſemidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile perſpicuum eſt, eos circulos eſſe ęquales, quorum ſemidiametri ęquales ſunt.

II.

Recta linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur circulum non secat.



VT est linea AB, quæ tangit circulum in C, nec ipsum secat vti facit AE, quæ circulum secat in F, puncto. Vnde AB, dicitur tangens, AE, vero secans.

III.

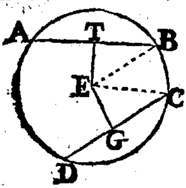
Circuli sese mutuo tangere dicuntur, qui sese mutuo tangentes, sese mutuo non secant.

QVod patet in duobus circulis CFI, GIH, qui sese mutuo tangunt in puncto I.

IV.

In circulo æqualiter distare à centro rectę lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

EVclides in hac definitione æqualem distantiam rectarum in circulo designauit per æquales perpenpendiculares, ſicuti inæqualem per inæquales. Vt duæ rectæ AB, CD, in circulo ABCD, dicuntur



æqualiter diſtare à centro E, ſi perpendiculares ET, EG, æquales fuerint, ſi vero perpendiculares non fuerint æquales illa linea, in quam cadit maior perpendicularis, dicitur longius diſtare à centro, quam illa, in quam cadit minor perpendicularis.

V.

Segmentum circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circuli periferia comprehenditur.

VT ſunt figuræ A, & B, quæ figuræ vt patet comprehenduntur ſub vna recta linea, & circuli portione.

VI.

Segmenti autem angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli periferia comprehenditur.

HIc pro angulo ſegmenti intelligit Euclides angulum mixtum contentum ſub recta linea, & circuli periſeria.

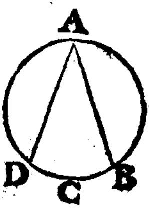
VII.

In ſegmento autem angulus eſt, cum in ſegmenti periferia ſumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ ſegmenti baſis eſt, adiunctæ fuerint rectæ lineæ; Is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus dicitur angulus in ſegmento.

SIt ſegmentum circuli quodcumque verbi gratia C, in cuius periferia ſumatur quodcumque punctum nempe C, à quo ad extremitates rectæ lineæ ducantur duæ rectæ, iam angulus ab illis duabus rectis lineis comprehenſus, vocatur angulus in ſegmento.

VIII.

Cum vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam aſſumunt periferiam, illi angulus inſiſtere dicitur.

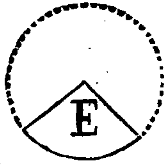


SI enim in periferia alicuius circuli ADCB, ſumatur quodcumq; punctum, nempe A, ducanturque duę rectę AB, AD, vſque ad periferiam D, B, angulus rectilineus DAB, inſiſtere dicitur circumferentiæ DCB, qui angulus ſola voce differt à præcedenti.

IX.

Sector autem circuli eſt, cum ad ipſius circuli centrum conſtitutus fuerit angulus, comprehenſa nimirum figura, & à rectis lineis angulum continentibus, & à periferia ab illis aſſumpta.

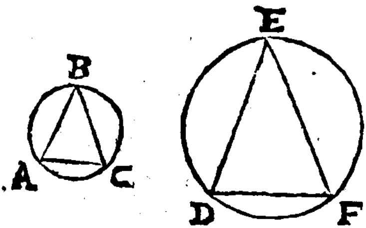
In



IN circulo E, & pariter ab eius centro E, duæ lineæ à centro ad circumferentiam ductę constituant angulum rectilineum, in hoc casu figura E, contenta sub duabus rectis à centro ad circumferentiam ductis, & ab illa portione circumferentiæ, quæ à dictis lineis rectis assumitur, vocabitur sector circuli, quia secat portionem circuli.

X.

Similia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: aut in quibus anguli sunt æquales.



SInt duo circulorum segmenta ABC, DEF, quæ capiant angulos ęquales ABC, DEF, (quamuis huiusmodi segmenta sint inęqualiũ circulorum) à Geometris dicuntur similia, vel etiam quando in se retinent angulos æquales.

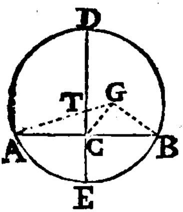
In Tertio Elemento.

IN hoc Elemento pertractantur ea, quæ in circulis accidunt, necnon etiam de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis. Itemque de angulis, qui ad circulorum centra, vel circumferentias consistunt.

PROPOS. 1. PROBL. 1.

Dati circuli centrum reperire.

SIt datus circulus ADBE, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in dato circulo linea vtcunq; AB, quæ [*per* 10. *pri.*] bifariam diuidatur in C, & per C, ad AB, perpendicularis ducatur DE, vtrinque in periferiæ punctis D, E, terminata. Hac igitur bifariam secta in T; dico T, esse centrũ circuli propositi. Prob. In ipsa enim recta DE, aliud punctum, præter T, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam DE, diuidat inæqualiter, nam solum in T, diuisa fuit æqualiter. Si igitur T, non est centrum sit punctum G, extra rectam DE, à quo ducantur lineæ GA, GC, GB. Quoniam ergo latera AC, CG, trianguli ACG, equalia sunt lateribus BC, CG, trianguli BCG, & basis AG, basi GB, (sunt enim à centro ad circumferentiam): [*per* 8 *pri.*] erunt anguli ACG, BCG, æquales, ideoque recti: erat autem & angulus ACT, rectus ex constructione. Igitur duo anguli recti ACT, ACG, æquales erunt, pars, & totum quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademque ratio erit de omni alio, præter quam de ipso T; Quare dati circuli centrum reperimus. Quod erat efficiendum.



COROLLARIVM.

Ex hac Propos. manifestum est, quod si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam pariter in circulo ductam secet bifariam, & ad angulos rectos,

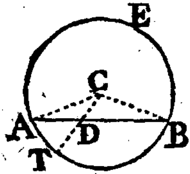
in

in secante esse centrum circuli. Nam ex eo quod DE, recta rectam AB, bifariam secet in C, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium T, necessario esse circuli centrum.

PROPOS. 2. THEOR. 1.

Si in circuli periferia duo quælibet puncta fuerint accepta; recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

IN circulo AEB, sumantur quælibet duo puncta A, & B, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in B, ductam cadere intra circulum, itaut ipsum secet. Probatur. Ducta recta linea AB, in ipsa assignetur quodcumque punctum nempe D, deinde [*per* 1. *ter.*] inueniatur centrum dati circuli, & sit C, à quo ducantur rectæ CA, CDT, & CB. Quoniam igitur in triangulo ABC, duo latera AC, CB, sunt æqualia, (sunt enim à centro ad circumferentiam) angulus CAB, [*per.*5. *pri*] æqualis erit angulo CBA; cum vero angulus CDB, [*per* 16. *pri.*] maior sit interno, & opposito CAD, [*per* 1. *ax.*] maior quoque erit angulo CBD. Quia ergo in triangulo CDB, angulus D, ostensus est maior angulo B, [*per* 19. *pri.*] etiam latus CB, maius erit latere CD, sed recta CB, æqualis est rectæ CT, ob defin. circuli; ergo recta CT, maior erit recta CD; quare cum CT, tota sit in circulo comprehensa, punctum D, erit intra circulum. Eodemque prorsus modo demonstrabitur reliqua puncta rectę AB intra circulum reperiri; quapropter etiam linea recta AB, ab huiusmodi punctis constituta, intra circulum erit. Quare si in circuli



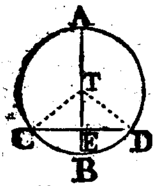
peri-

periferia duo quelibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 3. THEOR. 2.

Si in circulo recta quędam linea per centrum ducta quandam aliam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

PEr centrum T, circuli ACBD, recta AB, extensa diuidat rectam CD, non per centrum ductam, bifariam in E. Dico rectam AB, esse ad angulos rectos ipsi CD. Prob. Ductis enim rectis TC, TD, erunt duo latera TE, EC, duobus lateribus TE, ED, æqualia; & bases TC, TD, æquales. Igitur [*per* 8. *pri.*] anguli TEC, TED, æquales erunt, hoc est recti. Quod primo erat propositum.



Sit iam AB, ad angulos rectos ipsi CD, dico rectam CD, bifariam secari in E, à recta AB. Prob. Ductis enim iterum rectis TC, TD; cum latera TC, TD, trianguli TCD, sint æqualia, [*per* 5. *pri.*] erunt anguli TCD, TDC, æquales, Quoniam igitur duo anguli TEC, TCE, trianguli TCE, æquales sunt duobus angulis TED, TDE, trianguli TDE, & latera TC, TD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia: [*per* 26. *pri.*] Erunt latera EC, ED, æqualia. Quod secundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum ducta, &c. Quod demonstrandum erat.

CO-

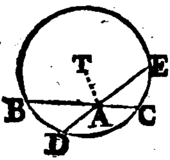
COROLLARIVM.

Ex hac demonstratione facile inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, lineam, quæ basim bifariam secat, perpendicularem esse ad basim; Et è contra, lineam, quæ ad basim est perpendicularis, basim secare bifariam: vt patet in triangulo TCD.

PROPOS. 4. THEOR. 3.

Si in circulo duę rectę lineę non per centrum extensæ sese mutuo secent: sese mutuo bifariam non secabunt.

DVæ rectæ BC, DE, se mutuo in A, secent in circulo BDCE, non per centrum extensæ. Dico fieri non posse, vt sese mutuo bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam tantum bifariam secari; solum enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: si vero neutra per cētrum extendatur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime secabitur bifariam. Diuisa enim sit tam BC, quam DE, bifariam in A, si fieri potest. [*per* 1. *ter.*] Inuento igitur centro circuli, nempe T, ab eo ad A, ducatur recta TA. Quoniam ergo recta TA, ponitur secare rectam BC, bifariam in A, [*per* 3. *ter.*] secabit ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur DE, ad angulos rectos, cum etiam ipsa ponatur bifariam diuisa in A. Quare rectus angulus TAB, recto angulo TAD, æqualis erit, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ lineæ non per centrum extensæ, &c. Quod erat demonstrandum.

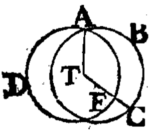


PRO-

PROPOS. 5. THEOR. 4.

Si duo circuli sese mutuo secent; non erit illorum idem centrum.

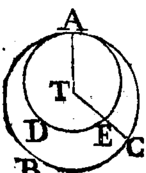
DVo circuli ABC, ADE, se mutuo secent in A, & E. Dico ipsos non habere idem centrum. Prob. Sit enim, si fieri potest, idem centrum vtriusque T, à quo duæ rectæ ducantur: TA, quidem ad punctum sectionis A; TC, vero secans vtramque circumferentiam in E, & C. Quoniam igitur T, ponitur centrum circuli ABC, erit recta TC, rectæ TA, æqualis. Rursus quia T, centrum quoque ponitur circuli ADE, erit & recta TE, eidem rectæ TA, æqualis. Quare rectæ TC, TE, [*per* 1. *pron.*] æquales inter se erunt, pars, & totum quod est impossibile. Si igitur duo circuli sese mutuo secent, &c. Quod ostendendum erat.



PROPOS. 6. THEOR. 5.

Si duo circuli sese mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DVo circuli ABC, ADE, ad inuicem se interius tangant in A. Dico eos non habere idem centrum. Probatur. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum T, à quo duæ rectæ ducantur, TA, quidem ad contactum circulorum A; At TC, secans vtramque circumferentiam in E, & C. Quoniam igitur T, ponitur centrum circuli majoris ABC; erit recta TC, re-



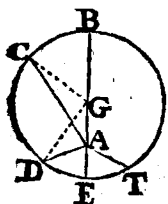
ctæ

ctæ TA, æqualis. Rursus quia T, ponitur centrum circuli minoris ADE, erit recta TE, eidem rectæ TA, æqualis. Quare rectæ TC, TE, [*per* 1.*pron.*] inter se æquales erunt, pars, & totum quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuo interius tangant, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 7. THEOR. 6.

Si in diametro circuli, quod piam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum cadant quædam rectæ lineæ: Maxima earum illa erit, in qua centrum reperitur, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est: solum autem duæ rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro BE, circuli BCDET, cuius centrum G, punctum assumatur quodcumque A, præter centrum, & ex A, cadant in circulum quotcunque lineæ AD, AC. Dico omnium, quæ ex A, ad circumferentiam ducuntur, maximam esse AB, in qua est centrum, minimam vero reliquam AE, quæ diametrum perficit: Deinde rectam AC, quæ rectæ AB, per centrum ductæ propinquior est, maiorem esse recta AD, quæ ab eadem AB, plus distat; atque ita de alijs si ducantur in infinitum.



nitum. Demum ex A, ad vtrasque partes minimæ lineæ AE, vel maximæ AB, tantummodo duci posse duas linea inter se æquales. Ducantur ex centro G, ad puncta C, & D, duæ rectæ GC, GD. Quoniam igitur duo latera AG, GC, [*per* 20. *pri.*] maiora sunt reliquo AC, in triangulo AGC, sunt autem duæ rectæ AG, GC. duabus rectis AG, GB, æquales, hoc est toti rectæ AB, quia GC, GB, sunt ab eodem centro; erit & AB, maior quam AC; eademque ratione recta AB, maior erit recta AD, & sic de reliquis. Quare AB, maxima est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt.

Deinde quoniam in triangulo DGA, latus DG, [*per* 20. *primi*] minus est duobus lateribus GA, AD. Est autem GD, ipsi GE, æqualis; erit & GE, minor quam GA, & AD. Quare dempta communi GA, remanebit adhuc AE, minor quam AD. Vnde AE, minima est omnium, quæ ex A, in circuli circumferentiam cadunt.

Rursus quia duo latera AG, GC, in triangulo AGC, æqualia sunt duobus lateribus AG, GD, in triangulo AGD, & angulus totus AGC, maior est sua parte AGD, [*per* 24. *pri.*] erit basis AC, maior basi AD, & sic de reliquis, si ductæ fuerint. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est remotiore.

Tandem lineæ AD, ex altera parte æqualis ponatur AT, quod facile erit, si ad centrum G, versus alteram partem ponatur vnus angulus æqualis angulo AGD, vt docet Propos. 23. lib. primi, qui angulus intelligatur comprehensus sub AG, & alia ex G, in T, ducta, vnde si postea coniungantur puncta A, & T, per rectam AT, erit TA, æqualis ipsi AD, quia sunt duo triangula, quæ habent conditions 4. Propos. primi libri, vnde basis AD, basi AT, æqualis erit. Quod

autem

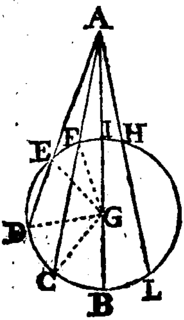
autem nulla alia his duabus AD, AT, possit esse æqualis constat. Nam si ex A, ducatur alia, quæ cadat supra punctum Γ, iuxta demonstrata erit maior quam AΓ, si cadat infra, erit minor, vnde nunquam poterit esse æqualis ipsi AD. Duæ igitur dumtaxat rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ AE, vel maximæ AB, cadunt. Itaque si in diametro circuli, quod piam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 8. THEOR. 7.

Si extra circulum sumatur aliquod pũctum, à quō ad circulum deducantur rectę quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vtlibet: In cauam periferiam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur, aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est; In conuexam vero periferiam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

SIt datum punctum A, extra circulum EDBLH, cuius centrum G, lineæ secantes circulum ducantur

tur à puncto A, quarum AB, per centrum transeat, reliquæ vero AC, AD, vtcumque. Dico omnium maximam esse AB, quæ per centrum transit: Deinde rectam AC, quæ rectæ AB per centrum ductæ, propinquior existit, maiorem quoque esse recta AD, quæ remotior est ab eadem AB, & sic de reliquis, si extarent. E contrario autem rectam AI, omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse: Deinde rectam AF, quæ vicinior est minimæ AI, minorem esse



recta AE, remotiore. Denique ex A, ad vtrasque partes maximæ lineæ AB, vel minimæ AI, duci posse tantummodo duas lineas rectas inter se æquales. Probatur. Ducantur ex centro G, ad puncta C, D, E, F, rectæ GC, GD, GE, GF. Quoniam igitur duo latera AG, GC, trianguli AGC, [*per 20. pri.*] maiora sunt recta AC; sunt autem rectæ AG. GC, æquales rectis AG, GB, hoc est toti rectæ AB; erit & AB; maior quam AC. Eadem ratione erit AB, maior quam AD, &c. Quare AB, est omnium, quæ ex A, in cauam periferiam cadunt, maxima; quod primo fuit propositum.

Deinde, quoniam latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sunt lateribus, AG, GD, trianguli AGD; & totus angulus AGC, maior est angulo AGD; [*per 24. pri.*] erit basis AC, basi AD, maior. Eademque ratione de reliquis erit dicendum. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est remotiore.

Rursus, quia in triangulo AFG, recta AG, minor est [*per 20. primi*] duabus AF, FG; si æquales auferantur FG, IG, remanebit adhuc AF, maior quam AI. Simili prorsus ratione erit AE, maior quam AF, &c.

&c. Quare AI, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est.

Rursus, cum intra triangulum AEG, cadant duæ rectæ AF, FG, ab extremitatibus lateris AG, ductæ; [*per 21. pri.*] erunt AF, FG, minores ipsis AE, EG; ablatis igitur æqualibus GE, & GF, remanebit adhuc AE, maior quam AF. Quare linea propinquior minimæ lineæ AI, minor est, quã remotior ab eadem AI.

Demum ducatur AL, æqualis ipsi AC, & AH, ipsi AF, quo posito. Dico hanc solam duci posse æqualem ipsi AC. Prob. Si alia præter AL, potest duci æqualis ipsi AC, necessario ducenda erit supra, vel infra AL; si ducatur supra, iuxta superius demonstrata, erit minor ipsa AL; si vero ducatur supra, erit maior; quare nulla præter AL, ipsi AC, æqualis erit. Quoquo modo etiam probandum erit, nullam præter AH, duci posse æqualem ipsi AF, nam etiam ista, ducenda erit intra, vel extra AH; si ducatur intra minor erit ipsa AH, ex modo visis; si ducatur extra erit maior; quare nunquam poterit æqualitatem habere cum ipsa AF. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, à quo ad cirsulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna, &c. Quod erat demonstrandum.

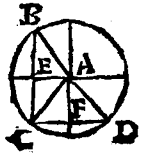
PROPOS. 9. THEOR. 8.

Si in circulo acceptũ fuerit punctũ aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineȩ æquales; acceptum punctum centrum erit ipsius circuli.

IN circulo BCD, à puncto assumpto A, cadant plures, quam duæ rectæ AB, AC, AD, inter se æqua-

 les.

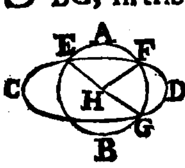
les. Dico punctum A, esse centrum circuli BCD. Prob. Connectantur enim puncta B,C,D, rectis BC, CD, quibus [*per* 10. *pri.*] bifariam diuisis in E, & F, ducantur ex A, rectæ AE, AF. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus AE, EC, trianguli AEC; & bases AB, AC, ponuntur etiam æquales; [*per* 8. *pri.*] erunt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ AE, AF, diuidant rectas BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, iuxta Corollarium Propositionis primæ huius libri Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim aliud punctum esset centrum, non transiret vtraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod erat demonstrandum.



PROPOS. 10. THEOR. 9.

Circulus circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.

SEcent se, si fieri potest, duo circuli ECGD, FAEBG, in tribus punctis E, F, G; [*per* 1. *ter.*] inuentum autem sit H, centrum circuli AFGBE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ HE, HF, HG, quæ per circuli definitionem æquales inter se erunt. Quoniam igitur intra circulum AEBGF, assumptum est punctum H, à quo cadunt in circumferentiam plures quam duæ rectæ lineæ, æqales; [*per* 9. *ter.*]



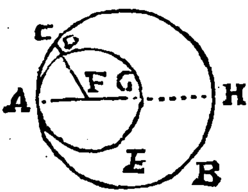
erit

erit H centrum circuli AEBGF; Est autem idem punctum H, ob eandem rationem centrum circuli EFDGC; Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum. Quod est absurdum. [*per 5. huius.*]

PROPOS. 11. THEOR. 10.

Si duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra: ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta in contactum circulorum cadet.

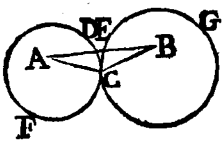
Tangat circulus ABC, circulum ADE, intus in A; sitque G, centrum circuli ABC, & F, centrum pariter circuli ADE, quod necessario à priori diuersum erit, cum duo circuli sese interius tangentes [*per 6. ter.*] non possint idem centrum habere. Dico lineam extensam per G, & F, ad solum contactum A, esse rectam. Probatur. Si enim linea GF, producta ad contactum A, non est recta, ad aliud punctum, si fieri potest, nempe ad C, ducatur FC, quæ simul cum GF constituat rectam GFC. Quoniam igitur in circulo ABC, assumptum est punctum F, quod non est centrum; [*per 7. ter.*] erit recta FC, residuum illius, quæ per centrum transit, omnium minima; maior igitur erit FA, ipsa FC; sed FA, per circuli definitionem, est æqualis ipsi FD; quare FD, maior erit ipsa FC, quod est absurdum, nam FD, est vna pars, & FC, totum. Non igitur GF, simul cum FC, facit vnam lineam rectam, at solum FA. Quapropter si duo circuli sese intus cõtingant, &c. Quod erat demonstrandum.



PROPOS. 12. THEOR. 11.

Si duo circuli ſeſe exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum iungitur, per contactum tranſibit.

DVo circuli DCF, ECG, tangant ſe exterius in C; & centrum circuli DCF, ſit A, circuli vero ECG, ſit B. Dico rectam extenſam per A, & B, tranſire per contactum C. Probatur. Si enim non tranſit ſecet circumferẽtias in D, & E, ducanturque ex centris A, & B, ad contactum duæ rectæ lineæ AC, BC. Quoniam igitur in triangulo ACB, duo latera CA, CB, [*per 20. pri.*] maiora ſunt latere AB: Eſt autem recta AC, rectæ AD, æqualis (ex eo quod A, ponatur centrum circuli DCF,) & recta BC, ob eandem rationem, æqualis rectæ BE; Quare duæ rectæ AD, BE, erunt maiores recta AB, aliquæ partes maiores toto, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe exterius contingant. &c. Quod erat demonſtrandum.



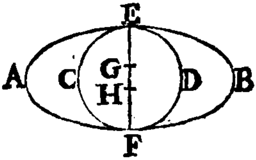
PROPOS. 13. THEOR. 12.

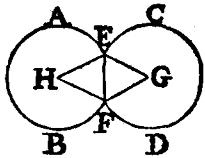
Circulus non tangit circulum in pluribus punctis, quam vno, ſiue intus, ſiue extra tangat.

TAngant ſeſe circuli AEBF, CEDF, intus, ſi fieri poteſt, in pluribus punctis quam vno E, & F. Aſſumantur autem centra horum circulorum G, H, quæ [*per 6. ter*] diuerſa erunt; per quæ recta GH, ſi

in

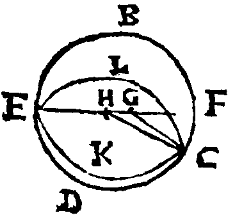
in vtramque partem extendatur, [*per* 11. *ter.*] necesse est cadere in contactus E, & F. Itaque cum G, sit





centrum, & recta EGHF, diameter, diuidetur EGHF, bifariam in G. Similiter diuidetur eadem EF, bifariam in H, quod est absurdum. Vna enim recta in vno dumtaxat puncto bifariam diuiditur.

Quod si quis dicat, rectam GH, extensam ad partes quidem H, cadere in contactum E; at vero ad partes G, minime pertinere ad contactum C, sed secare



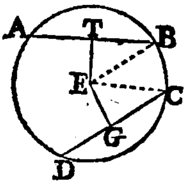
vtrumq; circulum (vt in secunda figura.) Respondeo, & dico hoc recte affirmari non posse, cum demonstratio antecedentis Propos. sit vniuersalis, & vtriq; contactui conueniat; vnde GH, protracta debet cadere in vtrumque contactum, non autem secare ambos circulos.

Rursus tangant se circuli AEFB, CEFD, exterius in pluribus punctis quam in vno, nempe in tota circumferentia intercepta inter E, & F. Iuxta primam Propos. huius libri inueniantur centra H, G, quibus ad puncta E, & F, ducantur rectæ HE, HF, GE, GF. Iam linea HEG coniungens centra H, G, & transiens per contactum E, [*per* 12. *ter.*] recta erit; qua pariter ratione etiam HFG, recta erit, quod est impossibile, quia duæ rectæ spatium clauderent. Quare si duo circuli sese exterius contingant in vno puncto se tantummodo tangunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 14. THEOR. 13.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

Sint in circulo ABCD, cuius centrum E, duæ rectæ AB, CD, æquales. Dico ipsas à centro E, æqualiter distare. Probatur. Ducantur ex E, centro ad rectas AB, CD, duæ perpendiculares EG, ET, & coniungantur rectæ EB, EC. [*per* 2. *ter.*] Secabunt rectæ ET, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponantur, erunt, & earum dimidia, videlicet BT, CG, inter se æqualia. Quoniam igitur quadrata EB, & EC, ob laterum æqualitatem, sunt inter se æqualia: quadratum autem EB, [*per* 47. *pri.*] est æquale duobus quadratis BT, TE; erunt & duo quadrata BT, TE, æqualia quadrato EC; sed eidem quadrato EC, [*per* 47. *pri.*] æqualia sunt duo quadrata CG, GE: quare iuxta primum pronunciatum duo quadrata BT, TE, erunt æqualia duobus quadratis CG, GE. Ablatis igitur æqualibus quadratis rectarum æqualium BT, CG, remanebunt quadrata rectarum ET, EG, æqualia, ideoque, & rectæ ET, & EG, æquales erunt. Distant igitur iuxta 4. defin. huius libri rectæ AB, CD, æqualiter à centro E.



Denuo distent rectæ AB, CD, æqualiter à centro E. Dico eas inter se æquales esse. Prob. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares ET, EG, quæ per 4. def. huius lib. æquales erunt; diuidentque rectas AB, CD, [*per* 2. *ter.*] bifariam. Du-

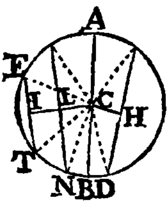
ctis

ctis igitur rectis EB,EC,erunt earum quadrata æqualia. Est autem quadratum rectæ EB, [per 47. pri.] æquale quadratis rectarum BT,TE,& quadratum rectæ EC,æquale quadratis rectarum CG,GE. Igitur & quadrata rectarũ BT,TE, æqualia sunt quadratis rectarum CG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum ET, EG, remanebunt quadrata rectarum BT, CG, æqualia ; atque adeo rectæ BT, CG; ac propterea earum duplæ AB, DC, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro,&c. Quod erat demõstrandum.

PROPOS. 15. THEOR. 14.

In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior est.

IN circulo AETNBD, cuius centrum C, diameter sit AB, & recta ei propinquior DF, remotior autem TE. Dico omnium maximam esse AB, & DF, maiorem quam TE. Prob. Ducantur enim ex C, centro rectæ CH, CI, perpendiculares ad DH,TE. Et quia à centro C, remotior est TE, quam DF, erit CI, maior quam CH, per 4. def. huius lib. Abscindatur ex CI, recta CL, æqualis rectæ CH, atque per L, ducatur NG, perpendicularis ad

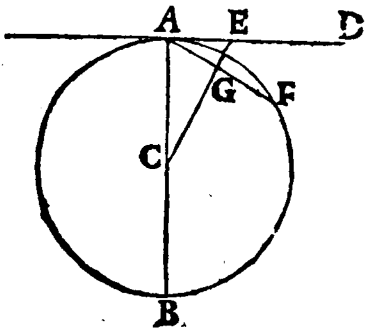


CI, connectanturque rectè CE,CT,CN,CG. Quoniam igitur perpendiculares rectæ CH, CL, æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ NG,DF, à centro,per 4. defin. huius lib. & ideo [per 14. ter.] inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ CG, CN, [per 20. pri.] maiores quidem sunt recta NG, & sunt æquales diametro

metro AB, erit diameter AB, maior quam NG. Eademque ratione erit AB, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera CG, CN, trianguli GCN, æqualia sunt lateribus CE, CT, trianguli ECT: & angulus NCG, maior angulo TCE, [*per* 24. *pri.*] erit recta NG, maior recta TE. Atque adeo DF, quæ ostensa fuit æqualis ipsi NG, maior quoque erit quam TE. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 16. THEOR. 15.

Recta linea, quæ ab extremitate diametri cuiuscumque circuli perpendicularis ducitur, extra circulum cadet: & inter ipsam rectam lineam, & circuli peripheriam altera recta linea non cadet: & semicirculi angulus quocumque angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.



SIt datus circulus AFB, cuius diameter AB, & centrum C. Ab extremitate diametri, hoc est à puncto A [*per* 11. *pri.*] ducatur perpendicularis AD. Dico huiusmodi perpendicularum extra circulum cadere.

Demost.

Demonst. Accipiatur aliquod punctum in ipsa linea AD, sitque punctum E, à quo ad centrum C, recta ducatur EC. Cum enim in triangulo EAC angulus EAC sit rectus [*per 10. def.*] erit angulus AEC [*per 17. primi*] minor recto; quare [*per 19. pri.*] latus CE subtendens angulum rectum erit maius latere CA angulum acutum subtendente; sed linea CA habet suum extremum A in circumferētia circuli AFB: ergo punctum E extremum lineæ CE erit extra circulum: quod pari ratione de quocunque alio puncto lineæ AD demonstrari poterit: ergo tota linea AD extra circulum cadet.

Dico rursus inter perpendicularem AD, & circuli peripheriam AF ad punctum A, non posse duci aliam rectam lineam non secantem portionem circuli AFB.

Demonst. Si potest duci ducatur, & sit AF. Quia angulus CAF est acutus, vtpote pars recti CAD, si à puncto C, ad AF demittatur perpendicularis, hæc [*per Coroll. 2. Prop. 17. pri.*] cadet ad partes anguli acuti CAF, in punctum G. Cum ergo in triangulo CGA angulus, CGA sit rectus ob perpendicularem CG, & angulus CAG acutus: [*per 19. pri.*] erit latus CA maius latere CG; quare si maius latus CA extremum A obtinet in circumferentia circuli, minus latus CG habebit extremum G, intra circulum; sed punctum G est in linea AF: ergo linea AF circulum secabit.

Dico tertio angulum semicirculi BAF, factum scilicet à diametro BA, & à circumferentia AF, maiorem esse quocumque angulo acuto rectilineo.

Demonst. Quia ex demonstratis inter rectam AD, & circumferentiam AF alia recta ad contactum A, duci nequit quin circulum secet; inde sequitur angulum acutum à dicta linea AF, & diametro AB factum partem esse anguli semicirculi BAF; & ideò angulus

gulus semicirculi erit semper maior quolibet angulo acuto rectilineo.

Demum dico angulum contactus (ita enim appellatur angulus FAD mixtus, factus à tangente AD, & à circumferentia AF) minorem esse quolibet angulo acuto rectilineo.

Demonst. Inter rectam AD, & circumferentiam AF, ex visis in secunda parte huius propos. alia recta duci nequit ad punctum A, & si ducatur debet circulum secare: ergo angulus acutus à tali linea, ac tangente factus, videlicet angulus FAD erit totum respectiuè ad angulum contingentiæ FAD: vnde [*per 19. pron.*] angulus contactus FAD minor erit quocumq; angulo acuto rectilineo: quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipsum circulum tangere. Ostensum enim est ipsam cadere extra circulum. Quare solum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

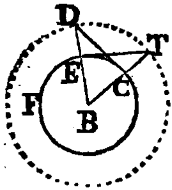
Quapropter si iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB, rectam lineam ducere, quę circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam excitabimus perpendicularem FAD, quæ circulum tanget in A, vt demõstratum est.

PROPOS. 17. PROBL. 2.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum tangat.

EX puncto D, ducenda sit linea, quæ tangat circulum FEC, cuius circuli centrum sit B. Ducatur

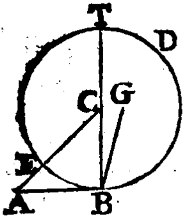
tur recta DB, secans circumferentiam FC, in E, puncto. Deinde centro B, interuallo BD, describatur circulus DT, & ex E, educatur ET, perpendicularis ad DB, secans circulum DT, in T, puncto. Ducta denique recta BT, secans circulum FEC, in C, connectatur recta DC: quam dico tangere circulum FEC, in puncto C. Prob. Cum enim duo latera BE, BT, trianguli EBT, æqualia sint duobus lateribus BC, BD, trianguli CBD, vtrumque vtrique, vt patet per circuli defin. Angulusque B, dictis lateribus comprehensus sit communis: [*per 4. pri.*] Erunt & bases ET, CD, nec non etiam anguli BET, BCD, super ipsas, æquales. Est autem BET, rectus per constructionem; quare & BCD, rectus erit. Itaque DC, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri CB, tanget circulum per corollarium præcedentis propos. A dato ergo puncto D, ducta est DC, recta tangens circulum FEC, in C, quod faciendum erat.



PROPOS. 18. THEOR. 16.

Si recta quæpiam linea circulum tangat, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea; quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

Recta linea A B, tangat in puncto B, circulum EBDT, cuius centrum C, & ex C, ad B, recta ducatur CB. Dico CB, perpendicularem esse ad AB. Prob. Si enim non est ducatur CA, perpendicularis ad AB, secans circumferentiam in E. Quoniam igitur in triangulo CAB, [*per* 17. *primi.*] duo anguli CAB, ABC, sunt minores duobus rectis: est autem per constructionem CAB rectus: igitur CBA, erit minor recto. Quare [*per* 19. *pri.*] maior erit recta CB, quam CA: sed recta CB, æqualis est ipsi CE; ergo CE, erit maior ipsa CA, pars quam totum, quod est absurdum. Est igitur CB, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.



PROPOS. 19. THEOR. 17.

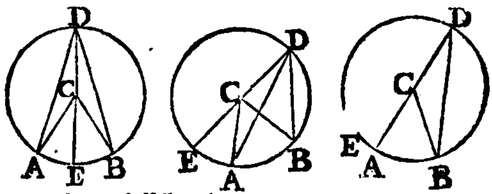
Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta quæpiam linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TAngat recta AB, circulum ABDT (vt in antecedenti figura) in puncto B; & ex B, ducatur BT, perpendicularis ad AB. Dico in BT, esse centrum circuli. Probatur. Si enim in ipsa BT, non est centrum circuli, erit extra, nempe in G, à quo ad contactum B, ducatur recta GB, quæ [*per* 18. *ter.*] perpendicularis erit ad AB. Quare angulus GBA, erit rectus; sed etiam angulus CBA, per constructionem est rectus: igitur duo anguli GBA, & CBA, inter se æquales erunt pars, & totum: quod est absurdum. Non igitur extra BT, centrum circuli existet. Quare si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 20. THEOR. 18.

In circulo angulus ad centrum duplex est anguli ad periferiam, cum fuerit eadem periferia basis angulorum.

IN circulo ADBE, cuius centrum C, super basim AB, constituatur angulus ACB, ad centrum: & super eandem basim angulus ADB, ad periferiam,



Dico angulum ACB, ad centrum duplum esse anguli ADB, ad periferiam. Probatur. Includant enim primum duæ DA, DB, duas CA, CB, & per centrum C, recta extendatur DE. Quoniam igitur duæ rectæ DA, DB, sunt inter se æquales, [*per* 5. *pri.*] erunt anguli CDA, CAD, inter se æquales: Est autem externus angulus ACE, [*per* 32. *pri.*] æqualis duobus internis, & oppositis CDA, CAD: Quare ACE, duplus erit alterius eorum, vt anguli CDA. Eodem modo duplus ostendetur angulus BCE, anguli CDB. Quapropter totus angulus ACB, duplus erit totius anguli ADB. Quando enim duæ magnitudines duarum sunt duplæ, singulæ singularum, est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum.

Deinde non includant rectæ AD, BD, rectas CA, CB, sed DA, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus ACB, [*per* 32. *pri.*] æqualis est

duo-

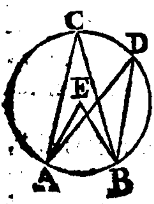
duobus internis CBD, CDB: hi autem duo ob æqualitatem laterum CB, CD, [per 5. pri.] sunt inter se æquales, erit angulus ACB, alterius eorum duplus nempe anguli ADB; quod fuit propositum.

Demum recta DA, secet rectam CB, & per centrum C, extendatur recta DE. Quoniam igitur angulus ECB, ad centrum, & angulus EDB, ad periferiam, habent eandem basim EB, & recta DE, per centrum extenditur; erit angulus ECB, duplus anguli EDB, vt in secunda parte huius Propos. ostensum est. Simili modo erit angulus ECA, duplus anguli EDA, habent enim hi anguli eandem basim EA. Reliquus igitur angulus ACB, duplus erit reliqui anguli ADB. [per 20. pron.] Quando enim totum totius est duplum, & ablatum ablati, est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 21. THEOR. 19.

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, sunt inter se æquales.

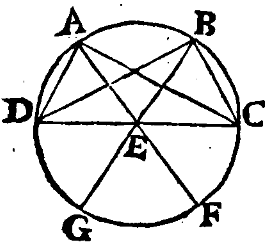
IN circulo ABDC, cuius centrum E, existant anguli C, & D, in segmento ACDB. Dico eos esse æquales. Probatur. In primis sit segmentum ACDB, semicirculo maius; & ducantur rectæ AE, BE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus AEB, ad centrum, [per 20. ter.] duplus est tam anguli ACB, quam ADB, ad periferiam; cum omnes habeant eandem basim AB; erunt anguli C, D, dimidiatæ partes anguli E. [per 7. pron.] Quare inter se æquales erunt. Eademque ratione omnes alij anguli existentes in

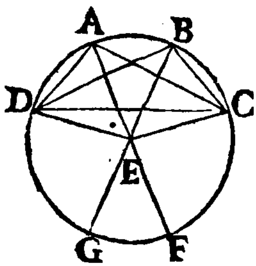


seg-

segmento ACDB, ostendentur esse æquales.

Sit deinde segmentum DABC, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur per centrum F, rectæ AF, BG, & in segmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, [*per* 20. *ter.*] duplus est anguli DAF, ad periferiam: Similiter angulus CEF, anguli CAF; ac proinde duo anguli simul DEF, CEG, duorum angulorũ simul DAF, CAF, dupli erunt, hoc est, totius anguli DAC: Sunt autem anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: erunt quoque tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli DBC. Quare [*per* 7. *pron.*] æquales erunt anguli DAC, DBC. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, &c. Quod erat ostendendum.



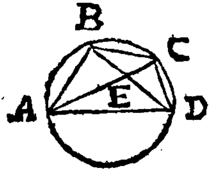


PROPOS. 22. THEOR. 20.

Quadrilaterorum in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppositos

sitos ABC, ADC; item BAD, BCD, æquales esse duobus rectis. Probatur. Ductis enim diametris duabus AC, BD, [*per 21. ter.*] erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmento ABCD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est totius angulus ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD, nam duo anguli

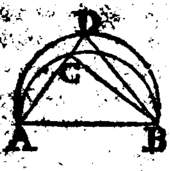


CBD, CAD, cum sint in eodem segmento [*per 21. huius*] sunt inter se æquales. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis DCA, CAD, & ADC. Sed isti tres [*per 32. pri.*] æquales sunt duobus rectis. Igitur, & duo ABC, ADC, duobus rectis æquales erunt. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, BAD, esse duobus rectis æquales. Nam rursus duo anguli ABD, ACD, [*per 21. ter.*] sunt æquales; Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. [*per 32. pri.*] Sed hi tres sunt æquales duobus rectis; Igitur, & duo BCD, BAD, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 23. THEOR. 21.

Super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia, & inæqualia non constituentur ad easdem partes.

SI enim fieri potest super recta AB, constituantur ad easdem partes duo segmenta similia, & inæqualia ACB, ADB. Perspicuum est autem, quod se solum [illegible]intersecant in punctis A, & B; [per 10. ter.] Circulus enim circulum non secat in pluribus quam duobus punctis. Vnde peripheria vnius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, secans circumferentias in C, & D, connectanturque rectæ CB, DB. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit

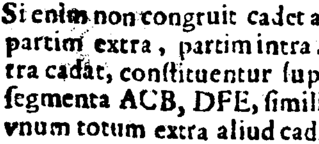


per 10. *Defin. huius lib.* angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno, quod est absurdum. [*per* 16. *pri.*] Non igitur segmenta sunt similia. Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat ostendendum.

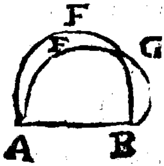
PROPOS. 24. THEOR. 22.

Super æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta, sunt inter se æqualia.

SVper rectis lineis æqualibus AB, DE, constituta sint segmenta similia ACB, DFE. Dico ea inter se esse æqualia. Prob. Lineę enim AB, DE, cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur, & segmentum ACB, segmento DFE, congruere.



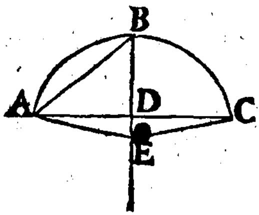
Si enim non congruit cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra, aut intra cadat, constituentur super eadem recta DE, duo segmenta ACB, DFE, similia, & inæqualia, quorum vnum totum extra aliud cadit. Quod est absurdum. [*per* 23. *ter.*] Demonstratum enim est contrarium. Si vero segmentum vnum cadat partim intra, partim extra, perspicuum est huiusmodi circulorum segmenta ſeſe ſecare in pluribus punctis, quam duobus, nempe in punctis D, E, & G. Quod eſt abſurdum, [*per* 10. *ter.*] Circuli enim non ſe ſecant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur ſegmentum ACB, ſegmento DFE; atque adeo ipſa inter ſe æqualia erunt. Quo circa ſuper æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.



PROPOS. 25. PROBL. 3.

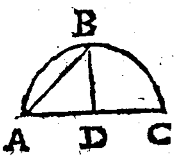
Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

Sit ſegmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam ſecetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur ABD, vel maior eſt angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primum maior (quod ſane continget quando ſegmentum ABC, ſemicirculo minus erit. Tunc enim quia BD, tranſit per centrum ex Corollario propoſ. 1. huius lib. quod centrum eſt extra ſegmentum, cum ſegmentum ponatur ſemicirculo minus; erit DA, maior quam DB, cum BD, perficiens diametrum ſit [*per* 7. *ter.*] omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. Quare angulus DBA, [*per.* 18. *pri.*] maior erit angulo DAB) fiatque angulus BAE, [*per* 23. *pri.*] æqualis angulo DBA, ſecetq; recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, eſſe cen-

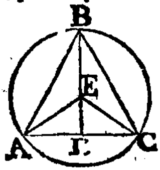


centrum circuli, cuius segmentum est ABC. Probat. Ducta enim recta EC, erunt duo latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia duobus lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli dictis lateribus contenti æquales, nempe recti. Quare bases AE, EC, [*per* 4. *pri.*] æquales erunt. Est autem [*per* 6. *pri.*] & EA, æqualis ipsi EB, quod anguli EBA, EAB, sint æquales per constructionem. Igitur tres lineæ EA, EC, EB, æquales erunt: Ac propterea [*per* 9. *ter.*] E, centrum erit circuli ABC, cum ex E, plures quam duæ rectæ lineæ æquales cadant in circumferentiam.

Sit deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis: (quod continget quando segmentum ABC, semicirculus fuerit.) Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum atque adeo DA, DB, æquales: [*per sexta primi.*] Erat autem, & DC, æqualis ipsi DA, nam recta AC, secta fuit bifariam. Quapropter cum tres rectæ DA, DB, DC, cadant ex D, in circumferentiam; erit [*per* 9. *huius lib.*] D. centrum circuli ABC.



Sit tertio angulus DBA, angulo DAB, minor: (quod quidem eueniet, si segmentum ABC, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam BD, transit per centrum ex Corol. propos. 1. huius lib. quod quidem intra segmentum, cum maius esse ponatur, existit; eritq; [*per* 7. *ter.*] DB, omnium, quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quam DA; ideoque angulus DAB, [*per* 18. *pri.*] maior erit angulo DBA.) Fiatque angulus BAE, [*per* 23. *pri.*] æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, in E,

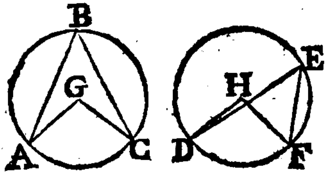


in E, puncto; quod ostendetur esse centrum eo modo, quo id ipsum ostendimus, quando angulus DBA, maior erat angulo DAB, dummodo ducatur recta EC. Circuli igitur segmento dato descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod erat faciendum.

PROPOS. 26. THEOR. 23.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus periferijs insistunt, siue ad centra, siue ad periferias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, constituti sint primum ad centra anguli æquales AGC, DHF. Dico periferias AC, DF, quibus insistunt, esse æquales. Prob. Sumantur enim in periferijs ABC, DEF, duo puncta B, & E, ad quæ rectæ ducantur AB, CD, DE, FE. Quoniam igitur anguli B, & E, [*per* 20. *ter.*] dimidij sunt æqualium angulorum G, & H; erunt, & ipsi æquales inter se. Quare ex defin. segmenta ABC, DEF, similia erunt. Et quia latera AG, GC, æqualia sunt lateribus, DH, HF, propter circulorum æqualitatem, & anguli, quos continent G, & H, æquales, ex hypothesi, si concipiantur bases ductæ à puncto A, ad C, & à puncto D, ad F, erunt inter se [*per* 4. *pri.*] æquales. Cum igitur segmenta similia ABC, DEF, sint super lineas æquales, seu bases æquales AC, DF, [*per* 24. *ter.*] erunt ipsa inter se æqualia. Quare si à circulis æqualibus huiusmodi segmenta æqualia demantur, remanebunt, & segmenta AC, DF, inter se æqualia; atque adeo



peri-

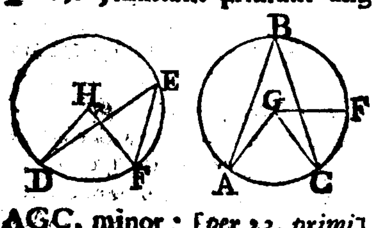
periferia AC, periferiæ DF, æqualis erit. Quod est propositum.

Sint deinde ad periferias constituti duo anguli æquales B, & E; Dico rursus periferias AC. DF, super quas insistunt, esse æquales. Erunt enim, vt prius, segmenta ABC, DEF, Similia. Cum igitur sint super æquales lineas AC, DF, (cum enim anguli G, H, æquales sint, sunt enim [*per* 20. *ter.*] dupli angulorum æqualiũ B, E; erunt vt prius rectę iũctę à puncto A, ad C, & à pũcto D, ad F, æquales; vnde [*per* 24. *ter.*] erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt, & segmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, &c. Quod fuit demonstrandum.

PROPOS. 27. THEOR. 24.

In æqualibus circulis, anguli; qui æqualibus periferijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad periferias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, insistant primum anguli ad centra AGC, DHF, æqualibus peripherijs AC, DF. Dico angulos AGC, DHF, æquales inter se esse. Probatur. Si enim non sunt æquales sit angulus



AGC, minor: [*per* 23. *primi*] fiat angulus AGI, æqualis angulo DHF. Erunt igitur [*per* 26. *ter.*] peripheriæ AI, DF, æquales. Cum vero periferia AC,

 æqua-

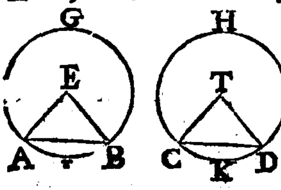
æqualis ponatur periferiæ DF; erunt periferiæ AI, AC, inter se æquales, pars, & totum, quod est absurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales.

Insistant deinde eisdem periferijs æqualibus, AC, DF, anguli B, & E, ad periferias, quos rursus dico esse æquales. Probat. Nam anguli B, & E, ad periferias, [*per* 20.*ter.*] sunt sub dupli angulorum G, H, ad centrum; sed anguli G, H, ad centrum demonstrati sunt æquales; igitur & anguli B, & E, æquales erunt. In æqualibus igitur circulis anguli, qui æqualibus periferijs insistunt, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 28. THEOR. 25.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ æquales periferias auferunt, maiorem quidem maiori; minorem autem minori.

IN circulis æqualibus AGB, CHD, quorum centra E, & T, sint rectæ æquales AB, CD. Dico maiorem periferiam AGB, æqualem esse maiori periferiæ CHD, & minorem AIB, minori CKD. Probatur. Ductis enim rectis EA, EB, TC, TD; erunt latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia



lateribus CT, TD, trianguli CTD; ponuntur autem, & bases AB, CD, æquales. Igitur [*per* 8. *pri.*] anguli E, & T, æquales erunt; ac propterea periferiæ AIB, CKD, quibus insistunt, [*per* 26. *ter.*] æquales erunt: quæ ablatæ ex totis æqualibus relinquent etiam æquales AGB, CHD. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOS. 29. THEOR. 26.

In æqualibus circulis, æquales periferias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

IN circulis ęqualibus AGB, CHD, (*in præced. figura*) ponantur ęquales periferiæ AGB, CHD; item AIB, CKD. Dico rectas AB, CD, quæ eas subtendunt, esse æquales. Prob. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera AE, EB, triang. AEB, æqualia lateribus CT, TD, triãguli CTD; sunt autem & anguli E, T, [*per* 27. *ter.*] æquales, quod æqualibus periferijs AIB, CKD, insistant. Igitur & bases AB, CD, [*per* 4. *pri.*] æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales periferias, &c. Quod erat ostendendum.

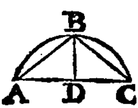
SCHOLIVM.

Proximæ antecedentes quatuor Propos. etiam in eodem circulo sunt intelligendæ, quemadmodum constat ex adductis demonstrationibus, quæ etiam locum habent in vno, eodemque circulo.

PROPOS. 30. PROBL. 4.

Datam periferiam bifariam secare.

SIt periferia ABC, bifariam secanda. Ducatur recta subtendens AC, qua bifariam in D, diuisa, erigatur perpendicularis DB, quæ periferiam ABC, bifariam secabit in B, punpuncto. Probatur. Ductis enim rectis AB, CD, erunt latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia lateribus CD, DB, trianguli

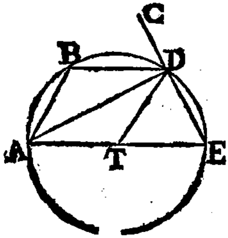


CDB: ſunt autem, & anguli deinceps ad D, æquales, nempe recti: Igitur [*per 4. pri.*] & baſes AB, CD, æquales erunt; Ac propterea periferiæ AB, CB, [*per 28. ter.*] erunt æquales. Datam ergo periferiam ſecuimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOS. 31. THEOR. 27.

In circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt; qui autem in maiore ſegmento, minor recto; qui vero in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt; minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto.

CIrculi enim ABDE, cuius centrum T, diameter ſit AE, conſtituaturque in ſemicirculo angulus ADE, exiſtetque angulus AED, in maiori ſegmento AED. Conſtituatur quoque in minori ſegmento ABD, angulus ABD. Dico angulum ADE, in ſemicirculo rectum eſſe; angulum vero AED, in maiore ſegmento, minorem recto: & angulum ABD, in minore ſegmento, eſſe maiorem recto.



Item angulum maioris ſegmenti, comprehenſum recta AD, & periferia AED, eſſe recto maiorem. Et angulum minoris ſegmenti, comprehenſum recta AD, & periferia ABD, eſſe recto minorem. Probatur. Ducatur enim recta DT, ad centrum, & extendatur recta ED, in C. Quoniam igitur rectæ TE, TD, æquales ſunt erit [*per 5. pri.*] angulus TED, angulo TDE, æqua-

æqualis. Eadem ratione erit angulus TDA, æqualis angulo TAD; ideoque totus angulus ADE, duobus angulis TAD, TED, æqualis erit. Eſt autem, [*per* 32.*pri.*] & angulus ADC, externus eiſdem duobus internis angulis DEA, DAE, in triangulo DEA, æqualis. Quare æquales erunt inter ſe anguli ADE, ADC: ac propterea vterque rectus. Rectus igitur eſt angulus ADE, quod eſt propoſitum.

Quoniam vero in triangulo ADE, duo anguli DEA, EDA, [*per* 17.*pri.*] ſunt duobus rectis minores; & angulus EDA, oſtenſus eſt rectus; erit angulus DEA, in maiore ſegmento, recto minor: quod eſt ſecundum.

Rurſus, quia in quadrilatero ABDE, intra circulum deſcripto, duo anguli oppoſiti ABD, DEA, ſunt duobus rectis æquales; & angulus DEA, oſtenſus eſt recto minor: Erit ABD, angulus in ſegmento minori, recto maior, quod eſt tertium.

Amplius cum angulus rectus ADE, pars ſit anguli ſegmenti maioris AED, qui ſane comprehenditur recta AD, & periferia DEA; erit angulus ſegmenti maioris, recto maior, quod eſt quartum.

Demum, cum angulus ſegmenti minoris, nimirum comprehenſus recta AD, & periferia DBA, ſit quoque pars anguli recti ADC. Erit angulus ſegmenti minoris recto minor: quod eſt quintum. In circulo igitur angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

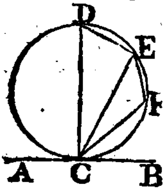
Ex hac Propoſ. fit manifeſtum, quod angulus trianguli reliquis duobus exiſtens æqualis, rectus eſt, eo quod producto latere externus, qui fit, illi contiguus eiſdem ſit æqualis, ac proinde illi duo ſint inter ſe æquales, proptereaque recti.

PRO-

PROPOS. 32. THEOR. 28.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam alia recta linea circulum secans; anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis, circuli segmentis consistunt, angulis.

Tangat recta AB, circulum DEFC, in puncto C, à quo ducatur recta aliqua, nempe CE, secans, seu diuidens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli CFE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem esse angulo CFE, in alterno segmento; & angulum BCE, æqualem esse angulo CDE, pariter in alterno segmento. Probat. Transeat enim primum linea secans circulum per centrum, & sit CD. Erit igitur [*per* 31. *ter.*] vterque angulus in semicirculo rectus, vt est angulus CED; sed etiam anguli duo ACD, BCD, qui fiunt à tangente AB, & à linea CD, per centrum transeunte, [*per* 18. *ter.*] sunt recti. Igitur anguli à tangente AB, & secante CD, facti sunt æquales angulis, qui in alternis segmentis constituuntur.



Vlterius non transeat recta secans circulum per centrum, & sit verbi gratia CE, connectāturque rectæ EF, FC. Cum enim [*per* 18. *ter.*] CD, perpendicularis sit ad AB, erit angulus BCD, rectus; nec non etiam angulus CED. in semicirculo [*per* 31. *ter.*] rectus erit; vnde æquales erunt anguli BCD, CED; sed angulus CED, in triangulo CED, rectus est; quare

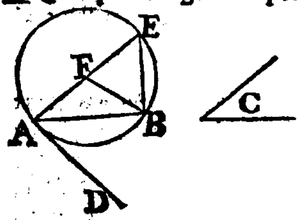
re-

reliqui duo anguli EDC, DCE, vni recto æquales erunt, & per consequens æquales angulo recto BCD. Dempto ergo communi angulo DCE, remanebit angulus ECB, æqualis angulo EDC, in alterno segmento constituto. Quoniam vero in quadrilatero CFED, duo anguli oppositi CFE, EDC, [*per 22. ter.*] sunt æquales duobus rectis: sunt autem, [*per. 13. pri.*] & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis æquales, si auferantur æquales anguli BCE, EDC, remanebunt anguli ACE, CFE, inter se æquales. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 33. PROBL. 5.

Super data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Recta data sit AB, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur super AB, segmentum describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo dato C.



In primis si angulus datus C, fuerit rectus data recta AB, diuidatur bifariam, ipsaque existente diametro super ipsam semicirculus describatur, factumque erit quod proponitur; nam angulus in illo semicirculo, [*per 31. ter.*] cum semper sit rectus, æqualis erit dato recto.

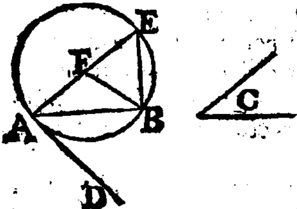
Deinde si angulus datus fuerit obtusus, vel acutus, vt in præsenti figura, ad punctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, per-

perpendicularis AE, quæ certè cadet super AB; fiat deinde angulo FAB, æqualis angulus FBA, secetque BF, rectam AE, in F, puncto. Erunt igitur [*per 6. primi.*] rectæ FA, FB, æquales, quare si centro F, & interuallo FA, describatur circulus ABE. transibit per A, & B. Dico igitur angulum in segmento AEB, quod descriptum est super AB, esse æqualem angulo C. Probatur. Fiat enim in dicto segmento angulus AEB. Quia igitur AE, transit per centrum F, & ei perpendicularis est DA, tanget recta DA, circulum in A, puncto per *Coroll. Propos. 16. huius lib.* Quapropter angulus DAB, hoc est angulus datus C, [*per 32. ter.*] æqualis erit angulo E, in alterno segmento AGB. Quoquo modo pariter procedendum erit, si angulus datus obtusus erit. Itaque super data recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

PROPOS: 34. PROBL. 6.

A dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DAtus circulus sit ABE, à quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo C. [*per 17. ter.*] Ducatur recta DA, tangens circulū in A, puncto. Fiat deinde angulus DAB, æqualis angulo dato C. Dico igitur angulum AEB, in segmento ablato AEB, æqualem esse dato angulo C. [*per 32. ter.*] Est enim angulus DAB, æqua-

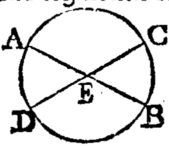


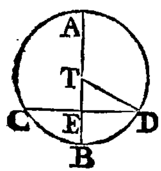
æqualis angulo E, in alterno ſegmento AEB. Cum ergo angulo dato C, factus ſit æqualis angulus DAB; erit quoque angulus C, angulo E, æqualis. A dato ergo circulo abſcidimus ſegmentum AEB, &c. Quod faciendum erat.

PROPOS. 35. THEOR. 29.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

IN circulo ACBD, ſecent ſe mutuo rectæ AB, CD, in E, puncto. Dico rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis AE, EB, æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis, CE, ED. Aut enim vtraque linea tranſit per centrũ, aut vna tantum, aut neutra. Tranſeat primum vtraque per centrum, vt in prima figura. Quoniam igitur omnia quatuor ſegmenta inter ſe æqualia ſunt, perſpicuum eſt, rectangulum comprehenſum ſub duobus vnius lineæ ſegmentis æquale eſſe ei, quod ſub duobus alterius lineæ ſegmentis comprehenditur, rectangulo.



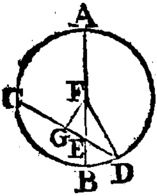


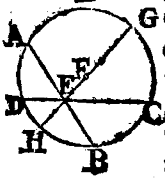
Deinde tranſeat AB, ſola per centrum T; diuidatque primum rectam CD, biſariam in E; [*per* 3. *ter.*] Ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta DT. Quoniam igitur AB, diuiſa eſt per æqualia in T, & per inæqualia in E, [*per* 5 *ſec.*] erit rectangulum ſub AE, & EB, vna cum quadrato

rectæ

rectæ TE, æquale quadrato rectæ TB, ideoque quadrato rectæ TD, cum rectæ TB, TD, sint æquales. Est autem quadratum rectæ TD, [*per 47. pri.*] æquale quadratis rectarum TE, ED; Igitur rectangulum sub AE, EB, vna cum quadrato intermediæ TE, æquale quoque erit quadratis rectarum TE, ED. Quare ablato communi quadrato rectæ TE, remanebit rectangulum sub AE, EB, æquale quadrato rectæ ED, hoc est, rectangulo sub CE, & ED; cum CE, ED, rectæ sint æquales, ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum.

Diuidat iam AB, transiens per centrum rectam CD, non bifariam; secetur ergo CD, bifariam in G, ducanturque rectæ FG, FD, eritque [*per 3. ter.*] FG, perpendicularis ad CD. Quoniam vero rectangulum sub AE, & EB, vna cum quadrato rectæ FE, [*per 5. sec.*] æquale est quadrato rectæ FB, hoc est quadrato rectæ FD: est autem quadratum rectæ FE, æquale [*per. 47. pri.*] quadratis rectarum FG, GE, & quadratum rectæ FD, æquale quadratis rectarum FG, GD; erit quoque rectangulum sub AE, EB, vna cum quadratis FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GD. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub AE, & EB, vna cum quadrato rectæ GE, æquale quadrato rectæ GD. Atqui etiam rectangulum sub CE, & ED, vna cum quadrato rectæ GE; [*per 5. sec.*] æquale est eidem quadrato rectæ GD: propterea, quod recta CD, secta sit bifariam in G, & non bifariam in E.





Igitur rectangulum sub AE, & EB, vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub CG, GD, vna cum quadrato eiusdem rectæ GE. Quare

re

re ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum ſub AE, EB, æquale rectangulo ſub CE, ED. Quod eſt propoſitum.

Tertiò, demum neutra per centtum tranſeat, ſiue vna illarum bifariam diuidatur, ſiue neutra. Ducatur per centrum, & punctum ſectionis E, recta GH; Quoniam itaque oſtenſum eſt, rectangulum ſub AE, EB, æquale eſſe rectangulo ſub GE, & EH, ſiue AB, diuidatur bifariam, ſiue non: Item rectangulum ſub DE, & EC, æquale quoque eſſe eidem rectangulo ſub GE, & EH, ſiue DC, ſecta ſit bifariam, ſiue non: erit rectangulum ſub AE, & EB, æquale rectangulo ſub DE, & EC, quod eſt propoſitum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, &c. Quod demonſtrandum erat.

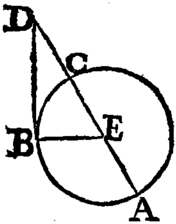
PROPOS. 36. THEOR. 30.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.

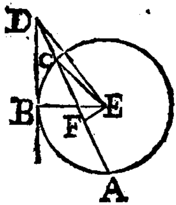
EXtra circulum ABC, ſumatur aliquod punctum, nempe, D, à quo linea ducatur DA, ſecans circulum in C, & [*per 17. ter.*] linea BD, tangens circutum in B. Dico rectangulum ſub DA, & DC, æquales eſſe quadrato rectæ DB. Prob. Tranſeat enim primum recta DA, per centrum E, iungaturque recta

EB,

EB, quæ [*per* 18. *ter*,] perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in E, & ei



addita in rectum, & continuum alia quædam CD, [*per* 6 *sec.*] erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EC, hoc est cum quadrato rectæ EB, æquale quadrato rectæ DE; Est autem quadratum rectæ DE [*per* 47. *pri.*] æquale quadratis rectarum DB, BE. Quare rectangulum sub AD, DC, vna cum quadrato EB, æquale erit duobus quadratis sub DB, BE. Ablato igitur cõmuni quadrato rectæ EB, remanebit rectangulum sub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB. Quod fuit propositum.



Denuo non transeat DA, secans per centrum E. Diuisa ergo AC, bifariam in F, ducantur rectæ EB, EC, ED, EF, eritque [*per* 18. *ter.*] EB, ad DB, perpendicularis; & [*per* 3. *ter.*] EF, ad AC. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD, [*per* 6. *sec.*] erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ CF; æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur communi quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF, FE: sed Quadratis rectarum CF, FE; [*per* 47. *pri.*] æquale est quadratum rectæ, EC, ideoque & quadratum rectæ EB: Et quadratis rectarum DF, FE, æquale [*per* 47. *pri.*] est quadratum rectæ ED. Quare rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadratum rectæ DE, [*per* 47. *pri.*] æquale sit quadratis rectarum DB, BE, erit, & rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB,

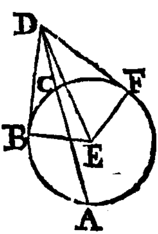
æqua-

æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum ſub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale: quod eſt propoſitum. Si igitur extra circulum ſummatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 37. THEOR. 31.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; Sit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & conuexam periferiam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato: incidens ipſa circulum tanget.

Extra circulum ABF, cuius centrum E, punctum ſumatur D, à quo ducatur recta DA, circulum ſecans in C, & recta DB, incidens in circulum ad punctum B; ſitque rectangulum ſub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB. Dico DB, circulum tangere in B. Ducatur enim [*per 17. ter.*] DF, tangens circulum, & iungantur rectæ EB, EF; & ſi DA, non tranſeat per centrum E, vt eſt in præſenti figura, iungatur quoque recta ED. Quoniam igitur rectangulo ſub DA, DC, [*per 36. ter.*] æquale eſt quadratum rectæ tangentis DF: & eidem rectangulo ſub DA, DC, æquale ponitur quadratum



rectæ DB; erunt quadrata rectarum DF,DB, inter se æqualia, ideoque & rectæ DF, DB, æquales inter se erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli D F E, æqualia sunt lateribus DB, BE, trianguli DBE, & basis DE, communis erunt [*per* 8. *pri.*] anguli DFE, DBE, æquales. Sed angulus DFE, [*per* 18. *ter.*] rectus est, quod DF, circulum tangat. Igitur & angulus DBE, rectus erit. Quapropter per Corollarium Propos. 16. huius libri DB, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

Tertij Libri Elementorum Finis.

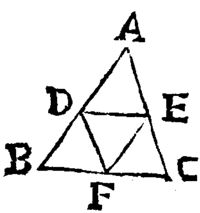
EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

I.

Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

IN hoc quarto libro Euclides agit de varijs inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo factis, & earumdem circa circulum descriptionibus. Nec



non etiam tractat de inscriptionibus circuli in figuris rectilineis, & de circuli descriptionibus circa easdem figuras rectilineas. Quapropter paucis definitionibus primo loco exponit quid sibi velit, figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi; incipiens à figuris rectilineis, nam si anguli D,E,F, interni trianguli DEF, tangant latera AB, BC, CA, trianguli ex-terni ABC, dicetur triangulum DEF, in triangulo ABC, esse inscriptum.

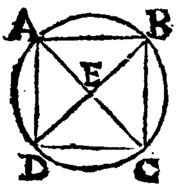
II.

Similiter etiam figura circum figuram describi dicitur, cum singula eius, quæ circumscribitur, latera, singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E Conuerso triangulum ABC, dicetur describi circa triangulum DEF, quonam singula latera illius tangunt singulos angulos istius.

III.

Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quę inscribitur, anguli tetigerint circuli periferiam.



VT si anguli A,B,C, trianguli ABC, tangant periferiam circuli A B C D, dicetur triangulum in circulo esse inscriptum.

IV.

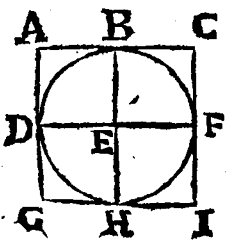
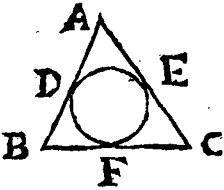


Figura vero rectilinea circa circulum describi dicitur, cũ singula latera eius, quæ circumscribitur, circuli periferiam tangunt.

VT verbi gratia, si latera triãguli ABC, tangant circulũ DEF,

V.

V.



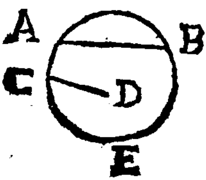
Similiter circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli periferia singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

Circulus autem circum figuram describi dicitur, cum circuli periferia singulos tangit eius figuræ, quam circumscribit angulos.

VII.

Recta linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli periferia fuerint.



QVoniam enim recta linea AB, suis extremitatibus A, & B, tangit periferiam ABC; hinc est, quod linea recta AB, circulo accomodata, seu coaptata, dicitur non vero CD.

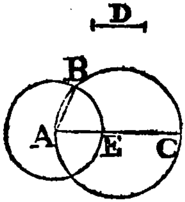
In Quarto Elemento.

EVclides in hoc quarto libro verba facit de figurarum planarum inscriptionibus, & circumscriptionibus.

PROPOS. 1. PROBL. 1.

In dato circulo rectam lineam accõmodare, æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

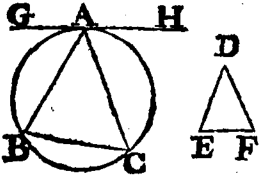
IN circulo ABC, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non sit diametro dati circuli ABC. Cum enim diameter circuli [*per 15. ter.*] sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret non posset in circulo aptari vna illi æqualis. Ducatur ergo diameter AC. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro aptata erit AEC, illi æqualis; si vero D, minor fuerit diametro, [*per 3. pri.*] abscindatur AE, æqualis ipsi D, & centro A, interuallo AE, describatur circulus BE, secans circulum ABC, in B, puncto. Ducta igitur recta à puncto A, ad punctum B, erit ea aptata in circulo ABC, æqualis datæ rectæ D. Prob. Est enim AB, [*per 15. def. pri*] æqualis ipsi AE; sed D, etiam ipsa per constructionem æqualis est ipsi AE; quare AB, & D, inter se quoque æquales erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.



PROPOS. 2. PROBL. 2.

In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

IN circulo ABC, sit describendum triangulum æquiangulum triangulo dato DEF; ducatur recta GH, GH, tangens circulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqualis,& angulus HAC, angulo E,pariter æqualis fiat, extendanturq; rectę AB,AC,ad circumferentiam vsque in puncta B, & C, coniungaturque recta BC. Non cadet autem recta AC, in rectam AB, vel inter rectas AB, AG, ex eo quod anguli GAB, HAC, hoc est anguli F,E,[*per 17 pri.*] minores sint duobus rectis; essent autem duobus rectis æquales [*per 13. pri.*] si AC, in AB, caderet, vel maiores duobus rectis,si inter AB, & AG, caderet. Dico triangulum ABC,circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Probat. Est enim angulus C, [*per 32.ter.*] æqualis angulo GAB; & eidem angulo GAB, per constructionem æqualis est angulus F; quare anguli C,& F, inter se æquales erunt. Similiter quia angulus B, [*per 32. ter.*] æqualis est angulo HAC; & eidem angulo HAC, per constructionem angulus E, est æqualis: Quare erunt etiã anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, C, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis E, & F, in triangulo DEF; [*per 32.pri.*] erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus,&c. Quod faciendum erat.

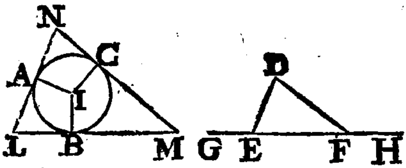


PROPOS. 3. PROBL. 3.

Circa datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

CIrca datum circulum ABC, describendum sit triangulum æquiangulum dato triangulo DEF.

Producto latere EF, vtrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli, nempe I, ducatur recta vtcumque AI, & postea fiat angulus AIB, æqualis angulo DEG, & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex punctis A, B, & C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares NI, LM, MN, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, [*per Coroll. Prop.* 16. *lib.* 3.] coibuntque in punctis N, L, M. Si enim duceretur recta AC, fierent duo anguli NAC, NCA, duobus rectis minores, ac proinde AN, CN, coibunt, &c. Nam recta hæc AC, caderet supra rectas AI, IC, quia hæ angulum constituunt in I. Cum enim spatium circa I, æquale sit quatuor rectis [*ex Cor.* 2. *Prop.* 15. *lib.* 1.] hoc est quatuor angulis factis à duabus rectis DE, DF, supra rectam GH, cadentibus, sintque duo anguli AIB, BIC, duobus angulis DEG, DFH, æquales, erit reliquum spatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æqualis; sed hi, [*per* 17. *pri.*] minores sunt duobus rectis; igitur & spatium AIC, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit AIC; alias spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum AI, CI, vnam rectam lineam constituerent; vel maius duobus rectis, si recta linea AI, producta caderet supra IC; cadit igitur necessario AI, producta infra CI, ac propterea angulus fiet AIC, ad partes N; & ducta recta AC, faciet cum AN, CN, duos angulos minores duobus rectis; ideoque rectæ AN, CN, coibunt in puncto N. Quod totum dicendum erit de reliquis, quod scilicet coeant in punctis M, & L. Quo stante descriptum est triangulum NLM, circa circulum ABC: quod dico esse æquiangulum dato triangulo



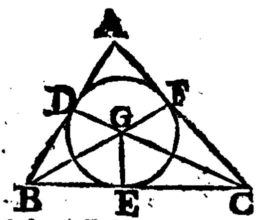
gulo

gulo DEF. Probatur. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero AIBL, æquales sunt quatuor rectis, vt ad Prop. 32. lib. 1. à Clauio demonstr. & anguli LAI, LBI sunt duo recti propter perpendiculares IA, IB; erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur & anguli DEG, DEF, [*per* 13. *pri.*] sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse angulo DFE; Reliquus igitur angulus N, [*per* 32. *pri.*] reliquo angulo D, æqualis erit: atque id circo triangulum LMN, æquiangulum triangulo dato DEF. Circa datum ergo circulum, &c. Quod erat efficiendum.

PROPOS. 4. PROBL. 4.

In dato triangulo circulum inscribere.

SIt describendus circulus in dato triangulo ABC. Diuisis duobus angulis ABC, ACB, bifariam [*per* 9. *primi*] rectis BF, CD, quæ intra triangulum coibunt in G, ducanturq; ex G, ad tria latera trianguli perpendiculares GD, GE, GF.



Quoniam igitur duo anguli GBD, GDB, in triangulo GBD, æquales sunt duobus angulis GBE, GEB, in triangulo GEB, vterque vtrique, & latus BG, commune; [*per* 26. *pri.*] erunt quoque latera GD, GE, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera GE, GF, in triangulis GEC, GFC. Cum igitur tres rectæ GD, GE, GF, sint æquales circulus ex G, ad interuallum GE, descriptus transibit

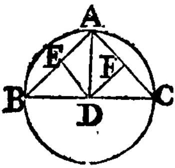
per

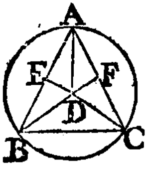
per reliqua puncta F, & D, [*per Coroll. Propos. 16. lib. 3.*] ex eo quod latera perpendicularia sint ad semidiametros GD, GE, GF. In dato ergo triangulo circulum descripsimus, &c. Quod erat efficiendum.

PROPOS. 5. PROBL. 5.

Circa datum triangulum circulum describere.

SIt circulus describendus circa datum triangulum ABC. Diuidantur in primis duo latera AB, AC,





(quæ in triangulo rectangulo, vel obtusangulo sumenda sunt facilitatis gratia circa rectum, vel obtusum angulum, quamuis hoc non sit omnino necessarium, cum quæuis duo latera bifariam possint secari) bifariam in E, & F, punctis, ex quibus educantur ED, FD, perpendiculares ad dicta latera, & quæ coeant in puncto D, (quod enim coeant patet, quia si ducta esset recta EF, fierent anguli EFD, FED, duobus rectis minores) eritque D, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducanturque rectæ DA, DB, DC. Quoniam igitur latera AE, ED, trianguli AED, æqualia sunt lateribus BE, ED, trianguli BED, & anguli ad E, rect; [*per 4 pri.*] erunt bases DB, DA, inter se æquales. Eodemque modo erunt DC, DA, æquales. Cum ergo tres rectæ DB, DA, DC, sint æquales, circulus descriptus ex D, ad internallum DA, transibit etiam per puncta B, & C, circa

datum

datum ergo triangulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

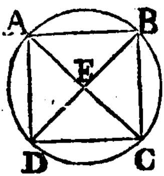
COROLLARIVM.

Ex hac propos. manifestum est, quod si centrum intra triangulum cadat, omnes angulos esse acutos, quoniam omnes [*per* 31. *ter.*] sunt in maiori segmento circuli: si vero sit in latere BC, [*per* 31. *ter.*] angulum BAC, illi lateri oppositum esse rectum, ex eo quod sit in semicirculo. Si denique cadat extra triangulum [*per* 31. *ter*] angulum oppositum BAC, obtusum esse, cum in minori segmento circuli reperiatur. Quod totum valet etiam è conuerso.

PROPOS. 6. PROBL. 6.

In dato circulo quadratum describere.

SIt in dato circulo ABCD, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se ad angulos rectos in centro E, iunganturque rectæ AB, BD, CD, DA. Dico ABCD, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Prob. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus EC, EB, trianguli BEC, cum omnia sint ex centro ad circumferentiam; rursusque, & anguli contenti dictis lateribus æqualibus, sunt æquales, nempe recti, [*per* 4. *pri.*] igitur bases AB, BC, erunt æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD, itemque rectæ CD, DA, & rectæ DA, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, sunt inter se æqualia. Sunt autem & anguli [*per* 31. *ter.*] recti cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit ABCD, vnde quadratum in dato circulo descripsimus. Quod erat faciendum.

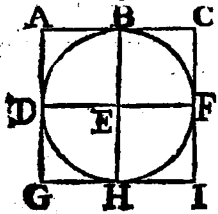


PRO-

PROPOS. 7. PROBL. 7.

Circa datum circulum quadratum describere.

SIt circa datum circulum BDHF, cuius centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri BH, DF, sese secantes in E, centro ad angulos rectos; & per B, D, H, F, educantur ad diametros lineæ perpendiculares AC, CI, IG, GA, coeuntes in punctis A, C, I, G. Quod enim coeant BA, DA, patet ex eo, quod ducta recta B D, faciat cum BA, DA, duos angulos duobus rectis minores, atque ita de reliquis. Dico AC IG, esse quadratum, circa circulum descriptum. Prob. Cum enim anguli BED, ADE, sint resti, [*per* 28. *pri.*] erunt BH, AG, parallelæ; similiterque erunt CI, BH, parallelæ. [*per* 28. *pri.*] Quare & AG, CI, inter se parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt AC, GI. Quoniam igitur parallelogrammum est ABHG, [*per* 38. *pri.*] erunt latera opposita AG, BH, æqualia, & anguli oppositi BAG, BHG, æquales: sed BHG, est rectus, igitur, & BAG. rectus erit. Quo pariter modo ostendemus, angulos C, I, G, esse rectos; nec non etiam latera AC, CI, IG, GA, æqualia esse diametris BH, DF; Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera iam dicta inter se æqualia: ideoque ACIG, quadratum erit, cuius quidem latera circulum tangunt. [*iuxta Coroll. Propos.* 16. *lib.* 3.] Quapropter circa datum circulum quadratum descripsimus, Quod erat efficiendum.



PRO-

PROPOS. 8. PROBL. 8.

In dato quadrato circulum deſcribere.

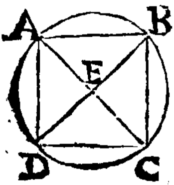
SIt in dato quadrato ACIG, [*vt in praeced. figura.*] inſcribendus circulus. Diuiſis lateribus bifariam in B, F, H, D, ducantur rectæ BH, DF, ſeſe ſecantes in puncto E. Quoniam igitur AC, GI, rectæ æquales ſunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AB, GH, æquales, & parallelæ. Quare [*per* 33. *pri.*] etiam AG, parallela eſt ipſi BH, & æqualis. Eadem ratione erit CI, parallela, & æqualis ipſi BH Itemque rectæ AC, GI, parallelæ erunt, & æquales ipſi DF. Sunt igitur parallelogramma AE, CE, IE, & GE; ideoque rectæ DE, EH, EF, EB, æquales erunt rectis AB, DG, CB, AD: ſunt autem hæ inter ſe æquales, cum ſint ſemiſſæ æqualium AC, AG, &c. Quare & rectæ EB, ED, EH, EF, inter ſe æquales erunt; ac propterea circulus deſcriptus ex E, ad interuallum EB, tranſibit quoque per puncta D, H, & F. Qui circulus cum contingat latera AC, CI, IG. GA, [*per Corollarium Propoſitionis* 16. *lib.* 3.] quod anguli ad B, D, H, F, ſint recti, deſcriptus erit in quadrato AI. In dato ergo quadrato circulum deſcripſimus. Quod efficiendum erat.

PROPOS. 9. ROBL. 9.

Circa datum quadratum circulum deſcribere.

SIt deſcribendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri AC, BD, ſecantes ſe in puncto E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli

guli ABD, æqualia sunt, erunt [*per* 5. *pri.*] anguli ABD, ADB, æquales; est autem angulus BAD, re-

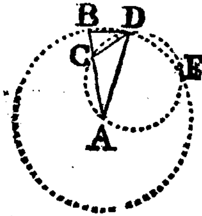


ctus; [*per* 32. *pri.*] Quare ABD, ADB, anguli erunt semirecti. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli EAB, EBA, sint æquales, [*per* 6. *pri.*] erunt rectæ EA, EB, æquales. Eademque ratione EA, ED, æquales erunt; sicuti etiam ED, EC; Et demum EC, EB. Quare circulus ex E, interuallo EA, descriptus, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROPOS. 10. PROBL. 10.

Isosceles triangulum constituere, quod habeat vtrumque eorum, qui ad basim sunt, angulorum, duplum reliqui.

SVmatur quæuis recta linea AB, quæ diuidatur in C, [*per* 11. *sec.*] taliter vt rectangulum sub AB, BC, æquale sit quadrato rectæ AC. Deinde centro A, interuallo AB, circulus BDE, describatur, in quo



[*per* 1. *quar*] accomodetur recta BD, æqualis ipsi AC, iungaturque recta AD. Quoniam enim rectæ AB, AD, æquales sunt, erit triangulum ABD, isosceles. Dico vtrumq; angulorum ABD, ADB, duplum esse reliqui anguli A. Probatur. Ducta enim recta CD, [*per* 1. *quar.*] describatur circa triangulum ACD, circulus DCAE. Quoniam igitur rectangulum sub AB, BC, æqua-

æquale est quadrato rectæ BD, & recta BA, secat circulum DCAE, [*per* 37. *ter.*] tanget, recta BD, eundem circulum DCAE, in puncto D. Quare angulus BDC, [*per* 32 *ter.*] æqualis est angulo A, in alterno segmento CAED. Addito igitur communi angulo CDA, erit totus angulus A D B, æqualis duobus angulis CDA, CAD; sed duobus angulis CDA, CAD, [*per* 32. *pri.*] æqualis est etiam angulus externus BCD. Angulus ergo BCD, æqualis erit angulo ADB, hoc est angulo ABD, cum [*per* 5. *pri.*] ABD, ADB, anguli sint inter se æquales; ac propterea [*per.* 6. *pri.*] rectæ DC, DB, æquales erunt: Est autem BD, æqualis posita rectæ AC; igitur & CD, ipsi CA, æqualis erit; ac propterea [*per* 5. *pri.*] anguli CAD, CDA, æquales inter se erunt. Angulus igitur ADB, qui æqualis ostensus est duobus angulis CAD, CDA, duplus erit alterius eorum, nimirum anguli A. Quare, & angulus ABD, duplus erit eiusdem anguli A. Isosceles ergo triangulum constituimus habens, &c. Quod faciendum fuit propositum.

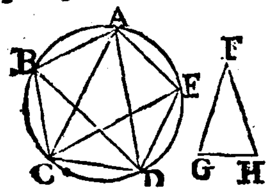
COROLLARIVM.

Quoniam vero in triangulo A B D, tres anguli sunt æquales duobus rectis, hoc est quinque quintis duorum rectorum, euidens est, angulum A, esse quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, esse duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, pariter esse quatuor quintas partes. Quandoquidem omnes tres, [*per* 32. *primi.*] æquales sunt duobus rectis, hoc est decem quintis vnius recti.

PROPOS. II. PROBL. II.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

SIt in dato circulo A B C D E, inſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [*per 10. quar.*] Conſtituatur triangulum Iſoſceles FGH, itaut



vterque angulorum G, & H, duplus ſit reliqui F; poſtmodum vero in circulo [*per 2. quar.*] inſcribatur triangulū ACD, triangulo FGH, ęquiangulum; quo poſito vterq; angulorum ACD, CDA, [*per 9. pri.*] biſariam diuidatur rectis CE, DB, iunganturque rectæ AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonum ABCDE, in dato circulo inſcriptum, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Probatur. Cum enim vterque angulorum ACD, ADC, duplus ſit anguli CAD, & biſariam diuiſus; erunt quinq; anguli ADB, BDC, DCE, ECA, & CAD, æquales. Quare [*per 26. ter.*] arcus AB, BC, CD, DE, EA, ſuper quos aſcenderunt, erunt æquales, atq; idcirco [*per 29. ter.*] rectæ etiā AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt. Æquilaterum eſt igitur pentagonum ABCDE. Rurſus quia arcus AB, ED, æquales ſunt; addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB. Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus inſiſtentes, [*per 27. ter.*] æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Inſiſtunt enim æqualibus arcubus, quorum ſinguli ex tribus arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum eſt ergo pentagonum ABCDE. Quare cum etiam æquilaterum

rum

rum fuerit oſtenſum; inſcriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod erat efficiendum.

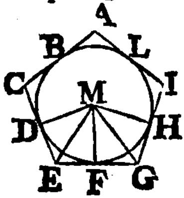
COROLLARIVM.

Hinc ſequitur, angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel ſex quintas vnius recti. Cum enim tres anguli BAC, CAD, DAE, æquales ſint, vtpote qui æqualibus arcubus inſiſtant, ſit autem CAD, [*per Coroll. præced. Propoſ.*] quinta pars duorum rectorum, vel duæ quintæ vnius recti. Erit totus BAE, tres quintæ duorum rectorum; vel ſex quintæ vnius recti.

PROPOS. 12. PROBL. 12.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

SIt circa datum circulum BDFHL, deſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [*per* 11. *quar.*] Inſcribatur in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius anguli ſint in pũctis B, D, F, H, L. Deinde ex centro M, ad puncta B, D, F, H, L, ducantur rectæ MB, MD, MF, MH, ML, (quamuis in noſtra figura ad puncta B, & L, non ſint ducta) ad quas poſtea ducantur perpendiculares AC, CE, EG, GI, IA, coeuntes in punctis A, C, E, G, I. Ducta enim recta DF, erunt duo anguli EDF, EFD, duobus rectis minores, cum ſint partes rectorum angulorum EDM, EFM, coibunt igitur [*iuxta* 13. *pron.*] rectæ DE,



FE, ad partes E; ſicque de alijs. Et quia ipſæ tangunt cirulum [*per Coroll. Propoſ. 16. lib. 3.*] erit deſcriptum pentagonum ACEGI, circa datum circulum; quod dico eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Probat. Ductis enim rectis ME, MG, erunt quadrato rectæ ME, [*per 47. pri.*] æqualia tam quadrata rectarum MD, DE, quam rectarum MF, FE. Quare quadrata rectarum MD, DE, æqualia erunt quadratis rectarum MF, FE; demptis igitur æqualibus quadratis rectarum æqualium MD, MF, remanebunt quadrata rectarum DE, EF, æqualia; ideoque etiam rectæ DE, EF, æquales erunt. Quoniam ergo latera DM, ME, trianguli DME], æqualia ſunt lateribus FM, ME, trianguli FME, eſt autem & baſis DE, æqualis baſi EF, vt oſtenſum eſt; [*per 8. pri.*] erit angulus DME, angulo EMF, æqualis. Igitur & anguli [*per 4 primi*] DEM, FEM. Duplus igitur eſt angulus DMF, anguli FME. Eodem modo oſtendemus angulum FMH, duplum eſſe anguli GMH; nec non etiam de reliquis. Cum igitur anguli DMF, FMH, [*per 27. ter*] ſint æquales, ex eo quod [*per 28. ter.*] inſiſtant æqualibus circumferentijs DF, FH, cum ipſæ, à rectis æqualibus DF, FH, auferantur: erunt & dimidij eorum EMF, FMG, æquales. Quocirca cum duo anguli EMF, EFM, trianguli EMF, æquales ſint duobus angulis GMF, GFM, trianguli GMF, & latus illis adiacens MF, commune; [*per 26. pri.*] erunt & latera EF, FG, æqualia, & anguli MEF, MGF, æquales. Dupla eſt ergo recta EG, ipſius rectæ EF. Eademque ratione oſtendemus EC, rectam duplam eſſe rectæ DE. Sunt autem oſtenſæ æquales DE, EF; igitur & earum duplæ EC. EG, æquales erunt. Similiter demonſtrabimus, rectas GI, IA, AC, æquales eſſe cuilibet rectarum CE, EG. Æquilaterum ergo eſt pentagonum ACEGI. Rurſus quoniam oſtenſum eſt, angulos

FEM,

FEM, FGM, æquales esse, ac semisses angulorum DEF, FGH; erunt, & eorum dupli DEF, FGH, æquales. Eademque ratione anguli HIL, LAB, BCD; cuilibet angulorum DEF, FGH, æquales erunt. Æquiangulum igitur est pentagonum ACEGI. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod erat efficiendum.

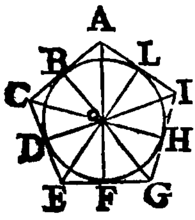
COROLLARIVM.

Ex hac demonstratione sequitur, quod si in circulo quæcumque figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares, constituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualiũ circulo circumscriptam, vt patet.

PROPOS. 13. PROBL. 13.

In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribere.

INscribendus sit circulus in dato pẽtagono ACEGI. Diuidantur duo eius anguli CAI, ACE, proximi [*per* 9. 1.] bifariã rectis AO, CO, quę coeant in O, puncto quod dico esse intra pẽtagonum; nã si à puncto O, connectantur rectæ OE, OG, OI, facile erit ostendere omnes lineas à puncto O, ad angulos pentagoni ACEGI, ductas esse æquales. Quoniam enim latera AC, CO, trianguli ACO, æqualia sunt lateribus EC, CO, trianguli ECO, sunt autem & anguli ACO, ECO, dictis lateribus contenti æquales per constructionem; [*per 4. pri.*]



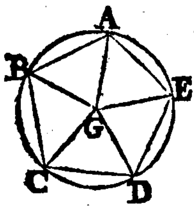
erunt, & bases AO, EO, & anguli CAO, CEO, inter se æquales. Cum igitur anguli CAI, CEG, ponantur æquales, & CAO, dimidium ponatur anguli CAI, per constructionem; erit & CEO, dimidium anguli CEG. Diuisus est ergo angulus CEG, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos EGI, GIA, pariter esse bifariam diuisos. Quo stante cum duo latera AC, CO, in triangulo ACO, æqualia sint duobus lateribus EC, CO, in triangulo ECO, & anguli ACO, ECO, dictis lateribus æqualibus comprehensi, sint æquales per constructionem, [*per* 4 *pri.*] erit basis AO, basi EO, æqualis: quoquo modo etiam demonstrabitur CO, CA, GO, EO, IO, inter se æquales esse: quapropter punctum O, erit intra pentagonum ACEGI. Ducantur iam ex O, ad singula pentagoni latera perpendiculares OB, OD, OF, OH, OL. Quoniam igitur duo anguli BAO, ABO, in triangulo ABO, æquales sunt duobus angulis LAO, ALO, in triangulo ALO; estque latus AO, subtensum vni æqualium angulorum, commune; [*per* 26. *pri.*] erunt & rectæ BO, LO, æquales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares DO, FO, HO, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro O, & interualo OL, transibit quoque per puncta H, F, D, B; quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangunt [*per Coroll. Propos.* 16. *lib.* 3.] eo quod angulos rectos faciant cum semidiametris BO, DO; erit circulus BDFHL, in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

PRO-

PROPOS. 14. PROBL. 14.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum deſcribere.

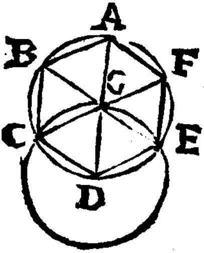
SIt circa pentagonum ABCDE, æquilaterum, & æquiangulum circulus deſcribendus. Diuiſis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis AG, BG, quæ coeant in puncto G, intra pentagonum [*vt in antecedente Propoſ. demonſtratum eſt*;] & coniunctis rectis GC, GD, GE, oſtendemus, [*vt in præcedenti Propoſ.*] etiam reliquos angulos BCD, CDE, DEA, ſectos eſſe bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter ſe æquales, ex eo quod toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AGB, duo anguli BAG, ABG, æquales ſunt; [*per 6. pri.*] erunt rectæ AG, BG, inter ſe æquales. Eademque ratione erunt reliquæ, GE, GD, GC, cuilibet iſtarum æquales. Quare circulus deſcriptus ex centro G, interuallo GA, tranſibit quoque per puncta B,C,D,E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.



PROPOS. 15. PROBL. 15.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

SIt in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G, inſcribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Ducta diametro AD, ex centro D, interuallo DG, deſcribatur circulus, qui ſecet circulum datum in punctis C, & E, e quibus per centrum G, extendantur rectæ CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inſcriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico æquilaterum, & æquiangulum eſſe. Prob. Cum enim recta GC, æqualis ſit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ DG, ex definitione circuli; erunt & rectæ GC, DC, æquales inter ſe: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare tres anguli in ipſo [*per* 5. *pri.*] erunt æquales inter ſe: qui cum æquales ſint duobus rectis, [*per* 32. *pri.*] erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum. Sunt autem tres anguli CGD, DGE, EGF, [*per* 13. *pri.*] æquales duobus rectis. Reliquus igitur, angulus EGF, erit quoque tertia pars duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter ſe æquales; quibus cum etiam [*per* 15. *pri.*] æquales ſint ad verticem anguli FGA, AGB, BGC; erunt ſex anguli ad centrum G, conſtituti æquales. Quare [*per* 26. *ter.*] circumferentiæ, quibus inſiſtunt; ac propterea [*per* 29. *ter.*] rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum eſt hexagonum ABCDEF. Rurſus, quia circumferentia BC, æqualis eſt circumferentiæ AF; ſi communis addatur CDEF, erunt circumferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipſis inſiſtentes BAF, ABC [*per.* 27. *ter.*] æquales erunt. Similiterque oſtendemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales eſſe cuilibet iſtorum; quia nimirum quilibet inſiſtit arcui compoſito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot,



quot

quot latera continet figura inscripta demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoque est hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendum erat.

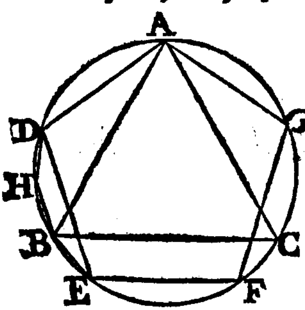
COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli: Nam DC, latus hexagoni æquale est semidiametro DG, ex dæfin. circuli.

PROPOS. 16. PROBL. 16.

In dato circulo quinti decagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIt in dato circulo ABC, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. In dato circulo [*per* 1. *quar.*] constituatur triangulum æquilaterum ABC, quod etiam æquiangulum erit [*ex Coroll. Prop.* 5. *lib.* 1.] Eruntque [*per* 26. *vel* 28. *ter.*] tres arcus AB, BC, CA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia ABC, talium quinque erit arcus AB, qui ex dictis tertia pars est circumferētię. [*per* 11. *quar.*] Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ADEFG, applicans vnum angulum ad punctum A; erunt quinque arcus AD, DE, EF,



FG, GA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia ABC talium trium erit arcus AD, quinta pars existens totius circumferentiæ. Itaque cum arcus AB, contineat tales partes quinque, & arcus AD, tres; continebit reliquus arcus DB, duas. Diuiso ergo arcu DB, [*per* 30. *ter.*] bifariam in H, erit arcus BH, pars decima quinta totius circumferentiæ. Quare ducta recta BH, subtendet decimamquintam partem totius circumferentiæ; cui si aliæ quatuordecim, [*per* 1. *quar.*] æquales in circulo accommodentur, in circulo inscriptum erit quintidecagonum æquilaterum, quod [*per* 27. *ter.*] & æquiangulum est, cum eius anguli subtendant arcus æquales, nempe compositos ex 13. arcubus æqualibus omnes, vt perspicuum est. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

Pari modo per ea, quæ supra (*ad propos.* 12. 13. & 14. *huius lib.*) dicta sunt de pentagono, describemus etiam circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Necnon etiam in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum describemus; & tandem circa datum quintidecagonum circulum describemus.

Elementi Quarti Finis.

EV-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

DEFINITIONES.

I.

Pars est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

Euclides in quatuor antecedentibus libris quantitatem continuam absolutè considerauit; in hoc autem libro illam eandem quantitatem examinat non absolutè, sed prout ad aliam refertur, hoc est quatenus comparata ad aliam cum illa aliquam proportionem habet: nullatenus descendendo ad vllam quantitatis speciem, vt ad lineam, superficiem, vel corpus, sed solummodo in genere quantitatis continuæ proportiones exponit. Quare vt institutum seruet definitiones ad proportionum demonstrationes necessarias proponit.

In primis inquit, magnitudinem illam minorem, quæ maiorem aliam magnitudinem metitur, partem appellari. Vt exempli gratia, quoniam magnitudo trium cubitorum ter sumpta metitur aliam magnitudinem 9. cubitorum, ideo prima magnitudo minor,

dia

dicitur pars secundæ magnitudinis; nempe maioris. E contra vero quia magnitudo trium cubitorum non metitur magnitudinem decem cubitorum, ideo magnitudo 3. cubitorum non dicitur pars magnitudinis 10. cubitorum. Nam ter sumpta non adæquat, & quater excedit, quod totum requiritur, vt vna magnitudo dicatur pars alterius.

Aduertendum tamen est, quod pars apud Mathematicos est duplex, nam alia est pars aliquota, alia aliquanta. Pars aliquota dicitur illa, quæ metitur suum totum, itaut aliquoties repetita, totum suum constituat, vt est numerus 2. cum 6. 3. cum 9. &c. collatus.

Pars vero aliquanta dicitur illa, quæ adæquate non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta vel ipsum excedit, vel ab eodem deficit; cuiusmodi pars est numerus 4. collatus cum 6. 7, 9, 10. 16. &c.

Si autem quæratur quænam ex istis partibus fuerit ab Euclide definita. Resp (quidquid alij dicant) solam partem aliquotam per datam Euclidis definitionem definiri, tum quia hæc solummodo metitur suum totum, tum etiam quia, vt ex lib. 7. constat, pars aliquanta in numeris ab Authore huius libri non dicitur pars, sed partes. Nam numerus 4 non est pars numeri 6. sed duæ partes tertiæ, quales sunt duo binarij.

I I.

Multiplex autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

QVando enim vna magnitudo ab alia metitur, vt numerus 8 qui metitur à numero 4. tunc commensurata magnitudo multiplex dicitur commensurantis; vnde sequitur, quod si duæ magnitudines minonores duas alias maiores æque metiantur, hoc est vna minor in vna maiore toties contineatur, quoties altera minor in altera maiore, vt exempli gracia, 9. & 15. respectu 3. & 5. dicuntur æquè multiplices.

III.

Ratio est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundum quantitatem, habitudo.

QVando enim duæ quantitates eiusdem generis, vt duo numeri, duæ superficies, duo solida, &c. comparantur inter se secundum rationem quantitatiuam, hoc est quatenus vna maior est, vel minor, vel æqualis alteri, huiusmodi comparatio, seu respectus mutuus, appellatur ratio, seu Proportio. Illa vero quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & alijs antecedens proportionis: Ea vero ad quam alia refertur consequens proportionis appellatur.

IV.

Proportio vero, est rationum similitudo.

IN hac quarta definitione id, quod proportio appellatur, illud ipsum à Græcis Analogia, & à quamplurimis latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum enim comparatio duarum quantitatum inter se dicitur proportio; ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari. Quia enim proportio numeri 12. ad 4. eadem est ac 9. ad 3. hinc est quod habitudo inter has proportiones proportionalitas dicatur.

Aduertendum tamen est id, quod dicit Clauius in hoc loco, quamplurimos scilicet Mathematicos comparaparationem duarum quantitatum proportionem, habitudinem autem proportionum proportionalitatem appellare. Quod sane nos etiam imposterum obseruabimus.

Multæ autem proportionum habitudines, seu proportionalitates à scriptoribus assignantur, videlicet proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Musica, seu Armonica; quamuis Euclides in hoc libro circa Geometricam tantummodo versetur, quæ duplex assignantur Continua scilicet, atque Discreta. Continua est, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur taliter, vt nulla fiat proportionum interruptio, sed quælibet intermedia quantitas sit, & antecedens, & consequens. Vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, eadem est B, ad C, &c. Discreta vero proportionalitas est illa, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, taliter vt fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas sit antecedens, & consequens; vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, ea est C, ad D, &c.

PROPORTIONIS *Diuisio*.

QVot sint genera proportionum apud Mathematicos, & quæ sint præcipuæ proportionalitates compendiose exponere operæ pretium duxi, non solum vt ea, quæ ab Euclide in 5. & 6 libro demonstrantur, rebus materialibus accommodari possint, verum etiam vt ea, quæ à Mathematicis, & Philosophis de motuum proportione disputantur, clarius intelligi queant.

Proportio igitur ab Euclide definita diuiditur in proportionem Rationalem, & Irrationalem. Rationalis est illa, quæ in numeris potest exhiberi; & hac modo

se

se habet proportio illa; quæ cadit inter lineas, quarum vna est 20 palm. altera vero est 10. palm; hæc enim proportio cadens inter has duas lineas per numeros 20, & 10 exprimitur. Proportio vero Irrationalis est illa, quæ in numeris non potest exhiberi; cuiusmodi est proportio diametri alicuius quadrati ad latus eiusdem quadrati: quod totum ab Euclide in 10. lib. demõstratur.

Alij vero aliter explicant huiusmodi proportiones, dicendo scilicet, proportionem Rationalem cadere inter quantitates commensurabiles, nempe illas, quæ habent vnam communem partem aliquotam, seu quas eadem mensura communis metitur. Et hoc modo se habet linea 20. palm. & linea 8 palm. Nam linea 4. palm. est pars aliquota tam lineæ 20, quam 8. palm. Nec aliter numeri dicuntur commensurabiles, nam saltem vnitas omnes metitur. E contra vero Proportio Irrationalis est illa, quæ cadit inter duas quantitates incommensurabiles, nempe illas, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam communem mensuram possumus reperire. Huiusmodi autem se habent hæ duæ quantitates, nempe diameter quadrati, & latus eiusdem quadrati; licet vtraque istarum quantitatum habeat partes aliquotas, scilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. attamen nulla pars aliquota vnius quantitatis potest aliam quantitatem metiri, vt ab Euclide in 10. lib. demonstratum fuit.

Ex modo dictis colligitur in numeris, solam proportionem Rationalem reperiri, quia saltem vnitas omnes numeros metitur; at vero in quantitate continua non solum proportio Rationalis, verum etiam Irrationalis inuenitur. Alij postea aliter proportionem partiri solent; nempe in proportionem Æqualitatis, & Inæqualitatis. Prima est illa, quæ cadit inter duas quantitates æquales, vt inter duas lineas, quarum vtraque est 10, 20, vel 100. palmorum, &c. Proportio vero Inæqua-

litatis

litatis est illa, quæ cadit inter duas quantitates inæquales, videlicet inter duas lineas, quarum vna est 20, palm. altera 40, 60, 100, &c.

Notandum tamen est quod duo proportionum genera vltimo loco assignata cum prioribus talem habent connexionem, vt scilicet omnis proportio Æqualitatis sit semper Rationalis, non autem è contra. Item omnis proportio Irrationalis est semper necessario Inæqualitatis, at non è conuerso, vt consideranti patebit.

Ommissa igitur Æqualitatis proportione, quæ vlterius subdiuidi nequit, nam omnes quantitates æquales eandem semper habent proportionem æqualitatis; hac in quam ommißa ad aliam proportionem Inæqualitatis transeamus.

Inæqualitatis proportio subdiuiditur in proportionem maioris, & minoris inæqualitatis. Proportio maioris Inæqualitatis est, quando maior quantitas cum minore confertur; hancque proportionem habet numerus 20. ad 10 comparatus. E contra vero proportio minoris Inæqualitatis est, quando minor quantitas cum maiore confertur vt est numerus 10 ad 20. comparatus; vel quando linea 4. palm. cum linea 10. palm. confertur. Neque enim eadem est proportio 6, ad 10, ac 10, ad 6, vt clare patet, vel mediocriter in Algebræ regulis versatis.

Verum in hoc loco dumtaxat sermonem excitamus circa proportiones maioris, vel minoris inæqualitatis, quatenus solas proportiones Rationales comprehendunt: de reliquis vero proportionibus Irrationalibus in 10. lib. agunt Authores.

Quare Rationalis proportio minoris, vel maioris Inæqualitatis in 5. genera distribuitur, videlicet in Multiplicem, Superparticularem, Superpartientem, Multiplicem Superparticularem, & Multiplicem Superpartientem, cum hoc solum discrimine, quod in proporportione minoris Inæqualitatis singulis vocabulis præponitur præpositio SVB, dicendo sub multiplicem, sub superparticularem, &c.

Ex his quinque proportionum generibus alia sunt simplicia, alia composita. Simplicia sunt tria priora, reliqua vero duo composita.

Quod autem proportio Rationalis maioris, vel minoris inæqualitatis adæquate in quinque assignata genera distribuatur posita istorum generum explicatione ostendemus.

DE PROPORTIONE Multiplici.

PRoportio multiplex definitur, quod sit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem taliter aliquoties continet, vt minor metiatur maiorem. Hanc proportionem habet numerus 20. ad 4. siquidem 20. quinquies comprehendit 4. Quod pariter dicendum venit circa lineam 20. pedum ad lineam 5. pedum comparatam, &c.

Huiusmodi proportio sub se infinita continet genera; nam si in proportione multiplici maior quantitas minorem bis tantummodo contineat, dicitur proportio Dupla: si vero ter contineat, dicitur tripla, si quater quadrupla, si decies decupla, &c.

Hoc posito facili negotio definiuntur species proportionis multiplicis; siquidem proportio tripla nil aliud est quam habitudo maioris quantitatis ad minorem taliter, vt maior ter minorem complectatur. Pariter proportio octupla est illa habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur, vt numerus 48. ad 6. habet proportionem octuplam, quia octies ipsum 6. continet. Quod totum valet etiam de reliquis speciebus Proportionis multiplicis.

DE

DE PROPORTIONE Superparticulari.

DEfinitur proportio Superparticularis, quod sit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel dumtaxat continet, & insuper vnam eius partem aliquotam, scilicet dimidiatam, 3. 4. 5. &c. Hanc proportionem habet numerus 3. ad 2. Nam numerus 3. semel continet 2; & insuper vnitatem, quæ est pars dimidiata ipsius 2. Item linea 12. pedum ad lineam 9 pedum propsitionem habet superparticularem, quia scilicet prior linea semel continet posteriorem, & insuper lineam 3. pedum, quæ est 3. pars lineæ 9. pedum.

Hæc pariter proportio in infinita genera subdiuiditur. Nam si illa pars aliquota in maiori quantitate contenta, est dimidiata pars minoris quantitatis, constituitur proportio sesquialtera; si autem est tertia pars, insurgit proportio sesquitertia; si quarta, sesquiquarta; si centesima, sesquicentesima, &c. Vnde mediante hoc vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum super particularium. Proportio enim sesquioctaua est quando maior quantitas minorem semel includit, & insuper octauam partem minoris quantitatis: qualis est proportio inter 9. & 8: item inter 45. & 40 Siquidem 9 semel continet 8. & insuper vnam vnitatem, quæ est octaua pars ipsius 8: sicuti etiam 45. semel continet 40; & insuper 5. octaua pars ipsius 40.

DE PROPORTIONE Superpartiente.

SVperpartiens proportio definitur, quod sit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior mino-

minorem ſemel dumtaxat continet, & inſuper aliquot eius partes aliquotas non efficientes vnam aliquotam. Huiuſmodi proportionem habet numerus 8. ad 5. Siquidem numerus 8. ſemel continet 5. & inſuper tres vnitates, quarum quælibet eſt pars aliquota, nempe quinta huius numeri 5. Ipſe autem ternarius ex illis tribus vnitatibus compoſitus, non eſt pars aliquota ipſius numeri 5, at aliquanta.

Et hic eſt aduertendum, quod in data definitione dictum fuit, partes illas aliquotas ſimul ſumptas non debere conſtituere vnam partem aliquotam, quia ſic diſtinguimus proportiones ſuperparticulares à ſuperpartientibus. Dantur enim quædam proportiones, quæ primo aſpectu videntur ſuperpartientes, cum tamen reuera ſint ſuperparticulares: vt patet inter numeros 10. & 8. Quamuis enim 10. ſemel contineat 8, & inſuper duas vnitates, quarum quælibet eſt octaua pars numeri 8; quia tamen illæ vnitates ſimul ſumptæ conſtituunt binarium, quod eſt quarta pars numeri 8; ideo iſta proportio non eſt ſuperpartiens, ſed ſuperparticularis, nempe ſeſquiquarta.

Pariter huiuſmodi proportio ſuperpartiens habita ratione partium aliquotarum diuiditur in genera infinita: ſi enim maior quantitas minorem ſemel comprehendat, & duas eius partes aliquotas modo ſupra aſſignato, tunc conſurgit proportio ſuperbipartiens; ſi autem maior quantitates minorem ſemel comprehendat, & inſuper tres partes aliquotas, tunc conficitur proportio ſupertripartiens, &c.

Vlterius quodcunque ex aſſignatis generibus, habita ratione denominationis partium aliquotarum, adhuc diuiditur in genera infinita. Hinc eſt, quod proportio ſuperbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarum maior ſemel continet minorem, & duas eius partes tertias, dicitur ſuperbipartiens tertias; & ſi illæ duæ partes fuerint quintæ appellabitur superbipartiens quintas, &c.

Si autem quæratur quomodo cognosci possit, an vnus numerus habeat communem mensuram cum alio nec ne. Respondeo hac totum manifestari ab Euclide in lib. 7. in quo loco assignat regulam inueniendi communem mensuram numerorum, illosque numeros, qui communem mensuram non habent præter vnitatem, vt 8. & 3. primos vocat.

DE PROPORTIONE Multiplici superparticulari.

DEfinitur proportio multiplex superparticularis, quod sit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Huiusmodi proportio est, quam habet numerus 9. ad 4. Continet enim 9. bis 4. (& quo ad istam partem hæc proportio conuenit cum multiplici, nempe cum Dupla,) & vlterius comprehendit vnitatem, quæ est quarta pars numeri 4. (& quantum ad hoc ista proportio conuenit cum superparticulari, nempe sesquiquarta:) qua de re hæc proportio optime multiplex superparticularis, idest ex multiplici, & superparticulari resultans, appellatur.

Diuiditur postea proportio ista habita ratione proportionis multiplicis in genera infinita, eo prorsus modo, quo dictum est de multiplici, nempe in duplam superparticularem, triplam superparticularem, &c. & insuper vnam partem minoris aliquotam.

Denuo quodcunque ex assignatis generibus in infinita genera subdiuiditur, habita semper ratione proportionis superparticularis: Nam proportio tripla superparti-

particularis continet sub se triplam sesquialteram, quando scilicet maior quantitas minorem ter contineat, & vlterius dimidiatam eius partem; triplam sesquitertiam, triplam sesquiquartam, &c.

DE PROPORTIONE *Multiplici superpartiente.*

Demum Proportio multiplex superpartiens definitur, quod sit habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties minorem complectitur, & insuper aliquot eius partes aliquotas non efficientes vnam aliquotam. Huiusmodi proportionem habet numerus 11. *ad* 3. *Nam* 11. *ter complectitur* 3, *& insuper duas vnitates, quæ simul sumptæ, non constituunt vnam partem aliquotam, vt patet.*

Diuiditur primò hæc proportio habita ratione proportionis multiplicis in duplam superpartientem, triplam superpartientem, quadruplam superpartientem, &c.

Quodlibet postea istorum generum, habita ratione numeri partium, sub se continet infinita genera. Vt v. g. sub tripla proportione superpartiente continetur tripla superbipartiens, tripla supertripartiens, tripla superquadripartiens, &c.

Demum quæcumque istarum proportionum habita ratione partium aliquotarum, in genera adhuc infinita subdiuiditur. Vt v. g. tripla supertripartiens diuiditur in triplam supertripartientem quartas, in triplam supertripartientem quintas, 6. 7. 8. &c. Quarum proprias definitiones assignare ex dictis facile quicumque depromere poterit.

DE PROPORTIONALITATIBVS Rationalibus minoris Inaequalitatis.

OMnia illa, quæ hactenus dicta sunt de quinque proportionum rationalium generibus circa proportiones maioris inæqualitatis, sunt pariter intelligenda circa quinque proportionum genera correspondentia proportionibus minoris inæqualitatis, præmittendo solum præpositione, SVB; Nam si in adductis exemplis minores quantitates conferantur cum maioribus habebunt proportiones minoris inæqualitatis. Eo autem prorsus modo, quo se habet 100. *ad* 1, *ita* 1. *ad* 100. *Hinc est, quod ex dictis proportio* 100. *ad* 1, *est centupla, ita* 1. *ad* 100. *est subcentupla; sicque discurrendo de reliquis proportionum generibus.*

Hæc sunt illa genera, in quæ proportio Rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis diuiditur. Quod vero alia non possint assignari probant Authores, & præcipue Clauius, in hoc loco; & hæc compendiose dicta sufficiant circa quinque proportionum Rationalium genera; plura cupiens Clauium consulat, qui hanc materiam, & alias etiam quamplurimas sapientissime exposuit.

DE PROPORTIONALITATIBVS ab Euclide definitis.

PRoportionalitas ab Euclide definita in plura genera partitur, quorum præcipua hæc sunt, videlicet Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, & Musica, siue Harmonica; quæ proportionalitatis genera à Boetio, & alijs vocantur medietates.

Arith-

Arithmetica proportionalitas est quando tres, vel plures numeri per eandem differentiam progrediuntur; vt sunt isti numeri 4, 7, 10, 13, 16, &c.

Geometrica vero proportionalitas est quando tres, vel plures numeri eandem habent proportionem, quam quidem Euclides definiuit, quia hæc propriè proportionalitas dicitur, siue Analogia. Vt v. g. isti numeri 2, 6, 18, 54, &c. quilibet autem istorum numerorum ad suum antecedentem triplam habet proportionem, ac propterea huiusmodi numeri dicuntur geometricè proportionales.

Demum proportionalitas Musica, siue Harmonica est quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem sit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter maiores duos ad differentiam inter duos minores. Vt v. g. hi tres numeri 3, 4, 6, in quibus eadem est proportio maximi numeri 6, ad minimum 3, quæ differentia inter maximum 6, & medium 4, nimirum numeri 2, ad diferentiam inter medium 4, & minimum 3. idest 1. (cum vtraque proportio sit dupla) constituunt proportionalitatem Musicam, siue Harmonicam.

Huiusmodi autem proportionalitas dicitur Musica, quia plerumque eius numeri habent illas proportiones, in quibus consistunt Musicæ consonantiæ, vt patet in adducto exemplo; nam inter 6, & 4, est proportio sesquialtera constituens consonantiam, quæ Diapente, siue Quinta dicitur. Inter 4, & 3, est proportio sesquitertia constituens consonantiam, quam Diatesseron, seu quartam vocant. Demum inter extremos 6, & 3, cernitur proportio dupla constituens consonantiam, quam Diapason, siue octauam appellant.

SCHOLIVM.

Etiam quantum ad istas tres proportionalitates optimum censeo aduertere ea, quæ à Clauio in Scholio

lio Propos. 16. lib. 6. eruditissime proponuntur circa istas proportionalitates: quibus pro nunc breuitati studendo relictis interuptam definitionum lib. 5. expositionem denuo aggrediamur.

Tabula Proportionalitatum.

Proportionalitas Geometrica.

2. 6. 18. 54. 162. 486.

Proportionalitas Aritmetica.

2. 6. 10 — 14. 18. 22.

Proportio. Musica.

6: 8: 12.

Prima Tabula Proportionum.

- Proportio.
  - Rationalis.
    - Æqualitatis.
    - Inæqualitatis.
      - Minoris inæqualitatis.
      - Maioris inæqualitatis.
        - Multiplex.
        - Superparticularis.
        - Superpartiés.
        - Multiplex superparticularis
        - Multip. superpartiés.
  - Irrationalis.

Secunda Tabula proportionũ rationalium Maioris inæqualitatis.

Proportio multiplex	Dupla	4	ad	2
	Tripla	6	ad	2
	Quadrupla	8	ad	2
	Quintupla	10	ad	2

Superparticularis	Sesquialtera	3	ad	2
	Sesquitertia	4	ad	3
	Sesquiquarta	5	ad	4
	Sesquiquinta	6	ad	5

Superpartiens	Superbipartiens tertias	5	ad	3
	Superbipartiens quintas	7	ad	5
	Superquadripartiens septimas	11	ad	7
	Super quintupartiens septimas	12	ad	7

Multiplex superparticularis	Dupla sesquialtera	5	ad	2
	Tripla sesquitertia	10	ad	3
	Quadrupla sesquiquarta	17	ad	4
	Quintupla sesquiquinta	26	ad	5

Multiplex superpartiens.	Dupla superbipartiens tertias	8	ad	3
	Tripla superbipartiens quintas	17	ad	5
	Quadrupla super quad. septimas	32	ad	7
	Quintup. super quintup. nonas	50	ad	9

Magni-

V.

Magnitudines rationem inter se habere dicuntur, quæ multiplicatæ possunt sese inuicem superare.

EVclides in tertia definitione duarum magnitudinum eiusdem generis habitudinem rationem vocauit, quam nos cum alijs quamplurimis proportionem dicimus: nunc vero idem Author in hac quinta definitione exponit quidnam requirant duæ quantitates eiusdem generis ad hoc, vt inter se proportionem habere dicantur. Ait igitur, illas tantummodo magnitudines dici proportionẽ inter se habere, quarum vtraque multiplicata ita augetur, vt alteram tandem superet; si vero alterutra quantumuis multiplicata numquam alteram excedat, nullam proportionem inter se habere dicuntur. Hinc diameter, & latus quadrati dicuntur habere proportionem, licet irrationalem, quia latus per 2. multiplicatum diametrum excedit. E contra vero colligitur ex ista definitione non solum inter lineam finitam, & infinitam, verum etiam inter angulum contactus, & angulum rectilineum, nullam dari proportionem, quia linea finita quomodocunque multiplicata nunquam potest superare lineam infinitam, nec angulus contactus quantumuis multiplicatus, tamen semper minor existit quouis angulo rectilineo etiam minimo, vt ad Prop. 16. lib. 3. demonstratum fuit.

VI.

In eadem ratione dicuntur esse magnitudines, prima ad secundam, & tertia ad quartam,

tam, cum primæ, & tertiæ æquæ multiplicia, à ſecundæ, & quartæ æque multiplicibus (qualiſcumque ſit hęc multiplicatio) vtrumque ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia ſunt, vel vna excedunt; ſi ea, quæ inter ſe reſpondent, ſumantur.

IN hac definitione Euclides exponit quaſnam conditiones apud Mathematicos requirant magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod totum efficit confugiendo ad earum ęque multiplicia, vt comprehendat omnes magnitudinum proportiones, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur, in appoſita tabula, quatuor magnitudines A, prima; B, ſecunda; C, tertia; & D, quarta; ſumanturque primæ & tertię ęque multiplicia ſecundumquamcunque multiplicationem; E, quidem ipſius A, primæ; & F, ipſius C, tertiæ: Denuo ſumantur ſecundæ, & quartæ, alia æque multiplicia ſecundum quamlibet multiplicationem; G, quidem ipſius B, ſecundæ; & H, ipſius D, quartæ. Quo poſito, ſi ſumpta æque multiplicia, prout inter ſe reſpondent, conferantur, nempe multiplex primæ E, cum multiplici ſecundæ G; & multiplex tertiæ F, cum multiplici quartæ H; deprehenſumque fuerit secũdum quaſcumque multiplicationes ea taliter inter ſe ſtare, vt ſi E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G; multiplex ſecundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus ſit, quam H, multiplex, quartæ magnitudinis D: Aut ſi E, æqualis fuerit ipſi G; etiam F, æquale ſit ipſi H: aut denique, ſi E, maius fuerit quam G; etiam F; maius ſit quam H: quod totum nil aliud eſt quam vtrumque ab vtroque vel

vna

vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere; hocque semper succedat nec in vllo genere multiplicium contrarium possit reperiri. Quo stante dicetur eadem est proportio primæ magnitudinis A, ad secundam B; quæ est proportio tertiæ C, ad quartam D.

Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedendum quoque erit, quælibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cũ quibuslibet æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere defectus, æqualitatis, aut excessus eandem conditionem, cum definitum, & definitio debeant semper reciprocari.

A.	6.	E=	24=	36=	18.
B.	4.	G=	28=	36=	8.
C.	3.	F=	12=	18=	9.
D.	2.	H=	14=	18=	4.

VII.

Magnitudines autem eandem rationem habentes, proportionales vocentur.

SI magnitudinum A, B, C, D, eadem sit proportio A, ad B, quæ C, ad D, istæ magnitudines proportionales dicentur.

VIII.

VIII.

Cum vero æque multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ; At multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quaræ; tunc prima ad secunadm maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

IN hac definitione Euclides declarat, quam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, ita ut prima habeat ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam, dicendo. Si primæ, & tertiæ sumpta fuerint æque multiplicia; item secundæ, & quartæ alia æque multiplicia, deprehensumq; fuerit aliquando (licet non semper, vt patet ex adiecta tabula) multiplex primæ maius esse multiplici secundæ, at multiplex tertiæ maius non esse multiplici quartæ, sed vel minus, vel æquale, dicetur maiorem esse proportionem primę magnitudinis ad secundam, quam tertiæ ad quartam.

A.	10.	E=	20=	20=	30.
B.	4.	G=	12=	24=	28.
C.	6.	F=	12=	12=	18.
D.	3.	H=	9=	18=	21.

Quia

Quia vero in adiecta tabula in tertia multiplicatione sumptis æquè multiplicibus primæ A, & tertiæ C; item secundæ B, & quartæ C. inuentum est multiplex primæ A 30 superare multiplicem secundæ B 28 at multiplex tertiæ C 18 non superare multiplicem quartæ 21, dicendum erit maiorem habere rationem primam magnitudinem A ad secundam B, quam habeat tertica C ad quartam D.

IX.

Proportio autem in tribus terminis paucissimis consistit.

ID, quod Euclides rationem nominat Interpretes proportionem vocant; illud vero, quod nomine proportionis ab ipso Euclide appellatur, id ipsum Interpretes pariter. Proportionalitatem vocant, vt etiam supra monuimus. Quoniam vero omnis proportio habet terminum antecedentem, & consequentem; & cum proportionalitas sit rationum similitudo, necesse est in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, tres terminos, si fuerit proportionalitas continua, & quatuor, si fuerit discreta.

X.

Cum vero tres magnitudines fuerint proportionales; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; Prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam; Et semper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

Pr-

PRo clariori intelligentia huius definitionis est aduertendum, quod si fuerint magnitudines A, B, C, D, E, &c. continuè proportionales, ita vt eadem sit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D; & D, ad E, proportio A, primę magnitudinis ad C, tertiam magnitudinem dicetur duplicata eius proportionis, quam habet A, prima magnitudo ad B, magnitudinem secundam; quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, videlicet proportio A, ad B, & B, ad C, vt propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionem A, ad B, duplicatam, idest bis ordine positam. Insuper ob eandem rationem proportio primæ magnitudinis A, ad quartam D, dicetur triplicata eius proportionis, quam habet A, ad B, &c.

Aliqui interpretes exponunt hanc definitionem dicendo, quod in pluribus quantitatibus proportionalibus prima ad terriam habet duplicatam rationem eius, quam habet ad secundam; quia illa istius sit dupla; quod tamen falsissimum est. Quis namque affirmabit in istis numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam esse proportionis 25. ad 5. cum illa istius sit quintupla?

X I.

Homologæ, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

EVclides supra definiuit, proportionalitatem esse proportionum similitudinem; nunc vero exponit, etiam terminos, seu quantitates dici similes, vel homologas. Docet enim antecedentes magnitudines appel-

appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec non etiam consequentes. Si enim est ptoportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis quantitati D. Cum enim habeant similitudinem proportionum, necesse est etiam, vtramq; magnitudinem antecedentem vtrique consequenti eodem modo æqualem, maiorem, vel minorem existere, vt in 6. defin. monuimus.

XII.

Alterna ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

IN hoc loco Præceptor explicat sex modos argumentandi in proportionibus. Primus dicitur proportio alterna, seu permutata: Secundus, inuersa, seu è contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, vel disiuncta proportionalitas: Quintus, conuersio rationis, siue euersa proportionalitas: Sextus demum, est proportio ex æqualitate, seu æqua proportio.

Quantum igitur ad primum dicit Euclides, Alterna, seu permutata proportio est, cum positis quatuor magnitudinibus proportionalibus A, B, C, D, infertur eandem esse proportionem antecedentis A, ad antecedentem C; quam habet consequens B, ad consequentem D. Vnde Authores sic formant huiusmodi argumentationem; Si est vt A, ad B, ita C, ad D; igitur permutando, seu vicissim erit vt A ad C, ita B, ad D. Quod vero hæc argumentatio sit bona ad Propos. 16. huius libri demonstratur, dummodo tamen quatuor magnitudines sint eiusdem generis.

XIII.

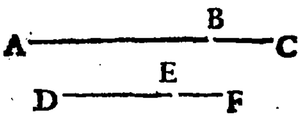
Inuersa ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

SI fuerint quatuor magnitudines proportionales, A, B, C, D, hoc modo, vt A, ad B, ita C, ad D, & inferamus ita esse consequens B, ad antecedentem A, vt consequens D, ad aliud antecedens C; dicemur argumentari ab inuersa proportione. Authores sic formant istam argumentationem. Vt est A, ad B, ita C, ad D: igitur conuertendo, vel è contrario erit quoque B, ad A, vt D, ad C. Quam argumentationem bonam esse ad Corollar. Propos. 4. huius libri ostendendum erit.

XIV.

Compositio rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu vnius, ad ipsam consequentem.

SIt proportio AB, ad BC, quæ DE, ad EF; colligaturque eam pariter esse proportionem totius AB, & BC, simul, ad consequentē BC, quam habet totum DF, ex DE, & EF, compositum, ad consequentem EF; dicetur huiusmodi argumentatio compositio rationis, ex eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud antecedens. Hisque verbis fit hæc argumentatio. Vt AB, ad BC, ita



ita DE, ad EF; ergo componendo erit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Bonitas huius argumentationis confirmatur in hoc libro Propos. 18.

Quo argumentandi modo addi possunt alij duo, quorum primus dicitur compositio rationis conuersa; quando scilicet sumitur antecedens, & consequens, vt vna, quæ cum antecedente conferatur, dicendo. Si est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; ergo est etiam AC, ex antecedente, & consequente composita ad antecedentem AB, vt est DF, pariter ex antecedente, & consequente conflata, ad antecedentem DE. Quam argumentationem esse validam ad Propos. 18. huius lib. demonstrabimus; in qua hoc dicendi modo vti poterimus: Ergo per compositionem rationis conuersam, &c.

Alter postea modus dici potest, compositio rationis contraria; quando nimirum eadem magnitudo antecedens refertur ad antecedentem, & consequentem, ceu ad vnam. Vt si est AB, ad BC, vt DE, ad EF, inferimus compositionem rationis contrariam; igitur erit vt AB, antecedens ad totam AC, ita DE, antecedens ad ipsam DF; quod pariter ad Propos. 18. huius ostendetur.

XV.

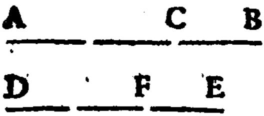
Diuisio rationis, est sumptio excessus, quo ancedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

VErbi gratia si dicatur, quæ proportio est totius AB, ad CB, eadem est totius DE, ad FE igitur erit & excessus AC, (quo antecedens consequentem superat) ad CB, consequentem, vt excessus DF, ad consequentem FE. In hac argumentatione Authores ita loquentur: ergo diuidendo, &c. Hæc illatio ostendenda erit ad Propos. 17. huius lib.

XVI.

Conuersio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens superat ipsam consequentem.

SI hoc modo argumentetur. Sicuti est tota magnitudo AB, ad CB, ita tota DE, ad FE: igitur ita etiam erit eadem AB, ad AC, excessum, vt DE, ad DF, dicemur per conuersionem rationis argumentari. Vnde Authores sic loquuntur, ergo per conuersionem rationis, &c. Qui modus argumentandi confirmatur in Coroll. Propos. 19. huius libri.



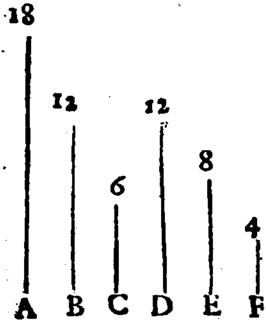
XVII.

Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudibus prima ad vltimam sese habuerit. Vel aliter. Sumptio extremorum per subductionem mediorum.

SInt plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, sintque binæ, & binæ in eadem ratione, hoc est A ad B, vt D ad E, & B ad C, vt E ad F. Si igitur colligatur, propterea eam esse pro-

por-

portionem primæ magnitudinis A, ad tertiam C, quę est D, quartæ ad F, sextam; dicetur huiuſmodi argumentandi forma ex æquo, ſiue ex æqualitate, in qua ſcilicet extremæ magnitudines ſubductis medijs colliguntur habere vnam, eandemque proportionem inter ſe.



Quoniam vero duobus modis licet ex æqualitate arguere, videlicet ordinate procedendo, vel ordinem perturbando, Euclides duabus ſequentibus definitionibus exponit quid ſit ordinata, & quid perturbata proportio.

XVIII.

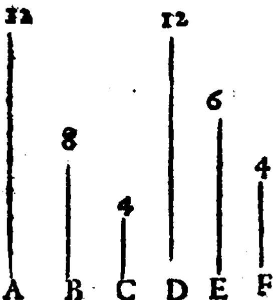
Ordinata proportio eſt, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem: fuerit etiam, vt conſequens ad aliud quidpiam, ita conſequens ad aliud quidpiam.

SI fuerit A, ad B, vt D, ad E; rurſuſque vt B, conſequens ad aliud quidpiam, nempe ad C, ita conſequens E, ad aliud quidpiam nempe ad F; dicetur talis proportio ordinata; quia idem ordo tam in primis, quam ſecundis magnitudinibus ſeruatur. Huiuſmodi argumentatio demonſtratur ad Propoſitionem 22. huius libri.

XIX.

Perturbata autem proportio eſt, cum tribus poſitis magnitudinibus, & alijs, quæ ſint his multitudine pares; vt in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

SI ſit quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; deinde vt in primis magnitudinibus B, conſequens ad C, aliud quidpiam, ita in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam D, ad antecedentem E; tunc huiuſmodi proportio nuncupabitur perturbata, ex eo quod non ſeruetur idem ordo in magnitudinum proportionibus. Hanc eſſe optimam argumentationem in Propoſitione 23. huius libri demonſtratur. Aduertendum tamen eſt, proportionem tam ordinatam, quam perturbatam extremorum eandem proportionem ſemper inferre ex æqualitate, etiam ſi plus, quam tres magnitudines proponantur, vt ex Propoſ. 22. & 23. huius libri fiet manifeſtum.



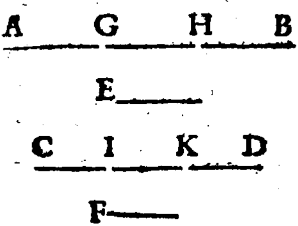
In Quinto Elemento.

IN Quinto Euclidis libro analogiæ, seu proportiones examinantur in communi quidem, nullatenus descendendo ad vllam determinatam quantitatem.

PROPOS. 1. THEOR. 1.

Si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulę singularum, ęquemultiplices; quam multiplex vnius est vna maguitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SI sint quotcunq; magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum E, & F, æque multiplices. Dico magnitudines AB, CD, simul, tam esse multiplices magnitudinum E, F, simul, quam est multiplex AB, ipsius E, vel CD, ipsius F. Probat. Cum enim AB, CD, sint æque multiplices ipsarum E, & F, si AB, diuidatur in magnitudines AG, GH, HB, ipsi E, æquales, etiam CD, in magnitudines CI, IK, KD, ipsi F, æquales diuidetur; eruntque magnitudines CI, IK, KD, tot numero, quot sunt magnitu-



dines AG, GH, HB, quia tam multiplex est AB, ipsius E, quam multiplex est CD, ipsius F: Quoniam vero AG, & E, æquales sunt inter se, si ipsis addantur æquales CI, & F, [per 2. prō.] erunt AG, CI, simul æquales ipsis E, & F, simul. Eodem modo erunt GH, & IK, simul æquales ipsis E, & F, simul; Nec non etiam HB, & KD, simul ipsis E, & F, simul æquales erunt. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties etiam E, F, simul in AB, CD, simul comprehenduntur: Ideoque quam multiplex est AB, ipsius E, tam sunt multiplices AB, CD, simul ipsarum E, & F, simul, vt constat ex dictis in 2. defin. huius libri. Quare si sint quoscunque magnitudines, quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Hæc propositio in quacunque proportione ad propos. 12. huius libri demonstratur; nempe tam in proportione rationali, quam irrationali.

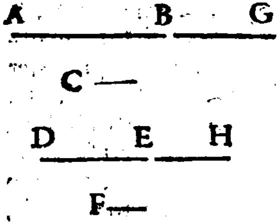
PROPOS. 2. THEOR. 2.

Si prima secundæ æque fuerint multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem, & quinta secundæ æque multiplex atque sexta quartę; erit & composita prima cum quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.

SIt prima magnitudo AB, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex tertia DE, quartæ F; rursus tam multiplex sit quinta BG, secundæ C, quam multiplex est sexta EH, ipsius quartæ F. Dico primam

mam AB, vna cum quinta BG, compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quam multiplex est tertia DE, vna cum sexta EH, composita, ipsius quartę F.

Prob. Cum enim AB, DE, sint æque multiplices ipsarum C, & F; erunt in AB, tot magnitudines æquales ipsi C, quot sunt in DE, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt & in BG, tot magnitudines æquales ipsi C, quot sunt in EH, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus AB, DE, addantur ęquales multitudines BG, EH, toties comprehendetur C, in AG, quoties F, in DH. Ideoque tam multiplex erit AB, prima composita cum quinta BG, ipsius secundæ C, quam multiplex est DE, tertia composita cum sexta EH, ipsius quartæ F. Si itaque prima secundæ æque fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.



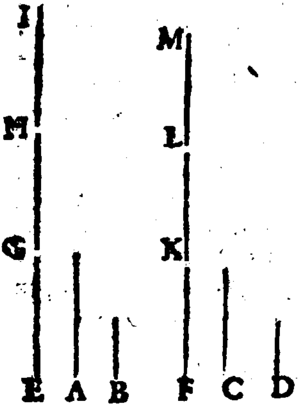
SCHOLIVM.

Hoc totum pariter concluditur ab Euclide in omni genere proportionis ad propos. 24. huius libri.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

Si sit prima secundæ æquemultiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

SIt prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quam multiplex est tertia C, quartæ D, sumanturque E, & F, æquemultiplices ipsarum A, & C, E, quidem ipsius A, & F, ipsius C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam multiplex est F, ipsius D, quartæ. Probatur. Cum enim E, & F, sint æquemultiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, vt ver. gra. in EG, GH, HI, æquales ipsi A; & FK, KL, LM, æquales ipsi C; Erũt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam vero EG, FK, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, æquemultiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi: erunt & EG, FK, earundem B, D, æquemultiplices. Quoniam igitur EG, prima magnitudo tam est multiplex secundæ B, quam est multiplex FK, tertia, ipsius quartæ D: Item GH, quinta tam multiplex est eiusdem secundæ B, quam multiplex KL, sexta eiusdem quartæ D. Erit [*per 2. quin.*] & EH, composita ex prima, & quinta tam multiplex secundæ B, quam est multiplex FL, composita ex tertia, & sexta, ipsius quartæ D. Rursus cum sit EH, prima tam multiplex secundæ B, quam multiplex est tertia FL, quartæ D, vt iam demonstratum est; sit autem & HI, quinta tam multiplex secundæ B, quam est LM, sexta multiplex ipsius quartę D: [*per 2. quin.*] erit & EI, composita ex prima, & quinta tam multi-



plex

plex secundæ B, quam est FM, composita ex tertia, & sexta ipsius quartæ D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in ipsis E, & F; si ergo prima secundæ æque sit multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod ostendendum erat.

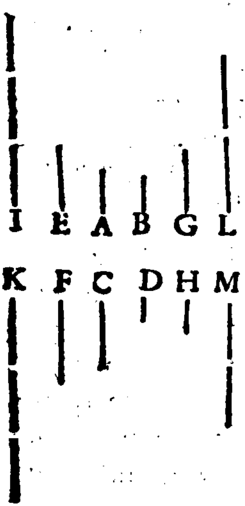
SCHOLIVM.

Hoc theorema non solum in magnitudinibus æquemultiplicibus, sed etiam in omnibus proportionibus ostendetur ad Propos. 22. huius lib.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æquemultiplices primæ, & tertiæ, ad æquemultiplices secundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si pro vt inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIt proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æquemultiplices E, & F; Item secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationem; siue enim E, F, æque multiplices sunt ipsarum A, C, sicut G, H, ipsarum B, D, siue non. His positis constat ex def. 6. huius libri, si E, deficit à G, etiam F, deficit ab H; & si E, æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse ipsi H; & denique si E, excedit G, etiam F, excedere H; alioquin non esset eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, contra suppositum. Dico iam multiplicia primæ, & tertiæ non solum vna deficere à multiplicibus secundæ, ac quartæ, aut vna æqualia esse, aut vna excedere, vt diximus, sed eandem quoque proportionem habere inter se, nimirum ita esse E, multiplex primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, vt F, multiplex tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc est si rursus, E, statuatur prima magnitudo; G, vero secunda; F, tertia, & H, quarta: sumanturque ipsarum E, F, æquemultiplicia qualiacunque; Item ipsarum G, H, alia quæcunque etiam æque multiplicia; Multiplicia ipsarum E, F, à multiplicibus ipsarum G, H, vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere, prout vult defin. 6. Rursus capiantur I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; nec non etiam L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam



igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæque sunt I, & K, æque multiplices ipsarum E, F, primæ, ac tertiæ: [*per 3. quin.*] Erunt ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum A, C, secundæ, & quartæ. Eadem prorsus ratione erunt L, M, ipsarum B, D, æquemultiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; ostenseque sunt I, K, æque multiplices primæ, & tertiæ A, C; item L, M, æque multiplices secundæ, & quartæ B, D, [*per 6. def. quin.*] fit vt si I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, necessario sit æqualis ipsi M; & demum

mum si I, excedit ipsum L, etiam K, necessario ipsam M, excedere debeat: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplicibus magnitudinum E, & F; nec non magnitudinum G, & H; quia semper hæc æquemultiplicia, quæcunque sint, [*per 3 quin.*] æquemultiplicia quoque erunt magnitudinum A, C, & B D. Itaque cum I, & K, sint æquemultiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æquemultiplices secundæ G, & quartæ H, ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoque esse, quam M, multiplicem quartæ, si æqualis, æqualis; si minor, minor; atque hoc totum contingere in quacunque multiplicatione: [*per 6. def. quinti.*] erit vt E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si igitur prima ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex modo dictis facile demonstrabitur Inuersa ratio, quam Euclides def. 13. explicauit; hoc est, si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem è contra, seu inuersa ratione proportionales esse. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico esse conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, & F, æquemultiplicibus ipsarum A, primæ, & C, tertiæ; Item G, H, æquemultiplicibus B, secundæ, & D, quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, secundam se habet vt C, tertia ad D, quartam, [*per 3. quin.*] necessario sequitur si E, multiplex primæ minor fuerit quã G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quam H, multiplicem quartæ: quo stante perspicuum est si è contrario G, maior fuerit quam E, vel æqualis, vel minor, etiam H, maiorem fore, vel

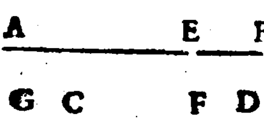
æqua-

æqualem, vel minorem, quam F, ſecundum quamcunque multiplicationem ſumpta fuerint hæc æque multiplicia. Si enim vtraque E, F, minor eſt, quam vtraque G, H, erit è contra vtraque G, H, maior quam vtraque E, F, &c. Itaque quoniam primæ B, & tertiæ D, ſumpta ſunt æque multiplicia G, H; item ſecundæ A, & quartæ C, æquemultiplicia E, F; oſtenſumque eſt G, H, vel vna excedere E, F, vel vna æqualia eſſe, vel vna deficere, ſecundum quamcunque multiplicationem ea multiplicia ſumantur; [*per 6. def. quinti.*] erit B, prima ad A, ſecundam, vt D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ; Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

ITa multiplex ſit tota AB, totius CD, vt eſt multiplex ablata AE, ablatæ CF. Dico reliquam EB, ita eſſe multiplicem reliquæ FD, vt eſt tota AB, totius CD. Probatur. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuſpiam magnitudinis, videlicet ipſius GC, vt eſt AE, multiplex ipſius CF, vel tota AB, totius CD. Quoniam igitur AE, EB, æque multiplices ſunt ipſarum CF, GC; [*per 1. quin.*] erit tota AB, totius GF, ita multiplex, vt AE, ipſius CF, hoc eſt omnes omnium, vt vna vnius: Sed tam multiplex etiam ponitur AB, ipſius CD, quam eſt multiplex AE, ipſius CF. Igitur AB, tam eſt multiplex ipſius CF, quam multiplex eſt



ipſius

ipsius CD; atque idcirco [*per 6. pron.*] æquales sunt GF, CD; ablata igitur communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipsius FD, quam multiplex est ipsius GC; Sed ita multiplex posita fuit EB, ipsius GC, vt AE, ipsius CF, hoc est vt tota AB, totius CD. Quare tam multiplex est reliqua EB, reliquæ FD, quam est tota AB, totius CD. Si magnitudo ergo magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonstrandum.

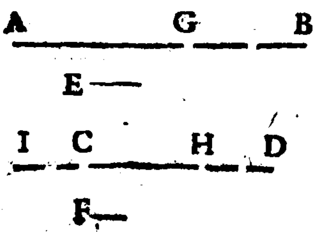
SCHOLIVM.

Hæc propositio vniuersè demonstrabitur Propos. 19. in qua magnitudines cuiuscumque proportionis exhibentur.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Si duę magnitudines duarum magnitudinum sint æquemultiplices, & quædam detractæ sint earumdem æque multiplices, & reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æquę ipsarum multiplices.

Sint magnitudines AB, CD, æque multiplices ipsarum E, F; & detractæ AG, CH, earumdem, E, F, æquæ multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut esse æquales eisdem E, F, aut certe earumdem æque multiplices. Prob. Cum enim AB, sit multiplex ipsius E, & ablata quoque AG, eiusdem



dem E, multiplex; erit reliqua GB, vel æqualis ipsi E, vel eius multiplex: alias inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici componeret multiplicem, quod est absurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipsi E. Dico etiam HD, ipsi F, esse æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipsi F. Quia enim prima AG, tam est multiplex secundæ E, quam tertia CH, multiplex est quartæ F; & quinta GB, æqualis est secundæ E, sicut & CI, sexta æqualis est quartæ F; [*per* 2. *quin.*] Erit AB, prima cum quinta ita multiplex secundæ E, vt HI, tertia cum sexta multiplex est quartæ F; Atqui CD, ipsius F, erat quoque tam multiplex, quam AB, multiplex est ipsius E. Æque multiplices igitur sunt HI, CD, ipsius F. Ideoque [*per* 6. *pron.*] æquales inter se. Quare dempta communi CH, remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, posita sit æqualis ipsi F; erit quoque HD, eidem F, æqualis. Quod est propositum.

Sit deinde GB, multiplex ipsius E. Dico ita quoque esse HD, multiplicem ipsius F. Posita namque CI, ita multiplici ipsius F, vt est multiplex GB, ipsius E; [*per* 2. *quin.*] erit vt prius AB, ita multiplex ipsius E, vt est multiplex HI, ipsius F; quare iterum [*per* 6. *pron.*] æquales erunt HI, CD; atque adeo dempta communi CH, reliquæ etiam CI, HD, æquales erunt: Sed CI, est ita multiplex ipsius F, vt est GB, ipsius E, ex hypothesi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipsius F, quam GB, ipsius E; quod est propositum. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æquæ multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

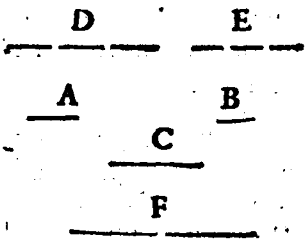
Hoc pariter ostendetur Propos. 24. in omni genere proportionis.

PRO-

PROPOS. 7. THEOR. 7.

Aequales ad eandem, eandem habent rationem: & eadem ad æquales.

SInt duæ magnitudines, A, B, inter se æquales, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Itemque viciſsim C, ad ipsas A, & B, eandem quoque proportionem habere. Prob. Sumantur enim D, E, æquemultiplices ipsarum æqualium A, B; [*per 6. pron.*] eruntque D, E, æquales inter se. Capiatur denuo F, vtcunque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E. æquales sunt fit, vt vtraque, vel minor sit quam F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cum D, E, æquemultiplices primæ A, & tertiæ B, minores sint ipsa, F, multiplici secundæ, & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum) vel æquales, vel maiores, [*per 6. def quinti.*] erit ea proportio primæ, A, ad C, secundam, quæ tertiæ B, ad eandem C, quartam.



Eodem modo ostendemus F, vel minorem esse vtraque D, E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ, ac tertiæ C, vna deficiat à D, & E, æquemultiplicibus secundæ A, & quartæ B; vel vna æqualis, vel maior; [*per 6, def. quinti.*] erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Possel

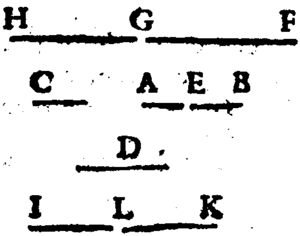
autem

autem breuius ostendi hæc secunda pars per Coroll. 4. Propos. ex inuersa ratione. Cum enim iam sit ostensum esse A, ad C, vt B, ad C, erit conuertendo C, ad A, vt C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem; & eadem ad æquales. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Inæqualium magnitudinum maior adeandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem maiorem rationem habet, quam ad maiorem.

Sint inæquales magnitudines AB, maior, & C, minor, tertia autem quælibet D. Dico proportionem AB, ad D, maiorem esse proportione C, ad eandem D. Et è conuerso maiorem esse proportionem D, ad minorem C, quam ad AB, maiorem. Prob. Intelligatur enim in maiore magnitudine AB, magnitudo AE, æqualis minori C, sitque



reliqua EB. Deinde vtraque EB, AE, æqualiter multiplicentur hac lege, vt GF, multiplex ipsius EB, maior quidem sit quam D; At HG, multiplex ipsius AE, non sit minor eadem D; sed vel æqualis, vel maior. Quoniam igitur due FG, GH, æquemultiplices sunt duarum BE, EA; [*per 1. quinti.*] erit & tota FH, ita multiplex totius AB, vt HG, ipsius AE, hoc est C, cum æquales sint positæ C, & AE. Capiatur quoque ipsius D, multiplex IK, quæ proxime maior sit quam HG.

HG. Abſciſa ergo LK, quæ æqualis ſit ipſi D, non erit IL, maior quam HG, (alias IK, non eſſet multiplex ipſius D, proxime maior quam HG; ſed & IL, maior quoque eſſet quam HG. Quod ſi IK, dupla ſit ipſius D. perſpicuum eſt IL, non eſſe maiorem quã HG, cum HG, poſita ſit minor nõ quam D, hoc eſt quam LK,) & idcirco HG erit vel æqualis ipſi IL, vel maior. Et quia FG, maior eſt poſita quam D; LK, vero æqualis eidem D; erit quoque FG, maior quam LK. Cum ergo HG, non minor ſit quam IL, vt demonſtratum eſt, ſed vel æqualis, vel maior; erit tota FH, maior quam IK. Itaque cum FH, HG, ſint æquemultiplices primæ AB, tertiæ C; atque IK, multiplex ipſius D. (quæ ad inſtar eſt ſecundæ, & quartæ:) ſit autem FH, multiplex primæ maior quam IK, multiplex ſecundæ: at HG, multiplex tertiæ non ſit maior quam IK, multiplex quartæ, immo minor ex hypotheſi (ſumpta enim eſt IK, multiplex ipſius D, maior quam HG) erit [*per 8. def. quinti.*] maior proportio primæ AB, ad D, ſecundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

Quoniam verò è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima, ac tertia; C, ſecunda; & AB, quarta) maior eſt quam HG, multiplex ſecundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, maior non eſt quam FH, multiplex quartæ AB, immo minor, cum FH, maior ſit, quam IK. vt oſtenſum eſt: [*per 8. def. quinti*] erit maior proportio D. primæ ad C, ſecundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam; quod fuit propoſitum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem; hæ quoque inter se sunt æquales.

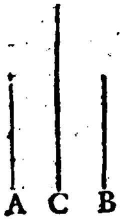
HAbeant primum A, & B, eandem rationem ad C. Dico A, & B, esse inter se æquales Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, maior, & B, minor; erit igitur [*per* 8.*quin.*] maior proportio maioris A, ad C, quam minoris B, ad eandem C; quod est contra suppositum. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A. & B. Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam, si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; [*per* 8.*quinti*] haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad A, maiorem, quod pariter esset contra hypothesim. Non igitur maior erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod fuit demonstrandum.

PROPOS. 10. THEOR. 10.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

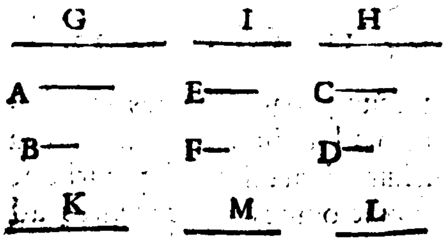
HAbeat in primis A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C, Dico A, maiorem esse

esse quam B. Prob. Si enim A, foret ipsi B, æqualis, [*per 7. quin.*] haberent A, & B, eandem proportionem ad C; Si autem A, minor esset quam B, [*per 8. quinti.*] haberet B, maior ad C, proportionem maiorem, quam A, minor ad eandem C, quod est contra suppositum. Non est igitur A, æqualis, vel minor quam B, sed maior. Habeat secundo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico pariter B, minorem esse quam A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; alioqui [*per 7 quinti*] haberet C, eandem proportionem ad A, & B, quod est contra hypothesim. Neque vero B, maior erit quam A, alias [*per 8. quinti*] haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem, quam ad B, maiorem; quod magis est contra suppositum. Minor igitur est B, quam A, quod est propositum. Ad eandem ergo magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.



PROPOS. 11. THEOR. 11.

Quæ eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.



Sint proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E ad F. Dico & proportiones A. ad B, & C, ad D, easdem esse inter se secundum defin. 6. hoc est

 sum-

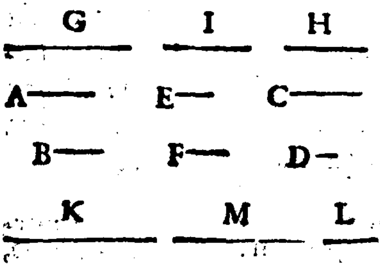
sumptis æquemultiplicibus ipsarum A, C; item æquemultiplicibus ipsarum BD, semper cótingere, vt multiplices ipsarum A, C, a multiplicibus ipsarum B, D, vel vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æquemultiplices quæcunque G, H, I; & ad omnes consequentes B, D, F, aliæ quæcunque æquemultiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; fit vt si G, multiplex primæ deficiat à K, multiplici secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplici quartæ: si æqualis, æqualis: si maior, maior: Sed (vt eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, vel æqualis, vel maior, est quoque H, minor, vel æqualis, vel maior quam L, propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplici secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D. Et si G, æqualis est, vel maior, quam K, etiam H, æqualis erit, vel maior, quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque alijs æquemultiplicibus. Quare [*per 6. def. quin.*] erit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eędem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 12. THEOR. 12.

Si fuerint quotcunq; magnitudines proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Id

ID quod Euclides in Propos. 1. huius libri de multiplici proportione demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis etiam irrationalis. Sint ergo quotcũque magnitudines, A, B, E, F, C, D, proportiõ. hoc est sit A, ad B, vt E, ad F, & C, ad D. Dico vt est vna antecedentium ad vnam consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes

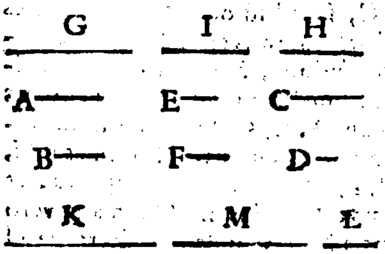


antecedentes A, E, C, simul ad omnes consequẽtes B, F, D, simul. Probat. Sumptis enim G, I, H, æquemultiplicibus antecedentium; & K, M, L, æquemultiplicibus consequentium; [*per 1. quin.*] erunt omnes G, I, H, simul omnium A, E, C, simul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipsius A; & omnes K, M, L, simul omnium B, F, D, simul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt K, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; & vt E, primã ad F, secundam, ita C, tertia ad D, quartam; [*per 6. def. quin.*] sit vt si G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplici secundæ B, deficiat quoque I, multiplex tertiæ E, ab M, multiplici quartæ F, & H, ab L; Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit I, ipsi M, & H, ipsi L, vel maior. Ac proinde si G, minor est, vel æqualis, vel maior, quam K, & omnes G, I, H, simul, omnibus K, M, L, minores sint, vel æquales, vel maiores. Quocirca [*per 6. def quin.*] est vt A, prima ad B, secundam, ita A, E, C, tertia ad B, F, D, quartam. Si itaque sint quotcunque magnitudines proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 13. THEOR. 13.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

SIt A, prima ad B, ſecundam vt C, tertia ad D, quartam: ſit autem proportio tertiæ C, ad quartam D, maior quam quinta E, ad ſextam F. Dico & proportionem A, primæ ad B, ſecundam eſſe maiorem quam E, quintæ ad F, ſextã, ſecundum definitionem 8. hoc eſt ſumptis æquemultiplicibus ipſarum B, F, contingere poſſe, vt multiplex primæ A, excedat multiplicem ſecundæ B; at multiplex tertiæ E, non excedat multiplicem quartæ F.



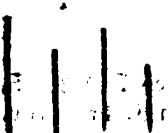
Sumptis enim G, H, I, æquemultiplicibus antecedentium, & K, L, M, æquemultiplicibus conſequentium, cum ſit A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam; [*per 6 def. quinti.*] fit vt ſi G, multiplex primæ excellerit K, multiplicem ſecundę, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipſam L, multiplicem quartę, &c. At quando H, excedit ipſam L, [*per 8. def. quin.*] non neceſſerio I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando erit, vel minor; ex eo quod maior ponatur

pro-

proportio C, primæ ad D, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Igitur si G, excedit K, non necessario excedit M. Quare [*per 8. def. qui.*] maior est proportio A, primę ad B, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quapropter si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod ostendendum erat.

PROPOS. 14. THEOR. 14.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertię, erit & secunda æqualis quartæ; si vero minor, & minor erit.



A B C D

Sit enim A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico si A, maior fuerit quam C, etiam B, maiorem fore quam D; si æqualis, æqualis; si minor, minor. Sit primum A, maior quam C, quapropter [*per 8. quinti.*] proportio maioris A, ad B, maior erit quam proportio minoris C, ad eandem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autem tertiæ A, ad quartam B, vt ostensum est, maior est quam quintæ C, ad sextam B; [*per 13. quin.*] maior quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam. [*per 10. quin.*] Minor est ergo D, quam B, ideoque B, maior erit quam D. Quod est propositum.

Sit deinde A, æqualis ipsi C, idcirco [*per 7. quint.*] erit

erit A, ad B, vt C, ad D. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem sunt proportioni A, ad B, [*per* 11. *quin.*] erunt quoque inter se eædem proportiones C, ad D. & C, ad B. Ideoque [*per* 9. *quin.*] æquales erunt B, & D. Quod est propositum.

Sit tertio A, maior quam C, eritque [*per* 8. *quinti*] maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad eandem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad B quartam minor, quam C, quintæ ad B, sexta. [*per* 13 *quinti*] Minor quoque erit proportio C, primæ ad D secundam, quam C, quintæ ad B, sextam; Ideoque [*per* 10. *quinti.*] B, minor erit quam D, quod est propositum. Si igitur prima ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 15. THEOR. 15.

Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

SInt partium A, & B, æquemultiplices CD, & EF. Dico ita esse CD, ad EF, vt A, ad B. Probatur. Cum enim CD, & EF, sint æquemultiplices ipsarum A, & B. continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Diuidatur ergo CD, in partes CG, GH, HD, æquales ipsi A; & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipsi B; eritque [*per* 7. *quinti*] CG, ad EI, vt A, ad B, quod CG, & A, nec non etiam EI, & B, æquales inter se sint, Eademque ratione erit

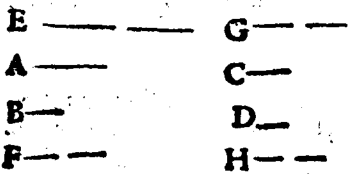
GH,

GH, ad IK, & HD, ad KF, vt A, ad B: ideoque [per 8. qui.] CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quocirca vt CG, ad EI, hoc est vt A, ad B, [per 12. quin.] ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, simul ad omnes EI, IK, KF, simul: quod est propositum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandũ.

PROPOS. 16. THEOR. 16.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

IN hoc loco demonstratur alterna, siue permutata proportio, seu ratio, quæ explicata fuit defin. 12. huius libri. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim, seu permutãdo esse quoque A, ad C, vt B, ad D. Probatur. Sumantur enim ipsarum, A, B, primæ, & secundæ æquemultiplices E, & F; item ipsarum C, D, tertiæ, ac quartę ęquemultiplices G, H, eritque [per 15. quin.] E, ad F, vt A, ad B, cum E, & F, sint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, sint eædem proportioni A, ad B; erunt & ipsæ inter se eædem. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D; [per 11. quinti] erunt & ipsæ eędem inter se; hoc est vt est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. Quare [per 14 quin.] si E, prima maior est quam G, tertia, vel æqualis, vel minor; erit quo-

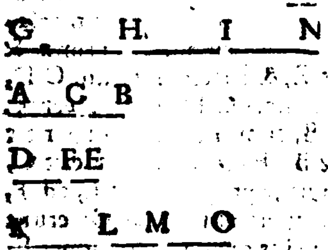


que F, secunda maior quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunque multiplicatione accepta sint æquemultiplicia E, & F, & æquemultiplicia G, H. Est igitur [*per 6. def quinti.*] A, prima ad C, secundam, vt B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, sint æquemultiplices primæ A, ac tertiæ B, & G, & H, æquemultiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant, &c.) quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

PROPOS. 17. THEOR. 17.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

HOc loco demonstrat Euclides diuisionem rationis, quam defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales hoc est, sit AB, ad CB, vt DE, ad FE. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE, in illo sensu, quem defin. 6. exposuimus:



Capiantur enim ipsarum AC, CB, & DF, FE, æquemultiplices eodem ordine GH, HI, KL, LM; eritque [*per 1. qui.*] GI, ita multiplex ipsius AB, vt est GH ipsius AC, hoc est vt KL, ipsius DF. Sed vt est multiplex KL, ipsius DF, [*per 1. quint.*] ita quo-

que

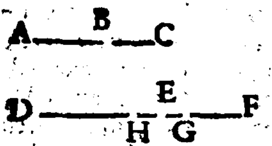
que multiplex est KM, ipsius DE. Ergo æquemultiplices sunt GI, kM, ipsarum AB, DE. Capiantur rursus IN, MO, æquemultiplices ipsarum CB, FE. Quoniam igitur sic est multiplex HI, prima secundæ CB, vt LM, tertia quartæ FE: Item tam est multiplex IN, quinta secundæ CB, quam multiplex est MO, sexta quartæ FE; [*per 2. quin.*] Erit & HN, sic multiplex secundæ CB, vt LO, multiplex est quartæ FE. Itaque cum sit AB, prima ad secundam CB, vt DE, tertia ad FE, quartam; sumptæque sint æque multiplices GI, kM, primæ, ac tertiæ AB, DE: Item secundæ, & quartæ CB, FE, æquemultiplices HN, LO, [*per 6. def. quinti,*] fit vt si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplici secundæ CB, etiam kM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE: & si æqualis, æqualis: si excedat, excedat. Quod si deficiat tam GI, ab HN, quam kM, ab LO, ablatis communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipsi IN, & kL, ipsi MO. Et si denique GI, excesserit ipsam HN, & kM, ipsam LO, ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipsam IN, & kL, ipsam MO. Quamobrem cum GH, kL, sumptæ sint æquemultiplices primæ AC; & tertiæ DF: Item IN, MO, æquemultiplices secundæ CB, & quartę FE, ostensumque sit (in quacumque multiplicatione illę æquemultiplices fuerint acceptæ) æquemultiplices primæ, & tertiæ ab æquemultiplicibus secundæ, & quartæ, vel vna deficere, vel æquales esse, vel vna excedere; [*per 6. def. quinti,*] erit AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam; quod fuit propositum. Si igitur compositæ magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

PRO-

PROPOS. 18. THEOR. 18.

Si diuisæ magnitudines fuerint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.

IN hoc loco Euclides demonstrat compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales, hoc est AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico & compositas proportionales esse, hoc est vt AC, ad BC, ita esse DF, ad FE.



Probatur. Si enim non est vt AC, ad BC, ita DF, ad FE, habebit DF, ad aliquam magnitudinem minorem ipsa EF: vel maiorem eandem proportionem quam AC, ad BC. Habeat primum DF, ad GF, minorem ipsa EF, si fieri potest, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur est vt AC, ad BC, ita DF, ad GF: [*per 17. quin.*] Erit diuidendo, vt AB, ad BC, ita DG, ad GF: sed vt AB, ad BC, ita quoque posita est DE, ad EF: igitur [*per 11. quinti.*] erit etiam vt DG, prima ad GF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DG, prima maior sit quam DE, tertia; [*per 14. quinti.*] erit quoque GF, secunda maior quam EF, quarta, pars maior toto, quod est absurdum.

Iisdem prorsus fundamentis demonstrabitur absurdum, nempe totum minus sua parte, si dicatur DF, ad HF, maiorem ipsa EF, eandem habere proportionem, quam AC, ad BC. Cum enim DH, prima minor sit quam DE, tertia; [*per 14 quinti*] erit quoque

HF,

HF, secunda minor quam EF, quarta: totum minus parte, quod est absurdum. Non igitur habebit ad minorem ipsa EF, aut ad maiorem eandem proportionem, quam AC, habet ad BC. Quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 19. THEOR. 19.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum se habebit, vt totum ad totum.

ID, quod in Propos. 5. demonstratum est de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonstratur.

Sit enim tota AB, ad totam CD, vt ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, esse ad reliquam FD, vt est tota AB, ad totam CD. Cum enim sit AB, ad CD, vt AE, ad CF; [*per* 16. *quin.*] erit & permutãdo AB, ad AE, vt CD, ad CF. Diuidendo igitur [*per* 17 *quin.*] erit EB, ad AE, vt FD, ad CF. Quare [*per* 16 *quin.*] permutando rursus erit EB, ad FD, vt AE, ad CF, hoc est vt tota AB, ad totam CD, cum posita sit AB, ad CD, vt AE, ad CF. Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex his facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui desumitur à Conuersione rationis, iuxta 16. definitionem.

Sit

Sit enim vt AB, ad EB, ita CD, ad FD. Dico per conuersionem rationis esse quoque vt AB, ad AE, ita CD, ad CF. Cum enim sit, vt AB, ad EB, ita CD, ad FD; [*per* 17. *quinti.*] Erit quoque diuidendo vt AE, ad EB, ita CF, ad FD. Igitur & conuertendo, vt EB, ad AE, ita FD, ad CF. Ac propterea [*per* 18. *quin.*] componendo quoque vt AB, ad AE, ita CD, ad CF. Quod fuit propositum.

PROPOS. 20. THEOR. 20.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; Ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta maior. Quod si prima tertiæ fuerint æqualis, erit & quarta æqualis sextæ sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SInt tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E: & B, ad C, vt E, ad F, sit autem primum A, prima maior, quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, [*per* 8. *quin.*] erit maior proportio A, ad B, quã C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E; igitur [*per* 13. *quinti.*] maior quoque erit proportio D, ad E, quam C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur proportio etiam erit D, ad E, quam

quam F, ad E. Quare [*per* 10.*quinti.*] D, maior erit quam F. Quod fuit propositum.

Deinde sit A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C, æqualis, [*per* 7. *quinti.*] erit eadem proportio A, ad B, quæ C, ad B; est autem vt A, ad B, ita D, ad E. [*per* 15. *quinti.*] Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B; At vt C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem, vt supra; Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad E Ideoque [*per* 9 *quin.*] æquales erunt D, & F. Quod est propositum.

Demum sit A, minor quam C. Dico & D, minorem esse quam F. Cum enim A, minor sit quam C, [*per* 8. *quin.*] erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed vt A, ad B, ita D, ad E, quare [*per* 13 *quin.*] Minor quoque erit proportio D, ad E, quam C, ad B. Vt autem prius conuertendo est vti C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E. Ac propterea [*per* 10. *quinti.*] D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 21. THEOR. 21.

Si sint tres magnitudines, & alię ipsis numero æquales, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis; erit & quarta æquaiis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SInt tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, sitque

per-

perturbata earum proportio, hoc est, vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Sit autem primo loco A, prima maior, quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta F. Cum enim A, maior sit quam C, [*per 8. quinti.*] erit maior proportio A, ad B quam C, ad B: est autem vt A, ad B, ita E, ad F: ergo [*per 13. qui.*] maior quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita est D, ad E, erit conuertendo, vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D: Ideoque [*per 10. quinti.*] maior erit D, quam F; quod est propositum.

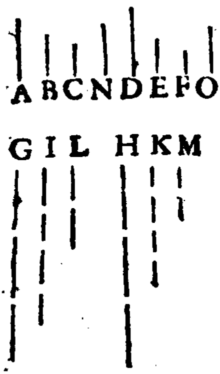
Deinde sit A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis ipsi C; [*per 7. quinti*] erit A, ad B, vt C, ad B: sed vt A, ad B, ita est E, ad F: est autem ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, vti prius. Igitur [*per 11 quinti*] erit quoque, vt E, ad F, ita E, ad D; Atque idcirco [*per 9. quinti*] D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.

Sit tertio A, minor quam C. Dico & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor; [*per 8. quinti*] erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F; ergo [*per 13. quin.*] minor est proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt supra, ex inuersa ratione est vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; Ac propterea [*per 10. quinti.*] D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, &c. Quod ostendendum erat.

PROPOS. 22. THEOR. 22.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IN hoc theoremate demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio est ordinata.



Sint enim primum tres magnitudines A,B,C, & aliæ tres D,E,F; sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æquemultiplicibus G, & H: Item ipsarum BE, æquemultiplicibus IK; item ipsarum C, F, æquemultiplicibus L, M. Cum enim sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; [*per* 4. *quinti.*] erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ, B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quarte E. Eadem ratione cum sit B, prima ad C, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; [*per* 4. *quinti.*] erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres, H, K, M, quæ binæ in eadem ratione sumuntur; [*per* 10. *quinti.*] fit vt si G, prima superat tertiam L; superet quoque necessario H, quarta sextam M; & si æqualis, æqualis; & si deficiat, deficiat. Quare cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel vna deficiant ab L, M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna æquales sint, vel vna excedant in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia; [*per 6. def. quinti.*] erit A, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

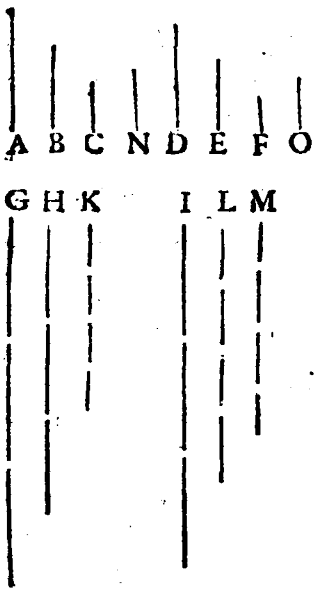
Deinde sint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiam C, ad N, vt F, ad O. Dico etiam esse vt A, ad N. ita D, ad O. Cum enim supra sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F: ponatur nunc C, ad N, vt F, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ, & in eadem ratione sumuntur; ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus per quatuor; sicut idem in quatuor demonstratum fuit per tres, &c. Quare si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 23. THEOR. 23.

Si sint quotcumque magnitudines, aliæque ipsis numero æquales, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IN hoc theoremate demonstratur ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque perturbata earum proportio, hoc est sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico pariter ex æqualitate esse, vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis namque

que ipsarum A,B,D, æquemultiplicibus G,H,I: Item ipsarum C,E,F, æquemultiplicibus K, L, M;[*per* 15. *quinti.*] erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarum A,B, æquemultiplices. At vero vt A, ad B, ita est E, ad F; igitur[*per* 11. *quin.*] vt G, ad H, itaquoque est E, ad F: sed vt E, ad F, [*per* 15 *quinti.*] itaquoque est L, ad M; quod L,M,sint ipsarum E, F, æquemultiplices. Igitur [*per* 11.*quin.*] erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; [*per* 4. *quinti*] erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad k, multiplicem secundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia ergo sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione sumuntur; estq; earum perturbata proportio; cum ostensum sit esse, vt G, ad H, ita L, ad M; & vt H, ad k, ita I ad L; [*per* 21. *quinti*] fit vt si G, prima superat tertiam k, superet pariter quarta I, sextam M; & si æqualis, æqualis; si minor, minor. Quare cum G, & I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, à k, & M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant; erit [*per* 6.*def.quinti.*]

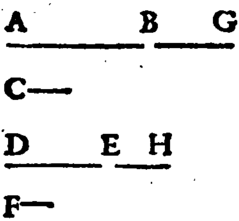


vt A, prima ad C, ſecundam, ita D, tertia ad F, quartam, quod eſt propoſitum. Itaque ſi ſint tres magnitudines, &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOS. 24. THEOR. 24.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam; Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam eandē habebit rationem, quam compoſita tertia cum ſexta, ad quartam.

ID, quod propoſ. 2. demonſtrauit Euclides de ſola proportione multiplici, demonſtrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, ſecundam, vt DE, tertia ad F, quartam: Item BG, quinta ad C, ſecundam, vt EH, ſexta ad F, quartam. Dico ita eſſe AG, compoſitam ex prima, ac quinta, ad ſecundam C, vt eſt DH, compoſita ex tertia, & ſexta, ad quartam F. Cum enim ſit vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur eſt AB, ad C, vti DE, ad F; & C, ad BG, vt F, ad EH; [per 22. quin.] erit ex æquali AB, ad BG, vt DE, ad EH. Componendo igitur [per 8. quin.] erit vt tota AG, ad BG, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rurſus ſit AG, ad BG, vt DH, ad EH: & BG, ad C, vt EH, ad F; [per 22. quin.] Erit ex æquali AG, ad C,

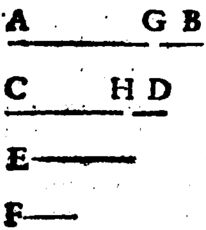


vt DH, ad F. Quod est propositum. Si ergo prima ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 25. THEOR. 25.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: Maxima, & minima reliquis duabus maiores erunt.

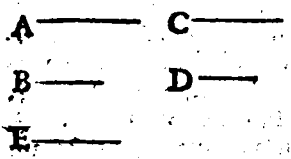
SIt enim AB, ad CD, vt E, ad F, sitq; AB, omnium maxima, & F, minima. Dico duas AB, & F, simul esse maiores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E: & ex CD, alia CH, æqualis ipsi F. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc est vt AB, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, vt ablata AG, ad ablatam CH: Erit quoque [*per 19. quinti.*] vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Est autẽ AB, cum sit omniũ maxima, maior quã CD: igitur [*per 14. qui*] & GB, maior erit quã HD. Quoniã vero AG, & E, æquales sunt, si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E; fient AG, & F simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul maior quam E, & CD, simul, cum GB, sit maiores quam HD. Quod est propositũ. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.



PROPOS. 26. THEOR. 26.

Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam maiorem proportionem, quam quartam ad tertiam.

HAbeat enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem eſſe proportione D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior proportione E, ad B; ac propterea [*per* 10. *quin.*] A, maior erit quam E. Quare [*per* 8. *quin.*] minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed vt eſt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C: igitur proportio B, ad A, minor quoque erit quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.

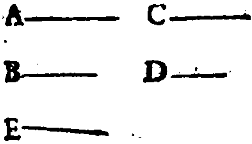


PROPOS. 27. THEOR. 27.

Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoq; viciſſim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam ſecunda ad quartam.

SI enim A, ad B, habeat maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem quoque

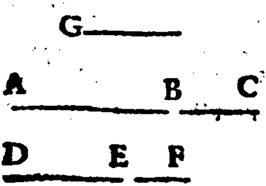
que esse proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur itaque existere E, ad B, vt C, ad D, eritque proportio A, ad B, maior etiam, quam E, ad B, Ideoque [*per* 10. *quin.*] A, erit maior quam E. Quare [*per* 8. *quin.*] maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C. Quoniam vero [*per* 16 *quinti.*] permutando est vt E, ad C, ita B, ad D, (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit, quam B, ad D. Quod est propositum.



PROPOS. 28. THEOR. 28.

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoq; composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

Sit maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo maiorem esse proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur autem esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, maior quoque, quam G, ad BC. Ideoque [*per* 10. *quin.*] AB, maior quam G. Addita ergo cõmuni BC, fiet AC, maior quam G, cũ BC; [*per* 8. *quin.*] ac



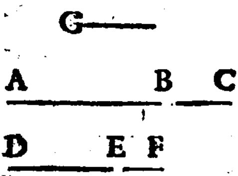
S 4 pro-

propterea maior erit proportio AC, ad BC, quã G cũ BC, ad BC. Sed componendo, [*per 18 qui.*] vt est G cũ BC, ad BC, ita est DF, ad EF, (quia posita fuit G, ad BC, vt DE, ad EF) Ergo maior etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod fuit propositum.

PROPOS. 29. THEOR. 29.

Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

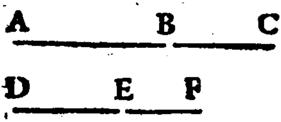
SIt maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem esse AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur autem esse G cũ BC, ad BC, vt DF, ad EF, eritq; proportio AC, ad BC, maior quoq; proportione G cũ BC, ad BC: ideoq; [*per 10. qui.*] maior erit AC, quam G cũ BC. Ablata ergo communi BC; maior erit AB, quam G: Ac propterea [*per 8. quinti*] maior erit proportio AB, ad BC, quam G, ad BC: Sed diuidendo, [*per 17. quinti.*] vt est G, ad BC, ita est DE, ad EF, (posita namque est G cum BC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF, Quod fuit propositum.



PRO-

PROPOS. 30. THEOR. 30.

Si compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda, ad primam minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.



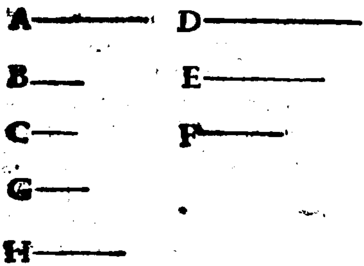
SIt maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conuerſionem rationis, minorem eſſe proportionem AC, ad AB, quam DF, ad DE. Cum enim ſit minor proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF; [*per 29. quin.*] erit & diuidendo maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quare [*per 26. quin.*] conuertendo, minor erit proportio BC, ad AB, quam EF, ad DE: Ac propterea [*per 28. quinti.*] & componendo minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod eſt propoſitum.

PROPOS. 31. THEOR. 31.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, ſitque maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam primæ poſteriorum ad ſecundam: Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quam ſecundæ po-

posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

SInt tres magnitudines A, B, C, & aliæ numero æquales D, E, F, sitque maior proportio A, ad B, quam D, ad E: Nec non etiam maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse proportionem A, ad C, quam D, ad F. Concipiatur enim esse G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea proportio B, ad C, maior quam G, ad C; Ideoque [*per* 10. *quin.*] B, maior erit quam G. Quare [*per* 8. *quinti.*] maior erit proportio A, ad G, minorem, quam A, ad B, maiorem: Ponitur autem proportio A, ad B, maior quam D, ad E. Ergo multo maior erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Quo stante denuo intelligatur esse H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; Ideoque [*per* 10. *quin.*] A, maior erit, quam H. Quare [*per* 8. *quinti.*] maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandem C: Sed [*per* 21. *quinti.*] vt H, ad C, ita est ex æqualitate D, ad F. (Quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G, & vt E, ad F, ita G, ad C.) Quare maior quoque proportio erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

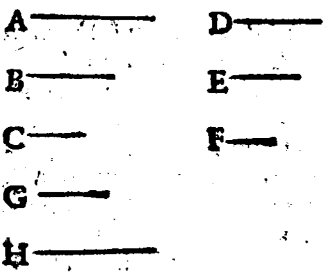


PRO-

PROPOS. 32. THEOR. 32.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

Sint tres magnitudines, A, B, C, & aliæ numero æquales D, E, F, sitque maior proportio A, ad B, quam E, ad F. Item maior B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoque ex æqualitate maiorem proportionem A, ad C, quam D, ed F. Intelligatur autem esse G, ad C, vt D, ad E; eritque proportio B, ad C, maior quã G, ad C: Ideoq; B, [per 10. quin.] maior erit, quam G. Quare [per 8. quinti.] maior erit proportio A, ad G, minorem, quam eiusdem A, ad B, maiorem: Est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Quo posito intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; Ideoque [per

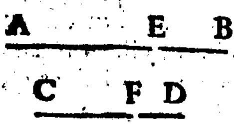


10.*quin*]maior erit A, quam H. Quocirca [*per* 8.*quin.*] A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor, ad eandem C: At, [*per* 23.*quinti.*] vt H, ad C, ita est ex æqualitate D, ad F (quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C; Et vt E, ad F, ita est H, ad G.) Maior ergo erit etiam proportio A, ad C, quam D, ad F, Quod est propositum.

PROPOS. 33. THEOR. 33.

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

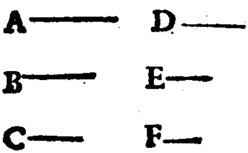
SIt maior proportio totius AB, ad totum CD, quam ablati AE, ad ablatum CF. Dico etiam proportionem reliquæ EB, ad reliquum FD, maiorem esse, quam totius AB, ad totum CD. Cum enim maior sit proportio AB, ad CD, quam AE, ad CF; [*per* 27.*quinti*] erit quoque permutando maior proportio AB, ad AE, quam CD ad CF; ac propterea [*per* 30.*quinti.*] per conuersionem rationis minor erit proportio AB, ad EB, quam CD, ad FD; permutando igitur [*per* 27 *quin.*] minor quoque erit proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD, hoc est EB, reliqua ad reliquam FD, maiorem habebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod est propositum.



PROPOS. 34. THEOR. 34.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, ſitque maior proportio primæ priorum ad primam poſteriorum, quam ſecundæ ad ſecundam: & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam: ſicque deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, maiorem proportionem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes poſteriores, relicta pariter prima: Minorem autem, quam prima priorum ad primam poſteriorum: denique maiorem etiam, quam vltima priorum ad vltimam poſteriorum.

SInt primo loco tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F; ſit autem maior proportio A, ad D, quam B, ad E: Item maior B, ad E, quam C, ad F. Dico portionem ipſarum A, B, C, ſimul, ad ipſas D, E, F, ſimul, maiorem eſſe proportione B, C, ſimul, ad ipſas E, F, ſimul: Minorem vero proportione A, ad D; maiorem denique etiam proportione C, ad F. Cum enim maior ſit proportio A, ad D, quam B, ad E; [*per* 27. *qui.*] erit permutando maior A, ad B, quam D, ad E, igitur [*per* 28. *quinti.*] componendo, maior erit proportio ipſarum, A, B, ſimul, ad B, quam ipſarum D, E, ſimul, ad E; permutando igitur, rurſus



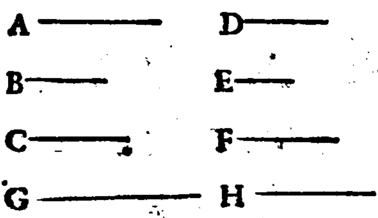
[per

[*per* 27. *quinti.*] maior erit proportio A, B, simul ad D, E, simul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E. maiorem habeat proportionem, quam ablata B, ad ablatam E; [*per* 33. *quinti.*] habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quam tota AB, ad totam D, E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad E, quam totius BC, ad totam E, F: Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius, ad totam E, F Permutando igitur, [*per* 27. *quin.*] maior erit proportio A, ad B, C, quam D, ad E, F, &[*per* 28. *quin.*] componendo ergo maior est proportio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, F. Et [*per* 27. *quinti.*] rursus permutando, maior proportio omnium A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul, quam B, C, ad EF. Quod fuit primo loco propositum.

Quare cum sit maior proportio totius A, B, C, ad totum D, E, F, quam ablati B, C, ad ablatum E, F; [*per* 33. *quin.*] erit etiam maior proportio reliqui A, ad reliquum D, quam totius A, B, C, ad totum D, E, F. Quod est secundum.

Quoniam vero maior est proportio B, ad E, quam C, ad F; [*per* 27. *qui.*] erit permutando maior quoque B, ad C, quam E, ad F; Et [*per* 28. *qui.*] componendo, maior totius B, C, ad C, quam totius E, F, ad F: & rursus permutando, [*per* 27. *qui.*] maior B, C, ad E, F, quam C, ad F. Est autem maior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt ostendimus, quam B, C, ad E, F; multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quam vltimæ C, ad vltimam F. Quod est tertium.

Deinde sint quatuor magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales cum eadem hypothesi, nempe sit maior proportio tertiæ C, ad tertiam F, quam quartæ G, ad quartam H. Dico eadem consequi. Vt enim iam in tribus est ostensum, maior est proportio B, ad E, quam B,C,G, ad E,F, H. Multo ergo maior erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H, ergo [*per 27. quin.*] permutando minor erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H; & [*per 28. quni.*] componendo maior A,B, C,G, ad B,C,G, quam D,E,F,H, ad E,F, H; & [*per 27. quin.*] permutando A,B,C,G, ad D,E,F,H, maior quam B,C,G, ad E,F,H. Quod erat propositum.



Quapropter cum sit maior proportio totius A, B, C,G, ad totam D,E, F,H, quam ablatæ B, C, G, ad ablatam E,F,H. [*per 33. quin.*] Erit & reliquæ A, ad reliquam D, maior proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D,E,F,H, quod est secundum.

Quoniam vero, vt in tribus demonstratum fuit, maior est proportio B,C,G, ad E,F,H, quam G, ad H; & maior A,B,C,G, ad D,E,F,H, quam B,C,G, ad E,F,H, vt ostensum fuit; multo maior erit proportio A,B,C,G, ad D,E,F,H, quam vltimæ G, ad vltimam H. Quod est tertium.

Demum eodem modo concludi potest, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinque, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor per tres. Quare constat totum hoc Theorema, &c.

Quinti Elementi Finis.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

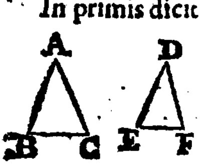
DEFINITIONES.

I.

SImiles sunt figuræ rectilineæ, quæ & singulos angulos singulis angulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

POstquam Euclides in Libro Quinto explicationem proportionum in quantitatibus continuis genericè, nullatenus descendendo ad aliquam speciem quantitatis, absoluit, in hoc 6. libro specificè ostendit quamnam proportionem inter se habeant lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, aliæque figuræ planæ. Quod vt facilius exequatur.

In primis dicit quod figuræ rectilineæ sunt illæ, quæ habent angulos inter se æquales, & insuper latera circa ipsos æquales angulos proportionalia. Vt v.g. triangula ABC, DEF, tantummodo similia dicentur, si fuerint æquiangula, itaut angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi

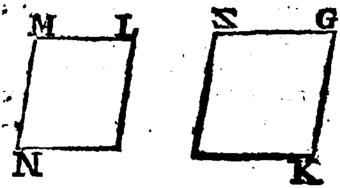


ipsi F, æqualis sit: Nec non etiam latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est vt AB, ad AC, ita DE, ad DF, & vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; & vt AC, ad CB, ita DF, ad FE.

II.

Reciprocæ figuræ sunt cum in vtraque figura antecedentes, & consequentes rationum termini fuerint.

VT exempligratia si in parallelogrammis ZK, NL, latera ZG, GK ita fuerint proportionalia lateribus LM, MN, vt in vtroque parallelogrãmo sit & antecedens, & consequẽs diuersarum proportionũ; hoc est ea sit proportio ZG ad LM, quæ MN ad GK. In hoc enim casu ZG antecedens primæ rationis est in vno parallelogrammo, & LM consequens in alio parallelogrammo: & rursus MN antecedens alterius rationis reperitur in illo parallelogrammo, in quo posuimus consequentem alterius rationis; & consequens GK stat in alio parallelogrammo, in quo reperitur ZG antecedens prioris rationis. Quare in vtroque parallelogrammo ZK, LN reperitur antecedens, & consequens rationum; & ideo reciproca erunt posita parallelogramma. Quod dictum est de parallelogramma valet etiam de triangulis; in alijs autem figuris talis reciprocatio non consideratur à Geometris.



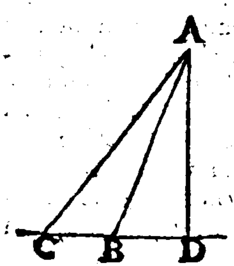
III.

Secundum extremam, & mediam rationem recta linea ſecta eſſe dicitur, cum vt tota ad maius ſegmentum, ita maius ad minus ſe habuerit.

SI recta aliqua linea AB, ita diuidatur in C, inæqualiter, vt quemadmodum tota AB, ad maius ſegmentum AC, ita maius ſegmentum AC, ad minus ſegmentum CB; huiuſmodi linea dicetur diuiſa ſecundũ extremam, & mediam rationem. Hanc diuiſionem exponet Euclides Propoſ. 30. huius libri, eamque propoſuit, licet alijs verbis, in ſecundo libro Propoſ. 11. Innumeræ quidem ſunt vtilitates lineæ taliter ſectæ, vt conſtat ex libris Stereometriæ, vnde iuremerito hæc diuiſio vocari ſolet Diuina proportio.

IV.

Altitudo cuiuſcunque figuræ eſt linea perpendicularis à vertice ad baſim deducta.



IN triangulo ABC, vertex ſit A, à quo ad Baſim BC, perpendicularis ducatur AD, dicetur hæc perpendicularis altitudo trianguli ABC, ita vt tantam dicatur habere altitudinem triangulum ABC, quanta eſt perpendicularis AD.

V.

V.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVoniam denominator cuiuslibet proportionis exprimit quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem (vt denominator quadruplæ proportionis, nempè 4. ostendit in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem : denominator vero proportionis sub quadruplæ, nempe vnum quart. indicat antecedentem esse quartam partem consequentis, &c.) Dici solet denominator à Geometris, seu quantitas proportionis. Quapropter hæc definitio vult, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionem, seu illius proportionis denominatorem. Vt v. g. proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & sextupla; quandoquidem denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est in 6. Eadem prorsus ratione proportio trigecupla dicitur componi ex dupla; tripla, & quintupla. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. illius denominatorem, &c.

Vnde quemadmodum in magnitudinibus continuè proportionalibus (vt dictum est ad Defin. 10. lib. 5) proportio primæ ad vltimam dicitur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. Sic etiam in qui-buscumque magnitudinibus ordine positis proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec proportio extiterit; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam consurgit ex denominatoribus proportionum inter mediarum inter se multiplicatis.

Hoc totum confirmatur à Clauio in hoc loco adducendo varias antiquorum demonstrationes circa hanc materiam: Quas demonstrationes apud citatum authorem legere, haud inutile erit.

In Sexto Elemento.

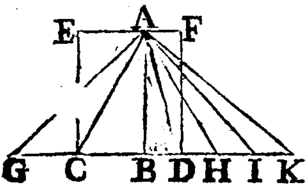
Tandem in hoc Sexto Elemento habemus expositas figurarum proportiones inter sese; nempe inter figuras similes, & reciprocas, inter rectas lineas proportionales, inter parallelogramma ad rectas lineas applicata. Quomodo linea extrema, ac media ratione secetur. Tandemque de proportionibus circumferentiarum, & angulorum, sectorumque in circulis æqualibus. Quibus omnibus sextum Elementum absoluit.

PROPOS. I. THEOR. I.

Triangula, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, inter se ita se babent, vt bases.

Sint duo triangula ABC, ABD, eandem habentia altitudinem, quorum bases sint BC, BD. Item duo

duo parallelogramma BE, BF, eiusdem altitudinis, quorum eædem bases BC, BD. Dico ita esse triangulum ABC, ad triangulum ABD, & parallelogrammum BE, ad parallelogrammum BF, vt est basis BC, ad basim BD. Hoc est si basis BC,



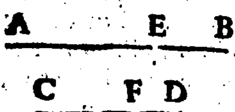
statuatur prima magnitudo, & basis BD, secunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum BE, tertia, & triangulum ABD, vel parallelogrammum BF, quarta, æquemultiplicia primæ, ac tertiæ ab æquemultiplicibus secundæ, & quartæ, vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere, vt ostensum fuit in Defin. 6. lib. 5. Ponantur enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas EF, GK, sicque vt dictum est in Defin. 6. huius libri, triangula, & parallelogramma eandem habebunt altitudinem, cum perpendiculares ad bases demissę æquales existant. Rursus ex BG, sumantur quotcunque rectę (licet in nostra figura vna tantum sumatur) æquales ipsi BC, & sit CG: Item ex BK, abscindantur quotcunque rectæ DH, HI, IK, æquales ipsi BD. Deinde à puncto A, ducantur rectæ AG, AH, AI, AK. Erunt igitur [*per* 38. *pri.*] triangula ABC, ACG, super æquales bases, & inter easdem parallelas æqualia. Eademque ratione ęqualia erunt triangula BAD, DAH, HAI, IAK, Quammultiplex ergo est recta GB, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum BAG, trianguli BAC: & quam multiplex est recta BK, rectæ BD, tam quoque multiplex erit triangulum BAK, trianguli BAD, quia in tot triangula æqualia sunt diuisa tota triangula ABG, ABK, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ BG, BK. Quoniam vero si basis BG, æqualis

10.*quin*]maior erit A, quam H. Quocirca [*per* 8.*quin*. A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor, ad eandem C: At, [*per* 23.*quinti*.] vt H, ad C, ita est ex æqualitate D, ad F (quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C; Et vt E, ad F, ita est H, ad G.) Maior ergo erit etiam proportio A, ad C, quam D, ad F, Quod est propositum.

PROPOS. 33. THEOR. 33.

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

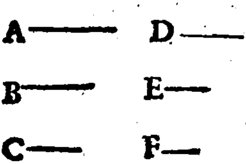
SIt maior proportio totius AB, ad totum CD, quam ablati AE, ad ablatum CF. Dico etiam proportionem reliquæ EB, ad reliquum FD, maiorem esse, quam totius AB, ad totum CD. Cum enim maior sit proportio AB, ad CD, quam AE, ad CF; [*per* 27 *quinti*] erit quoque permutando maior proportio AB, ad AE, quam CD ad CF; ac propterea [*per* 30.*quinti*.] per conuersionem rationis minor erit proportio AB, ad EB, quam CD, ad FD; permutando igitur [*per* 27 *quin*.] minor quoque erit proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD, hoc est EB, reliqua ad reliquam FD, maiorem habebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod est propositum.



PROPOS. 34. THEOR. 34.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, ſitque maior proportio primæ priorum ad primam poſteriorum, quam ſecundæ ad ſecundam: & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam: ſicque deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, maiorem proportionem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes poſteriores, relicta pariter prima: Minorem autem, quam prima priorum ad primam poſteriorum: denique maiorem etiam, quam vltima priorum ad vltimam poſteriorum.

SInt primo loco tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F; ſit autem maior proportio A, ad D, quam B, ad E: Item maior B, ad E, quam C, ad F. Dico portionem ipſarum A, B, C, ſimul, ad ipſas D, E, F, ſimul, maiorem eſſe proportione B, C, ſimul, ad ipſas E, F, ſimul: Minorem vero proportione A, ad D; maiorem denique etiam proportione C, ad F. Cum enim maior ſit proportio A, ad D, quam B, ad E; [*per 27. qui.*] erit permutando maior A, ad B, quam D, ad E, igitur [*per 28. quinti.*] componendo, maior erit proportio ipſarum, A, B, ſimul, ad B, quam ipſarum D, E, ſimul, ad E; permutando igitur, rurſus



[per

[*per 27. quinti.*] maior erit proportio A, B, simul ad D, E, simul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E. maiorem habeat proportionem, quam ablatã B, ad ablatam E; [*per 33. quinti.*] habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quam tota AB, ad totam D, E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad E, quam totius BC, ad totam E, F: Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius, ad totam E, F Permutando igitur, [*per 27. quin.*] maior erit proportio A, ad B, C, quam D, ad E, F, &[*per 28. quin.*] componendo ergo maior est proportio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, F. Et [*per 27. quinti.*] rursus permutando, maior proportio omnium A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul, quam B, C, ad EF. Quod fuit primo loco propositum.

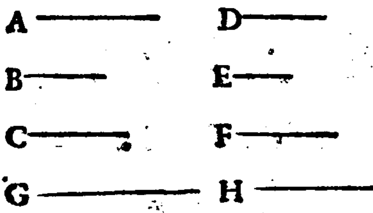
Quare cum sit maior proportio totius A, B, C, ad totum D, E, F, quam ablati B, C, ad ablatum E, F; [*per 33. quin.*] erit etiam maior proportio reliqui A, ad reliquum D, quam totius A, B, C, ad totum D, E, F. Quod est secundum.

Quoniam vero maior est proportio B, ad E, quam C, ad F; [*per 27. qui.*] erit permutando maior quoque B, ad C, quam E, ad F; Et [*per 28. qui.*] componendo, maior totius B, C, ad C, quam totius E, F, ad F: & rursus permutando, [*per 27. qui.*] maior B, C, ad E, F, quam C, ad F. Est autem maior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt ostendimus, quam B, C, ad E, F; multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quam vltimæ C, ad vltimam F. Quod est tertium.

Deinde sint quatuor magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales cum eadem hypothesi, nempe sit maior proportio tertiæ C, ad tertiam F, quam quartæ G, ad quartam H. Dico eadem consequi. Vt enim

iam

iam in tribus est ostensum, maior est proportio B, ad E, quam B,C,G, ad E,F, H. Multo ergo maior erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H, ergo [*per* 27.*quin.*] permutando minor erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H; & [*per* 28. *quni.*] componendo maior A,B, C,G, ad B,C,G, quam D,E,F,H, ad E,F, H; & [*per* 27.*quin.*] permutando A,B,C,G, ad D,E,F,H, maior quam B,C,G, ad E,F,H. Quod erat propositum.



Quapropter cum sit maior proportio totius A, B, C,G, ad totam D,E, F,H, quam ablatæ B, C, G, ad ablatam E,F,H. [*per* 33.*quin.*] Erit & reliquæ A, ad reliquam D, maior proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D,E,F,H, quod est secundum.

Quoniam vero, vt in tribus demonstratum fuit, maior est proportio B,C,G, ad E,F,H, quam G, ad H; & maior A,B,C,G, ad D,E,F,H, quam B,C,G, ad E,F,H, vt ostensum fuit; multo maior erit proportio A,B,C,G, ad D,E,F,H, quam vltimæ G, ad vltimam H. Quod est tertium.

Demum eodem modo concludi potest, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinque, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor per tres. Quare constat totum hoc Theorema, &c.

Quinti Elementi Finis.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

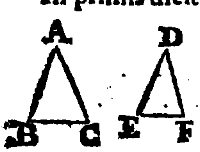
DEFINITIONES.

I.

Similes sunt figuræ rectilineæ, quæ & singulos angulos singulis angulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

POstquam Euclides in Libro Quinto explicationem proportionum in quantitatibus continuis genericè, nullatenus descendendo ad aliquam speciem quantitatis, absoluit, in hoc 6. libro specificè ostendit quamnam proportionem inter se habeant lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, aliæque figuræ planæ. Quod vt facilius exequatur.

In primis dicit quod figuræ rectilineæ sunt illæ, quæ habent angulos inter se æquales, & insuper latera circa ipsos æquales angulos proportionalia. Vt v. g. triangula ABC, DEF, tantummodo similia dicentur, si fuerint æquiangula, itaut angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi

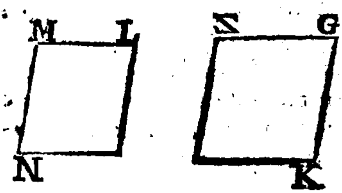


ipsi F, æqualis sit: Nec non etiam latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est vt AB, ad AC, ita DE, ad DF, & vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; & vt AC, ad CB, ita DF, ad FE.

II.

Reciprocæ figuræ sunt cum in vtraque figura antecedentes, & consequentes rationum termini fuerint.

VT exempligratia si in parallelogrammis ZK, NL, latera ZG, GK ita fuerint proportionalia lateribus L M, MN, vt in vtroque parallelogrãmo sit & antecedens, & consequẽs diuersarum proportionũ; hoc est ea sit proportio ZG ad LM, quæ MN ad GK. In hoc enim casu ZG antecedens primæ rationis est in vno parallelogrammo, & LM consequens in alio parallelogrammo: & rursus MN antecedens alterius rationis reperitur in illo parallelogrammo, in quo posuimus consequentem alterius rationis; & consequens GK stat in alio parallelogrammo, in quo reperitur ZG antecedens prioris rationis. Quare in vtroque parallelogrammo ZK, LN reperitur antecedens, & consequens rationum; & ideo reciproca erunt posita parallelogramma. Quod dictum est de parallelogramma valet etiam de triangulis; in alijs autem figuris talis reciprocatio non consideratur à Geometris.



Q III.

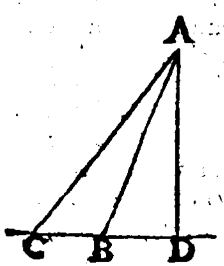
III.

Secundum extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum vt tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

SI recta aliqua linea AB, ita diuidatur in C, inæqualiter, vt quemadmodum tota AB, ad maius segmentum AC, ita maius segmentum AC, ad minus segmentum CB; huiusmodi linea dicetur diuisa secundũ extremam, & mediam rationem. Hanc diuisionem exponet Euclides Propos. 30. huius libri, eamque proposuit, licet alijs verbis, in secundo libro Propos. 11. Innumeræ quidem sunt vtilitates lineæ taliter sectæ, vt constat ex libris Stereometriæ, vnde iuremerito hæc diuisio vocari solet Diuina proportio.

IV.

Altitudo cuiuscunque figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basim deducta.



IN triangulo ABC, vertex sit A, à quo ad Basim BC, perpendicularis ducatur AD, dicetur hæc perpendicularis altitudo trianguli ABC, ita vt tantam dicatur habere altitudinem triangulum ABC, quanta est perpendicularis AD.

V.

V.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVoniam denominator cuiuslibet proportionis exprimit quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem (vt denominator quadruplæ proportionis, nempè 4. ostendit in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem: denominator vero proportionis sub quadruplæ, nempe vnum quart. indicat antecedentem esse quartam partem consequentis, &c.) Dici solet denominator à Geometris, seu quantitas proportionis. Quapropter hæc definitio vult, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionem, seu illius proportionis denominatorem. Vt v.g. proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & sextupla; quandoquidem denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est in 6. Eadem prorsus ratione proportio trigecupla dicitur componi ex dupla; tripla, & quintupla. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. illius denominatorem, &c.

Vnde quemadmodum in magnitudinibus continuè proportionalibus (vt dictum est ad Defin. 10. lib. 5) proportio primæ ad vltimam dicitur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. Sic etiam in qui-buscumque magnitudinibus ordine positis proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec proportio extiterit; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam consurgit ex denominatoribus proportionum inter mediarum inter se multiplicatis.

Hoc totum confirmatur à Clauio in hoc loco adducendo varias antiquorum demonstrationes circa hanc materiam: Quas demonstrationes apud citatum authorem legere, haud inutile erit.

In Sexto Elemento.

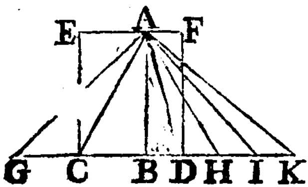
TAndem in hoc Sexto Elemento habemus expositas figurarum proportiones inter sese; nempe inter figuras similes, & reciprocas, inter rectas lineas proportionales, inter parallelogramma ad rectas lineas applicata. Quomodo linea extrema, ac media ratione secetur. Tandemque de proportionibus circumferentiarum, & angulorum, sectorumque in circulis æqualibus. Quibus omnibus sextum Elementum absoluit.

PROPOS. I. THEOR. I.

Triangula, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, inter se ita se habent, vt bases.

SInt duo triangula ABC, ABD, eandem habentia altitudinem, quorum bases sint BC, BD. Item duo

duo parallelogramma BE, BF, eiusdem altitudinis, quorum eædem bases BC, BD. Dico ita esse triangulum ABC, ad triangulum ABD, & parallelogrammum BE, ad parallelogrammum BF, vt est basis BC, ad basim BD. Hoc est si basis BC, statuatur prima magnitudo, & basis BD, secunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum BE, tertia, & triangulum ABD, vel parallelogrammum BF, quarta, æquemultiplicia primæ, ac tertiæ ab æquemultiplicibus secundæ, & quartæ, vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere, vt ostensum fuit in Defin. 6. lib. 5. Ponantur enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas EF, GK, sicque vt dictum est in Defin. 6. huius libri, triangula, & parallelogramma eandem habebunt altitudinem, cum perpendiculares ad bases demissę æquales existant. Rursus ex BG, sumantur quotcunque rectę (licet in nostra figura vna tantum sumatur) æquales ipsi BC, & sit CG: Item ex BK, abscindantur quotcunque rectæ DH, HI, IK, æquales ipsi BD. Deinde à puncto A, ducantur rectæ AG, AH, AI, AK. Erunt igitur [*per 38. pri.*] triangula ABC, ACG, super æquales bases, & inter easdem parallelas æqualia. Eademque ratione ęqualia erunt triangula BAD, DAH, HAI, IAK, Quammultiplex ergo est recta GB, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum BAG, trianguli BAC: & quam multiplex est recta BK, rectæ BD, tam quoque multiplex erit triangulum BAK, trianguli BAD, quia in tot triangula æqualia sunt diuisa tota triangula ABG, ABK, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ BG, BK. Quoniam vero si basis BG, æqualis



fuerit basi Bk, [*per* 38. *pri.*] necessario triangulum ABG, æquale erit triangulo ABK, ac proinde si BG, maior fuerit quam BK, necessario ABG, maius erit quam ABk, & si minor, minus erit; propterea que deficient vna BG, recta, & triangulum ABG, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ad BK, recta triangulo BAK, æquemultiplicibus secundæ BD, & quartæ BAD, vel vna æqualia erunt, vel vna excedent, si ea, quæ inter se respondent, sumantur. Quare [*per* 6. *def. quinti.*] quæ proportio est primæ BC, ad secundam BD, basis ad basim, ea erit tertiæ BAC, ad quartam BAD, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basim, ita est triangulum ad triangulum; quod fuit propositum.

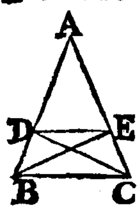
Quoniam vero [*per* 15 *quinti.*] vt triangulum ABC, ad triangulum ABD, ita est parallelogrammum BE, [*per* 34. *pri.*] (duplum enim est trianguli ABC,) ad parallelogrammum BF, quod pariter est duplum trianguli ABD; vnde perspicuum est [*per* 11. *quin.*] ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogrammum, vt basis ad basim. Quod totum confirmari potest eodem argumento, quo vsi sumus in triangulis, si prius ex punctis C, G, rectæ ducantur parallelæ ipsi BA, necnon ex punctis H, I, K, parallelæ ipsi BA, &c. Triangula igitur, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases, &c. quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

IN triangulo ABC, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis namque rectis CD, BE, [*per 37. primi.*] erunt triangula BDE, CED, super eandem basim DE, & inter easdem parallelas DE, BC, constituta inter se æqualia. Quare [*per 7. qui.*] vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est idem triangulum ADE, ad triangulum EDC: Atqui [*per 1. sex.*] vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est basis AD, ad basim BD, (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis, vt constat si per E, parallela agatur ipsi AB.) Eademq; ratione vt triangulum ADE, ad triangulum EDC, ita est basis AE, ad basim EC. Vt igitur AD, ad BD, [*per 11. quinti.*] ita est AE, ad EC, (cum hæ duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, & eiusdem trianguli ADE, ad triangulum EDC.) Quod est propositum.



Secet deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC.

Ductis enim, vt supra, rectis CD, BE, [*per* 1. *sex.*] erit basis AD, ad basim DB; ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem vt AD, ad DB, ita AE, ad EC: igitur [*per* 11. *quinti.*] erit vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita AE, ad EC. Sed [*per* 1. *sex.*] vt basis AE, ad basim EC. ita est triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum pariter sint eiusdem altitudinis: Igitur [*per* 11. *qui.*] vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est idem triangulum ADE; ad triangulum DEC. Æqualia ergo [*per* 19 *quin.*] sunt triangula BDE, DEC: ac propterea cum eandem habeant basim DE, [*per* 39. *pri.*] erunt inter easdem parallelas constituta. Quare parallela est DE, ipsi BC: quod est propositum. Si igitur ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostẽdendum.

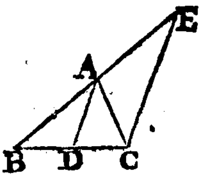
PROPOS. 3. THEOR. 3.

Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta liuea secuerit & basim; basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat angulum ipsius trianguli.

IN triangulo ABC, recta AD, secet primo angulum BAC, bifariam. Dico esse vt BA, AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per C, recta CE, parallela ipsi DA, donec cum BA, pariter producta concurrat in

E, pun-

E, puncto: (debent autem coire CE, & BA, quia anguli B, & BCE, minores sunt duobus rectis: siquidem cum duo anguli ABD, BDA in triangulo ABD, [*per* 17.*pri.*] sint minores duobus rectis; & angulus BDA, [*per* 29.*pri.*] sit æqualis interno, & opposito BCE, erunt etiam duo anguli B, & BCE, minores duobus rectis: quare iuxta defin. 13. lineæ CE, BA, tandem coibunt)



eritque [*per* 29. *pri.*] angulus ECA, æqualis alterno CAD; & angulus E, externo DAB, æqualis erit. Cum igitur duo anguli CAD, DAB, per constructionem æquales ponantur, erunt & anguli ECA, & E, inter se æquales; ideoque [*per* 6.*pri.*] & rectæ AC, AE, inter se æquales; Vt igitur EA, ad AB, [*per* 7. *quin*] ita CA, ad eandem AB. Atqui [*per* 2.*sex*] vt EA, ad AB, ita est CD, ad DB, cum in triangulo EBC, recta AD, sit parallela lateri CE; Igitur [*per* 11.*quinti.*] vt CA, ad AB, ita CD, ad DB; Quod fuit propositum.

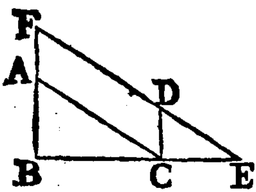
Sit deinde, vt CA, ad AB, ita CD, ad DB. Dico rectam AD, bifariam secare angulum CAB. Prob. Quoniam enim vt CA, ad AB, ita ponitur CD, ad DB: Vt autem CD, ad DB, [*per* 2.*sex*] ita est EA, ad AB, (quod in triangulo CEB, recta AD, ducta sit parallela lateri CE,) [*per* 11.*quin*] erit vt CA, ad AB, ita EA, ad eandem AB, æquales igitur [*per* 9. *quin.*] sunt EA, & AC, ac propterea anguli E, & ACE, [*per* 5.*pri.*] inter se æquales erunt. Cum igitur [*per* 29. *pri.*] angulus ACE, æqualis sit alterno CAD, & angulus E, pariter æqualis externo DAB; erunt & duo anguli CAD, DAB, æquales inter se. Quod est propositum. Quare si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Aequiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos; & homologa sunt latera, quę æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC, DCE; sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC, CDE. Dico esse AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED; & denique CA, ad AB, vt ED, ad DC: Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ ęqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter.



Constituantur latera BC, CE, secundum lineam rectam BE, ita vt angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC; pariterque externus ACB, interno DEC, sit æqualis: Et quia duo anguli ABC, ACB, [*per* 17. *pri*] minores sunt duobus rectis: est autem angulo ACB. æqualis angulus DEC, erunt anguli B, & E, duobus rectis minores. Quare [*per* 13.*def pri*] rectæ BA, ED, productę versus partes A, & D, coibunt. Producantur ergo & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus DCE, æqualis est interno, & opposito ABC, [*per* 28.*pri*.] parallelæ erunt CD, & BF. Eademque ratione parallelæ erunt CA, & EF, quod angulus externus ACB, sit equalis interno DEC. Parallelogrammum est igitur ACDF, proptereaque recta AF, [*per* 34.*pri*.] æqualis rectæ CD; & recta CA, æqualis re-

ctæ

ctæ DF. Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela est lateri EF, [*per 2. sex*]erit AB, ad AF, hoc est ad DC, (quæ æqualis est ipsi AF,) vt BC, ad CE. Permutando igitur [*per 16 quin*]erit AB, ad BC, vt DC, ad CE. Rursus, quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, [*per 2. sex.*]erit BC, ad CE, vt FD, hoc est CA, quæ æqualis est ipsi FD,) ad ED. Permutando igitur, [*per 16. quinti.*]erit BC, ad CA, vt CE, ad ED. Cum igitur sit AB. ad BC, vt DC, ad CE; & BC, ad CA, vt CE, ad ED, [*per 22. qui.*] erit ex æquali AB, ad CA, vt DC, ad ED. Quod est propositum. Aequiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

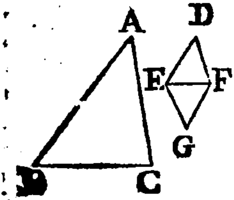
Ex his patet, lineam rectam, quæ in triangulo vni lateri parallela ducitur, auferre triangulum simile toti triangulo. Si enim in triangulo BEF, lateri BF, parallela ducatur CD, erit triangulum DCE, toti triangulo BEF, simile. Nam æquiangula sunt, cum anguli BFE, FBE, [*per 29. pri.*] æquales sint angulis CDE, DCE, externis; & angulus E, communis. Rursus cum, vt demonstratum est habeant latera circa æquales angulos proportionalia, per primam Defin. huius libri similia erunt triangula, FBE, & DCE.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Si duo triangula habeant latera proportionalia; ęquiangula erunt triangula, & ęquales habebunt eos angulos, sub quibus, & homologa latera subtenduntur.

DVo triangula ABC, DEF, habeant latera proportionalia, sitque AB, ad BC, vt DE, ad EF, & BC,

& BC, ad CA, vt EF, ad FD; & denique AB, ad AC, vt DE, ad DF. Dico huiusmodi triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum B, angulo E; & demum angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt latera homologa. His positis fiat angulus FEG, [*per* 23. *pri.*] æqualis angulo B, & angulus EFG; angulo C, conueniantque rectæ EG, FG, in G, puncto



eritque [*per* 32. *pri.*] reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis: Æquiangula igitur sunt triangula ABC, EGF; Quare [*per* 4 *sex.*] vt AB, ad BC, ita est GE, ad EF; vt autem AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF: Igitur [*per* 11. *quin*] vt GE, ad EF, ita est DE, ad EF: ac propterea [*per* 9 *quin.*] æquales erunt rectæ GE, DE. Rursus quoniam [*per* 4. *sex.*] vt BC, ad CA, ita est EF, ad FG: Vt autem BC, ad CA, ita est EF, ad FD; erit [*per* 11. *quin.*] vt EF, ad FG, ita eadem EF, ad FD; ideoque [*per* 9. *quinti.*] æquales erunt FD, FG. Quare cum latera EG, FG, æqualia sint lateribus DE, DF, vtrumque vtrique, & basis EF, communis; [*per* 8. *pri.*] Erunt anguli G, & D, æquales; ac propterea [*per* 4. *pri.*] etiam reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis sit angulo A, erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis; eodemque modo angulus DEF, angulo B, & angulus EFD, angulo C, æqualis erit; quod fuit propositum. Si ergo duo triangula latera habeant proportionalia, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint; æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

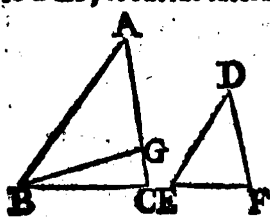
IN triangulis, ABC, DEF, [vt in antecedenti figura.] duo anguli B, & E, sint inter se æquales, sintque latera AB, BC, proportionalia lateribus DE. EF; hoc est sit AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F: Ita enim æquales anguli homologa respiciunt latera. Vt in antecedenti demonstratione angulo B, fiat æqualis angulus FEG; & angulo C, angulus EFG; quo stante, vt in antecedenti propositione dictum fuit, erit triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare [*per* 4. *sex.*] vt AB, ad BC, ita est GE, ad EF: Sed vt AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. Igitur [*per* 11. *quin.*] vt DE, ad EF, ita est GE, ad eandem EF; atque idcirco DE, GE, [*per* 9. *quin.*] æquales erunt. Itaque cum latera DE, EF, æqualia sint lateribus GE, EF, & quoque anguli ab ipsis contenti æquales (nam angulo B, cui factus est æqualis angulus FEG, æqualis est positus angulus DEF, quare æquales ad inuicem erunt anguli DEF, GEF,) [*per* 4 *pri.*] erunt reliqui anguli D, & EFD, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A; & angulus EFG, angulo C, erunt etiam angulis A, & C, æquales anguli D, & EFD; ob idque æquiangula erunt trian-

triangula ABC, DEF; quod fuit propositum. Si ergo duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul vtrumque, aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circũ quos proportionalia sunt latera.

Sint duo triangula ABC, DEF, sitque angulus A, in triangulo ABC, æqualis angulo D, in triangulo DEF; & rursus latera AB, BC, circa angulũ ABC, proportionalia lateribus DE, EF, circa angulum DEF; hoc est sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, hac tamen conditione, vt quilibet reliquorum angulorum, sit minor recto, vel non minor. Dico æquiangula esse triangula, angulos scilicet ABC, & E circa quos sunt latera proportionalia, & angulos C, & F, æquales esse. Probat. Sit enim primum tam angulus C, quam F, recto minor. Quo posito si anguli ABC, & E, non sunt æquales, sit ABC, maior quam E; fiatque ipsi E, æqualis ABG; Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis; [*per 32. pri.*] erit, & reliquus AGB, reliquo F, æqualis; ideoque triangula AGB, DEF, æquiangula erunt. Quare vt AB, ad BG, [*per 4. sex.*] ita DE, ad EF: Sed vt DE, ad



ad EF, ita ponitur AB, ad BC. Vt igitur [*per* 11. *qui.*] AB, ad BG, ita eadem AB, ad BC; ac propterea [*per* 9. *quinti.*] æquales erunt BG, & BC, & ideò [*per* 5. *pri.*] anguli BGC, BCG, æquales. Cum igitur angulus C, ponatur recto minor erit, & angulus BGC, recto minor; ideoque ei deinceps GBA, recto maior; cum [*per* 13. *pri.*] BGA, BGC, anguli sint duobus rectis æquales. Est autem ostensus angulus AGB, angulo F, æqualis. Maior igitur recto est pariter angulus F: sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum.

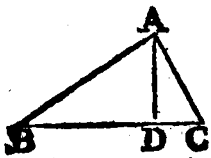
Sit deinde tam angulus C, quam F, recto non minor, eritque vt supra angulus C, angulo BGC, æqualis; quare etiam BGC, recto non minor erit; ac propterea anguli BCG, BGC, in triangulo GBC, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel æquales duobus rectis; quod est absurdum; sunt enim [*per* 17. *pri.*] duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli ABC, & E, sed æquales, atque idcirco [*per* 32. *pri.*] reliqui etiam anguli C, & F, æquales erunt; quod est propositum. Quare si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Si in triangolo rectangulo, ab angulo recto in basim perpendicularis ducta sit; quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se sunt similia.

IN triangulo BAC, angulus BAC, sit rectus, à quo ad basim perpendicularis agatur AD. Dico triangula ADB, ADC, similia esse, toti triangulo ABC, & in-

& inter se. Prob. Cum enim in triangulis ABC, ADB, anguli BAC, BDA, sint recti, & angulus B, communis, [*per* 32 *pri.*] erunt & reliqui anguli ACB, & DAB, æquales. Aequiangulum igitur est triangulum DBA, triangulo ABC, ac propterea [*per* 4 *sex.*] habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit vt CB, ad BA, ita BA, ad BD; & vt BA, ad AC, ita BD, ad DA; & vt BC, ad CA, ita BA, ad AD. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, vt vult 4. propos. huius libri. Quare simile est triangulum ADB, toti triangulo ABC. Eodem prorsus modo ostendetur, triangulum ADC, simile esse eidem triangulo ABC. Nam anguli BAC, ADC, sunt recti, & angulus C, communis; ac propterea [*per* 32. *pri.*] reliqui anguli ABC, DAC, æquales. Quare [*per* 4. *sex.*] vt BC, ad CA, ita est CA, ad CD; & vt CA, ad AB, ita CD, ad DA: & vt CB, ad BA, ita CA, ad AD. Sic enim quoque opponuntur homologa latera æqualibus angulis secundum præscripta in 4. propos. huius libri. Haud secus demonstrabitur similia inter se esse triangula ADB, ADC, cum anguli EDB, ADC, sint recti; & anguli ABD, CAD, ostensi æquales; nec non anguli BAD, DCA; Atque idcirco [*per* 4. *sex.*] fit vt BD, ad DA, ita AD, ad DC; & vt DA, ad AB, ita DC, ad CA; & vt AB, ad BD, ita CA, ad AD; si igitur in triangulo rectangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.



COROLLARIVM.

Ex hac propositione manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo in basim demittitur, esse

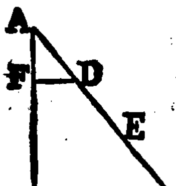
esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium medium proportionale esse inter totam basim, & illud segmentum basis, quod ei lateri adiacet.

Ostensum enim fuit, esse vt BD, ad DA, ita DA, ad DC; ac propterea *DA*, mediam esse proportionalem inter BD, & DC. Nec non etiam ostensum fuit esse vt CB, ad BA, ita BA, ad BD; & idcirco BA, mediam esse proportionalem inter CB, & BD: Et denique esse vt BC, ad CA, ita CA, ad CD; ideoque CA, mediam existere proportionalem inter BC, & CD. Quod fuit propositum.

PROPOS. 9. PROBL. 1.

A data recta linea imperatam partẽ auferre.

Imperetur, vt ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, vtcumque faciens angulum BAC; & postea ex AC, indefinite producta abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahẽda est ex AB, vt in proposita figura tres sunt AD, DE, EC; deinde ex C, ad B, recta ducatur CB, cui per *D*, parallela agatur DF. Quo facto dico AF, esse partem tertiam ipsius rectæ AB. Prob. Nam cum

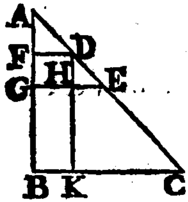


in triangulo ABC, lateri CB, ducta sit parallela DF; erit [*per 2. sex.*] vt CD, ad DA, ita BF, ad BA. Componendo igitur [*per 18. quin.*] vt CA, ad AD, ita BA, ad AF: sed AC, est tripla ipsius AD, per constructionem, Igitur & BA, ipsius AF, tripla erit; quare AF, erit tertia pars ipsius AB, vnde pars quæsita. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

PROPOS. 10. PROBL. 2.

Datam rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

SIt data recta AB, secanda similiter, vt secta est recta AC, in D, & E; hoc est in partes, quæ sunt



partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungantur datæ duę lineę ad punctum A, facientes angulum quemcunque BAC, connectanturq; nsimul recta BC Deinde ex D,& E, agantur DF, EG, rectæ parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB, similiter esse sectam in F, & G, vt est secta AC, in D,& E. Prob. Nam [*per 2 sex*] vt AD, ad DE, ita est AF, ad FG: proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DK, ipsi FB. parallela secans EG, in H, puncto erit rursus [*per 2. sex.* vt DE, ad EC, ita DH, ad HK, hoc est ita FG, ad GB, (cum DH, HK, æquales sint duabus FG, GB, per 34. Propos. lib. primi.) Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus DE, EC. Eademque ratio erit de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ aganeur, &c. Quare datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod erat faciendum.

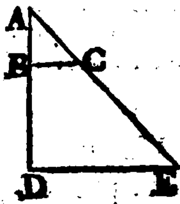
PROPOS. 11. PROBL. 3.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem ad inuenire.

SInt duæ rectæ AB, AC, ita dispositæ vt efficiant angulum A, quemcunque, sitque illis inuenienda

tertia

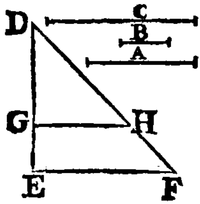
tertia proportionalis, hoc est vt AB, ad AC, ita AC, ad aliam tertiam. Producatur AB, quam antecedentem statuimus, & capiatur BD, æqualis ipsi AC, quæ consequens, & media esse debet. Deinde ducta recta BC, agatur ex D, linea DE, parallela ipsi BC, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triangulo DAE, lateri DE, parallela ducta sit recta BC: [*per 2. sex.*] erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE: sed [*per 7. quinti.*] vt AB, ad BD, ita est eadem AB, ad AC, cum AC, posita sit æqualis ipsi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE; quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



PROPOS. 12. PROBL. 4.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

SInt tres lineæ rectæ A, B, C, quibus inuenienda sit quarta proportionalis, hoc est sicut A, ad B, ita C, ad aliam quartam. Disponantur duę priores lineę taliter, vt componant insimul lineam rectam DE, tertia vero C, cum prima A, hoc est DG, faciat quemcunque angulum, nempe D, sitque recta DH, ipsi C, æqualis. Postea ex G, ad H, ducatur linea GH, cui per E, ducatur parallela EF, occurrens rectæ DH, productæ in F. Dico HF, esse quartam proportionalem, hoc

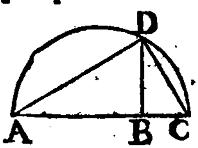


est vt DG, ad GE, ita DH, ad HF. Probatur. Cum enim in triangulo EDF, lateri EF, ducta sit parallela GH; [*per 2 sex*] erit vt DG, ad GE, ita DH, ad HF. Quare HF, quarta est proportionalis; quapropter tribus datis rectis lineis, quarta proportionalis inuenta fuit. Quod erat faciendum.

PROPOS. 13. PROBL. 5.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem adinuenire.

Sint duæ rectæ AB, BC, quibus inuenienda est media proportionalis. Datæ duæ rectæ disponantur secundum rectam lineam AC; quæ bifariam diuisa super ipsam constituatur semicirculus ADC, ita vt tota AC, sit diameter. Deinde ex B, ad AC, erigatur perpendicularis BD, vsque ad periferiam. Dico BD, esse mediam proportionalem inter AB, & BC. Prob. Ductis enim rectis AD, CD; erit angulus ADC, [*per 31. ter.*] rectus est enim in semicirculo. Cum igitur ex angulo recto ADC, ad basim AC, ducta sit perpendicularis DB, erit [per Coroll. Propos. 8. huius lib.] media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



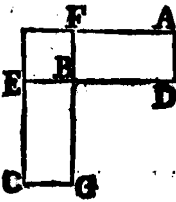
PROPOS. 14. THEOR. 9.

Æqualium parallelogrammorum, & vnum vni æqualem habentium angulum, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt latera.

latera.

latera. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

SInt duo æqualia parallelogramma AFBD, ECGB, habentia angulos DBF, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est esse vt DB, ad BE, ita GB, ad BF. Coniungantur enim dicta parallelogramma iuxta æquales angulos, ita vt DB, & BE, constituant vnam lineam rectam. Quo posito, cum anguli DBF, GBE, ponantur æquales; [*per 15. pri.*] erunt etiam GB, BF, vna recta linea. Producantur modo AF, & CE, donec coeant. Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma AB, BC: [*per 7. quinti.*] erit vt AB, ad FE, ita BC, ad idem FE: sed vt AB, ad FE; [*per 1. sex.*] ita est basis DB, ad basim BE, (sunt enim parallelogramma eiusdem altitudinis:) similiterque vt CB, ad EF; ita est basis GB, ad basim BF. Igitur vt DB, ad BE, ita GB, ad BF. Quod est propositum quantum ad primam partem.



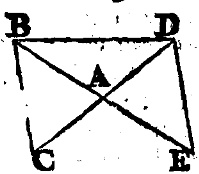
E conuerso sint latera circa æquales angulos DBF, GBE, reciproca, hoc est vt DB, ad BE, ita GB, ad BF. Dico parallelogramma AB, BC, esse æqualia. Facta namque eadem constructione; cum sit vt DB, ad BE, ita GB, ad BF: vt autem DB, ad BE, [*per 1. sex.*] ita parallelogrammum AB, ad parallelogrammum FE: & vt GB, ad BF, ita parallelogrammum CB, ad idem EF: erit quoque vt AB, ad FE, ita CB, ad idem FE. Atque idcirco [*per 9. quin.*] æqualia erunt parallelogramma AB, BC. Æqualium ergo parallelogrammorum, &

vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 15. THEOR. 10.

Æqualium triangulorum, & vnum vni æqualem habentium angulum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

Sint duo triangula æqualia ABC, ADE, habentia Angulos BAC, DAE, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est esse vt EA, ad AB, ita CA, ad AD. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt EA, & AB, componant vnam lineam rectam. Quo facto anguli BAC, DAE, cum sint æquales [*per 15. pri.*] erunt etiam CA, AD, vna recta linea. Ducta igitur recta DB: quoniam enim æqualia sunt triangula BAC, DAE. [*per 7. quinti.*] erit vt BAC, ad BAD, ita DAE. ad idem BAD; sed vt triangulum BAC, ad triangulum BAD, [*per 1. sex.*] ita est basis CA, ad basim AD, cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis: similiterque vt DAE, ad DAB, ita est basis EA, ad basim AB. Quare vt CA, ad AD, ita est EA, ad AB. Quod fuit propositum.



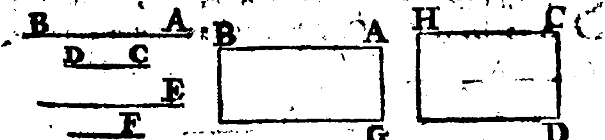
Iam vero è conuerso, sint latera circa æquales angulos, qui ad A, reciproca, nempe CA, ad AD, vt EA, ad AB. Dico triangula BAC, DAE, esse æqualia.

lia. Facta enim eadem constructione, cum sit vt CA, ad AD, ita EA, ad AB; vt autem CA, ad AD, [*per 1. sex.*] ita triangulum BAC, ad triangulum BAD: & vt EA, ad AB, ita triangulum EAD, ad idem triangulum BAD; Erit vt BAC, ad BAD, ita EAD, ad idem BAD, ac propterea [*per 9. qui.*] æqualia erunt triangula ABC, DAE. Æqualium igitur triangulorum, & vnum vni, &c. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 16. THEOR. 11.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales BA, DC, E, & F; hoc est vt BA, ad DC, ita E, ad F: sitque rectan-



gulum BG, comprehensum sub extremis BA, & F; rectangulum vero HD, comprehensum sub medijs DC, & E. Dico rectangula BG, HD, esse æqualia. Cum enim anguli recti A, & C, sint inter se æquales,

 & sit

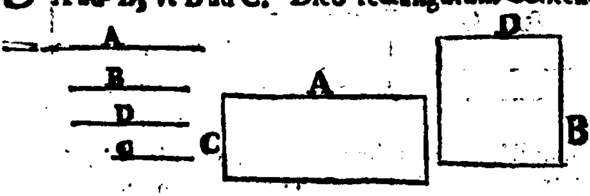
& sit vt BA, ad CD, ita HC, ad AG; erunt latera circa æquales angulos A, & C, reciproca: quare [*per 14. sex.*] parallelogrammum BG, æquale erit parallelogrammo HD. Quod est propositum.

Contra vero sint iam æqualia rectangula BG, HD. Dico quatuor rectas lineas BA, CD, HC, AG, esse proportionales, hoc est, esse vt BA, ad CD, ita HC, ad AG. Cum enim æqualia sint rectangula BG, HD, habeantq; angulos æquales A, & C, nempe rectos, [*per 14. sex.*] erunt latera circa hosce angulos reciproca; sicut quidem BA, ad CD, ita AC, ad AG. Quare si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 17. THEOR. 12.

Si tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato; illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint datæ tres lineæ proportionales A, B, C, nempè A ad B, vt B ad C. Dico rectangulum conten-



tum sub A, prima, & C, tertia æquale esse quadrato mediæ

mediæ proportionalis B. Accipiatur recta D, æqualis ipsi B, eruntque quatuor lineæ A, B, D, C, proportionales; hoc est vt A, ad B, ita D, ad C; quare [*per 16. sex.*] erit rectangulum sub prima A, & quarta C, æquale rectangulo facto à secunda B, & tertia D; sed rectangulum factum ab ipsis B, & D, cum sint æquales, est quadratum ipsius B: ergo rectangulum primæ A, & tertiæ C, æquale est quadrato mediæ B: Quod erat demonstrandum.

Sit iam rectangulum factum à prima A, & tertia C, æquale quadrato mediæ B: dico tres lineas A, B, C, esse proportionales.

Demonst. In æqualibus parallelogrammis, & vnum angulum vni angulo æqualem habentibus [*per 9 sex.*] latera circa æquales angulos sunt reciproca: ergo vt latus A, ad latus B, ita latus D, ad latus C, circa angulos rectos: verum cum figura supra B, sit quadratum, vt supponimus, erunt latera B, & D, æqualia: qua de re si, vt dictum est, ita stat A, ad B, vti D, ad C, etiam A, stabit ad B, vti stat B, ad C; & consequenter tres lineæ A, B, & C, erunt proportionales: quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

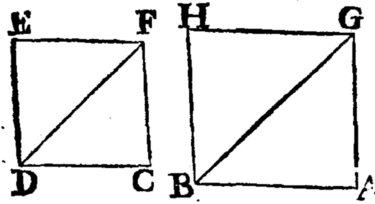
Ex posteriori huius propos. parte deducitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale.

PROPOS. 18. PROBL. 6.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere.

SIt data recta linea AB, & rectilineum D, C, F, E; oportet super AB, describere rectilineum simile, simi-

similiterq; positum rectilineo DCFE. Datum rectilineum resoluatur in triangula numero minora quantum fieri potest, ducendo scilicet rectas lineas ab angulo rectilinei ad angulos oppositos, & in nostra figura datum rectilineum sit resolutũ in duo triangula DCF, DEF. Deinde ad punctum B, & ad



lineam AB [per 23. pri.] ponatur angulus æqualis angulo CDF, sitq; angulus ABG. Hac eadem via ad punctum A, constituatur angulus BAG, æqualis angulo DCF; deinde hæ duæ lineæ BG, AG, cum discedant à duobus angulis minoribus duobus rectis, [per 17. primi] tandem concurrent in G. Vlterius ad puncta B, & G, & ad lineam BG, ponantur duo anguli GBH, BGH ęquales duobus angulis FDE, DFE, & producantur lineæ vsquequo concurrant in H. Dico factum esse rectilineum B A G H simile, & similiter positum rectilineo D C F E.

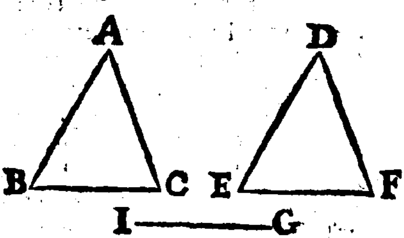
Demonstr. Duo anguli E D F, F D C, per constructionem facti sunt æquales duobus angulis HBG, GBA; vnde totus angulus EDC, erit æqualis toti angulo H B A: pariter angulus C, factus fuit æqualis angulo A, ergo [per 32. pri.] angulus CFD adæquabit angulum AGB; & ideò cum angulus BGH sit constitutus æqualis angulo DFE, erit angulus AGH, æqualis angulo: CFE: & demum cum in duobus triãgulis E D F, H B G, duo anguli EDF, EFD, facti sint æquales duobus angulis HBG, AGB [per 32. pri] erit angulus E, angulo H, æqualis, & totum rectilineum A B G H æquiangulum rectilineo EDCF. Insuper, cum duo triangula EDF, HBG sint æquiangula,

gula, vt visum est [*per 4. sexti.*] erit vt DE, ad EF ita BA ad HG; quare circa æquales angulos E, & H, latera sunt proportionalia. Rursus ob similitudinem eorundem triangulorum erit, vt EF ad FD; ita HG ad GB; sed cum etiam æquiangula sint triangula DFC, BGA, & consequenter similia [*per 4. sex.*] erit vt DF ad FC, ita BG ad GA: ergo ex æqualitate [*per 22. quinti.*] erit, vt EF ad FC, ita AG ad GA; vnde circa angulos æquales F, & G, latera erunt proportionalia. Consimili prorsus modo demonstrabitur circa reliquos æquales angulos latera esse proportionalia: ergo rectilineum BAGH, factum super data recta AB, erit simile; similiterque positum rectilineo CDEF; Quod erat faciendum.

PROPOS. 19. THEOR. 13.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione latera homologorum.

Sint similia triangula ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E, item C, & F, &c. Et sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, &c. Dico triangula inter se comparata duplicatam habere rationẽ eius, quam habent latera homologa, scilicet BC, & EF; vel AB; & DE, vel AC, & DF. Hoc est, si homologis lateribus BC, EF, inueniatur tertia proportionalis IG; ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt est recta BC, ad tertiam proportionalem IG; ac proinde

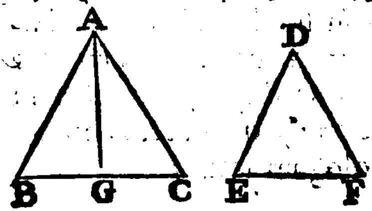


inde cum ex defin. 10. lib. 5. proportio BC, ad IG, dicatur duplicata proportionis BC, ad EF; proportio etiam trianguli ad triangulum erit quoque duplicata proportionis laterum homologorum BC, & EF. Ita vt nihil aliud sit, duo triangula, vel duas quaslibet figuras similes, similiterque positas habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quam ita esse triangulum ad triangulum, vel figura ad figuram, vt est prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continuè proportionales in proportione duorum laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ BC, EF, IG, continuè proportionales in proportione homologorum laterum BC, EF. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde etiam tertia proportionalis IG, illis æqualis erit: ita vt proportio BC, ad IG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, ex eo quod ipsa [*per 26. pri.*] inter se æqualia sint, ob angulos B, & C, angulis E, & F, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF, quibus adiacent: erit triangulum ad triangulum, vt recta BC, ad rectа IG. Cum ergo hæc proportio BC, ad CG, dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicetur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, duplicata proportionis, quam habet latus BC, ad latus EF. Quod etiam hinc constare potest: quoniam, vt dictum est, triangula ABC, DEF, æqualia sunt, hoc est proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa BC, EF; Proportio autem æqualitatis tantummodo duplicata efficit proportionem æqualitatis. (Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam,

vt

vt constat ex definitione 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti, & prima ad secundam) habebit triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem duplicatam eius, quam habet latus BC, ad latus EF. Quod fuit propositum.

Sit deinde latus BC, maius latere EF; & ex BC, [per 11. sex.] abscindatur BG, tertia proportionalis ipsis BC, & EF, hoc est, sit BC, ad EF, vt EF, ad BG, ducaturq; recta AG. Quia ergo est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit permutando, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF: vt autem BC, ad EF, ita est per constructionem EF, ad BG. Vt ergo AB, ad DE, [per 11. qui.] ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos æquales B, E, reciproca, [per 15. sex.] ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, [per 7. quinti.] ita erit idem triangulum ABC, ad triangulum ABG. Vt autem triangulum ABC, ad triangulum ABG, eiusdem altitudinis [per 1. sex.] ita est basis BC, ad basim BG. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum DEF; ita est BC, ad BG. Atqui cum tres BC, EF, BG, sint continue proportionales, proportio primæ BC, ad tertiam BG, duplicata dicetur proportionis BC, primæ ad EF, secundam. Igitur, & triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.



CO-

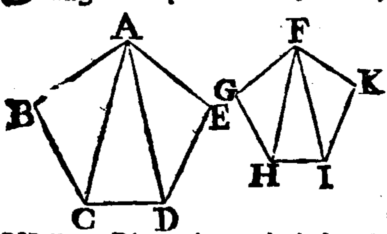
COROLLARIVM.

Ex hoc fit clarum, quod si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, vt est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum super secundam simile, similiterque descriptum.

PROPOS. 20. THEOR. 14.

Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent inter se eam rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

Sint similia polygona ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; nec non etiam angulos B, G, &c. habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales, vt quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum huiusmodi polygona diuidi in triangula similia, quæ sunt numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ ducantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint AC, AD, FH, FI; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; [*per 6. sex.*] æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia angulos BAC, GFH, æquales; Item angulos ACB,



FHG,

FHG, homologis lateribus oppositos: ideoq; [*per 4. sex.*] habebunt latera circa æquales angulos proportionalia: ac propterea inter se similia erunt. Eadem prorsus ratione similia erunt triangula AED, FKI, habentia angulos EAD, EDA, ęquales angulis KFI, KIF. Deinde quia [*per 4. sex.*] est vt AC, ad CB, ita FH, ad HG, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH, vt autem CB, ad CD, ita est ex hypothesi HG, ad HI, ob similitudinem polygonorum: [*per 22. quinti.*] erit ex æquo vt AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI; est autem, & ablatus ACB, ostensus æqualis ablato FHG; erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis. Quare [*per 6. sex.*] triangula ACD, FHI, cum habeant latera circa æquales angulos ACD, FHI, proportionalia, ęquiangula erunt; ideoq; similia: Quæ ratio eadem est de alijs triangulis, si plura fuerint.

Dico vlterius, hæc triangula esse homologa totis polygonis, hoc est ita esse quodlibet triangulum in vno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonum. Quoniam enim similia sunt triangula ABC, FGH, [*per 19. sex.*] erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC, FH. Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC, FH. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI; cum vtraque hæc triangulorum proportio sit duplicata eiusdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neque dissimili ratione cōcludetur quoque esse triangulum ADE, ad triangulum FIK, vt ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, si plura extiterint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius sint antecedentia

dentia, & alterius consequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens, ad vnum consequens, [per 12. quin.] ita sunt omnia antecedentia, ad omnia consequentia: Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad sibi respondens triangulum in altero polygono, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis.

Demum dico, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa, hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia AB, FG, inueniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt est prima linea AB, ad tertiam inuentam: ac proinde, cum proportio AB, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG: dicetur quoque proportio polygoni ad polygonum duplicata proportionis laterum homologorum AB, FG. Cum enim sit, vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK: Triangulum vero ABC, ad tiangulum FGH, [per 19. sexti.] proportionem habeat duplicatam eius, quam habent latera homologa AB, FG, hoc est eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inuentam; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatã proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est, eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inuentam. Quare similia polygona in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc fit manifestum, quod si fuerint tres lineæ rectæ proportionales; vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum ad polygonum super secundam simile, similiterque descriptum; vel

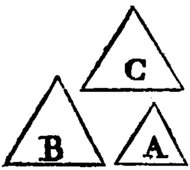
ita

ita esse polygonum super secundam descriptum ad polygonum super tertiam simile, similiterque descriptum.

PROPOS. 21. THEOR. 15.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

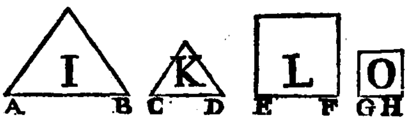
Sint rectilinea A, & B, rectilineo C, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Prob. Cum enim propter similitudinem anguli rectilinei A, æquales sint angulis rectilinei C; item eadem de causa anguli rectilinei B, æquales angulis eiusdē rectilinei C; [*per* 1.*pron.*] erunt anguli rectilinei A, æquales angulis rectilinei B. Rursus cum ob eandem similitudinem latera rectilinei A, proportionalia sint lateribus rectilinei C; ea videlicet ijs, quæ sunt circa æquales angulos: Nec non etiam eandem ob causam, latera rectilinei B, proportionalia sint lateribus eiusdem rectilinei C; [*per* 11.*quinti.*] erunt quoque latera rectilinei A, lateribus rectilinei B, proportionalia, ea nimirum ijs, quæ angulos ambiunt æquales. Quare [*per primam def. huius*] similia existent rectilinea A, & B. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.



PROPOS. 22. THEOR. 16.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ab eis rectilinea similia, similiterque descripta, proportionalia erunt. Et ſi à rectis lineis ſimilia, ſimiliterq; deſcripta rectilinea proportionalia fuerint: ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt datæ quatuor rectæ lineæ AB, CD, EF, GH, proportionales, nempè vt AB, ad CD, ita EF, ad GH; conſtituantur [*per 19. ſex.*] ſuper duas priores lineas AB, CD, duo quęcunque rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta, nempe rectilineum I, & rectilineum K: item ſuper duas poſteriores rectas lineas EF, GH, efformentur duo alia rectilinea pariter ſimilia, ſimiliterque poſita L, & O. Dico ita eſſe rectilineum I, ad adrectilineum K, vti rectilineum L, ad rectilineum O.



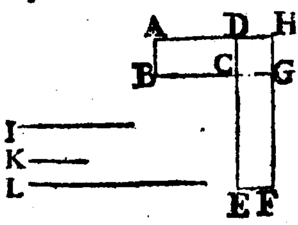
Demonſtratio. Cum rectilineum I, exiſtat ſimile rectilineo K, [*per 20. ſex.*] habebit I, ad K, duplicatam rationem homologorum laterum AB, CD; vti pariter rectilineum L, ad rectilineum O, habebit rationem duplicatam homologorum laterum EF, GH; ſed duplicata ratio AB, ad CD, eſt eadem, ac duplicata ratio EF, ad GH, quia eadem ponitur ratio AB, ad CD, quæ EF, ad GH: ergo cum rectilineum I, comparatum ad rectilineum K, & rectilineum L, comparatum ad O, ſint induplicata ratione laterum homologorum AB, ad C, & EF, ad GH, & duplicata ratio AB, ad CD, eadem ſit quæ EF, ad GH; [*per 11. quin.*] inde ſequitur eandem eſſe rationem rectilinei I, ad K, quam L, ad O.

Dico pariter, quod ſi rectilinea I, K, L, O, ſint proportionalia, etiam lineæ AB, CD, EF, GH, erunt proportionales, videlicet vt AB, ad CD, ita EF, ad GH, GH, Demonst. Rectilineum I, ad rectilineum K, [per 20. sex.] habet duplicatam rationem laterum homologorum AB, CD; & rectilineum L, ad O, ob eandem caussam habet duplicatam rationem homologorum laterum EF, GH: ergo eadem erit duplicata ratio AB, ad CD, quæ EF, ad GH; & per consequens ita erit AB, ad CD, vti EF, ad GH: Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 23. THEOR. 17.

Æquiangula parallelogramma inter se habent eam rationem, quæ ex lateribus componitur.

Sint æquiangula parallelogramma AC, CF, habentia angulos BCD, ECG, inter se æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedentia proportionum sint in



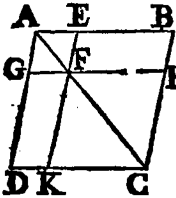
vno parallelogrammo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, compositam esse ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CG, & rectę DC, ad rectā CE; vel etiam ex proportionibus rectę BC, ad rectam CE, & rectæ DC, ad rectā CG, idest, si sumantur tres lineæ, quarū prima stet ad secundā, sicuti latus BC, stat ad latus CG, & rursus secunda stet ad tertiam, vt latus DC, stat ad latus CE; ita esse parallelogrāmum AC, ad parallelogrammum CF, vt est prima linea ad tertiam;

ac proinde, cum ex defin. 5. huius libri, proportio primæ lineæ ad tertiam componi dicatur ex proportionibus primę ad secundam, & secundę ad tertiam; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, dici compositam esse ex eisdem proportionibus, hoc est ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt BC, CG, efficiant vnam lineam rectam: Quo posito cum anguli BCD, ECG, sint æquales, [per 15. pri.] erunt etiam DC, CE, vna linea recta. Producantur deinde AD, FG, donec concurrant in puncto H; sumptaque recta I, quacunque, [per 12. sex.] inueniatur tribus BC, CD, & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur est, [per 1. sex.] vt BC, ad CG, ita AC, ad CH. Vt autem BC, ad CG, ita posita est I, ad K; [per 11. quin.] erit quoque vt AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque prorsus argumento ostendi poterit esse, vt AC, ad CF, ita K, ad L: nam vt DC, ad CE, ita [per 1. sex.] est AC, ad CF. Cum ergo posita sit K, ad L, vt DC, ad CE; erit quoque HC, ad CF, vt K, ad L: ex æquo igitur [per 22. quinti.] erit, vt AC, ad CF, ita I, ad L: sed proportio I, ad L, iuxta 5. defin. huius libri, componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoque proportio parallelogrammi AC, ad parallelogrãmum CF. Eademque ratione ostendemus, proportionem AC, ad CF, componi ex proportionibus BC, ad CE; & DC, ad CG, dummodo tamen parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt BC, CG, efficiant vnam lineam rectam, &c. Aequiangula ergo parallelogramma inter se rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.

PRO-

PROPOS. 24. THEOR. 18.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti, & inter se sunt similia.

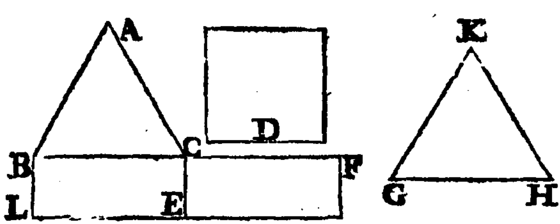


SIt parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & quodlibet eius punctum F, per quod ducantur duæ rectæ EK, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma GE, KH, circa diametrum, similia esse, & toti parallelogrammo, & inter se. Quod enim æquiangula sint toti parallelogrammo ABCD, facile ostendetur. Nam angulus GAE, idem est, ac angulus DAB; & angulus externus AEF, [*per* 29. *pri.*] æqualis est interno ABC; & angulus AGF, externus interno ADC; & angulus EFG, externus interno FKD; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum est EG, parallelogrammum parallelogrammo BD: & eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit HK. Quod postea latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, taliter demonstratur. Cum trianguldm AGF, æquiangulum sit triangulo ADC, & triangulum AEF, triangulo ABC, vt clare constat ex 29. Propos. libri primi, vel etiam ex Coroll. Propos. 4. huius libri; [*per* 4 *sex.*] erit vt AD, ad DC, ita AG, ad GF, atque ita latera circa æquales angulos D, & G, proportionalia erunt. Rursusque erit, [*per* 4. *sex.*] vt DC, ad CA, ita GF, ad FA; Item vt CA, ad CB, ita FA, ad FE: Ex æquo igitur, vt DC, ad CB, ita est GF, ad FE, ac propterea etiam latera circa æquales angulos DCB, GFE, proportionalia existunt. Haud aliter demonſtrabitur reliqua latera circa æquales angulos, eſſe proportionalia. Quare ſecundum definitionem figurarum ſimilium, ſimile erit parallelogrãmum EG, toti parallelogrammo BD. Eadem prorſus arte oſtendi poterit parallelogrammum kH, ſimile eſſe eidem parallelogrammo BD, atqueadeo, [*per 21. ſex*] & ipſa inter ſe ſimilia erunt. In omni ergo parallelogrammo quæ circa diametrum ſunt, &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOS. 25. PROBL. 7.

Dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum, & alterni dato æquale, idem conſtituere.

SInt data duo rectilinea ABC, & D; conſtituendumq; ſit aliud rectilineum, quod ſimile quidem ſit rectilineo ABC, æquale vero ipſi D. Super BC, vnum latus rectilinei, cui ſimile debet conſtitui [*per 44, vel 45. pri.*] conſtituatur parallelogrammum BE,



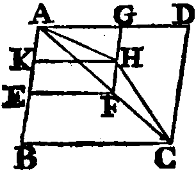
in quouis angulo, æquale rectilineo ABC: & ſuper rectam CE, in angulo ECF, qui æqualis ſit angulo CBL, parallelogrammum EF, æquale ipſi *D*; eritque tàm BC, quàm LE, in directum producta. Quod facile

cile demonstratur, nam ad rectam EC, & ad eius punctum C, ductæ sunt duæ rectæ BC, FC, quæ faciunt duos angulos duobus rectis æquales, cum enim duo anguli ECB, LBC, [*per* 29. *pri.*] sint duobus rectis æquales; & angulus FCE, positus sit æqualis angulo CBL, erunt etiam duo anguli FCE, ECB, duobus rectis æquales, quare [*per* 14. *pri.*] in directum erunt BC, & CF; quoquomodo pariter demonstrabitur, lineam LE, esse in directum productam. Quo posito inueniatur iam [*per* 13. *sex.*] inter rectas BC, CF, media proportionalis GH; super quam [*per* 18 *sex.*] constituatur rectilineum GHk, simile ipsi ABC, similiterque positum. Dico GHk, æquale esse alteri rectilineo D Probat. Cum proportionales sint tres rectæ BC, GH, & CF; erit per Coroll. Propos. 19, vel 20. huius libri, vt BC, prima ad CF, tertiam, ita rectilineum ABC, super primam BC, ad rectilineum GHK, super GH, secundam simile similiterq; descriptum: Vt autem BC, ad CF, [*per* 1. *sex.*] ita est parallelogrammum BE, ad parallelogrammum EF, eiusdem altitudinis: Igitur [*per* 11. *qui.*] erit, vt BE, ad EF, ita ABC, rectilineum ad rectilineum GHK: Vt autem BE, ad EF, [*per* 7. *quinti.*] ita est rectilineum ABC, ad rectilineum D: propterea quod parallelogrammum BE, rectilineo ABC; & parallelogrammum EF, rectilineo D, constructum est æquale. Quare [*per* 11. *quin.*] erit vt ABC, ad D, ita ABC, ad GHK; proptereaque [*per* 9. *qui.*] æqualia erunt rectilinea D, & GHK; est autem & GHK, simile ipsi ABC, similiterque positum per constructionem. Dato igitur rectilineo simile, similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

PROPOS. 26. THEOR. 19.

Si à parallelogrammo ablatum ſit parallelogrammum, & ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit.

EX parallelogrammo BD, abſciſſum ſit parallelogrammum EG, ſimile toti, ſimiliterque poſitum, habens cum ipſo angulum communem EAG. Dico EG, conſiſtere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ ſi fuerint vna linea recta, perſpicuum eſt, cum AF, ſi diameter ipſius EG, & AC, diameter ipſius BD, parallelogrammum EG, conſiſtere circa diametrum AFC, totius parallelogrammi. Quod ſi vero AF, CF, non dicantur efficere vnam lineam rectam, ducatur totius parallelogtammi diameter AC, ſecans latus GF, in H, puncto, per quod ipſi EF, parallela ducatur KH. Quoniam igitur parallelogramma BD, KG, ſunt circa eandem diametrum AHC; [*per* 24. *ſex.*] ipſa erunt ſimilia, ſimiliterque poſita. Quare [*per* 1. *def. ſex.*] erit vt BA, ad AD, ita KA, ad AG: ſed vt BA, ad AD, ita quoque eſt EA, ad AG, quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam ſimilia, ſimiliterque poſita: Igitur [*per* 11. *quinti.*] erit vt EA, ad AG, ita KA, ad AG; ac propterea [*per* 9. *quin.*] æquales erunt rectæ EA, KA, pars, & totum: quod eſt abſurdum. Quoquo modo demonſtrabitur, lineam AHC, nequaquam ſecare aliud latus EF; quare



re

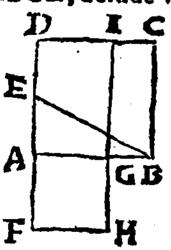
re dicendum venit lineas AF, FC, constituere vnam lineam rectam; hoc est ducta diameter AC, transibit per punctum F. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 27. PROBL. 8.

Datam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

SIt data recta linea terminata AB, secunda extrema, ac media ratione, seu taliter, vt stet tota ad maius segmentum, vti maius segmentum ad minus.

Super AB [*per 46. pri.*] describatur quadratum ABCD, deinde vti in 11. prop. lib. 2. factum fuit, latus AD [*per 10. pri.*] bifariam seceturin E, & à puncto E, ad B, recta ducatur EB. Deinde producatur DA, indefinite, & ab illa [*per 3. pri.*] abscindatur EF, æqualis ipsi EB: quibus peractis ex linea AB, (quæ, vt visum est in 11. lib. 2. maior est quam AF) abscindatur AG, æqualis ipsi AF. Dico punctum G, esse punctum requisitæ sectionis factæ in linea AB.



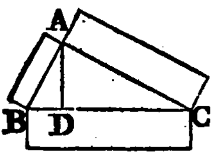
Demonstr. Per G, ducatur IGH, parallela ipsi AD, vel BC, vti per F, notetur FH, parallela ipsi AB, vsque quo concurrat cum FG, in H. Quoniam enim [*per 11. secundi*] non solum parallelogrammum AH, est quadratum, verum etiam adæquat rectangulum GC; inde sequitur huiusmodi æqualia rectangula habere latera circa æquales angulos reciproca [*per 14. sex.*] atque adeò erit IG, ad GH; vti AG ad GB: verum cum IG, adæquet AB, & GH adæquet AG; erit vt tota AB ad maius segmentum AG, ita maius segementum AG ad minus segmentū GB: Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOS. 28. THEOR. 20.

In omni triangulo rectangulo quæcunque figura à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, eſt æqualis duabus figuris ſimilibus, ac ſimiliter poſitis à reliquis trianguli lateribus angulum rectum comprehendentibus deſcriptis.

SIt datum triangulum rectangulum ABC, cum angulo recto A: ſuper BC, latere ſubtendente angulum rectum deſcribatur quæcumque figura, cui [*per* 18 *ſex.*] ſimiles, ſimiliterque poſitæ conſtituantur ſuper BA, & AC, lateribus angulum rectum A, comprehendentibus. Dico figuram ſupra BC, deſcriptam adæquare figuras ſupra BA, AC, deſcriptas. Demonſt. Intelligamus à tribus trianguli lateribus, BC, CA, AB, deſcripta eſſe tria quadrata, vti in Propoſ. 47. lib. primi factum eſt: hoc ſtante, cum [*per* 20. *ſex.*] quadrata ſint in duplicata ratione laterum, quadratum ipſius BA, erit ad quadratum BC, in duplicata ratione AB, BC: & quadratum ipſius CA ad quadratum ipſius CB, eſt in duplicata ratione laterum AC, CB; ſed [*per eandem* 20. *ſexti.*] figura ſupra BA, ad figuram ſupra BC, ſimilem obtinet duplicatam rationem laterum homologorum BA, BC; vti pariter figura ſupra CA, ad figuram ſupra CB, ſimilem habebit duplicatam rationem laterum homologorum AC, CB: ergo tàm quadrata, quàm figuræ ſimiles à trianguli lateribus deſcriptæ erunt in duplicata ratione laterum homologorum, & per conſequens,



ſequens,

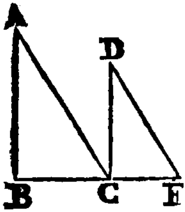
sequens, vt quadratum lateris BA, ad quadratum lateris BC, [per 11 quinti] ita figura supra BA, ad figuram similem supra BC; & vt quadratum lateris CA, ad idem quadratum lateris BC, ita figura lateris CA, ad figuram similem lateris CB. Quo stante, cum quadratum lateris BA, tanquam prima magnitudo stet ad quadratum lateris BC, tanquam secundam; ita figura supra BA, tanquam tertia ad figuram supra BC, veluti quartam; item quinta magnitudo, hoc est quadratum lateris CA, stet ad secundam, nempè ad quadratum ipsius CB, vti sexta, nempè figura supra CA, ad quartā, videlicet ad figuram supra CB; [per 24. quin.] erit prima cum quinta, hoc est quadratum BA, cum quadrato AC, ad secundum, nempe ad quadratum BC, vti tertia cum sexta, scilicet figura supra BA, cum figura supra AC, ad quartam, hoc est ad figuram supra BC; at [per 47 pri.] duo quadrata BA, & AC, adæquant quadratum BC: ergo etiam duæ figuræ similes supra BA, & AC, adæquabunt figuram similem supra BC: Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 29. THEOR. 21.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela; tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

Habeant triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, hoc est vt AB, ad AC, ita DC, ad DE; componanturque ad angu-

angulum ACD, ita vt latera homologa AB, DC, item AC, DE, sint inter se parallela. Dico reliqua duo



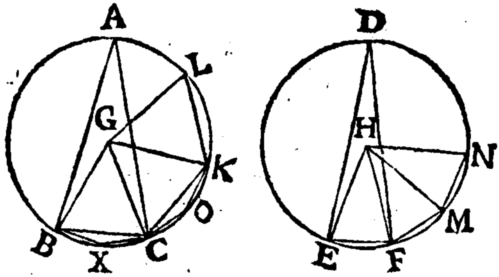
latera BC, CE, rectam lineam componere. Probat. Cum enim parallelæ sint AB, DC; [*per 29. pri.*] erit angulus A, alterno angulo ACD, æqualis; eademque ratione angulus D, eidem ACD. æqualis erit; ac proinde A, & D, inter se quoque existent ęquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; [*per 6. sex.*] ipsa erunt inter se æquiãgula, habebuntq; æquales angulos B, & DCE: Additis ergo æqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B. & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est angulo ACE, æquales. Denuo addito communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: sed illi tres [*per 32. primi.*] æquales sunt duobus rectis. Ergo etiam duo ACE, ACB, duobus rectis æquales erunt: Quare [*per 14. pri.*] BC, CE, vnam rectam lineam constituent. Ergo si duo triangula, quę duo latera duobus leteribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 30. THEOR. 22.

In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistũt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant. Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SInt duo æquales circuli ABC, DEF, quorum centra G, H; sumanturque ex circulis duo quicunq; arcus,

arcus, nempè BC, EF, quibus ad centra quidem insistant anguli BGC, EHF, ad circumferentias vero an-



guli BAC, EDF. Dico esse iuxta defin. 6. lib. 5. vt BC, ad arcum EF, ita angulum BGC, ad angulum EHF, & angulum BAC, ad angulum EDF: & insuper sectorem BGC, qui rectis BG, GC, & arcu BC, continetur, ad sectorem EHF, quem comprehendunt rectæ EH, HF, & arcus EF. Prob. Ductis enim rectis BC, EF, [*per 1 quar.*] applicentur ipsis in circulis æquales rectæ, CK, quidem ipsi BC; at vero FM, MN, ipsi EF; ducanturque rectæ KG, MH, NH; Quoniam igitur æquales sunt rectæ BC, CK, [*per 28. ter.*] erunt quoque æquales arcus BC, CK, ac propterea [*per 27. ter.*] & anguli BGC, CGK, æquales erunt. Eadem prorsus ratione æquales erunt, & arcus EF, FM, MN, & anguli EHF, FHM, MHN; Quam multiplex, ergo est arcus BCK, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BGK, seu aggregatum angulorum prope centrum G, insistentium arcui BCK, ipsius anguli BGC; Et quàm multiplex est arcus EFMN, ipsius arcus EF, tàm multiplex erit angulus EHN, seu aggregatum

angu-

angulorum prope centrum H, arcui EFMN, insistentium, anguli EHF, siquidem in tot angulos æquales diuisi sunt anguli BGK, EHN, in quot æquales arcus secti sunt arcus BCK, EFMN. Quoniam vero si arcus BCK, æqualis fuerit arcui EFMN, [*per 27. ter.*] necessario angulus BGK, angulo EHN, æqualis erit: Ac proinde si arcus BCK, maior fuerit arcu EFMN, necessario angulus BGK, maior est angulo EHN; & si minor, minor: Proptereaque vna deficient arcus BCK, & angulus BGK, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BGC, ab EFMN, arcu, & angulo EHN, æquemultiplicibus secundę magnitudinis EF, & quartæ EHF; vel vna æqualia erunt, vel vna excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Quare [*per 6. def. quinti.*] quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum EF, secundam magnitudinem, ea erit anguli BGC, tertiæ magnitudinis ad angulum EHF, quartam magnitudinem.

Quoniam vero vt angulus BGC, ad angulum EHF, [*per 20 ter.*] ita est angulus BAC, ad angulum EDF, cum [*per 28. ter.*] illi horum sint dupli, perspicuum est ita esse quoque angulum BAC, ad angulum EDF, vt est arcus BC, ad arcum EF. Quod totum eisdem argumentis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centra constitutis, &c.

Constituantur iam in segmentis BC, CK, anguli BXC, COK, qui [*per 27. ter.*] æquales erunt, cum insistans æqualibus arcubus BAC, CBAK, Quare similia erunt segmenta BXC, COK: atque adeo [*per 24. ter.*] inter se æqualia, propterea quod sunt super rectas BC, CK, æquales. Additis igitur triangulis BGC, CGK, quæ [*per 4. pri.*] æqualia quoque sunt, fient sectores BGC, EHF, æquales. Quamobrem tam multiplex erit sector BGK sectoris BGC, quam multiplex est arcus BCK, arcus BC. Pari modo ostendemus, secto-

rem

rem EHN, tam multiplicem esse sectoris EHF, quam multiplex est arcus EFMN, ipsius arcus EF. Quoniam vero si arcus BCK, æqualis fuerit arcui EFMN, sector quoque BGK, sectori EHN, æqualis erit; & si maior, maior; & si minor, minor erit. Deficient propterea vna arcus BCK, & sector BGK, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BGC, ab arcu EFMN, & sectore EHN, æquemultiplicibus secundæ magnitudinis EF, & quartæ EHF; vel vna æqualia erunt, vel vna excedent, si ea, quæ inter se respondent, sumantur. Quare [*per 6. def. quinti.*] quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis ad arcum EF, secundam magnitudinem, ea erit sectoris BGC, tertiæ magnitudinis ad sectorem EHF, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis anguli eandem habent rationem cum periferijs, &c. Quod erit demonstrandum

COROLLARIVM 1.

Ex iam demonstratis fit manifestum, sic esse sectores, vt est angulus ad angulum Nam vtraque proportio eadem est proportioni arcus ad arcum. Quare [*per 11. qui.*] & inter se eædem erunt.

COROLLARIVM 2.

Rursus perspicuum est, vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circumferentiam. Et contra, vt sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circumferentiam ad arcum illi angulo subtensum. Siquidem vt est angulus in centro ad angulum rectum in centro, [*per 33. sex.*] ita est arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quapropter erit, vt angulus in centro ad quadruplum

an-

anguli recti, nempe ad 4. rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiam. Quod eſt primum. Quoniam vero eſt vt angulus in centro ad 4. rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad totam circumferentiam; erit conuertendo, vt quator recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro ſubtenſum. Quod eſt ſecundum.

Elementi Sexti Finis.

DVO

DVO

PRIORA SOLIDORVM

EVCLIDIS

ELEMENTA.

SOLIDORVM LIBER PRIMVS EVCLIDIS VERÒ

Elementum Vndecimum.

EVCLIDES absoluta expositione sex priorum Elementorum, in quibus linearum, atque superficierum passiones proponit; in septimo, octauo, ac nono Elemento numerorum materiam pertractat pro intelligentia linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quod totum in decimo Elemento satis luculenter absoluit, solidorum materiam aggreditur, hancque Geometriæ partem peculiari nomine Stereometriam appellat. Quia verò vniuersalis solidorum doctrina in vndecimo, ac duodecimo Elemento proponitur (in alijs enim Elementis agit de natura quinque corporum regularium) ideò placuit tantummodo vndecimum, atque duodecimum Elementum sex prioribus Geometriæ Elementis adnectere, pro completa lineæ, superficiei, corporisque, siue solidi noticia.

DEFINITIONES.

I.

Solidum est illa quantitas, quæ longitudinem, latitudinem, atque profunditatem habet.

IN hac prima definitione Auctor exponit quid nomine solidi, siue corporis veniat intelligendum; nam sicuti in definitionibus primi Elementi dicit, lineam esse quantitatem dumtaxat in longum, superficiemque in longum, & latum, commensurabilem; ita in hoc libro vndecimo docet, eam magnitudinem, quæ præter longitudinem, ac latitudinem sortita est etiam crassitiem, altitudinem, siue profunditatem, solidum, atque corpus Mathematicum appellari.

Vt autem Tyrones, in quorum gratiam hæc considerantur, claram efforment huius quantitatis ideam mente concipiant punctum aliquod è loco in locum moueri, quo in motu spatium solummodo in longum extensum designabit, nempe lineam; & hoc quia punctum ponitur quacunque magnitudine spoliatum. Vlterius intelligendo dictam lineam in transuersum moueri ex tali motu designabitur quantitas in longum, latumque commensurabilis, hoc est superficies. Demum concipiendo descriptam superficiem versus aliquam partem moueri, statim habebimus quantitatem trinæ dimensionis capacem, nempè solidum, siue corpus Mathematicum in longum, latum, atque profundum commensurabile.

Hoc totum clarius innotescet considerando punctum

ctum A, (Tab. 1. Fig. 1.) fluere versus B, quo in motu designabit lineam AB, vnius tantum dimensionis capacem nempè secundum longitudinem ex A, in B. Pariter considerando integram lineam AB, ad latera taliter moueri, vt eius extrema puncta A, & B, alias designent lineas AD, BC; huiusmodi fluxu designabit superficiem ABCD, capacem commensurationis in longum ab A, in B, & in latum ab A, in D. Tandem intelligendo superficiem ABCD, ita sursum, vel deorsum moueri, vt eius extrema puncta A, B, C, D, alias designent lineas AF, BG, CH, DE, tunc erit circumscripta magnitudo capax trinæ dimensionis, videlicet in longum secundum lineam AB, in latum secundum rectam AD, & in profundum secundum lineam AF: quæ magnitudo peculiari nomine solidum, siue corpus est illud, quod in data definitione fuit ab Euclide definitum.

II.

Solidorum termini sunt superficies.

QVemadmodum Euclides in primo lib. Elemen. affirmauit, lineam finitam à punctis terminari, & superficiem à lineis, ita in hoc libro dicit corpus Mathematicum à superficiebus comprehendi.

III.

Recta linea est ad planum recta; dum angulos efficit rectos cum omnibus lineis in proposito plano ductis, illamque tangentibus.

SIt recta linea AB, (Tab. 1. Fig. 2.) quæ insistat plano CD, taliter, vt punctum A, sit in subiecto plano CD, punctum vero B, in sublimi. Dico lineam rectam BA, esse rectam, siue perpendicularem ad planum CD, quando facit angulos rectos cum omnibus lineis in plano CD, ductis, & ad punctum A, concurrentibus, vti sunt DA, GA, HA, EA, &c.

IV.

Planum est ad planum, cum rectæ lineæ in vno plano ductæ, & communi planorum sectioni perpendiculares, etiam alteri plano rectæ sunt.

PRo intelligentia huius definitionis concipiamus planum AB, (Tab. 1. Fig. 3.) insistere plano CD, & lineam EB, esse communem sectionem planorum. Ab hac communi sectione in plano AB, ducantur quæcumque perpendiculares communi sectioni, nempe GF, IH. Dico quod si huiusmodi perpendiculares communi sectioni, etiam perpendiculares existant ad omnes lineas in subiecto plano CD, ductas, & concurrentes ad puncta G, & I, etiam planum AB, rectum erit ad planum CD: & è conuerso si planum sit ad aliud planum rectum, etiam perpendiculares GF, IH, ad aliud planum CD, rectæ erunt.

V.

Rectę lineæ ad planum inclinatio est angulus acutus factus à linea subiecto plano insistente, & ab alia linea ducta in plano subiecto à puncto, in quod cadit perpendicularis à vertice lineæ insistentis demissa ad aliud lineæ insistentis extremum.

Re-

REcta linea AB, (Tab. 1. Fig. 4.) insistat pleno CD, cum inclinatione, non autem ad angulos rectos; & punctum A, sit in ipso plano, B, verò in sublimi. Si à puncto B, ad planum CD, demittatur perpendicularis BE, & à puncto E, ad A, adiungatur EA; angulus BAE, erit quantitas inclinationis lineæ AB, ad planum CD.

V I.

Inclinatio plani ad planũ est angulus acutus factus à lineis ad idẽ punctũ cõmunis planorum sectionis ductis, rectosque angulos cum communi sectione constituentibus.

SVpra planum AB, (Tab. 1. Fig. 5.) insistat aliud planum, nempe CD, cum inclinatione; atque huiusmodi planorum communis sectio sit recta linea ED. Assumatur quodcumque punctum in recta ED, vt F, à quo ipsi ED, in plano DC, perpendicularis ducatur FH, & in plano AB, ducatur FG, pariter ad rectos angulos cum ED: hoc stante angulus acutus GFH, est quantitas inclinationis plani CD, ad planum AB.

V I I.

Planum dicitur ad planum similiter inclinatum, ac alterum ad alterum, cum talium planorum anguli inclinationis, inter se fuerint æquales.

V I I I.

Parallela plana sunt illa, quæ in quamcumq; partem protracta, nunquam conueniunt.

QVotiescumque duo plana sunt taliter disposita, vt quaqua versum producta nunquam concurrant, huiusmodi plana dicenda sunt parallela; vti se habent plana oppositorum parietum in quadrilatero cubiculo, quæ nunquam insimul possunt concurrere; ad differentiam tectorum domus, quæ cum insimul concurrant in summitate domus, ideò non parallela, sed concurrentia plana debent denominari.

IX.

Solida similia sunt illa, quæ à planis similibus, ac numero æqualibus continentur.

IN hac definitione Auctor proponit solidorum similitudinem dicendo, eam consistere in hoc, quod scilicet solida similia terminentur à planis similibus, & quod tot sint plana in vno, quot in alio.

X.

Æqualia, similiaque solida sunt illa, quæ similibus planis numero, ac magnitudine æqualibus continentur.

AD habenda æqualia, necnon etiam similia solida tria requiruntur, nempe quod obtineant plana numero æqualia, quod sint similia, & quod sint æqualia in capacitate, tam in vno, quam in altero solido.

XI.

Solidus angolus est ille, qui saltem à tribus planis angulis ad idem punctum constitutis, non autem in eodem plano existentibus, efformatur.

Essen-

ESsentia anguli solidi, siue corporei de facili intelligitur si concipiamus saltem tres rectas lineas ad vnum punctum concurrentes, neque in eodem plano existentes tres angulos planos efformare, à quibus angulus solidus continetur, vt est angulus solidus A, (Tab. 1. Fig. 6.) qui continetur à tribus angulis planis BAC, BAD, DAC, qui anguli plani efformantur à tribus lineis BA, DA, CA, ad punctum A, concurrentibus, quarum quælibet duæ, nempe BA, & AC, sunt semper in vno plano, vti in secunda Prop. huius lib. demonstrabitur, tertia vero DA, existit in alio plano. Quod dictum est de tribus angulis planis, angulum solidum constituentibus, valet etiam de pluribus, cum angulus solidus possit à quam plurimis angulis planis contineri.

XII.

Pyramis est figura solida, quæ continetur à planis, ab vno plano ad vnum punctum ductis.

SIt figura solida ABCD, (Tab. 1. Fig. 7.) quæ constituatur à planis ab vno plano ad vnum punctum ductis, hoc est à planis triangularibus ACD, ABD, BDC, ductis à plano ACB, ad punctum D, hæc vocabitur pyramis, cuius basis est planum ABC, vertex verò punctum D. Huiusmodi pyramus potest esse triangularis, vt in data figura, quadrangularis, pentagona, &c.

XIII.

Prisma est figura solida à planis contenta, quorum duo opposita sunt æqualia, similia, & parallela, reliqua vero sunt parallelogramma.

Sit figura solida A B C D E F, (Tab. 1. Fig. 8.) habeat opposita plana ABC, DEF, (quæcumque sint) æqualia, similia, ac parallela, reliqua vero plana ACFD, BCFE, BADE, parallelogramma, prisma appellabitur, eritque triangulare, si plana opposita sint triangula, quadrangullare, si quadrangula, &c.

X I V.

Sphæra est figura solida vnica superficie comprehensa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita cadentes rectæ lineæ, omnes inter se sunt æquales.

HÆc est definitio sphere tradita à Theodosio lib. 1. sphæricorum def. 1. quæ Euclidianæ definitioni videtur præferenda, cum illa sphæræ essentiam, hæc vero solam causam exponat.

X V.

Centrum sphæræ est illud punctum, à quo omnes rectæ lineæ ad sphæræ superficiem ductæ sunt æquales.

X V I.

Axis sphæræ est recta quæcunque linea per centrum sphere ducta, & vtrinque, à sphæræ superficiæ terminata, suprà quam immobilem reuoluitur sphera.

X V I I.

Diameter sphæræ est quælibet recta linea per centrum ducta, & vtrinque à sphæræ superficie terminata.

XVIII.

XVIII.

Conus eſt illa figura ſolida contenta circulo, & conica ſuperficie. Conica autem ſuperficies deſignatur, dum ab aliquo puncto immobili extra circulum accepto ad circuli circumferētiam ducta recta in vtramque partem producitur, & manente puncto conuertitur circa circuli periferiam quouſque circuli reuolutionem abſoluat.

EVclides in hoc loco coni generationem explicat aſſumendo reuolutionem trianguli rectanguli manente vno latere circa angulum rectum exiſtentes verum quia huiuſmodi generatio coni conuenit ſolummodo conis rectis, non autem ſcalenis; ideò placuit conum vniuerſaliter definire iuxta mentem Apollonij, qui lib. 1. conicorum def. 1. inquit, conicam ſuperficiem deſcribi, ſi poſito circulo, & puncto immobili extra circulum accepto recta linea ab eodem puncto ad circumferentiam fuerit adiuncta, hæc linea vtrinque producta, & manente puncto circa circuli circumferentiam taliter conuerſa, vt redeat ad illum locum à quo moueri cępit conicam deſignabit ſuperficiem, quæ vna cum circulo conum conſtituit. Sit exempli gratia, circulus AB, (Tab. 1. Fig. 9.) & punctnm D, extra planum circuli AB, aſſumptum. Deinde à puncto D, ad punctum A, poſitum in circumferentia circuli BA, recta ducatur DA, quæ in vtranque partem producatur verſus E, & G. Demum hæc linea EG, firmo manente puncto D, conuertatur per integram circumferentiam circuli AB, quo vſque denuo ad punctum A, à quo moueri cępit reuertatur, deſignabit ſuperficiem conſtantem ex duabus

ſuper-

superficiebus GDH, FDE, ad verticem positis, quam auctores conicam superficiem appellant. Figura vero solida contenta superficie conica ADB, & circulo AB, vocatur conus.

1. Vertex coni est punctum extra circulum acceptum, vt punctum D.

2. Basis coni est circulus AB.

3. Axis coni est linea recta à vertice ad centrum basis ducta, vt linea BC.

4. Conus rectus est, qui habet axem ad basim rectum; & scalenus, qui obtinet axem ad basim inclinatum.

Hoc patet in (Tab. I. Fig. 9.) in qua cum axis DC, rectus sit ad planum circuli AB, conus ABD, erit rectus, dum e contra in eadem (Tab. I. Fig. 10.) quia axis CD, inclinatus est ad basim coni, conus ADB, erit scalenus.

XIX.

Cylindrus est figura solida, quæ æqualibus, ac parallelis circulis, ac cylindrica superficie inter parallelos circulos interiecta continetur Cylindrica vero superficies habetur dum æqualium, ac parallelorum circulorum diametri æquidistantes in circulorum planis manentibus centris taliter reuoluuntur vna cum recta linea diametrorum terminos ex eadem partem coniungente, vt integram absoluant reuolutionem: nam superficies illa, quæ à circumlata ex eadẽ parte diametrorum terminos coniungente describitur cylindrica superficies nuncupatur,

Pari-

Pariter hæc cylindri definitio non est Euclidis, at Sereni libro primo de sectione cylindri Defin. 2. nam Euclidis Defin. tantummodo conuenit cylindris rectis, non autem scalenis; ac propterea relicta Def. Euclidiana placuit Sereni Deffinitione apponere.

Vt autem clarius intelligatur essentia huius corporis assumantur duo circuli æquales, & paralleli (Tab. 1. Fig. 11.) in quibus sint æquidistantes diametri AB, CD, quæ ad easdem partes iungantur recta AC: facta integra reuolutione diametrorum AB, CD, circa centra E, & F, immobilia, ita vt linea AC, redeat ad illum locum, à quo moueri cepit, designabit superficiem, quam Geometræ vocant superficiem cylindricam.

1. Cylindri bases sunt duo circuli paralleli, & æquales; vt circuli AB, CD.

2. Axis est linea recta per centra circulorum ducta; vt EF.

3. Latus cylindri est recta linea diametros coniungens, & quæ in girum delata cylindricam superficiem describit; vt linea AC.

4. Cylindrus rectus est ille, qui axem habet basibus rectum, siue perpendicularem, vt axis EF, (Fig. 11.) Cylindrus scalenus est, qui axem basibus inclinatum tenet, vt axis EF, (Fig. 12.)

XX.

Similes coni, & cylindri sunt illi, quorum axes, & basium diametri sunt proportionales.

Sint duo coni ABC, DEF, (Tab. 1. Fig. 13.) qui habeant axes basium diametris proportionales, hoc est tam sit axis BG, ad adaxem EH, sicuti dia-

diameter AC, ad Diametrum DF; huiusmodi coni erunt inter se similes: hoc autem totum valet etiam de cylindris tam rectis, quam scalenis.

XXI.

Parallelepipedum est figura solida contenta sex figuris quadrilateris, quarum opposite sunt parallelæ.

QVotiescunque enim habemus solidam figuram sex planis, quæ sint figuræ quadrilateræ, comprehensam, atque dicta opposita plana sint parallela, tale, solidum erit parallelepipedum; vti est solidum ACHF, (Tab. 1. Fig. 1.) contentum sex planis quadrilateris AC, HF, AE, BH; AG, DH, quæ plana cum oppositis planis sunt parallela, nam planum AC, est parallelum plano HF; BH, ipsi AE, &c. Quo stante hæc figura solida dicenda erit parallelepipedum, hoc est planis parallelis comprehensum.

Variantur autem parallelepipeda iuxta variationem parallelogrammorum, nam si omnia plana sint quadrata, dicetur Cubus; si existant rectangula oblongata, dicendum erit parallelepipedum oblongatum; demum si plana existant rhombi, vel rhomboides, parallelepipedũ rhomboidale erit nuncupandum.

XXII.

Solida figura in solida figura inscribi dicitur, quando omnes anguli figuræ circumscriptæ tangunt angulos, vel latera, vel plana illius figuræ, cui inscribuntur.

XXIII.

XXIII.

Solida vero figura solidæ figuræ circumscribi dicitur, quando anguli, vel latera, vel plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos illius figuræ, circa quam describitur.

DEFINITIONES QVINQVE

Corporum regularium.

1 CVbus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

2 Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

3 Octaedrum est illa figura solida ab octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

4 Dodecaedrum est solida figura sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquiangulis contenta.

5 Icosaedrum est solida figura sub viginti triangulis equalibus, & æquiangulis contenta.

Hæc dicuntur corpora regularia, quia omnia plana, à quibus comprehenduntur, sunt æqualia, æquilatera, & æquiangula: à nonnullis etiam vocantur corpora Platonica ex eo, quod Plato in Tymæo quinque illa mundi corpora, quæ à Philosophis simplicia existimantur, vti sunt Cœlum, Aer, Ignis, Aqua, & Terra, huiusmodi quinque corporibus assimilauerit. Circa talia corpora verba facit Euclides in lib. 13. & sequentibus.

PRO.

PROPOS. 1. THEOR. 1.

Vnius rectæ lineæ pars quædam nequit esse in subiecto plano, alia vero in sublimi.

SIt subiectum planum DE, (Tab. 1. Fig. 14.) in quo ducatur recta AC, indefinitè protracta. Dico partem huius lineæ non posse esse in plano DE, aliam vero in sublimi, hoc est in alio plano.

Demonst. Si hoc potest contingere sit recta ACB, quæ partem AC, habeat in plano DE, partem vero CB, in sublimi, hoc est extra planum DE. Cum enim recta AC, sit in plano DE, poterit in eodem plano in rectum adiungi alia recta linea, quæ tota sit in plano DE, taliter operando. A puncto C, in plano DE, [*per* 11. *pri.*] ducatur CG, perpendicularis ipsi AC; & pariter in eodem plano DE, ipsi CG, perpendicularis ducatur CF, Dico CF, in directum esse ipsi AC, sunt enim in eodem plano DE, vt supponimus, & insuper quia duo anguli GCA, GCF, sunt recti, & consequenter duobus rectis æquales, ergo [*per* 14. *pri.*] ACF, erit vna linea recta tota in plano DE, constituta. Quo stante duæ rectæ lineæ ACB, ACF, habebunt idem segmentum AC, commune, quod est impossibile [*per* 10. *axiom.*] Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Duæ rectæ lineæ sese mutuo secantes sunt in vno plano. Atque triangulum omne in vno est plano.

DVæ rectæ lineæ AB, CD, (Tab. 1. Fig. 15.) se se mutuo secent in E, sumptisque duobus punctis

ctis quomodocumque in rectis EB, ED, vti sunt G, & F, connectatur recta FG. Dico duas rectas AB, CD, sese intersecantes existere in eodem plano, ac totum triangulum EGF pariter in vno plano reperiri.

Demonstr. In lateribus trianguli EFG, vtcumque tria notentur puncta H,I,K, quæ coniungantur rectis HI, IK, KH. Si enim positi trianguli EFG, pars vna, vt EHIG, posset esse in vno plano, altera vero HIF, in alio, etiam rectarum EF, FG, partes EH, GI, erunt in vno plano, aliæ vero partes HF, IF, erunt in alio; sed hoc [*per 1 huius*] est impossibile ergo totum triangulum EFG, erit in vno Plano. Pari argumento demonstrabitur, quascunque alias partes eiusdem trianguli, & aliorum triangulorum in vno, eodemque existere plano.

Quo ad alteram vero partem quia duæ rectæ EF, EG, sunt in plano trianguli FEG, & totum triangulum, ex visis, est in vno plano; inde sequitur rectas EF, EG, esse in vno plano: quia vero rectarum AB, CD, [*per 1. huius.*] nequeunt partes aliquæ esse in vno plano, aliæ vero in sublimi, inde sequitur lineas AB, CD esse in plano linearum ED, EB; sed demonstratum est lineas ED, EB, esse in vno plano; ergo etiam lineæ AB, CD, sese secantes in E, erunt in vno plano. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

Quando duo plana se mutuo secant, communis eorum sectio est linea recta.

Sint duo plana AB, CD, (Tab. 1. Fig. 16.) quæ habeant communem sectionem lineam EF. Dico EF, esse lineam rectam.

Demonst. Si linea EF, non concedatur linea recta, à pun-à puncto F, ad E, in plano AB, ducatur recta EGF, & in plano CD, recta EHF: quare duæ rectæ EGF, EHF, cum eosdem habeant terminos E, & F, spatium includent: quod est impossibile [*per* 14. *axiom.*] ergo communis sectio EF, erit linea recta. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Si recta linea duabus rectis lineis sese secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam plano per ipsas lineas ducto ad rectos angulos insistet.

POnamus lineam AB, (Tab. 1. Fig. 17.) perpendiculariter insistere duabus rectis lineis CD, EF, se mutuo secantibus in B. Dico ipsam rectam AB, etiam perpendiculariter insistere plano CEDF, ducto per lineas CD, EF. Cum huiusmodi lineæ rectæ se intersecent in B; [*per* 2. *vndecim.*] erunt in eodem plano. In linea CD, vtrinque à puncto B, [*per* 3. *pri.*] accipiantur æquales portiones BG, BH; pariter in recta EF, duæ aliæ assumantur æquales lineæ BI, BK, ducanturque rectæ IH, GK. Vlterius in eodem plano CD, per punctum B, recta ducatur ML, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demum à puncto A, in sublimi constituto ad omnia puncta G, L, K, H, M, I, possita in plano CD, rectæ ducantur AG, AL, AK, AH, AM, AI.

Demonst. Quoniam duo triangula BGK, BHI, per constructionem habent duo latera GB, BK, æqualia duobus lateribus HB, BI, alterum alteri, cum KB, factum sit æquale ipsi BI, & GB, ipsi BH; insuper, & angulus GBK, [*per* 15. *primi*] æqualis angulo HBI; erunt, [*per* 4. *primi*] non solum bases GK, IH, æquales,

les, verum etiam anguli BKG, BIH, æquales, cum ipsis æqualia latera GB, BD, subtendantur.

Pariter in duobus triangulis BKL, BIM, duo anguli KBL, IBM, [*per 15. primi*] sunt æquales; anguli autem LKB, BIM, superius sunt demonstrati æquales; & vlterius latus KB, factum fuit æquale lateri BI: ergo [*per 26 primi*] reliqua latera BL, LK, erunt reliquis lateribus BM, MI, æqualia.

Item in duobus triangulis ABG, ABH, per constructionem duo latera AB, BG, facta sunt æqualia duobus lateribus, AB, BH, cum autem, & anguli à dictis lateribus contenti sint æquales, cum ambo supponantur recti; erunt [*per 4. primi*] bases AG, AH, æquales: quoquomodo etiam demonstrabitur alias bases AK, AI, æquales esse.

Rursus in duobus triangulis HAI, GAK, duo latera AI, IH, demonstrata sunt æqualia lateribus AK, KG; & basis AH, æqualis basi AG: [*per 8. primi*] erit angulus AIH, æqualis angulo AKG.

Denuo cum duo triangula AKL, AIM, habeant duo latera AK, kL, æqualia duobus lateribus, AI, IM; nec non etiam angulos AKL, AIM, ab æqualibus rectis lineis contentos æquales habeant, ex demonstratis: sequitur [*per 4 primi*] bases AL, AM, esse æquales.

Tandem cum duo triangula ABL. ABM, habeant latus AB, commune, & latera BL, BM, æqualia, basimque AL, basi. AM, æqualem ex demonstratis: erunt [*per 8. primi*] anguli ABL, ABM, ab æqualibus lateribus contenti æquales: cum autem huiusmodi anguli sint deinceps positi. [*per 10. def. lib. primi*] erunt ambo recti: quare linea recta AB, efficit angulos rectos cum recta LM, ducta in plano CD, & concurrente cum AB, in B. Eodem argumento demonstrabitur rectam AB, angulos rectos efficere cum quacumque alia linea ducta in eodem plano CD, & concurrente ad punctum B, quare: [*per 3. def. huius*] linea AB, recta erit ad planum CD, ductum per lineas CD, EF. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Si recta linea tribus rectis lineis sese mutuo tangentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat: illæ tres rectæ lineæ in vno erunt plano.

Sit data recta linea AB, (Tab. 2 Fig. 1.) quæ ad punctum B, communem sectionem trium rectarum BC, BD, BE, ad rectos angulos insistat illis tribus rectis lineis. Dico tres illas lineas BC, BD, BE existere in vno plano.

Demonst. Quælibet duæ rectæ lineæ se mutuo secantes [*per 2. vndecimi*] sunt in vno plano: ergo duæ rectæ BC, BD, erunt in vno plano, nempe in plano CF; si postea non credatur, rectā BE, reperiri in eodem plano CF, saltem in alio plano erit statuenda. Quoniam enim duæ rectæ BA, BE, se secantes in B, [*per 2. huius*] sunt in vno plano, scilicet in plano AG. Quia vero duo plana AG, FC, sibi mutuo occurrunt in B, si producantur se intersecabunt efficiendo communem sectionem BG, rectam lineam. [*per 3. vndec.*] Hoc stante quia linea AB, supponitur perpendicularis duabus lineis BC, BD, [*per 4. vndec.*] erit etiam recta ad planum FC, ductum per lineas BC, BD; sed communis sectio BG, est in plano FC; ergo AB, ad rectos angulos erit ipsi BG. [*per 3. def. huius lib.*] Verum supponitur AB, ad rectos angulos insistere duabus rectis BE, BG, in eodem plano AG, existentibus; quare duo anguli ABE, ABG, vtpote recti, erunt inter se æquales; sed angulus ABE, est pars anguli ABG: ergo pars adæquabit suum totum: quod est contra 9. axiom; quamobrem recta BE, nequit esse extra planum FC, sicque tres lineæ BC, BD, BE, erunt in eodem plano. Quod demonstrandum erat.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Duæ rectæ lineæ ad rectos angulos eidem plano insistentes, sunt inter se parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ AB, CD (Tab. 2. Fig. 2.) quæ secundum 3. def. huius libri plano EF, rectæ sint. Dico tales lineas esse inter se parallelas. A puncto B, ad D, recta ducatur BD, quæ tota erit in plano EF, cum puncta B, & D, in tali plano reperiantur. Insuper in ipso plano EF, à puncto D, [*per* 11. *primi*] ducatur DG, perpendicularis ad BD, & æqualis ipsi BA. Et demum adiungantur rectæ BG, GA, AD.

Demonstr. Quoniam duæ rectæ AB, CD, supponuntur perpendiculares plano EF, [*per* 3. *def. huius lib.*] erunt anguli ABD, CDB, recti. Rursus cum duo triangula ABD, GBD, habeant duo latera AB, BD, æqualia duobus lateribus GD, DB, per constructionem; & anguli ABD, GDB, æquales, cum sint recti; [*per* 4. *primi*] erit basis AD, basi BG, æqualis. Pariter quia AB, BG, in triangulo ABG, æqualia sunt duobus lateribus GD, DA, trianguli GDA, & basis AG est communis; [*per* 8. *primi*] anguli ABG, ADG, æquales erunt; sed angulus ABG, [*per* 3. *def. huius*] supponitur rectus: ergo & angulus GDA, rectus erit. Cum autem [*per eand.* 3. *def.*] angulus GDC, sit rectus, linea GD, perpendicularis erit tribus lineis DB, DA, DC, concurrentibus in D: quare [*per* 5. *huius.*] tres rectæ DB, DA, DC, erunt in vno plano; sed [*per 2. vndecim.*] AB, est in illo plano, in quo sunt DB, DA: ergo in illo plano, in quo est CD, erit etiam AB. Quia vero anguli interni, & ad easdem partes ABD, CDB, demonstrati sint recti; [*per 28. primi*] duæ rectæ AB, CD, erunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

Si in duabus rectis lineis parallelis puncta accipiantur; linea recta coniungens illa puncta in eodem cum parallelis plano reperitur.

Sint parallelæ lineæ AB, CD, (Tab. 2. Fig. 3.) in quibus vtcunque duo assumantur puncta E, & F, quæ coniungantur per rectam EF. Dico rectam EF, reperiri in illo plano, in quo sunt parallelæ AB, CD; quæ ex essentia parallelarum debent semper esse in vno plano.

Demonstr. Si recta EF, non admittatur in plano parallelorum AB, CD, erit saltem in alio plano concedenda. Illud autem planum, in quo ponimus rectam connectentem puncta E, & F, taliter producatur vt secet planum parallelarum in punctis E, & F, faciatque communem sectionem EGF, quæ [*per 3. huius*] erit linea recta. Quo stante duæ rectæ lineæ EF, & EGF, cum obtineant eosdem terminos E, & F, claudent spatium: quod est impossibile [*per 14. axiom.*] ergo recta EF, nequit esse extra planum parallelarum AB, CD. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Datis duabus rectis lineis parallelis, quarum vna recta sit ad vnum planum; etiam altera ad idem planum recta erit.

DVæ rectæ lineæ AB, CD, (Tab. 2. Fig. 2.) sint parallelæ, & AB, recta sit ad planum EF. Dico etiam CD, eidem plano EF, rectam esse. Ex puncto B, ad D, recta ducatur BD, quæ erit in plano EF. Deinde à puncto D, recta ducatur DG, in plano EF, perpendicularis ad BD, & æqualis ipsi AB. Tandem ducantur GB, GA, AB.

Demonst. Quia AB, ponitur recta plano EF, [*per 3. def. huius*] erit angulus ABD, rectus: sunt autem [*per 29. primi*] duo anguli CDB, ABD, duobus rectis æquales: ergo angulus CDB, etiam ipse rectus erit. Rursus quia duo latera GD, DB, trianguli GDB, æqualia sunt duobus lateribus AB, BD, trianguli ABD; & anguli GDB, ABD, æquales, vtpote recti [*per 4. primi*] bases BG, AD, æquales erunt. Pariter cum duo latera GD, DA, trianguli GDA, ex demonstratis æqualia sint lateribus GB, BA, trianguli GBA, & basis AG, communis; [*per 8. primi*] erunt anguli GBA, GDA, æquales; est autem angulus GBA, rectus [*per 3. def. huius*] ergo, & angulus GDA, rectus erit. Quare fit manifestum lineam GD, perpendicularem esse duabus lineis DB, DA, sese mutuo secantibus in D: vnde [*per 4. huius*] eadem recta GD, recta erit ad planum ductum per lineas DB, DA; sed in plano rectarum DB, DA, [*per 2. huius*] est etiam AB; & in plano ipsius AB, [*per def. parallelarum*] reperitur CD: ergo in plano rectarum DB, DA, erit etiam recta CD. Quapropter GD, [*per 3. def. huius*] etiam ipsi CD, perpendicularis erit: si ergo CD, recta est ad duas DB, DG, concurrentes in D, eadem CD, [*per 4. vndec.*] etiam ad planum EF, ductum per illas, recta erit. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Si duæ rectæ lineæ eidem lineę parallelę sint, quamuis non in eodem plano cum illa reperiantur; adhuc tamen inter se erunt parallelæ.

SInt duæ rectæ lineæ AB, CD, (Tab. 2. Fig. 4.) quæ sint parallelæ ipsi EF, neque in eodem existant plano, hoc est EF, non sit in plano, in quo sunt AB, & CD. Dico rectas AB, CD, inter se quoque parallelas existere. Assumatur quodcunque punctum in recta EF, videlicet punctum G, à quo [*per 12. pri.*] ad rectas AB, CD, ducantur perpendiculares GH, GI.

Demonstr. Quoniam enim AB, EF, supponuntur parallelæ, atque GH, facta est perpendicularis ipsi AB, [*per 29. pri.*[erit angulus EGH, rectus; vti pariter angulus EGI, rectus erit. Quia vero EG, perpendicularis est ad duas lineas GH, GI, concurrentes ad G, [*per 4. vndec.*] erit etiam perpendicularis ad planum ductum per lineas GH, GI. Verum cum CI, supponatur parallela ipsi EG; [*per 8. huius.*] etiam ipsa recta erit ad planum ductum per lineas GI, GH. Eodem argumento demonstrabitur rectam AH, perpendicularem esse eidem plano per GH, GI, ducto: Igitur cum AH, CI, rectæ sint ad idem planum per GH, GI, ductum, [*per 6. huius*] erunt parallelæ. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 10. THEOR. 10.

Duæ rectæ lineæ ad punctum concurrentes, & alijs duabus rectis non in eodem plano existentibus parallelæ; angulos cum illis æquales comprehendunt.

DVæ rectæ lineæ AB, AC, (Tab.1. Fig.8.) concurrentes ad A, efformando angulum BAC, parallelæ sint duabus rectis lineis ED, FD, concurrentibus ad punctum D, efficiendo angulum EDF, neque in eodem plano cum prioribus existentes. Dico angulos BAC, EDF, ab illis lineis comprehensos æquales esse. Accipiamus AB, æqualem ipsi DE, & AC, ipsi DF, ducanturque rectæ BC, EF, AD, BE, & CF.

Demonst. Quoniam enim AB, DE, ponuntur æquales, ac parallelæ, [*per 33.pri.*] coniungentes BE, AD, etiam ipsæ erunt æquales, & parallelæ. Consimili modo demonstrabitur AD, CF, quoque parallelas esse, & æquales. Igitur cum BE, CF, parallelæ sint ipsi AD, [*per 9.huius*] etiam inter se parallelæ erunt, & æquales: quare [*per 33.primi*] BC, EF, coniungentes erunt æquales, & parallelæ. Quo stante duo latera BA, AC, trianguli BAC, æqualia erunt duobus lateribus ED, DF, trianguli EDF, & basis BC, demonstrata est æqualis basi EF: ergo [*per 8. primi*] anguli BAC, EDF, ab ipsis lateribus contenti æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOS. 11. PROBL. 1.

Dato quouis puncto in ſublimi, ab illo ad ſubiectum planum rectam lineam perpendicularem ducere.

SIt datum punctum A, (Tab.2. Fig.5.) in ſublimi, BC, vero planum ſubiectum: à puncto A, ducenda eſt linea perpendicularis ad planum BC. In ipſo plano BC, vtcunque ducatur recta DE, ad quam ex puncto A, in ſublimi poſito [*per 12. primi*] demittatur perpendicularis AF: rurſus à puncto F, [*per 11. primi*] in plano BC, ducatur FH, ipſi DE, perpendicularis; denuo ex A, ad rectam FH, [*per 12. primi*] perpendicularis demittatur AI. Dico AI, perpendicularem eſſe plano BC. Per punctum I, in plano BC, [*per 31. primi*] ducatur KL, parallela ipſi DE.

Demonſt. Cum enim recta DF, perpendicularis ſit duabus lineis FA, FH, ex conſtructione, etiam [*per 4. vndec.*] recta erit ad planum per FA, FH, ductum; vnde etiam KI, [*per 8. vndec.*] recta erit ad idem planum per FA, FH, ductum. Quia vero [*per 2. huius.*] AI, eſt in plano rectarum FA, FH, tangitque rectam KL, in I, erit [*per def. 3. huius*] angulus AIK, rectus, & ideo AI. ad rectos angulos erit duabus lineis KI, IF, quare eadem AI, [*per 4. huius*] perpendicularis erit plano BC, per lineas IK, IF, ducto. Quod erat faciendum.

PROPOS. 12. PROBL. 2.

Dato puncto in aliquo plano, ab eodem puncto eidem plano ad angulos rectos lineam rectam excitare.

IN plano BC, (Tab.2. Fig.6.) vtcumque sit acceptum punctum A, à quo ducenda sit perpendicularis eidem plano BC. Ex dato puncto D, in sublimi [*per* 11. *huius*] ad planum BC, perpendicularis demittatur DE, quæ vel cadet in A, vel extra; si cadit in A, factum est, quod erat faciendum; si vero cadat extra, vt in E, ab E, ad A, recta ducatur EA: deinde à puncto A, [*per* 31. *primi.*] ducatur AF, parallela ipsi ED. Dico AF, perpendicularem esse plano BC.

Demonst. Cum enim AF, DE, factæ sint parallelæ; necnon etiam DE, facta sit recta ad planum BC; [*per* 8. *huius*] erit etiam AF, eidem plano recta: ergo à dato puncto A, ad planum BC, ducta est perpendicularis AF. Quod faciendum erat.

PROPOS. 13. THEOR. 11.

Ab vno puncto accepto in aliquo plano duæ rectæ lineæ ad easdem partes eidem plano perpendiculares non possunt excitari.

IN plano AB, (Tab.2. Fig.7.) sit acceptum quodcumque punctum, nempe C. Dico quod à puncto C, ad easdem partes non possunt duci duæ perpendiculares eidem plano AB.

Demonstr. Si possint duci huiusmodi binæ perpendiculares, hæ sint CD, & CE. Cum igitur per constructionem CD, CE, eidem plano AB, rectæ sint

[per

[*per 6. huius*] erunt inter se parallelæ: quod est impossibile, quia concurrunt ad punctum C. Ergo ab vno puncto in plano accepto ad easdem partes nequeunt duci duæ rectæ eidem plano perpendiculares. Quod erat demonstrandnm.

PROPOS. 14. THEOR. 12.

Illa plana, ad quæ eadem recta linea est perpendicularis, inter se sunt parallela.

Recta linea AB, (Tab. 2. Fig. 8.) perpendicularis sit ad plana CD, EF. Dico talia plana esse ad inuicem parallela, siue æquidistantia.

Demonst. Si non sunt parallela plana CD, EF, producta poterunt versus aliquam partem concurrere: concurrant igitur dicta plana producta ad partes C, & E, faciantque communem sectionem GH, quæ communis sectio [*per 3. vndec.*] erit linea recta. In hac communi planorum sectione sumpto quolibet puncto nempe I, in planis GCD, GEF, concurrentibus rectæ ducantur AI, BI, efformando triangulum AIB. Cum autem linea AB, recta ponatur ad plana GCD, GEF, [*per 3. def. huius*] in triangulo AIB, erunt duo anguli BAI, ABG, recti; & consequenter duobus rectis æquales, quod est contra 17. primi; ergo duo plana DC, FE, non poterunt concurrere, ac proinde erunt parallela. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOS. 15. THEOR. 13.

Si duę rectæ lineæ ad punctum concurrentes ad duas alias lineas, non in eodem plano ad vnum punctum pariter concurrentes parallelæ sint; etiam plana per illas lineas ducta erunt parallela.

POnantur duæ lineæ BA, CA, (Tab. a. Fig. 9.) concurrentes ad punctum A, quæ parallelæ sint duabus lineis DE, DF, in alio plano concurrentibus ad punctum D. Dico duo plana BC, EF, per huiusmodi lineas ducta esse parallela. A puncto A, [*per 11. huius*] ad planum per lineas DE, DF, ductum demittatur perpendicularis AG: postmodum vero in eodem plano EF, á puncto G, [*per 31. primi*] ducatur GH, parallela ipsi DE, & GI, parallela ipsi DF.

Demonst. Quoniam enim rectæ AB, GH, ponuntur parallelæ ipsi DE; [*per 9. huius*] erunt & inter se parallelæ: vnde [*per 29. pri.*] duo anguli BAG, HGA, erunt duobus rectis æquales, sed angulus HGA, est rectus, quia AG, facta est recta ad planum EF: ergó etiam angulus BAG, rectus erit. Eodem modo facile erit probare & angulum CAG, rectum esse. Quare cum recta AG, perpendicularis sit duabus lineis AB, AC, [*per 4. vndec.*] etiam ad planum BC, per illas ductum recta erit: fecimus autem eandem AG, rectam ad planum EF: ergo [*per 14. huius*] hæc plana BC, EF, parallela erunt. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Dato plano, & puncto extra planum per tale punctum ducere planum dato plano parallelum.

SIt datum planum BF, (Tab.1. Fig.1.) & punctum C, extra planum. Oportet per punctum C, ducere planum parallelum plano BF. In plano BF, ducantur duæ rectæ ad vnum punctum concurrentes, sintque GB, AB, concurrentes ad punctum B. Deinde à puncto B, ad C, ducatur BC. Insuper in plano rectarum GB, BC, ex puncto C, [*per 31. pri.*] ducatur CH, parallela ipsi BG: vti pariter ex puncto C, in plano rectarum AB, BC, recta signetur CD, parallela ipsi BA. Quo facto si per rectas CH, CD, concurrentes ad C, planum CE, fuerit ductum. Dico tale planum plano BF, esse parallelum.

Demostr. Cum enim GB, AB, se tangentes in B, parallelæ sint duabus HC, DC, concurrentibus in C; [*per 15. huius*] erunt plana BF, CE, parallela. Quod erat faciendum.

PROPOS. 16. THEOR. 14.

Si duo plana parallela ab alio secentur plano, communes planorum sectiones erunt parallelæ.

SInt duo plana parallela AB, CD, (Tab.2. Fig.10.) quæ secentur plano EF, communesque planorum sectiones sint rectæ EH, GF. Dico has communes sectiones esse lineas parallelas.

Demonstr. Si huiusmodi communes sectiones non sunt parallelæ versus vnam partem poterunt concurrere, quia ambæ sunt in plano secante EF; concurrant igitur in I, productæ ad partes E, & G. Quia [*per 1. vndec.*] recta HE, tota est in plano BA, & recta FG, tota in plano DC, inde sequitur, quod quemadmodum rectæ HE, FG, concurrunt in I, etiam plana BA, DC, debeant concurrere in I; quod implicat

cat, cum supponantur parallela: si ergo plana nequeunt concurrere, nec communes sectiones hoc præstare poterunt, atque ideo erunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 17. THEOR. 15.

Illæ rectæ lineæ, quæ à parallelis planis secantur, in partes proportionales secantur.

SInt rectæ lineæ AB, CD, (Tab. 2. Fig. 11.) quomoducunque dispositæ, quæ secentur planis parallelis, EF, GH, Ik, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico segmenta linearum inter plana parallela intercepta esse proportionalia hoc est vt LM, ad MN; ita OP, ad PQ A punctis L, & N, ad puncta O, & Q, in planis LO, NQ. rectæ ducantur LO, NQ; vti pariter ab L, ad Q, recta ducatur LQ, occurrentes plano GH, in R; & à puncto R, ad puncta M, & P, in plano GH, rectæ ducantur RM, RP.

Demonst. Triangulum LNQ, [*per 2. huius*] erit in vno plano, quod pariter de triangulo LOQ, dicendum venit. Quia vero paralìela plana GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, & trianguli LOQ, [*per 16. huius*] non solum communes sectiones MR, NQ, verum etiam PR, OL, erunt parallelæ. Quo stante [*per 2 sexti*] in triangulo LNQ, ita stabit LM, ad MN, vti LR, ad RQ; at ob eandem rationem in triangulo LQO, ita LR, ad RQ, vti OP, ad PQ; Quare [*der 11. quinti*] erit, vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOS. 18. THEOR. 16.

Si linea recta alicui plano ad rectos angulos insistat, etiam omnia plana per illam ducta eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta linea AB, (Tab. 2. Fig. 12.) plano CD, ad rectos angulos insistat. Dico omnia plana per eandem AB, ducta ad planum CD, recta esse. Per AB, vtcumque ducatur planum EF, quod cum plano CD, faciat communem sectionem rectam FG. Deinde accepto quouis puncto in recta FG, nempe H, à quo in plano EF [*per 31. primi*] ducatur HI, parallela ipsi BA.

Demonstr. Quoniam AB, IH, factæ sunt parallelę, atque AB, recta ponitur ad planum CD; [*per 8. vndec.*] etiam IH, ad idem planum recta erit: Quare IH, [*per def 3. huius*] perpendicularis erit communi sectioni FG. Pari ratione demonstrabitur omnes lineas ductas in plano FE, & parallelas ipsi AB, communi sectioni FG, existere perpendiculares: quare [*per def. 4. huius*] planum FE, (idem valet de omnibus alijs planis per AB, ductis) rectum erit ad planum CD. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 19. THEOR. 17.

Si duo plana, se ad inuicem secantia ad aliud planum recta sint; etiam communis illorũ sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint duo plana AB, CD, (Tab. 2. Fig. 13.) quæ habeant communem sectionem EF, atque dicta plana recta sint ad planum GH. Dico eorum cõmunem sectio-

sectionem EF, pariter esse rectam ad idem planum GH.

Demonstr. Vel enim communis sectio EF, perpendicularis est ad vtramque communem sectionem planorum AB, CD, cum plano GH, hoc est ad BF, & DF; vel ad vnam tantum; vel ad neutram. Si EF, statuatur perpendicularis tam ad FB, quam ad FD; inde sequitur [*per 4. huius.*] ipsam EF, existere perpendicularem plano GH, per FB, FD, ducto: quod est primum. Si vero statuatur EF, solummodo perpendicularis ipsi FB, vel FD, vt exempli gratia, ipsi FB; in hoc casu, quia planum AB, rectum ponitur ad planum GH, & EF, ponitur recta ad FB, communem planorum sectionem [*per 4. def. huius*] erit EF, recta ad planum GH. Demum si dicatur EF, ad FB, neque ad FD, perpendicularem esse; in hoc casu tam ex puncto F, in plano AB, ducatur FI, perpendicularis ipsi FB, quæ est communis sectio planorum AB, GH; quam ex eodem puncto F, in plano CD, ducatur FK, perpendicularis communi sectioni FD. Hoc stante quoniam planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit linea IF, perpendicularis ad planum GH, [*per 4. def. huius*] cum sit per constructionem perpendicularis communi sectioni planorum AB, GH. Ob eandem causam erit FK, eidem plano GH, perpendicularis: quare ab eodem puncto F, ad planum GH, duæ essent excitatæ perpendiculares, quod est contra propos. 13. huius libri: ergo in quocunque casu EF, recta erit ad planum GH. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 20. THEOR. 18.

Si ſolidus angulus à tribus angulis planis contineatur; ex his duo quomodocunque aſſumpti, reliquo ſunt maiores.

SIt ſolidus angulus A, (Tab. 2. Fig. 14.) qui à tribus angulis planis BAD, DAC, CAB, contineatur. Dico ex his angulis duos omnifariam ſumptos reliquo eſſe maiores.

Demonſtr. Quando tres anguli plani BAC, CAD, DAB, ſunt æquales, perſpicuum eſt duos inſimul acceptos ſemper eſſe maiores tertio. Pariter ſi ex his tribus angulis duo tantum ſint æquales, manifeſtum eſt, vnum æqualium angulorum cum tertio alium ſuperare. Tota igitur dubietas habetur, dum iſti tres anguli ſunt inæquales, nempe quod in tali caſu duo minores anguli ſimul accepti valeant maximum angulum ſuperare: quod totum ſic oſtendo. Ex datis tribus angulis BAC, BAD, DAC, efformantibus angulum ſolidum A, angulus planus BAC, ſit omnium maximus. Quo ſtante ad punctum A, & ad rectam BA, [*per 23. primi*] ponatur angulus BAE, æqualis angulo BAD, & recta AE, [*per 3. primi*] ponatur æqualis lineæ AD: deinde per B, & E, extendatur BE, quæ ſecet ipſam AC, in C: demum iungantur CD, DB. Quia enim in triangulo BAD, duo latera, BA, AD, ſunt æqualia duobus lateribus BA, AE, trianguli BAE, atque angulus BAE, fuit factus æqualis angulo BAD; [*per 4 primi*] erunt baſes BD, BE, æquales. Vlterius quia latera BD, DC, [*per 20. pri.*] ſunt maiora latere BC, ſi ab his quantitatibus inæqualibus æquales auferantur portiones BD, BE, [*per 5. axiom.*] remanebit DC, maius quam EC. Conſiderentur

rentur modo duo triangula DAC, EAC, in quibus duo latera DA, & AC, æqualia sunt duobus lateribus EA, & AC, basis autem DC, maior basi EC, ex viris: ergo (*per 25. primi*) angulus DAC, maior erit angulo EAC: quare si angulo BAD, qui factus est æqualis angulo BAE, addatur maior angulus DAC, & eidem angulo BAE, addatur minor angulus EAC; erunt duo anguli BAD, DAC, insimul maiores duobus angulis BAE; EAC; sed hi duo anguli sunt partes totius anguli BAC: ergo angulus BAC, minor erit duobus angulis BAD, DAC. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 21. THEOR. 19.

Quilibet Angulus solidus ab angulis planis quatuor rectis minoribus continetur.

SIt solidus angulus A, (Tab 2. Fig. 15.) contentus tribus angulis planis BAD, DAC, CAB. Dico talium angulorum quantitem deficere à quantitate quatuor rectorũ. Ad tria puncta B, D, C, rectæ adiungantur BD, DC, CB, quo facto cõstituti erunt alij anguli solidi B, D, C, sub tribus angulis planis contenti.

Demonstr. Quoniam vero (*per 20. huius*) in angulo solido B, duo anguli plani DBA, ABC, maiores sunt angulo DBC; pariter ob eandem rationem in angulo solido C, duo anguli plani ACB, ACD, maiores sunt angulo BCD: & demum in angulo solido D, duo anguli plani ADC, ADB, maiores sunt angulo CDB: erunt sex anguli plani DBA, ABC, ACB, ACD, ADC, ADB, maiores tribus angulis planis DBC, BCD, CDB. Quia vero (*per 32. primi.*) hi tres anguli sunt æquales duobus rectis; inde sequitur priores sex angulos esse duobus rectis maiores. Cum autem huiusmodi sex anguli additis tribus angulis ad punctum A, constitutis (*per 32. primi.*) adæquent sex rectos; si ab hac summa detrahantur dicti sex anguli maiores duobus rectis, remanebunt tres anguli BAD, DAC, CAD, ad punctum A, constituti, quatuor rectis minores. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Quamuis hoc theorema ab Euclide fuerit tantummodo propositum circa angulum solidum à tribus angulis planis efformatum; adhuc tamen ad quoscunque alios angulos solidos extendi potest: nam licet angulus solidus à quamplurimis angulis planis contineatur, semper est verum, tales angulos insimul acceptos deficere à quantitate quatuor rectorum: vt videre licet apud doctissimum Clauium, & alios in hoc loco.

PROPOS. 22. THEOR. 20.

Datis tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque sumpti reliquo sunt maiores, comprehendant autem ipsos angulos æquales rectæ lineæ, ex basibus æqualia latera connectentibus poterit triangulum efformari.

DAti sint tres anguli plani A,B,C, (Tab. 2. Fig. 16.) ab æqualibus lateribus AD, AE, BF, BG, CH, CI, contenti, cum hac conditione, quod duo quilibet reliquo sint semper maiores: deinde æqualium laterum extrema connectantur lineis DE, FG, HI. Dico ex his tribus rectis lineis posse triangulum efformari.

Demon-

Demonstr. Ex hoc enim quod tres lineæ sint tales, quod scilicet duæ semper sint maiores tertia (*per 22. primi,*) poterit triangulum efformari; hoc autem de tribus basibus DE, FG, HI, demonstrato iam clarum erit ex dictis lineis posse triangulum efformari. Quod autem duæ lineæ DE, & FG, simul acceptæ excedant tertiam HI, ita potest demonstrari. Vel enim tres anguli A, B, C, sunt omnes æquales, & sic (*per 4 pri.*) etiam bases DE, FG, HI, æquales erunt; atque ideo duæ ex illis tertiam superabunt; vel duo tantum anguli sunt æquales, tuncque basis vnius æqualium angulorum vna cum basi anguli inæqualis tertiam basim superabit; vel demum dati tres anguli sunt omnes inæquales, quo etiam in casu dico bases FG, HI, minores duos angulos subtendentes superare DE, subtendentem maximum angulum A. Fiat (*per 23. pri.*) angulus DAK, æqualis angulo B, & linea AK, producatur quousque sit æqualis ipsi AD, vel AE, &c. & demum connectantur rectæ DK, KE. Quoniam enim DA, AK, in triangulo DAK, per constructionem facta sunt æqualia lateribus FB, BG, trianguli FBG; vti pariter angulus DAk, factus est æqualis angulo FBG; (*per 4. primi*) erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia duo anguli B, & C, ponuntur maiores quam A, & angulus B, sit æqualis angulo DAK, si demantur huiusmodi anguli æquales (*per axiom. 5.*) erit angulus kAE, minor angulo C. Qua de re cum in duobus triangulis kAE, HCI, duo latera kA, AE, ponantur æqualia duobus lateribus HC, CI, & angulus C, maior angulo KAE; (*per 24. primi*) erit basis HI, maior basi kE. Cum autem Ak, existens æqualis ipsi AD, & AE, suam extrimatem k, habeat infra rectam DE, quia circumferentia descripta à centro A, interualeo AE, debeat transire per puncta E, K. D, figura DKE, erit triangulum, in quo (*per 20. primi*)

primi) duo latera Dk,kE, superant tertium DE: ergo à fortiori multo magis FG, & HI, rectam DE, superabunt. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, potentiam maioris lineæ supra minorem inuenire.

DAtæ sint duæ rectæ lineæ inæquales AB, quidem maior, & C, minor (Tab. 2. Fig. 19.) oportet inuenire quantitatem potentiæ lineæ AB, supra potentiam lineæ C; hoc est inuenienda est vna recta linea, cuius quadratum additum quadrato minoris lineæ C, adæquet quadratum maioris lineæ AB. Supra maiorem lineam AB, bifariam diuisam in D, ex centro D, interuallo DA, describatur semicirculus AEB; in quo [*per 1. quarti*] adaptetur AE, ipsi C, æqualis, iungaturque EB. Dico maiorem lineam AB, plus posse quam C, quadrato rectæ EB.

Demonstr. Quia in semicirculo AEB, [*per 31. tertij*] angulus AEB, rectus est; erit [*per 47. primi.*] quadratum AB æquale duobus quadratis AE, & EB; sed quadratum AE, ob laterum æqualitatem, adæquat quadratum ipsius C: ergo AB, plus poterit quam C, quadrato rectæ EB. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 23. PROBL. 3.

Ex datis tribus angulis planis quatuor rectis minoribus, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sint maiores, solidum angulum constituere.

SInt dati tres anguli plani A, B, C, (Tab. 3. Fig. 1.) quatuor rectis minores, & quod quilibet duo

sint

sint reliquo maiores. Opus est constituere angulum solidum constantem ex tribus angulis planis datis tribus angulis A, B, C, æqualibus. Ponamus sex lineas datos angulos A, B, C, comprehendentes æquales inter se existere, connectanturque lineis DE, FG, HI. Cum autem [*per 22. huius*] ex tribus rectis DE, FG, HI, possit efformari triangulum, efformetur, sitque triangulum KLM; ita vt latus KL, ipsi DE; LM, ipsi FG; & KM, ipsi HI, sit æquale. Constituto huiusmodi triangulo circa ipsum [*per 5. quarti*] describatur circulus, cuius centrum N, à quo ad trianguli angulos rectæ ducantur NK, NL, NM. Dico quamlibet rectarum AD, AE, &c. datos angulos A, B, C, comprehendentium superare quamlibet rectarum à centro N, ad angulos K, L, M, ductam. Quia vero centrum circuli circa triangulum descripti [*per 5. quarti.*] intra triangulum, in vno latere trianguli, & extra triangulum cadere potest, ideo hanc veritatem in quocunque casu opus est demonstrare.

Primo dum centrum N, cadit intra circulum, si rectæ AD, AE, &c. non concedantur maiores, quam NK, NL, & NM, saltem vel æquales, vel minores erunt admittendæ. Si sint æquales AD, AE, &c. ipsis NK, NL, NM; quoniam duo latera DA, AE, in triangulo DAE, ponuntur æqualia duobus lateribus LN, NK, trianguli LNK; basisque DE, facta est æqualis rectæ LK; erit [*per 8. pri.*] angulus A, angulo LNK, æqualis. Pari argumento demonstrabitur angulũ C, angulo KNM, & angulum B, angulo LNM, existere æqualem. Sunt autem [*per 2. corol. propo. 15. primi.*] tres anguli LNK, KNM, LNM, circa punctum N, æquales quatuor rectis: ergo etiam tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales erunt. Quod est absurdum, quia ponuntur quatuor rectis minores: quare rectæ AD, AE, &c. nequeunt esse æquales rectis NL, NK,

&c. Si vero AD, AE, ponantur minores quam NL, NK, ex maioribus lineis [*per 3. primi*] poterunt abscindi NO, NP, æquales ipsis AD, AE; deinde ducitur OP. Quia vero ita stat NK, ad NO, vti NL, ad NP; etiam diuidendo [*per 17 quinti*] erit NO, ad OK, vti NP, ad PL; ac proinde [*per 2. sexti*] OP, erit ipsi KL, parallela: quare [*per coroll. 4. prop. sexti.*] Triangulum NOP, simile erit triangulo NKL, & ideo NK, stabit ad KL, vti NO, ad OP: est autem prima NK, maior tertia NO: ergo [*per 14. quinti*] etiam secunda KL, maior erit quarta OP; at KL, facta est æqualis ipsi DE: ergo DE, maior erit quam OP: Cum autem duo triangula DAE, PNO, habeant duo latera DA, AE, æqualia lateribus NP, NO, per constructionem, basis vero DE, demonstrata sit maior basi OP, [*per 25. primi*] erit angulus A, maior angulo PNO. Eadem via demonstrabitur angulum C, superare angulum KNM, & angulum B, excedere ipsum LNM: sed tres anguli ad N, cõstituti, ex antedictis, sunt quatuor rectis æquales ideo tres anguli A, B, C, erunt quatuor rectis maiores. Quod est maius absurdũ, cũ supponãtur quatuor rectis minores: ergo rectę NK, NL, minores sunt, quã AD, AE, &c. Quod primo fuerat propos.

Secundo loco centrum N, cadat in vno latere trianguli. In hoc casu si dicamus AD, AE, &c. adæquare ipsas NK, NL; cum AD, AE, supponantur æquales ipsis BF, BG, etiam BF, BG, adæquabunt NL, NK, & NM; sed per constructionem LM, est æqualis ipsi FG: ergo rectæ FB, BG, adæquabunt rectam FG; quod est absurdum; quia [*per 20. primi*] in triangulo FBG, duo latera FB, BG, sunt semper maiora reliquo FG. Pariter maius absurdum erit, si dicamus rectas NL, NM, superare ipsas BF, BG, &c. quandoquidem FG, cum adæquet LM, se sola superabit reliqua duo trianguli latera BF, BG: quod est impossibile.

Demum

Demum centrum N, cadat extra triangulum infra latus LM. In hoc etiam casu, dicendo AD, AE, &c. adæquare NL, Nk, cum etiam basis Lk, facta sit æqualis basi DE [per 8. primi.] erit angulus A, angulo LNK, æqualis: eadem ratione angulus C, angulo kNM, æqualis erit: quare totus angulus LNM, adæquabit duos angulos A, & C; sed duo anguli A, & C, vt supponimus, supperant angulum B: ergo etiam angulus LNM, maior erit angulo B. Quia vero duo latera LN, NM, trianguli LNM, ponuntur æqualia lateribus BF, BG, trianguli BFG, & basis LM, facta fuit æqualis basi FG, [per 8. primi] erit angulus LNM, æqualis angulo B; quod est, impossibile, quia supra ostensum fuit ipsum angulum LNM, maiorem esse angulo B: non ergo rectæ NL, Nk, adæquant rectos AD, AE. Si autem quis crederet AD, AE, &c. minores esse quam NL, NK, poterunt [per 3. primi] ex ipsis NL, NK, abscindi portiones ipsis AD, AE, æquales; sintque NP, NO, NS, ductisque rectis OP, OS, vt in primo casu demonstrabitur angulus A, maior angulo PNO, & angulus C, maior angulo ONS: ad punctum N, & ad rectam Nk, [per 23. primi] ponatur angulus kNQ, æqualis angulo A; & ex alia parte constituatur angulus KNL, æqualis angulo C, taliter rectas NQ, NR, producendo, vt adæquent ipsas AD, AE, &c. Demum connectantur OQ, OR, quæ infra ipsas, OP, OS, cadere debent, quia circumferentia ex N, tanquam centro descripta debet transire per puncta OPQ, OSR. Quo posito cum [per 29. primi] angulus externus PON, æqualis ponatur angulo interno, & opposito LKN: erit angulus QON, minor angulo LkN. Eadem ratione demonstrabitur NOR, minorem esse angulo NkM. Quare totus angulus QOR, minor erit toto angulo LkM. His visis, quia non solum duo latera ON, NQ, in triangulo ONQ,

facta

factæ sunt æqualia duobus AD, AE, in triangulo ADE, verum etiam angulus ONQ. factus est æqualis angulo A; erit [*per 4. primi*] basis OQ, basi DE, æqualis: eodem modo demonstrabitur basim HI, adæquare basim OR; sed DE, per constructionem adæquat Lk, & HI, kM: ergo etiam QO, adæquabit Lk, & OR, KM. Quamobrem cum in duobus triangulis LkM, QOR, duo latera LK KM æqualia sint lateribus QO, OR, & angulus LKM, demonstratus sit minor angulo QOR; [*per 24 primi*] erit basis LM, maior basi QR: sed LM, per constructionem adæquat FG: ergo QR, maior erit quam FG. Quo stante cum duo latera FB, BG, in triangulo FBG, facta sint æqualia duobus lateribus NQ. NR, in triangulo NQR, atque basis BG, demonstrata sit maior basi QR; [*per 25 primi*] erit angulus B, maior angulo QNR: sed angulus QNR, factus est æqualis duobus angulis A, & C; igitur & angulus B, adæquabit duos angulos A.& C: quod est impossibile, quia suppositum fuit, duos angulos A, & C, tertium B, superare: ergo rectæ NL. Nk, &c. non sunt æquales, vel maiores quam AD, AE, &c. vti tertio loco erat demonstrandum.

Cum autem in omni casu demonstratum fuerit rectas AD, AE, &c. maiores esse rectis Nk, NL; modo est inquirendum quanta sit potentia lineæ AD, supra potentiam lineæ NK, hoc est quo excessu quadratum ipsius AD, superet quadratum Nk, iuxta modum in superiori lemmate explicatum. Ponamus ergo quadratum rectæ T, esse excessum quadrati AD, supra quadratum Nk, quod est idem ac asserere quadratum AD, adæquare duo quadrata Nk, & T. Hoc stante ex centro N, [*per 12. vndecim.*] ad planum circuli LKM, excitetur perpendicularis NV, æqualis rectæ T; ducanturque rectæ VL, Vk, VM, eritque fa-

factus solidus angulus V, quem dico constare ex tribus angulis planis MVk, KVL, LVM, æqualibus tribus angulis datis A, C, B.

Demonst. Quia recta NV, perpendicularis est ad planum circuli LKM, erit quoque eadem NV, [*per 3. def. huius*] recta ad lineas NL, Nk, NM, in circuli plano ductas; quare [*per 47. primi*] erit quadratum rectæ VL, æquale quadratis rectarum VN, NL: cum autem, & quadratum rectæ AD, ponatur æquale eisdem quadratis rectarum VN, NL; inter se æqualia erunt quadrata VL, & AD; & consequenter etiam latera AD, VL, æqualia erunt. Vlterius quia duo latera VN, & NL, in triangulo VNL, æqualia sunt lateribus VN, Nk, in triangulo VNk, & anguli VNL, VNk, quoque æquales, quia recti; [*per 4. primi*] erit quoque basis VL, basi VK, æqualis; eodem pacto demonstrabitur in triangulo VNM, basim VM, adæquare VL; sed ex visis VL, adæquat AD: ergo tres lineæ VL, VK, VM, non solum inter se, verum etiam ipsis AD, AE, &c. æquales erunt: quare cum in triangulo LVK, duo latera LV, Vk, probata sint æqualia duobus lateribus DA, AE, in triãgulo DAE, & basis DE, facta sit æqualis basi LK; [*per 8. primi*] erit angulus planus LVk, æqualis angulo A. Haud aliter demonstrari poterit, angulum kVM, angulo C, & angulum LVM, angulo B, æqualem esse: quare angulus solidus V, contentus erit tribus angulis planis, qui tribus iam datis A, B, C, sunt æquales. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOS. 24. THEOR. 21.

Solidum à parallelis planis contentum habet opposita plana parallelogramma similia, & æqualia.

Datum sit solidum parallelepipedum BGFC, (Tab.2. Fig.17) contentum sex planis, AC, CF, EG, GB, AF, BE, quorum aduersa AC, GE: BG, CF: BE, AF, sint parallela. Dico quælibet opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia.

Demonstr. Cum parallela plana BG, CF, secentur plano AC: [*per 16. huius*] erunt communes sectiones AB, DC, parallelæ. Pariter cum plana parallela AF, BE, secentur plano AC, [*per eandem*] erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ: quapropter figura quadrilatera ABCD, [*per def. 35. primi*] erit parallelogrammum. Eadem via ostendemus reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma.

Quod postea huiusmodi opposita parallelogramma sint similia ita suadetur. Ex demonstratis rectæ lineæ AB, BH, parallelæ sunt rectis DC, CE. non autem in eodem plano existentibus: ergo [*per 10. hui.*] erunt anguli ABH, DCE, æquales. Eodem argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis parallelogrammi CF. Quoniam vero [*per 34. pri*], BA adæquat CD, & BH, adæquat CE; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE, quod etiam valet de reliquis oppositorum parallelogrammorum lateribus: quare [*per def. 1 sexti*] opposita parallelogramma erunt simlia.

Demum quo ad æqualitatem oppositorum planorum, quia duo latera AB, BH, trianguli ABH, [*per 34. prim.*] æqualia sunt lateribus DC, CE, trianguli DCE; & an-

& angulus ABH, ostensus æqualis angulo DCE, [*per 4. primi.*] erunt triangula ABH, DCE, æqualia; sed [*per 34. primi*] triangula ABH, DCE, sunt medietates parallelogrammorum BG, CF: ergo talia parallelogramma æqualia erunt. Eodem prorsus argumento demonstrabitur reliqua parallelogramma opposita esse similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 25. THEOR. 22.

Parallelepipedum sectum plano aduersis planis parallelo, resoluitur in partes basibus proportionales.

PArallelepipedum ABCD, (Tab. 2. Fig. 18.) sectum sit plano EF, oppositis planis, AD, BC, parallelo. Dico solidum ADFE, stare ad solidum EFCB; vti stat basis AG, ad basim EI. Intelligamus datum parallelepipedum ABCD, indefinitè productum versus vtranque partem. Deinde in linea AB, producta verus A, accipiantur aliquæ partes æquales ipsi AE, sintque Ak, kL. Pariter in eadem recta AB, verus B, producta aliæ notentur lineæ æquales ipsi BE, nempe BM, MN, NO. Deinde ex punctis K, L, M, N, O, [*per scol. 15. huius*] ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, vel BC.

Demonstr. Quoniam solidum AEFD, ex hypothesi continetur planis parallelis [*per def. 21 huius*] erit parallelepipedum, vnde [*per 24 huius*] obtinebit plana opposita parallelogramma similia, & æqualia. Eodem pacto parallelepipeda erunt solida AKPD, kLQP, EBCF, BMRC, MNSR, NOTS, habebuntque plana opposita parallelogramma similia, & æqualia. Vlterius parallelogramma AG, K8, L7, sunt super æquales bases EA, AK, KL, & ideo [*per 36. primi*] inter se

æqua-

æqualia; sunt autem, & similia, cum anguli vnius parallelogrammi [*per 29.pri.*] sint æquales angulis alterius, lateraque vnius parallelogrammi circa æquales angulos, æqualia lateribus alterius parallelogrammi. Non aliter similia, & æqualia erunt parallelogramma A3, K2, L1; quod pariter de planis AD, KP, LQ, di- dicendum venit: ergo tria plana AG, A3, AD, in solido ED, æqualia, & similia erunt tribus planis k8, k2, kP, solidi AP; & etiam tribus planis L7, L1, LQ, solidi KQ: sed [*per 24. vndec.*] in quocunque parallelepipedo tria plana sunt tribus planis oppositis similia, & æqualia: ergo [*per 10. def. huius*] solida ED, AP, kQ, æqualia erunt. Eodem argumento demonstrari poterit solida EC, BR, MS, NT, æqualia esse; quare quam multiplex erit basis LG, basis AG, tam multiplex erit solidum EQ solidi ED: & quam multiplex erit basis OG, basis BG, tam multiplex erit solidum OF, solidi BF. Quoniam vero dum basis LG, adæquat basim OG, etiam solidum EQ, adæquat solidum OF, quia dum LG, adæquat OG, sex plana solidi EQ, sunt æqualia, & similia sex planis solidi OF; si vero basis LG, sit minor basi OG, etiam solidum EQ, minus erit solido OF; & si basis LG, excedat basim OG, etiam solidum EQ, excedet solidum OF. Modo statuatur basis AG, prima magnitudo, basis BG, secunda; solidum ED, tertia, & solidum BF, quarta. Primæ, & tertiæ magnitudinis, hoc est basis AG, & solidi ED, accepta sunt æquemultiplicia, nempe basis LG, & solidum EQ: pariter secundæ magnitudinis, & quartæ, hoc est basis BG, & solidi BF, sumpta sunt æquæmultiplicia, nempe basis OG, & solidũ OF. In his autem pariter multiplicibus visum est, quod dum basis LG, multiplex primæ magnitudinis AG, superat basim OG, multiplicem secundæ BG; etiam solidum LF, multiplex tertiæ magnitudinis ED, superat soli-
dum

dum OF, multiplex quartæ BF: quando æqualis; æqualis; & quando minor, minor: ergo [*per 6. def. quinti*] erit vt basis AG, ad basim BG, ita solidum ED, ad solidum BF. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Hæc demonstratio non tantum parallelepipedis, verum etiam prismatibus quibuscunque accomodari poterit, nam prismata secta planis oppositis planis parallelis, sunt ad inuicem, vt bases.

PROPOS. 26. PROBL. 4.

Ad datam rectam lineam, atque ad eius punctum dato angulo solido æqualem angulum solidum constituere.

SIt data recta AB, (Tab. 3. Fig. 2.) & punctum in ea datum sit A; insuper datus sit angulus solidus C; oportet autem ad punctum A, & ad rectam AB, constituere angulum solidum æqualem solido angulo C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano existentibus. In linea CF, extra planum DCE, ducta accipiatur vnum punctum vt F, à quo [*per 11. huius*] ad planum DCE, demittatur perpendicularis FG, ducanturque rectæ DF, FE, GD, GC, GE. Insuper ex recta AB, [*per 3. primi*] abscindatur AH, æqualis ipsi CD, & ad punctum A, [*per 23. pri.*] ponatur angulus HAI, æqualis angulo DCE, fiatque recta AI, rectæ CE, æqualis. Denuo in plano rectarum BA, AI, ad idem punctum A, constituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, & recta AL, fiat æqualis rectæ CG, connectanturque rectæ LH, LI. Vlterius ex puncto L, [*per 12. vndec.*] ad planum, in quo sunt rectæ LA, LH, LI, erigatur perpenpendicularis Lk, ipsi GF, æqualis, ducaturque recta kA. Dico factum esse angulum solidum ad A, constantem ex tribus angulis planis, HAI, HAk, kAI, æqualem solido angulo C.

Demonstr. Ductis rectis kH. kI, cum duo latera HA, AL. trianguli HAL, æqualia sint per constructionem duobus lateribus DC, CG, trianguli DCG, & angulus HAL, factus sit æqualis angulo DCG; [*per 4. pri.*] erit & basis HL, æqualis basi DG. Rursus quia anguli HAI, DCE, facti sunt æquales, ablatis æqualibus angulis HAL, DCG, reliqui LAI, GCE, quoque æquales erunt: quare cum & latera LA, AI, facta sint æqualia lateribus GC, CE, [*per 4. primi*] erit basis LI, æqualis basi GE. Denuo quia in duobus triangulis HLk, DGF, duo latera HL, LK, facta sunt æqualia lateribus DG, GF, & anguli à dictis lateribus comprehensi æquales, quia recti; [*per 4. primi.*] erit basis Hk, æqualis basi DF. Pariter in duobus triangulis ALk, CGF, duo latera AL, Lk, facta sunt æqualia lateribus CG, GF, & anguli ALk, CGF, recti, ob lineas LK, GF, factas perpendiculares: erit [*per 4. pri.*] basis AK, æqualis basi CF. Denuo in duobus triangulis HAK, DCF, quia duo latera HA, AK, æqualia sunt duobus lateribus DC, CF, & basis Ak, æqualis est basi DF, ex demonstratis; [*per 8. primi*] erit angulus HAk, æqualis angulo DCF. Tandem cum in duobus triangulis KLI, FGE, duo latera kL, LI, æqualia sint lateribus FG, GE, atque anguli kLI, FGE, recti ob perpendiculares KL, FG, [*per 4 primi*] erunt bases kI, FE, æquales: cum autem in duobus triangulis kAI, FCE, etiam latera kA, AI, sunt æqualia lateribus FC, CE, [*per 8. primi*] erunt anguli KAI, FCE, æquales. Quo stante ad punctum A, erunt constituti tres anguli plani HAI, HAk, KAI, æquales tribus angulis planis DCE, DCF,

DCF, FCE, æquales: quare ad punctum A, & ad datam rectam AB, positus fuit angulus solidus A, æqualis dato angulo solido C. Quod erat faciendum.

PROPOS. 27. PROBL. 5.

Data recta linea, & solido parallelepipedo, ad datam rectam simile, similiterque positum aliud parallelepipedum constituere.

SIt data recta AB, (Tab. 3. Fig. 3) vna cum parallelepipedo CD: opus est ad rectam AB, constituere solidum parallelepipedum simile, ac similiter positum parallelepipedo CD. Ad punctum A, & ad rectam AB, [*per 26. huius*] constituatur angulus solidus A, æqualis angulo solido C; sintque tres anguli plani BAI, IAH, BAH, æquales tribus angulis planis FCG, GCE, FCE. Deinde [*per 12. sexti*] fiat vt FC, ad CG, ita BA, ad AI; & vt GC, ad CE, ita IA, ad AH. Quo facto [*per 22. quinti*] ex æqualitate erit etiam vt FC, ad CE, ita BA, ad AH. His per actis compleantur tria parallelogramma, BI, IH, & BH; atque à punctis B, I, & H, [*per schol. 15. huius*] tria ducantur plana BK, kI, & kH, parallela tribus planis IH, HB, IB, ita vt compleatur solidum parallelepipedum Ak. Dico hoc parallelepipedum esse simile, ac similiter positum parallelepipedo CD.

Demonstr. Quia angulus BAH, in parallelogrammo BH factus est æqualis angulo FCE, in parallelogrammo FE, & per constructionem latera circa huiusmodi angulos proportionalia, hoc est vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, erunt duo parallelogramma BH, & FE, similia, ac similiter posita: eadem prorsus ratione similia, ac similiter posita erunt parallelogramma HI, EG; IB, & GF: ergo in solido Ak tria plana BH, HI, IB, similia erunt, ac similiter posita tribus planis FE, EG, GF, in solido CD. Cum autem [per 24. vndec.] cuiuslibet solidi parallelepipedi tria plana sint similia tribus planis oppositis; sex plana solidi AK, similia erunt, ac similiter posita sex planis solidi CD: quare [per 9. def. huius] solida Ak, & CD, erunt similia, ac similiter posita. Quod erat efficiendum.

PROPOS. 28. THEOR. 23.

Solidum parallelepipedum sectum per diagonios oppositorum planorum, bifariam secabitur ab illo plano.

SIt solidum parallelepipedum CG, (Tab. 2. Fig. 17.) in quo lineæ diagonales oppositorum planorum BG, CF, sint AH, DE. Dico planum ductum per diagonios AH, DE, bifariam secare parallelepipedum CG.

Demonstr. In hoc Theoremate duo sunt demonstranda, primum quod per lineas diagonales AH, DE, possit duci planum; secundum quod tale planum in duos æquales partes diuidat parallelepipedum CG. Quo ad primum, quia [per 34. primi] tam DA, quam EH, sunt parallelæ, & æquales ipsi CB; [per 9. vndec.] AD, EH, etiam ipsæ parallelæ erunt, & æquales: quare [per 33. primi] coniungentes AH, DE, etiam ipsæ inter se æquales erunt, & parallelæ; & per consequens erunt in vno plano. Quo ad secundum; cum duo plana CF, BG, [per 24. vndec.] sint parallelogramma similia, & æqualia, & diameter [per 34. primi] bifariam secet parallelogrammum, erunt medietates horum parallelogrammum, hoc est triangula CDE, EFD, BAH, HGA, æqualia; in huiusmodi autem triangulis circa æquales angulos DCE, EFD, ABH,

ABH, HGA, latera sunt proportionalia; igitur [*per 6. sexti*] dicta triangula similia erunt. Insuper quia [*per 24. vndecimi*] parallelogrammum AC, simile, & æquale est parallelogrammo EG, & parallelogrammum DH, commune [*per def. 10. huius*) erunt duo prismata CAHE, EGAD, æqualia; sed hæc duo prismata componunt parallelepipedum CG: ergo tale parallelepipedum erit bifariam sectum à plano DH, per diagmos ducto. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 29. THEOR. 24.

Solida parallelepipeda super eadem basi, & in eadem altitudine constituta, dum insistentes parallelepipedorum lineæ in ijsdem collocantur rectis linæis; sunt inter se æqualia.

SVpra basim AB, (Tab. 3. Fig. 4.) & in eadem altitudine, hoc est inter plana parallela constituantur duo parallelepipeda ACDE, AFGE, tali conditione, vt insistentes lineæ, hoc est rectæ AI, Ak, EL, EM; AC, HF; BD, BG, venientes à quatuor angulis basis AEBH. in ijsdem constituantur rectis lineis; nempe in rectis IM, & CG. Dico taliter constituta parallelepipeda ACDE, AFGE, esse æqualia.

Demonstr. Quoniam duo parallelogramma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis AE, IM, sunt constituta; [*per 35. primi*] erunt æqualia; ablato autem communi trapezio AkLE, remanebunt triangula AIK, ELM, æqualia. Vlterius quia IL, & kM, (*per 34. primi.*) adæquant AE, erunt æquales inter se; dempta ergo communi portione KL, remanebit kI, ipsi LM, æqualis: vti etiam in parallelogramgrammis AL, AM, opposita latera AI, EL; Ak, EM, æqualia erunt. Quare, cum duo triangula AIk, ELM, [*per* 29. *primi*.] habeant angulos AIK, ELM, æquales, & latera circa æquales angulos proportionalia, videlicet AI, ad Ik, vti EL, ad LM; cum antecedentia, & consequentia sint demonstrata æqualia; [*per* 6. *sexti*] erunt æquiangula; vnde [*per* 4. *sexti*) erunt similia. Pariter quia in triangulo AIk, (*per* 34. *primi*) omnia latera sunt æqualia lateribus trianguli HCF; erunt huiusmodi triangula æqualia, & cum [*per* 10. *huius*] habeant angulos æquales, dicta triangula AIk, HCF, erunt [*per* 4. *sexti*) etiam similia. Pari modo æqualia, & similia erunt triangula ELM, BDG: quare (*per* 21, *sexti*) hæc quatuor triangula similia, & æqualia erunt. Insuper parallelogrãmum AC, (*per* 24. *huius*) est æquale, ac simile parallelogrammo ED; parallelogrammum AF, æquale, & simile parallelogrammo EG: vti pariter æqualia, & similia erunt parallelogramma IF, LG, quia in primis sunt super æqualibus basibus, & in ijsdem parallelis, & etiam quia latera circa æquales angulos sunt proportionalia: quare in prismate CKAH, tot erunt plana quot sunt in prismate DMEB, & plana vnius sunt æqualia, & similia planis alterius: ergo [*per def.* 10. *huius*.] æqualia erunt duo prismata CKAH, DMEB; vnde addito communi solido AFDE, erunt solida ACDE, AFGE æqualia: sed hæc solida sunt duo parallelepipeda supra basim AB, & in eadem altitudine constituta: ergo parallelepipeda super eadem basi, &c. sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

PROP.

PROPOS. 30. THEOR. 25.

Solida parallelepipeda ſuper eandem baſim, & in eadem altitudine conſtituta, quamuis lineæ inſiſtentes in ijſdem non collocentur rectis lineis; inter ſe ſunt æqualia.

SVpra baſim AB, (Tab. 3. Fig. 5.) ac in eadem altitudine, ſiue inter eadem plana parallela conſtituta ſint parallelepipeda AIDK, AMFK, hac lege, quod ſcilicet lineæ inſiſtentes vnius parallelepipedi non cadant in lineas alterius, hoc eſt lineæ inſiſtentes parallelepipedi AMFk, nempe HM, BF, KL, AE, productæ non tattingant lineas ID, DG, GC, CI, parallelepipedi AIDK. Dico parallelepipeda AIDK, AMFL, æqualia eſſe.

Demonſtr. Cum aſſignata parallelepipeda ſupponantur in eadem altitudine, in eodem plano erunt parallelogramma IG, & ML; quare productis lineis CG, ID, FL, MN, tranſibunt per planum ML, & IG. Producta igitur CG, quouſque concurrat cum FL, pariter protracta in O, & ID, producatur quouſque ſecet FL, in Q: item producatur ME, vſquequo ſecet CG, in N: eritque conſtitutum parallelogrammum PQON. Denuo ab angulis baſis ad quatuor puncta PQON, ducantur lineæ HP, BQ, KO, AN. Quibus peractis, cum recta PQ, [*per 34. primi*] adæquet MF, & MF, adæquet HB, etiam PQ, & HB, æquales erunt; ſunt autem & parallelæ, vtpote latera oppoſita in parallelogrammo HD: ergo [*per 33. pri.*] HP, BQ, æquales erunt, & parallelæ; & ideo quadrilaterum APQB, erit parallelogrammum. Eadem ratione demonſtrabitur quadrilatera HPNA, ANOX, KOQB, NOQD, esse parallelogramma: quare solidum APQK, erit parallelepipedum. Cum autem parallelepipedum AIDK [*per 29 huius*] sit ęquale parallelepipedo APQK; & idem parallelepipedum APQK, [*per eandem prop.*] adæquet parallelepipedum AMFK: [*per 1. axiom*] erunt æqualia parallelepipeda AIDk, AMFk. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 31. THEOR. 26.

Solida parallelepipeda super æquales bases, & in eadem altitudine constituta, inter se sunt æqualia.

Sint data duo parallelepipeda AEFG, CHIK, (Tab. 3. Fig. 6.) super æquales bases AB, CD, & in eadem altitudine constituta. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia.

Demonstr. Sint in primis octo lineæ insistentes LE, BF, OH, DI, &c. basibus AB, CD, perpendiculares, quo in casu dictæ insistentes erunt omnes inter se æquales ob eandem parallelepipedorum altitudinem. Recta Ck, vlterius producatur taliter vt kR, sit æqualis ipsi LB, fiatque [*per 23. primi*) in plano OK, angulus RkS, æqualis angulo BLA, & KS, adæquet LA. Quo absoluto perficiatur parallelogrammum KT, deinde supra hoc parallelogrammum KT, ad altitudinem perpendicularis kQ, constituatur parallelepipedum QSTV. Quoniam vero non tantum duo latera kR, KS, facta sunt æqualia lateribus LB, LA, verum etiam angulus RKS, factus est æqualis angulo BLA; erunt [*per 29. & 34 pri.*] duo parallelogramma KT, LG, æqualia, atque similia. Pariter quia duo latera kQ, kS, facta sunt æqualia lateribus LE, LA, anguli que contenti QkS, ELA, recti, quia

lineæ

lineæ kQ, LE, factæ sunt perpendiculares ad plana KT, LG; duo parallelogramma SQ, AE, erunt æqualia, ac similia. Eodem prorsus modo demonstrabitur parallelogramma kV, & LF, æqualia, atque similia existere Quare cum in parallelepipedo QSTV, tria plana kT, SQ, & kV, sint æqualia, & similia tribus planis LG, AE, & LF, in parallelepipedo AEFG; nec non etiam in quocunque parallelepipedo [*per* 24. *vndec.*] tria plana sint æqualia, & similia tribus alijs planis oppositis: duo parallelepipeda SQVT, AEFG, [*per def.* 10. *huius*] erunt inter se æqualia.

Insuper rectæ DK, TS, producantur in N, & compleatur parallelepipedum QNYV. Pariter HI, 2V, conueniant in 3: OD, YR, concurrant in 4, & compleatur parallelepipedum IkR3. Quoniam vero duo parallelepipeda QSTV, QNYV, sunt super eandem basim KV, & in eadem altitudine [*per* 29. *vndec.*] erunt inter se æqualia; sed parallelepipedum QSTV, ostensum est æquale parallelepipedo AEFG: ergo etiam parallelepipedum QNYV, eidem parallelepipedo AEFG, æquale erit. Quoniam autem [*per* 35. *primi.*] Parallelogramma KT, KY, sunt inter se æqualia, parallelogrammum vero kT, factum est æquale ipsi LG, erit & kY, ipsi LG, æquale, vel ipsi CD, cum LG, & CD, bases supponantur æquales. Quare [*per* 7. *quinti*] erit vt CD, ad DR, ita KY, ad DR; sed vt basis CD, ad DR, [*per* 25. *huius*] ita solidum CHIk, ad solidum KI3R, quia parallelepipedum C3, sectum est plano KI, oppositis planis parallelo: eodem fundamento erit vt kI, ad DQ, ita solidum CHIk, ad solidum kI3R, quia parallelepipedum INY3, secatur plano QR, oppositis planis parallelo: ergo [*per* 9. *quinti.*] parallelepipeda CHIk, QNYV, erunt æqualia, quia eandem rationem obtinent ad parallelepipedum IkR3. Cum autē parallelepipedū QNYR, sit
 osten-

ostensũ æquale parallelepipedo AEFG; erunt etiã duo parallelepipeda AEFG, CHIK, æqualia. Quod erat demonstrandum.

Secundo loco posito, quod lineæ insistentes parallelepipedorum CHIK, AEFG, non sint perpendiculares basibus AB, CD, hoc idem demonstrabitur, intelligendo scilicet supra bases AB, CD, efformata parallelepipeda eiusdem altitudinis cum prioribus, quæ parallelepipeda habeant insistentes lineas basibus perpendiculares. Quia enim [*per* 29. *vel* 30. *huius*] omnia parallelepipeda in eadem basi, & altitudine sunt æqualia; duo parallelepipeda supra basim CD, ac in eadem altitudine constituta æqualia erunt, quamuis vnum insistentes lineas habeat basi perpendiculares, aliud vero inclinatas: pariter æqualia erunt parallelepipeda supra basim AB, & in eadem altitudine efformata; sed ex demonstratis in prima parte huius propositionis parallelepipeda insistentes lineas perpendiculares habentia, sunt æqualia: ergo etiam dum insistentes lineas habent basibus inclinatas, æqualia erunt. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 32. THEOR. 27.

Solida parallelepipeda sub eadem altitudine constituta, inter se sunt, vt bases.

Sint data parallelepipeda ABCD, EFGH, (Tab 3. Fig 7.) eiusdem altitudinis, & supra bases AB, EF, Dico solidum ABCD, stare ad solidum EFGH, vti stat basis AB, ad basim EF. Ad rectam EK, [*per* 45. *pri.*] constituatur parallelogrammum æquale parallelogrammo AB, in angulo KEI, qui sit æqualis angulo FNE. Hoc facto, quia duo anguli KEI, KEN, sunt æquales duobus rectis; [*per* 14. *primi*] IE, & EN, erunt vna recta linea, & ideo IF, erit vnum parallelológrammum: si ergo productis planis parallelepipedi EFGH, versus EG, atque per I, ducto plano IL, parallelo plano EG; efformatum erit totum parallelepipedum IFLH, cuius pars, nempe parallelepipedum IkLM, æquale erit parallelepipedo ABCD, [*per 31. vndec.*] cum habeant æquales bases AB, Ik, & eandem altitudinem, ex hypothesi: qua de re [*per 7. quinti*] ita erit solidum ABCD, ad solidum EFGH, vti solidum IkLM, ad idem solidum EFGH; sed solidum IKLM, [*per 25. huius*] est ad solidum EFGH, vti basis IK, ad basim EF: ergo etiam solidum ABCD, erit ad solidum EFGH, vti basis AB, ad basim EF. Quod erat probandum.

PROPOS. 33. THEOR. 28.

Similia parallelepipeda, ad inuicem sunt in triplicata ratione laterum homologorum.

SInt duo parallelepipeda similia ABCD, AEFG, (Tab. 4. Fig. 1.) Dico inter se habere triplicatam rationem laterum homologorum.

Demonstr. Cum proposita parallelepipeda supponantur similia, erunt omnia plana vnius parallelepipedi similia planis alterius, sicque etiam similium planorum anguli æquales erunt. Quamobrem taliter poterunt disponi parallelepipeda, vt latera homologa sint indirectum posita. Disponantur ergo assignata parallelepipeda taliter vt non solum latera homologa DA, & AG, verum etiam HA, AI, necnon etiam KA, AN, sint in directum posita efformando angulos ad verticem DAH, IAG, &c. æquales. Cum enim duo plana AO, & AL, sint similia per hyppothesim; erit vt DA ad AH, ita GA, ad AI; vnde permutando etiam erit vt AD, ad AG, ita HA, ad AI. Pariter

cum

cum simila supponantur duo plana AB, AE; vti HA, ad AK, ita erit IA, ad AN, & permutando, vti HA, ad AI, ita KA, ad AN. Insuper ope rectarum HA, AG, compleatur parallelogrammum HG; vti pariter ad rectos KA, AG, compleatur parallelogrammum kG, & postea perficiatur totum parallelepipedum ABHG: haud aliter perficiendum erit, aliud parallelepipedum IKML.

His taliter peractis restat ostendere dari quatuor parallelepipeda continuè proportionalia in proportione homologorum laterum DA, ad AG, primumque parallelepipedum esse ABCD, quartum vero EAGF. Quoniam parallelepipeda ABCD, ABHG, sunt in eadem altitudine, [*per* 32. *huius*] erit vt basis DH. ad basim HG, ita solidum ABCD, ad solidum ABHG; sed [*per* 1. *sexti*] vti basis DH, ad basim HG: ita DA, ad AG: ergo solidum ABCD, erit ad solidum ABHG, vti DA, ad AG. Pari modo solidum ABHG, ad solidum IKML, erit vt basis HG, ad basim AL; siue (*per* 1. *sexti*] vt recta HA, ad rectam AI; hoc est vt DA ad AG. Demum ob eandem rationem solidum IKML, ad solidum EALF, erit vt basis IK, ad basim AE, seu vt recta KA, ad rectam AN; sed ex visis KA, stat ad AN, vti DA, ad AG: ergo quatuor parallelepipeda inter se erunt in eadem ratione DA, ad AG. Quapropter primum parallelepipedum AB CD, ad quartum AEFG, (*per def.* 10. *quinti*) habebit triplicatam rationem lateris DA, ad AG: cum autem latera DA, AG, sint latera homologa duorum parallelepipedorum ABCD, AEFG; etiam talia parallelepipeda inter se habebunt triplicatam rationem homologorum laterum DA, & AG. Quod erat ostendendum.

CO-

COROLLARIVM.

Ex hoc theoremate colligitur, quod si quatuor lineæ proportionales fuerint; vti est prima ad quartam, ita erit parallelepipedum supra primam ad parallelepipedum sibi simile supra secundam.

PROPOS. 34. THEOR. 19.

Æqualium parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; & quorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, illa sunt æqualia.

SInt æqualia parallelepipeda ABCD, EFGH, (Tab.4. Fig.2) super bases AD,EH, constituta. Dico huiusmodi bases, & parallelepipedorum altitudines reciprocari, hoc est ita esse basim AD, ad basim EH, vti est altitudo EK, ad altitudinem AI. Quia vero hoc theorema varios obtinet casus, ideo in quocumque casu veritatem propositionis tenemur ostendere.

Primus casus, dum parallelepipedorum insistentes lineæ sunt basibus perpendiculares. Cum enim in parallelepipedis ABCD, EFGH, insistentes lineæ AI, EK, &c. sint basibus AD, EH, perpendiculares; [*per def. 4. sexti*] erunt parallelepipedorum altitudines. Vel igitur huiusmodi insistentes lineæ sunt æquales, vel inæquales; si sunt æquales altitudines AI, & EK, etiam bases AD, EH, æquales erunt; quia [*per conuersam 31. huius*] parallelepipeda æqualia, & in eadem altitudine sunt super æquales bases: ergo reciprocè ita erit Basis AD, ad basim EH, vti est altitudo EK, ad altitudinem AI.

Secun-

Secundus casus si lineæ insistentes sint perpendiculares, & inæquales. Ex maiori perpendiculari EK, [*per 3. pri.*] abscindatur EL, æqualis ipsi AI; deinde [*per schol. 15. huius*] per L, ducatur planum parallelum basi EH. Quoniam vero æqualia ponuntur parallelepipeda ABCD, EFGH; erit [*per 7. quinti*] solidum ABCD, ad solidum LMEH, vti solidum GFEH, ad idem solidum LM EH; sed vti solidum ADCB, ad solidum LMEH, [*per 32. huius*] ita basis AD, ad basim EH, cū ponantur parallelepipeda æqualia; & vti solidum GFHE, ad solidum LMEH, [*per eandem 32. huius*] ita basis KN, ad basim LN. Ergo [*per 11. quinti*] erit basis AD ad EH, vti basis KN, ad LN; sed EN, ad LN, [*per 1. sexti*] stat vt kE, ad LE: igitur etiam erit basis AD, ad EH, vti KE, ad LE; cum autem LE, facta sit æqualis ipsi AI; erit basis AD, ad basim EH, vti altitudo Ek, ad altitudinem AI: vnde constat bases, & altitudines reciprocari.

Tertius casus, in quo insistentes lineæ non sint basibus perpendiculares. Vel enim tales insisten tes basibus inclinatæ, sunt æquales, vel inæquales; quocunque autem modo se habeant parallelepideda supra communes bases AD, EH, constituta [*per 29. vel 30. huius*] erunt parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia: quare si parallelepipeda ABCD, EFGH, habentia insistentes lineas basibus perpendiculares supponuntur æqualia, etiam parallelepipeda ab insistentibus inclinatis facta, æqualia erunt. Cum autem bases, & altitudines communes existant tam parallelepipedis ABCD, EFGH, quam alijs; inde sequitur etiam parallelepipedorum insistentes lineas inclinatas habentium reciprocari bases, & altitudines. Quod erat demonstrandum.

Exaduerso autem si in duobus parallelepipedis ABCD, EFGH reciprocentur bases, & altitudines,

hac

hac vt AB, ad EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI. Dico æqualia existere huiusmodi parallelepipeda.

Demonstr. Cum enim [*per 32. vndec.*] ita se habeat solidum ABCD, ad solidum EHLM, vti basis AD, ad basim EH; sed vt basis AD, ad basim EH, (*ita per hypoth.*) altitudo EK, ad altitudinem AI, siue LE: quare etiam erit vti solidum ABCD, ad solidum LMEH, ita altitudo EK, ad altitudinem LE: verum (*per 1. sexti*) vti KE, ad LE, ita parallelogrammum kN, ad parallelogrammum LN; siue vti solidum EHGF, ad solidum EHML, quia sunt parallelepipeda in eadem altitudine: ergo ita erit solidum ABCD, ad solidum EHML, vti solidum EHGF, ad idem solidum EHML. Quare [*per 9. quinti*] solida parallelepipeda ABCD, EHGF, æqualia erunt. Quod fuerat propositum.

SCHOLIVM.

Propos. 35. Theor. 30. Euclidis ommittitur, cum sequentes propositiones, quibus tantum inseruit, aliter possint demonstrari.

PROPOS. 36. THEOR. 31.

Datis tribus rectis lineis continuè proportionalibus, solidum parallelepipedum ab illis factum, æquale est parallelepipedo æquilatero, ac priori ęquiangulo à media proportionali descripto.

Sint datæ tres lineæ A, B, & C. (Tab. 4. Fig. 3.) continuè Proportionales, ex quibus constituatur angulus solidus G, cōstans ex tribus angulis planis FGM, FGE, EGM, sitque GM, ipsi A, GE, ipsi B, & GF, ipsi C, æqualis. Hoc facto compleantur tria parallelo-

gram-

gramma FM, FE, EM, & postea totum parallelepipedum FEND. Denuo [*per* 26. *huius*] constituatur angulus solidus L, solido angulo G, æqualis taliter, vt tres anguli plani KLO, KLI, ILO, æquales sint tribus angulis planis FGM, FGE, EGM, atque tres lineæ LK, LO, LI, adæquent mediam proportionalem B. Completis autem parallelogrammis sit efformatum parallelepipedum KIPH. Dico solidum DE, adæquare solidum HI.

Demonstr. Quia ex constructione in parallelogrammis FM, & KO, anguli FGM, KLO, sunt æquales, & insuper ita sit MG, ad OL, vti LK, ad GF, quia MG, adæquat A, OL, & LK, adæquant B, & GF, adæquat C; erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quare [*per* 14. *sexti*] parallelogramma FM, KO. erunt æqualia. Insuper cum angulus solidus L, sit factus æqualis angulo solido G, si punctum L, intelligatur in G, duo anguli plani FGE, KLI, congruerent, cum facti sint æquales quare linea LI, cadet supra GE, & cum LI, & GE, sint ambæ æquales ipsi B, punctum I, cadet in E, ex quo puncto demissa perpendiculari ad planum commune basibus KO, FM, hæc erit communis altitudo parallelepipedorum HI, DE: quapropter assignata parallelepipeda obtinebunt bases æquales FM, kO, eandemque altitudinem; vnde [*per* 31. *vndec.*] erunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOS. 37. THEOR. 32.

Datis quatuor lineis proportionalibus, similia parallelepipeda ab illis similiter descripta, pariter proportionalia erunt. Et si similia parallelepipeda similiter descripta, fuerint proportionalia; etiam ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportonale A, B, C, D, (Tab. 4. Fig. 4) hoc est vt A, ad B, ita C, ad D, Super A, & B, intelligantur descripta duo parallelepipeda similia; atque duo alia pariter similia intelligantur descripta supra C, & D. Dico ita esse parallelepipedum supra A, ad parallelepipedum supra B, vti parallelepipedum supra C, ad parallelepipedum supra D.

Demonstr. Cum enim solidum super A, ad solidum sibi simile supra B, [*per 33 huius*] sit in triplicata ratione lateris A, ad latus B; atque solidum supra C, ad solidum simile supra D, sit in triplicata ratione lateris C, ad latus D; erit solidum A, ad solidum B, vti solidum C, ad solidum D: quia eadem est triplicata ratio A, ad B, ac C, ad D, cum supponantur in eadem ratione.

E conuerso si solidum A, stet ad solidum B, vti solidum C, ad solidum D. Dico ita esse rectam A, ad B, vti C, ad D.

Demonstr. Linea A, ad B, [*per 33. vndec.*] est in subtriplicata ratione solidi A, ad solidum B; paritérque linea C, ad lineam D, est in subtriplicata ratione solidi C, ad solidum D; sed subtriplicata ratio solidi A, ad solidum B, eadem est, quæ solidi C, ad soli-

dum

dum D, cum huiusmodi solida supponantur in eadem ratione; ergo etiam eadem erit ratio lineæ A, ad lineam B, quæ lineæ C, ad lineam D. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 38. THEOR. 33.

Dum planum ad planum rectum est; si ab aliquo puncto vnius plani ad aliud planum perpendicularis ducta fuerit hæc in communem planorum sectionem cadet.

Sint duo plana AB, & AC, (Tab. 4. Fig. 5.) quorum vtrumque sit ad aliud rectum, hoc est planum AB, sit rectum ad AC, & è conuerso AC, sit rectum ad AB, taliumque planorum communis sectio sit recta AD. A quocunque puncto accepto in vno plano, nempe AB, nempe E, (*per* 11. *huius*) ad planum AC, perpendicularis demittatur. Dico hanc perpendicularem cadere in communem planorum sectionem AD.

Demonstr. Si enim ex E, ducta perpendicularis ad planum AC, potest cadere extra communem sectionem AD, cadat in F: deinde à puncto F, in plano AC, [*per* 12. *primi*] ad AD, perpendicularis ducatur FG; & demum in plano AB, recta ducatur GE. Quoniam vero FG, perpendicularis est communi sectioni AD, [*per def* 4. *huius*.] erit etiam perpendicularis ad planum AB; vnde [*per def*. 3. *huius*] erit FG, ad GE, perpendicularis: est autem, & EF, [*per eandem* 3. *def*.] recta ad FG: ergo in triangulo EFG, duo anguli EGF, EFG, erunt recti, & consequenter æquales duobus rectis; quod est impossibile, cum [*per* 17. *primi*] sint semper duobus rectis minores. Igitur ex E, ducta perpendicularis ad planum AC, in

AD,

AD, communem sectionem cadet. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 39. THEOR. 34.

Cum ad sequentes propositiones demonstrandas nullatenus concurrat hoc theorema, ideo, quantum fieri potest in hac materia pertractanda breuitati studentes, talem propositionem apud alios videndam relinquo.

PROPOS. 40. THEOR. 35.

Duo prismata æqualis altitudinis, quorum vnum habeat basim parallelogrammum, aliud vero triangulum, fuerit autem parallelogrammum trianguli duplum, erunt æqualia inter se.

Sint data duo prismata ABCDFE, GHIKLM. (Tab.4. Fig.6.) æqualis altitudinis. & primum habeat basim ABCD, parallelogrammum, alterum vero pro basi habeat triangulum GHI, cum hac conditione, quod parallelogrammum ABCD, duplum sit trianguli GHI Dico talia prismata esse equalia.

Demonstr. Producantur plana omnium triangulorum compleanturque parallelogramma BN, AO, GP, MQ; ductisque planis parallelis perficiantur duo parallelepipeda AN, GQ, quæ erunt eiusdem altitudinis cum prismatis; sicque duo parallelepipeda erunt æquealta. Quoniam vero parallelogrammum GP, *(per 34. primi)* duplum est trianguli GHI, &

parallelogrammum AC, supponitur eiusdem trianguli duplum; (*per 1. axiom.*) erit parallelogrammum GP, æquale parallelogrammo AC. Igitur duo parallelepipeda AN, GQ, erunt super æquales bases, & in eadem altitudine: vnde (*per 31. huius.*) erunt inter se æqualia: sed (*per 32. vndec.*] prismata ABCDEF, GHIKLM, sunt medietates parallelepipedorum AN, GQ: ergo etiam dicta prismata æqualia erunt. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex hac propositione facile erit ostendere, quod illa prismata, in quibus vnum ex oppositis planis accipitur pro basi esse ad inuicem, vt bases, dummodo eandem habeant altitudinem. Nam si prismata æquealta habeant bases triangulares, ad inuicem erunt, vt bases, quia completis parallelepipedis illa parallelepipeda erunt æquealta; & ideo [*per 32. huius*] inter se vt bases; sed prismata habentia bases triangulares sunt medietates parallelepipedorum, & triangula pro basibus inseruientia sunt medietates basium parallelepipedorum: ergo etiam prismata æquealta erunt vt bases. Hoc idem demonstrari poterit de prismatibus, quorum bases sunt polygona; quia huiusmodi bases in triangula resolui possunt; ergo prismata in eadem altitudine inter se sunt vt bases. Quod erat demonstrandum.

Libri Primi Solidorum Finis.

SOLI-

SOLIDORVM
LIBER SECVNDVS
EVCLIDIS VERO
Elementum Duodecimum.

PROPOS. 1. THEOR. 1.

Similia polygona in circulis descripta, inter se sunt, vt quadrata diametrorum.

Sint duo circuli ABD, FHI, (Tab. 4. Fig. 7.) quorum diametri sint AL, FM. In datis circulis descripta sint duo polygona similia ABCDE, FGHIK. Dico polygonum ABCDE, stare ad polygonum FGHIK, vti quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM.

Demonstr. Duobus angulis æqualibus, vti sunt ABC, FGH, subtendantur rectæ AC, FH; vti pariter rectæ ducantur BL, GM. Quoniam ob similitudinem polygonorum, vt est AB, ad BC, ita FG, ad

GH; [*per 6. sexti.*] erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, sicque in datis triangulis anguli ACB, FAG, æquales erunt: cum autem [*per 21. tertij*] angulus ALB, vtpote in eodem segmento, adæquet angulum ACB; & ob eandem causam etiam angulus FMG, sit æqualis angulo FHG; inde sequitur etiam angulos ALB, FMG, æquales esse. Verum cùm in duobus triangulis ABL, FGM, [*per 31. tertij*] etiam anguli ABL, FGM, sint æquales, cum sint ambo in semicirculis [*per 32. primi*] erunt reliqui duo anguli BAL, GFM, æquales: vnde [*per 4. sexti.*] triangula ABL, FGM, erunt similia, stabitque vt LA, ad AB; ita MF, ad FG; & permutando vt AL, ad MF, ita BA, ad FG: habemus igitur quatuor lineas proportionales, nempe LA, ad MF, vti AB, ad FG; sed (*per 22. sexti*) similia rectilinea à lateribus proportionalibus descripta, sunt proportionalia: ergo cum quadrata diametrorum AL, FM, sint rectilinea similia, vti pariter similia sunt polygona ABCDE, FGHIK, descripta à lateribus BA, FG; necessario sequitur ita esse quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM, vti est polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK. Quod erat demonstrandum.

NOTATIO.

Quia Euclides sequentia theoremata demonstrat dependenter à polygonis descriptis in circulis, quæ maiora extant data quantitate minore illo circulo, in quo descriptum est polygonum; ideo ad clariorem dicendorum intelligentiam non incongruum duxi apponere hoc Lemma.

LEMMA.

Data quantitate circulo minore; in ipso circulo describere polygonum ordinatum, quod maius sit illa quantitate data.

SIt data quæcunque magnitudo A, (Tab.4. Fig.8.) minor circulo BCDE. Oportet autem in dato circulo describere polygonum ordinatum, siue multilateram figuram regularem maiorem magnitudine A. In primis supponamus magnitudinem A, deficere à circulo BCDE, magnitudine N, adeo vt magnitudines A, & N, adæquent circulum BCDE. Secundo, in dato circulo [*per 6. quarti*] describatur quadratum BCDE, quod si extiterit maius quam A, factum est, qud erat faciendum: si vero tale quadratum minus sit magnitudine A, [*per 30. tertij*] bifariam diuidantur arcus BC, CD, DE, EB, in punctis F,G,H,I, & connectantur rectæ BF, FC, CG, &c. quæ constituant octogonum I B F C, &c. Si pariter huiusmodi polygonum non sit maius quam A, vti antea denuo subdiuidantur bifariam circumferentiæ BF, FC, &c. ducanturque subtensæ, quæ constituant polygonum sexdecim æqualium laterum; talis diuisio continuetur quousque remaneant circulorum segmẽta IB, BF, FC, &c. minora magnitudine N. Quod autẽ debeant remanere circuli segmenta, quæ insimul accepta minora sint magnitudine N; ita suadetur. A puncto I. (idem valet de reliquis punctis B,F,C, &c.) ducatur Lk, quæ sit tangens circuli, & producantur CB, DE, in k, & L. Hoc facto quia quadratum BD, in circulo descriptum est medietas quadrati circa circulum descripti; erit quadratum BD, maius medietate circuli BCDE. Pariter triangulum BIE, factum in segmento circuli BIE, cum [*per* 41.*pri.*] sit medietas parallelogrammi BK: erit triangulum BIE, maius medietate segmenti circuli BIE: quod pariter valet circa reliqua triangula facta in reliquis circuli segmentis, quorum singula medietatem suorum segmentorum superabunt: si ergo à circulo BCDE, auferatur plusquam dimidium, hoc est quadratum BD. & à segmentis pariter auferatur plusquam dimidium, hoc est triangula EIB, BFC, &c. [*per primam Decimi*] tandem remanebunt circulorum segmenta minora quantitate N. Quare polygonum BFCG, &c. maius erit data quantitate A: ergo in circulo possumus describere polygonum maius quacunque quantitate ipso circulo minore. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 2. THEOR. 2.

Circuli inter se eam rationem habent, quam quadrata diametrorum.

Sint duo circuli A, & B, (Tab. 5. Fig. 1.) quorum diametri sint DC, EF. Dico circulum A, stare ad circulum B, vti quadratum diametri DC, ad quadratum diametri EF.

Demonstr. Si non est verum ita esse circulum A, ad circulum B, vti quadratum diametri CD, ad quadratum diametri EF, erit saltem concedendum, circulum A, ad circulum B, habere maiorem, vel minorem rationem, quam quadratum diametri DC, ad quadratum diametri EF; sed hoc implicat, quod sic ostendo. Si circulus A, habeat maiorem rationem ad circulum B, quam quadratum diametri CD, ad quadratum diametri EF, poterit assignari quantitas, quæ stet ad circulum B, vti quadratum diametri DC, ad quadratum diametri EF: sit iam hæc quantitas G,

minor

minor certe quam circulus A, (*per 8. quinti*) quia circulus A, supponitur habere maiorem rationem ad circulum B, quam magnitudo G, ad eundem circulum B; sitque G, ad circulum B, vti quadratum CD, ad quadratum EF. Cum enim magnitudo G, minor sit circulo A [*per supra positum lemma*] in ipso circulo poterit describi polygonum maius data quantitate G; sit autem huiusmodi polygonũ KMDN,&c. cui simile inscribatur in circulo B, hoc est polygonum FQER, &c. Quia vero (*per 1. huius.*) polygonum in circulo A, descriptum stat ad polygonum simile in circulo B, vti quadratum diametri CD, ad quadratum diametri EF; insuper cum magnitudo G, per hypothesim, stet ad circulum B, vti idem quadratum CD, ad quadratum EF: (*per 11. quinti.*] erit polygonum in circulo A, ad polygonum simile in circulo B, vti magnitudo G, ad circulum B. Quatuor igitur erunt quantitates proportionales, nempe polygonum circuli A, quod stabit ad polygonum circuli B, vti stat magnitudo G, ad circulum B; cum autem prima magnitudo, nempe polygonum circuli A, ex visis superet tertiam, nempe magnitudinem G; [*per 14. quinti*] etiam secunda quantitas, hoc est polygonum circuli B, superabit quartam magnitudinem, videlicet circulum B: quod est impossibile, quia polygonum in circulo inscriptum est semper pars ipsius circuli: ergo circulus A, ad B, non obtinet maiorem rationem, quam quadratum diametri CD, ad quadratum diametri EF.

Pariter, quod circulus A, ad circulum B, nequeat habere minorem rationem, quam quadratum diametri CD, ad quadrtaum diametri EF, ita suaderi potest. Nam si circulus A, ad circulum B, minorem habeat rationem, quam quadratum CD, ad quadratum EF; conuertendo [*per 26. quinti.*] circulus B:

ad circulum A, maiorem obtinebit rationem, quam quadratum diametri EF, ad quadratum diametri CD. Quamobrem illa magnitudo, quæ ad circulum A, eandem obtineat rationem quam quadratum diametri EF, ad quadratum diametri CD, minor erit circulo B; ſit iam talis magnitudo G, minor circulo B, quæ ſtet ad circulum A, vti quadratum diametri EF, ad quadratum diametri CD. Cum autem magnitudo G, minor ſit circulo B, [*per lemma ſuperius poſitum*] in circulo B, inſcribi poterit polygonum maius quam G, quod ſit polygonum IQER, &c, cui ſimile inſcribatur in circulo A. His poſitis cum magnitudo G, ſtet ad circulum A, per hypotheſim, vti quadratum diametri EF, ad quadratum diametri CD; & rurſus, cum [*per* 1. *huius*] quadratum diametri EF, ſtet ad quadratum diametri CD, vti polygonum IQER, &c. ad polygonum KMDN, &c. erit etiam [*per* 11. *quin.*] magnitudo G, ad circulum A, vti polygonum in circulo B, ad polygonum in circulo A: cum ergo in his quatuor quantitatibus proportionalibus prima, hoc eſt G, deficiat à tertia, nempe polygono circuli B, vt ſupponimus; [*per* 14. *quinti*] etiam ſecunda quantitas, videlicet circulus A, deficiet à quarta, nempe polygono eiuſdem circuli A: quod eſt abſurdum, cum polygonum ſit ſemper pars illius circuli, cui inſcribitur. Ergo à primo ad vltimum circulus ad circulum nequit habere maiorem, vel minorem rationem, quam quadratum diametri vnius circuli ad quadratum diametri alterius. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM 1.

Ex hac propoſitione fit manifeſtum, circulos ad inuicem eſſe in duplicata ratione diametrorum; nam quadrata, cum ſimiles exiſtant figuræ, [*per* 20. *ſexti*] erunt in duplicata ratione laterum homologorum; ſed

sed circulorum diametri sunt homologa quadratorum latera: ergo circuli erunt in duplicata ratione diametrorum.

COROLLARIVM 2.

Pariter ex hac propositione sequitur circulos esse in ratione polygonorum similium in ipsis descriptorum, quia tam circuli, quam polygona similia in illis descripta inter se habent rationem illam, quam obtinent quadrata diametrorum.

COROLLARIVM 3.

Denuo ex hac propositione colligitur etiam semicirculos, quadrantes, &c. esse in duplicata ratione diametrorum, semidiametrorum, &c. quia [*per* 15. *quin.*] partes cum pariter multiplicibus in eadam sunt ratione.

Alia demonstratio huius theorematis a Guldino proposita.

Paulus Guldinus vir summi ingenij in tractatu de centro grauitatis positiuè demonstrando varias propositiones, in quibus Euclides solum negatiuè concludit, etiam hoc theorema sic conatur euincere.

Ex Archimede, & alijs, circuli sunt æquales rectangulis sub semidiametris, atque semiperipheria contentis: ergo vti circulus ad circulum ita erit rectangulum ad rectangulum; sed talia rectangula sunt similia, quia [*per* 23. *sexti*] ad inuicem habent rationem ex lateribus compositam, & ratio laterum est eadem in vtroque rectangulo, nam vt semidiameter ad semidiametrum, ita semiperipheria ad semiperipheriam: ergo talia rectangula [*per* 20. *sexti*] erunt in du-

duplicata ratione laterum homologorum, hoc est diametrorum. Cum autem circuli ex dictis adæquent talia rectangula, etiam circuli erunt in duplicata ratione diametrorum; sed quadrata diametrorum [*per* 20. *sexti*] habent rationem diametrorum duplicatam: ergo etiam circuli habebunt illam rationem, quam habent quadrata diametrorum. Quod erat ostendendum.

PROPOS. 3. THEOR. 3.

Omnis pyramis triangularem habens basim diuiditur in duas pyramides basis triangularis, similes, & æquales inter se, ac similes toti, & in duo prismata æqualia dimidio totius pyramidis maiora.

Sit data pyramis ABCD, (Tab. 5. Fig. 2.) cuius basis triangulum ABC, vertex vero punctum D. Sex omnia latera pyramidis AB, BC, CA, DA, DB, DC, bifariam secentur in punctis E, F, G, H, I, K, ducanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF, GH. Quo facto tota pyramis ABCD, diuisa erit in duas pyramides, quarum vna est AEGH cum basi AEG, ac vertice H, altera vero HIKD cum basi HIk, ac vertice D; necnon etiam in duo solida EBFGHI, CFG HIK, quæ ex demonstrandis sunt duo prismata, quorum primum basim habet parallelogrammũ EBFG; alterum vero habet pro basi triangulum CFG. Dico igitur ex his partibus, in quas resoluta fuit pyramis ABCD, duas pyramides AEGH, HIkD, triangulares habentes bases, esse æquales.

Demonstr. Cum enim latera DA, DB, sint secta bifariam, siue proportionaliter in H, & I; [*per* 2. *sexti*) erunt

erunt AB, HI, parallelæ. Ob eandem causam parallelæ erunt rectæ IK, BC; KH, CA; EG, BC; EF, AC; FG, AB; EH, BD; EI, AD; IF, DC; HG, DC. Insuper [*per 9. vndec.*] FG, IH, sunt parallelæ, cum parallelæ sint ipsi AB: vti pariter parallelæ erunt GH, FI, cum sint parallelæ ipsi DC. Quo stante manifestum est quadrilatera AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI, esse parallelog ama. Quia vero duæ rectæ HE, HG, sunt duabus DB, DC, paparallelæ [*per 10. vndecim*] erunt anguli EHG, BDC, æquales Eadem ratione pariter æquales inter se erunt tam anguli HEG, DBC, quam anguli HGE, DCB: cum ergo duo triangula EHG, BDC, sint æquiangula [*per 4. sexti.*] erunt similia. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, (*per coroll 4 sexti*) similia triangulis DAB, DAC, ABC: ergo pyramis AEGH, [*per def. 9. vndec.*] pyramidi ABCD, similis erit. Denuo quia rectæ HI, HK, duabus AB, AC, sunt parallelæ; [*per 10. vndecim.*] erunt anguli IHk, BAC, æquales. Eodem motiuo æquales erunt anguli HIK, ABC; & HkI, ACB: vnde [*per 4 sexti*] triangula HIK, ABC, erunt æquiangula, ac proinde similia: sunt autem (*per eandem 4 sexti*) & alia triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia: ergo pyramis HIKD, [*per def. 9. vndec.*] quoque similis erit eidem pyramidi ABCD; quare [*per 21. sex.*] etiam inter se similes erunt pyramides AEGH, HIKD.

Dico secundo has duas pyramides AEGH, HIKD, esse æquales inter se. Cum enim triangula AHE, HDI, super æquales bases AH, HD, & in eisdem parallelis AD, EI, sint constituta; [*per 38. primi*] erunt inter se æqualia: eodem fundamento æqualia erunt triangula AHG, HDk; triangula AEG, HIk; triangula HEG, IDk: sunt autem & huiusmodi triangula

inter

inter se similia, quia omnia fuerunt demonstrata similia triangulis totius pyramidis ABCD: igitur duæ pyramides AEGH, HIKD (*per def. 10. vndec.*) æquales erunt.

Dico tertio duo solida EBFGHI, FCGkHI, esse duo prismata æqualia. Quod autem sint prismata euincitur, quia in duobus triangulis EHG, BIF, omnia latera sunt æqualia; nam EH, [*per* 34. *primi*] adæquat BI; HG, adæquat IF; & EG, adæquat BF: ergo hæc duo triangula (*per* 8. *primi*) erunt inter se æqualia, & æquiangula; atque (*per* 4. *sexti*) etiam similia erunt; sunt autem, & parallela, cum rectæ triangula EHG, BIF, constituentes demonstratæ sint parallelę: ergo posita triangula æqualia, similia, ac parallela erunt Vlterius cum reliqua huius solidi plana sint parallelogramma EHIB, FIHG. BFGE, [*per def.* 13. *vndec.*) solidum ab huiusmodi planis contentum prisma erit. Eodem pacto demonstrabitur solidum FCGKHI, etiam ipsum prisma existere, quandoquidem duo plana FCG, HkI, sunt triangula æqualia, similia, ac parallela, & hoc quia latus GC, est æquale, & parallelum ipsi HK; CF, ipsi KI; & FG, ipsi IH. Sunt insuper reliqua plana huius solidi parallelogramma, HKCG, CKIF, & FGHI: ergo hæc duo solida prismata erunt. Quod postea talia prismata sint æqualia euincitur, quandoquidem sunt eiusdem altitudinis, hoc est inter plana parallela EBCG, & HIK, atque basis vnius est parallelogrāmum EBFG, duplum basis alterius, nempe trianguli FCG: quare [*per* 40. *vndec.*] posita prismata æqualia erunt.

Dico 4. quod hæc duo prismata superant dimidium totius pyramidis ABCD. Cum prisma EBFGHI. maius sit pyramide EBFI, ex eo quod prisma sit totum, & pyramis pars, cumque pyramis EBCI, similis sit, & æqualis tam pyramidi AEGH, quam pyra-

midi

midi HIkD, ob æqualitatem, ac similitudinem planorum tales pyramides comprehendentium: ergo duo prismata EBFGHI, GFCkHI, superabunt duas pyramides AEGH, HIKD; sed tota pyramis ABCD, fuit resoluta in duas pyramides, & in duo prismata: igitur talia prismata superabunt dimidium pyramidis, Quod fuerat propositum.

LEMMA.

Si latera ab angulis basis pyramidis ad verticem tendentia bifariam diuidantur, planum per illas sectiones ductum, etiam pyramidis altitudinem bifariam secabit.

SIt pyramis ABCD, (Tab.5. Fig.2.) cuius latera AD, BD, CD, ab angulis basis ABC, ad verticem D tendentia bifariam diuidantnr in H, I, K. Dico planum per lineas IH, HK, KI, ductum etiam pyramidis altitudinem bifariam diuidere.

Demonstr. Cum planum HIK, sit parallelum basi ABC; [*per 17 vndec.*] tam rectam DC, quam perpendicularem à vertice D, ad basim ABC, demissam proportionaliter secabit; sed DC; secta est bifariam in K: ergo etiam perpendicularis, siue altitudo pyramidis bifariam secabitur à plano HIK. Si autem extiterint duæ pyramides eiusdem altitudinis, etiam plana per medietates laterum ducta pyramidum altitudines bifariam secabunt: sicque huiusmodi plana erunt in eadem altitudine supra pyramidum bases constituta, Quod erat ostendendum.

PRO-

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Si duæ pyramides eiusdem altitudinis, & triangulares bases habentes, in duas pyramides inter se æquales, ac similes toti, atque in duo prismata æqualia diuidantur: & si rursus factæ pyramides similiter diuidantur; erit vt basis vnius pyramidis ad basim alterius; ita omnia prismata facta in vna pyramide ad omnia prismata alterius pyramidis, numero æqualia.

SInt datæ duæ pyramides ABCD, LMNO, (Tab. 5. Fig. 3) æqualis altitudinis, & habentes bases triangulares ABC, LMN: harum pyramidum omnia latera bifariam diuidantur ita, vt pyramides, vti prius, resoluantur in duas pyramides æquales, ac similes, & in duo prismata æqualia, totque fiant diuisiones in vna pyramide, quot in alia. Dico ita esse basim ABC, ad basim LMN, vti omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata pyramidis LMNO, numero æqualia.

Demonstr. Cum duo latera BC, MN, diuisa sint bifariam in F, & Q erit vt BC, ad CF, ita MN, NQ: sunt autem & duo triangula ABC, GFC, [*per 4. sexti*] similia; vti pariter similia sunt triangula LMN, RQN, [*per 22. sexti*] erunt hæc triangula proportionalia, hoc est vti triangulum ABC, ad triangulum GFC, ita triangulum LMN, ad triangulum RQN quare permutando erit triangulū ABC, ad triangulum LMN, vti triangulum GFC, ad triangulum RQN, sed [*per Coroll. 40. vndec. ac per supra positum Lemma*] ita est

trian-

triangulum FGC, ad triangulum RQN, vti prisma GFCKHI, ad prisma PQNVST, vel vt prisma EBFGHI, ad prisma PMQRSY, cum hæc sint illis æqualia: ergo [*per 12 quinti*] erunt duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis LMNO, vti est basis GFC, ad basim RQN, cum talia prismata [*per positum Lemma*] sint in eadem altitudine. Verum cum GFC, stet ad RQN, vti ABC, ad LMN, ex demonstratis; [*per 11. quin.*] erit etiam, vt basis ABC, ad basim LMN, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide LMNO. Simili prorsus argumento demõstrabitur ita esse bases AEG, HIK, ad bases LPQ, STV, vti prismata facta in pyramidibus AEGH. HIKD, ad prismata pyramidum LPRS, STVO, sicque deinceps quousque pyramidum diuisio fuerit continuata; sed vt illę bases ad has, ita est GFC, basis ad basim RQN. siue ABC, ad LMN: igitur quoque erunt vt basis ABC, ad basim LMN, ita omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata facta in altera pyramide LMNO. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 5. THEOR. 5.

Pyramides triangulares bases, & eandem altitudinem habentes; inter se sunt vt bases.

Sint duę pyramides ABCD, LMNO, (Tab. 5. Fig. 3.) quæ bases habeant triangulares ABC, LMN, eandemque altitudinem. Dico, quod pyramis ABCD, ad pyramidem LMNO, est vt basis ABC, ad basim LMN.

Demonstr. Si non est pyramis ad pyramidem vti basis ad basim, habebit saltem pyramis ABCD, ad

pyra-

pyramidem LMNO, maiorem, vel minorem rationem, quam habeat basis ABC, ad basim LMN: hoc autem non posse contingere ita euincitur: In primis ponendo pyramidem ABCD, ad pyramidem LMNO, maiorem obtinere rationem, quam basis ABC, ad basim LMN, erit assignabilis quantitas minor pyramide ABCD, quæ stet ad pyramidem LMNO, vti stat basis ABC, ad basim LMN: huiusmodi autem quantitas sit X, minor pyramide ABCD, magnitudine Z, hoc est X, & Z, insimul adæquent pyramidem ABCD. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides similes, & in duo prismata æqualia superantia dimidium pyramidis, vti factum fuit in prop. 3. huius libri; taliter hanc diuisionem in resultantibus pyramidibus continuando, vt remanentes pyramides sublatis prismatibus minores sint quam Z. Quod autem hoc possit fieri manifestum est, quia cum prismata (*per* 3. *huius*] superent dimidium pyramidis ABCD, continuata huiusmodi diuisione in pyramidibus ex diuisione resoltantibus [*per* 1. *dec.*] tandem ex pyramide ABCD, sublatis prismatis remanebunt pyramides minores quam Z. Supponamus igitur, quod in pyramide ABCD, facta diuisione prismata EBFGHI, GFCHIK, superent magnitudinem X. Eo modo, quo diuisa fuit pyramis ABCD, diuidatur denuo altera pyramis LMNO, ita vt tot sint prismata in vna pyramide, quot in alia. His peractis quoniam [*per* 4. *huius*] omnia prismata pyramidis ABCD, ad omnia prismata pyramidis LMNO, sunt, vt basis ABC, ad basim LMN; &, per hypothesim, vti basis ABC, ad basim LMN, ita magnitudo X, ad pyramidem LMNO: ergo (*per* 11. *quinti*) magnitudo X, ad pyramidem LMNO, erit vti omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata facta in pyramide LMNO. Cum autem in talibus quatuor quantita-

tibus

tibus proportionalibus prima quantitas, hoc est X, per constructionem deficiat à tertia, nempe à prismatis pyramidis ABCD, [*per* 14. *quinti*] etiam secunda videlicet pyramis LMNO, deficiet a quarta, nempe à prismatis pyramidis LMNO: quod est impossibile, quia pyramis LMNO, est totum, prismata vero partes. Non ergo pyramis ABCD, ad pyramidem LMNO, potest habere maiorem rationem, quam basis ABC, ad basim LMN.

Secundo si dicamus pyramidem ABCD, ad pyramidem LMNO, habere minorem rationem, quam basis ABC, ad basim LMN; conuertendo [*per* 26. *quinti*] habebit pyramis LMNO, ad pyramidem ABCD, maiorem rationem, quam basis LMN, ad basim ABD: illa igitur magnitudo, quæ stat ad pyramidem ABCD, vti basis LMN, ad basim ABC; (*per* 10. *quinti*) minor erit pyramide LMNO: sit talis magnitudo X, quæ eandem rationem habeat ad pyramidem ABCD, quam basis LMN, habet ad basim ABC, sitque minor pyramide LMNO. Vti prius resoluatur pyramis LMNO, in prismata excedentia magnitudinem X, similisq; diuisio fiat in altera pyramide ABCD. Hoc facto quia [*per* 4. *huius*] prismata facta in pyramide LMNO, stant ad prismata numero æqualia in pyramide ABCD, vti basis LMN, ad basim ABC; & insuper quia per constructionem vti basis LMN, ad basim ABC, ita magnitudo X, ad pyramidem ABCD, [*per* 11. *quinti*] magnitudo X, stabit ad pyramidem ABCD, vti prismata pyramidis LMNO, ad prismata pyramidis ABCD. Verumtum in his quatuor quãtitatibus proportionalibus prima X, deficiat à tertia, nẽpe à prismatis pyramidis LMNO, [*per* 14. *qu.*] etiam secunda quantitas, hoc est pyramis ABCD, deficiet à prismatis in tali pyramide factis. Quod est absurdum, quia pyramis est totum, & prismata partes ergo pyramis ABCD, ad pyramidem LMNO, nequit habere maiorem, vel minorem rationem, quam basis ABC, ad basim LMN. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex hac propositione colligitur æquales pyramides in eadem altitudine super æquales bases, vel super eandem basim esse constitutas, & è conuerso pyramides æquales, & super æquales bases, eandem habere altitudinem.

PROPOS. 6. THEOR. 6.

Quæcunque pyramides eiusdem altitudinis, inter se sunt, vt bases.

SInt quæcumque pyramides ABCDEF, GHIkLM, (Tab. 5. Fig. 4.) eiusdem altitudinis, habentesque latera moltitudine æqualia. Dico ita esse pyramidem ABCDEF, ad pyramidem GHIkLM, vti basis ABCDE, ad basim GHIkL.

Demonstr. Resoluantur pyramidum bases in tot triangula numero æqualia, eruntque pyramides in alias pyramides numero æquales, & triangulares bases habentes diuisæ. Cum autem duæ pyramides ABCF, ACDF, sint æquealtæ; [*per 5. huius.*] erit basis ABC, ad basim ACD, vti pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; quare [*per 18. quinti*] componendo erit basis ABCD, ad basim ACD, vti pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: Pariter cum sit vt basis ACD, ad basim ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF, erit etiam vti prius componendo, vti basis ACDE, ad basim ADE, ita pyramis ACDEF, ad pyramidem ADEF: quare ex æquo [*per 22. quinti*) erit

vt

vt basis ABCD, ad basim ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF: vnde rursus componendo erit tota basis ABCDE, ad basim ADE, ita tota pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento demonstrabitur ita esse basim GHIkL, ad basim GKL, vti tota pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM, conuertendo igitur erit etiam vt basis GkL, ad basim GHIKL; ita pyramis GkLM. ad pyramidem GHIKLM. Vlterius quia [*per 5. huius*] vt basis ADE, ad basim GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GkLM; erunt quatuor bases cum suis pyramidibus proportionales, vt in hac tabella.

Bases		Pyramides
ABCDE	ad	ABCDEF
ADE	ad	ADKF
GKL	ad	GKLM
GHIKL	ad	GHIKLM

Quare ex æquo [*per 22. quinti*] erit vt basis ABCDE, ad basim GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 7. THEOR. 7.

Omnia prismata triangulares bases habentia, diuiduntur in tres pyramides inter se æquales, & triangulares bases habentes.

Sit datum prisma ABCDEF, (Tab. 5. Fig. 5.) cuius duæ bases, siue plana parallela sint triangula ABF, CED. Dico huiusmodi prisma partiri in tres pyramides inter se æquales, ac triangulares bases habentes.

Demonstr. In tribus prismatis parallelogrammis

ABCD, BFEC, AFED, ducantur diametri AC, FC, FD. Quia vero triangula ABC. ACD, [*per* 34. *pri.*] æqualia ſunt; atque [*per* 5. *huius*] vti baſis ABC, ad baſim ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; cum hæ pyramides in eadem exiſtant altitudine; etiam pyramides ABCF, ACDF, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EDFC, cum inſiſtant æqualibus baſibus AFD, EDF, & in eadem altitudine, nempe perpendiculari à puncto C. ad planum parallelogrammi ADEF, demiſſa; ſed pyramis ACDF, eadem eſt, ac pyramis ADFC, cum ſub iiſdem numero planis contineatur: ergo tres pyramides ABCF, ADCF, DEFC, æquales inter ſe erunt; ſed hæ pyramides componunt datum priſma igitur priſma triangularis baſis in tres pyramides æquales, & triangulares baſes habentes reſoluitur. Quod fuerat propoſitum.

COROLLARIVM.

Ex hoc fit manifeſtum quamcunque pyramidem eſſe tertiam partem primiſmatis eandem cum ipſa baſim, & altitudinem habentis; vel priſma in eadem baſi, & altitudine cum pyramide triplum eſſe eiuſdem pyramidis.

PROPOS. 8. THEOR. 8.

Pyramides ſimiles ſunt in triplicata ratione laterum homologorum.

SInt primo pyramides ſimiles ABCD, EFGH, (Tab. 5. Fig. 6.) ac triangulares baſes habentes. Dico has pyramides ad inuicem habere triplicatam rationem laterum homologorum BC, FG.

Demonſtr. Extendantur omnia plana pyramides con-

constituentia, compleanturque parallelogramma BI, BK, BL, &c. nec non etiam parallelepipeda BM, FQ, quæ e'unt in eadem altitudine cum suis pyramidibus ABCD, EFGH. Quoniam enim similia ponuntur triangula ABC, EFG; erunt anguli plani ABC, EFG, æquales, & latera circa æquales angulos proportionalia: quare etiam parallelogrammum BI, simile erit parallelogrammo FN. Eodem modo demonstrabitur parallelogramma Bk, BL, similia esse parallelogrammis FO, FP; sed [*per 24. vndec.*] in quocunque parallelepipedo tria plana sunt tribus planis oppositis similia: ergo sex plana parallelepipedi BM, erunt similia sex planis alterius parallelepipedi FQ: quare [*per def. 9. vndec.*] parallelepipeda BM, FQ, erunt similia; ac propterea [*per 33. vndec.*] erunt in triplicata ratione laterum homologorum BC, FG. Ductis autem rectis LI, PN, [*per 28. vndec.*) parallelepipeda BM; FQ, bifariam secantur; vnde [*per 15. quinti*] talium parallelepipedorum medietates; hoc est prismata DBCILA, HFGDEN, erunt in eadem ratione triplicata homologorum laterum BC, FG. Vlterius, cum dicta prismata (*per coroll. anteced. prop.*] sint tripla pyramidum ABCD, EFGH; [*per eandem 15. quin.*) etiam huiusmodi pyramides inter se erunt in triplicata ratione laterum homologorum BC, FG.

Si vero positæ pyramides habeant bases polygonas resoluantur in pyramides triangulares bases habentes. Cum autem ex visis pyramides triangulares sint in triplicata ratione laterum homologorum; sicuti singulæ pyramides sunt singulis pyramidibus in triplicata ratione eorundē laterū homologorum; ita etiā [*per 12. quinti*) erunt omnes pyramides simul ad omnes pyramides simul in triplicata ratione eorundem laterum homologorum. Quod erat demonstrandum.

PROPOS. 9. THEOR. 9.

Æqualium pyramidum bases, & altitudines reciprocantur, & quarum pyramidum bases, & altitudines reciprocantur, illæ sunt æquales.

Sint primo æquales pyramides ABCD, EFGH, (Tab.5. Fig.6.) habentes bases triangulares. Dico talium pyramidum bases, & altitudines reciprocari; hoc est ita stare basim ABC, ad basim EFG, vti altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD.

Demonstr. Etiam in hoc loco, vti in superiori propos. factum est, compleantur parallelepipeda BM, FQ, connectanturque rectæ LI, PN; quo posito erunt prismata DBCLIA, AFGENP, [*per coroll. 7. huius*] [tripla æqualium pyramidum ABCD, EFGH, & consequenter æqualia: quare cum parallelepipeda BM, FQ, sint æqualium prismatum dupla; erunt & ipsa parallelepipeda BM, FQ, æqualia. Cum autem *per 34. vndecimi*] æqualium parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocentur, erit vt basis BI, ad Basim FN, ita altitudo FE, ad altitudinem BA; sed [*per 15. quinti*] vti basis BI, ad basim FN, ita triangulum ABC, ad triangulum EFG: igitur triangulum ABC, erit ad triangulum EFG, vti altitudo FE, ad altitudinem BA. Quia vero dicta triangula ABC, EFG, sunt bases æqualium pyramidum ABCD, EFGH; FE, autem, & BA, sunt earundem pyramidum altitudines: ergo talium pyramidum bases, & altitudines erunt reciprocè proportionales.

Si

Si autem ex aduerſo pyramidum baſes, & altitudines reciprocentur. Dico illas eſſe æquales.

Demonſtr. Cum ex hypotheſi ita ſit baſis ABC, ad baſim EFG, ita altitudo FE, ad altitudinem BA; & [*per* 15. *quinti*] ita ſit baſis ABC, ad baſim EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogramum FN, erit etiam BI, ad FN, vti altitudo FE, ad altitudinem BA; ſed eædem ſunt parallelepipedorum, ac pyramidum altitudines: ergo parallelepipedorum BM, FQ, baſes, & altitudines erunt reciprocæ: quare [*per* 34. *vndec.*] æqualia erunt. Verum cum æqualia parallelepipeda BM, FQ, in duo æqualia priſmata [*per* 28. *vndec.*] diuidantur; & inſuper priſmata [*per coroll.* 7. *huius*) ſint pyramidum tripla; inde ſequitur etiam pyramides inter ſe æquales exiſtere. Quod erat oſtendendum.

Poſtmodum vero ſi pyramides non habeant baſes triangulares, at polygonas. Dico etiam in hoc caſu æqualium pyramidum baſes, & altitudines, vti prius, reciprocari; & è conuerſo illas pyramides, quarum baſes, & altitudines reciprocantur, inter ſe æquales eſſe.

Demonſtr. In primis [*per* 45. *primi*] conſtituantur duo parallelogramma æqualia, polygonis inſeruientibus pro baſibus pyramidum: deinde [*per* 41. *primi*) conſtituantur triangula huiuſmodi parallelogrammis æqualia. Quo peracto ſuper dicta triangula tanquam baſes intelligantur conſtitutæ duæ pyramides in altitudine pyramidum baſes polygonas habentium. Cum autem huiuſmodi pyramides ſint ſuper æquales baſes, & in eadem altitudine, [*per* 6. *huius*] erunt inter ſe æquales; ſed pyramides æquales, & triangulares baſes habentes [*per primam partem huius theor.*) obtinent baſes, & altitudines reciprocas; ergo etiam pyramides æquales, cum baſibus polygonis obtinebunt bases, & altitudines reciprocas. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

Dato cylindro, & magnitudine cylindro minore, intra cylindrum describere prisma data magnitudine maius.

SIt datus cylindrus, cuius basis circulus ABCD, (Tab.5. Fig.7.) & sit data magnitudo E, minor cylindro quantitate Q. Oportet in dato cylindro inscribere prisma basis multangulæ, quod sit maius magnitudine E. In circulo ABCD, describatur quadratum ABCD, & circa circulum describatur aliud quadratum NOPM. Deinde diuisis arcubus AB, BC, CD, DA, bifariam in F, G, H, I, iunctisque rectis AF, FB. BG, &c, in circulo inscriptum erit octogonum AFBG, &c. Denuo per I, ducatur recta KL, tangens circulum in I, producanturque BA, CD, in K, & L. Demum supra hæc omnia polygona tanquam bases intelligantur descripta prismata in eadem altitudine cum cylindro.

Demonstr. Quia prismata eiusdem altitudinis [*per Coroll.40. vndec.*) inter se sunt, vt bases; quadratum vero NP, est duplum quadrati BD; igitur prisma super basim NP, duplum erit prismatis supra basim BD; sed prisma supra basim NP, tanquam totum est maius cylindro: ergo prisma supra basim BD, superabit medietatem cylindri. Rursus quia [*per 41. primi*] parallelogrammum KD, duplum est trianguli AID, [*per Coroll.40. vndec.*] erit prisma super KD, duplum prismatis super AID; sed prisma super KD, superat portionem cylindri descriptam supra circuli segmentum AID: ergo prisma super triangulum AID, dimidium segmenti cylindri supra segmentum circuli AID, descripti superabit. Si ergo à cylindro supra circulum ABCD, descripto auferatur plusquam dimidium, hoc est prisma factum supra quadratum ABCD, nec non etiam si a segmentis cylindri remanentibus denuo auferatur plusquam dimidium, nempe prismata facta super triangula in circuli segmentis AID, DHC, &c. constituta; sicque continuata fuerit diuisio; tandem [*per 1. decimi.*] remanebunt cylindri segmenta minora quam Q. Supponamus igitur cylindri portiones supra basis segmenta AF, FB, constitutas minores esse magnitudine Q; erit prisma, cuius basis est octogonum AFBG,&c, in cylindro descriptum maius quantitate E, quia cylindrus, cuius basis est circulus, ABCD, adæquat magnitudines E, & Q, ex hypothesi; vnde si à cylindro auferantur segmenta minora quam Q, remanebit prisma, cuius basis octogonum AFB, &c. maius magnitudine E. Quod erat faciendum.

Quod dictum est de cylindro, etiam cono applicari potest, siquidem in cono pari modo describi potest pyramis maior data quantitate, dummodo tamen illa quantitas sit minor cono.

PROPOS. 10. THEOR. 10.

Quilibet conus est tertia pars cylindri eandem cum ipso basim, & altitudinem habentis.

SInt conus, & cylindrus, qui pro basibus habeant eundem circulum ABCD, (Tab.5. Fig.8). eandemque altitudinem. Dico conum esse tertiam partem cylindri.

Demonstr. Si non concedatur cylindrum triplum habere rationem ad conum super eandem basim, & altitudinem descriptum, vel conum habere rationem subtriplam ad cylindrum, saltem non erit denegandum cylindrum ad conum obtinere rationem triplam excedentem, vel à tripla deficientem; sed neutrum euenire potest; quod taliter ostendo. Si cylindrus ad conum haberet rationem triplam excedentem, erit assignabilis quantitas, nempe X, quæ ad conum triplam habeat rationem; in quo casu (*per* 10. *quinti*] cylindrus superabit quantitatem X. In hoc cylindro [*per supra positum lemma*) describatur prisma maius quantitate X, sitque hoc prisma constitutum supra basim multangulam AEBF, &c. supra quam basim denuo intelligatur descripta pyramis in eadem altitudine cum cono, & cylindro, quæ pyramis, cum sit pars coni, minor erit ipso cono: debemus igitur in eadem altitudine supra circulum ABCD, concipere cylindrum, ac conum; atque supra polygonum AEBF,&c. opus est intelligere prisma, atque pyramidem. Cum autem prisma supra basim multangulam AEBF, &c. [*per coroll*.7. *huius*) sit triplum pyramidis super eandem basim, & in eadem altitudine constitutæ; insuper cum magnitudo X, per hypothesim, ponatur tripla coni supra circulnm ABCD, descripti: quare [*per* 11.*quinti*] eadem erit ratio prismatis ad pyramidem, quæ magnitudinis X, ad conum; sed prima magnitudo, hoc est prisma supra basim polygonam AE BF, &c. positum fuit maius tertia quantitate X: ergo [*per* 14 *quinti*] etiam secunda magnitudo, nempe pyramis eiusdem basis cum prismate superabit quartam, hoc est conum supra basim ABCD, cōstitutum: quod totum est impossibile; quia pyramis est pars coni: ergo cylindrus non excedit triplum coni.

Si postea cylindrus habeat ad conum rationem triplo minorem; in hoc casu conus ad cylindrum obtinebit

nebit rationem subtripla minorem: vnde illa magnitudo, quæ sit subtripla cylindri erit minor cono: huiusmodi autem magnitudo sit X, quæ præcise sit subtripla cylindri, & minor cono. Vti in superiori lemmate docuimus, in cylindro ponatur pyramis maior quam X: quo facto cum pyramis supra basim AEBF, &c. [*per coroll. 7. huius*] subtripla sit prismatis in eadem basi AEBF, &c. & altitudine constituti; & pariter Magnitudo X, subtripla sit cylindri, per constructionem; (*per 11. quin.*] vti pyramis ad prisma, ita X, ad cylindrum; sed ex hypothesi prima magnitudo, nempe pyramis superat tertiam, hoc est X: ergo [*per 14. quinti*] etiam secunda magnitudo, nempe prisma superabit quartam, hoc est cylindrum: quod est impossibile, quia prisma est pars cylindri. Quare cylindrus ad conum in eadem basi, & altitudine constitutum nequit excedere, vel deficere à ratione triplicata: vnde cylindrus erit triplus coni. Quod fuerat propositum.

PROPOS. 11. THEOR. 11.

Eiusdem altitudinis coni, ac cylindri, inter se sunt, vt bases.

SVpra circulos A, & B, (Tab.6. Fig.1.) tanquam bases describantur duo coni, vel duo cylindri in eadem altitudine. Dico cylindrum supra A, stare ad cylindrum supra B, vti basis A, ad basim B; nec non etiam conum supra A, ad conum supra B, esse, vt A, ad B.

Demonstr. Si non est cylindrus supra A, ad cylindrum supra B, vti basis A, ad basim B, habebit saltem cylindrus A, ad cylindrum B, maiorem, vel minorem rationem, quam basis A, ad basim B; sed neutrum

trum esse potest. Quod taliter ostendo. Si cylindrus supra circulum A, ad cylindrum supra circulum B, maiorem obtineat rationem, quam basis A, ad basim B, dari poterit, exempli gratia, magnitudo X, quę stet ad cylindrum supra B, vti stat basis A, ad basim B; & hæc sane magnitndo X, (*per 10. quinti*] minor erit cylindro supra A, descripto. Quamobrem [*per superius positum Lemma*] in ipso cylindro A, poterit inscribi prisma in eadem altitudine cum cylindro maius quantitate X; sit iam hoc prisma efformatum supra polygonum CDEF, &c. maius quantitate X: quo absoluto in circulo B, inscribatur aliud polygonum MNOP, &c. simile polygono CDEF; &c. supra quod intelligatur efformatum prisma in altitudine cylindri. Quo stante cum per constructionem magnitudo X, ad cylindrum supra B, eandem habeat rationem, quam habet circulus, siue basis A, ad basim B; & insuper cum prisma supra polygonum CDEF, &c. ad prisma supra polygonum MNOP, &c [*per Coroll. 40. vndec.*] ita sit polygonum CDEF, &c; ad polygonum MNOP, &c; sed [*per secundum Coroll. 2. huius*] polygona similia in circulis descripta inter se sunt, vt circuli: ergo ex æqualitate [*per 22 quinti*) ita erit magnitudo X, ad cylindrum B, vti prisma supra polygonum CDEF, &c. ad prisma supra polygonum MNOP, &c. Quatuor igitur habemus quantitates proportionales, quarum prima, nempe X, per constructionem deficit à tertia hoc est à prismate supra CDEF, &c: ergo [*per 14. quinti.*] etiam secunda, videlicet cylindrus supra circulum B, deficiet à quarta, nempè à prismate supra polygonum MNOP, &c. facto: quod est absurdum; quia prisma cylindro inscriptum semper est pars cylindri, & consequenter minus cylindro.

Si postea dicamus cylindrum supra A, ad cylindrum

supra

ſupra B, minorem habere rationem quam circulus A, ad circulum B, conuertendo [*per* 26. *quinti*] cylindrus B, ad cylindrum A, habebit maiorem rationem, quam circulus B, ad circulum A: quare, vt in prima parte, poterit dari quantitas minor cylindro B, quæ ſtet ad cylindrum A, vti circulus B, ad circulum A; quæ magnitudo ſit X. Deinde, vti prius, in cylindro B, inſcribatur priſma maius quantitate X. Cum ergo magnitudo X, ſtet ad cylindrum A, vti circulus B, ad circulum A; cumque circulus B, ad circulum A, [*per* 2. *Coroll*. 2. *huius*] ſe habeat vti polygonum MNOP, &c. ad polygonum ſimile CDEF, &c & cum polygonum MNOP, &c. ad dolygonum CDEF, &c. [*per Coroll*. 40. *vndec*.] ſit vti priſma ſupra primum polygonum ad priſma ſupra ſecundum; ex æqualitate [*per* 22. *quinti*] erit magnitudo X, ad cylindrum ſupra circulum A, ita priſma ſupra polygonum MNOP, &c. ad priſma ſupra polygonum CDEF, &c. Cum igitur in his quatuor magnitudinibus proportionalibus prima, hoc eſt X, ſit minor tertia, nempe priſmate ſupra polygonum MNOP, &c. ex conſtructione; [*per* 14 *quinti*.] etiam ſecunda quantitas, videlicet cylindrus ſupra circulum A, deficiet à priſmate ſupra polygonum CDEF. &c. conſtituto; quod implicat, quia priſma in cylindro inſcriptum eſt ſemper pars cylindri. Quapropter concludendum venit cylindrum ad cylindrum eſſe ſicut baſim ad baſim.

Quoad conos poſtea, cum [*per* 10 *huius*] conus ſit tertia pars cylindri, erit (*per* 15. *quinti*] vti conus ad conum ita cylindrus ad cylindrum; ſed ex demonſtratis cylindrus eſt ad cylindrum, vti baſis ad baſim: ergo [*per* 11. *quinti*] erit etiam conus ad conum, vti baſis ad baſim. Quod fuerat propoſitum.

CO-

COROLLARIVM.

Ex hoc theoremate ſequitur quoſcunque conos, ac cylindros ſuper æqualibus baſibus, & in eadem altitudine conſtitutos eſſe inter ſe æquales; quia ſunt in ratione baſium, quæ ponuntur æquales.

Pariter manifeſtum eſt æquales conos, ac cylindros ſuper æqualibus baſibus conſtitutos eandem habere altitudinem; & è conuerſo ſi coni, ac cylindri ſint æquales, & in eadem altitudine, erunt ſuper æquales baſes conſtituti.

PROPOS. 12. THEOR. 12.

Similes coni, ac cylindri inter ſe ſunt in triplicata ratione diametrorum ſuarum baſium.

SVpra circulos ABCD, EFGH, (Tab. 6. Fig. 2.) ſint conſtituti duo coni; duoque cylindri inter ſe ſimiles [*iuxta def.* 10. *vndec.*] quorum baſes ſint circuli ABCD, EFGH, axes vero *IK*, & LM. Dico conum ſupra circulum ABCD, ad conum ſupra circulum EFGH, eſſe in triplicata ratione diametrorum ſuarum baſium, nempe in triplicata ratione diametri BD, ad diametrum FH: quod quidem etiam valet de cylindris.

Demonſtr. Si conus ABCDK, ad conum EFGHM, non habet rationem triplicatam diametrorum BD, ad FH, habebit ſaltem prior conus ad ſecundum rationem ſuperantem, vel deficientem à triplicata ratione diametri BD, ad diametrum FH; ſed hoc contingere nequit; quod taliter oſtendo. Si conus ABCDK, ad conum EFGHM, habet rationem excedentem rationem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; poterit

terit assignari magnitudo minor cono ABCDK, quæ ad conum EFGHM, obtineat rationem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Ponamus igitur hanc esse magnitudinem Z, minorem cono ABCDK, quæ ad conum EFGHM, sit in triplicata ratione diametrorum BD, FH. In cono ABCDK, [*per lemma supra positum*] inscribatur pyramis maior quam Z, supra polygonum ANBO, &c. ac in altitudine coni IK. Hoc facto in altero cono EFGHM, inscribatur alia pyramis similis pyramidi in cono ABCDK, descriptæ. Facile autem erit hoc efficere, dummodo in basi EFGH, inscribatur polygonum EQFS, &c. simile polygono ANBO, &c. & postea ad M, verticem coni ab angulis polygoni rectæ ducantur FM, QM, &c. Quod autem duæ pyramides taliter intra conos efformatæ sint inter se similes, ita suadetur. Quia coni ABCDK, EFGHM, supponuntur similes [*per def. 20. vndec.*] erit vt diameter BD, ad FH, ita altitudo IK, ad altitudinem LM; & [*per 15. quinti*) etiam semidiameter BI, ad semidiametrum FL, ita IK, ad LM: quare etiam permutando vti BI, ad Ik, ita FL, ad LM: cum igitur in triangulis BIk, FLM, anguli BIK, FLM, sint recti, ex eo, quod axes IK, LM, ponantur basibus perpendiculares, & latera circa æquales angulos proportionalia, nempe vt BI, ad IK, ita FL, ad LM; [*per 6. sexti.*] æquiangula erunt dicta triangula, & consequenter similia: vnde erit KB, ad BI, vti MF, ad FL. Rursus in duobus triangulis BIN, FLR, cum anguli BIN, FLR, insistant similibus arcubus BN, FR; erunt æquales, & cum ita BI, ad IN, vti FL, ad LR, similia erunt triangula BIN, FLR: quare ita erit IB, ad BN, vti LF, ad FR: cum ergo sit kB, ad BI, vti MF. ad FL, atque BI, sit ad BN, ex visis sicuti LF, ad FR, etiam ex æqualitate, ita erit kB, ad BN, vti MF, ad FR. Denuo cum in duobus triangulis kIB, kIN,

sidem

(idem valet etiam de duobus triangulis MLF, MLR,) duo latera KI, IB, sint æqualia lateribus KI, IN, & anguli comprehensi KIB, KIN, æquales, nempe recti; [per 4 primi) erunt bases kB, kN, æquales; eodem modo æquales erunt bases MF, MR, ac proinde ita erit BK, ad KN, vti FM, ad MR; sed etiam vti kB, ad BN, ita kN, ad NB, & vti MF, ad FR, ita MR, ad RF: ergo duo triangula BkN, FMR, [per 5. sexti] erunt similia. Haud aliter demonstrabitur reliqua triangula has duas pyramides constituentia esse similia, cumque sint etiam numero æqualia [per def. 9. vndec.] hæ duæ pyramides erunt inter se similes.

His præmissis cum magnitudo Z, ad conum EFGHM, sit in triplicata ratione diametrorum BD, FH; est autem (per 8 huius] etiam pyramis supra polygonum ANBO, &c. ad pyramidem supra polygonum ERFS, &c. in triplicata ratione laterum homologorum BN, FR, siue BD, FH; quia ex dictis ita est NB, ad BI, vti RF, ad FL, & duplicando consequentia vti NB, ad BD, ita RF, ad FH; vnde permutando [per 16. quinti] erit BN, ad FR, vti BD, ad FH: ergo [per 11. quin.] ita erit magnitudo Z, ad conum EFGHM, vti pyramis supra polygonum ANBO, &c. ad pyramidem supra polygonum ERFS, &c. constitutam. Quia vero prima magnitudo Z, vt supponimus, deficit à tertia, nempe à pyramide supra polygonum ANBS, &c [per 14. quinti) etiam secunda magnitudo, hoc est conus EFGHM, deficiet à quarta, nempe à pyramide supra polygonum ERFS, &c. constituta; quod est absurdum, cum semper pyramis sit pars coni.

Exaduerso si dicatur conum ABCDk, ad conum EFGHM, habere rationem minorem, quam sit triplicata ratio diametri BD, ad diametrum FH, inuertendo [per 26. quin.] habebit conus EFGHM, ad conum ABCDk, rationem excedentem triplicatam ratio-

tio-

tionem diametri FH, ad diametrum BD. Vti sæpius in antecedentibus propos. factum fuit, inueniatur illa magnitudo, quæ stet ad conum ABCDk, in triplicata ratione diametri EH, ad diametrum BD, sitq; Z, minor certe quam conus EFGHM, (*per* 8. *quinti*] quia Z, ad conum ABCDK, minorem obtinet rationem, quam conus EFGHM, ad eundem conum ABC DK. In cono EFGHM, descripta pyramide maiore quam Z, [*per positum Lemma*] in alio cono ABCDK, alia describatur pyramis similis priori pyramidi. Cum autem, per constructionem Z, stet ad conum AB CDK; atque (*per* 8. *huius*] pyramis descripta supra polygonum ERFS, &c. ad pyramidem supra polygonum ANBO, designatam, sint in triplicata ratione laterum homologorum FH, BD; [*per* 11. *quinti*] erit magnitudo Z, ad conum ABCDk, vti pyramis supra polygonum ERFS, &c. ad pyramidem supra polygonum ANBO, &c. sed ex constructis magnitudo Z, deficit à pyramide supra polygonum ERFS, &c. ergo (*per* 14. *quinti*] etiam conus ABCDK, deficiet à pyramide supra polygonum ANBO, &c. quod nequit fieri, quia semper pyramis est pars coni, & consequitur minor. Ergo conus ad conum habebit solam rationem triplicatam suarum diametrorum in basibus existentium.

Quod postea etiam cylindri ad inuicem eandem obtineant triplicatam rationem diametrorum, quæ in basibus, hoc de facili euincitur quia cum cylindri sint conorum tripli, ad inuicem obtinebunt rationem conorum [*per* 15. *quinti*]; sed ex visis coni obtinent rationem diametrorum triplicatam; ergo dicendum venit similes etiam cylindros triplicatam rationem diametrorum obtinere. Quod fuerat propositum.

PROPOS. 13. THEOR. 13.

Dum cylindrus secatur plano aduersis planis parallelo, vti est cylindrus ad cylindrum, ita est axis, ad axem.

SIt datus cylindrus ABCD,(Tab.6 Fig.3.) qui secetur plano GH, aduersis planis AB,CD, parallelo, & planum GH, secet axem EF, in I. Dico ita esse cylindrum ABHG, ad cylindrum GHCD, vti axis EI, ad axem IF.

Demonstr. Intelligamus cylindrum ABCD, vna cum Axe EF, in vtramque partem produci. Deinde in axe producto accipiantur quotcunque rectæ EK, KL, æquales ipsi EI, Vti pariter ex alia parte quotcumque rectæ FM, MN, NO, æquales ipsi IF. Denuo per puncta K L, M, N, O, rectæ ducantur LQ, KP, MV, NX, O2, æquales, ac parallelæ rectis EB, FC, quæ reuoluto cylindro designent circulos PR, QS, &c. parallelos, ac æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem semidiametrorum. Cum ergo cylindri GB, AP, RQ æquales obtineant bases nempe circulos GH, AB, RP, & æquales altitudines LK, KE, EI; [*per 11. huius*] erunt inter se æquales: ob quam ratione pariter æquales erunt cylindri HD, DV, TX, XY. Vnde totus cylindrus HS, erit tam multiplex cylindri HA, quam multiplex est axis IL, axis IE; atque cylindrus HY, erit tam multiplex cylindri HD, quam multiplex est axis IO, axis IF. Vlterius si axis IL, superet axem IO, etiam cylindrus HS, superabit cylindrum HY, & si axis IL, fuerit axi IO, æqualis, vel minor, etiam cylindrus HS, æqualis erit, vel minor cylindro HY: quare [*per 6. def. quinti*] erit prima magnitudo, nempe cylindrus HA, ad secunda, hoc

ste

eſt ad cylindrum HD, vti tertia, videlicet axis HI, ad quartam nempe ad axem IF. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 14. THEOR. 14.

Coni, ac Cylindri ſuper æqualibus conſtituti, ad inuicem ſunt, vt altitudines.

SInt duo coni AEB, CFD, duoq; cylindri AHGB, CKID, (Tab. 6. Fig. 4.) exiſtentes ſuper æquales baſes AB, CD; ſintque eorum altitudines LE, MF. Dico conum AEB, ad conum CFD, (idem valet de cylindris) habere proportionem illam, quam habet altitudo LE, ad altitudinem MF.

Demonſtr. Cylindrus AG, verſus partem GH, vna cum axe LE, extendatur, ex quo abſcindatur EN, ipſi MF, æqualis. Deinde per N, intelligatur ductus circulus OP, parallelus ipſi HG, eritque efformatus cylindrus HOPG, æqualis baſis, & altitudinis cum cylindro CkID: quare [*per Coroll. 11. huius*] erunt dicti cylindri æquales, & ideo [*per 7. quinti*] ita erit cylindrus AG ad cylindrum HP, vti idem cylindrus AG, ad cylindrum CI; ſed [*per 13. huius*] vti cylindrus AG, ad cylindrum HP, ita axis LE, ad axem EN; & cum EN facta ſit æqualis ipſi MF, erit & cylindrus AG, ad cylindrum CI, vti axis LE, ad axem MF; ſed LE, & MF, ſupponuntur cylindrorum altitudines: ergo cylindrus eſt ad cylindrum; vti altitudo ad altitudinem.

Cum autem coni ſint tertiæ partes cylindrorum, [*per 15. quinti*] inter ſe erunt vt cylindri; & conſequenter, vt altitudines. Quod erat demonſtrandum.

PROPOS. 15. THEOR. 15.

Æquales coni, ac cylindri bases, & altitudines habent reciprocas; & si conorum, ac cylindrorum bases, & altitudines sint reciprocæ, coni atque cylindri æquales erunt.

Sint dati æquales coni ACB, DFE, ac cylindri AHB, DKIE, (Tab. 6. Fig. 5.) constituti super bases AB, DE, & cum altitudinibus LC, MF. Dico tales bases, & altitudines reciprocari, nempe ita esse basim AB, ad basim DE, vti altitudo MF, ad altitudinem LC.

Demonstr. Vel enim altitudines conorum, ac cylindrorum sunt æquales, vel inæquales; si primum [*per Coroll. 11. hui.*] etiam bases inter se æquales erunt, ideoque ita erit basis ad basim, vti altitudo ad altitudinem reciproce.

Quod si postea dicatur secundum, nempe altitudines existere inæquales, hoc idem ostendemus. Si altitudo MF, statuatur maior quam LC, ex illa poterit abscindi portio ipsi LC, æqualis, nempe MN: deinde per N, ducatur planum OQ, parallelum ipsi ED, vel KI. Quoniam vero cylindri BH, DI, ponuntur æquales [*per 7. quinti*] ita erit cylindrus BH, ad cylindrum DO, vti cylindrus DI, ad eundem cylindrum DO; sed vt cylindrus BH, in æquali altitudine ad cylindrum DO, [*per 11. huius*] ita basis AB, ad basim DE: insuper vt cylindrus DI, ad cylindrum DO, [*per 14. huius*] ita altitudo MF, ad altitudinem MN; ergo etiam erit, vt basis AB, ad basim DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, siue ad LC, ipsi MN, æqua-

æqualem: quare bases, & altitudines erunt reciprocè proportionales.

Quo ad conos cum sint tertiæ partes cylindrorum [*per 15.quinti.*] ad hoc vt sint inter se æquales debent habere bases, & altitudines cylindrorum; sed cylindrum bases, & altitudines reciprocantur: ergo etiam conorum bases, & altitudines erunt reciprocæ.

Ex aduerso autem si bases, & altitudines ponantur reciprocæ. Dico conos, ac cylindros æquales existere. Nam quo ad cylindros si altitudines ponantur æquales supposita reciprocatione etiam basis erit æqualis basi; quare cylindri erunt super æquales bases, & in eadem altitudine constituti, & consequenter æquales [*per Coroll.11. huius.*]

Si postea altitudines fuerint inæquales facta vti prius constructione. Cum ponatur basis AB, ad basim DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, siue ad MN, ipsi æqualem, atque basis AB, sit ad basim DE [*per 11.huius*] vti cylindrus BH, ad cylindrum DO: pariter [*per 14. huius*] vti MF, ad MN, ita cylindrus DI, ad cylindrum DO. [*per 11. quinti*] erit cylindrus BH, ad cylindrum DO, vti cylindrus DI, ad eundem cylindrum DO: quare [*per 9. quinti*] duo cylindri BH, & DI, æquales erunt.

Quod dictum est de cylindris, valet, etiam de conis, quia si supra bases, & altitudines reciprocas cylindrorum constituantur coni, cum [*per 10. huius*] sint tertiæ partes cylindrorum, ac cylindri sint æquales ex visis, etiam coni æquales erunt. Quod fuerat propositum.

SCHOLIVM.

Quia sequentes duæ Euclidis Propositiones, nempè 16. & 17. sunt supra reliquas valde difficiles, atque solummodo inseruientes ad vltimum huius libri

 Theo-

Theoremа demonstrandum; ideo vice illarum propositionum ex Taqueto substituimus duo Lemmata, quorum ope vltima Prop. poterit demonstrari.

LEMMA I.

Data quacunque magnitudine sphæra minore; in ipsa sphæra poterunt inscribi cylindri, qui omnes simul accepti data magnitudine existant maiores.

DAta sit sphæra, cuius Maximus semicirculus sit ABC; (Tab.6. Fig.7.) sitque data magnitudo D, quæcunque minor ipsa sphæra. Dico in assignata sphæra varios posse inscribi cylindros, qui omnes simul accepti maiores sint magnitudine D. Ad hoc præstandum in primis semidiameter EB, ad libitum in quascumque æquales partes diuidatur, nempe EF, FG, GH, HB, Deinde per puncta F, G, H, ductis rectis IR, Sk, &c. parallelis ipsi CA: deinde fiant parallelogramma inscripta, atque circumscripta semicirculo ABC, sintque parallelogramma circumscripta CR, Ik, &c. inscripta vero L10, 10X, &c.

Demonstr. Parallelogramma circumscripta semicirculo ABC, excedunt parallelogramma inscripta quantitate illorum parallelogrammorum, per quæ transit circumferentia circuli ABC, suntque parallelogramma QR, 10Y, &c. quæ omnia simul accepta adæquant rectangulum AI, vt patet; quia parallelogrammum 10Y adæquat P10; YI, adæquat PO; IB, adæquat EO, &c. Hoc posito si semicirculus ABC, reuoluatur firma manente semidiametro EB, quodlibet parallelogrammum designabit cylindrum, tam in sphæra, quam circa sphæram circumscriptum, pro vt parallelogramma sunt in sphæra, vel circa sphæram

descri-

descripta. Cum autem, ex dictis, omnia rectangula circumscripta AI, 10 S, &c. excedant rectangula inscripta L3, X2, &c. quantitate rectanguli AI, etiam cylindri à rectangulis circumscriptis efformati superabunt cylindros à rectangulis sphæræ inscriptis designatos, quantitate cylindri descripti à rectangulo AI: sed sphæra ABC, est pars cylindrorum à rectangulis circumscriptis efformatorum; ergo sphæra superabit cylindros sibi inscriptos minus, quam superent cylindri circumscripti; & ex modo visis circumscripti cylindri superant inscriptos quantitate cylindri facti à rectangulo AI: ergo sphæra super alia eosdem cylindros inscriptos quantitate minore cylindro facto à rectangulo AI. Quia vero semper, ac semper possumus rectangulum AI, imminuere vltra dimidium, imminuendo scilicet supra dimidium altitudinem EF: quod facile præstari poterit multiplicando taliter partes semidiametri EB, vt earum numerus excedat duplum numerum partium præexistentium; ideo cylindrus AI, poterit taliter imminui, vt excessus sphæræ supra inscriptos cylindros minor sit illa quantitate, qua sphæra superat magnitudinem D; sed totum id, quod dictum est de hemisphærio, etiam integræ sphæræ adaptari potest: ergo in sphæra tot cylindri inscribi possunt, qui simul sumpti excedant magnitudinem D. Quod fuerat propositum.

LEMMA 2.

Cylindri similes in duabus sphæris inscripti inter se habent rationem triplicatam diametrorum.

SInt duæ sphæræ ABCD, EFGH, (Tab.6. Fig.6.) in quibus sint descripti duo cylindri similes, ac recti OB, XF, geniti ex reuolutione rectangulorum similium OB, XF, immotis diametris IL, KQ. Dico cylindrum OB, ad cylindrum XF, habere rationem triplicatam diametri AC, ad diametrum EG.

Demonstr. Quia duo rectangula OB, XF, ponuntur similia [*per 1. def. sexti*] erit DB, ad BS, vti HF, ad FZ; sed BG, adæquat IL, & FZ, adæquat KQ: ergo ita erit DB, ad IL, vti HF, ad KQ; & etiam sumptis antecedentium medietatibus erit BL, ad LI, vti FQ, ad QK. Quare cum in triangulis BLI, FQK, duo anguli L, & Q, sint æquales, vtpote recti, & latera circa huiusmodi æquales angulos proportionalia [*per 6. sexti.*] hæc triangula erunt similia, ac propterea erit LB, ad BI, vti QF, ad FK; at IB, & KF, [*per def. circuli*] adæquant IA, & KE; ideo etiam erit vt BL, ad IA, ita FQ, ad KE, & consequenter [*per 15. quinti*] antecedentibus, ac consequentibus duplicatis, erit vt DB, ad CA, ita HF, ad GE; sed similes cylindri OB, XF, facti ex reuolutione rectangulorum DS, HZ, in basibus habent diametros DB, HF; ergo [*per 12. huius*] dicti similes cylindri inter se obtinebunt rationem triplicatam DB, ad HF, siue, quod idem est, CA, ad GE, hoc est diametrorum sphæræ. Si autem tot cylindri describantur in vna spæra quot prioribus similes describuntur in altera, cum singuli cylindri singulis cylindris habeant triplicatam rationem diametrorum; [*per 12. quinti*] etiam omnes cylindri simul ad omnes cylindros, simul habebunt rationem triplicatam diametrorum sphæræ. Quod erat ostendendum.

PRO-

PROPOS. 18. THEOR. 18.

Sphæræ inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

Sint duæ sphæræ A, & B, (Tab. 6. Fig. 8.) quarum diametri sint CD, EF. Dico sphæram A, ad sphæram B, habere rationem triplicatam diametri CD, ad diametrum EF.

Demonstr. Si sphæra A, ad sphæram B, non obtinet rationem triplicatam diametri CD, ad diametrum EF, erit saltem dicendum spæram A, ad sphæram B, habere maiorem, vel minorem rationem, quam sit illa ratio triplicata diametri CD, ad diametrum EF: hoc autem nequit esse: quod sic ostendo. In primis, si sphæra A, ad B, haberet rationem maiorem quam sit triplicata ratio diametri CD, ad diametrum EF; erit assignabilis quantitas, quæ ad sphæram B, habeat rationem triplicatam diametri CD, ad diametrum EF: sit hæc quantitas G, minor certè quam sphæra A. [*per* 10. *quinti.*] Quo stante cum magnitudo G, minor sit quam sphæra A, [*per* 1. *Lemma*] in dicta sphæra poterunt inscribi cylindri, qui omnes simul accepti maiores sint, quam magnitudo G. Vlterius in sphæra B, tot cylindri inscribantur, quot fuerunt descripti in sphæra A, cum hac conditione, quod cylindri sphæræ B, similes existant cylindris sphæræ A. Cum autem ex constructione magnitudo G, ad sphæram B, habeat triplicatam rationem diametrorum CD, EF; cumque [*per secundum Lemma*] cylindri in sphæra A, descripti ad cylindros similes in sphæra B, descriptos obtineant rationem triplicatam diametrorum CD, EF; [*per* 11. *quinti*] ita erit magnitudo G, ad sphæram B, vti cylindri in sphæra A, ad cylindros

dros

dros in sphæra B; sed G, prima quantitas minor est tertia, nempe cylindris in sphæra A, descriptis: ergo (per 14. quinti) etiam sphera B, deficiet à cylindris in sphæra B, descriptis: quod est impossibile, quia cylindri sunt partes, & sphæra totum.

Secundo loco, si dicamus sphæram A, ad B, habere rationem minorem, quam sit triplicata ratio diametri CD, ad diametrum EF; in hoc casu conuertendo, [per 26. quinti] habebit sphæra B, ad spæram A, maiorem rationem, quam sit ratio triplicata diametri EF, ad Diametrum CD. Quare, vti supra, erit assignabilis magnitudo aliqua, nempe G, minor sphæra B, quæ ad sphæram A, habeat rationem triplicatam diametri EF, ad diametrum CD: supposita autem descriptione similium cylindrorum, ac numero æqualium in vtraque sphæra, cum hac lege, quod omnes cylindri descripti in sphæra B, sint maiores magnitudine G. Quo posito, cum ex constructione magnitudo G, ad sphæram A, sit in triplicata ratione diametri EF, ad diametrum CD; atque [per lemma 2.] cylindri sphæræ B, sint ad cylindros sphæræ A, in triplicata ratione eorundem diametrorum; etiam ita erit magnitudo G, ad sphæram A, vti cylindri sphæræ B, ad cylindros sphæræ A. Cum ergo magnitudo G, supponatur minor, quam cylindri sphæræ B, (per 14. quinti.) etiam sphæra A, minor erit cylindris in eadem sphæra descriptis: quod est impossibile, quia cylindri sunt partes, & sphæra est totum. Ergo sphæra A, ad sphæram B, nequit habere rationem maiorem, vel minorem ratione triplicata diametri CD, ad diametrum EF; vnde solum restat sphæram A, ad B, habere posse rationem triplicatam suarum diametrorum CD, EF. Quod erat demonstrandum.

CO-

COROLLARIVM.

Ex hac propoſitione ſequitur, ſphæras inter ſe habere rationem illam, quam obtinent cubi à diametris deſcripti; nam cubi, cum ſint parallelepipeda ſimilia [*per 33. vndec.*] habebunt rationem triplicatam laterum homologorum, hoc eſt diametrorum; ſed etiam ſphæræ ſunt in eadem ratione triplicata diametrorum; ergo ita erit ſphæra ad ſphæram, vti cubus à diametro vnius ſphæræ deſcriptus ad cubum à diametro alterius ſphæræ deſignatum.

FINIS.

V.D. Paulus Carminatus Cler. Reg. S. Pauli, & in Metrop. Bononiæ Pœnit. pro Illuſtriſsimo, & Reuerendiſsimo Domino, D. Iacobo Boncompagno Archiepiſcopo, & Principe.

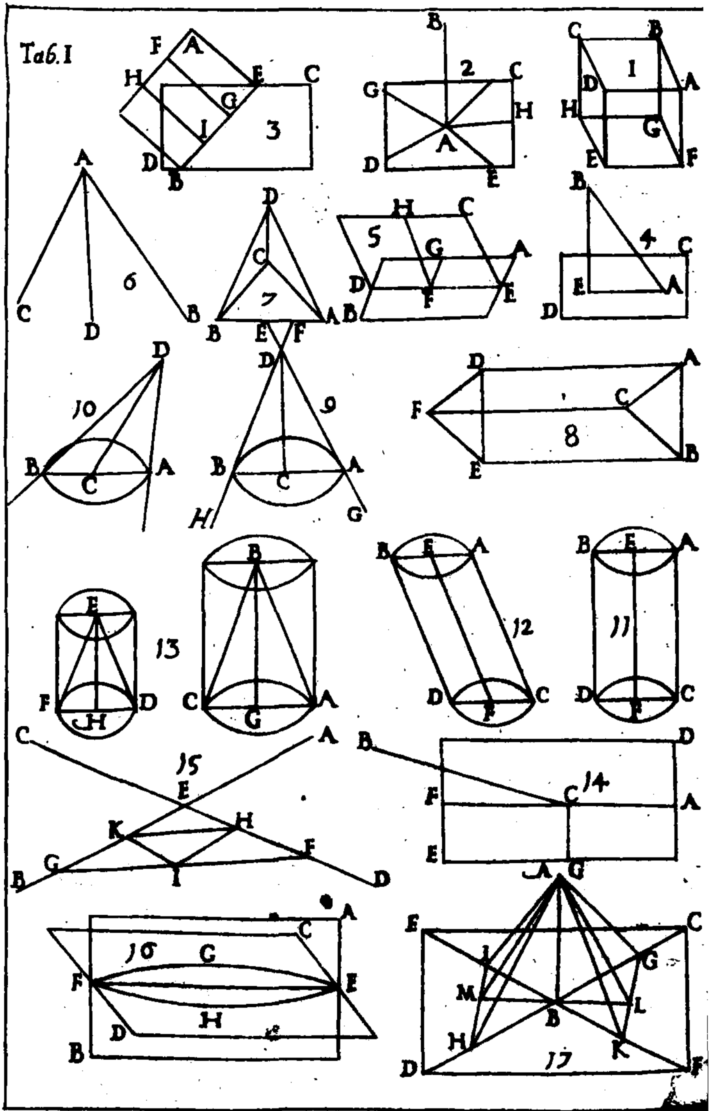
Imprimi poſſe cenſui ego Silueſter Bonfiliolus S. Inquiſitionis Bonon. Reuiſor.

Stante atteſtatione, Reimprimatur

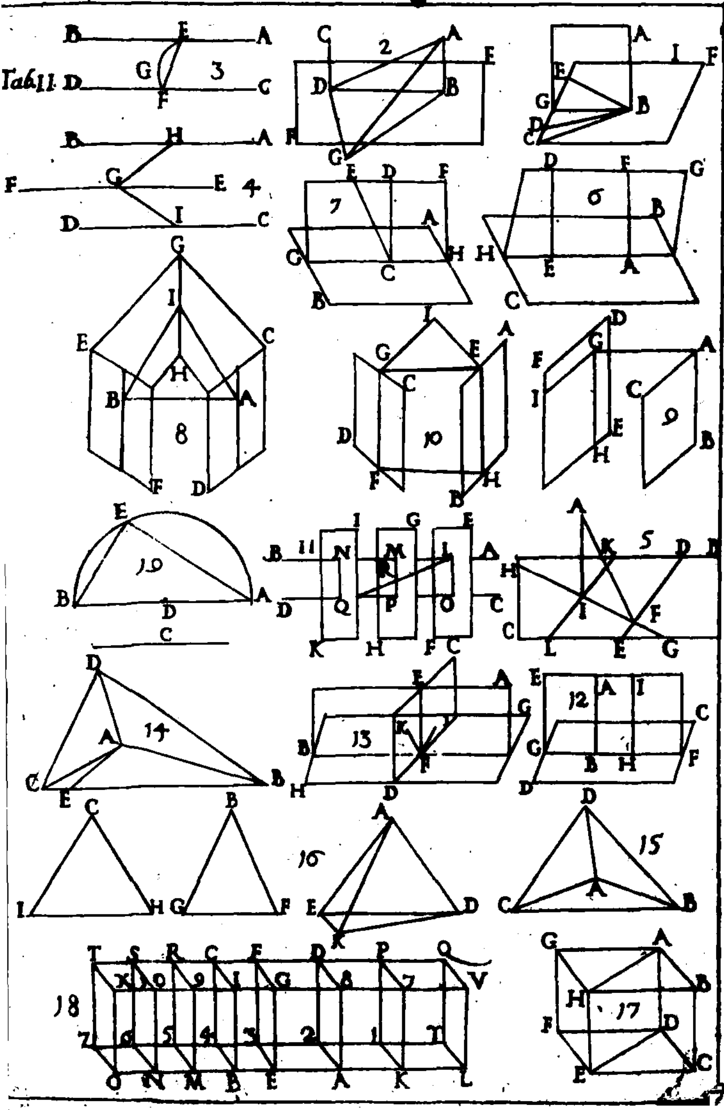
Fr. Vincentius Maria Ferrerius Vicarius Generalis S. Officij Bonon.


INVIDIA
VIRTVTE
SVPERATV

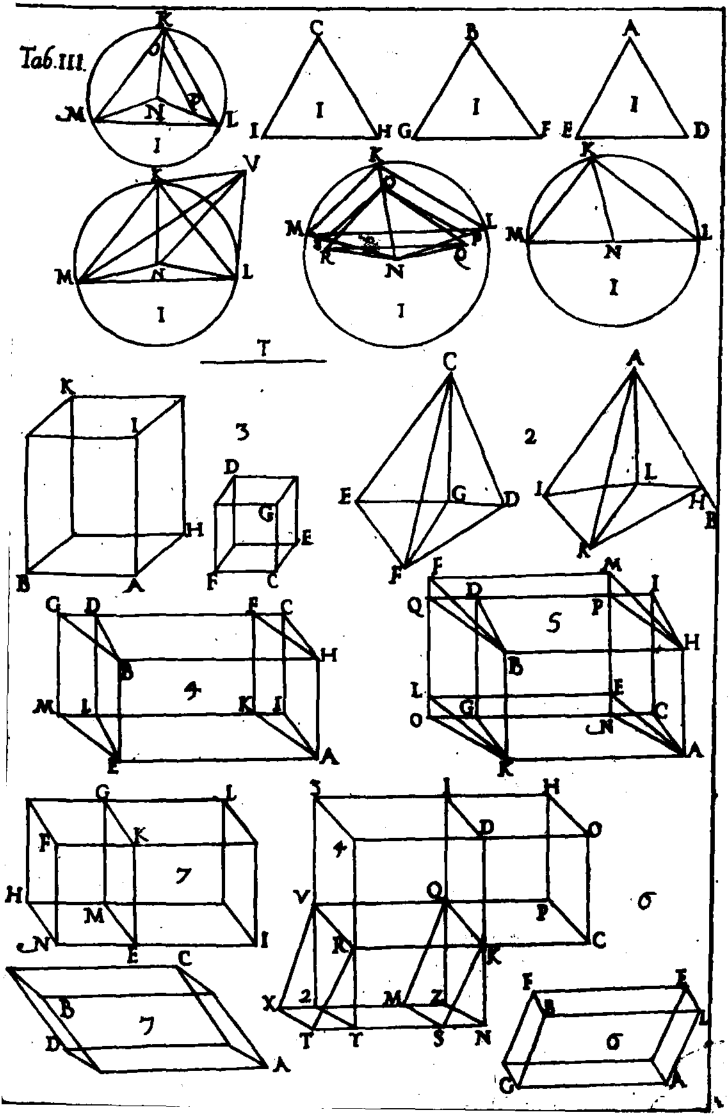
Tab. I



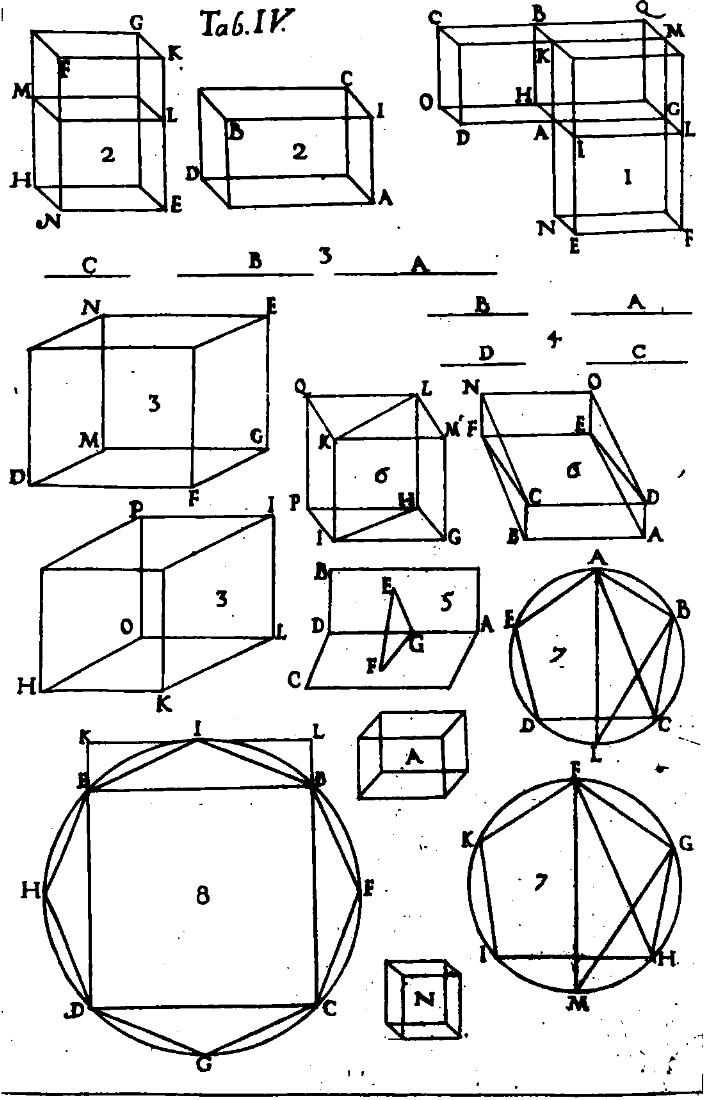
Tab. II.



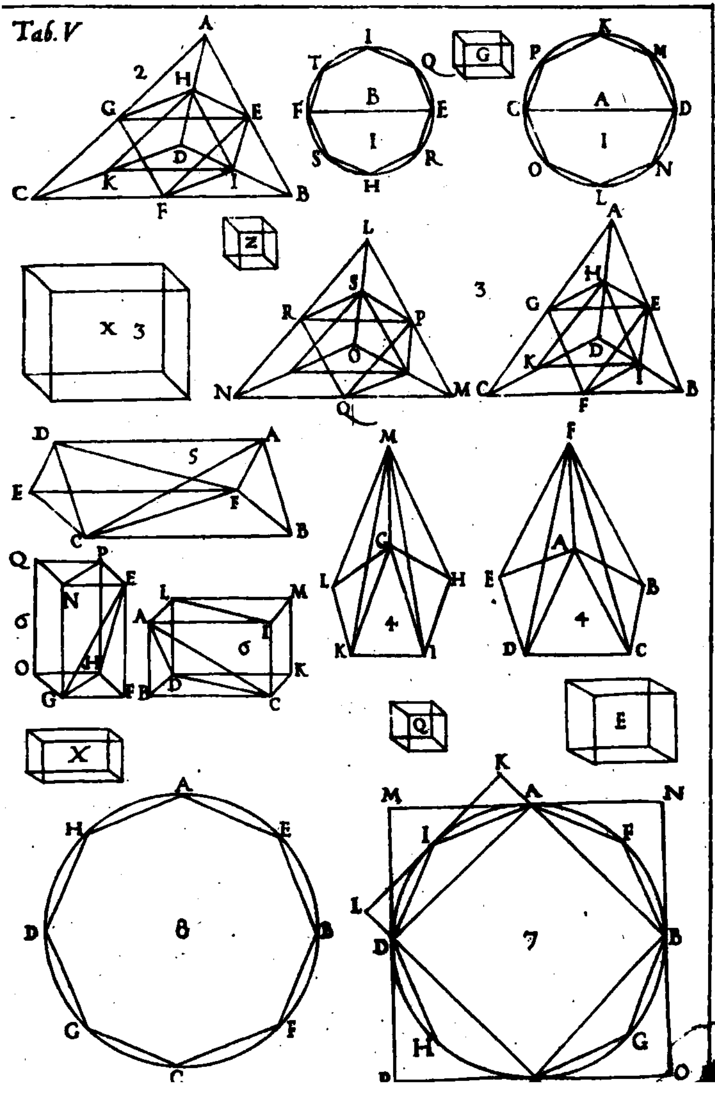
Tab. III.



Tab. IV.



Tab. V


2
A H G E D K I C F B
I T Q F B E I S R H
G
K P M C A D I O N L
Z
X 3
L S R P O N Q M
3
A H G E D K I C F B
D A 5 E F C B
M G L H K 4 I
F A E B D 4 C
Q P E N 6 O H G F
L M A I 6 B D K C
Q
E
X
A H E D 8 B G F C
K M A N I F L D 7 B H G O

Tab. VI