Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Bibliothèque électronique suisse

RAK 2123 A

EVCLIDIS POSTERIORES LIBRI IX.

Accesſit XVI. de SOLIDORVM REGVLARIVM cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

Omnes perſpicuis DEMONSTRATIONIBVS, accuratisq; SCHOLIIS illuſtrati:

Nunc tertiò editi, ac multarum rerum acceſſione locupletati.

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI, è Societate IESV.

COLONIAE,
Expenſis IOH. BAPTISTAE CIOTTI
clo Io xci.

EVCLIDIS

ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundùm quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verùm antè ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus differere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumq; maximè, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atq; vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idq; adeò, vt absq; eis solidorum tractatio imperfecta sit, neq; suis numeris absoluta. Huc accedit, quòd absq; eisdem lineis plurima latera tam planorum, quàm solidorum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atq; vsum, neq; exprimi queant, neq; intelligi. Nam non rarò pleraque laterum sunt illæ lineæ, quæ à Græcis ἄλογοι, a Latinis Irrationales appellantur: Vel, si non sunt Irrationales, longitudine certè inter se sunt incommensurabiles, atq; adeò sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atq; intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, vt absque his nullo modo cognoscantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ suus ordo, ratioq; constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesq;, quantum ea rei Geometricæ inseruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more suo à principijs, definit initio vnitatem, docetq; eam esse, secundùm quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum esse dicitur. Nam secundùm vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere solemus. Cæterùm vnitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus.

II.

NVMERVS autem ex vnitatibus composita multitudo.

CVM numerus sit multitudo quædam ex vnitatibus composita, manifestum est, numerũ quemlibet tot habere partes, quot sunt vnitates eum constituentes: Ita vt vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex 8. vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nimirum in 8. vnitates, quarum quælibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum quælibet centesima ipsius pars est, &c.

EX his sequitur, omnes numeros, quotcunq; sint, inter se commensurabiles esse, cùm eos vna eademq; mensura, nimirum vnitas, vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cùm plurimæ earum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, vt clarissimè lib. 10. ostendetur.

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cùm minor metitur maiorem.

NON est dissimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partẽ quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cùm hæc solùm propriè dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Ita q; numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630, &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cùm illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.

OMNIS autẽ pars ab eo numero nomẽ sibi sumit, per quẽ ipsa numerũ, cuius pars est, metitur; vt 6 pars huius numeri 42. nomen trahit à 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaq; 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IIII.

PARTES autem, cùm non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cùm eum non metiatur, nisi per suas vnitates. pars ipsius dici non debeat; aptè tamen congruenterq; partes poterit appellari, quòd quinque contineat vnitates, quarum qualibet decimaoctaua pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquidò constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, non autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superuacanea esset hac definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CAETERVM partes quæcunq; nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos cõmunis duorũ numerorum mensura vtrumq; eorum metitur, & eum scilicet qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt si communis duorum numerorũ mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintæ. Tales partes sunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum mensura 2 metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerũ 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cùm vnitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc verò per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc loco non solùm eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verùm etiam illum, qui partes: nõ autẽ idipsum 5. lib. in magnitudinibus præstiterit? Neq; enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantũ eam, quæ maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quòd omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidem, cùm ipsum metitur; partes verò, cùm non metitur. At in magnitudinibus longè aliter se res habet. Non enim, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, necessariò minor aut pars, aut partes est maioris, cũ ea persæpè sint incommensurabiles, vt apertè liber 10. demonstrabit, atq; adeò minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solùm in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Rectè igitur Euclides 5. lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX verò maior minoris, cùm maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solùm numerus minor, maioris pars dicitur, q̃ maiorẽ metitur; ita quoq; ille tantummodò numerus maior, minoris appellatur multiplex, quẽ minor metitur; adeò vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicißim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si verò maiorẽ minor nõ metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorẽ per hanc definitionẽ. Et vicißim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorẽ non metietur. Nam si metiretur minor maiorẽ, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus est, qui bifariam diuiditur.

VT omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes æquales, cùm eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR verò, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt à pari.

OMNES hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certè, quia vnitate differunt ab his paribus, 4. 10. 14. 36. 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicuè colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeò bifariam diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars essent quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerũ parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. Metitur enim ipsum par numerus 8. per numerũ parem 4. Ita quoque par numerus 24. paritet par nuncupabitur, cùm eum par numerus 4. metiatur per numerũ parem 6. &c.

IX.

PARITER autẽ impar est, quem par numerus metitur per numerũ imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 3. &c.

CAETERVM

CAETERVM si rectè duæ proximæ definitiones expendantur, perſpicuũ erit, fieri poſſe, vt vnus idemq; numerus par, ſit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cùm eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rurſus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoq; impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, exiſtimantes hoc eſſe abſurdum, vt excluderent numeros eiuſmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur eſſe, addiderũt vtrique definitioni particulam, tantùm, ita vt numerus pariter par. ſecundùm eos, ſit, quẽ par numerus metitur per numerum parem tantùm; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantùm. Ita enim ſit, vt propoſitus numerus par 24. ne quepariter par ſit, cùm eum non tantùm metiatur par 6. per parem 4. ſed etiam par 8. per imparem 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantùm, vt dictum eſt, par 8. per imparem 3. verùm etiam par 6. per parem 4. Sed aptè vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriuſque, vt conſtat. Itaq; tria conſtituentur genera numeri pariũ inter ſe mæximè diuerſa: Pariter par; pariter impar; pariter par, & pariter impar, qui à quibuſdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen hæc omnia vera quidem ſunt, & ex ſententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boëtij, & aliorum rectè explicata, ſed aliena prorſus ab Euclidis inſtituto, vt perſpicuum eſt, & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio iſta, tantum, quam illi apponunt, & ex propoſ. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifeſtè omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat; illum verò, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem: eum denique, quem par numerus metitur, & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonſtratq; omnes numeros à binario duplos, quales ſunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. eſſe pariter pares tantùm, hoc eſt, pares numeros eos metiri per pares numeros tantùm; Numerus verò, qui dimidios impares habẽt, eſſe pariter impares tantùm, id eſt, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiuſmodi ſunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique nec à binario duplos ſunt, nec dimidios habent impares, pariter pares eſſe, & pariter impares, vt ſunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaq; vult Euclides in demonſtrationibus illarum propoſitionum, hos poſtremos numeros alios q; ſimiles, verè eſſe. ſecundùm traditas definitiones, pariter pares; rurſus eoſdem dici rectè pariter impares, quanq; nec tantũ pariter pares, nec tantũ pariter impares illi ſint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER verò impar numerus eſt, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. cum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.

QVOD ſi numerum quempiam nullus numerus, ſed ſola vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neque pariter impar, neq; impariter impar poſit dici, appellabitur numerus Primus; quales ſunt omnes iſti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos ſola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter ſe numeri ſunt, quos ſola vnitas, communis menſura, metitur.

SICVT numerus ille, quem ſola vnitas metitur; Primus dicitur; ita quoq; duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatem, nullus numerus, tanquam menſura communis metitur, quamuis ſinguli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter ſe primi. Vt 15. 8. ſunt numeri inter ſe primi, quia ſola vnitas, menſura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. poſteriorem verò iſti 2. 4. tamen nullus iſtorum verumque metitur, ſed ſola vnitas vtriuſque eſt communis menſura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. primi inter ſe dicentur, quòd præter vnitatem, nullum habeant numerum, menſuram communem, quanquam poſtremi duo habeant communẽ menſuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quiuis numerus, dici poſſunt, licèt impropriè, numeri inter ſe primi: quia ſola vnitas vnitatem, & numerum quemuis metitur, tanquam menſura communis.

XIII.

COMPOSITVS numerus eſt, quem numerus quiſpiam metitur.

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compoſitum, cuiuſmodi eſt hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perſpicuum autem eſt, omnes numeros pares, dempto binario, eſſe compoſitos, cùm eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, præter binarium, eſſe impares, quandoquidem ex paribus, ſolus binarius primus eſt, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquã menſura communis meti-

tur, dicuntur inter se compositi, licèt non quilibet sit compositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7. 21. 35. Nã primus eorũ & se ipsum, & reliquos duos metitur, licèt p se sumptus, Primus vocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

Vt numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. vnitates, procreatus q3 fuerit numerus 48. Ita quoque vicissim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerũ 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimus q3 eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cùm hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitiq3 fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel è contrario. Et sic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad vnitatem. Cùm enim ex definitione Euclidis alteruter multiplicantium toties componendus sit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quàm alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaque Multiplicatio, siue ductus vnius numeri in alium ita quoque describi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

SIC vides, ex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda est hæc alia docens, quid sit numerum diuidere numerum: quippe quæ necessaria omnino sit ad ea, quæ nos in ijs, quæ sequuntur, sumus demonstraturi.

NVMERVS numerum diuidere dicitur, cùm numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur.

Vt numerus 6. diuidere dicetur numerũ 48. cùm sumptus fuerit numerus 8. qui octo suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiso 48. contineri octies. Ita quoque vicissim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. si acceptus fuerit numerus 6. qui sex suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 8. in diuiso 48. contineri sexies.

HINC fit, numerum ex diuisione procreatum eandem habere proportionem ad vnitatem, quam numerus diuisus habet ad diuidentem. Cùm enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus suis vnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiso contineatur; continebit numerus productus vnitatem toties, quoties numerus diuisus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuisione genitus ad vnitatem, quàm diuisus numerus ad diuidentem. Itaque Diuisio vnius numeri per alium ita quoque poterit describi.

DIVISIO numeri per numerum, est inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuisus ad diuidentem.

ITA vides ex diuisione numeri 48. per 6 procreari numerum 8. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuisione eiusdem numeri 48 per 8. produci numerum 6. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX his quoque efficitur, diuiso numero per numerum, diuisum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuisionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiso enim numero A, 48. B, 8. C, 6. D, 1. A, per B, procreetur numerus C. Dico numerum A gigni ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex definitione multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita se habet ad B, vt C, ad vnitatem D: Ex definitione autem diuisionis, ita quoque se habet A, ad B, vt C, ad vnitatem D; perspicuum est, numerũ ex C, in B, genitum esse numerum A; cùm tam ille genitus, quàm A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, vnitatem.

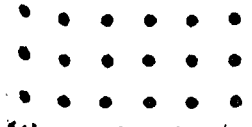
HÆC omnia conueniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis: Id est, Numerus fractus numerum fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (siue fracti adhæreant integris, siue non) multiplicare dicitur, cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cùm numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiso continetur:

continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoq; numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuisione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quã numerus diuisus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit compositus, quot sunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatus q; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per sui semissem duntaxat est in $\frac{1}{2}$. sumendus est numerus 20. per semissem quoq; sui, quæ est 10 Ita quoque vicissim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. si $\frac{1}{2}$ sumptus fuerit vicies, toties scilicet, quoties vnitas est in 20. productusq; fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10 ad 20. vt $\frac{1}{2}$. ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. se mutuò multiplicare dicentur, quando $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$. tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit per sui semissem, quia & $\frac{1}{2}$. semissem tantum continet vnitatis. Vtroq; autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars est numeri $\frac{1}{2}$. siue $\frac{3}{6}$. & semissis numeri $\frac{1}{3}$. siue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusq; ad finem lib. 9.

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. dividere dicetur numerum 10. cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiso numero 10. ita vt eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diuisi 10. ad diuidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$. dividere dicetur $\frac{1}{6}$. quando sumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diuiso $\frac{1}{6}$. sed tertiam eius partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem sit qui $\frac{3}{6}$. liquidò constat tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. contineri in $\frac{1}{6}$. Cæterùm quo pacto fiat diuisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuisioneq; fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui verò numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum suas vnitates in longum, & latũ dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes; qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quòd ipsum contineant, non secus, ac rectæ lineæ angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateráque eius sunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum dispositæ, prout latera exigunt, referũt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus sex vnitates, alterum verò 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiúsque latera 8. & 8.

CAETERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras: Euclides solum definit planum quadrangularem rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur, quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quòd omni ex parte quadrato Geometrico, & figura altera parte longiori, similes sint, & æquales, siue ambitum, siue aream, capacitatémve spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum spectat: tamen si aream seu capacitatem consideres, ab iisdem multum discrepant, Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem vnus, idemq; numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quàm 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.

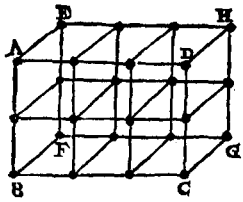
QVIA verò omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quòd quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero vnitates, ipsum procreet; liquido constat, omnem planum numerum esse compositum: Quod etiam de numero solido, qui iamiam definietur, dici potest. Verum est, vnitatem aliquando dici posse numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera sunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipsam vnitatem producunt.

XVII.

CVM verò tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

VT. quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur nu-

merus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4 gignitur numerus 8. & ex 8 in 3. efficitur 24. Vel denig; ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24 solidus, numeri verò 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atq; profundum dispositæ referunt figuram quandam solidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius verò latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8 basis solidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas: Et si hæc basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens trium vnitatum. At si numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur basis 6. vnitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. p basse, quæ bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & B F, latitudo, duas complectitur; superponentur ei duæ aliæ bases similes, & æquales, vt totus numerus solidus contineat 24. vnitates, eius q; altitudo B A, vnitates tres. Similiter, si basis sit A B F E, sex vnitatum, cuius longitudo A B, tres, & latitudo B F, duas continet vnitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fietq; totus solidus numerus rursum 24. altitudinē B C, habens quatuor vnitatum. Si denig; basis sit A B C D, 12. vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor continet, & latitudo A B, tres; superponetur illi alia basis similis, & æqualis E F G H, constabitq; totus numerus solidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabūt A E, vel B F. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemq; modo de aliis numeris solidis iudicandum erit.

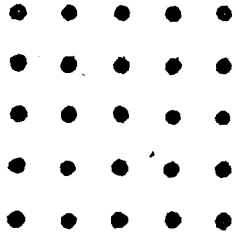


DENIQVE *& vnitas interdum solidus appellabitur numerus, etsi non propriè, quia eius latera sunt tres vnitates, ipsam vnitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.*

DEFINIT *autem & hîc Euclides tantùm numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, & qui continetur sub tribus numeris, omissis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione datā; quæ scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.*

XVIII.

QVADRATVS numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

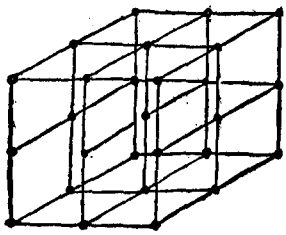


PLANVM *illum numerum, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum vnitates suas in longum & latum dispositas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini est æqualis, ita vt omnia latera sint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atq; adeò sub illis continetur, vocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si eius vnitates in formam planam rediganter, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinq; vnitates, ideoq; æqualiter æqualis erit.*

ALTERVTER *autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix verò ab Arithmeticis plerisq; appellatur.*

XIX.

CVBVS verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.



SOLIDVM *quoq; illum numerum vocat cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cuius vnitates in longum, latum, atq; profundum dispositæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, siue profunditas, æquales sint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter se producitur. Qualis est numerus 27. contentus sub numeris æqualibus 3. 3. 3. siue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam solidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, existuntq; tam in longitudine, & latitudine, quàm in profunditate, tres vnitates. Quare ipse numerus 27. est æqualiter æqualis æqualiter.*

QVILIBET *verò trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, plerisq; autem Arithmeticis radix dicitur.*

XX.

NVMERI proportionales ſunt,cum primus ſecũdi,& tertius quarti,æquè multiplex eſt; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certè,cum primus ſecundum, & tertius quartũ,æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partẽ, vel eaſdẽ partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certè, cum primus ſecundum,& tertius quartum,æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem,vel eaſdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atq; imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicíve, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex eſt; in ſubmultiplici verò, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eædem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At verò ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neq; æquè multiplex eſt, neq; eadem pars, neq; eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdémve partes; vt perſpicuum eſt ex iis, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copiosè explicuimus. Itaq; hi numeri 1. 2. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cũ primus ſecundi, & tertius quarti æquè multiplex ſit, nimirum triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Deniq; & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10 & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eandem partem, videlicet ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo denique primus ſecundum, & tertius quartum, bis, & præterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æquè multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes; vel denique primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.*

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſariò erit, ſi quidem maiores cum minoribus conferantur, quòd primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex ſit; Vel certè, quòd primus ſecundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & inſuper eandem partem, vel eaſdem partes: Et contra, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex concedatur: Vel certè primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad maiores referantur, dicanturq; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti, eſſe partem eandem, vel partes eaſdem; Et è contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eædem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.

DEFINIT *autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, vt proportionales numeri dicantur.*

EX hac autem definitione apertè colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem. Et contra eundem ad æquales eandem quoq; habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eandem habet proportionem, æquales eſſe. Cum enim æquales numeri ſint eiuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certè eundem æqualiter cõtineant, eandemq; inſuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus æqualium ſit vel æquè multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certè illos æqualiter contineat, eandemq; inſuper eorum partem, vel partes; perſpicuum eſt, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, ſunt illius vel æquemultiplices, vel eadem pars, vel eædem partes; Vel certè illum æqualiter continent, eandemq; inſuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, eſt illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemq; inſuper illorum partem, vel partes, ſecundùm hanc eandem definitionem; manifeſtum eſt, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales eſſe.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem eſſe, quàm minoris. Et contra, eiuſdem ad minorem, maiorem eſſe proportionem, quàm ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem eſſe: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem eſſe. *Quæ omnia perſpicua ſunt, ſi rectè hæc definitio intelligatur.*

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis; siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{3}{4}.\frac{3}{8}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}$. quia primus secundi, & tertius quarti, æquè multiplex est, nimirum duplus, vt patet si priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad $\frac{6}{8}.\frac{3}{8}$. & posteriores quoq; ad eandem denominationem, vt ad $\frac{2}{4}.\frac{1}{4}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{1}{8}.4\frac{9}{12}.1\frac{1}{4}.2\frac{5}{10}$. cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur, $\frac{17}{8}.\frac{38}{8}$. & posteriores duo ad hos $\frac{5}{4}.\frac{10}{4}$. atq; ita de cæteris. Quo autem modo secundus $\frac{57}{12}$. ad hunc $\frac{38}{8}$. & quartus $\frac{25}{10}$. ad hunc $\frac{10}{4}$. reuocetur, ostendemus ad finem lib. 9. propos. 18. Minutiarum.

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero sit similis, non necesse est, quælibet duo illius latera quibusuis duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua duo latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas vnitates in formam planam redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniam illius latera 6 4 proportionalia sunt lateribus huius 3.2. quamuis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera, nempe 8.3 vel 12.2.

EODEM modo, vt duo numeri solidi similes sint, non requiritur, vt quæuis tria vnius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia; quia hac ratione, si secundùm vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24 sunt similes, quia latera illius 8.6.4. lateribus huius 4.3.2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12.8.2. vel 6.4.3.

ITAQVE possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24.6. similes, vt dictum est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192.24. cum tamè laterib. prioris assumptis 3.4.16. nulla reperiatur proportionalia in posteriori.

HÆC porrò similitudo planorum, & solidorum reperitur quoq; in fractis numeris, siue in integris cum fractis. Nam si sumantur quatuor numeri nõ integri proportionales, & tam duo priores, quàm duo posteriores inter se multiplicentur, procreabuntur plerunq; duo plani non integri similes, &c. Dixi, plerunq; quia fieri potest, vt interdum integri numeri gignãtur. Nam si duo latera sint $\frac{2}{3}.6$, & alia duo $1\frac{1}{3}.12$. quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. posteriora verò numerum 16.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta def. 3. huius lib.) æquales sunt, Perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6.28.496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1.2.3. quæ simul sumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1.2.4.7.14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas, 1.2.4.8.16.31.62.124.248. quas omnes in vnam summã collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vlt. lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si verò minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partibus sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici posset, siue eum metiatur, siue non metiatur.

His definitionibus ab Euclide propositis adiungendæ mihi videntur ex Campano, aliisq; scriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proximè succedent postulata, & communes animi notiones præsertim eæ, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides & eius interpretes vti videntur.

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademq; ratione numerus 3, eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4 ipsum 12. toties compositus, quoties est vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicãs numerum 4. producet 12. Quia verò vt propos. 16. huius lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4 in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

HÆC

Hæc quoq; definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus 2 $\frac{1}{3}$. metiri dicitur numerum 13 $\frac{1}{2}$. per 5 $\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per 5 $\frac{3}{4}$. gignit 13 $\frac{1}{2}$.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partésve; vel certè illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

Si numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur hæc comparatio, habitudóve, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

Quæ cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æquè multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certè, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra definit. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum: Et semper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

Hæc definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiosè explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facilè possint, non est quòd iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

Hoc ita se habere, pluribus verbis à nobis demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

Possvnt etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuersaq;, de compositione, diuisione, & conuersione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones versantur, demonstrabuntur quoque hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

I.

POSTVLetur, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

Quamvis enim numerus infinitè diminui nequeat, sed necessariò ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinitè per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero proposito maior exhiberi potest, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione conflatur.

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æquè multiplex est, vel æquè multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur.

NAM vnitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito vnitates, ipsum cõstituit. Quamobrem ipsum metitur per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis vnitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus se ipsum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicãs productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantẽ.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, vnitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans, procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16. huius lib.

A .... B ...
C .....

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eũdem metietur per eas, quæ in metiente sunt, vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6 per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, vel multiplicatum à B, producere ipsum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipsum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum producere ipsum C.

A .... B ...
C .....

X.

NVMERVS quotcunq; numeros metiẽs, compositum quoq; ex ipsis metitur.

METIATVR numerus A, numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoq; ex ipsis compositum B D. Cum enim A, metiatur ipsos B C, C D; erit tam B C, quàm C D, ipsius A, multiplex. Diuiso ergo B C, in partes B E, E C, ipsi A, æquales, & ipso C D, in partes C F, F G, G D, eidem A, æquales; erit numerus B D, compositus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipsi A, æqualibus, multiplex ipsius A. Quare A, ipsum B D, metitur. Quod est propositum.

A ....
B ....E....C....F....G....D

XI.

NVMERVS quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoq; numerum C D, quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipsum C D; erit C D, ipsius B, multiplex. Diuiso ergo C D, in partes C E, E D, ipsi B, æquales; metietur A, ipsos numeros C E, E D; quandoquidem numerum B, tam numero C E, quàm E D, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoq; numerum C D, ex C E, E D, compositum. Quod est propositum.

A ...
B .....
C .....E.....D

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, meritur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoq; reliquum D C. Cum enim A, metiatur & B C, & B D; erit tam B C, quàm B D, ipsius A, multiplex, aut certè B D, ipsi A, æqualis erit. Diuiso ergo tam B C, quàm B D, in partes ipsi A, æquales; erit reliquus numerus D C,

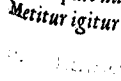
A ...
B .....D... C
B .....D..... C
B... D..... C

vel vna

vel vna pars numeri B C, ipsi A, æqualis, vel plures, atque adeò D C, æqualis erit ipsi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipsum D C. Quod est propositum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si duobus numeris inæqualib. propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neq; reliquus vnquam metiatur præcedentẽ, quoad assumpta sit vnitas; qui principio proposiri sunt numeri, primi inter se erunt.



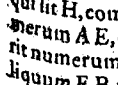
Sint duo numeri propositi inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore A B, quoties potest, detrahatur: & reliquus E B, ex C D, quoties etiam potest; & reliquus F D, ex E B: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem G B, quæ quidem præcedentem numerum F D, metitur, detractio perueniat. Dico numeros A B, C D, esse inter se primos, hoc est, solam vnitatem communi mensura eos metiri. Si enim non dicantur inter se primi, metietur eos aliquis numerus, qui sit H, communi mensura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum C D: & C D, numerum A E, (quod C D, vel pars sit ipsius A E, vel certè ei æqualis, cum detractus ex A B, relinquerit numerum E B,) [a] metietur quoq; H, ipsum A E: At H, metitur quoq; totum A B. [b] Igitur & reliquum E B, metietur. Metitur autem E B, ipsum C F. [c] Igitur & H, ipsum C F, metietur; Ac propterea, cum & totum C D, metiatur, [d] metietur quoq; reliquum F D. Cum ergo F D, metiatur ipsum E G; [e] metietur etiam H, ipsum E G: Metiebatur autem & H, totum E B. [f] Reliquam igitur vnitatem quoque G B, numerus H, metietur, partem totum. Quod est absurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros A B, C D, metitur: Ac proinde primi inter se sunt. Quamobrem, si duobus numeris inæqualibus propositis, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 11. *prop.*
[b] 1. *prop.*
[c] 11. *prop.*
[d] 12. *prop.*
[e] 11. *prop.*
[f] 12. *prop.*

SCHOLIVM.

Conuertemvs cum Campano hanc propositionem, hoc modo.

Si duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas.



Sint duo numeri inter se primi A B, C D, quorum minor C D, ex maiore A B, quoties potest, detrahatur; & reliquus E B, ex C D, quoties etiam potest; & reliquus F D, ex E B, relinquens G B. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas assumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatem detractio perueniat, si fieri potest, reliquus numerus G B, præcedentem F D, ex E B, ablatum. Quia igitur numerus G B, numerũ F D, metitur; & F D, ipsum E G, [a] *metietur quoque G B, ipsum E G. Cum ergo G B, & se ipsum metiatur,* [b] *metietur quoque numerum E B, ex E G, G B, compositum: Metitur autem E B, ipsum C F.* [c] *Igitur & G B, eundem C F, metietur: Atque adeò cum & ipsum F D, positus sit metiri;* [d] *metietur quoque ipsum C D, ex C F, F D, compositum. At verò C D, metitur ipsum A E.* [e] *Igitur & eundem A E, numerus G B, metietur: Ac proinde, cum & ipsum E B, metiatur, vt ostensum est;* [f] *metietur & ipsum A B, ex vtroque A E, E B, compositum. Quare cum numerus G B, metiatur numeros A B, C D, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.*

[a] 11. *prop.*
[b] 10. *prop.*
[c] 11. *prop.*
[d] 10. *prop.*
[e] 11. *prop.*
[f] 10. *prop.*

Eodem modo & hoc verum est.

Si propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vsque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

Nam si detractio huiusmodi ad vnitatem vsque perueniret, essent propositi numeri inter se primi, [g] *vt Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.*

[g] 1. *septimi*

Ex his facilè dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi, [h] *vt Euclides demonstrauit: Si verò reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propositum metiatur, vt perspicuum est ex demonstratione superiori huius scholij. Ex eo enim, quòd reliquus numerus G B, metiri dicebatur præcedentem numerum F D, ostensum fuit, eundem reliquum G B, vtrumq; A B, & C D, metiri.*

[h] 1. *septimi*

PROBL. 1. PROPOS. 2.

DVOBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties potest, relinquatq; EB, numerum, qui ex CD, subtractus relinquat FD, & sic deinceps semper minor de maiore subtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam si ad vnitatem deueniretur, [a] numeri AB, CD, essent inter se primi; quod est contra hypothesim. Peruentum ergo iam sit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, sed eum metiatur. Dico FD, esse maximam mensuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita ostendemus. Quia FD, metitur ipsum EB; & EB, ipsum CF, [b] metietur quoq; FD, ipsum CF; atque adeò cum & seipsum metiatur, [c] metietur & totum CD, ex CF, FD, compositum. At CD, ipsum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum FD, metiatur quoque ipsum EB; [e] metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.

A.....E.....B
C.....F..D
G-----

a 1. *septimi.*
b 11. *pron.*
c 10. *pron.*
d 11. *pron.*
e 10. *pron.*

QVOD autem FD, sit maxima mensura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quàm FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumq; AB, CD; Et CD, metitur ipsum AE, [f] metietur quoq; G, ipsum AE. [g] Igitur & residuum EB: At verò EB, metitur CF. [h] Metietur ergo & G, eundem CF. [i] Igitur & residuum FD; maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quàm FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima est mensura numerorum, AB, CD.

f 11. *pron.*
g 12. *pron.*
h 11. *pron.*
i 12. *pron.*

A.....B
C.....D

QVOD si minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipse maxima amborum mensura communis, cum & se ipsum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, numerum metientem duos numeros, metiri quoque maximam eorundem communem mensuram.

HOC elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit FD, esse maximam mensuram ipsorum AB, CD. Demonstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum mensuram communem. Eademq; ratio est de cæteris.

SCHOLIVM.

A.....
B.....
C.....

EX iis quæ dicta sunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propos. 1. docuimus, an duo A, & B, sint inter se primi: Quòd si fuerint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter se primos.

a 2. *septimi*

A.....
B.....
C.....
D...

SI verò A, & B, fuerint inter se compositi, [a] sit eorum maxima mensura communis inuenta D; quæ si metiatur & numerum C, perspicuum est, tres numeros A, B, C, esse inter se compositos. cum habeant numerum D, communem mensuram.

QVOD si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; erunt C, & D, vel inter se primi, vel non. Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita vt habeant

A.....
B.....
C.....
D...

numerum communem mensuram, metietur eiusmodi communis mensura numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, per corollarium huius propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesim. Si autem C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi. [b] Inuenta enim numerorum C, & D, maxima mensura communi E; cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & B; [c] metietur quoque E, eosdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se erunt compositi. Quod est propositum.

b 2. *septimi*
c 11. *pron.*

A.....
B.....
C.....
D.... E..

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quàm tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si

Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primùm in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR tres numeri A,B,C, non primi inter se, quorum maximam mensuram communem oporteat reperire. Sit D, maxima mensura numerorum A,& B; Si ergo D, metiatur quoq; ipsum C, perspicuum est D, esse maximam mensuram numerorum datorum A,B,C. Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A,B,C, metietur idem, per corollarium propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A,& B, maior numerus minorem. Quod est absurdum. Si verò D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cum enim sint A,B,C, inter se compositi, metietur quæcunque illorum mensura communis, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensurã numerorum A,& B. Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D,& C, inter se compositi. [a] Sit eorum maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram communem datorum numerorum A,B, C. Quòd enim sit eorum mensura communis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur, numeros C,& D; at D, ipsos A,& B; [b] metietur quoque E, ipsos A,& B; Ac proinde tres numeros A,B,C, metietur.

A.....
B.....D....
C.....E..F----

[a] 2. *septimi.*

[b] 11. *prom.*

QVOD autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quàm E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communem. Metitur autem & C. Igitur F, metiens D,& C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem, quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quàm E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeò E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

HOC etiam colligitur ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum mensuram communem: Eademq; in cæteris est ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quàm tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primùm maxima mensura communis trium numerorum: si quinq;, quatuor numerorum accipienda erit primùm maxima communis mensura, &c. Reliqua verò omnia peragenda, vt de tribus numeris dictũ est.

THEOR. 2. PROPOS. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

A.....
B.....

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B. Sint enim primùm A,& B, inter se primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, vnitates.

A.....
B.....

SINT deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se cõpositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito, manifestũ est A, partẽ esse numeri B, ex defin. 3. huius lib.

A..D..E..F
B.....
C..

SED iam A, non metiatur ipsum B, [c] inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturq; numerus A, in partes A D, D E, E F; quarum singulæ ipsi C, sint æquales. [d] Quia igitur C, pars est ipsius B, cum ipsum metiatur; erit quoque A D, pars eiusdem B: similiter & D E, & E F; Ac propterea totus numerus A, est partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in A F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

[c] 2. *septimi.*

[d] 3. *defin.*

THEOR. 3. PROPOS. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriusque simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ est numerus D, numeri E F. Dico vtrumque nu-

merum A,& D ſimul vtriuſq; numeri B C,& E F,ſimul eandem eſſe partem,quæ eſt vel A, ipſius B C,vel D,ipſius E F. Diuiſis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C,æqualis multitudini partium numeri E F,propterea quòd eadem pars eſt A,ipſius B C,quæ D,ipſius E F. Quia igitur A, & B G, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales D,& E H; erunt A,& D,ſimul æquales ipſis B G,& E H,ſimul. Eodem argumento erunt A, & D, ſimul ipſis G C,& H F,ſimul æquales: Et ſic deinceps,ſi plures partes fuerint in B C,E F; aggregatum numerorum A,& D,tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A,in B C,vel D,in E F,continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A,& D,ſimul vtriuſque B C,& E F,ſimul,quæ eſt A,ipſius B C,vel D,ipſius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat oſtendendum.

A . . . . . | D . . . .
B . . . . . G . . . . . C | E . . . . H . . . . F

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{9}$ D, $\frac{3}{7}$
B, $\frac{2}{9}$ G, $\frac{2}{9}$ C E, $\frac{3}{7}$ H, $\frac{3}{7}$ F

Idem hoc verum eſt in numeris fractis, eademq; prorſus demonſtratio adhibebitur: vt in hoc exemplo apparet,vbi numerus A,numeri B C, & numerus D, numeri E F, eadem pars eſt; ac proinde vterq; ſimul A,D,vtriuſque B C,E F, ſimul eadem pars oſtendetur,quæ A,ipſius B C: ſi nimirum B C, E F, diuidantur in partes B G,G C; E H,H F, ipſis A,D,æquales,&c.

Quod ſi quando contingat,numerum fractum diuidi non poſſe in partes æquales propoſitas, propterea quòd numerator in eas partes ſecari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquiualens, & cuius numerator in propoſitas partes diuidi poteſt. Vt ſi fractio $\frac{5}{9}$. ſecanda ſit in duas partes æquales, ducendus erit vterque eius numerus in 2. ſi in tres,in 3 ſi in quatuor,in 4. &c. vt gignantur fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima ſecabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. ſecunda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia verò in has quatuor, $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

Rvrsvs quando adſunt integra, reuocanda prius erunt vnà cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator,quàm denominator multiplicandus per numerum partium,&c. Vt ſi numerus $4\frac{3}{7}$. ſecandus ſit in tres partes,reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{31}{7}$. deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus,vt fiat fractio $\frac{93}{21}$. cuius tres partes æquales ſunt $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. Atque hæc in ſequentibus quoq; propoſitionibus obſeruanda ſunt, quando fractionibus accommodantur: Et ſemper nomine fractionum intelligendi quoq; ſunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti ſunt, & alij integri.

Eodem modo demonſtrabimus & hoc, quod ſequitur.

Si vnitas numeri pars fuerit,& altera vnitas,vel numerus alterius numeri eadem pars; Et ſimul vtraque vnitas,vel vnitas & numerus ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit,quæ vnitas numeri.

Hoc autem perſpicuè in his appoſitis exemplis apparet. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

A. D. | A. D...
B. G. C | E. H. F | B. G. C | E...H...F

Possvmvs etiam hanc propoſitionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

Si ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero,ſinguli ſingulorum,eadem pars; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

Sint numeri A,B,C,numerorum D E, F G, H I, ſinguli ſingulorum eadem pars. Dico omnes numeros A,B,C,ſimul omnium numerorum D E,F G,H I, ſimul eandem eſſe partem,quæ eſt A,ipſius D E. Diuiſis enim numeris D E,F G,H I, in partes ipſis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri D E, æqualis multitudini partium tam numeri F G, quàm numeri H I. Quia igitur A,& D K, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales B,& F L, erunt A,B,ſimul æquales ipſis D K, F L, ſimul: quibus ſi rurſum addatur æquales C, & H M; erunt quoq; A,B,C, ſimul æquales ipſis D K, F L, H M, ſimul. Simili ratione erunt A,B,C, ſimul æquales ipſis K E, L G, M I, ſimul. & ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in D E,F G, H I, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum D E, F G, H I, æquale erit, quoties A, in D E, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A,B,C, ſimul ipſorum D E, F G, H I, ſimul, quæ A, ipſius D E.

A . . . . | F . . . L . . . G | H . . M . . I
D . . . . K . . . . E | B . . . | C . .

Idem ſequitur, ſi loco vnius numerorum A,B,C, ſumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum eſt. Id quod ſequentes figuræ indicant.

A. B.. C. . . . | A. B. C.
D. K. E. | F.. L. . . G | H. . . M. . . I | D. K. E | F. L. G | H. M. I

Hæc etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonstrabitur: etiamsi aliqui numerorum sint iutegri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A, 1. | B, $\frac{1}{2}$. | C, $\frac{3}{4}$.
D, 1 K, 1 E | F, $\frac{1}{2}$ L, $\frac{1}{2}$ G | H, $\frac{3}{4}$ M, $\frac{3}{4}$ I

Theoremati quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æquè multiplices: quàm multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

Demonstratio eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æquè multiplices, singuli singulorum.

A..... B.....; C....
D .... E ... F..

Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quàm est A, multiplex ipsius D. Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quàm est B, ipsius E & C, ipsius F; erit è contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quàm est multiplex A, ipsius D.

Si numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fractorum æquemultiplices; quàm multiplex est vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonstratione liquet.

Quod si loco vnius numerorum D, E, F, assumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonstrabitur, vt ex sequentibus figuris apparet.

A.. B.... C..... | A.. B.. C..
D. E.. F... | D. E. F.

THEOR. 4. PROPOS. 6. 6.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

Sit numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Dico vtrumque numerum A B, & D E, simul vtriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ est A B, ipsius C, vel D E, ipsius F. Diuisis enim numeris A B, D E, in partes A G, G B; D H, H E, numerorum C, & F; erit multitudo partium in numero A B, æqualis multitudini partium in numero D E; propterea quod eædem partes est numerus

A....G...B | D....H....E
C..... | F.....

A B, numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Quia igitur, quæ pars est A G, numeri C, eadem est D H, numeri F; erit vterque A G, D H, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ A G, ipsius C, vel D H, ipsius F. Eadem ratione erit vterque G B, H E, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ G B, ipsius C, vel H E, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in A B, D E, erunt tot aggregata partium in numeris A B, D E, contenta, quorum quodlibet eadem pars est numerorum C, F, simul, quæ pars est A G, ipsius C; quot partes eædem est numerus A B, ipsius C, vel D E, ipsius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus A B, D E, simul, vtriusque numeri C, F, simul, quæ A B, ipsius C, vel D E, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. 2 5. septimi

SCHOLIVM.

Eadem hæc propositio locum habet in numeris fractis, vnà cum demonstratione: vt hoc exemplum demonstrat.

A, $\frac{1}{9}$ G, $\frac{1}{9}$ B C, $\frac{3}{9}$ — D, $\frac{2}{7}$ H, $\frac{2}{7}$ E F, $\frac{6}{7}$

Sed & hanc propositionem ad quotcunque numeros siue integros, siue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

Si sint quotcunque numeri quotcuntque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

Eadem enim est demonstratio, si modò pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedenti; vt hic perspicuum est.

A..K..B | C...L...D | E....M....F
G..... | H..... | I.....

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD. Ponatur enim EB, numeri GC, eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD. Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC; [a] erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF; hoc est, quæ totus AB, totius CD. Ac propterea cum AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD; erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

A....E..B
G.... C..... F....D

[a] 5. septimi.

SCHOLIVM.

A, $\frac{3}{5}$. E, $\frac{2}{5}$. B
G, $\frac{4}{5}$. C, $\frac{6}{8}$. F, $\frac{4}{5}$. D

LOCVM etiam habet hæc propositio, vnà cum eius demonstratione in numeris fractis, vt hic apparet.

IDEM hoc theorema verum est, tam in numeris integris, quàm in fractis, etiamsi ablata sit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB; vel denique in integris et ablata, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A.E...B | A...E.B | A.E.B
G..... C..F..... D | G..C..... F..D | G..C..F..D

CAETERVM & ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus, tam in numeris integris, quàm in fractis.

SI numerus numeri æquè fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verùm idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æquè multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita esse multiplicem, vt est totus AB, totius CD. Cum enim AE, ipsius CD, sit æquè multiplex, atque AE, ipsius CF, erit è contrario totus CD, totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE. [a] Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac proinde è contrario EB, ipsius FD, multiplex erit, vt AB, ipsius CD, est multiplex.

A....E.....B
C..F..D

[a] 7. septimi

QVOD si ex CD, ablata fuerit vnitas CF; vel reliqua sit vnitas FD: vel denique in integris & ablata sit vnitas CF, & alia reliqua FD; idem demonstrabitur, vt hæc exempla commonstrant.

A...E.....B | A....E..B | A....E....B
C.F..D | C..F.D | C.F.D

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD, quę ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, easdem esse partes reliqui FD, quæ totus AB, est totius CD. Sumpto enim numero GH, æquali ipsi AB; erit GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD; hoc est, quę AE, ipsius CF. Diuiso ergo GH, in partes GI, IH, numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF; erit multitudo partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis, eademque pars tam GI, quàm IH, ipsius CD, quæ tam AK, quàm KE, ipsius CF. Cum ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quàm IH, pars ipsius CD, maior tam numero AK, quàm KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipsis AK, KE; erit GL, eadem pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cùm totus GI, totius CD, sit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, [a] erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partem ipsius FD, quæ est totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergò tam GI, quàm IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quàm MH, ipsius FD; erit vterque GI, IH, simul eædem partes ipsius CD, quæ vterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eædem partes ipsius CD, quę AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH: Igitur & vterq; LI, MH, simul eædem partes erit ipsius FD, quæ AB, ipsius CD. Quia verò si ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt: Erit quoq; EB, reliquus eadē partes reliquii FD, quæ AB, totus totius CD, nimi-

A.....K..... E.... B
C..... F.....D
G.....L.. I..... M..H

[a] 7. septimi.

CD, nimirum eædem, quæ vterque L I, M H, simul erat eiusdem F D. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{15}$. K, $\frac{2}{15}$. E, $\frac{6}{15}$. B
C, $\frac{6}{15}$. F, $\frac{9}{15}$. D
G, $\frac{2}{15}$. L, $\frac{3}{15}$. I, $\frac{2}{15}$. M, $\frac{3}{15}$. H

In numeris fractis eadem hac propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, vt hic manifestum est.

Non demonstrauit Euclides hanc propositionẽ, quemadmodum præcedẽtem, quod nonnulli interpretes faciunt; quia non constabat hic, reliquum numerum E B, alicuius numeri easdem esse partes, quæ est numerus A E, numeri C F: ibi verò perspicuum erat, reliquum E B, alicuius numeri eandem esse partem, quæ est A E, ipsius C F. Licet enim ipsius E B, duplum assumere, triplum, quadruplum, &c. donec E B, sit ita submultiplex numeri assumpti G C, vt A E, est submultiplex ipsius C F.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes, & secundus quarti.

Sit numerus A, numeri B C, eadem pars, quæ numerus D, numeri E F, sintque A, B C, minores ipsis D, E F, singuli singulis. De his enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales B C, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F. Quia verò B G, G C, inter se sunt æquales, & minores quàm E H, H F, quæ inter se etiam æquales sunt, quòd & totus B C, toto E F, minor ponatur; Erit B G, ipsius E H, eadem pars, aut partes, quæ G C, ipsius H F; [a] ac propterea & vterque B G, G C, simul, nimirum B C, secundus vtriusque E H, H F, simul, nimirum E F, quarti, eadem pars, vel partes, quæ B G, ipsius E H; hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.

A.... / B.... G.... C / D..... / E..... H..... F

[a] 5. vel 6. septimi.

SCHOLIVM.

A, $\frac{3}{11}$. B, $\frac{3}{11}$. G, $\frac{3}{11}$. C
D, $\frac{14}{22}$. E, $\frac{14}{22}$. H, $\frac{14}{24}$. F

In numeris fractis propositio hac, vnà cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hic perspicuum est.

Quod si loco primi numeri vnitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadem pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumẽto confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo apparet.

A.
B. G. C
D.....
E..... H..... F

THEOR. 8. PROPOS. 10. 10.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

Sit numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus D E, numeri F, sintque A B, C, ipsis D E, F, minores, singuli singulis. De his enim etiam intelligenda est hæc propositio, sicut & antecedens. Dico & vicissim numerum A B, easdem partes esse, aut partem numeri D E, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris A B, D E, in partes A G, G B, & D H, H E, numerorum C, & F; erit multitudo partium in A B, æqualis multitudini partium in D E, & tam A G, quàm G B, eadem pars ipsius C, quæ tam D H, quàm H E, ipsius F. [b] Vicissim ergo eadem pars erit, aut partes A G, ipsius D H, & G B, ipsius H E, quæ C, ipsius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes A G, ipsius D H, quæ G B, ipsius H E. [c] Igitur & vterque A G, G B, simul, nimirum primus A B, eadem pars erit, aut partes vtriusque D H, H E, simul, nimirum D E, tertij, quæ A G, ipsius D H; hoc est, quæ C, secundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonstrandum erat.

A.. G.. B / C..... / D..... H..... E / F.....

[b] 9. septimi. [c] 5. vel 6. septimi.

A, $\frac{2}{15}$. G, $\frac{2}{15}$. B
C, $\frac{6}{15}$.
D, $\frac{3}{10}$. H, $\frac{3}{10}$. E
F, $\frac{9}{10}$.

SCHOLIVM.

Numeris fractis conuenit etiam huius propositionis demonstratio, vt in hoc exemplo apparet.

12. # THEOR. 9. PROPOS. 11.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF. Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, esse, vt est totus AB, ad totum CD. Cùm enim sit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; [a] erit AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, vel æquè multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certè AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. Sit primùm AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, æquè multiplex. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æquè multiplices ipsorũ CD, CF. [b] Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB, ipsius CD, & EB, ipsius FD, æquè multiplex erit. [c] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

a 20. defin.

A ..... E ..... B
C ..... F ... D

b 7. septimi.

c 20. defin.

SIT deinde AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo posito, [d] erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; [e] Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

d 7. vel 8. septimi.

e 20. defin.

A .... E .. B
C ..... F .... D

A .... E .. B
C ..... F ... D

CONTINEAT tertiò AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, eandemque insuper illius partem, vel partes. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonstrabimus. [f] Reliquus igitur FD, reliqui EB, eædem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB: Ac propterea, è contrario AB, ipsum CD, & EB, ipsum FD, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel partes, vt mox ostendemus. [g] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

f 8. septimi.

A ..... E ... B | A ..... E ..... B
C .... F .. D | C ..... F ..... D

g 20. defin.

QVOD si AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF perspicuum est reliquum EB, quoque esse æqualem reliquo FD. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, vt totus ad totũ, ita ablatus ad ablatũ, &c. Quod erat demõstrandũ.

A ..... E ... B
C ..... F ... D

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquidò constat in his exemplis, quæ exemplis tertij casus demonstrationis respondent.

A, $\frac{6}{9}$. E $\frac{3}{10}$. B | A, $\frac{14}{21}$. E $\frac{28}{29}$. B
C, $\frac{4}{9}$. F $\frac{2}{10}$. D | C, $\frac{6}{21}$. F $\frac{10}{29}$. D

LEMMA.

QVOD autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemq; insuper partem illius vel partes; è contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eædem partes; è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemq; illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quàm in integris; hoc modo demonstrabimus. Contineat primùm AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel, vel bis, vel ter, &c. eandemq; insuper partem; GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, æqualis, quòd GB, ipsius CD, sit eadem pars, quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eisdem GB, HE, æquales; erit quoque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis. Cùm enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices; erunt vel totæ partes in AG, AH, quot in CD, CF; vel certè numerus partium numeri CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur

A .. N .. O .. G .. B
C .. I .. K .. D

A ... P ... Q ... H ... E
C ... L ... M ... F

partes

partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis: Atque adeò vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cùm multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE.

CONTINEAT *deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, videlicet semel, bis, ter, quaterve, &c. eadémq; insuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in*

A.. P.. Q.. G.. I.. B
C.. L.. M.. D
A... R... S... H... K... E
C... N... O... F

partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Simili modo, diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoq; multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis, propterea quòd quælibet partium numeri GB, eadem pars est numeri CD, quæ vnaquæque partium numeri HE, est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales; erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cùm enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel cerè numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoque multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atque adeò vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cùm multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primò propositum.

IAM *verò sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, eadem partes. Dico è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandémq; insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, supereritq; eadem pars, vel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF, continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, superfuit, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numeris superfint partes numerorum CD, CF, multitudine æquales. Quam ob rem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandémq; insuper illius partem, vel partes. Quod secundò est propositum.*

THEOR. 10. PROPOS. 12. 13.

SI sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunque numeri proportionales A, B, C, D, E, F, hoc est, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico esse quoque omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, vt est A, ad B. Sint enim primùm A, C, E, minores quàm B, D, F. Quoniam igitur propter eandem proportionem, [a] eadem pars est, aut partes A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F; [b] erit quoque vterque A, C, simul vtriusque B, D, simul eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, vel E, ipsius F. Rursus quia vterque A, C, simul tanquam vnus, vtriusque B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; [c] erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, simul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B. [d] Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

A.... C.. E...
B..... D.... F.....

[a] 20. *defin.* [b] 5. *vel* 6. *septimi.* [c] 5. *septimi.* [d] 20. *defin.*

SINT *deinde A, C, E, maiores, & æquè multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit è*

a 5. *septimi.* contrario B, ipſius A, eadem pars, quæ D, ipſius C, & F, ipſius E: Atque adeò vt prius, a erunt omnes B, D, F, ſimul omnium A, C, E, ſimul, eadem pars, quæ B, ipſius A: ideoque & è contrario omnes A, C, E, ſimul omnium B, D, F, ſimul, & A, ipſius B, æquè multiplices. b Quare eadem eſt proportio omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ eſt A, ad B. Hoc idem verum eſt, etiamſi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes, ſint numerorum ad vnitatem. Eſt enim eadem ſemper demonſtratio, vt hìc apparet, adiuuante tamen ſcholio propoſ. 5. huius libri.

A..... C..... E.....
B.... D.. F...

b 20. *defin.*

A... C..... E..... | A... C... E..... | A... C... E...
B. D.. F... | B. D. F.. | B. D. F.

c 20. *defin.* SINT tertiò A, C, E, maiores, quàm B, D, F, at non multiplices. c Quia igitur propter eandem proportionem, A, ipſum B, & C, ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis propoſitionis B, ipſius A, & D, ipſius C, & F, ipſius E, eædem partes. Igitur vt prius, d erunt omnes B, D, F, ſimul omnium A, C, E, ſimul eædem partes, quæ B, ipſius A: Atque adeò per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A, C, E, ſimul, omnes numeros B, D, F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. e Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

d 6. *ſeptimi.*

e 20. *defin.*

SINT quartò & vltimò A, C, E, ipſis B, D, F, æquales. Quoniam igitur ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, ſimul æquales ipſis B, D, ſimul: quibus ſi rurſùm addatur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, ſimul, omnibus B, D, F, ſimul æquales: Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, cùm vtrobique ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.... C... E.....
B.... D... F.....

SCHOLIVM.

In numeris quoq; fractis propoſitio hæc vera eſſe eodem modo conuincetur, vt patet, ſi pro numeris integris fracti aſſumantur.

14. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſſim proportionales erunt.

A... C.....
B.... D.....

SIT enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſsim eſſe A, ad C, vt B, ad D. Nam ſint primùm A, & C, minores quàm B, & D; & A, quoque minor, quàm C. Quo poſito, erit, propter eandem proportionem, A, ipſius B; & C, ipſius D, eadem pars, vel partes. f Viciſsim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadem pars erit, vel partes: g Ac proinde erit, vt A, ad C, ita B, ad D.

f 9. *vel* 10. *ſeptimi.*

g 20. *defin.*

SINT deinde A, & C, minores quàm B, & D; at A, maior quàm C. Quo poſito, erit, ob eandem proportionem, C, ipſius D, & A, ipſius B, eadem pars, vel partes. h Viciſsim ergo & C, ipſius A, & D, ipſius B, eadem pars erit, vel partes: Atque adeò è contrario, vel A, ipſius C, & B, ipſius D, æquè multiplex erit, vel certè per lemma propoſ. 11. huius lib. A, ipſum C, & B, ipſum D, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes. i Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

h 9. *vel* 10. *ſeptimi.*

A..... C...
B..... D....

i 20. *defin.*

SINT tertiò A, & C, maiores quàm B, & D; at A, minor quàm C. Quo poſito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipſius B, & C, ipſius D, æquè multiplex; vel certè A, ipſum B, & C, ipſum D, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes: Atque adeò è contrario erit B, ipſius A, & D, ipſius C, vel eadem pars, vel certè per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. k Viciſsim ergo & B, ipſius D, & A, ipſius C, eadem pars erit, vel partes. l Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C; hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.... C.....
B... D.....

k 9. *vel* 10. *ſeptimi.*

l 20. *defin.*

SINT quartò A, & C, maiores quàm B, & D; & A, quoque maior quàm C. Quo poſito, erit C, ipſius D, & A, ipſius B, ob eandem proportionem, vel æquè multiplex, vel certè C, ipſum D, & A, ipſum B, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes: Atque adeò è contrario, erit D, ipſius C, & B, ipſius A, vel eadem pars, vel certè per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. m Viciſsim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit, vel partes: Ac propterea è contrario vel B, ipſius D, & A, ipſius C, æquè multiplex erit, vel certè, per lemma propoſ. 11. huius lib. B, ipſum D, & A, ipſum C, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. n Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C; hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A..... C....
B..... D...

m 9. *vel* 10. *ſeptimi.*

n 20. *defin.*

A... C....
B... D....

SINT quintò A, & C, ipſis B, & D, æquales, & A, minor quàm C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes ſunt: o Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

o 20. *defin.*

SINT

A.... C...
B.... D...

SINT ſexto A,& C,ipſis B, & D,æquales: at A,maior, quàm C. Quia igitur æquales numeri A,& B,æqualium numerorum C,& D, vel æquemultiplices ſunt, vel certè illi hos æqualiter continent,eandemque inſuper partem, vel partes; [a] erit vt A,ad C,ita B,ad D. [a] 20. defin.

SINT ſeptimo ac vltimo A, & C, inter ſe æquales, ſiue ij maiores ſint, quàm B,& D, ſiue minores, ſiue æquales. [b] Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A,ipſius B, & C, ipſius D,æquemultiplex eſt,vel eadem pars,vel eædem partes; vel certè A, ipſum B, & C, ipſum D, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes; ſuntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B,& D; Atque adeò erit,vt A,ad æqualem C,ita B,ad æqualem D. Quocirca,ſi quatuor numeri proportionales ſint,& viciſsim proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum. [b] 20.defin.

A..... C.....
B... D...

SCHOLIVM.

QVOD ſi pro numeris integris fractos numeros ſubſtituas, demonſtrabis eodem modo propoſitionẽ hanc veram eſſe in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque eſt, propoſitionem hanc non variari, etiamſi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI verò ſumus in hac propoſitione, & duabus præcedentibus tot caſus recenſere, eosq; demonſtrationibus certiſsimis confirmare, vnà cum lemmate propoſ. 11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim,& nonnulli alij interpretes,illas duntaxat oſtendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes ſunt conſequentium, vt perſpicue ex eorundem auctorum demonſtrationibus apparet; niſi maiorem numerum minoris numeri partes eſſe dicamus,vt nonnulli concedunt, inter quos etiam eſt (quod miror) Federicus Commandinus præſtans Geometra: quod eſt abſurdum, & ab Euclidis inſtituto alienum, cùm partes appellárit numerum numeri, minorem maioris, cùm minor non metitur maiorem. Quod etiam ex definitione 20. Solis luce clarius conſtat, vbi numeros proportionales docuit eſſe, cùm primus ſecundi, & tertius quarti æquè multiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes, &c. Nam ſi exiſtimaret, maiorem numerum minoris partes eſſe, ſatis fuiſſet dicere, cùm primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt, vel eædem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendiſſet,vt manifeſtum eſt: quare reliqua omnia verba definitionis ſuperuacanea eſſent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 15

SI ſint quotcunque numeri,& alij illis æquales multitudine,qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

A..... D.....
B..... E.....
C.... F...
G..... H.....

SINT quotcunque numeri A,B,C, & alij totidem D,E,F, ſitque vt A,ad B, ita D,ad E; & vt B, ad C,ita E,ad F. Dico ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D,ad F. Quoniam enim eſt, vt A,ad B,ita D, ad E; [c] erit viciſsim, vt A,ad D, ita B, ad E: Similiterq; eandem ob cauſam, cùm ſit,vt B,ad C,ita E, ad F; erit viciſsim, vt B,ad E,ita C,ad F. Igitur erit vt A,ad D,ita C,ad F; (Cùm enim vtraque proportio A, ad D,& C, ad F, eadem ſit proportioni B,ad E,vt demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt,vt mox oſtendetur.) [d] Ac proinde viciſsim, vt A, ad C,ita D,ad F. [c] 13.ſeptimi. [d] 13.ſeptimi.

QVOD ſi fuerint plures numeri, quàm tres, ita vt ſit etiam quemadmodum C,ad G,ita F,ad H; Dico adhuc eſſe,vt A,ad G,ita D,ad H. Cùm enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris,eſſe vt A,ad C,ita D,ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A,C,G, & alij tres D,F,H, quibini in eadem ratione ſumuntur.Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit vt A,ad G,ita D,ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri,& alij illis æquales multitudine,&c. Quod erat oſtendendum.

A.
B..
C...
G.

D...
E.....
F.....
H...

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt, hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari poſſe in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri.

IDEM verum eſt, ſi loco vnius numeri vnitas aſſumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

LEMMA.

A..... B..... C....
D..... E..... F...

QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem ſunt,inter ſe quoq; ſint eædem, quales ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem oſtenſæ ſunt pro-

portioni B, ad E, siue numeri sint integri, siue fracti; ita demonstrabitur: Propter eandem proportionem, erit B, ipsius E, & tam A, ipsius D, quàm C, ipsius F, æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certè B, ipsum E, & tam A, ipsum D, quàm C, ipsum F, continebit æqualiter, eandemq; insuper partem, vel partes. [a] *Quare numeri A, D, C, F, proportionales sunt, vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod est propositum.*

a 20. defin.

Hoc idem demonstratum fuit ab Euclide libro 5. de proportionibus magnitudinum, propositione 11.

16. ## THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æquè vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, æquè. Dico vicissim vnitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, æquè metiri. Diuiso enim numero B C, in vnitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipsi D, æquales; erit multitudo vnitatum numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, metietur què æquè vnitas A, numerum D, & vnitas B G, ipsum E I, atque vnitas G H, ipsum I K, & vnitas H C, ipsum K F: atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas B G, numeri E I, quæ vnitas G H, numeri I K, & vnitas H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propos. 5. huius libri ostendimus, eadem pars erunt vnitates B G, G H, H C, simul numerorum E I, I K, K F, simul, quæ vnitas B G, numeri E I, hoc est, quæ vnitas A, numeri D. Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus B C, ex vnitatibus B G, G H, H C, compositus, numerum E F, ex numeris E I, I K, K F, compositum æquè metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

A. D.
B. G. H. C E. I. K. F

SCHOLIVM.

Illvd idem, quod Euclides demonstrauit de numeris, propos. 13. ostendit hoc loco seperatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quòd vnitas non est numerus. Quod quidem breuius ita nos demonstrabimus. Quia vnitas A, numerum B C, æquè metitur, atque numerus D, numerum E F; erit vnitas A, eadem pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propos. 9. demonstrauimus, erit vicissim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus B C, numeri E F; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æquè metietur.

Hæc propositio fractis numeris conuenire non potest. Nam si vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur vicissim æquè vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & secundus integer quartum fractum; [b] *sed solùm eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quam secundus ad quartum.*

b 13. septimi.

17. ## THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo numeri mutuò sese multiplicãtes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

DVO numeri A, & B, se mutuò multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse.

Sumpta enim vnitate E; eum A, ipsum B, multiplicans faciat C; [a] erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, vnitates; atque adeò vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æquè metietur. [b] Vicissim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æquè. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D; [c] erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, vnitates; atque adeò vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æquè metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æquè. Æquè igitur numerus A, vtrumque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuò sese multiplicantes fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

a 15. defin.
b 15. septimi.
c 15. defin.

A. D. B. C. E.

SCHOLIVM.

In numeris fractis hæc propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicãs B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque est D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum.

A. 2/3. B. 4 1/7. D. 3 1/7. C. 3 1/7.

POTEST

Potest hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

Si duo numeri se mutuò multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

Multiplicet enim A, ipsum B, faciatq; C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam vt prius, cùm A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æquè metiri. At verò si numerus B, ipsum A, multiplicet, etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æquè metitur. Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A; quandoquidem ipsum numerus A, æquè metitur, atque vnitas E, ipsum B.

E.
A... B....
C.....

[a] 15. defin.

Quod si numeri A, & B, sint fracti ambo, vel vnus eorum, demonstrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex definit. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At si B, multiplicet A, erit ex eadem definitione 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 17. 18

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

F.
A...
B.. C....
D..... E.....

Numerus enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim vnitate F; [a] erit D, ex B, compositus toties, quoties vnitas F, est in A: similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem vnitas F, est in eodem A: Atque adeò B, ipsum D, & C, ipsum E, æquè metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit; [b] Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, [c] & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 15. defin. [b] 20. defin. [c] 13. septimi.

SCHOLIVM.

Si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex definitione 15. tam D, ad B, quàm E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde ex lemmate propositionis 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 19.

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

A.... B.....
C...
D..... E.....

Numeri enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cùm enim ex A, in C, fiat D; [d] fiet quoque idem D, ex C, in A. Eadem quoque ratione, cùm ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; [e] erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 16. septimi. [e] 17. septimi.

SCHOLIVM.

Liquido constat, eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

Hanc autem propositionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, siue numeri omnes sint integri, siue non; hac ratione.

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quas numeri multiplicati, vel multiplicantes.

A...
B.. C... D....
E..... F..... G.....

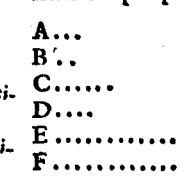
Fiant enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati B, C, D, habent: hoc est, esse, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita E, ad G. Nam cùm ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F; [a] erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoq; vt C, ad D, ita F, ad G. Atq; ita de cæteris.

[a] 17. vel 18. septimi.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 20.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, nume-

rus,æqualis erit ei, qui ex ſecundo,& tertio fit numero. Et ſi,qui ex primo,& quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei,qui ex ſecundo & tertio fit,numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.



SINT quatuor numeri proportionales A,B,C,D, vt quidem A, ad B, ita C,ad D; fiatque E, ex A, primò in D,quartum; & F, ex B, ſecundò in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter ſe eſſe. Fiat enim rurſus G,ex A,in C. Quia igitur ex A,in C,D,fiunt G,E; [a] erit,vt C,ad D; hoc eſt, vt A,ad B,ita G, ad E. Rurſus quia ex A,& B,in C,fiunt G, & F; [b] erit quoque vt idem A,ad B,ita G,ad F. Quare per lemma propoſitionis 14.habebit G, ad E,& F, eandem proportionem; eam videlicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex iis, quæ ad defin.20. ſcripſimus.

a 17. ſeptimi.

b 18.ſeptimi.

SED iam ſit E,ex A,primò in D,quartum genitus, æqualis ipſi F,producto ex B, ſecundò in C, tertium. Dico quatuor numeros A,B,C,D, proportionales eſſe,vt quidem A,ad B,ita C,ad D. Fiat enim rurſus G,ex A,in C. Quia ergo ex A,in C,D, fiunt G,E; [c] erit vt C,ad D,ita G,ad E, vel ad F, ipſi E,æqualem. Habet enim G,ad æquales E,F, eandem rationem, vt ad definitionem 20.docuimus. Rurſus quoniam ex A,& B,in C,fiunt G,& F; [d] erit quoque,vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A,ad B,& C,ad D,cùm eædem ſint proportioni G,ad F,eædem inter ſe erunt, per lemma propoſit.14. Ac proinde erit, vt A,ad B,ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint,&c. Quod erat oſtendendum.

c 17. ſeptimi.

d 18. ſeptimi.

SCHOLIVM.

LVCE clarius eſt, eandem demonſtrationem huius propoſitionis locum habere in numeris fractis, ſiue omnes fracti ſint, ſiue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum,tam in numeris fractis, quàm in integris.

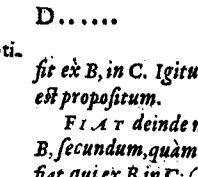
SI duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis, æquales inter ſe erunt.

ITA enim oſtenſum eſt numerum E,qui fit ex A, antecedente in D,conſequentem, æqualem eſſe numero F,qui procreatur ex B,conſequente in C,antecedentem.

SED & ſequens theorema tam in fractis numeris,quàm in integris facilè ex hac propoſitione decimanona demonſtrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit,numerus, maior erit eo,qui ex ſecundo & tertio fit,numero: Et ſi,qui ex primo & quarto fit,numerus,maior fuerit eo,qui ex ſecundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad ſecundum,quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A,ad B, ſecundum, quàm C,tertij ad D,quartum. Dico numerum ex A,in D,procreatum, eſſe maiorem eo, qui fit ex B,in C. Nam ſi intelligatur eſſe E,ad B, vt C, ad D; (ſiue E, numerus integer ſit, ſiue fractus; ſiue integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad propoſ.19.lib.9.oſtendemus, ſi numerus ex B,in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A,ad B,quàm E,ad B: ac proinde A,maior erit,quàm E. Quare maior numerus fiet ex A,in D, quàm ex E, in eundem D: [a] At qui fit ex E, in D, æqualis eſt ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A,in D, genitus, maior erit,quàm numerus ex B,in C, procreatus. Quod eſt propoſitum.

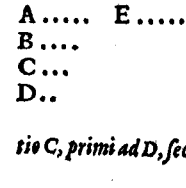


a 19. ſeptimi.

FIAT deinde maior numerus ex A, in D,quàm ex B,in C. Dico maiorem proportionem eſſe A,primi ad B, ſecundum,quàm C,tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat,qui ex B,in C; (ſiue E,numerus ſit integer,ſiue fractus,aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A,quàm E. Quare maior erit proportio A,ad B, quàm E, ad B: [b] At ita eſt E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A,ad B, quàm C, ad D. Quod eſt propoſitum.

b 19. ſeptimi.

QVOD ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus,minor fuerit eo,qui ex ſecundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad ſecundum,quàm tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonſtratio erit, ſi modò vocē,maioris, mutes in vocē,minoris. Vt in hoc appoſito exemplo apparet. Quod tamē ita etiā oſtendi poteſt. Quoniam minor eſt proportio A,ad B,quàm C,ad D: hoc eſt,maior eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, q̄ A, tertij, ad B, quartum; maior fiet numerus ex C,primo in B,quartum: ſiue ex B



ex B,in C,quàm ex D, ſecundo in A, tertium, ſiue ex A,in D,vt demonſtratum iam eſt: hoc eſt,minor numerus fiet ex A,in D,quàm ex B,in C.quod eſt propoſitum. Deinde ſi minor numerus fiat ex A,in D,quàm ex B, in C; hoc eſt,maior ex B,in C, ſiue ex C,in B,quàm ex A,in D, ſiue ex D, in A; erit maior proportio C,primi ad D, ſecundum,quàm A,tertij ad B,quartum, vt iam eſt demonſtratum: hoc eſt,minor proportio erit A,ad B,quàm C,ad D. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

Si tres numeri proportionales fuerint;qui ſub extremis continetur,æqualis eſt ei, qui à medio efficitur: Et ſi, qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales A,B,C,vt quidem A,ad B,ita B,ad C. Dico numerum qui fit ex A,primo in C,tertium,æqualem eſſe ei,qui ex B,medio procreatur. Sumpto enim D,qui ipſi B, ſit æqualis,erit vt B,ad C; hoc eſt,vt A,ad B,ita D,ad C; numerusq; genitus ex B,in D,æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur. Quia igitur quatuor numeri A,B,D,C,proportionales ſunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei,qui fit ex B, in D; hoc eſt,ei,qui ex B,in ſe producitur.

A.....
B..... D.....
C....

a 19. ſeptimi.

Sed iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium,æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A,B,C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D,æquali ipſi B; erit vt B,ad C,ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B,in ſe; hoc eſt,ei, qui fit ex A,in C. Quoniam igitur numerus,qui fit ex A, primo in C,quartum,æqualis eſt ei,qui fit ex B,ſecundo in D,tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B,D,C,proportionales,vt quidem A,ad B,ita D,ad C,vel B,ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint,&c. Quod demonſtrandum erat.

b 19. ſeptimi.

SCHOLIVM.

Demonstratio hac non variabitur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti,vel partim integri,partim fracti.

Quod ſi maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium,quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; maior erit proportio primi ad ſecundum,quàm ſecundi ad tertium. Item ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertiũ; minor numerus fiet ex primo in tertium,quàm ex ſecundo in ſe. Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium,quàm ex ſecundo in ſe;minor proportio erit primi ad ſecundum,quàm ſecundi ad tertium.Id quod ex ſcholio antecedentis propoſitionis liquet, ſi ſecundo numero ſumatur alius æqualis, vt habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad ſecundum, q̃ tertij ad quartum,aut minor,&c. vt in appoſitis exemplis apparet, etiamſi numeri ſint fracti, vel partim fracti,partim integri.

A.....
B..... D.....
C.....

A....
B..... D.....
C.....

THEOR. 19. PROPOS. 21. 21.

Minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes; maior quidem maiorem, minor verò minorem.

Sint numeri A B, C D, minimi in proportione eadem,quam habent alij duo numeri maiores E,F,ita vt ſit,quemadmodum A B,ad C D,ita E,ad F. Dico A B, C D, æquè metiri ipſos E,F;maiorẽ quidem A B,ipſum maiorem E,at minorem C D,ipſum minorem F: hoc eſt,antecedentem,ipſum antecedentem,& conſequentem,ipſum conſequentem. Cùm enim ſit,vt A B, ad C D, ita E,ad F; [c] erit viciſsim,vt A B, ad E, ita C D, ad F; Atque adeò cùm A B, C D, minores ſint, quàm E, F; [d] erit A B,ipſius E,& C D, ipſius F, eadem pars,vel partes. Partes quidem nequaquã. Diuiſis namque,ſi fieri poteſt, A B, C D,in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F; erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D; Ac propterea A G,ipſius E,& C H,ipſius F,eadem pars. [e] Erit ergo vt A G,ad E,ita C H, ad F; *f* & viciſsim, vt A G, ad C H, ita E,ad F, vel A B, ad C D; Ac proinde numeri A G, C H, minores quàm A B, C D,eandem habebunt proportionẽ,quam A B, C D. Quod eſt abſurdum; cùm A B, C D, in ſua proportione ponantur minimi. Non ergo A B,ipſius E,& C D,ipſius F,eædem partes ſunt. Quare eadẽ pars; Ac propterea A B, ipſum E,& C D, ipſum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium,&c. Quod demonſtrandum erat.

A... G.. B
C.. H. D
E.....
F.....

c 13. ſeptimi.
d 20. defin.
e 20. defin.
f 13. ſeptimi.

SCHOLIVM.

Idem hoc verum eſt, ſi quis dicat tres numeros eſſe continuè proportionales, primos q̃ duos eſſe in ſua

A-- G-- B
C...H...D
E.....
F.....

proportione minimos. Hoc enim posito, ostendetur eodem modo primũ metiri secundum; & secundum, tertium, vt in hoc apposito exemplo apparet, vbi tertius numerus secundo æqualis est. Quamuis autẽ dari non possint tres numeri continuè proportionales, quorum duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit vnitas; idem tamen demonstratur in tribus, etiamsi primus ab aduersario non dicatur esse vnitas, vt diximus. Quod idcirco dixerim, vt propositio 12. lib. 9. demonstrari posit, in qua aduersarius cogitur cõcedere, tres numeros esse continuè proportionales, primosq; duos esse in sua proportione minimos, ac proinde primũ metiri secundum, ex hac propos. quod antè negauerat. Sed hoc planius fiet in propos. 12. lib. 9.

PARI ratione & hoc verum est, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eædem sint diuersæ proportiones, metiuntur æquè totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent: primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quàm duo numeri A B, C D, E F, minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sit proportio A B, ad C D, quæ C D, ad E F, siue non; ita vt non possint reperiri alij numeri ipsis A B, C D, E F, minores, quorũ primus ad secundum sit, vt A B, ad C D; & secundus ad tertium, vt C D, ad E F, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis, nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores sunt ipsis A B, C D, quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cùm in minoribus numeris non possint continuari, reperiuntur seorsum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio verò 20. ad 25 in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eisdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt A B, ad C D; & H, ad I, vt C D, ad E F. Dico A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, metiri æquè. Cùm enim

A... K... B C.. L. D E.... M...
G..... H..... I.....

a 13. septimi. sit vt A B, ad C D, ita G, ad H; [a] erit vicissim vt A B, ad G, ita C D, ad H. Eodem modo, cùm sit vt C D, ad E F, ita H, ad I; [b] erit quoque vicissim, vt C D, ad H, ita E F, ad I. [c] Quare A B, ipsius G, & C D, ipsius H, & E F, ipsius I, erit vel eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuisis enim, si fieri potest, A B, C D, E F, in A K, K B; C L, L D; E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in A B, quot in C D, & in E F: atq; adeò A K, ipsius G, & C L, ipsius H, eadem pars. [d] Erit ergo vt A K, ad G, ita C L, ad H; [e] & vicissim vt A K, ad C L, ita G, ad H, vel A B, ad C D. Eodemq; modo erit, vt C L, ad E M, ita C D, ad E F. Quare continuantur numeri A K, C L, E M, in proportionibus numerorum A B, C D, E F, & minores quàm A B, C D, E F. Quod est absurdum, cùm hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo A B, C D, E F, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, æquè metietur. Quod est propositum.

b 13. septimi.

c 20. defin.

d 20. defin.

e 13. septimi.

QVOD si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita vt etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur.

A.. B..... C...
D.... E..... F.....

Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui easdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, æquè metiri. Nam per hanc propos. 21. A, B, cùm sint minimi in proportione A, ad B, æquè metientur ipsos D, E; eademq; ratione B, C, ipsos E, F. Quare cùm A, ipsum D, & C, ipsum F, æquè metiatur, ac B, ipsum E; metientur æquè omnes A, B, C, ipsos D, E, F.

CAETERVM hæc propositio cum suo scholio nullo modo conuenire potest numeris fractis: propterea quòd in numeris fractis dari non possunt minimi numeri in sua proportione, sed quibusuis datis, dari possunt alij minores in infinitum. Atque hoc idem intelligendum est in omnibus aliis propositionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantùm integris sunt intelligendæ. Sic etiam quando de numeris inter se primis agitur, excludendi sunt numeri fracti, cùm hi non possint esse inter se primi, sed quoscunque metiri posit aliqua fractio, tanquam mensura communis. Nam si reducantur ad eandem denominationem, perspicuum est, eos habere vnam particulam, vel plures, eiusdem denominationis, mensuram communem. Aliæ autem omnes propositiones numerorum, in quibus minimi numeri in sua proportione, vel primi non adhibentur, æquè conueniunt & integris numeris, & fractis. quod satis est semel hoc loco monuisse.

19.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadem ratione, sitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico ex æqualitate

A..... H...
B... D....
C..... E.....
G..... F..

qualitate quoque esse vt A, ad C, ita D, ad F. Cùm enim sit vt A, ad B, ita E, ad F; [a] erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione cùm sit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, [b] erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D: Atque adeò numerus genitus ex A, primo in F, quartum, æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertiũ, producto. [c] Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F.

a 19. septimi.
b 19. septimi.
c 19. septimi.

QVOD si fuerint plures numeri, quàm tres, ita vt sit etiam C, ad G, vt H, ad D: Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita H, ad F. Cùm enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM *modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, vt constat.*

QVONIAM *verò Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantùm hic in numeris ostendit; nimirum eum, qui à permutata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius libri: non alienum à nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quædam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris, quàm integris.*

I.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

A..... C...
B.... D..

SIT vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C. Cùm enim sit A, ad B, vt C, ad D, [a] erit vicissim A, ad C, vt B, ad D. Rursus quia est B, ad D, vt A, ad C, [b] erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum.

a 13. septimi.
b 13. septimi.

II.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.

A..... C... B
D.... F.. E

SIT vt A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico & diuidendo esse, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Cùm enim sit vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; [c] erit vicissim, vt totus A B, ad totum D E, ita ablatus C B, ad ablatum F E: Ac proinde vt totus A B, ad totum D E, [d] ita reliquus A C, ad reliquum D F: hoc est, A C, ad D F, vt C B, ad F E. [e] Vicissim ergo erit quoq; A C, ad C B, vt D F, ad F E. Quod est propositum.

c 13. septimi.
d 11. septimi.
e 13. septimi.

EADEM *ratione demonstrabimus Diuisionem rationis conuersam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico per diuisionem rationis conuersam esse quoque, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F. Cùm enim sit, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; erit quoque diuidendo, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E: Et conuertendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F. Quod est propositum.*

SIT deinde, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Dico per diuisionem rationis contrariam, esse quoque, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim est, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit conuertendo, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Ergo diuidendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F. Et conuertendo, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quod est propositum.

III.

SI diuisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.

A..... B... C
D.... E.. F

SIT vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico & componendo esse, vt A G, ad B C, ita D F, ad E F. Cùm enim sit, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; [f] erit vicissim, vt A B, ad D E, ita B C, ad E F; [g] Ac proinde A B, B C, simul ad D E, E F, simul, vt B C, ad E F. [h] Et vicissim A B, B C, simul, hoc est, totus A C, ad B C, vt D E, E F, simul, hoc est, totus D F, ad E F. Quod est propositum.

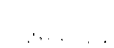
f 13. septimi.
g 12. septimi.
h 13. septimi.

SIMILITER *Compositio rationis conuersa, & contraria ostendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compositionem rationis conuersam esse quoq; vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quia enim est, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit conuertendo, vt B C, ad A B, ita E F, ad D E: Et componendo, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quod est propositum.*

DEINDE *sit rursus vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoq; vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Cùm enim sit, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit conuertendo vt B C, ad A B, ita E F, ad D E: Et componendo ergo, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E: Et conuertendo, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum.*

IIII.

Si compositi numeri proportionales sint: Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.



Sit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuersionem rationis esse quoq; vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. *Cùm enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE;* [a] *erit* vicissim, *vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE;* [b] *Ac proinde* vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF. [c] *Vicissim igitur vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.*

a 13. septimi.
b 11. septimi.
c 13. septimi.

Rvrsvs ex his facilè demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

Sit vt AB, primus ad C, secundum, ita DE, tertius ad F, quartum: Item vt BG, quintus ad C, secundum, ita EH, sextus ad F, quartum. Dico ita esse AG, compositum ex primo & quinto, ad C, secundum, vt est DH, compositus ex tertio & sexto, ad F, quartum.

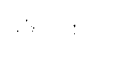
Cùm enim sit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex æqualitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaq; cùm rursus sit, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH: & vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex æqualitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod est propositum.

Eodem modo & hoc Theorema ostendemus, qd ad propos. 24. lib. 5. in magnitudinibus demõstrauimus.

VI.

Si duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt.

Sit vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, esse ad C, vt est reliquus HE, ad F. Cùm enim sit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH. Quia igitur est, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex æqualitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaq; cùm rursus sit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit ex æqualitate vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod est propositum.



Item & hoc demonstrabimus.

VII.

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cũ quinto eandem rationẽ habebit, quã tertius ad quartum cũ sexto.

Sit vt primus A, ad secundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad sextum FH. Dico ita esse A, primum ad BG, compositum ex secundo & quinto, vt est D, tertius ad EH, compositum ex quarto & sexto. Cùm enim sit, vt A, ad BC, ita D, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur est vt BC, ad A, ita EF, ad D; & vt A, ad CG, ita D, ad FH; erit ex æqualitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH: & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH: & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo est, vt A, ad CG, ita D, ad FH; & vt CG, ad BG, ita FH, ad EH; erit ex æqualitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod est propositum.

Denique ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

Si quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem proportionem, quã alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.

Habeant quotcunq; numeri A B, B C, C D, ad eundem E, proportiones, quas totidem F G, G H, H I, habent ad eundem K: Hoc eſt, ſit vt A B, ad E, ita F G, ad K; & vt B C, ad E, ita G H, ad K; & vt C D, ad E, ita H I, ad K. Dico omnes illos ſimul, hoc eſt, ipſum A D, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes ſimul habent, hoc eſt, quam ipſe F I, habet ad K. Cùm enim ſit, vt A B, primus ad E, ſecundũ, ita F G, tertius ad K, quartum: Item vt B C, quintus ad E, ſecundum, ita G H, ſextus ad K, quartum; erit quoq; vt A C, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita F H, tertius cum ſexto, ad K, quartum. Rurſus quia eſt, vt A C, primus ad E, ſecundum, ita F H, tertius ad K, quartum: Item vt C D, quintus ad E, ſecundum, ita H I, ſextus ad K, quartum; erit etiam, vt A D, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita F I, tertius cum ſexto, ad K, quartum: Atq; ita de cæteris, ſi plures fuerint.

A....B.....C.....D
E.....
F..G...H....I
K.....

Sed habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunque A B, B C, C D, proportiones eaſdem, quas idem alius numerus K, ad totidem F G, G H, H I; Hoc eſt, ſit vt E, ad A B, ita K, ad F G; & vt E, ad B C, ita K, ad G H; & vt E, ad C D, ita K, ad H I. Dico eſſe, vt E, ad omnes illos ſimul, nimirum ad A D, ita K, ad hos omnes ſimul, vtpote ad F I. Cùm enim ſit, vt E, primus ad A B, ſecundum, ita K, tertius ad F G, quartum: Item vt E, primus ad B C, quintum, ita K, tertius ad G H, ſextum; erit quoq; vt E, primus ad A C, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad F H, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, vt E, primus ad A C, ſecundum, ita K, tertius ad F H, quartum: Item vt E, primus ad C D, quintum, ita K, tertius ad H I, ſextum; erit etiam, vt E, primus ad A D, ſecũdum cum quinto, ita K, tertius ad F I, quartũ cum ſexto. Atq; ita de reliquis, ſi plures fuerint.

Iam verò, his demonſtratis, oſtendentur nouem vltimæ propoſitiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonſtratæ fuêre; ſi pro magnitudinibus intelligantur numeri ſiue integri, ſiue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. ſunt demonſtrati, aſſumantur iidem modi hoc lib. demonſtrati: Vt opus non ſit eas hic repetere. Satis enim eſt, vt dixi, ſi propoſitiones illæ quinti lib. in manus ſumantur, & magnitudines intelligantur eſſe numeri, eademq; prorſus demonſtrationes adhibeantur.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 21.

PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omniũ eandem cum eis rationẽ habentiũ.

SINT numeri A, B, inter ſe primi. Dico eos eſſe minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipſi A, & B. Nam ſi non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, ſi fieri poteſt, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresq; idcirco ipſis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi ſunt in proportione A, & B; [a] metietur C, ipſum A, & D, ipſum B, æquè; atque adeò ſecũdùm eundem numerum, qui ſit E, ita vt C, toties metiatur ipſum A, & D, ipſum B, quoties vnitas eſt in E. Itaque cùm vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æquè metiatur; [b] metietur & vicißim æquè vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rurſus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æquè metitur; [c] metietur quoque vicißim æquè vnitas numerum D, & numerus E, numerum B; Atque adeò, cùm idem numerus E, vtrumq; A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis menſura. Quare A, & B, non ſunt primi inter ſe, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & cõtra hypotheſin. Non ſunt igitur alij numeri ipſis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi ſunt. Primi ergo inter ſe numeri minimi ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.....B....
C.....D---
E----

[a] 21. *ſeptimi*
[b] 15. *ſeptimi*
[c] 15. *ſeptimi*

THEOR. 22. PROPOS. 24. 22.

MINIMI numeri omniũ eandem cum eis rationẽ habentiũ, primi inter ſe ſunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipſis proportionem habentium. Dico eos eſſe inter ſe primos; hoc eſt, nullum numerum, præter vnitatem, communi menſura eos metiri. Si enim non ſunt inter ſe primi, ſed habent numerum communem mẽſuram; ſit numerus C, eorum menſura communis, metiaturq; C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas eſt in numero D; At verò ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E. Quia igitur C, toties compoſitus, quot in D, ſunt vnitates, procreat ipſum A; & idem C, toties compoſitus, quot ſunt vnitates in E, producit ipſum B; [d] fit, vt D, & E, ipſum C, multiplicantes, producant A, & B. [e] Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeò, cùm D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habẽtium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

A.....B....
C.....
D----- E----

[d] 9. *prop.*
[e] 18. *ſeptimi*

SCHOLIVM.

Hanc propoſitionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.

SINT quotcunq; numeri inter se primi A, B, C. Dico eos minimos esse in continuatione suarum proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari non possint, quamuis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi sunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, æquè per ea, quæ ad propos. 21. huius libri demonstrauimus; atq; adeò secundùm vnum eundem numerum, qui sit G; ita vt D, toties metiatur ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, quoties vnitas est in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipsum A, æquè metitur; [a] *metietur quoq; vicissim æquè vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademq; ratione idem G, metietur & ipsum B, & ipsum C, æquè, atque vnitas ipsos E, F; Atq; idcirco A, B, C, cùm habeant numerum G, communem mensuram, non erunt inter se primi, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non sunt igitur alij numeri minores ipsis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C; sed ipsi A, B, C, minimi sunt.*

A.....B.....C....
D----E------F---
G-----

a 15. septimi.

IAM verò sint A, B, C, in continuatione suarum proportionum minimi. Dico eos primos esse inter se. Si enim non sunt inter se primi, metiatur eos communi mensura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipsum A, quoties vnitas est in D; & ipsum B, toties, quoties vnitas est in E; & ipsum C, toties, quoties vnitas est in F. Quoniam igitur G, toties compositus facit numeros A, B, C, quoties vnitas est in D, E, F; fit vt D, E, F, ipsum G, multiplicantes producant ipsos A, B, C. Quare D, E, F, easdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus; Atq; adeò, cum D, E, F, minores sint quam A, B, C; non erunt A, B, C, minimi in continuatione suarum proportionum. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A, B, C. Quod est propositum.

24. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter se fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

A.....B.....
C.... D----

SINT inter se primi A, & B; & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Si enim non sunt inter se primi B, & C; metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipsum A; [a] metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cùm habeant mensuram communem numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiã metiatur ipsum B, erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demõstrandũ.

a 11. pron.

25. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

A..... B...
C.....
D.....
E---- F----

SINT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturq; ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse. Si enim C, & D, non sunt inter se primi, sit eorum communis mensura numerus E, metiẽs ipsum D, toties, quot vnitates sunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compositus facit ipsum D, quot sunt vnitates in F; [b] fit vt F, ipsum E, multiplicans gignat ipsum D; [c] & contra E, ipsum F, multiplicans producat eundem D. Genitus est autem idem D, ex A, in B. Igitur cùm ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, secundo in B, tertium; [d] erit vt E, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia verò A, & C, primi inter se sunt; & E, ipsum C, potitur metiri; [e] erit E, ad A, primus; Atq; adeò E, & A, cùm sint inter se primi, [f] in sua proportione minimi erunt. [g] Æquè igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipsum B, & A, ipsum F. Quare cum E, metiatur vtrumque B, & C; non erunt B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

b 9. pron.
c 16. septimi
d 19. septimi
e 25. septimi
f 23. septimi
g 21. septimi

26. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

A.... B.....
C.....
D....

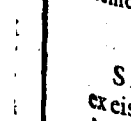
SINT inter se primi A, & B, gignaturq; C, ex A, in se ipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt, [b] erit numerus ex A, in D, hoc

b 26. septimi

in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademq; arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 26. PROPOS. 28. 27.

Si duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.



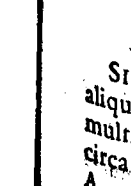
Sit vterque A, & B, ad vtrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim vterq; A, & B, primus sit ad C; [a] erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cum vterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterq; C, & D, primus est ad E; [b] erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterq; ad vtrumque, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 26. septimi

[b] 26. septimi

THEOR. 27. PROPOS. 29. 28.

Si duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.



Sint primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A; in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque esse inter se primos. Cum enim A, B, sint inter se primi, [c] erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus: atque adeò geniti duo C D, primi inter se erunt.

[c] 27. septimi

Rvrsvs, quia A, & B, sunt inter se primi, [d] erit & C, factus ex A, in se, ad B; & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; [e] Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, primi sint ad B, [f] erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus est; [g] erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, [h] erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus: necnon & H, ad A. [i] Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterque A, G, ad vtrumque B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

[d] 27. septimi

[e] 28. septimi

[f] 26. septimi

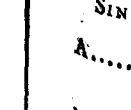
[g] 28. septimi

[h] 26. septimi

[i] 28. septimi

THEOR. 28. PROPOS. 30. 29.

Si duo numeri primi inter se fuerint: Etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si vterque simul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.



Sint inter se primi A B, B C. Dico & vtrumque simul A C, primum esse & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur D, metitur totum A C, & ablatum A B; [k] metietur quoq; reliquum B C. Non igitur primi inter se sunt A B, B C, cum eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodemque modo ad B C, ostendemus eundem esse primum.

[k] 12. pron.

Sed iam vterque A B, B C, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, B C, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur A B, & B C; [l] metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, compositum; Ac proinde A C, A B, non sunt inter se primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Sunt igitur A B, B C, inter se primi. Eodemque argumento ostendemus A B, B C, inter se primos esse, si A C, ad B C, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[l] 10. pron.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſequitur, numerum, qui ex duobus compoſitus ad vnum illorum primus eſt, ad reliquum quoq; primum eſſe. Si enim A C, ad A B, primus eſt, erunt A B, B C, inter ſe primi, per ſecundam partem huius propoſ. Igitur & A C, ad B C, primus erit, per primam partem eiuſdem. Quod eſt propoſitum.

32. THEOR. 29. PROPOS. 31.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerũ, quem non metitur, primus eſt.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum eſſe; hoc eſt, A, & B, eſſe inter ſe primos, licet B, compoſitus ſit. Si enim A, & B, non ſunt inter ſe primi, metiatur eos, præter vnitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quòd A, ponatur non metiri ipſum B. Quia igitur numerũ A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus igitur eſt A, ad B: Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.

A..... B .....
C---

33. THEOR. 30. PROPOS. 32.

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quam metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri ſaltem vnum ipſorum A, & B, ſi non vtrúmq; metitur. Non metiatur enim D, ipſum A; metiatur verò ipſum C, toties, quot ſunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus eſt ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis eſt numero genito ex A, ſecundo in B, tertium; [a] erit vt D, primus ad A, ſecundum; ita B, tertius ad E, quartum. [b] Quia verò primus D, ad A, primus eſt, cum eum non metiatur; [c] erunt D, & A, in ſua proportione minimi. [d] Quare æquè metientur ipſos B, & E; nimirum D, ipſum B, & A, ipſum E; Ac proinde ſi D, non metitur ipſum A, metietur ſaltem ipſum B: Eodemq; modo ſi D, non metiatur ipſum B, metietur ſaltẽ ipſum A. Si duo ergo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demõſtrandum.

A.... B .....
C.....
D... E.....

a 19. ſeptimi
b 31. ſeptimi
c 23. ſeptimi
d 21. ſeptimi

SCHOLIVM.

EODEM *modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.*

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compoſitus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certè compoſitus ad eum ſit: hoc eſt, vel D, & C, compoſiti ſint inter ſe. Dico D, quoq; ad vnum ipſorum A, B, compoſitum eſſe: id eſt, vel D, & A; vel D, & B, eſſe quoque inter ſe compoſitos. Si enim D, ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit vterq; A, & B, ad D, primus. [a] Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cum D, ponatur vel metiri ipſum C, vel certè ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, vel ad B, cum non ſit primus ad vtrumque.

A... B....
C.....
D.....

a 26. ſeptimi.

34. PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compoſitus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, qui ſi primus fuerit, habetur propoſitũ: Si verò compoſitus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compoſitus. Si primus, cum metiatur ipſum B; & B, ipſum A; [a] metietur quoque C, primus ipſum A. Si autem C, compoſitus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia verò numerus non diminuitur infinitè, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atq; adeò ad primum; qui cum metiatur omnes præcedentes, [b] metietur quoq; compoſitum A. Quod eſt propoſitum.

A.....
B..... C...

a 11. pron.
b 11. pron.

ALITER. Quia numerus A, compoſitus eſt; metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico eſſe primum. Si enim B, non eſt primus, metiatur eum, ſi fieri poteſt, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipſum B, & B, ipſum A; [c] metietur quoq; C, minor ipſo B, ipſum A. Quod eſt abſurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo eſt numerus B. Omnem igitur compoſitum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonſtrandum.

A.....
B... C--

c 11. pron.

THEOR.

THEOR. 32. PROPOS. 34. 31.

OMNIS numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

A..... SIT numerus quicunq; A. Dico eum vel eſſe primum, vel certè aliquem primũ eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus ſit, vel compoſitus; ſi quidem A, primus eſt, habetur propoſitum: Si verò compoſitus; [a] metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat oſtendendum. [a] 33. *ſeptimi*

PROBL. 3. PROPOS. 35. 34.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

SINT quotcunque numeri A,B,C, habentes quaſcunque proportiones, ſiue eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C, ſiue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eiſdem proportionibus ſint minimi. Quoniam A,B,C, ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti: Si primi inter ſe ſunt; erunt ipſi in continuatione ſuarum proportionum minimi, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. demonſtrauimus. Si verò non ſunt inter ſe primi, [b] inuenta ſit maxima eorum communis menſura numerus D, qui metiatur ipſos A,B,C, per numeros E,F,G. Dico E,F,G, minimos eſſe in proportionibus numerorum A,B,C. Quòd enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri A,B,C, ſic oſtendetur. Quoniam D, ipſos A,B,C, metitur per E,F,G; [c] fit, vt D, ipſos E,F,G, multiplicans faciat A,B,C. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt E,F,G, quas numeri A,B,C.

A..... B.... C.....
D..
E... F.. G....
H---- I---- K----
L-----

[b] 3. *ſeptimi.*

[c] 9. *pron.*

QVOD verò E,F,G, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſunt minimi, erunt aliqui alij ipſis minores, minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi H, I, K; qui quoniam ipſos A,B,C, metiuntur æquè, vt ad propoſ. 21. huius libri oſtendimus; metiantur eos per numerum L. Quo poſito, [d] fit, vt L, multiplicans numeros H,I,K, producat numeros A,B,C; [e] & viciſsim L, ipſos A,B,C, metiatur per H,I,K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A, & H, ſecundus multiplicans L, tertium facit eundem A; [f] erit, vt E, primus ad H, ſecundum, ita L, tertius ad D, quartum: Eſt autem E, maior quàm H. Igitur & L, maior erit, quàm D; Atque adeó, cum L, ipſos A,B,C, metiatur; non erit D, maxima menſura communis numerorum A,B,C. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis E,F,G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, ſed ipſi E,F,G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat.

[d] 9. *pron.*

[e] 8. *pron.*

[f] 19. *ſeptimi*

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam menſuram quotlibet numerorum, metiri ipſos per numeros, qui minimi ſunt omnium eandem proportionem cum ipſis habentium. Oſtenſum enim eſt, numeros E,F,G, per quos D, maxima menſura numerorum A,B,C, ipſos A,B,C, metitur, minimos eſſe in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademq; eſt in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

A,16. B,24. C,36. D,54. E,81.
I, 8.
F,2, G,3.

EX hiſ facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continuè proportionales. Vt ſi proponantur continuè proportionales A, B,C,D,E, ſiue illi ſint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, ſiue non; reperiemus duos in eadem proportione minimos, ſi per hoc problema ſumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B; nimirum illos, per quos I, maxima eorum cõmunis menſura eos metitur.

A... B..... C.....
D...
E. F.. G...

A.... B.. C.....
D..
E.. F. G...

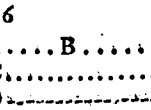
CÆTERVM contingit interdum, vnum numerorum E,F,G, per hanc propoſitionẽ inuentorum eſſe vnitatem; quando ſcilicet D, maxima menſura vni ipſorum A,B,C, æqualis eſt, vt ex his exemplis apparet. Manifeſtum eſt autem, tunc inuentos E,F,G, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, cum minor numerus dari non poſſit, quam vnitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiũtur. Sint primũ dati numeri A, & B, inter ſe primi, ſe ſeq; mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiãtur, perſpicuum eſt. Nam cùm producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; [g] metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipſum C, metitur. Quod autẽ C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiũtur, ſic demõſtrabimus.

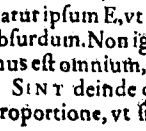
[g] 7. *pron.*



Si C, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum D, ipso C, minorem; metiaturq; A, ipsum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo posito, [a] tam ex A, in E, quàm ex B, in F, & è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, secundo in F, tertium; [b] erit, vt A, primus ad B, secundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter se, [c] & ob id in sua proportione minimi) [d] æquè metiẽtur ipsos F, & E; nimirum A, ipsum F, & B, ipsum E. Quoniam verò A, multiplicans B, & E, facit C, & D; [e] erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cùm B, metiatur ipsum E, vt ostensum est; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipso C; atque adeò C, minimus est omnium, quos metiuntur.

[a] 9. pron. [b] 19. septimi [c] 23. septimi. [d] 21. septimi [e] 17. septimi.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter se. [f] Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt sint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo posito, [g] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, secundo in C, tertium.



Factus ergò sit E. Dico E, hac via procreatum esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifestum est. Nam cum tam A, multiplicatus à D, quàm B, multiplicatus à C, ipsum E, producat; [h] metietur tam A, quàm B, ipsum E. Quod verò E, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non est minimus, metiatur, si fieri potest, A, & B, alium numerum F, ipso E, minorem: metiatur autem A, ipsum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo posito, [i] fiet F, tam ex A, in G, quàm ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, secundo, in H, tertium; [k] erit, vt A, primus ad B, secundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum sint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G; [l] metientur ipsos H, & G, æquè; nimirum C, ipsum H; & D, ipsum G. Quia verò A, multiplicans D, & G, facit E, & F; [m] erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cùm D, metiatur ipsum G, vt ostensum est; metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem; atque adeò E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

[f] 35. septimi. [g] 19. septimi [h] 7. pron. [i] 9. pron. [k] 19. septimi [l] 21. septimi [m] 17. septimi.

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositi C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, esse minimum, quem A, & B, metiuntur.

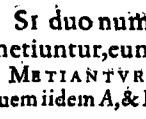
SCHOLIVM.

Hoc autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

35. THEOR. 33. PROPOS. 37.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum CD, sitq; alius numerus E, minimus, quem iidem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum CD, metiri. Si enim E, ipsum CD, non metitur; ablato E, ex CD, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidã minor, quàm E. Relinquat igitur E, ablatus ex CD, quoties potest, numerum, si fieri potest, FD, minorem se, ita vt E, metiatur ablatum CF. Quoniam igitur tam A, quàm B, ipsum E, metitur, & E, ipsum CF; [n] metietur quoque tam A, quàm B, ipsum CF. Itaq; A, & B, cum metiantur totum CD, & ablatum CF; [o] metiẽtur & reliquum ED. Est autẽ FD, minor quàm E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare E, ipsum CD, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiãtur, &c. Quod erat demonstrandum.

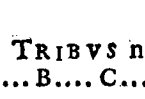


[n] 11. pron. [o] 12. pron.

36. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. [p] Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut nõ metietur. Metiatur primũ C, ipsum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipsum D, metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoq; esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem.



[p] 36. septimi

Quo

Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipſum E, minorem quàm D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Immò, cum A, & B, metiantur ipſum E; & D, ſit minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur; [a] metietur quoq; D, ipſum E, maior minorem. Quod eſt abſurdum. [a 37. ſeptimi]

SED iam C, non metiatur ipſum D, inuentum. [b] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, eſſe minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita oſtendetur. Cùm A, & B, metiantur ipſum D, & D, ipſum E; [c] metientur quoque A, & B, ipſum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipſum E, metiuntur. Quod autem E, ſit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, B, C, alium numerum F, ipſo E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipſum F, metiuntur; [d] metietur quoq; eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeò cùm C, & D, metiantur ipſum F, minorem, quàm E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Immo cum C, & D, metiantur ipſum F; [e] metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur iidem C, & D; maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipſo E, minorem metientur; ſed ipſe E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

A.. B... C....
D.....
E.....
F--------

[b 36. ſeptimi] [c 11. pron.] [d 37. ſeptimi] [e 37. ſeptimi]

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demõſtrationis parte, ex eo, quòd A, B, C, ponebantur metiri ipſum F, oſtenſum eſt, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non ſecus ac propoſ. 37. huius lib. oſtendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunq; numerum D E, ſitq; F, minimus, quem iidem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipſum D E, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partem D G, relinquatq; numerum G E, ſe minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipſum F, metiuntur, & F, ipſum D G; [a] metientur quoque A, B, C, eundem D G; Ac proinde, cùm & totum D E, ponantur metiri; [b] metientur & reliquum G E, ipſo F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Metitur igitur F, ipſum D E.

A.. B... C.....
D.....G---E
F.....

[a 11. pron.] [b 12. pron.]

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quàm tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primùm minimus, quem tres metiantur. Si quinq;, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

THEOR. 34. PROPOS. 39. 37.

SI numerum quiſpiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

A.....
B.... C...

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B, ipſum A, toties, quot vnitates ſunt in numero C. Quia igitur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æquè metitur; [a] & vicissim vnitas æquè ipſum B, & C, ipſum A, metietur; atq; adeò eadem pars erit vnitas ipſius B, quæ C, ipſius A: Eſt autem vnitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, vt ad defin. 2. huius libri docuimus. Igitur & C, pars erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.

[a 15. ſeptimi.]

THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.

A.....
B... C.....

HABEAT numerus A, partem B, à qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nam cùm B, pars denominetur à C; ſit autem & vnitas pars ipſius C, ab eodé C, denominata; metietur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æquè. [b] Vicissim ergo & vnitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b 15. ſeptimi]

39. PROBL. 6. PROPOS. 41.

NVMERVM reperire, qui minimus cùm sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A,B,C; Inueniendusq; sit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A,B,C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D,E,F; a minimusq; quem D, E,F, metiuntur, numerus G. Dico G, esse minimũ, qui habeat datas partes A,B,C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cùm D, E,F, ipsum G, metiantur, b habebit G, partes à D,E,F, denominatas, hoc est, partes A,B,C, cùm hæ denominentur à D,E,F. Quòd verò G, sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest, H, ipso G, minor easdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, c metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A,B,C, denominati; Atq; adeò, cùm H, minor sit quàm G, nõ erit G, minimus, quem metiuntur D,E,F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quàm G, datas partes A,B,C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cùm sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

a 38. *septimi*

b 39. *septimi*

c 40. *septimi*

D.. A, Secunda
E... B, Tertia
F.... C, Quarta
G.....
H----------

SCHOLIVM.

QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I,K,L, datæ partes A,B,C, ipsius G, denominatæ scilicet à D,E,F. Cùm enim D,E,F, ipsum G, metiantur per I,K, L; metietur aquè vnitas ipsos I,K,L, & numeri D,E,F, ipsum G. a Vicissim ergo metietur quoq; vnitas ipsos D,E,F, & numeri I,K,L, ipsum G; atq; adeò vnitas ipsorum D,E,F, eadem pars erit, quæ numeri I,K,L, ipsius G. Cùm ergo vnitas sit pars ipsorum D,E,F, ab ipsis denominata; erunt & I,K,L, ipsius G, partes denominatæ à D,E,F.

a 15. septimi.

G.....

EX his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimũ metiuntur D,E,F, minimũ esse, q. habeat partes A,B,C, cuiusmodi sunt I,K,L, à metientib numeris D,E,F. denominatas.

IAM verò, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A,B,C, denominatas à D, E, F; sit illius duplus, numerus. Hic triplus verò I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A,B,C, à numeris D,E,F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita ut neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes. sed ipsi soli H,I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes continentes. Quod enim H & I, &c. partes A,B,C, habeant, denominatas scilicet à D,E,F, ita ostendemus. Quoniam b E,F, metiuntur ipsum G per constructionem, & G, ipsos H,I, & reliquos multiplices ipsius G. b metientur quoq; D,E,F, eosdem H,I, & reliquos multiplices ipsius G. c Quare H,I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeris D,E,F, denominatas, quales ponuntur partes A,B,C.

A,D.. B,E... C,F....
K----------M------L
N----------P------O

b 11. pron.

c 39. septi.

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quàm G, minimus, et minor quàm H duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A,B,C; d metientur ipsum numeri D,E,F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D,E,F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem & G, ablatum K M, sibi æqualem. e Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A,B,C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens.

d 40. septimi.

e 12. pron.

NON aliter ostendemus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, videlicet N O, ipso prior, qui videlicet maior sit, quàm H, duplus, minor verò quàm I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur N O, partes habet A,B,C, f metientur ipsum numeri D,E,F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D,E,F, metiuntur, eundem N O per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo æqualem. g Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H; & I, cadens partes habet A,B,C, datas; Ac propterea I, tertius est illas partes habens. Eademq; ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

f 40. septimi.

g 12. pron.

HVC quoque referri potest sequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cùm sit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT

Sint datæ partes A,B,C; inueniendus q3 sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A,B,C, numeri denominati D,E,F; Fiat q3 G ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facilè demonstratur. Nam cùm ex D, in G, fiat H; erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Est autem vnitas pars ipsius D denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; At q3 adeò H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: At q3 adeò A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cùm F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partiu, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; [a] Atq; adeò ex D, in K, fiet I. Eadē ratione ex E, in L, fiet K; & [a] 15. defin.

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D.. E.... F....
G.....
H.....
. Vnitas
I.....
K.....
L.....
M....

L, ex F, in M. Itaq; cùm D, ipsos G, & K, multiplicãs faciat H, & I; [b] erit, vt H, ad I, ita, G, ad K. Eadē ratione, cùm ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cùm ex F, in vnitatē, & M, fiant F, & L; [b] 15. septimi.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus minor, quàm H, habet partes A,B,C, ordine prædicto, sed ipse H, minimus est. Quod est propositum.

Si verò plures fuerint partes, quàm tres, eadem prorsus est via tenenda ac demonstratio. Vt si numeri 2. 3. 4. 5. 6. sint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam; & hac partem à 3. denominatam; & hac aliam à 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem à 6. denominatam, vt manifestum est.

Quod si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet secundum, tertium, quartum, &c. qui easdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H. Eadem q3 est ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI fuerint quotcunq; numeri deinceps proportionales, extremi verò ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omniũ eandem cum eis rationẽ habentiũ.



VMERORVM deinceps proportionalium quotcunq; A,B,C,D, extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omniũ eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non sunt minimi, erunt alij ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E,F,G,H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunque numeri sunt A,B,C,D, & alij illis æquales multitudine E,F,G,H, qui bini sumuntur, & in eadem

A.....
B.....
C.....
D.....
E---
F-----
G-------
H---------

rationę, [a] erit,exæqualitate,vt A,ad D,ita E,ad H: [b] Sunt autem A, & D, in ſua proportione minimi,quòd inter ſe primi eſſe ponantur. [c] Igitur tam A,ipſum E, quàm D, ipſum H, æquè metietur,maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis A,B,C,D, ſunt in eadem cum eis ratione,ſed ipſimet minimi ſunt; Ac propterea,ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales,&c. Quod erat demonſtrandum.

a 14.ſeptimi
b 23.ſeptimi
c 21.ſeptimi

SCHOLIVM.

A.... E---
B..... F-----
C..... G------
D..... H--------

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, numeros A,B,C,D, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, ſi extremi A, & D, inter ſe primi ſint,ſiue A,B,C,D, ſint continuè proportionales,vt vult Euclides,ſiue non. Vt hoc exemplum oſtendit, in quo proportiones omnes diuerſæ ſunt,quemadmodum in ſuperiori eadem ſemper proportio reperitur.

2. PROBL. I. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iuſſerit quiſpiam,in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatq; inuenire primùm tres numeros minimos in proportione data A,ad B. Multiplicans A,ſeipſum,& numerum B,faciat C,& D. Deinde B, multiplicans ſeipſum faciat E. Dico C,D,E, eſſe tres minimos in proportione A,ad B. Quòd enim proportionales ſint in data proportione A,ad B,hoc eſt,ſit vt C, ad D,ita D,ad E,ſic oſtendemus. Cùm ex A,in A,& B,fiant C,& D; [d] erit vt A,ad B,ita C,ad D. Rurſus cùm ex B,in A, & B,fiant D,& E; [e] erit quoque,vt A,ad B,ita D,ad E. Quare proportionales ſunt C,D,E,continuè in proportione data A, ad B. Quod verò in eadem ratione ſint minimi, ita demonſtrabitur. Quoniam extremi C,& E,procreati ſunt ex A,& B,in ſe ipſos; [f] ſunt autē A,& B, inter ſe primi, quòd minimi ſint in ſua proportione; [g] Erunt & C,E,extremi,inter ſe primi. [h] Quare C,D,E, minimi ſunt in ratione A,ad B.

A.. B...
C....D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K,16.L,24.M,36.N,54.O,81.

d 17.ſeptimi
e 17. ſeptimi
f 24.ſeptimi
g 29.ſeptimi
h 1.octaui.

IAM verò ex A,in tres inuentos C,D,E,fiant F,G,H,& ex B,in vltimum E,fiat I. Dico quatuor numeros F,G,H,I, minimos eſſe in eadem ratione data A,ad B. Quod enim proportionales ſint in ratione A,ad B,ita demonſtrabimus. Quoniam A, multiplicans ipſos C, D, E, fecit F,G,H, habebunt,ex iis, quæ ad propoſ.18.lib. 7 oſtendimus, numeri F,G,H, eaſdem proportiones, quas C,D, E,hoc eſt,quam habet A, ad B. Rurſus quia A, & B,ipſum E, multiplicantes, fecerunt H,& I; [i] erit quoque,vt A,ad B,ita H, ad I. Sunt igitur F,G,H,I, continuè proportionales in data proportione A,ad B. Quòd autem in data ratione minimi ſint,ita perſpicuum fiet. [k] Quoniam A,& B, minimi in ſua proportione, ſunt inter ſe primi; factiq; ſunt C,& E,ex A,& B,in ſe ipſos; Item procreati ſunt F,& I,ex A,B,in C,E; nimirum F, ex A,in C,& I,ex B,in E; [l] erunt & F,I,extremi,inter ſe primi. [m] Quare F,G,H,I,in ſua proportione, quæ eſt A,ad B, minimi ſunt.

i 18. ſeptimi
k 24.ſeptimi
l 29.ſeptimi
m 1.octaui.

NON aliter,ſi ex A,in quatuor inuentos F,G,H,I,fiant K,L,M,N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K,L,M,N,O, quinque numeri minimi in data ratione A,ad B: Eademq; ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos,&c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM. I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E,D,C, & ex multiplicatione A,in C. Fiant enim I,H,G,ex B,in E,D,C: & F, ex A,in C. Quo peracto, [a] numeri F,G, eandem rationem habebunt, quam A,B; quòd A,B, multiplicantes C, ipſos F,G, fecerint: Item & G,H,I,ex iis, quæ ad propoſ.18,huius lib. demonſtrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C,D,E, hoc eſt, in qua A,B; quòd B, multiplicans C,D,E, ipſos G,H,I, fecerit. Sunt ergo F,G,H,I, in eadem ratione, in qua A,B. Quod verò minimi ſint, oſtendetur, vt prius.

a 18.ſeptimi.

A.. B...
C....D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K,16. L,24. M,36. N,54. O,81.

NON aliter ſi ex B, in quatuor inuentos I,H,G,F, fiant O, N, M, L, & ex A,in F, fiat K; erunt K,L,M,N,O, quinque numeri minimi in data ratione A,ad B. Eademq; ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Itaq; ſiue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; ſiue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur ſemper plures numeri in eadem ratione data A,ad B, minimi. Demonſtrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A,in C,D,E, & ex B,in E: Nos autem eoſdem oſtendimus procreari ex B,in E; D, C, & ex A,in C.

COROLLARIVM I.

HINC fit, ſi tres numeri minimi ſint continuè proportionales, extremos quadratos eſſe; ſi autem

si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoq; æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cùm quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorũ A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quàm numerus I, ex multiplicatione mutua triũ numerorum æqualium B, B, B, sit procreatus, ac propterea vterque sit æqualiter æqualis æqualiter; ipsi, ex defin. 19. cubi erunt.

Sic etiam, si fuerint quinq; numeri minimi proportionales continuè; erunt extremi eorũ quadrati quadratorum; Et sic si fuerint plures, erunt eorũ extremi, numeri aly sub alys denominationibus, quæ in Algebra solent explicari. Hæc autẽ omnia manifesta sunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

Neque verò dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem esse in tribus, quatuórve numeris minimis continuè proportionalibus inuentis arte in hac propos. tradita, non autem in quibusuis tribus, quatuórve numeris minimis continuè proportionalibus vtcunq; propositis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorsus sunt iis, qui per hanc propos. inueniuntur. Si enim illi dati minores essent inuentis, non essent inuenti, minimi, quod est contra hanc propos. Si verò dati, maiores essent inuentis, non essent illi dati, minimi. quod est contra hypothesim. Quod clarissimè ita fiet perspicuum. Dati sint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales: sumptisq; duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex scholio propos. 35. lib. 7. inuentantur per hanc propos ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam necessariò A, ipsi F, æqualis erit; atque ita, cùm sit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoq; permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde si A, æqualis est ipsi F, erit & B, ipsi G, æqualis: Eademq; ratione ostendemus C, æqualem esse ipsi H: ideoq; tres A, B, C, tribus F, G, H, singuli singulis, æquales erunt. Eademq; ratio est de quatuor, aut pluribus. Quod si A, dicatur minor, quàm F, ostendemus eodem argumento & B, C, minores esse, quàm G, H. Quare F, G, H, minimi non sunt. quod est absurdum, & contra hanc propos. Si verò A, concedatur maior, quàm F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quàm G, H: atq; idcirco A, B, C, minimi non sunt. quod est contra hypothesim. Cùm ergo A, minor non sit, aut maior, quàm F; æqualis omnino erit; ideoq; vt ostensum est, & B, C, ipsis G, H, æquales erunt. Quod est propositum.

A B C
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H. 9.

COROLLARIVM II.

Perspicvvm quoq; est, extremos numeros proportionaliũ quotcunq; secundùm hanc propositionem inuentorum in data ratione minimorũ, inter se primos esse. Quod quidẽ facilè ostendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 29 lib. 7. quemadmodum id demonstratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

Constat etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunq; minimorum in eadem ratione; quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in altos quosdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, vel ex B, in F, G, H; vt ex demonstratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

Quoniam verò tam numeri A, C, F, K, quàm B, E, I, O, ex constructione, continuè proportionales sunt ab vnitate, quòd illorum quidem proportiones à numero A, horum verò à B, denominentur, vt clarius demonstrabitur propos. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunq; minimorum continuè proportionalium sint vltimi tot continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris data ratione denominantur, quot sunt propositi minimi continuè proportionales. Ita enim in superiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium minimorũ continuè proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At verò F, & I, extremos quatuor continuè proportionalium, esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continuè proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet inuenire quotcunq; integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, quippe quæ ab vnitate incipiat) continuè proportionales; id facilè hac via consequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continuè proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri mi-

nimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continuè proportionalium erit primus continuè proportionalium inueniendorum, qui si per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur secundus, & si hic rursum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & sic deinceps. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 2. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continuè proportionales in proportione dupla, quæ denominatur à 2. hoc modo 1.2.4.8.16.32.64.128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128.192.288.432.648.972.1458.2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademq; de reliquis est ratio.

Boetivs autem, & alij regulam hanc ita explicant, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continuè ab vnitate multiplices secundùm denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continuè proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab vnitate dupli, vt primi, qui nimirum denominantur à denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, à 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erunt quinq; numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinq; numerorũ in proportione sesquiquinta, vt hic apparet; 625. 750. 900. 1080. 1296. Atq; ita de cæteris. Porrò hac arte nõ possunt inueniri (quod mirum videri possit) plures numeri continuè proportionales, quàm propositi sunt. Neque enim post 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam, sicut neq; in priori exemplo post 2187 alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionem sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quòd extremi hac arte inuenti sint inter se primi, vt ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non possit esse ad alium quempiam numerum, vt primus ad secundum, veluti propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.

3. THEOR. 2. PROPOS. 3.

Si sint quotcunq; numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; Illorum extremi sunt inter se primi.

Sint numeri A,B,C,D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inueniantur enim duo E,F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis, tres minimi G,H,I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K,L,M,N, æqualis sit multitudini A,B,C,D. Quoniam igitur A,B,C,D, minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K,L,M,N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Id quod nos Geometricè demonstrauimus ad finem coroll. 1. superioris propos. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi. Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 12. C, 18. D 27.
E, 2. F. 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

SCHOLIVM.

Hæc propositio intelligenda est de numeris minimis continuè proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A,B,C,D, non essent proportionales continuè, inueniri non possent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immò si diuersæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in sua proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6.10.13.18, minimi in continuatione suarum proportionum, cùm tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc Theorema primi est conuersum, quoad numeros continuè proportionales. Etenim numeri quotcunque continuè proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. Et vicissim, numeri extremi quotcunque minimorum continuè proportionalium, inter se primi sunt, velut hic demonstratum est. At verò primum theorema, prout spectat ad numeros non continuè proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continuè proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, vt ex scholio propos. 1. huius libri liquet; Tamen non semper è contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continuè proportionalium, inter se primi sunt, vt manifestum est in exemplo nuper prolato 6. 10. 13. 18.

4. PROBL. 2. PROPOS. 4.

Rationibvs datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

Sint primùm datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres

re tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. [a] Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quòd enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æquè metiuntur ipsos F, & E; hoc est, per eundem numerum; metiantur p H. Quo posito, [b] A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. [c] Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione cùm C, & D, æquè metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quòd autē minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; [d] ipsi æquè metientur I, & K, in eadē proportione existentes; nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æquè metientur K, & L; nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentē. Quare cùm B, & C, ipsum K, metiantur; [e] metietur eundem K, numerus E, minimus, quē B, & C, metiuntur, minorē maior. Quod est absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I----- K----- L----

[a] 36. sept.
[b] 9. pron.
[c] 18. sept.
[d] 21. sept.
[e] 37. sept.

Sint deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. [f] Inuento rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primùm; Et quoties E, ipsum I, metitur, toties F, metiatur ipsum K. Dico H, G, I, K, minimos esse in datis rationibus. Quòd enim sint in datis rationibus deinceps proportionales, constat. Cùm enim A, & B, ipsos H, & G, æquè metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quòd tam C, & D, ipsos G, & I, quàm E, & F, ipsos I, & K, metiantur æquè. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales sunt in datis rationibus. Quòd autem sint minimi, sic ostendemus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; [g] ipsi metientur æquè L, & M, eandem habētes rationem; nimirum B, consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æquè metientur M, & N; nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cùm B, & C, ipsum M, metiantur; [h] metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L---- M------ N---- O-----

[f] 36. sept.
[g] 21. sept.
[h] 37. sept.

Sed iam E, non metiatur ipsum I. [i] Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L; & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis. Cùm enim H, G, I, ipsos M, L, K, æquè metiantur; erit vt suprà, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K: Est autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D; quòd & A, B, ipsos H, G; & C, D, ipsos G, I, metiantur æquè. Igitur vt A, ad B, ita M, ad L; & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoq; est K, ad N, cùm E, F, æquè ipsos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdē rationibus. Si namq; nō sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniā ergo A, B, in sua proportione minimi sunt; [k] ipsi æquè metiētur O, P, in eadem ratione existentes; nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æquè, videlicet antecedens C, antecedentem P; Atque adeo cùm B, & C, ipsum P, metiantur; [l] metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia verò ostensum est, esse vt G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcircò, cùm metiatur G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q; [m] quòd E, F, in sua proportione minimi æquè metiantur Q, R, eiusdem rationis; nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cùm metiantur I, E, ipsum Q; [n] metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores, quàm M, L, K, N; propterea q; ipsi M, L, K, N, minimi sunt.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 50. K, 30. N, 105. O, 70.

[i] 36. sept.
[k] 21. sept.
[l] 37. sept.
[m] 21. sept.
[n] 37. sept.

Quod si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cū quarta posteriori agendum, vt nuper cum tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primùm M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N,

metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si verò S, ipsum N, non metiatur: [a] sumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, ipsum P; & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties verò S, eundem O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, vel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis, quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

a 36. septimi.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

SCHOLIVM.

Si omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris non minimis, absoluemus nihilo minus problema propositum; sed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestum est.

Differt autem hoc problema ab eo, quod propos. 35. lib. 7. demonstratum est, quòd hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & consequēs, licèt proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.

Porro inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, si ij multiplicentur à quemcunque numerum eundem, procreabūtur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus.

5. THEOR. 3. PROPOS. 5.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunq; C, D; posterioris verò E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus; nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuò multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [b] erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit G, ad B, vt D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. [c] Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur.

b 17. septimi.
c 27. defin.

A, 24. B, 48. G, 18.
C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cùm enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G; [d] erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cùm F, multiplicans D, & E, faciat G, & B; erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. [e] Cùm ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B; Eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

d 17. septimi.
e 27. defin.

A, 24. B, 48. G, 96.
C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quisquam vllum metietur.

SINT continuè proportionales A, B, C, D, E; & A, primus nō metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quòd enim nullus proximè insequentem metiatur, manifestum est. Nam cùm sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, verò ipsum B, non metiatur; neque B, ipsum C, neque C, ipsum D, neque D, ipsum E, metietur. Quòd verò nec alius quisquam illorū vllum metiatur, sic demonstrabimus. [f] Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B; erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia verò est vt A, ad B, ita F, ad G; nō metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, aliàs F, ipsum G, metiretur, cùm vnitas omnem numerum metiatur. [g] Quare cùm F, & H, sint inter se primi, & F, non sit vnitas; non metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quòd nec B, tertium à se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quòd si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demonstrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

f 2. octaui.
g 3. octaui.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Si maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam vllius multiplex erit.

SINT enim continuè proportionales A,B,C,D,E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neq3 alium quenquam illorum vllius esse multiplicem. Quòd enim nullus proximè insequentis multiplex sit, constat. Nam cùm sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

E: non sit autē A, ipsius B, multiplex; neq3 B, ipsius C; neq3 C, ipsius D; neq3 D, ipsius E, multiplex erit. Quòd autē neque alius quisquam illorum vllius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam D, ipsius E, non est multiplex: non metietur è contrario E, ipsum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunq3 E, D, C, B, A; (Nam cùm sit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus secundum D, non metitur, [a] neq3 alius quisquam illorum vllum metietur. Quare è contrario, si maiores ad minores referantur, neq3 quisquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. a 6. octaui.

SED & ex his sequens theorema demonstrabimus.

Si sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus verò secundum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D,E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet sequentium metiri. Quòd enim quilibet proximè insequentem metiatur, perspicuum est. Nam cùm sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autē A, ipsum B; & B, ipsum

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

C; & C, ipsum D; & D, ipsum E, metietur. Quòd autem quilibet illorum quemlibet sequētium metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur. Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D; [b] metietur quoq3 B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur; [c] metietur quoque B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis. b 11. pron. c 11. pron.

SED iam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cùm enim sit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: sit autem A, ipsius B, multiplex; erit & B,

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

ipsius C; & C, ipsius D; & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proximè insequētis multiplex est. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex; metietur è contrario E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem, E, D, C, B, A, continuè proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metietur, vt demonstratum est; Ac propterea è contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.

CONVERTEMVS etiam hanc propositionē 6. & theorema, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autē, vel alius quisquam nullum à secundo metiatur; neque primus secundū metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius à secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A,B,C,D,E; & primus A, vel alius quisq3 nullum à secundo B, metiatur. Dico neq3 A, primum, metiri B, secūdum. Si enim A, primus, secundum B, dicatur metiri: metietur quoq3, per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunq3 alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cùm neq3 primus, neq3 alius quisquam vllum à secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

IAM verò A, primus, vel alius quisquam nullius à secundo B, sit multiplex. Dico neq3 A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex

A, 81. D, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

esse dicatur B, secundi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neq3 enim primus, neque alius quisquam vllius à secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autē extremum metiatur, is etiam metietur secundum. 7.

SINT deinceps proportionales A,B,C,D,E; & A, primus extremũ E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, non dicatur metiri: *a* neq; alius quisquam vllum metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundum metietur; Atque idcircò, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

a 6. octaui. A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

SCHOLIVM.

VT theorema, quod secundo loco in scholio præcedentis propositionis demonstrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc propositionem hoc modo.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autẽ, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet à secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex; neque alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 6. & 1. theoremate scholij præcedentis. quod est contra hypothesin.

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

Cadant inter duos numeros A,B, medij proportionales continuè C,D; sitque vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continuè proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B.

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

b 3. octaui.

Sumptis enim totidem numeris G,H,I,K, minimis in ratione A, ad C, quot sunt numeri A,C,D,B; erit ex æquo vt A, ad B, atque adeò vt E, ad F, ita G, ad K. *b* Quare cùm G, & K, inter se primi sint, quippe qui extremi sint minimorum numerorum; *c* ac propterea in sua proportione minimi; *d* æquè metietur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G,H,I,K, numeros E,L,M,F æquè metiantur, singuli singulos. Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quẽ metiũtur numeros E,L,M,F, ipsos E,L,M,F, producũnt eisdẽ rationibus erũt E,L,M,F, in quibus G,H,I,K, vt ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus. At G,H,I,K, sunt continuè proportionales. Igitur & E,L,M,F, continuè proportionales sunt: Atque idcircò, cùm multitudo E,L,M,F, æqualis sit multitudini A,C,D,B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.

c 23. septimi.
d 21. septimi.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

e 9. pron.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

SCHOLIVM.

NON *solùm ex demonstratione constat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B, verùm etiam eandem esse proportionem numerorum E,L,M,F, quæ est numerorum A,C,D,B. Ostensum enim est E,L,M,F, in eadem esse proportione, in qua G,H,I,K: Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A,C,D,B. Igitur & E,L,M,F, eandem habent, quam A,C,D,B.*

EADEM *hæc propositio vera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, vnitas. Item si vel A, vel B, fuerit vnitas, existentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.*

CONSTAT *etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel superparticularis cuiusuis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalem. Cùm enim duplæ proportionis minimi numeri reperiatur inter binarium, & vnitatem; superparticularis verò inter numeros sola vnitate differentes; superbipartiens denique inter numeros, quorum differentia est binarius: si inter duos numeros duplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros sola vnitate differentes, vel etiam binario: nimirum inter numeros minimos, qui eisdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione potest. Nam neque inter binarium & vnitatem, neq; inter duos numeros sola vnitate differẽtes, vllus numerus interponitur, tantum abest, vt aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interijcitur solùm numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonstrabimus. Differant numeri A B, C D, (siue C D, vnitas sit, & A B, ternarius, siue non,) binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quàm A B, maior verò quàm C D, vnitate quoque. Dico E F, non*

A. C. B
E. H. F
C. D

A..... G. B
E..... H. F
C..... D

non esse medium proportionalem inter A B, C D. Si enim dicatur esse A B, ad E F, vt E F, ad C D: ablato ex A B, numero A G, ipsi E F, æquali, vt reliqua sit vnitas G B, & ex E F, numero E H, ipsi C D, æquali, vt relinquatur etiam vnitas H F; erit quoq; vt A B, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum; cùm A G, E H, ipsis E F, C D, æquales sint, ex constructione. Igitur erit quoq; reliquus G B, ad reliquum H F, hoc est, vnitas ad vnitatem, vt totus A B, ad totum E F, maior ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo E F, medius proportionalis est inter A B, & C D.

ITAQVE inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non potest. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter se differunt. quod fieri non posse, proximè demonstrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non potest medius proportionalis. Si enim cadere dicatur; cadet quoq; ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ. quod fieri non posse, ita demonstrabimus. Cadat primùm, si fieri potest,

A..... B. E
D.. D...
C.

inter quinarium A B, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius: ita vt sit A B, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad A B. Et quoniam vnitas C, metitur D; metietur quoq; D, ipsum A B. At binarius, vel ternarius D, metitur quoq; senarium A E. Igitur D metitur totum A E, & ablatum A B: [a] ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatem B E. Quod est absurdum. a 11. pron.

CADAT deinde, si fieri potest, inter quinarium A B, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Ostendemus ergo, vt prius, D, metiri quinarium A B: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam A E. Igitur D, metitur totum A B, & ablatum A E: [b] ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem E B, metietur. Quod est absurdum. b 11. pron.

B.... E. B
D....
C.

EX quibus fit, neq; illud interuallum Musicum, quod in dupla proportione consistit, vt Diapason, vel, vt vulgò dicitur, Octaua: neq; illud, quod in sesquioctaua proportione reperitur, cuiusmodi est Tonus, seu vulgò Secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6 proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo: 24. 12 6. Idcirco proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cùm ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, nõ cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum interuallorum illud in proportione sesquialtera, hoc verò in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquialterã, & sesquitertiam, tanq; in maximas sui partes inter se inæquales. Ita quoq; Tonus in duo semitonia, quorũ alterũ maius, alterũ minus dicitur, secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiusdem, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cùm enim per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti; quadratorum verò proportio sit duplicata proportionis laterum; sit, vt proportio quadrati ex diametro descripti ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cùm ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, & inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis nõ cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus; manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est, diametrum esse lateri incommensurabilem. quæ de re plura ad 9. & vltimam propos. lib. 10. scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij cõtinua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H. 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

CADANT inter numeros A, B, inter se primos medij continuè proportionales C, D. Dico totidẽ cadere continuè proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C; [a] sumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo assumptorũ æqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniã ergo A, B, extremi inter se, primi sunt; [b] erũt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autẽ & totidẽ K, L, M, N, ex constructione, in eadẽ proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt, singuli singulis, vt K, ipsi A; & N, ipsi a 2. octaui. b 1. octaui.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H. 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

B, ne minores minimis dentur. Quia verò, vt cõstat ex demõstratione propos. 2. huius libri, E, seipsum multiplicans produxit G; multiplicans verò ipsum G, fecit K, [a] metietur E, ipsum G, per E; & G, ipsum K, per eundem E: [b] Metitur autem & vnitas ipsum E, per E. Æquè igitur metietur vnitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K: Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. [c] Proportionales ergo sunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cùm manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quòd F, seipsum multiplicans producat I, multiplicans verò ipsum I, faciat N; [d] metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundem F: [e] Metitur autem & vnitas ipsum F, per F. Æquè igitur metietur vnitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. [f] Proportionales ergo sunt continuè, vnitas, & numeri F, I, N: Ac proinde cùm tam multitudo E, G, K, quàm F, I, N, vnà cum vnitate, æqualis sit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B; (vt perspicuum est ex propositione 2. huius libri. Nam duo E, F, sunt secundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertij; & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod oftendendũ erat.

[a] 7. pron. [b] 5. pron. [c] 20. defin. [d] 7. pron. [e] 5. pron. [f] 20. defin.

SCHOLIVM.

Perspicvvm autem est, numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, ad vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habent E, & F, numeri ad vnitatem; id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoq; asseruimus.

Constat etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit; & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continuè proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continuè esse proportionales ab vnitate.

10. THEOR. 8. PROPOS. 10.

Si inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrunque ipsorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

Cadant inter vtrumque numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medij continuè proportionales; inter A, quidem & vnitatem, numeri C, D, E: At verò inter B, & vnitatem, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem. Multiplicantes enim se mutuò C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter vtrumque A, B, & vnitatem. Quoniam igitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D; D, ad E; & E, ad A; æquè metietur vnitas ipsum C, & G, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A; [g] Metietur autem vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. [h] Quare C, seipsum multiplicans fecit D, multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cùm C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I, erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continuè proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandẽ proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremò, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt ex iis, quæ à nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cùm C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cùm multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

[g] 5. pron. [h] 9. pron. [i] 17. septimi. [k] 17. sept. [l] 18. sept. [m] 18. sept.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Ex his conſtat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales ſunt C, & F, habent.

PATET etiam ex hac demonſtratione, ſi quotquot numeri fuerint ab vnitate continuè proportionales, ſecundum ab vnitate in ſe multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum, & ex eodem in hunc gigni quintum, & ſic deinceps. Demonſtratū enim eſt, ex eo quòd C, D, E, A, continuè proportionales ſunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, ſecundo in ſe; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonſtrare ad numeros continuè proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ ſequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium ſumentes.

I.

SI ſint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti verò eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continuè ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam eſſe eius, quam habet A, ſecundus ad E, ſecundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis; inter B, quidem & vnitatem, numerus A; At inter F, & vnitatem numerus E; cadet quoq; inter B, & F, vnus medius proportionalis: atq; adeò, per ſcholium huius propoſitionis in ratione A, ad E. Cadat igitur, & ſit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui ſint K, L; quot numerum cadunt inter vtrumque C, G, & vnitatem. Nec nō inter D, H, tres, qui ſint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex definitione B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Eſt autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoq; B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata eſt proportionis C, ad K; & eſt vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & ſic de cæteris.

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

a 10. octaui

HOC idem demonſtrabimus, ſi fuerint duo ordines numerorum continuè proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

SI ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorū continuè proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti verò eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continuè proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rurſum proportionis B, ad F, eſſe duplicatam proportionem C, ad G, & D, ad H, triplicatam: & E, ad I quadruplicatam. Ex A, in ſe fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in ſe fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Poſtremò ex F, quoque in ſe fiat Q; & ex F, in Q, fiat R & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continuè proportionales ab vnitate, vt conſtat ex ſcholio propoſitionis 9. huius libri. Eademq; ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata eſt rationis B, ad A, ex theor. 1. huius ſcholij: Eſt autem ex definitione eiuſdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A, erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem primo theoremate eſt ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F; & eiuſdem, ex definitione duplicata eſt ratio A, ad G. Quare cùm ſit C, ad A, vt N, ad K: & A, ad G, vt K, ad Q: erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata eſt rationis B, ad F, ex theoremate primo huius ſcholij: quòd tam B, N, quam F, Q, ſint ab vnitate continuè proportionales, ex ſcholio propoſitionis 9. huius libri. Igitur & ratio C, ad G, duplicata eſt rationis B, ad F. Eiſdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex primo theoremate, triplicata eſt rationis B, ad A: quòd tam B, N, O, quàm A, K, L, ſint ab vnitate continuè proportionales, ex ſcholio propoſitionis 9. huius libri, & eiuſdem triplicata eſt ratio D, ad A, ex de-

E, 162. I, 512.
D, 54. Vnitas. H, 128.
C, 18. 1. G, 32.
B, 6. F, 8.
A, 2.
N, 36. K, 4. Q, 64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

E, 81. I, 1.
D, 54. Vnitas. H, 2.
C, 36. 1. G, 4.
B, 24. F, 8.
A, 16.
N, 576. K, 256. Q, 64.
O, 1382 4. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

finitione. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodemq; modo est A, ad H, vt L, ad R: quòd vtraque proportio triplicata sit proportionis A, ad F: Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex primo theoremate huius scholij, propterea quòd tam A, K, L, quàm F, Q, R, continuè proportionales sunt ab vnitate, ex scholio propositionis 9. huius libri. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, eò quòd tam B, N, O, quàm F, Q, R, sunt continuè proportionales ab vnitate ex scholio propositionis 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. Non secus demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atque ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri vnius ordinis desinant in vnitatẽ, vt ex secunda figura est manifestum, in qua I, est vnitas.

CAETERVM theorema hoc demonstrabitur etiã in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, libro 14. propositione 28. licèt nõn in quotcunque lineis. Vnde multò generalius est hoc in numeris, quàm illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

III.

SI inter duos numeros, & aliquem alium numerũ assumptum, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportione cadũt numeri, totidẽ & inter ipsos medij cõtinua proportione cadẽt.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continuè proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F. inter B, verò & C, totidẽ numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & C.

A, 162. Q, 216. R, 288. S, 384. B, 512.
F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.
E, 18. N, 24. H, 32.
D, 6. G, 8.
C, 2.
K, 9. L, 12. M, 16.

Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoq; E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est, vt K, ad M, ita E, ad H. Atq; adeò cũ inter K, & M, cadat vnus medius pro-

a 8. octaui. portionalis L; a cadet quoq; vnus medius; nimirum N, inter E, & H: quemadmodum & inter F, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eade ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eade proportione D, ad G, sumãtur quinq; numeri minimi.

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

HOC etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vnitas assumatur, veluti perspicuum est in hac secunda figura, in qua numerus B, vnitas est, cadunt q; tam inter A, & C, quàm inter B, & C, tres numeri continuè proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt, &c.

EX his etiã apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atq; inter E, & H, proportionem habere, quàm duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

II. THEOR. 9. PROPOS. II.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, & B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuò C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratũ, ex defin. quadrati; & ipsum

a 17. sept. A, 9. E, 21. B, 49. D, multiplicans, fecit E, ex constructione; a erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicãs C, fecit E, ex cõstructione; & multiplicãs seipsum,

C, 3. D, 7.

b 17. sept. ex defin. quadrati, fecit B, quadratũ; b erit quoq; vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione laterũ C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continuè proportionalis cadit E. Quia verò ex eo qd A, E, B, continuè proportionales sunt, numerus A, & B, duplicatam rationẽ habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoq; rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum eius, quã habet C, latus ad latus D; cũ hæc proportio eadẽ sit,

sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cùm enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D; hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atq; adeò inter se sunt compositi. Similiter cùm sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cùm & latus D, metiatur suum quadratum B; habebunt E, & B, communem mensuram D; Ideoq; compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum verò E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7.

THEOR. 10. PROPOS. 12. 11.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continuè proportionales cadere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum faciat E; & D, seipsum multiplicans faciat F; At C, & D, se mutuò multiplicantes faciant G; Multiplicantes verò G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G; [a] erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cùm D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F; [b] erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F; propterea que E, G, F, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus quia ex definitione cubi, C, ipsum E, multiplicans fecit A; & ex constructione multiplicans ipsum G, fecit H; [c] erit vt E, ad G; hoc est, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cùm D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I; multiplicans verò ipsum F, ex definitione cubi, fecerit cubum B; [d] erit quoque, vt G, ad F; hoc est, vt C, ad D, ita I, ad B: [e] Est autem & H, ad I, vt C, ad D; quòd C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerint ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continuè sunt proportionales in ratione C, ad D; Atque adeò inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continuè proportionales. Quoniam verò, ex eo quòd A, H, I, B, continuè sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H; triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cùm sit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64. E, 9. G, 12. F, 16. C, 3. D, 4.

[a] 17. septimi. [b] 17. septimi. [c] 17. septimi. [d] 17. septimi. [e] 18. septimi.

SCHOLIVM.

HIC quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cùm enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D; hoc est, esse A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D; Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum suum A; immò & ipsum H, quòd H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C; atq; adeò inter se compositi sunt. Similiter cùm sit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum suum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipsum H, consequens consequentem: Metitur autem & latus D, cubum suum B; immò & ipsum I, quòd I, factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D; Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum etiam hic est, priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A; posteriorum verò trium H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi B.

12.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primùm positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoque proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT continuè proportionales A,B,C, qui seipsos multiplicantes faciant D,E,F; multiplicantes autem ipsos D,E,F, faciant G,H,I; & rursum multiplicantes ipsos G,H,I, faciant K,L,M, & ita deinceps. Dico quoque D,E,F,& G,H,I,& K,L,M, continuè esse proportionales. Multiplicantes enim A,& B, se mutuò faciant N; & B,C, se mutuò multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N,E, faciat P,Q. Item B, multiplicans O,F, faciat R,S. Simili modo A, multiplicans P,Q,H,

A,2. B,4. C,8.
D,4. N,8. E,16. O,32. F,64.
G,8. P,16. Q,32. H,64. R,128. S,256. I,512.
K,16. T,32. V,64. X,128. L,256. Y,512. Z,1024. a,2048. M,4096.

faciat T,V,X; & B, multiplicans R,S,I, faciat Y,Z,a. Quoniam igitur A, multiplicas seipsum, & B, fecit D,& N; [a] erit vt A,ad B,ita D,ad N. Eodem modo, quia B, multiplicas A, & seipsum, fecit N, & E; erit etiam, vt A,ad B,ita N,ad E. Sunt igitur D,N,E, continuè proportionales in ratione A,ad B. Rursus, quia B, seipsum,& numerum C, multiplicans fecit E, & O; [b] erit vt B,ad C,ita E,ad O. Eademq; ratione, cùm C, multiplicans B,& seipsum, fecerit O,& F; erit vt B,ad C,ita O,ad F; propterea quę & E,O,F, continuè proportionales sunt in ratione B, ad C, seu A,ad B. Quare cùm D, N,E, in eadem ratione sint continuè proportionales, in qua E,O,F; erit ex æquo D,ad E, vt B,ad F; atque adeò D,E,F, continuè proportionales sunt.

a 17. sept.

b 17. sept.

DEINDE, quia A, multiplicans D,N,E, fecit G,P,Q; erunt ex iis, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, G,P,Q, in eadem ratione, in qua D,N,E, hoc est, in ratione A,ad B, proportionales. Item quia A,& B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; [c] erit quoque vt A,ad B,ita Q,ad H. Sunt ergo G, P,Q,H, proportionales in ratione A,ad B. Similiter quia B, multiplicans E,O,F, fecit H,R,S; erit ex demonstratis ad propos. 18. lib. 7. H,R,S, proportionales in ratione E,O,F, hoc est, B, ad C, seu A,ad B. Et eodem modo cùm B,C, multiplicantes F, fecerint S,& I; [d] erit vt B,ad C, hoc est, vt A,ad B, ita S,ad I; propterea quę & H,R,S,I, proportionales sunt in ratione A,ad B. Quocirca, cùm G,P, H,Q, eandem habeant proportionem continuam, quam H,R,S,I; erit ex æquo G,ad H, vt H,ad I; Ac proinde G,H,I, continuè sunt proportionales.

c 18. sept.

d 18. sept.

NON dissimili argumẽto demonstrabimus & K,L,M, esse continuè proportionales; & eodem modo in aliis procedemus. Igitur si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonstratione liquet, numeri primo loco producti D,E,F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A,B,C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D,ad N, hoc est, A,ad B, &c.

ITA quoq; numeri secundo loco geniti G,H,I, erunt in ratione triplicata A,ad B: Et numeri tertiò loco procreati in quadruplicata, & sic deinceps semper vno amplius.

BREVIVS propositionem totam demonstrabimus, hac ratione. Fiant ex A,B,C, continuè proportionalibus in seipsos, numeri D, E, F; & in hos ex eisdem numeri G,H,I; & rursum ex eisdem in hos numeri K, L,M. Dico D,E,F; & G,H,I; & K,L,M, esse quoq; continuè proportionales. Nam ex scholio propos. 9. huius lib. tam A,D,G,K, quam B,E,H,L; & C,F,I,M, continuè sunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theor. scholij propos 10. huius lib. erit D,ad E, in duplicata ratione A,ad B, vel B,ad C. Sed eiusdem rationis B,ad C, duplicata est ratio E,ad F, per idem theorema. Igitur D,E,F, continuè sunt proportionales in duplicata ratione A,ad B,& B,ad C. Eodem modo ostendemus G,H,I, esse proportionales continuè in triplicata ratione rationis A,ad B,& B,ad C: At verò K,L,M, in quadruplicata, atq; ita de cæteris.

A,2. B,4. C,8.
D,4. E,16. F,64.
G,8. H,64. I,512.
K,16. L,256. M,4096.

EX qua rursum demonstratione apparet, numeros primo loco productos, esse in duplicata ratione datorum numerorum; secundo verò loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. scholij propositionis 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonstratione huius propos. 13. dati sint tantùm tres numeri continuè proportionales A,B,C; eandem tamen propositionem demonstrabimus, etiamsi plures fuerint, & tres. Sint namque numeri plures, q̃ tres A,B,C,D, continuè proportionales, qui se ipsos multiplicantes faciant E,F,G,H; postea verò multi-

A,2. B,4. C,8. D,16.
E,4. F,16. G,64. H,256.
I,8. K,64. L,512. M,4096.

a 13. octaui. *plicantes ipsos E,F,G,H, faciant I,K,L,M, & sic deinceps. Quoniam igitur E,F,G, [a] ex demonstratis proportionales*

Nonales sunt: Item F,G,H; cùm illi producti sint ex A,B,C, proportionalibus in se ipsos: hi verò ex B,C,D, proportionalibus quoq; in se ipsos: Erunt E,F,G,H, continuè proportionales. Non secus proportionales erunt I,K,L,M; & alij deinceps eodem modo producti.

PROBL. 12. PROPOS. 14. 13.

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuò C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius libri, A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B: [a] metietur quoque A, primus secundum E. Quare cùm sit vt A, ad E, ita C, ad D; & C, latus, latus D, metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

[a] 7. octaui

METIATVR iam C, latus, latus D. Dico & quadratũ A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quòd A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D, vt demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cùm C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum: ac proinde & extremum B, metietur, ex theor. 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 14.

Si cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, seipsum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem se mutuò faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quàm A, H, I, B, continuè sunt proportionales in ratione C, ad D: Metitur autem A, primus B, extremum; [b] metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cùm ergo sit, vt A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus, latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

[b] 7. octaui.

METIATVR iam C, latus, latus D. Dico & A, cubum, metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quòd A, H, I, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D, vt ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter cùm latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipsum H; atque idcircò & extremum B, cubus cubum, ex iis, quæ ad propos. 6. huius libri demonstrauimus. Itaq; si cubus numerus cubum numerũ metiatur, &c. Quod erat demonstrandũ.

THEOR. 14. PROPOS. 16. 15.

Si quadratus numerus quadratum numerum nõ metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius, neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorũ latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; [c] metietur & quadratus A, quadratum B. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.

[c] 14. octaui.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quòd nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; [d] metietur quoque C, latus illius, latus huius D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

[d] 14. octaui.

THEOR. 15. PROPOS. 17. 15.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quòd nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; [e] metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cùm ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

A, 8. B, 27.
C, 2. D, 3.

[e] 15. octaui.

SED iam C, latus, non metiatur latus D. Dico quòd nec cubus A, cubũ B, metietur. Nam si me-
a 15. octaui. tiri dicatur; [a] metietur etiam C, latus, latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim nõ metiri. Non igitur A, cubus, cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus, cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propositiones hoc etiam modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi nõ sit multiplex; neq; latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A,
a 14. & 15. octaui. *& cubus B, cubum A.* [a] *Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.*

A, 36. B, 9. C, 6. D, 3.

QVOD si latus C, lateris D, multiplex sit, metietur latus D, latus C. [b] *Igitur & B,*
b 14. & 15. octaui. *ipsum A, quadratus quadratum, & cubus cubũ metietur; Ac propterea A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex.*

A, 64. B, 8. C, 4. D, 2.

AT verò si A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, nõ sit multiplex; non metietur B, ipsum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum. [c] *Igitur neque latus D, la-*
c 16. & 17. octaui. *tus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.*

A, 49. B, 9. C, 7. D, 31.

SIMILITER si C, latus, lateris D, non sit multiplex; non metietur D, latus, latus
d 16. & 17. octaui. *C.* [d] *Igitur nec B, ipsum A, quadratus quadratum, neq; cubus cubum metietur. Atq; adeò A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.*

A, 125. B, 8. C, 5. D, 2.

16. THEOR. 16. PROPOS. 18.

DVORVM similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, huius verò illis proportionalia E, F; ita vt C, D, se mutuò multiplicãtes faciant A; & E, F, mutuò se multiplicãtes faciant B; sitq; vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerũ medium proportionalem, & proportionẽ A, ad B, esse duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim se mutuò D, E, faciant G. Quoniam igitur est C, ad D, vt E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit
a 17. sept. A, & G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E, hoc est, vt D, ad F. Similiter quia E,
b 17. sept. multiplicãs D, & F, fecit G, & B; [b] erit quoque G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo sunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F. Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A, 12. G, 18. B, 27. C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

QVIA verò, cùm A, G, B, sint continuè proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationẽ eius, quam habet A, ad G, hoc est, C, ad E, vel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quã habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVIA ostensum est A, G, B, esse proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, vel D, F, assumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, esse inter se compositos. Cùm enim ostensi sint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera, consequentes consequentem, si de proportionibus G, ad B, & C, ad E; vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipsum G, antecedentes antecedentem, quòd sit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera. Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quàm D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cùm sit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F; metiantur autem C, D, latera suum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E, F, ipsum G, consequentes consequentem. Quare cùm & E, F, latera suum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem mensuram tam E, quàm F, ideoq; erunt inter se compositi.

EX qua demonstratione etiam manifestum reliquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes mensuras esse C, D, latera prioris plani A; posteriorum autem G, B, mensuras communes esse E, F, latera plani posterioris B.

THEORE-

THEOR. 17. PROPOS. 18.

18.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius verò illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, eſſe triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

Multiplicantes enim ſe mutuò C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuò multiplicantes faciãt K. Item D, F, ſe mutuò multiplicãtes faciant L. Poſtremò E, H, ipſum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales; nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam verò D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; [a] erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; [b] erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continuè proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cùm B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cùm E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, [c] erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadẽ ratione, cùm H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; [d] erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. [e] Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quòd E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continuè ſunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medij M, N, continuè proportionales cadunt.

a 17. ſeptimi
b 17. ſept.
c 17. ſept.
d 17 ſept.
e 18. ſept.

QVONIAM verò, cùm A, M, N, B, ſint proportionales continuè; proportio A, B, triplicata eſt eius, quam habet A, ad M. Eſt autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, ſolidus ad ſolidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonſtratum ſit A, M, N, B, proportionales eſſe in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; liquet inter duos ſimiles ſolidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, aſſumptorum.

EX iis quæ dicta ſunt, perſpicuum etiam eſt, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet ſolidorum A, B, inter ſe eſſe compoſitos. Cùm enim A, M, N, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, hoc eſt, eſſe A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera ſuum ſolidum B, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D ad G, vel E, ad H, loquamur; metientur quoq; C, D, E, ipſum N, antecedentes antecedentem, quòd ſit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipſum M, metiuntur; (Cùm enim M, factus ſit, per conſtructionem, ex E, in L, metietur E, ipſum M. Deinde quia M, N, B, proportionales ſunt ipſis I, L, K; metitur autem K; ipſum B, quòd B, factus ſit ex K, in H; metietur quoque I, ipſum M; Metiuntur autem & C, D, latera planum ſuum I. [a] *Igitur & C, D, metientur ipſum M; Atq; adeò C, D, E, ipſum M, metientur.) Nec non & ipſum A, nimirum latera ſuum ſolidum. Ergo A, M, N, habent communem menſuram tam C, quàm D, quam E; Ideoq; compoſiti inter ſe ſunt. Rurſus quia eſt A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera ſolidum ſuum A; antecedentes antecedentem metientur quoq; F, G, H, ipſum M, conſequentes conſequentem. Metiuntur verò & F, G, H, ipſum N; (Cùm enim N, factus ſit ex H, in L, per conſtructionẽ; metietur H, ipſum N. Deinde quia A, M, N, ipſis I, L, K, proportionalis ſunt: metiuntur autem I, ipſum A, quòd A, factus ſit ex I, in E; metietur etiam K, ipſum N. Cùm ergo & F, G, latera metiantur planum ſuum K; metientur quoque F, G, ipſum N; atque adeò F, G H, ipſum N, metientur.) Nec non & ipſum B, nimirum latera ſuum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſurã tam F, quàm G; quam ipſum B, nimirum latera ſuum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſurã tam F, quàm G; quam H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquidò conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A; At verò F, G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.*

a 11. prop.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

QVIA verò ſolidus numerus tria latera habet, ex quorũ mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eundem numerũ ſolidũ procreari; ſiue primũ latus ducatur in ſecundũ, & numerus procreatus in tertium; ſiue primum in tertium, & numerus genitus in ſecundum; ſiue denique ſecundum in tertium,

& productus numerus in primum: Quin etiam propositis quotuis numeris, eundem semper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua quomodocunq; ordinem inter se permutent. Quæ quidem res magnum vsum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiusmodi theorema.

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem semper numerus, quomodocunque ordinem inter se permutent.

SINT primùm tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D; & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, si ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item si ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans D, facit E; [a] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [b] ita quoque est F, ad A; quòd A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B, [c] ita est A, ad vnitatem; propterea quòd A, multiplicans B, facit D. Igitur ex æqualitate erit, vt E, ad B, ita F, ad vnitatem: [d] atque idcirco numerus ex E, in vnitatem factus, hoc est, ipsemet numerus E, æqualis erit numero facto ex B, in F, productum ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod est primum.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; [e] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [f] ita etiam est G, ad B, eò quòd G, factus est ex B, in C. Igitur erit, vt E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, [g] ita est B, ad vnitatem, propterea quòd D, factus est ex A, in B. Igitur ex æquo erit vt E, ad A, ita G, ad vnitatem: [h] ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem, id est, ipsemet numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod est secundum.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C: Item ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D: Item ex A, in D, & ex producto in B: Item ex A, in B, & ex producto in C: Itẽ ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B: Itẽ ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Itẽ ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A; ita vt præter primam multiplicationem, quæ omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11. multiplicationes diuersæ producentes eundem semper numerum. Quoniam enim, vt in tribus ostensum est, idem numerus fit, siue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D; siue prius in D, deinde hic productus in C, constat id, quod primo loco proponitur.

DEINDE, quia vt in tribus est ostensum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuum est, eundem numerum gigni tum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D. quod est secundum.

TERTIO, quoniam, vt in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, siue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D; siue prius in D, deinde hic productus in B, patet eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cùm ergo ille fit æqualis proximè ostensus primo producto, erit & hic æqualis eidem. quod est tertium.

QVARTO, quia, vt in tribus ostensum est, idẽ numerus fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoq; idẽ numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C. qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille ostensus est primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est quartum.

QVINTO, quoniam vt demonstratum est in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C. producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex A in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cũ ergo ille fit ostensus tertio loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, erit & hic eidem æqualis. Quod est quintum.

SEXTO, quia, vt in tribus demonstrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in A. liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quam ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod est sextum.

SEPTIMO, quia, vt in tribus ostendimus, idẽ numerus gignitur, siue productus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic ꝓductus in D, siue prius in D, deinde hic ꝓductus in A; cõstat eundẽ numerũ fieri ex B, in C, & ex ꝓducto in D & ex ꝓducto in A qui fit ex B, in C, & ex ꝓducto in A & ex ꝓducto in D. Sed hic proximè ostensus est æqualis ei, q fit ex A, in B, & ex ꝓducto in C, & ex ꝓducto in D. Igitur & ille, q est septimum.

OCTAVO, quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoq; idẽ numerus ex A, in B, & ex ꝓducto in D, & ex ꝓducto in C, qui

A, 3. B, 5. C, 8.
D, 15. E, 120. F, 24. G, 40.

E, F,
D, A,
B, vnitas.

E, G,
D, B,
A, vnitas.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5.
E, 120.

a 15. defin.
b 15. defin.
c 15. defin.
d 19. septi.
e 15. defin.
f 15. defin.
g 15. defin.
h 19. sept.

qui ex B,in D,& ex producto in A,& ex producto in C. Sed ille primo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B,& ex producto in C,& ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt octauum.

NONO, quia, vt demonſtratum eſt in tribus, idem numerus fit ex B,in C,& ex producto in D, qui ex B, in D,& ex producto in C; procreabitur idem quoq; numerus ex B,in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B,in D,& ex producto in C,& ex producto in A. Sed ille oſtenſus eſt ſeptimo loco æqualis ei, qui fit ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D. Ergo & hic. Quod eſt nonum.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

DECIMO, quoniam, vt in tribus eſt demonſtratum idem gignitur numerus ex A,in C,& ex producto in D,qui ex C,in D,& ex producto in A; producetur quoque idem numerus ex A,in C,& ex producto in D,& ex producto in B, qui ex C in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco eſt oſtenſum, æqualis eſt ei, qui fit ex A,in B, & ex producto in C,& ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt decimum.

POSTREMO, quoniam, vt oſtenſum eſt in tribus, idem numerus gignitur ex B,in C, & ex producto in D qui ex C,in D,& ex producto in B; procreabitur quoque idem numerus ex B, in C,& ex producto in D, & ex producto in A, qui ex C,in D,& ex producto in B,& ex producto in A Sed ille ſeptimo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D. Igitur & hic eidem æqualis erit. Quod eſt vndecimum.

EODEM argumentandi modo vtendum eſt in quinque vel pluribus numeris; dummodo interdum in quinque aſſumatur id, quod iam in quatuor demonſtratum eſt; & in ſex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemq; ſemper numerus ex continua eorum multiplicatione inter ſe procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, conſtituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter ſe ordinent permutent, eundem ſemper gignent numerum: ac proinde tam ſecundus ordo, quàm tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri, A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: ſit vt quartus ordo eundem prorſus numerum procreet, quem primus, & ſic de cæteris.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B, C. A. D. E.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 17.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, eſſe planos ſimiles. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi ſunt in ratione A, ad C; [a] metientur D, & E, ipſos A, & C, æquè: metiantur per F. Similiter æquè metiẽtur ipſos C, & B: metiantur per G. [b] Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C. [c] Item G, eoſdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G, fecit C, & B; [d] erit, vt C, ad B, ita F, ad G: Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G; & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam verò F, multiplicans D, fecit A; erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo, quia G, multiplicans E, fecit B; erit & B, planus cuius latera E, G. Cùm ergo hæc latera oſtenſa ſint eſſe proportionalia, hoc eſt, D, ad F, vt E, ad G; erunt ex defin. A, B, plani ſimiles. Quare ſi inter duos numeros vnus, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 18. C, 24. B, 32.
D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

[a] 21. ſeptimi
[b] 9. pron.
[c] 9. pron.
[d] 17. ſeptimi

THEOR. 19. PROPOS. 21. 19.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes ſolidi ſunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, eſſe ſimiles ſolidos. Sumantur tres E, F, G, minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F; [e] erunt E, & G, plani ſimiles: ſint ipſius E, latera H, I; ipſius verò G, latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cùm minimi ſint in ratione A, C, D, [f] æquè metiuntur ipſos A, C, D, eiuſdem rationis cum illis; metiantur per M. Eodemque modo, [g] quia E, F, G, minimi æquè metiuntur C, D, B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; [h] ita vt M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eoſdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus eſt autẽ E, ex multiplicatione mutua ſuorum laterum H, & I, nec non G, ex mutua multiplicatione ſuorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atq; adeò A, ſolidus eſt numerus, ex defin. latera habẽs H, I, M; & B, ſolidus etiã, latera habens K, L, N. Quia verò M, & N, multiplicãtes F, faciũt C, & D, vt oſtẽdimus; [i] erit C, ad D, vt M, ad N. [k] Sunt autẽ C, & D, in eadẽ ratione, in qua E, & F, & N, multiplicãs E, & F, fecerit ipſos C, & D; Nec nõ & E, F, eandẽ habent rationẽ, quam H, K, vel I, L. Etenim inter planos ſimiles E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propoſ. 19. huius lib. in ratione laterum ho-

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 2. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.
A, 8. C, 12. D, 18. B. 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

[e] 20. octaui.
[f] 21. ſeptimi
[g] 21. ſeptimi
[h] 9. pron.
[i] 18. ſeptimi
[k] 17. ſeptimi

mologorum H,K,vel I,L. Igitur erit quoque H,ad K,& I, ad L,vt M, ad N; & permutando H, ad I, vt K,ad L; & I,ad M,vt L,ad N. Proportionalia ergo ſunt latera H, I, M, lateribus K,L,N; ac propterea ſimiles ſunt numeri ſolidi A,& B. Quam ob rem,ſi inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri,&c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Dvo exempla appoſuimus,in quorum priori liquidò conſtat,vnitatem E,eſſe planum numerum,& vnitates H,I,eius latera,licet impropriè,vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatem à numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonſtrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C,& D,eſſe ſolidos ſimiles. Quod idem continget in aliis omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiuſmodi ſunt etiam A, B, in eodem priori exemplo. Hoc autem eſt abſurdum,cùm Euclides propoſitionem generaliter proponat, eamq; ſine vlla exceptione demonſtret.

20. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

A,9. B,54. C,324. SINT tres numeri A,B,C, continuè proportionales, ſitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum eſſe. Nam cùm inter A & C, cadat medius proportionalis; [a] erunt A, & C, plani ſimiles. Quare exiſtente A, quadrato, erit & C, ei ſimilis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 20. octaui.

21. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

A,27. B,45. C,75. D,125. SINT quatuor numeri A,B,C,D, proportionales continuè, & A, primus ſit cubus. Dico & quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter A,& D, cadant duo medij proportionales B,C; [b] erunt A; & D, ſolidi ſimiles. Quare exiſtente A, cubo, erit & D, illi ſimilis, cubus. Quam ob rem, ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

[b] 21. octaui.

SCHOLIVM.

HAEC eſt apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonſtratio præcedentium duarum propoſitionũ; quam qui diligenter examinare velit, inueniet ſanè mancam eſſe, & imperfectam. Cùm enim ad finem 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel ſolidos poſſe ſimiles eſſe, quamuis non quibuſcunq; lateribus vnius exhiberi poſſint alia latera alterius proportionalia; dummodo quibuſdam lateribus vnius proportionalia ſint quædam alterius; Iure optimo quis inficiari poterit, ſi duorum planorum ſimilium vnus fuerit quadratus, alterum quoq; quadratum eſſe: & ſi duorum ſimilium ſolidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam eſſe cubum: quod tamen in demonſtratione pro conceſſo, atque omnibus perſpicuo aſſumebatur. Nam poſitis duobus numeris planis 36. & 64. ſimilibus, ſatis eſt, vt duobus lateribus prioris, qualia ſunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera poſteriora, nimirũ 4. & 16. proportionalia. Vnde etiamſi prior ſit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. meritò dubitare quis poſſit, immò omnino negare, poſteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc eſt, inter ſe quoque æqualia, atque adeò eſſe quadratum: quemadmodum etiam manifeſtum eſt, hiſce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non reſpondere alia latera in poſteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in poſteriori proportionalia, quanquam ipſi numeri ſint ſimiles; cur ſine demonſtratione vlla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. aſſignari poſſe in poſteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter ſe æqualia? Idem dicendum eſt de ſolidis ſimilibus. Quapropter vtramque propoſitionem Euclidis aliter demonſtrabimus, ad hunc, qui ſequitur, modum.

SINT tres numeri A, B, C, continuè proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium eſſe quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A; cum D, ex defin. in ſe faciat A; erunt D, & A, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. ab vnitate continuè proportionales; eritq; conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem; atque adeò cùm inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quàm vnitatem, cadant medij proportionales multitudine æquales, nimirum vnus; cadent quoq; totidem, ex theor. 3. ſcholij propoſ. 10. huius libri, inter vnitatem, atque C, numerum, nimirum vnus, qui ſit E. Quoniam igitur vnitas & E, C. numeri ſunt cõtinuè proportionales; producetur C, ex E, in ſe ipſum, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit, ex defin. cuius latus E.

A,36. B,48. C,64. D,6. E,8. vni-tas

ALITER. Sumptis tribus numeris, D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipſum A, & F, ipſum C, æquè, ex iis, quæ oſtendimus ad propoſ. 21. lib. 7. Et quoniam extremi D, F, minimorum trium numerorum,

A,36. B,48. C,64. G,18. H,32. D,9. E,12. F,16. L,64. K,8. I,4.

numerorum, per coroll. 1. propoſ. 2. huius libri, ſunt quadrati: Eſt autem & A, quadratus, ex hypotheſi; [a] *cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia verò eſt, ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F: & permutando, vt A, ad D, ita C, ad F;* [b] *cadet quoq; inter C, & F, vnus proportionalis medius, nimirum H. Cùm ergo F, primus metiatur C, vltimum;* [c] *metietur idem & ſecundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipſum H, metitur; ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoq; L, quadratus ipſius K.* [d] *Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata eſt rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc eſt, H, ad F: Eſt autem & ratio C, ad F, eiuſdem rationis H, ad F; ex defin. duplicata, quòd conuertendo ſint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, vt C, ad F; Ac proinde L, & C, æquales ſunt. Exiſtente ergo L, quadrato, ex conſtructione, & C, quadratus erit.*

a 11. octaui. b 8. octaui. c 7. octaui. d 11. octaui

ALITER. [e] *Quoniam A, & C, ſimiles plani ſunt; ſint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipſius A; at F, G, ipſius C; ita vt ſit D, ad E, ſicut F, ad G: aſſumatur q. H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in ſe,* [f] *erunt D, H, E, continuè proportionales. Cùm ergo ſit F, ad G, vt D, ad E;* [g] *dat. inter D, & E, medius proportionalis H, & cadet quoq; inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui ſit I. Quare cùm F, I, G, ſint continuè proportionales;* [h] *idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in ſe ipſum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in ſe ipſum: At q. adeò C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.*

A,36. B,48. C,64. H,6. I,8. D,3. E,12. F,4. G,1.6.

e 20. octaui f 20. ſeptim. g 8. octaui. h 20. ſeptimi.

SINT *rurſum quatuor numeri A, B, C, D, continuè proportionales, & A, primus, ſit cubus. Dico & D, quartum, cubum eſſe. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in ſeipſum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in ſe facit F, & in F, facit A; erunt, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. E, F, A, continuè proportionales ab vnitate; at q. idcirco conuertendo proportionales quoq; erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaq; cùm tam inter numerum D, quàm vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. ſcholij propoſ. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui ſint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continuè ſunt proportionales: fiet H, ex G, in ſe, & D, ex G, in productum H, vt ad propoſ. 10. huius lib. à nobis eſt demonſtratum. Quare D, cubus eſt, ex definitione cuius latus G.*

A,64. B,160. C,400. D,1000. F,16. H,100. E,4. G,10. vni-.tas

ALITER. *Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metietur E, ipſum A, & H, ipſum D, æquè, per ea, quæ ad propoſ. 21 lib. 7. demonſtrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorum, cubi ſunt, ex 1. coroll. propoſ. 2. huius lib. Eſt autem & A, cubus, ex hypotheſi;* [i] *cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales qui ſint I, K. Quoniam autem, ex æquo, eſt vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H;* [k] *cadent quoq; inter H, D, duo medij proportionales, qui ſint L, M. Cùm ergo H primus metiatur D, extremum,* [l] *metietur idem & L. ſecundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipſum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: ſit quoque P, cubus ipſius O.* [m] *Itaque cùm ratio P, ad H, cubi ad cubum triplicata ſit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc eſt L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiuſdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quòd conuertendo proportionales etiam ſint D, M, L, H, erit P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cùm P, cubus ſit, ex conſtructione, cubus quoque erit D.*

A,64. K,32. L,16. E,8. B,160. C,400. D,1000. M,500. L,250. F,20. G,50. H,125. P,1000. O,10. N,5.

i 12. octaui. k 8. octaui. l 7. octaui. m 12. octaui

THEOR. 22. PROPOS. 24. 22.

SI duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; primus autem ſit quadratus, & ſecundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; ſitq; A, quadratus. Dico & B, eſſe quadratum. Cùm enim ſit A, ad B, vt C, ad D; [a] *cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, videlicet E;* [b] *cedet quoque inter A, & B, medius vnus, qui ſit. F. Quia igitur tres numeri ſunt continuè proportionales A, F, B; & A, primus eſt quadratus;* [c] *erit & B, tertius, quadratus. Quare ſi duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat oſtendendum.*

A,36. F. 48. B. 64. C,9. E. 12. D. 16.

a 11. octaui. b 8. octaui. c 22. octaui.

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non

a 24. octaui *quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur,* a *essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibita, etiam quadrati, cùm primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem nõ habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c.*

b 24. octaui *quadrati. Primò enim 4. existente quadrato,* b *esset & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. &c.*

c 11. octaui. *quod est absurdum.* c *Nam inter 4. & 8: & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: cùm tamen in scholio propos. 8. huius lib. demonstratum sit, inter numeros duplæ proportionis quosuis non posse cadere medium proportionalem.*

Simili modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, d *caderes inter eos medius*

d 11. octaui.

e 8. octaui. *proportionalis.* e *Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis. quod fieri non posse, demonstratum à nobis est in scholio propos. 8. huius lib.*

23. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubum: sitque A, cubus Dico & B, cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D: a cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E, F; b cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continuè proportionales, & A, primus est cubus: c erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. octaui.

b 8. octaui.

c 23. octaui.

A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

COROLLARIVM.

Patet etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, a *essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis reperta, etiam cubi, cùm primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.*

a 25. octaui

24. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cùm enim A, & B, sint plani similes: a cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B: erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 2. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo similes plani numeri rationem inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

a 18. octaui.

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.

SCHOLIVM.

Facile etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

Habeant numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse

a 11. octaui. *planos similes.* a *Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit vnus medius proportionalis:*

b 8. octaui. *Et est, vt C, ad D, ita A, ad B;* b *cadet quoq; medius proportionalis inter A, & B.* c *Quare*

c 20. octaui *A, & B, plani similes sunt.*

A, 8. B, 18. C, 16. D, 36.

Ex hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modò demonstratum est, plani similes. quod est absurdum. pronuntur enim non similes.

25. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT

SINT similes solidi A,B. Dico esse, vt A,ad B,ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A,B,sunt solidi similes; [a] cadent inter eos duo medij proportionales, qui sint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D,B; erunt extremi E,H,ex coroll.1.propos.2. huius lib. cubi. Quare, cùm ex æquo sit A ,ad B,vt E, ad H; constat ita esse A, ad B,vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se,&c. Quod erat ostendendum. a 19.octaui.

A,240. C,360. D,540. B,810.
E,8. F,12. G,18. H,27.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet:

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI enim A,B, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D Dico A, B, solidos esse similes. Nam cùm sit A,ad B, vt C, ad D, [a] cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales; [b] cadent quoque inter A,B,duo medij. [c] Sunt ergo A, & B, solidi similes. a 12.octaui. b 8. octaui. c 21.octaui.

A,16. B,54. C,64. D,216.

EX his omnibus perspicuè infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbi partientem, esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, [d] caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non posse, iam dudum ostensum est in scholio propos.8.huius lib. Eadem ratione non erunt similes solidi, cùm inter eos cadere non possint duo medij proportionales. [e] Nam aliàs caderent quoque duo medij inter minimos earundem proportionum numeros Quod fieri non potest, quòd hi vel sola vnitate, vel certè binario tantùm inter se distent, vt in scholio prædicto traditum est, inter quos certum est, non posse intercipi duos numeros, nedum duos medios proportionales. d 18.octaui. e 8. octaui.

SIMILITER nec duo quinis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cùm non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus primus, latera habet solummodo vnitatem, & seipsum, quamuis impropriè. Vt bi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cùm ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ constat non esse proportionalia. Quinis verò numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tantùm habet duas vnitates, & seipsum. Vt bi numeri solidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cùm ex mutua horum multiplicatione producantur. Perspicuum autem est, ea non posse esse proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo huiusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani vel solidi similes; [f] cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cùm ergo extremi duo ponantur inter se primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter se primi, cùm nullus numerus illos omnes, tanquam communis mensura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minimi erunt continuè proportionales, vt in scholio propos.24.lib.7.demonstrauimus. Ac propterea ex coroll.1. propos. 2.huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi. quod absurdū est. Ponuntur enim neq_2 quadrati, neq_3 cubi. f 18.& 19.octaui.

EX his sequitur, si duo numeri sint plani, vel solidi similes, quorum minor sit primus, minorem numerare maiorem. Nam si eum non numeraret; [g] essent duo propositi numeri inter se primi: ac proinde, vt proximè ostendimus, non possent esse plani, vel solidi similes, quod absurdum est, & contra hypothesim. Verùm hoc ostensiuè quoque ita demonstrabimus. Sint primùm duo numeri plani similes A, B, sit q_2 A, minor, primus Dico A, ipsum B, metiri. Nam cùm A, & B, ponantur plani similes, habebunt latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A, sint C, vnitas, & numerus D, ipsi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter C, vnitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem metiatur primum numerum A: sint E, F, latera numeri B lateribus C, D proportionalia, ita vt sit C, ad E, vt D, ad F. Erit igitur permutando C, ad D, vt E, ad F. [h] Igitur numerus factus ex C, primo in F, quartū æqualis erit ei, qui fit ex D, secūdo in E, tertiū: [i] Fit autem ex C, vnitate in F, ipsemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. [i] Quare D, ipsum F, metietur: [k] Metitur autem F, ipsum B, quòd B, gignatur ex E, in F, [l] Igitur & D, id est, A, illi æqualis, eundem B, metietur. quod est propositum. g 31. septi. h 19. septi. i 4.pron. k 4. pron. l 11.pron.

A,3. B,48. C,1. D,3. E,4. F,12.

HINC perspicuū est, duos numeros inter se primos, quorū minor primus sit, non posse esse planos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cùm ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed compositi. quod est contra hypothesim.

SINT deinde duo solidi similes A,B, sit q_3 A, minor primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cùm A, & B, sint solidi similes, habebunt latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A, sint B, C, vnitates, & numerus D, ipsi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter vnitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem, metiatur numerum primum A: sint E, F, G, latera numeri B, lateribus B, C, D, proportionalia, ita vt sit B, ad E, vt C, ad F; & D, ad G. Quia igitur est C, ad F,

A,3. B,24. B,1. C,1. D,3. E,2. F,2. G,6.

a 19. sept. vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G. [a] Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in F, tertium; Fit autem ex C, vnitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F. [b] Quare D, ipsum G, metietur. [c] Metitur autem G, ipsum B, quòd G, latus sit ipsius B. [d] Igitur, & D, hoc est, A, illi æqualis, eundem B, metietur: quod est propositum.

b 4. pron. c 4 pron. d 11. pron.

Atqve ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cùm ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi. quod est contra hypothesim.

Ita qve facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel superparticularem, vel superbipartientem; vel certè duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neuter quadratus sit, aut cubus; erunt illi ipsi per ea quæ tradita sunt, plani seu solidi non similes.

e 26. octaui. f 24. octaui

Rvrsvs quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter verò nō quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes, [e] haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Existente igitur 16. quadrato, [f] esset & 20. quadratus, quod est absurdum. ponitur enim non quadratus.

g 27. octaui h 25. octaui

Pari ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter verò non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. & 40. Si enim essent solidi similes, [g] haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cùm igitur 27. cubus sit, [h] esset & 40. cubus. quod est absurdum. ponitur enim non cubus.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si duo similes plani numeri multiplicantes se mutuò faciant quendam; Productus quadratus erit.

a 17. septimi b 18. octaui. c 8. octaui.

DVO numeri plani similes A, B, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cùm sint plani similes, [b] vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet.

A, 6. B, 54. C, 36. E, 108. C, 324.

d 22. octaui.

Cadat ergo E, vt sint continuè proportionales D, E, C. Itaq; cùm tres D, E, C, continuè sint proportionales, sitq; primus D, quadratus, ex constructione; [d] erit quoq; C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicātes se mutuò, &c. Quod erat demōstrandū.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si duo numeri se mutuò multiplicātes faciant quadratum; similes plani erūt.

DVO numeri A, B, se mutuò multiplicātes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; [e] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [f] At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. [g] Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet. [h] Ac propterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuò multiplicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 4. B, 25. C, 100.

e 17. sept. f 11. octaui. g 8. octaui. h 20. octaui.

SCHOLIVM.

Ex his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

Si duo numeri quadrati se mutuò multiplicātes faciāt quēpiā: Productus quadratus erit.

21. noni.

Dvo quadrati A, B, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratū. Cùm enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati; [a] erit C, ex eis productus, quadratus.

II.

Si duo numeri se mutuò multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

Dvo

A,9. D,12. B,16. C,144. *Dvo numeri A,B,ſe mutuò multiplicantes faciant C, quadratum: ſitq; A, quadratus. Dico & B, quadratum eſſe. Cùm enim A, & B, ſe mutuò multiplicantes faciant C, quadratum:* [a] *erunt A, & B, ſimiles plani:* [b] *atque adeò inter eos vnus medius cadet proportionalis, videlicet D.* [c] *Quare A, exiſtente quadrato, erit & B, quadratus.*

a 22. noni.
b 18. octaui
c 22. octaui

III.

SI duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

A,4. B,20. C,80. *Dvo numeri A,B,ſe mutuò multiplicantes faciant C, non quadratum; ſitq; A, quadratus. Dico B, non quadratum eſſe. Si enim B, dicatur eſſe quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius ſcholij; Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur quadratus eſt B, numerus.*

IIII.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, ſe mutuò multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

A,9. B,20. C,180. *Dvo numeri A, quadratus, & B, non quadratus, ſe mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, non eſſe quadratum. Nam ſi C, foret quadratus, cùm producatur ex A, in B, ſitq; A, quadratus; eſſet & B, ex theor. 2. huius ſcholij, quadratus: Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur C, quadratus erit.*

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI cubus numerus ſeipſum multiplicãs procreet aliquẽ; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, ſeipſum multiplicans numerum B. Dico B, eſſe cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in ſe fiat D, & idcirco ex C, in D, ipſe cubus A, gignatur. Quia igitur C, ſeipſum multiplicans fecit D: [a] metietur C, ipſum D, per C: [b] Metitur autem & vnitas ipſum C, per C. Igitur eadem pars eſt vnitas ipſius C, quæ C, ipſius D, nimirum denominata à C: Ac proinde [c] vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rurſus quia C, multiplicans D, fecit A: [d] metietur D, ipſum A, per C. Metiebatur autem & C, ipſum D, per C. Eadem ergo pars eſt C, ipſius D, quæ D, ipſius A: [e] ideoq; vt C, ad D, ita D, ad A: ſed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A. Atque adeò inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. [f] At quia A, ipſum B, metitur per A, quòd A, ſeipſum multiplicãs fecerit B; [g] metitur verò & vnitas ipſum A, per A: Eadem erit pars vnitas ipſius A, quæ A, ipſius B; [h] Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cùm inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; [i] cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cùm ergo quatuor numeri A, E, F, B, ſint continuè proportionales, & A, primus ſit cubus, [k] erit quoq; B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus ſeipſum multiplicãs, &c. Quod erat demõſtrandũ.

A,8. E,16. F,32. B,64. D,4. C,2. Vnitas.

a 7. pron.
b 5. pron.
c 20. defin.
d 7. pron.
e 20. defin.
f 7. pron.
g 5. pron.
h 10. defin.
i 8. octaui.
k 23. octaui.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI cubus numerus cubũ numerũ multiplicans faciat aliquẽ; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum eſſe. Multiplicans enim A, ſeipſum faciat D; [l] eritque D, cubus. Quoniam verò A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; [m] erit vt A, ad B, ita D ad C. [n] At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. [o] Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent. [p] Ac propterea D, exiſtente cubo, & C, cubus erit. Quocirca ſi cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c. Quod erat oſtendendum.

A,8 B,27. D,64. C,216.

l 3. noni.
m 17. ſepti.
n 12. octaui.
o 8. octaui.
p 23. octaui.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum eſſe. Multiplicans enim A, ſeipſum faciat D, [q] qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [r] erit vt A, ad B, ita D, ad C; [s] At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. [t] Totidem igitur & inter A, & B, cadent; [u] Ac proinde exiſtente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem ſi cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod oſtendendum erat.

A,8. B,27. D,64. C,216.

q 3. noni.
r 7. ſepti.
s 12. octaui.
t 8. octaui.
u 23. octaui.

SCHOLIVM.

Ex his & hac, quæ ſequuntur, facilè demonſtrabuntur, videlicet.

I.

SI cubus numerus non cubũ numerũ multiplicãs faciat aliquẽ; Factus non cubus erit.

A, 8. B, 20. C, 160. *FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus,* [a] *& multiplicatus B, cubus erit. quod non ponitur.*

a 5. noni.

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

A, 8. B. 17. C, 136. *FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus,* [b] *& factus C, cubus erit. quod est contra hypothesim.*

b 4. noni.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cùm A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeò æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex ijs, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; [a] erit & A, cubus. Quare si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 8. B, 64. C, 512.

a 5. noni.

SCHOLIVM.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum: inferunt, [a] *Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt.* [b] *Quoniam verò est vt B, ad C, ita A, ad B, quòd A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit;* [c] *cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales.* [d] *Atque adeò existente B, cubo, & A, cubus erit. Verùm nostra demonstratio breuior est, & planior, vt perspicuum est.*

a 12. octaui. b 17. sept. c 8. octaui. d 23. octaui.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicãs numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cùm enim A, sit compositus, [a] metietur eum, præter vnitatem, numerus aliquis: metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito, [b] multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cùm ergo B, ipsum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B: Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerũ aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 6. B, 11. C, 66. D, 2. E, 3.

a 13. defin. b 9. pron.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus verò cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SINT ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunq; A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidẽ B, ab vnitate esse quadratũ, & vnum intermittentes omnes, quales sunt D, F, H, K, M: Quartũ autem C, cubũ, & duos intermittentes omnes, euiusmodi sunt F, I, M: septimum verò F, cubũ simul, & quadratũ, & quinq; intermittẽtes omnes, nimirũ M. Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B; æquè metietur vnitas numerũ A, & numerus A, numerũ B; [a] Metitur aũt vnitas numerũ A, per A. Ergo & A, ipsum B, p A, metietur; [b] Atq; adeò A, multiplicãs A, ipsum B, producet. Quare B, quadratus est. Quia verò tres deinceps ꝓportionales sunt B, C, D, & est B, quadratus; [c] erit & D, quadratus. Eadẽ ratione assumptis tribus deinceps ꝓportionalibus D, E, F, cũ D, sit quadratus, [d] & F, quadratus erit; Nec nõ & oẽs vnũ intermittẽtes. Rvrsvs quia est vnitas ad A, vt B, ad C; æquè metietur vnitas numerum A, & numerus B, numerũ C; [e] Metitur autẽ vnitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur; [f] atq; adeò B, ipsum A, multiplicans procreabit numerũ C. Quare cùm A, seipsum multiplicãs faciat B, multiplicãs verò B, faciat C, vt est ostẽsum; erit C, cubus. Quia verò quatuor deinceps proportionales sunt C, D, E, F, & est C, cubus, [g] erit & F, cubus. Eodem argumẽto, assumptis quatuor deinceps proportionalibus F, G, H, I, cùm F, sit cubus; [h] & I, cubus erit; atq; omnes semper duos intermittentes. Postremo quia F, septimus ab vnitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirum quinq; G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec nõ & omnes quinque intermittẽtes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 3 B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. H, 59049. L, 177147. M, 531441.

a 5. pron. b 9. pron. c 22. octaui. d 22. octaui. e 5. pron. f 9. pron. g 23. octaui. h 23. octaui.

SCHO-

SCHOLIVM.

Hoc theorema poteſt quoque hoc modo proponi.

SI ſint quotcunque numeri ab vnitate continuè proportionales, omnes poſiti in locis imparibus; nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, nono, vndecimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proximè numeros poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & aliis, quæ ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri quartus, ſeptimus, decimus, tertiusdecimus, decimusſextus, decimusnonus, &c. ſunt cubi. Omnes verò qui proximè ſequuntur numeros poſitos in locis ſexto, duodecimo, decimooctauo, vigeſimoquarto, & aliis, quæ metitur ſenarius, quales ſunt ſeptimus, tertiuſdecimus, decimusnonus, vigeſimusquintus, &c. ſunt cubi ſimul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes ſemper vnum intermittunt poſt tertium ab vnitate: At ſecundi ordinis numeri omittunt ſemper duos numeros poſt quartum ab vnitate. Numeri denique tertij ordinis quinque ſemper interponunt poſt ſeptimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem ſit quadratus, Et reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunq; A, B, C, D, E, F, ſitq; primùm A, proximus vnitati quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos eſſe. Quod enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales ſunt B, D, F, quadrati ſint, [a] iam demonſtratum eſt. Quod verò & reliqui intermedij, C, & E, quadrati ſint, ita perſpicuum fiet. Cùm tres continuè proportionales ſint A, B, C; ſitque A, quadratus; [b] erit & C, quadratus. Eodemq; modo, aſſumptis tribus continuè proportionalibus C, D, E, cùm C, ſit quadratus; [c] & E, quadratus erit: Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati ſunt. Idem oſtendemus, ſi plures numeri ſint continuè proportionales.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes duos intermittentes, cuiuſmodi ſunt C, & E, ſint cubi, [d] iam eſt demonſtratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi ſint, ſic oſtendemus. Cùm ſit vnitas ad A, vt A, ad B; æquè metietur vnitas numerũ A, & numerus A, numerum B: [e] Metitur autem vnitas numerum A, per ipſummet A. Igitur, & A, ipſum B, per ſeipſum metietur; [f] Atque adeò cubus A, ſeipſum multiplicans numerum B, procreabit. [g] Quare B, cubus eſt. Quoniam verò quatuor continuè proportionales ſunt A, B, C, D, eſtque A, cubus, [h] & D, cubus erit. Eadémque ratione, aſſumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cùm B, cubus ſit; [i] & E, cubus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi ſunt. Non ſecus demonſtrabimus, omnes cubos eſſe, ſi plures continuè proportionales fuerint. Quocirca, ſi ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

SCHOLIVM.

NON demonſtrauit Geometra, ſi numerus, qui poſt vnitatem, ſit cubus ſimul & quadratus, & reliquos omnes eſſe cubos ſimul, & quadratos; quia perſpicuè hoc ipſum ex demonſtratis colligitur. Nam ſi proximus vnitati ſit cubus ſimul, & quadratus: qua parte eſt cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua verò parte eſt quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonſtratum eſt. Omnes igitur erunt cubi ſimul, & quadrati.

VERVM tota propoſitio facilius ita poterit demonſtrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos eſſe. Quoniam enim ex ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, ſeipſum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem ſcholio, A, multiplicans B, facit C, ſunt q̃, A, B, quadrati; erit & C, quadratus, ex ſcholio propoſ. 2. huius lib. Rurſus quia ex eodem ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, ſunt q̃, A, C, quadrati; erit ex eodem ſcholio propoſ. 2. huius lib. & D, quadratus: Atq; ita deinceps: cùm ex illo ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, multiplicant D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes eſſe cubos. Quia enim ex ſcholio propoſ. 10. lib. 8. cubus A, ſeipſum multiplicans facit B; [a] *erit & B, cubus. Item quia ex eodem ſcholio, A, multiplicans B, facit C, ſunt q̃, A, B, cubi;* [b] *erit & C, cubus. Rurſus quia ex eodem ſcholio, A, multiplicans C, facit D, ſunt q̃, A, C, cubi;* [c] *erit quoq;*

a 3. noni. b 4. noni. c 4. noni.

a 8. noni.

b 22. octaui. c 22. octaui.

d 8. noni.

e 5. pron. f 9. pron. g 3. noni. h 23. octaui. i 23. octaui.

D,cubus. Atq; ita de cæteris,cùm ex eo ſcholio,A,multiplicãs D,gignat E; & multiplicans E,procreet F,&c.

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, q̃ verò poſt vnitatem,non ſit quadratus,neq; alius vllus quadratus erit,præter tertium ab vnitate,& vnum intermittentes omnes. At ſi,qui poſt vnitatem, non ſit cubus, neque alius vllus cubus erit,præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A,B,C,D,E,F,G,H,I,&c. & primum A,proximus vnitati non ſit quadratus. Dico nec alium vllum eſſe quadratum,præter tertium ab vnitate,& vnum intermittentes omnes; hoc eſt,præter B,D,F,H,&c. Si enim præter hos

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D,16. E,32. F,64. G,128. H,256. I,512. K,1024. L,2048. M,4096.

a 8.noni. alius eſt quadratus,ſit quadratus E. [a] Cùm ergo & D,ſit quadratus; ſitque vt D,ad E,vel E,ad F, ita A, ad B, & conuertendo vt E, ad D, vel F,ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam
b 8.noni. quadratus numerus E,ad quadratum numerum D,vel quadratus F, ad quadratũ E; [b] ſed B, ter-
c 24. octaui. tius ab vnitate eſt quadratus. [c] Igitur & A,primus ab vnitate quadratus erit. Quod eſt abſurdum: ponitur enim A,non quadratus. Non ergo E, quadratus eſt. Eadem ratione oſtendemus, nullum alium,præter dictos, quadratum eſſe.

SED iam A, proximus vnitati non ſit cubus. Dico nec alium vllum eſſe cubum, præter quartum ab vnitate,& duos intermittentes omnes, videlicet præter C,F,I,&c. Nam ſi præter hos alius po-
d 8.noni. teſt eſſe cubus, ſit D, cubus. [d] Cùm ergo & F, cubus ſit, ſitq; ex æquo vt D,ad F, ita A, ad C, (quòd
e 8.noni. tres D,E,F, eandem habeant rationem, quam tres A,B,C,) & conuertendo vt F,ad D, ita C,ad A; habebit C,ad A,rationem, quam cubus F, ad cubum D; [e] Sed C,eſt cubus, cùm ſit quartus ab
f 25.octaui. vnitate. [f] Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit. quod eſt contra hypotheſim. Non igitur D,
g 8.noni. cubus eſt. Quod ſi E,credatur eſſe cubus; [g] cùm & C, cubus ſit, ſitque ex æquo, vt C, cubus ad E,
h 25. octaui. cubum, ita A,ad C,& conuertendo vt cubus E,ad cubum C,ita C, ad A; exiſtente C,cubo, [h] erit, & A,cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus eſt. Quemadmodum autem oſtenſum eſt, duos D,& E, inter duos cubos C,& F,cubos non eſſe; ita quoque eadem ratione oſtendemus, neq; G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos,eſſe cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri,&c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

NON eſt autem neceſſe,ſi numerus,qui poſt vnitatem, non ſit cubus ſimul, & quadratus, nullum alium eſſe cubum ſimul,& quadratum, præter ſeptimum ab vnitate, & quinq; intermittentes omnes; cùm aliquando tertius ab vnitate, aliquando verò quartus poſſit eſſe cubus ſimul,& quadratus, non exiſtente primo ab vnitate cubo ſimul,& quadrato.

Vnitas A,8, B,64. *SIT enim primùm A,qui poſt vnitatem,cubus quidem, non autem ſimul & qua-*
a 9.noni. *dratus. Dico B,tertium eſſe cubum ſimul & quadratum; cubum quidem,* [a] *quòd*
b 8.noni. *primo exiſtente cubo,omnes cubi ſint,* [b] *quadratum verò, quòd tertius ſit ab vnitate.*

Vnitas. A,4. B,16. C,64. *SIT deinde A,poſt vnitatem quadratus quidem,non autem ſimul & cu-*
c 8.noni. *bus. Dico quartum C,eſſe cubum ſimul & quadratum;* [c] *Cubum quidem,*
d 9.noni. *quòd quartus ſit ab vnitate; quadratum verò,* [d] *quòd primo exiſtente quadrato,omnes ſint quadrati.*

SIT poſtremò A,poſt vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium eſſe cubum ſimul & quadratum,præter ſeptimum F,& quinq; intermittentes omnes. Cùm enim primo non exiſtente quadra-
e 10. noni. *to,* [e] *nullus alius quadratus ſit,præter tertium*

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. E,7776. F,46656. *ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiuſmodi ſunt, vt in ſcholio propoſ. 8. huius lib. docuimus,tertius,quintus,ſeptimus,nonus,vndecimus,decimustertius,decimusquintus, decimusſeptimus,*
f 10.noni. *decimusnonus,&c. Primo autem non exiſtente cubo,* [f] *nullus alius ſit cubus, præter quartum ab vnitate,& duos intermittentes omnes, quales ſunt, vt ex eodem ſcholio apparet, quartus. ſeptimus, decimus, tertiusdecimus,decimusſextus,decimusnonus,&c. perſpicuum eſt, tantummodo ſeptimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos eſſe ſimul,& cubos,& ſic de cæteris. Nam in hac loca ſola incidunt quadratus, & cubus ſimul, vt liquidò conſtat ei, qui rectè propoſitionem hanc & octauam huius libri expenderit.*

12. THEOR. 12. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum,qui in proportionalibus ſunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunq; numeri continuè proportionales A,B,C,D,E,F,G. Dico quemlibet minorem,vt C,quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A,B,C,D,E,F,G. Cùm enim ſit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D; (quòd quinque numeri C,D,E,F,G,eandem habeant

habeant rationem continuam, quam vnitas & quatuor numeri A,B,C,D,) [a] æquè metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum G: [b] Sed vnitas metitur numerum D, per ipſummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipſum F, per A, quòd ſit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipſum G, per F, cùm ſit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

[a] 20. *defin.*

[b] 5. *pron.*

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex his, quantum abeſt maior numerus à minore metiente, tantùm diſtare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quòd eadem eſſe debet proportio minoris ad maiorẽ, quæ vnitas ad eũ, per quem metitur minor maiorem, vt ex demonſtratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C; nimirum per ſeipſum, &c. quia tam inter B, & F, quàm inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quàm inter vnitatem & C, duo interſerti ſunt numeri.

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

HINC rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſeipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantùm ab eo diſtat, quantum ipſe ab vnitate: Si verò minor aliquis maiorẽ quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantùm à maiore diſtat, quantum minor ab vnitate, propterea quòd ſi numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur; [a] producatur ille, quem metitur. Ergo C, ſa ipſum multiplicans gignet F; cùm F, tantùm abſit à C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoq; B, multiplicans D, faciet eundem F; quòd D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis.

[a] 9. pron.

THEOR. 12. PROPOS. 12. 11.

SI ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, iidem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

SINT ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D. Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoq; A, proximum vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primũ metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namq; non metitur ipſum A; [a] erit E, cùm primus ſit, ad A, primus: hoc eſt, A, & E, inter ſe primi erunt. Metiatur E, ipſum D, per F, [b] atque adeò E, multiplicans F, faciat D. Quia verò & A, ipſum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in ſcholio præcedentis propoſ. oſtendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium. [c] Quare erit vt A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cùm ergo A, & E, ſint inter ſe primi; [d] ac proinde in ſua proportione minimi; [e] metietur æquè A, ipſum F, & E, ipſum C. Metiatur E, ipſum C, per G, [f] atq; adeò E, multiplicãs G, faciat C. Quia verò & A, ex ſcholio eodem præcedentis propoſ. metitur C, per B, [g] atq; adeò A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, ſecundo in G, tertium. [h] Erit igitur vt A, primus ad E, ſecundũ, ita G, tertius ad B, quartũ. Quapropter cùm A, & E, ſint inter ſe primi; [i] ac propterea in ſua proportione minimi; [k] metietur æquè A, ipſum G, & E, ipſum B. Metiatur E, ipſum B, per H: [l] ita vt E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipſum B, per A, atq; idcircò A, ſe ipſum multiplicans facit B, vt ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertium, & ex A, medio in ſeipſum. [m] Quare erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad H, tertium. Cùm ergo E, & A, inter ſe primi ſint; [n] ac proinde in ſua proportione minimi; [o] æquè metietur E, ipſum A, & A, ipſum H. Quod eſt cõtra hypotheſim. ponitur enim E, ipſum A, non metiri. Quare falſum eſt E, ipſum A, non metiri. Nam ex eo quòd E, non dicatur metiri ipſum A, ſemper demonſtrabitur E, ipſum A, metiri; Quod eſt abſurdum. Metitur ergo E, ipſum A. Eodem argumento oſtendemus, quoſcunque alios numeros primos ipſum D, metientes, metiri quoque ipſum A; Eademque erit ratio, ſi C, vel B, vltimus numerus ſtatuatur.

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000. E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

[a] 31. *ſept.*

[b] 9. *pron.*

[c] 19. *ſept.*

[d] 23. *ſept.*

[e] 21. *ſept.*

[f] 9. *pron.*

[g] 9. *pron.*

[h] 19. *ſept.*

[i] 23. *ſept.*

[k] 21. *ſept.*

[l] 9. *pron.*

[m] 20. *ſept.*

[n] 23. *ſept.*

[o] 21. *ſept.*

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico & E, ipſum A, metiri. Si enim non metiatur; [p] erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter ſe primi ſunt, & A, ſeipſum multiplicans facit B, vt ex ſcholio propoſ. præcedentis conſtat, [q] erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi ſunt; fit autem C, ex A, in B, per idem ſcholium præcedẽtis propoſitionis [r] erit C, ad E, primus. Rurſus eodem modo quia A, & C, ad E, primi ſunt; & fit D, ex A, in C, ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. [s] erit D, ad

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

[p] 31. *ſept.*

[q] 27. *ſept.*

[r] 26. *ſept.*

[s] 26. *ſept.*

E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est contra hypothesin. Metitur ergo E, ipsum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

ITAQVE neq; vllus numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est vnitati, neq; vllus minor proximum vnitati non metiens, metiri potest vltimum. Si namq; metiretur vltimum, metiretur quoq; vnitati proximum, vt demonstratum est. quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autẽ admirabilis prima huius propos demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quòd E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod videtur fieri nõ posse. Nã si quis demonstrare instituat, Sacratem esse album, ex eo, q; non est albus, paradoxum aliquid, & inopinatũ in medium videatur afferre: Cui tamen nõ absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propositionibus, quæ sequuntur. Cardanus quoque simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 20. gloriatur q; se primùm omnium hanc rationem demonstrandi reperisse: quod arbitror eum nõ dicturum fuisse, si diligentius vim huius demonstrationis expendisset, vel certè si expendit, eã in memoriam revocasset; quandoquidem ipso longè prior Euclides vsus est hoc etiã demonstrandi modo, vt ex hoc theor. 12. est manifestum. Eodem genere demonstrãdi vsus est Theodosius lib. 1. Sphæricorum, propos. 12. vt ibid. monuimus.

CÆTERVM *ex demonstratis perspicuum est, quemcunq; numerum primum, qui vltimum metitur,* a 12. noni. *metiri etiam omnes alios ante ipsum.* a *Cùm enim metiatur proximum vnitati, hic autẽ omnes subsequen-*
b 11. noni. *tes,* b *quòd semper minor maiorem metiatur per aliquẽ eorum, qui in proportionalibus sunt numeris,*
c 11. pron. *manifestum est, quòd & ille omnes metiatur.*

13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continuè proportionales quotcunq; numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerũ, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum autem est, E, non
a 12. noni. esse numerum primũ. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; a metietur quoq; ipsum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod est absurdum. Non igitur E, primus est, sed compo-
b 33. sept. situs; b atque adeò eum aliquis numerus primus metietur.

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E---- H---- G---- F----

quem dico alium esse non posse, præter primum A. Si enim
c 11. pron. alius primus q̃ A, metiatur E; cùm E, metiatur extremum D; c metietur quoq; ille alius primus eundẽ D, d atq; adeò
d 12. noni. & ipsum A, primum; nimirum vnitati proximùm. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, q̃ A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipsum D, per aliquem
e 8. pron. ipsorum A, B, C; e & vicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipsum D, metitur,)
f 11. noni. metietur D, per E. f Cùm ergo quilibet ipsorum A, B, C, metiatur D, per aliquẽ ipsorum A, B, C; erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B, C, quod est contra hypothesim. ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C. Non igitur F, idem est, qui aliquis ipsorum A, B, C, sed diuersus. Quo-
g 8. pron. niam verò E, metitur D, per F; g metietur vicissim F, ipsum D, per E. Non erit autem F, primus: si
h 12. noni. enim sit primus, & metiatur D, vltimum; h metietur & A, proximum vnitati, qui primus est. quod
i 23. sept. est absurdum. Igitur F, non primus est, sed compositus; i atque adeò eum aliquis numerus primus metietur. quem rursus dico nullum alium esse posse præter primum A. Si namque alius primus quàm A, metiatur F; cùm F, metiatur D, extremum; k metietur quoque ille alius primus eun-
k 11. pron. dem D; l atque adeò & ipsum A, proximum vnitati, qui primus est. quod est absurdum. Ergo
l 12. noni. non alius primus, quàm A, ipsum F, metitur. Iam verò quoniam E, metitur D, per F; m fiet D, ex E, in F. Fit autem & D, ex A, in C, vt in scholio propositionis 11. huius libri docuimus. Idem igitur
m 9. pron. numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium; n Ac proinde erit vt A, pri-
n 19. sept. mus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum: Metitur autem A, ipsum E, vt ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuersus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum esse ab A, B, & non primum, sed compositum, quem solus A, primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A, B, C, metiebatur D, vltimum.

Si enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B; metiatur q; F, ipsum C, per G; metietur vtique F,
o 8. pron. ipsum C, per aliquẽ ipsorum A, B; o & vicissim aliquis ipsorum A, B, (videlicet is, per quẽ F, ipsum
p 11. noni. C, metitur) metietur C, per F. p Cùm ergo quilibet ipsorũ A, B, metiatur C, per aliquẽ ipsorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B. quod est absurdum. ostensum est enim F, nõ esse eundem

quem

quẽm aliquem ipſorum A, B. Non ergo G, eſt idem qui aliquis ipſorum A, B, ſed diuerſus. Quoniam autem F, metitur C, per G; [a] metietur viciſsim G, ipſum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus ſit, metiatur q; vltimum C, [b] metietur quoq; numerum primum A, vnitati proximum. quod eſt abſurdum. Non ergo G, primus eſt, ſed compoſitus; [c] ac proinde eũ aliquis primus metietur. quem dico nullum alium poſſe eſſe præter A. Nam ſi alius primus quàm A, metiatur G, cùm G, metiatur C, vltimum; [d] metietur quoq; ille alius primus eundem C; [e] atque adeò & ipſum A, vnitati proximum, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quàm A, ipſum G, metitur. [f] Iam verò quia C, fit ex F, in G; quòd F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in ſcholio propoſ. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartũ, & ex F, ſecundo in G, tertiũ. [g] Quare erit vt A, primus ad F, ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipſum F, vt demonſtratum eſt. Igitur & G, ipſum B, metietur. metiatur per H. Quia ergo G, diuerſus ab A, metitur B, vltimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; oſtendemus ſimiliter H, diuerſum eſſe ab A; quemadmodum id oſtenſum eſt de numeris F, & G.

a 8. pron.
b 12. noni.
c 33. ſept.
d 11. pron.
e 12. noni.
f 9. pron.
g 19. ſept.

NAM ſi H, idem ſit qui A; metiatur q́ue G, ipſum B, per H; metietur vtique G, ipſum B, per A; [h] Et viciſsim A, ipſum B, per G, metietur. Cùm igitur metiatur A, ipſum B, p A, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 11. huius lib. erit G, idem qui A. quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim G, non eſſe eundem, quem A. Non ergo H, idem eſt, qui A, ſed diuerſus. [i] Iam verò quia B, fit ex G, in H; quòd G, ipſum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in ſe, vt in ſcholio propoſ. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiũ, & ex A, medio in ſe ipſum. [k] Quare erit vt H, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad G, tertium: At A, metitur ipſum G, vt eſt demonſtratum. Igitur & H, ipſum A, metietur, numerum primum. Quod eſt abſurdum. Quare ſi A, primus eſt, maximũ D, nullus alius numerus metitur, præter ipſos A, B, C. Ac proinde ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

h 8. pron.
i 9. pron.
k 20. ſept.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus, quẽ metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipſos B, C, D, metiri ipſum A. Metiatur enim, ſi fieri poteſt, primus numerus E, diuerſus à B, C, D, ipſum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per F; [l] multipli cans E, ipſum F, faciet A. [m] Quare ſinguli B, C, D, alterum ipſorum E, F, metientur: non quidem ipſum E, primum, & ab ipſis diuerſum: ergo ipſum F, qui minor eſt, quàm A. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonſtrandum erat.

A.....
B.. C... D.....
E---- F------

l 9. pron.
m 32. ſept.

SCHOLIVM.

ADDIT hoc loco Campanus ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile. Videlicet.

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi, vel certè ad alterum erit compoſitus.

SINT quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, in ſua proportione minimi, in qua ſumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primò H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoq; vel F, vel G, vel certè ad alterum eorum compoſitum eſſe. Sit enim H, non primus, ſed compoſitus: [a] Et ſumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L; & quatuor M, N, O, P; & ſic deinceps, donec habeantur tot, vna minus, quot ſunt ipſi A, B, C, D, E. Quoniam igitur, vt conſtat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propoſ. lib. 8. numerus A, ſit ex F, in M; metietur autem H, ipſum A; erit H, compoſitus, ex ſcholio propoſ. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propoſitum; ſi verò ad M, qui quidem ſit ex F, in I, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. erit, ex ſcholio eiuſdem propoſ. 32. lib. 7. rurſus H, compoſitus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propoſitum: ſi verò ad I; cùm I, gignatur ex F, in ſe ipſum; erit H, compoſitus ad F, ex eodem ſcholio propoſ. 32. libri 7. Quòd ſi H, ſit primus, oſtendemus eodem modo, ex propoſ. 32. lib. 7. non autem ex ſcholio, eum metiri ipſum F.

a 2. octaui.

A, 16, B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
M, 8. N, 12. O, 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H---- F, 2. G, 3.

DEINDE metiatur H, non primus ſecundum B. Quia ergo B, ſit ex F, in N; erit vt prius H, cõpoſitus, vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propoſitũ; ſi verò ad N, q quidem ſit ex F, in K; erit H, eodẽ modo cõpoſitus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propoſitum; ſi verò ad K, cũ K, gignatur ex F, in G; erit quoq; H, compoſitus vel ad F, vel ad G. Quòd ſi H, ſit primus, demonſtrabimus eadem ratione eũ metiri vel F, vel G, ex propoſ. 32. lib. 7.

RVRSVS metiatur H, non primus tertium C, qui cùm ſiat ex F, in O; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propoſitum; ſi verò ad O, qui quidem ſit ex F, in L; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad L.

Si ad F, habetur propositum; si verò ad L, cùm L, gignatur ex G, in se; compositus quoq; erit H, ad G. Quòd si H, sit primus, probabimus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

PRAETEREA metiatur H, non primus quartum D; qui cùm fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositũ; si verò ad P, qui quidem fit ex G, in L; erit etiam H, compositus vel ad G, vel ad L. Si ad G, habetur propositum; si verò ad L; cùm L, producatur ex G, in se; erit quoq; H, ad G, compositus. Quòd si H, primus sit, ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

EODEM modo si H, non primus metiatur vltimum E, ostendemus H, compositum esse ad G; Si verò H, primus sit, eum metiri ipsum G; atq; ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si verò H, metiatur vltimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si deniq; H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS EORVM, quæ in lineis 2. libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM ad theorema sequens demonstrandum Theon quadam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro 2. perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; nõ alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometricè ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum fecisse à nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in 2. lib. tenuisse conspicimus.

I.

Si fuerint duo numeri, fieríque ipsorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiatq; F, ex C, in A B: Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem esse numeris G H, H I, I K, hoc est, toti numero G K, ex G H, H I, I K, composito. Quoniam enim C, multiplicans A B,

2 2. pron. A... D.. E. B C.. F..... ..... G..... H.... I.. K

fecit F; [a] metietur A B, ipsum F, per C, hoc est, A B, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione A D, ipsius G H; & D E, ipsius H I; & E B, ipsius I K, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, quæ A B, ipsius F. Quia verò per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars

b 4. pron. *est, quæ A D, ipsius G H; erit quoq; A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F; [b] Ac proinde inter se æquales erunt F, & G K. Quod est propositum.*

II.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

D..... A.... C.. B

NVMERVS enim A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B. quod est propositum.

IDEM demonstrabitur, si A B, in plures partes, quàm in duas secetur, vt ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex

E..... A... C.. D.. B

D, hoc est, ex A B, in A B, nimirũ quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B.

III.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & vna parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub partibus continetur, numero, & illi, qui à prædicta parte efficitur, quadrato.

SIT numerus A B, diuisus in A C, C B. Dico numerum, qui fit ex toto A B, in partem A C, æqualem esse & ei, qui sub partibus A C, C B, continetur, & quadrato dictæ partis A C. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti A C, æqualis sit; erit ex 1. theoremate numerus factus ex D; hoc est, ex A C, in A B; vel (quod idem est) ex A B, in A C, æqualis numeris factis ex D; hoc est, ex A C, in C B, & ex D; hoc est, ex A C, in A C, quadrato scilicet ipsius A C. Quod est propositum.

D.... A.... C..... B

Si nu-

IIII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui à partibus efficiuntur, vnà cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

Sit numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem esse quadratis partium AC, CB, vnà cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theoremate numerus quadratus ipsius AB, æqualis est numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Est autem numerus, qui fit ex AB, in AC, per tertium theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, vnà cum quadrato ipsius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vnà cum quadrato ipsius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis est quoq; numeris quadratis partium AC, CB, vnà cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod est propositum.

A..... C.... B

V.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, vnà cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

Numerus enim AB, secetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum sub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vnà cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) esse æqualem quadrato, qui ex dimidio numero CB, efficitur. Nam cùm numerus quadratus ipsius CB, per quartum theorema, æqualis sit quadratis partium CD, DB, vnà cum plano numero bis comprehenso sub CD, DB; numero verò comprehenso semel sub CD, DB, vnà cum quadrato ipsius DB, æqualis sit, per tertium theorema, numerus factus ex CB, in DB: fit, vt si hic numerus factus ex CB, in DB, sumatur pro quadrato ipsius DB, vnà cum numero facto ex CD, in DB: numerus quadratus ipsius CB, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CD, vnà cum reliquo numero facto ex CD, in DB, semel, & numero ex CB: hoc est, ex AC, in DB, producto. At qui ex primo theoremate numeris, qui fiunt ex CD, in DB, & ex AC, in DB, æqualis est numerus, qui fit ex toto AD, in DB. Igitur quadratus ipsius CB, æqualis erit quadrato ipsius CD, vnà cum numero, qui fit ex AD, in DB: hoc est, numerus factus ex AD, in DB, vnà cum quadrato ipsius CD, æqualis erit quadrato ipsius CB. Quod est propositum.

A..... C... D.. B

VI.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adiiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vnà cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

Numerus enim AB, secetur in partes æquales AC, CB, eiq; adiiciatur numerus BD. Dico numerum factum ex toto AB, & adiecto BD, tanquam vno, nimirum ex AD, in adiectum BD, vnà cum quadrato dimidij numeri CB, æqualem esse quadrato, qui fit ex CB, dimidio & adiecto BD, tanquam vno; hoc est, quadrato ipsius CD. Cùm enim quadratus ipsius CD, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium CB, BD, vnà cum numero bis comprehenso sub CB, BD: hoc est, quadratis partium CB, BD, vnà cum numeris sub CB, BD, & sub AC, BD, comprehensis: numeris autem contentis sub CB, BD, & sub AC, BD, & sub BD, BD: hoc est, quadrato ipsius BD, æqualis sit, ex primo theoremate numerus factus ex AD, in BD; fit, vt si hic numerus factus ex AD, in BD, sumatur pro quadrato partis BD, vnà cum numeris factis ex CB, in BD, & ex AC, in BD, quadratus ipsius CD, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CB, vnà cum numero facto ex AD, in BD: hoc est, numerus factus ex AD, in BD, vnà cum quadrato ipsius CB, æqualis sit quadrato ipsius CD. Quod est propositum.

A..... C.... B.. D

VII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vnà cum quadrato vnius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, vnà cũ quadrato reliquæ partis.

Diuidatur numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vnà cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, vnà cum quadrato reliquæ partis AC. Cùm enim ex 4. theoremate quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partium AC, CB, vnà cum numero, qui fit bis ex AC, in CB: si quadratus ipsius CB, addatur communis: erunt quadrati numerorum AB, CB, simul æquales quadratis numerorũ AC, CB, CB, vnà cum numero, qui fit bis ex AC, in CB. At qui ei, q fit ex AC, in CB, vnà cũ quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theor. numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vnà cũ quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, q fit bis ex AB, in CB. Igitur

A..... C.... B

ſi pro numero, qui fit bis ex A C, in C B, vnà cum quadrato ipſius C B, bis, ſumatur numerus factus bis ex A B, in C B; erunt quadrati numerorum A B, C B, ſimul, æquales numero, qui fit bis ex A B, in C B, vnà cum quadrato reliquæ partis A C. Quod eſt propoſitum.

VIII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vnà cum quadrato reliquæ partis, æqualis eſt quadrato numeri compoſiti ex toto & priori parte.

Secetur numerus A B, in partes A C, C B. Dico numerum, qui fit quater ex toto A B, in partem C B, vnà cum quadrato reliquæ partis A C, æqualem eſſe quadrato numeri, qui ex toto A B, & prædicta parte C B, componitur. Addito enim numero B D, qui æqualis ſit dictæ parti C B; cùm quadratus totius A D, compoſiti ex A B, & B D, ſiue dicta parte C B, ſit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, vnà cum numero, qui fit bis ex A B, in B D, hoc eſt, quadratis numerorum A B, C B, vnà cum eo, qui fit bis ex A B, in C B; Sint autem, ex 7. theor. quadrati numerorum A B, C B, ſimul æquales numero bis comprehenſo ſub A B, C B, vnà cum quadrato numeri A C; fit, vt ſi pro quadratis numerorũ A B, C B, ſumatur numerus factus bis ex A B, in C B, vnà cum quadrato ipſius A C, quadratus factus ex A D, æqualis ſit numero, qui fit quater ex A B, in C B, vnà cum quadrato reliquæ partis A C. Quod eſt propoſitum.

A.... C... B... D

IX.

Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati, qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli ſunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

Diuisvs ſit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos eſſe quadratorũ, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D, D B.) efficiuntur. Cùm enim quadratus numeri A D, æqualis ſit, ex 4. theor. quadratis numerorum A C, C D, vnà cum numero bis, qui fit ex A C, in C D; Si communis apponatur quadratus partis D B; erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, D B, vnà cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt ex C B, in C D. At qui quadrato ipſius D B, vnà cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales ſunt ex 7. theor quadrati, qui fiunt ex C B, hoc eſt, ex A C, & C D. Igitur ſi pro quadrato ipſius D B, vnà cum eo, qui fit bis ex C B, in C D, ſumantur quadrati ipſorum A C, C D, erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, bis; Ac propterea quadrati partiũ A D, D B, dupli erunt quadratorũ, qui ex partibus A C, C D, fiunt. Quod eſt propoſitũ.

A..... C... D.. B

X.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, adiiciatur autem illi alius quiſpiam numerus: Quadratus compoſiti numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, ſimul dupli ſunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit à numero compoſito ex dimidio & adiecto.

Sit numerus A B, diuiſus in partes duas æquales A C, C B, eiq; adiiciatur numerus B D. Dico quadratum numeri A D, compoſiti ex toto A B, & adiecto B D, & quadratum adiecti numeri B D, vtroſque ſimul, duplos eſſe quadratorũ, qui fiunt ex A C, dimidio, & ex C D, compoſito ex C B, dimidio, & adiecto B D. Cùm enim quadratus ipſius A D, æqualis ſit, ex 4. theor. quadratis partium A C, C D, vnà cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt, ex C B, in C D; ſi communis addatur quadratus partis B D; erunt quadrati numerorũ A D, B D, æquales quadratis partium A C, C D, B D, vnà cum numero bis, qui fit ex C B, in C D. Sed per 7. theor. quadrato ipſius B D, vnà cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales ſunt quadrati numerorũ C B, C D; & quadrato ipſius C B, æqualis eſt quadratus ipſius A C. Igitur ſi pro quadrato ipſius B D, vnà cum numero, qui fit bis ex C B, in C D, ſumantur quadrati numerorum C B, C D, hoc eſt, numerorum A C, C D: erũt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis numerorũ A C, C D, bis; Ac propterea quadrati numerorum A D, B D, dupli erunt quadratorum, qui ex A C, C D, efficiuntur. Quod eſt propoſitum.

Iam verò theor. 11. lib. 2. nõ poſſe numeris accommodari, hoc eſt, nullo modo fieri poſſe, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis ſit quadrato reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonſtrabimus.

Dividatvr, ſi fieri poteſt, numerus A B, in C, ita vt numerus factus ex toto A B, in partem C B, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C. Quia igitur numerus contẽtus ſub extremis A B, C B, æqualis eſt quadrato numeri medij A C; [a] *erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B: Eſt autem A B, maior quàm A C. Igitur & A C, maior eſt quàm C B. Ablato iam C D, qui ipſi C B, ſit æqualis; erit quoque vt A B, ad A C, ita A C, ad C D. Quoniam ergo totus A B, ad totum A C, eſt vt A C, ex toto A B, detractus ad C D, ex toto A C, detractum;* [b] *erit quoque vt totus A B, ad totum A C, vel vt detractus A C, ad detractum C D, ita C B, ex A B, reſiduus, hoc eſt, C D, ipſi C B,*

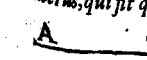
A D EC B

a 20. ſept.

b 11. ſept.

C B, æqualis, ad A D, ex A C, reſiduum. Quia igitur eſt, vt A C, ad C D, ita C D, ad A D; & eſt A C, maior q̃ C D; erit quoq; C D, maior quàm A D. Ablato ergo D E, qui ipſi A D, ſit æqualis; erit etiam vt A C, ad C D, ita C D, ad D E. Itaq; quia eſt, vt totus A C, ad totum C D, ita C D, ex toto A C, detractus ad D E, ex toto C D, detractum; [a] erit quoq; vt totus A C, ad totum C D, vel vt detractus C D, ad detractum D E, ita A D, ex A C, reſiduus: hoc eſt, D E, ipſi A D, æqualis, ad E C, ex C D, reſiduum. Quare cùm ſit, vt C D, ad D E, ita D E, ad E C; ſit autem C D, maior, quàm D E; erit etiam D E, maior, quàm E C; Ac proinde ex E D, auferri poterit numerus ipſi E C, æqualis; & ſic deinceps, nec vnquam finis erit huius detractionis. Quod eſt abſurdum: cùm numerus non poſſit diuidi in infinitum. Non ergo numerus A B, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partium factus, æqualis ſit quadrato reliquæ partis. Quod eſt propoſitum. [a] 11. ſept.

ALITER. Quoniam numerus A B, in C, ita diuiſus eſt, vt is, qui fit ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C; erit numerus, qui quater fit ex A B, in C B, quadruplus quadrati ipſius A C; Ac proinde numerus, qui fit quater ex A B, in C B, vnà cum quadrato ipſius A C, quintuplus erit quadrati partis A C. Eſt autem numerus contentus quater ſub A B, C B, vnà cum quadrato ipſius A C, quadratus; quippe cùm æqualis ſit quadrato numero, qui fit ex numero compoſito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur ſub A B, C B, vnà cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod eſt abſurdum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, vt is, qui producitur ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato ipſius A C. Quod eſt propoſitum.



VERVM hoc idem clariùs demonſtrabimus ad propoſ. 29. huius lib.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium; Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compoſitos, ad reliquum primos eſſe: nimirum A, B, ſimul ad C; & B, C, ſimul ad A; & A, C, ſimul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. manifeſtum eſt ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. D, ſeipſum multiplicantem facere A: multiplicantem verò ipſum E, facere B; atque E, ſeipſum multiplicantem facere C. [a] Quia igitur D, E, minimi in ſua proportione inter ſe primi ſunt; [b] erit & vterque D, E, ſimul ad quemlibet illorum primus. Itaque cùm tam compoſitus ex D, E, quàm ipſe D, ad E, primus ſit; [c] erit quoq; numerus factus ex D, E, tanquá vno, in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in D, æqualis eſt per 3. theor. ſcholij præcedentis, & numero A, facto ex D, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compoſiti, primi ſunt ad E: [d] Ac proinde & ad C, qui factus eſt ex E, in ſe, primi ſunt A, B, ſimul compoſiti.

A, 9. B, 12. C, 16. D, 3. E, 4.

[a] 24 ſept. [b] 30. ſept. [c] 26. ſept. [d] 27. ſept.

DEINDE quia, vt prius, [e] vterque D, E, ſimul primus eſt ad quemlibet ipſorum D, E: efficitur, (cùm tam compoſitus ex D, E, quàm ipſe E, primus ſit ad D,) [f] numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum eſſe ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in E, æqualis eſt per 3. theor. ſcholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, ſimul compoſiti, ad D, primi ſunt, [g] atque adeò & ad ipſum A, qui factus eſt ex D, in ſe, primi ſunt B, & C, ſimul compoſiti.

A, 9. B, 12. C, 16. D, 3. E, 4.

[e] 30. ſept. [f] 26. ſept. [g] 27. ſept.

POSTREMO, quia, vt prius, [h] vterque D, & E, ſimul ad quemlibet ipſorum primus eſt: atque adeò è contrario, quilibet ipſorum D, E, primus eſt ad compoſitum ex D, E, [i] erit quoque qui fit ex D, in E, ad compoſitum ex D, E, primus: [k] Ac proinde & idem, qui fit ex D, in E, ad eum, qui fit ex D, E, tanquam vno, in ſe, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in ſe, æqualis eſt, per 4. theor. antecedentis ſcholij, eis qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, vnà cum eo, qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, primi ſunt ad aliquem ipſorum: nimirũ ad eum, qui fit ex D, in E, vt oſtenſum eſt. [l] Erunt etiam duo illi; nimirum compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Rurſus quia duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipſorum: nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, primi ſunt, vt oſtenſum eſt: [m] erunt etiam duo illi; nimirum compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Cùm igitur ex D, & E, in ſe ipſos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A, & C, ſimul compoſiti, primi ad B. Quam ob rem, ſi tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 9. B, 12. C, 16. D, 3. E, 4.

[h] 30. ſept. [i] 26. ſept. [k] 27. ſept. [l] 37. ſept. [m] 30. ſept.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonſtrat de quotcunque numeris continuè proportionalibus minimis, hoc modo ipſum proponens.

Si quotcunq; numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationē habentium: Ad quemlibet eorū reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

Sint continuè proportionales minimi quotcunq; numeri A,B,C,D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A,B,C, simul ad D; & A,B,D, simul ad C; & A,C,D, simul ad B; & B,C,D, simul ad A. Si enim A,B,C, simul non sunt primi ad D, erunt A,B,C, simul at q3 D, compositi inter se; at q3 adeò eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; sumantur q3 F, & G, duo minimi in ratione A,B,C,D, numerorum. Quoniam ergo A,B,C,D, continuè proportionales sunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum; nimirum D,

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E ---- F, 2. G, 3. H----

metietur quoq; E, alterum ipsorum F,G, vel certè compositus erit ad alterum ipsorum F,G, ex scholio propos. 14. huius lib. At q3 idcircò ipsum E, & alterū ipsorum F,G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaq; cùm

a 11. pron. *H, metiatur E; & E, ponatur metiri compositum ex A,B,C, & ipsum D; a metietur quoq; H, eundem compositum ex A,B,C, & ipsum D. Quia verò H, metitur quoq; alterum ipsorum F,G; & tam F, q̄ G, medios numeros B,C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib. 8. b metietur quoq; H, medios B,C; c ac propterea & compositum*

b 11. pron.
c 10. pron.
d 12. pron. *ex B,C. Itaq; cùm H, metiatur totum compositum ex A,B,C, & detractum compositū ex B,C, vt demonstratum; d metietur quoq; idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A,D, extremi minimorum A,B,C,D, inter se compositi. e Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi*

e 3. octaui. *inter se sunt, compositus ex A,B,C, & numerus D. Ergo inter se primi.*

Rvrsvs, si A,B,D, simul compositi non sunt primi ad C, metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14. huius lib. vel metietur alterum ipsorum F,G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F,G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F,G. Itaq; cùm H, metiatur E; & E,

f 11. pron. *compositum ex A,B,D; f metietur etiam H, eundem compositum ex A,B,D. Quia verò H, metitur alterum ipsorum F,G, qui metiuntur, per coroll. 3. propos. 2. lib 8. medios B,C, g metietur quoq; H, ipsos B,C. Itaq; cùm*

g 11. pron.
h 12. pron. *H, metiatur totum compositum, ex A,B,D, & detractum B, h metietur quoque H, compositum ex A,D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt constat ex*

i 11. pron. *demonstratione propos. 2. lib. 8. i metietur etiam H, alterum ipsorum A,D. k Igitur & reliquum. Sunt ergo A,*

k 12. pron. *D, extremi inter se compositi. l Sed & primi inter se sunt. Quod fieri nō potest. Non igitur A,B,D, simul com-*

l 13. octaui. *positi, ad C, compositi sunt. Ergo primi. Quod est propositum.*

Non aliter ostendemus & A,C,D, compositos esse ad B, primos; nec non & B,C,D; simul ad A. Eadem ratio est de quotlibet numeris continuè proportionalibus.

17.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

Si duo numeri primi inter se fuerint: Non erit vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

Sint primi inter se A, & B. Dico non esse vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita B, ad alium; nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi

a 23. sept. A..... sunt inter se, a atque adeò in sua proportione minimi; b ipsi æquè metientur nume-
b 21. sept. B..... meros B, & C, in eadem ratione existentes; nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C;
C ---------- Metitur autem & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A,B, primos inter se, Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

18.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autē ipsorum primi inter se sint: Non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad aliumquempiam.

Sint continuè proportionales quotcunque numeri A,B,C,D, quorum extremi A,D, inter se primi sint. Dico non esse vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita D, ad alium; videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E. Sunt autem A,D, cū sint

c 23. sept. inter se primi, c minimi in sua proportione. d Igitur æquè metiētur ipsos B, & E; nimirū A, ipsum
d 21. sept. B, & D, ipsum E. Atqui est vt A, ad B, ita B, ad C: Ergo cùm A, me-
A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E ---- tiatur ipsum B; & B, ipsum C, metietur; e atque ob id & A, ipsum
e 11. pron. C, metietur. Et quia est vt B, ad C, ita C, ad D; metitur autem B, ipsum C; metietur & C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, f metietur quoq; ipsum D. Metitur
f 11. pron. verò & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A,D, inter se primos. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita D, ad alium numerū E. Eodem quoq; argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

19.

PROBL. 1. PROPOS. 18.

Dvobvs numeris datis considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

Dati

DATI duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis; hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B. Aut igitur
A, 4. B, 7. A, B, primi inter se sunt, aut non. Si sunt inter se primi [a] perspicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si verò non sunt A, & B, *a 16. noni.*
inter se primi; multiplicans B, seipsum faciat C. Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primũ A, ipsum C, per D. Dico ipsis A, B, inueniri posse tertiũ proportionalem, immò ipsum D, esse
tertiũ proportionalẽ. Cũ enim A, metiatur C, per D, [b] fiet C, ex A, in D:
A, 4. B, 6. D, 9. C, 36. Fit autẽ ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A, D, æqualis est ei, qui ex medio B, describitur; *b 9. pron.*
[c] Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B. *c 20. sept.*

SED non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuẽtus sit D, ita vt sit A, ad B, quemadmodum B, ad D. Quoniam igitur est, *d 20. sept.*
vt A, ad B, ita B, ad D; [d] erit numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in
se ipsum; hoc est, ipsi C. Quare cùm C, fiat ex A, in D; [e] metietur A, i. *e 7. pron.*
A, 6. B, 4. D---- C, 16. psum C, per D: sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem via considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis considerauimus, &c. Quod faciendum erat.

PROBL. 2. PROPOS. 19. 20

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis; hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, vt A, ad B. Multiplicans B, ipsum C, faciat D. Aut igitur A, ipsum D, metitur, aut non. Metiatur primùm A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse
A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216. quartum proportionalem, immò ipsum E, esse quartum
A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72. proportionalem. Cùm enim A, metiatur D, per E; [f] fiet D, *f 9. pron.*
ex A, in E. Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & tertio continetur; [g] Ac propterea erit, vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus est E, ipsis A, B, C, quartus *g 19. sept.*
proportionalis.

SED iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalem. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus proportionalis E; ita vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales sunt, [h] erit numerus contentus sub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, *h 19. sept.*
A, 4. B, 6. C, 9. E---- D, 54. tertium; hoc est, ipsi D. Quare cùm D, fiat ex A, in E; [i] me- *i 7. pron.*
A, 3. B, 4. C, 10. E---- D, 40. tietur A, ipsum D, per E: sed & ponitur non metiri. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus nõ metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C, B, A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis considerauimus, an possit, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

HAEC, quæ proximis quatuor propositionibus, nimirũ 16. 17. 18. & 19. demonstrata sunt, intelligi debent de numeris integris. Nam si de fractis loquamur, potest quibuslibet duobus, vel tribus adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter se primi sint. Nam datis duobus, si quadratus numerus secundi diuidatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. si quadratus numerus secundi 8. nimirũ 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis $21\frac{1}{3}$. hoc modo, 3. 8. $21\frac{1}{3}$. Quia enim diuisis 64. per 3. fit numerus $21\frac{1}{3}$. producetur numerus diuisus 64. ex multiplicatione Quotientis $21\frac{1}{3}$. per diuisorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cùm ergò idem numerus 64. factus sit ex medio numero 8. in se; [a] erunt 3. 8. a 20. sept.
$21\frac{1}{3}$. continuè proportionales.

DATIS autem tribus numeris, si numerus ex secundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. si numerus 120. ex secundo in tertium genitus diuidatur per primum 9. reperietur quartus proportionalis $13\frac{1}{3}$. hoc modo, 9. 6. 20. $13\frac{1}{3}$. Cùm enim diuisis 120. per 9. fiat $13\frac{1}{3}$. producetur numerus diuisus 120. ex multiplicatione Quotientis $13\frac{1}{3}$. per diuisorem 9. ex iis, quæ in defin. 15. lib. 7. scripsimus. Fit autem idem numerus diuisus ex secundo in tertium. [b] Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. $13\frac{1}{3}$. proportionales sunt. b 19. sept.

EX his facilè cognoscemus, propositis quotcunque numeris continuè proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum sequuntur, inter quos etiam est Federicus Commandinus, quatuor membrũ hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; Aut nõ deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quonam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in alijs quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrãdo dormitârint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumq; non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati non sint deinceps proportionales, sed eorũ extremi inter se primi, non posse ipsis quatuor proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nã falsitas huius rei perspicuè in his numeris non continuè proportionalibus, apparet 4.8.9. quorum extremi 4.9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cùm vtrobique proportio sit subdupla? Idem videri potest in exemplis alijs infinitis, vt hic 2.4.7.14. Item 3.9.4.12. Item 2.10.3.15. Item 5.10.6.12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorũ trium sunt inter se primi, cùm tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartũ proportionalem. Quòd autẽ vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuũ fiet, si demonstrationẽ ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinãtur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C; inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E. Sed sunt A, C, inter se primi, [a] & ob id minimi.

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E----

a 23. septimi.

b 21. septimi.

[b] Igitur metientur æquè ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At verò & A, seipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

HAEC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse, vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E; quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt. Immò hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quàm tribus A, B, C; cùm non magis hoc constet in illis, quàm in his. Quapropter cùm ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendant: liquidò constat, eos petere principium (vt cum Dialectici loquamur) in demonstrando. Quin etiam quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum, atq; probatũ assumunt; quandoquidem sine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, vt B, secundus ad C, tertium. Hoc verò non posse fieri, facilè demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, nõ tamen deinceps, sintq; A, & C, primus & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, vt sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E; atque adeò, vt ipsi ostenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, vt D, ad E, sit, quemadmodũ B, ad C. Quare apertissimè falsum in demonstratione secundi membri assumpserũt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E----

PRIMVM verò membrum perspicuè & apertè ostendunt. Num si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; [c] manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus.

c 17. noni.

21. THEOR. 18. PROPOS. 20.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorũ numerorũ.

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. Sumpto enim numero D E, minimo, quẽ A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. Sit primùm primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures proposita multitudine A, B, C.

A, 2. B, 3. C, 5. 30. 1. D---------- E. F

a 38. sept.

SED iam nõsit primus D F. [b] Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico G, primum nulli ipsorum A, B, C, eundem esse. Si namque G, sit idem, qui vnus ipsorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipsum D E; & G, eundem D E, metietur. Quare G, metiẽs totum D F, & detractum D E, [c] metietur quoque E F, reliquum, numerus vnitatem. Quod

A, 3. B, 5. C, 7. 105. 1. D---------- E. F

b 33. sept.

53. G-------

c 11. pron.

Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui vnus ipsorum A, B, C: Ac proinde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademque via plures inuenientur, quàm A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Poterat idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

Primis numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

Nam si primi quotcunque propositi sint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum: videlicet D F, si primus est, vel certè G, qui ipsum D F, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium sextum inueniemus; & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 22.

Si pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

Componantvr quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compositũ A D, parem esse. Cùm enim A B, B C, C D, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius A B; & E, ipsius B C: & G, ipsius C D. Quoniam igitur est vt A B, ad E, ita B C, ad F; & C D, ad G; (quòd semper sit proportio dupla;) [a] erit quemadmodum vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, simul. Est autẽ A B, ipsius E, duplus. Igitur & totus A D, compositi ex E, F, G, duplus erit: Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

A..... B.... C..... D
E... F.. G....

[a] 12. *sept.*

THEOR. 20. PROPOS. 22. 23.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

Componantvr quotcunque numeri impares, quorum multitudo par A B, B C, C D, D E. Dico & totum compositum A E, parem esse. Cùm enim A B, B C, C D, D E, sint impares; differet quilibet vnitate à pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. [b] Quare & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. [c] Igitur & totus A E, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

A... B..... C..... D..... E

[b] 21. *noni.* [c] 21. *noni.*

THEOR. 21. PROPOS. 23. 24.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

Qvotcvnqve numeri impares, quorum multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum A D, compositum, imparem esse. Cùm enim impar numerus differat vnitate à pari ex definitione; ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par. [d] Est autẽ & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. [e] Igitur & A E, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita vnitate E D, totus A D, impar erit, cùm impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

A..... B... C..... E. D

[d] 22. *noni.* [e] 21. *noni.*

SCHOLIVM.

Pari ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet impar. Nam demptâ vnitate ex impare, reliquus erit par; cùm ex defin. Impar à pari differat vnitate. [a] Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa vnitate, totus fiet impar; cùm à pari sola vnitate differat. Quod est propositum.

[a] 21. noni

THEOR. 22. PROPOS. 24. 25.

Si à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

Ex pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior, quàm dimidia pars, vel minor. Sit primùm dimidia pars. Cùm igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

A..... C..... B

Sed iam CB, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius AB. Quoniam igitur AB, CB, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione: sit DB, dimidia pars ipsius AB; & EB, dimidia ipsius CB. Itaque cùm sit vt AB, ad DB, dimidium, ita CB, ad EB, dimidium; erit permutando vt AB, ad CB, ita DB, ad EB; & diuidendo vt AC, ad CB, ita DE, ad EB. Rursumque permutando, vt AC, ad DE, ita CB, ad EB.

A..... C.. D... E..... B
A.....D... C.. E.. B

Atqui CB, ipsius EB, duplus est: Igitur & AC, ipsius DE, duplus erit; Ac propterea AC, cùm bifariam diuidatur, (quòd DE, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

A. D.... C..... B

Facilivs demonstrabimus hanc propositionem, ducendo ad impossibile, hoc modo: Si AC, reliquus non dicatur par, sed impar; detracta vnitate AD, erit reliquus DC, par. [a] *Igitur compositus DB, par quoq; erit; ac proinde addita vnitate AD, totus AB, impar fiet. quod est absurdum, cùm par ponatur.*

a 21. noni.

26. THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

Ex pari numero AB, impar detrahatur CB. Dico & reliquum AC, imparem esse. Detracta enim vnitate CD, ex CB, reliquus sit numerus DB, par. Quia igitur & totus AB, ponitur par; [a] erit & reliquus AD, par. Dempta ergo vnitate CD, reliquus AC, impar erit. Si igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 24. noni. A..... C. D.... B

27. THEOR. 24. PROPOS. 26.

Si ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

A..... C..... D. B

Ex impari numero AB, impar detrahatur CB. Dico reliquũ AC, parem esse. Detracta enim DB, vnitate ex imparibus AB, CB; erunt reliqui AD, CD, pares. Quia ergo ex pari AD, par aufertur CD; [b] erit & reliquus AC, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

b 24. noni.

28. THEOR. 25. PROPOS. 27.

Si ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

Ex impari AB, detrahatur par CB. Dico reliquum AC, imparem esse. Detracta enim AD, vnitate ex impare AB, erit reliquus DB, par: Ex quo cùm detrahatur CB, par; [c] reliquus DC, par quoque erit; Ac proinde addita vnitate AD, fiet AC, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

c 24. noni. A. D.... C..... B

29. THEOR. 26. PROPOS. 28.

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

A... B....
C.....

Fiat ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates. Quare cùm B, sit par, componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; [d] Atque adeò par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

d 21. noni.

SCHOLIVM.

Eadem demonstratione ostendemus & hoc.

Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

A.. B.....
C.....

Nam rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, aqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

COROLLARIVM.

A.... B....
C.....

Constat quoq; ex his, Parem numerum in se multiplicatũ procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur æquales.

30. THEOR. 27. PROPOS. 29.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

Ex

Ex impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cùm tam A, quàm B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini vnitatũ, quæ in A, impari continentur. [a] Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A... B.....
C.....

a 23. noni.

COROLLARIVM.

Hinc sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur æquales.

A... B...
C.....

EX CAMPANO.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; [a] erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cùm ponatur par. Est ergo C, par.

A... C...
B.....

a 29. noni.

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; [b] erit B. factus ex A, impari in C, par impar. Quod est absurdum, cùm impar ponatur. Est ergo C, impar.

A... C.....
B.....

b 28. noni.

SCHOLIVM.

Ex his clarissimè quoq; demonstrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam in scholio propos. 14. huius lib. aliter ostendimus; recepimusq; nos hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus A B, in partes A C, C B, ita vt numerus ex A B, in C B, factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C. Aut igitur vtraq; pars A C, C B, impar est; aut maior A C, impar, & minor C B, par; aut contra, maior A C, par, & minor C B, impar; aut denique vtraq; pars A C, C B, par. Sit primùm vtraque pars A C, C B, impar, [c] ideoq; totus numerus A B, par. [d] Igitur qui fit ex A B, in C B, par est: qui verò ex A C, in se fit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cùm ergo numerus ex A B, in C B, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex A C, in se; erit par numerus impari æqualis. quod fieri non potest.

A------C----B
D--- E--

c 22. noni.
d 28. noni.

DEINDE, sit A C, impar, & C B, par, ideoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar. [e] Quia ergo numerus ex A B, impare in parem C B, factus, par est: & numerus ex impare A C, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari æqualis. quod est absurdum.

e 28. noni.

TERTIO, sit A C, par, & C B, impar; ideoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar. [f] Quia ergo numerus ex A B, impare in imparem C B, factus, impar est: & numerus ex pare A C, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille impar huic pari æqualis. quod absurdum est.

f 29. noni.

QVARTO, sit vtraq; pars A C, C B, par. Inuentis igitur, ex scholio propos. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione A C, ad C B; [g] erunt D, E, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel vterque impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia est, vt A C, ad C B, ita D, ad E; erit conuertendo, vt C B, ad A C, ita E, ad D: Et componendo, vt A B, ad A C, ita totus D E, ad D: [h] Est autem, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; quòd numerus factus ex A B, in C B, æqualis ponatur quadrato medij A C. Igitur erit quoq; vt totus D E, ad D, ita D, ad E, [i] ac proinde numerus, qui fit ex toto D E, in E, æqualis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus D E, sectus est in partes D, E, quarum vel vtraque impar est, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto D E, in partem E, æqualis sit quadrato alterius partis D. quod fieri non posse, iam demonstratum est in numero A B, quando vtraq; pars A C, C B, vel impar est, vel vna impar, & altera par. Constat ergo propositum.

g 24. septi.
h 20. septi.
i 20. septi.

THEOR. 28. PROPOS. 30. 33.

Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidium quoque ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo, ex iis, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstrauimus, numerus C, par; Atque adeò dimidiam partem habebit. Itaque cùm A, metiatur B, per C, [a] metietur quoque C, ipsum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam verò est vt C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidiũ sui; & permutando vt C; ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B. Est autem C, pars ipsius B, denominata ab A, vt ostensum est; erit & dimidium ipsius C, dimidij ipsius B, pars ab eodem A, denominata. [b] Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

A... C....
B.....

a 8. pron.
b 40. sept.

34. ## THEOR. 29. PROPOS. 31.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoq; primum esse. Si enim A, C, non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D; qui necessariò impar erit. Nam si sit par, cùm metiatur imparem A; [a] erit A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metiès; (est enim C, par; cùm dimidium habeat B.) [b] metietur quoq; numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipsos A, B, primos inter se metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit, &c. Quod erat ostendendum.

A..... B.....
C..... D----

[a] 28. noni.

[b] 30. noni.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam si primus est ad duplum, [a] primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus est: Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c.

[a] 31. noni.

35. ## THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM à binario duplorum vnusquisque pariter par est tantùm.

NVMERI à binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantùm. Quòd enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam expositâ vnitate, cùm A, sit binarius, & B, C, D, E, à binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. [a] Quare A, quemlibet ipsorũ B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cùm omnes sint pares, vtpote dupli à binario; metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem. Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

[a] 11. noni.

QVOD autem iidem numeri sint pariter pares tantùm, liquidò etiam constat. Cùm enim A, B, C, D, E, sint ab vnitate continuè proportionales, sitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirum binarius; [b] nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E; qui cùm sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantùm: Ac propterea quilibet pariter par est tantùm. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 13. noni.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmeticis facilè colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantùm. Sint enim A, B, C, D, E, F, à binario dupli, qui ex hic demonstratis omnes sunt pariter pares tantùm. Dico nullum alium esse pariter parem tantùm, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeò si ordo numerorum à binario duplorum infinitè augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantùm, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeò G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantùm) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atq; ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantùm.) Atq; ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars vnitas, ita vt sit I, binarius. Igitur H, G, sunt à binario I, dupli; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F. ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantùm, præter eos, qui à binario sunt dupli.

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
I----H----G-----

36. ## THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantùm.

HABEAT numerus A: dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantùm. Quòd enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidiũ habet imparem, metietur

A..... metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quòd autem idem A, sit pariter impar tantùm, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantùm; ipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. [a] Igitur sit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium, [b] Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantùm. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quòd demonstrandum erat.

A.....
B.... C..
D----- E----

[a] 9. prop.
[b] 19. septimi

SCHOLIVM.

Impares. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Pariter impares tantùm. 6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

Itaque si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantùm. Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tantùm, constat ex hac propositione; quippe cùm quilibet dimidium habeat imparem. Quòd autem illi soli sint pariter impares tantùm, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec à binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem præter duplos imparium numerorum; manifestum est, nullum alium, præter ipsos, esse pariter imparem tantū; sed vel esse pariter parem tantū, vel certè pariter parē & pariter imparē.

THEOR. 32. PROPOS. 34. 37.

SI par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

A..... PAR numerus A, neque sit à binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quòd enim sit pariter par, liquet. Nam cùm dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cùm in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Aliàs si per imparem metiretur, [c] cùm impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cùm impar metiatur A, per parem; atque adeò vicissim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque à binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 29. noni.

SCHOLIVM.

FACILE ex his inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui à binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematib. apertè intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7 scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

A.....
B.... G..... C
D.....
E.....K.....I....H.....F

A.
B.. G. C
D.....
E.....K.....I..H. F

SINT quotcunque numeri continuè proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, vltimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico esse vt B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. Quoniam igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia verò est vt A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita D, ad



BC, & BC, ad A; Atque est KF, ipsi D, & IF, ipsi BC, & HF, ipsi A, æqualis: Erit quoque vt EF, ad KF, ita KF, ad IF, & IF, ad HF. Diuidendo igitur vt EK, ad KF, ita KI, ad IF, & IH, ad HF; [a] Ac proinde ita etiã erunt omnes EK, KI, IH, ad omnes KF, IF, HF, hoc est, totus EH, ad D, BC, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales KF, IF, HF,) vt IH, ad HF, hoc est, vt BG, ad A; sunt enim BG, & A, ipsis IH, & HF, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. sept.

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunq; numerorum continuè proportionalium, si modò primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cùm enim sit vt excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus à secundo, & vltimo dematur, fiatq; vt reliquus secundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium: Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adiiciatur vltimus, habebitur tota summa.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secundi: vt liquet ex scholio propos. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus est, sunt, excessus secundi, primus, & excessus vltimi: Vt in exemplo apposito, si primus numerus, nimirum vnitas, detrahatur ex 3. secundo; & ex 2187. vltimo; erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse vt 2. ad 1. ita 2186. ad summam omnium, excepto vltimo, si secundus numerus 1. multiplicetur per tertium 2186. fiet numerus 2186. qui si diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si addatur summæ inuentæ 1093. procreabitur summa omnium 3280.

39. THEOR. 34. PROPOS. 36.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compositus sit primus, & E, multiplicans D, vltimum faciat F. Dico F, esse numerum perfectum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; [b] Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F, ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; [c] ideoq; I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipsius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, E, deinceps dupli sunt. Detrahantur ex G, secundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, sintq; reliqui excessus M, N. [d] Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, æqualis ipsi E. (Cùm enim G, duplus sit ipsius E, ablatusq; sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex vnitate, & A, B, C, D, numeris; (qui compositus eidem E, per constructionem, est æqualis) erit compositus ex L N, nimirum ipse F, æqualis vnitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, simul. Quare cùm vnitas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipsum F; (Cùm enim F, factus sit ex E, in D; [e] metietur D, ipsum F; [f] atque adeò eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, [g] qui ipsum D, metiuntur. Rursus cùm I, ipsum F, metiatur, vt ostensum est, [h] metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, [i] qui ipsum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipsum F, metiatur, vt mox ostendemus; Erunt vnitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cùm æqualis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ------ 62. H, 124. I, 248. F ------ 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O ----- P ----

b 19. sept.
c 7. pron.
d 35. noni.
e 7. pron.
f 11. pron.
g 11. noni.
h 11. pron.
i 11. noni.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur, si fieri potest, alius numerus O, præter illos, ipsum F, per P; [k] atq; adeò F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus est ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, secundo in O, tertium; [l] ac propterea est vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam verò, cùm A, B, C, D, ab vnitate sint proportionales, & A, proximus vnitati primus, [m] vltimum D, nullus alius, præter A B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neque igitur E, ipsum P, metietur. Cùm ergo E, primus sit, [n] erunt E, & P, inter se primi; [o] ideoque in sua proportione minimi: [p] Ac proinde æquè metietur E, ipsum O, & P, ipsum D. [q] Nullus verò alius præter A, B, C, ipsum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipsorum A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot sunt B, C, D; tot ab E, sumantur dupli

k 9. pron.
l 19. septimi
m 13. octaui.
n 31. septimi
o 23. septimi.
p 21. septimi
q 23. octaui.

tur dupli E,G,H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H: [a] Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, secundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, quí ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, [b] atque adeò erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum, ponitur enim O, diuersus ab omnibus A,B,C,D,E,G,H,I. Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B,C,D,E,G,H,I, metiuntur. Quam ob rem, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

a 19. *septimi*

b 19. *septimi*

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunq; numeri ab vnitate dupli in vnam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continuè dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate, excluſa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vnà cum ipsa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere poteſt. Quæ omnia perſpicua ſunt ex demonſtratione theorematis, & facilè ex ſubiectis exemplis percipi poſſunt. Vt quia numerus 3. compoſitus ex 1.2. primus eſt; erit propterea numerus 6. qui ſit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1,2.3. Item, quia compoſitus ex his 1.2.4. nimirum 7. primus eſt: idcirco 28. factus ex 7. in 4. eſt perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At verò quia compoſitus ex his 1.2.4.8. hoc eſt, 15. non eſt primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

Deinque quia compoſitus ex his 1.2.4.8.16. nimirum 31. primus eſt; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1.2.4.8.16.31. 62. 124.248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

Libet hoc loco demonſtrare proprietates quaſdam proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. ſeptimo loco, cùm de proportionalitate Geometrica agemus, expoſuimus. hinc exordientes.

I.

Quolibet numero per duos quoſuis numeros diuiſo, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerſo ordine proportionales.

A, 48. B, 8. C, 3. D, 6. E, 16.

Numerus enim A, diuiſus per B, C, faciat quotientes D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiſo A, per B, fit Quotiens D; fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Eadem ratione idem A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, ſecundo in E, tertium; [a] *erit vt B, primus ad C, ſecundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod eſt propoſitum.*

a 19. ſept.

II.

Quolibet numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales.

A, 48. B, 3. C, 4. D, 8. E, 6. F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

Diuiſo enim numero A, per B, C, D, E, ſint Quotientes F, G, H, I. Dico eſſe, vt B, ad C, ita G, ad F: Et vt C, ad D, ita H, ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifeſtum eſt ex theoremate 1. proximè demonſtrato. Cùm enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt E, ad C, ita G, ad F. Item cùm duo C, D, diuidentes A, faciant G, H; erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cùm duo D, E, diuidentes A, faciant H, I; erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atq; ita deinceps, ſi plures fuerint. Quod eſt propoſitum.

III.

Quolibet numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiſo, erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales.

A, 15. B, 1. C, 2. D, 4. E, 8. F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$.

Diuiſo enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales, ſint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales eſſe. Quoniam enim per 2. theorema eſt, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc eſt, vt D, ad E, ita H, ad G; Et vt B, ad C, hoc eſt, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F; erunt I, H, G, F, continuè proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod eſt propoſitum.

IIII.

Si ſint quotuis numeri quicunq;, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorum ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet.

A,3. B,6. C,20. D,29. E,6. F,12. G,40. H,58.

SINT quotuis numeri A,B,C, quorum ſumma D: Et totidem alij E,F,G, quorum ſumma H; ſitq; vt A,ad B,ita E,ad F; & vt B,ad C,ita F,ad G. Dico eſſe,vt D,ad A, B,C, ſigillatim,ita H, ad E,F,G, ſigillatim. Cùm enim ſit, vt A,ad B, ita E,ad F; erit componendo, vt A, B, ſimul ad B, ita E,F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F,ad G. Igitur ex æquo,vt A,B,ſimul ad C,ita erit E,F, ſimul ad G: Et componendo, vt A, B,C,ſimul, hoc eſt,vt D,ad C,ita E,F,G, ſimul,hoc eſt,H,ad G. quod eſt propoſitum.

QVIA igitur eſt,vt D,ad C,ita H,ad G: Et conuertendo,vt C,ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D,ad B,ita H,ad F. quod eſt propoſitum.

DENIQVE quia eſt,vt D,ad B,ita H,ad F: Et conuertendo,vt B, ad A,ita F, ad E; erit ex æquo, vt D, ad A,ita H,ad E. quod eſt propoſitum. Eademq; ratio eſt de pluribus.

V.

SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim,faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.

NAM,vt in 4.theor. oſtenſum eſt,eadem proportio eſt ſummæ priorum ad primum, quæ ſummæ poſteriorum ad primum: ac proinde vtriuſq; proportionis idem denominator erit. Cùm ergo ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur. ſi vtraq; ſumma ſeorſum per primos numeros, quæq; per ſuum,diuidatur. Eademq; ratio eſt, ſi per ſecundos,tertios,quartos,&c. diuiſio fiat. Conſtat ergo propoſitum.

VI.

SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; Et Quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes; & ſic deinceps in infinitum: procreabuntur alternis ſemper iidem primi Quotientes ordine conuerſo.

SINT continuè proportionales quotuis numeri A,B,C,D, quorum ſumma E, per ipſos diuiſa faciat Quotientes F,G,H,I, & horum ſumma K, per eos diuiſa faciat Quotientes L,M,N,O. Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis,ordine conuerſo,hoc eſt, F, & O, eoſdem eſſe; Item G, & N; H, & M; I, & L, &c.

A,1. B,2. C,4. D,8. E,15. F,15. G,7½. H,3¾. I,1⅞. K,28⅛. L,1⅞. M,3¾. N,7½. O,15.

Quoniam enim per 3.theor. Quotientes F,G,H,I, eandem continuam proportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A,B,C,D: Et Quotientes L,M,N,O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F,G,H,I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quam numeri A,B,C,D: erit per 4. theoremata, E, ad K, vt K, ad I. Quare cùm ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuiſione E, per K, qui ex diuiſione K, per I. Cùm ergo Quotientes ſint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L, &c. quod eſt propoſitum.

VII.

SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.

SINT primùm quotuis numeri multitudine pares continuè proportionales A,B,C,D,E,F, quorum ſumma G, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes H,I,K,L,M,N, quorum ſumma O. Dico ſummam O, æqualem eſſe numerum qui fit ex H in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H,I,K, L,M,N, ſunt continuè proportionales conuerſo ordine in proportione A, ad B; erit N, ad M, vt I, ad H.

A,1. B,2. C,4. D,8. E,16. F,32. G,63. H,63. I,31½. K,15¾. L,7⅞. M,3 1/16. N,1 3/32. O,124½.

a 19. ſepti. *Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc eſt, idem ex H, in N, qui ex I, in M. Eadem ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in L. Et quoniam per 6. theor. ſumma O, diuiſa per H,I,K,L,M,N, producit eoſdem Quotientes conuerſo ordine, hoc eſt, ſumma O, diuiſa per H, facit Quotientem N; producetur ſumma O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.*

A,1. B,2. C,4. D,8. E,16. F,31. G,31. H,15½. I,7¾. K,3⅞. L,1 1/16. M,60 1/16.

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares cõtinuè proportionales A,B,C,D,E, quorum ſumma F, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes G, H,I,K,L, quorum ſumma M. Dico ſummam M, æqualem eſſe numerum genitum ex G, in I; & ex H, in K; & ex I, in ſeipſum. Quòd enim æqualis ſit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonſtrabimus, vt prius. Deinde verò

verò quia tres numeri H,I,K, continuè proportionales sunt; [a] erit numerus ex H,in K, genitus:id est,summa M,æqualis numero,qui ex I, in seipsum ducto generatur. quod est propositum. [a] 20. septi.

HINC fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius latus, siue radix,est medius terminus.

ITAQVE si inueniendi sint quotcunque numeri cõtinuè proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur; vel ex quibusuis duobus, qui ab extremis æqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos sigillatim diuidatur; erunt Quotientes quæsiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum summa sit numerus quadratus,cuius latus,siue radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidẽ numeri continuè proportionales, eorumq; summa per eos sigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quæsiti,vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile sanè est, posse reperiri quotcunq; numeros continuè proportionales in data proportione,etiam mille,aut plures,quorum omnium summa æqualis sit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus,qui ab extremis æqualiter distant,inter se multiplicatis;& denique,si terminorum numerus est impar, ex medio termino in seipsum multiplicato.

SIC etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero producto ex vno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunq;, eorumq; summam per vtrumq; diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæsitos, vt ostensum est: quia videlicet eorum summa æqualis est numero,qui fit ex primo in vltimũ,hoc est,in secundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa æqualis sit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunq; in data proportione sequiquinta, nimirum 6. & 5. eorumq; summa 11. per vtrumq; diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. & $2\frac{1}{5}$. sunt numeri quæsiti. Habent enim proportionem sesquiquintam datam, & tam eorum summa, quàm numerus ex multiplicatione eorũ productus,est $4\frac{1}{30}$.

MINVTIARVM SIVE NVMERORVM fractorum

DEMONSTRATIONES.

I.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas,eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorẽ, & numerator C,sit vnitas. Dico ita esse minutiam A B,ad minutiam C B,vt est numerator A,ad numeratorem C. Quoties enim vnitas C,continetur in A,toties minutia C B, in minutia A B,includitur; propterea quòd minutia A B, diuiditur in tot minutias minutiæ C B, æquales,quot vnitates sunt in A, ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B. [b] Igitur eadem pars est vnitas C, numeri A, quæ minutia C B, minutia A B; ac proinde est,vt vnitas C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A B: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutia A B, ad minutiam C B. quod est propositum.

A, 6. C, 1.
B, 11. B, 11.

[b] 20. defin.

QVONIAM verò minutiæ sunt fractiones, siue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuspiam numeri, (Neque enim eorum sententiam probare possum, qui existimant,eas respectu solius vnitatis esse accipiendas; propterea quòd falsò putant,earum demonstrationes nõ posse omnes explicari in numeris integris,sed solum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibusuis etiam numeris integris accommodabimus.)conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam studiosus lector addiscat,veras esse demonstrationes,quas afferimus.

SINT ergo data minutia $\frac{5}{11}$. & $\frac{1}{11}$. particulæ,verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius $\frac{1}{11}$. est 4. & $\frac{5}{11}$. sunt 24. perspicuum est,ita esse 4. ad 24. vt est numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.

HANC porrò propositionem demonstrabimus propos. 4. in vniuersum de quibuscunq; duabus minutiis eiusdem denominationis,etiamsi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionẽ habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

SIT minutia quæcunque A B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, vt est minutia A B, ad suum integrum. Sumatur minutia C B,cuius numerator C,vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia suo integro æquiualet; quippe quæ tot particulas integri contineat,in quot ipsum integrum diuisum est,ac proinde totum integrum contineat. [c] Quoniam igitur est,vt A,ad C,ita mi-

A, 3. C, 1. D, 5.
B, 5. B, 5. B, 5.

[c] 1. huius.

nutia A B,ad minutiam C B: Et vt C,ad D,ita minutia C B,ad minutiam D B; erit ex æquo vt A,ad D,hoc est,vt numerator A,ad denominatorem B,ipsi D,æqualem,ita minutia A B,ad minutiam D B,hoc est,ad integrum. quod est propositum.

A, 1. C, 1. B, 5. C,30.

ALITER. Sit primùm datæ minutiæ A B,numerator A,vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri C, siue C, sit vnitas,siue numerus,pars,inquam, aliquota à B,denominata, propterea quòd tot minutiæ ipsi A B, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas est in B,denominatore. Cùm ergo & vnitas A, sit pars numeri B,ab ipso B,denominata,vt ad defin.2.lib.7. scripsimus; eadem pars erit vnitas A,numeri E,quæ minutia A B,integri C. [a] *Quare erit,vt A,numerator ad B,denominatorem,ita minutia A B,ad integrum C. quod est propositum.*

a 20.defin.

A, 3. D,1. C, 1. B, 5. B,5. C,30.

DEINDE non sit vnitas numerator A.Sumatur minutia D B,cuius numerator D,vnitas & denominator idem B,qui minutiæ A B. [b] *Et quia est,vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et vt D,ad B, ita minutia D B,ad integrum C,vt proximè demonstrauimus; erit ex æquo,vt A,ad B, numerator ad denominatorem,ita minutia A B,ad integrum C. quod est propositum.*

b 1.huius.

ITAQVE si data minutia $\frac{3}{5}$. sit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6.ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18.vbi vides ita esse 18. ad 30.vt est 3.ad 5.numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

SIT quælibet minutia A B. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. [c] *Quoniam enim est, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B,ad suum integrum C; erit permutando, vt A, ad minutiam A B, ita B, ad integrum: Et conuertendo, vt minutia A B, ad A, ita integrum ad B. Cùm ergo integrum C, sit pars denominatoris B, (hoc est,integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore B.)ab ipso denominatore B, denominata; (Cùm enim æquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipsum integrum toties acceptum,quoties vnitas est in denominatore; sit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata,vt ad defin.2.lib.7. scripsimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore)erit quoque minutia A B,numeratoris A,(hoc est,integri toties accepti,quoties est vnitas in numeratore A.)eadem pars à denominatore B,denominata. quod est propositum.*

c 2.huius.

A, 3. C, 1. B, 5. C,30.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. esse huius integri 30. cuius $\frac{3}{5}$. sunt 18.Et quia numerator 3. numerat tria integra,hoc est,valet 90.& denominator 5.valet 150.(quemadmodum,cùm eadem minutia $\frac{3}{5}$. sumitur respectu vnitatis,numerator continet tres vnitates, & denominator quinque,) liquidò constat, 18. esse quintam partem numeratoris,hoc est,trium vnitatum,quarum qualibet numerum integrum 30. significat, quæ tres vnitates faciunt 90. partem, inquam, à denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer,quinta pars est denominatoris,hoc est,quinque vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat,quæ quinque vnitates conficiunt 150. pars,inquam,à denominatore 5.denominata.

IIII.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem,eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propositione ostensum est de duabus minutiis,quarum altera numeratorem habet vnitatem,demonstratur hic de quibusuis minutiis.Habeant ergo duæ minutiæ A B,C B, eundem denominatorem B.Dico esse minutiam A B,ad minutiam C B,vt est A,ad C,numerator ad numeratorem. [d] *Quia enim est,vt A,ad B, ita minutia A B, ad suum integrum: Et vt B, ad C,ita integrum ad minutiam C B;* (Nam [e] *cùm sit,vt C,ad B,ita minutia C B, ad integrum,erit conuertendo, vt B, ad C,ita integrum ad minutiam C B.) erit ex æquo, vt A,numerator ad C, numeratorem,ita minutia A B,ad minutiam C B. quod est propositum.*

A, 6. C, 3. B, 7. B, 7.

d 2.huius. e 2.huius.

DATAE minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{3}{7}$. sint huius integri 28. cuius $\frac{5}{7}$. sunt 24. & $\frac{3}{7}$. sunt 12. vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12.vt est numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris,& posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem.

F, 10. G, 12. A, 2. C, 4. B, 3. D, 5. H, 15.

SINT duæ minutiæ A B,C D : Et ex A,in D, fiat F; & ex C,in B, fiat G. Dico esse minutiam A B,ad minutiam C D,vt est F,ad G. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A,B,multiplicantes D, faciunt F,H; [f] *erit vt A,ad B,ita F, ad H. Vt autem A, ad B,* [g] *ita est minutia A B,ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia A B, ad integrum,ita F,ad H.Rursus quia C,D,multiplicantes B, faciunt G,H;* [h] *erit vt C,ad D, ita G,ad H: Et conuertendo,vt D,ad C,ita H,ad G.Vt autem D,ad C,ita est integrum ad minutiam C D.(Nam* [i] *cùm sit, vt C, ad D, ita minutia C D, ad integrum, erit cõuertendo,vt D,ad C,ita integrum ad minutiam C D.) Igitur erit quoq;, vt H, ad G, ita integrũ ad minutiã C D.Ex æquo igitur erit,vt F,ad G,ita minutia AB,ad minutiã C D.* ℣ *est propositũ.*

f 18.sept. g 2 huius. h 18.sept. i 2.huius.

F. A B. H. Integrum. G. C D.

SI dua

Si duæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}$. sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

Itaque si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis: si minor, minor: Et si maior, maior; propter eandem proportionem F, ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum maior sit.

VI.

INTEGRVM ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorũ productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter verò ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

F, 10. G, 12. A, 2. C, 4. B, 3. D, 5. H, 15.

SINT duæ minutiæ A B, C D. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F; & ex C, in B fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarũ A B, C D, vt est H, ad summam numerorum F, G. [a] *Quoniam enim est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad G; erit componendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad minutiam C D, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia C D, ad integrum, ita est G, ad H,* [b] *(Nam vt minutia C D, ad integrum, ita est C, ad D.* [c] *Et vt C, ad D, ita est G, ad H: propterea quòd C, D, ipsum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H: Et cõuertendo, vt integrum ad summam minutiarum A B, C D, ita H, ad summam numerorum F, G. quod est propositum.*

a 5. huius.

AB, CD. F, G. CD. G. Integrum. H.

b 2. huius. c 18. septi.

SINT rursus duæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}$. particulæ numeri 30. cuius $\frac{2}{3}$, sunt 20. & $\frac{4}{5}$. eiusdem 24. ac proinde summa minutiarum 44. Vbi vides, ita esse integrum 30. ad hanc summam 44. vt est 15. ex denominatoribus productus ad 22. summã numerorũ 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorũ.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

D, 105. E, 35. A, 5. B, 7. A, 5. C, 21.

HABEANT duæ minutiæ A B, A C, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam A C, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E; [d] *erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E,* [e] *ita est minutia A B, ad minutiam A C. Igitur erit quoque minutia A B, ad minutiam A C, vt C, ad B. quod est propositum.*

d 17. septi. e 5. huius.

DVAE minutiæ $\frac{5}{7}.\frac{5}{21}$. sint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$. sunt 30. & $\frac{5}{21}$. eiusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIAE, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

A, 3. C, 9. B, 4. D, 12.

SINT duæ minutiæ A B, C D, sitq; eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. [f] *Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia A B, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia C D, ad idem integrũ: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoq; minutia A B, ad integrum, vt minutia C D, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ A B, C D. quod est propositum.*

f 2. huius.

SED sint iam æquales minutiæ A B, C D. Dico esse, vt A, ad B, ita C, ad D. Cùm enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia A B, ad integrum, ita minutia C D, ad idem integrum. [g] *Est autem, vt minutia A B, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia C D, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod est propositum.*

g 2. huius.

A, 3. C, 2. B, 4. D, 3.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. Dico maiorem esse minutiam A B, quàm C D. [h] *Cùm enim sit, vt A, ad B, ita minutia A B, ad integrum; & vt C, ad D, ita minutia C D, ad idem integrum; ponatur autem maior proportio A, ad B, quàm C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ A B, ad integrum, quàm minutiæ C D, ad idem integrum. Maior ergo est minutia A B, quàm minutia C D. quod est propositum.*

h 2. huius.

VERVM sit iam minutia A B, maior, quàm minutia C D. Dico maiorem esse proportionẽ A, ad B, quàm C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ A B, maioris ad integrum, quàm minutiæ C D, minoris ad idem integrum. [i] *Cùm ergo sit, vt minutia A B, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia C D, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. quod est propositum.*

i 2. huius.

MINVTIARVM $\frac{3}{4}.\frac{9}{1\ 2}$. integer numerus sit 24. cuius tam $\frac{3}{4}$. quàm $\frac{9}{1\ 2}$. sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ $\frac{3}{4}.\frac{9}{1\ 2}$. At $\frac{2}{3}$. eiusdem numeri 24. sunt 16. vbi manifestum est, numerum 18. maiorem esse numero 16. ideoq; minutiam $\frac{3}{4}$. maiorem esse minutia $\frac{2}{3}$.

IX.

MINVTIAE, quarum numeratores eandem proportionem habẽt, quam denominatores; sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionẽ, quam denominatores. Cuius autẽ numerator maiorem proportionẽ habet, q̃ denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorẽ habet proportionem, quã denominator.

A, 6. C, 2.
B, 9. D, 3.

SINT duæ minutiæ A B, C D, sitq; eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: [a] *ac proinde minutiæ æquales erunt. quod est propositum.*

a 8. huius.

SED sint iam minutiæ æquales A B, & C D. Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D. [b] *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propositum.*

b 8. huius.

A, 6. C, 2.
B, 9. D, 5.

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Dico minutiam A B, maiorem esse minutia C D. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D, [c] *ac propterea maior erit minutia A B, quàm C D. quod est propositum.*

c 8. huius.

VERVM sit iam minutia A B, maior quàm C D. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quàm B, ad D. [d] *Erit enim maior proportio A, ad B, quàm C, ad D: ideoq; & permutando maior proportio erit A, ad C, quàm B, ad D. quod est propositum.*

d 8 huius.

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}.\frac{3}{5}$. partes integri numeri 90. vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. hoc est, 60. æqualem esse minutiæ $\frac{2}{3}$. id est, numero 60. At verò minutiã eandem $\frac{6}{9}$. id est, 60. maiorẽ esse minutia $\frac{3}{5}$. hoc est, numero 54.

X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

E, 10. F, 9.
A, 2. C, 2.
B, 3. D, 5.
G, 15.

DVAE minutiæ A B, C D, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias E G, F G, quarum numeratores E, F, & denominator idem G, esse æquales minutiis A B, C D. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; [e] *erit vt A, ad B, ita E, ad G.* [f] *Quare minutiæ A B, E G, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G,* [g] *erit vt C, ad D, ita F, ad G.* [h] *Igitur minutiæ C D, F G, æquales erunt. quod est propositum.*

e 18. sept.
f 8. huius.
g 18. sept.
h 9. huius.

XI.

INTEGRVM numerum quemcumque ad dati denominatoris minutiam reducere.

A, 1. B, 6. C, 6.

SIT primùm A, integrum 1. reducendum ad minutiam, cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiam B C, vnitati A, æqualem esse. [i] *Quia enim est, vt B, ad C, ita minutia B C, ad integrum A: Est autem B, ipsi C, æqualis. Igitur & minutia B C, integro A, id est, vnitati, erit æqualis quod est propositum.*

i 2. huius.

DEINDE sit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam B C, integro A, æqualem esse. Supponatur enim integro A, vnitas D, vt fiat minutia A D, tot vnitatibus æqualis, quoties vnitas est in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, vt A, ad D, vnitatem. Cùm ergo minutiarum A D, B C, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, [k] *ipsæ inter se æquales erunt. Quare cùm minutia A D, sit integro A, æqualis, ob denominatorem, qui, est vnitas; erit quoq; minutia B C, eidem integro A, æqualis. quod est propositum.*

A, 7. B, 42.
D, 1. C, 6.

k 8. huius.

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primùm minutia A B, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: vel denominator B, quando par est, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramq; minutiam C B, A D, duplum esse minutiæ A B. Cùm enim minutiæ A B, C B, eundem habeant denominatorem; [l] *erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita C B, ad A B, minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia C B, minutiæ A B, dupla erit. quod est propositum.*

A, 3. C, 6. A, 3.
B, 8. B, 8. D, 4.

l 4. huius.

RVRSVS quia minutiæ A B, A D, eundem habent numeratorem; [m] *erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita A D, ad A B, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia A D, minutiæ A B, dupla erit. quod est propositum.*

m 7. huius.

DEINDE dimidianda sit minutia A B. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A: Vel numerator A, quando par est, dimidietur, vt fiat numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtramq; minutiam A B, D B, dimidium esse minutiæ A B. Cùm enim minutiæ A B, A C, eundem habeant numeratorem;

A, 6. A, 6. D, 3.
B, 11. C, 22. B, 11.

meratorem; [a] erit vt B,ad C,denominator ad denominatorem,ita A C,ad A B,minutia ad minutiam. Cùm ergo B,sit per constructionem ipsius C, dimidium; erit & minutia A C, minutiæ A B, dimidium. quod est propositum. a 7.huius.

RVRSVS cùm minutiæ A B,D B,habeant eundem denominatorem; [b] erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem,ita D B,ad A B,minutia ad minutiam. Cùm ergo D, sit ipsius A,dimidium,ex constructione; erit & minutia D B,minutiæ A B,dimidium. quod est propositum. b 4. huius.

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur,&c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur,&c.eodem manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia,quarta,&c. manente eodem numeratore.

SIC etiam datæ minutiæ sumetur pars tertia, quarta,&c. si denominator triplicetur,quadruplicetur, &c.manente eodem numeratore; vel(quando fieri potest)si numeratoris tertia pars,quarta,&c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum,denominator verò ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B,minutia minutiæ C D,respectu integri numeri E, sive vnitatis E,& valorem huius minutiæ minutia exprimat simplex minutia K. Fiat F,ex A,in C; & G,ex B,in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem esse simplici minutiæ F G, respectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G.

F, 6. H, 9.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. E, 24.
G, 12. K, 1/2.

Fiat enim rursus H,ex C,in B. [c] Et quoniam est,vt A,ad B,ita minutia A B; [d] ad suum integrum,nimirū ad minutiam C D,cuius integrum est E: [d] Item vt A,ad B,ita est F,ad H; quòd A,B, ipsum C, multiplicantes faciant F,H: Erit quoque,vt minutia A B,ad minutiam C D, ita F, ad H. Rursus [e] quia est,vt C,ad D,ita minutia C D,ad suum integrum E: [f] Item vt C,ad D,ita est H,ad G; quòd B,ipsos C,D,multiplicans fecerit H,G; Erit quoq; vt C D, minutia ad suum integrum E,ita H,ad G. Quoniam igitur est,vt minutia A B,ad minutiā C D, ita F,ad H: Et vt minutia C D,ad E,integrum,ita H,ad G; erit ex æquo,vt A B, minutia minutiæ C D,ad integrum E,ita F,ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quòd simplex minutia K, æqualis posita sit datæ minutiæ A B, minutiæ C D; cùm eius valorem respectu integri E,exprimat. Igitur erit quoque,vt F, ad G,ita minutia simplex K,ad integrum E. [g] Cùm ergo quoque sit, vt F,ad G,ita minutia F G, ad idem suum integrum E; æquales erunt minutiæ simplices K,& F G: ac proinde cùm minutia K, æqualis sit datæ minutiæ minutiæ, erit quoque simplex minutia F G, æqualis datæ minutiæ A B, respectu minutiæ C D,cuius integrum E. quod est propositum. c 2.huius. d 18.sept. e 2.huius. f 17. sept. g 2.huius.

A B. F.
C D. H.
E. G.

SIT 2/3. minutia minutiæ 3/4. respectu integri 24. Huius numeri 3/4. sunt 18. & huius numeri 2/3. sunt 12. qui numerus est 1/2. dati integri numeri 24. Manifestum autem est, si tam numeratores 2. 3. inter se multiplicentur, quam denominatores 3.4. procreari minutiam 6/12. quæ huic 1/2. æquiualet,qualis nimirum erat numerus 12.respectu numeri integri 24.

XIIII.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere.

E; 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

SIT primùm A B,minutia minutiæ C D. Ex A,in C, fiat E; & ex B, in D, fiat F. [h] Et quoniam minutia E F, exprimit valorem minutiæ A B,respectu minutiæ C D; reducta erit data minutia minutiæ ad simplicem minutiam E F. quod est propositum. h 13. huius.

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12. K, 24.

DEINDE sit A B,minutia minutiarum C D,E F,ita vt C D,sit minutia minutiæ E F; & A B,minutia minutiæ C D. Fiat G,ex A,in C; & H,ex B,in D. Item I,ex G,in E; & K,ex H,in F; atq; ita deinceps, si plures sint minutiæ, numeri vltimo loco producti I,K,in numeros sequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam I K, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem esse. [i] Nam minutia G H,æqualis est minutiæ A B,minutiæ C D,respectu minutiæ E F,tanquam integri cuiusdam. [k] Item minutia I K,æqualis est minutiæ G H,(hoc est, minutiæ A B,minutiæ C D.) minutiæ E F,respectu integri,cuius E F,est minutia; & sic deinceps,si plures sint minutiæ. Quare minutia I K,ex numeris vltimo loco productis constituta, æqualis est datæ minutiæ minutiarum. quod est propositum. i 13.huius. k 13. huius.

SIT 2/3. minutia minutiarum 3/4. 1/2. respectu integri 24. Huius numeri 1/2. est numerus 12. & huius numeri 3/4. sunt 9. Huius denique 2/3. sunt 6. qui numerus est 1/4. totius integri 24. Liquidò autem constat, si tam numeratores 2.3.1. inter se multiplicentur, quàm denominatores 3.4.2. gigni minutiam 6/24. quæ æqualis est minutiæ 1/4. qualis nimirum pars erat numerus 6. respectu integri 24.

XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B, ad aliam æqualem reducenda sit, cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum; denominatorem verò denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Item ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans A B, facit G, H; [a] erit vt A, ad B, ita G, ad H, [b] ac proinde minutiæ A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit F, [c] metietur C, ipsum F, per D: [d] Metitur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cùm ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoq; C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata; propterea, quòd G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutiæ est minutiæ F, respectu integri G, sunt q; numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur; [e] constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri G; cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cùm numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum K; (quòd numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus est numerus K,) constituet minutia C, minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem eiusdem integri G, cuius numerator est vnitas, & denominator numerus K, qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ C D, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri G, pars erit ipsius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus C, ipsum G, metietur per K; toties nimirum sumptus, quoties vnitas est in K, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L, numerum. Quod est propositum.

a 17. sept.
b 8. huius.
c 7. pron.
d 5. pron.
e 13. huius.

G, 24. K, 8.
A, 2/3 B, F, 12. C, 3/4 D,
H, 36. L, 9.
C. 1/4. F, 1/2. M, 1/8.

XVI.

DVARVM minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignũt numeros æquales, æquales sunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius verò numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: sint q; primùm numeri E, F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales esse. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quartum æqualis est numero F, facto ex C, secundo in B, tertium; [f] erit vt A, primus ad C, secundum, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem. [g] Quare minutiæ A B, C D, æquales sunt. VEL sic. [h] Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E, ipsi F, æqualis; erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis. quod est propositum.

f 19. sept.
g 9 huius.
h 5. huius.

E, 24. F, 24.
A, 2/3 B, C, 8/3 D, 12.

SED sint iam æquales minutiæ A B, C D. Dico numerum E, æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum [i] erit, vt A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem. [k] Quapropter idem numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL sic. [l] Quoniam est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E, F, æquales. quod est propositum.

i 9. huius.
k 19. sept.
l 5. huius.

DEINDE sit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoq; A B, maiorem esse minutia C D. Cùm enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quàm F; gignetur F, ex minore numero quàm A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quartum, & ex C, secundo in B, tertium, [m] erit vt G, primus ad C, secundum, ita B, tertius ad D, quartum: Est autem maior proportio A, ad C, quàm G, ad C; quòd A, maior sit quàm G. Igitur maior quoque erit proportio A, ad C, quàm B, ad D; [n] ac proinde minutia A B, maior erit, quàm minutia C D. VEL sic. [o] Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E, maior quàm F; erit quoque minutia A B, maior quàm minutia C D. quod est propositum.

m 19. sept.
n 9. huius.
o 5. huius.

E, 24. F, 21.
G, 1 3/4 A, 2/3 B, C, 7/3 D, 12.

VERVM sit iam minutia A B, maior quàm minutia C D. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cùm enim maior sit minutia A B, quàm minutia C D, [p] erit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Minor ergo numerus, quàm A, habebit ad C, eandem proportionem, quam B, ad D, qui sit G. [q] Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium. Cùm ergo ex A, in D, maior fiat, q; ex G, in D propterea

p 9. huius.
q 19. sept.

propterea quòd A, maior est quàm G; erit quoq; E, factus ex A, in D, maior, quàm F, ex C, in B, genitus.

VEL sic. [a] *Quoniam est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F: Est autem A B, minutia maior quàm minutia C D; erit quoq; E, maior quàm F. Quod est propositum.* a 5. huius.

ATQVE hæc est quoq; demõstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiam ad 5. propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia A B, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia A B, ad minores terminos reuocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim, si fieri potest, ad minores terminos C, D, ita vt minutia C D, minutiæ A B, sit æqualis. [b] *Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; sunt q; C, D, numeri minores numeris A B; non erunt A, B, minimi termini in sua proportione:* [c] *sunt autem & minimi, cùm primi inter se sint. quod est absurdum.*

A, 36. B, 48. C, 12. D, 3. E, 4.

SI verò A, B, non sint inter se primi; [d] *sit eorum maxima mensura C, quæ metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam D E, cuius numerator D, & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ A B, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E;* [e] *producentur A, B, ex C, in D, E.* [f] *Quare erit vt A, ad B, ita D, ad E, & ac propterea minutia A B, D E, æquales erunt. Deinde quia C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erunt ex coroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.*

b 8. huius. c 23. sept. d 2. sept. e 9. pron. f 17. sept. g 8. huius.

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare.

SIT data minutia A B, reuocanda ad æqualẽ aliam, cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam E C, cuius numerator E, & denominator C, datus, æqualem esse minutiæ A B, datæ. Quia enim B, metitur D, per E, [h] *fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C.* [i] *Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum;* [k] *ideoq; minutiæ A B, E C, æquales erunt. quod est propositum.*

A, 3. B, 4. C, 12. D, 36. E, 9.

QVOD si B, non metiatur D, ex A, in C, procreatũ, non poterit data minutia A B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia ergo minutiæ A B, E C, æquales sunt; [l] *erit vt A, ad B, ita E, ad C.* [m] *Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium; videlicet numerus D, factus ex A, in C.* [n] *Igitur B, metietur D, per E. quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsum D, non metiri.*

h 9. pron. i 19. sept. k 8. huius. l 8. huius. m 19. sept. n 7. pron.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus; denominator verò maior numerus diuidens.

A, 6. B, 11. A, 6. B, 11.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cuius numerator A, & denominator B. [o] *Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus diuisus ad diuidentem: hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum: hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia A B, Quotiẽs diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.*

o 2. huius.

HINC fit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid supersit; Quotienti integro inuento addendam adhuc esse minutiam, cuius numerator sit numerus ex diuisione reliquus; denominator verò, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui necessariò minor est numero diuidente, diuidendus adhuc est per eundem numerum diuidentem, qui maior est. Verbi gratiâ. Diuiso numero 23. per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc diuidenda per 4. [p] *Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$. ita vt totus Quotiens fit $5\frac{3}{4}$.*

p 19. huius.

XX.

MINVTIAS plures in vnam summam colligere.

A, 3. B, 10. C, 4. B, 10. D, 7. B, 10.

SINT primùm addendæ duæ minutiæ A B, C B, eiusdem denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam D B, esse summam ex additione minutiarum A B, C B, collectam. Quoniam enim minutia eundem habẽt denominatorẽ; [q] *erit vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B:*

q 4. huius.

a 4. huius. *Et componendo, vt A,C, ſimul ad C, ita minutiæ A B,C B, ſimul ad minutiam C B.* [a] *Vt autem C, ad D, ita quoq; eſt minutia C B, ad minutiam D B. Igitur ex æquo erit, vt A,C, ſimul ad D, ita minutiæ A B,C B, ſimul ad minutiam D B. Cùm ergo A, & C, ſimul æquales ſint ipſi D, ex conſtructione; erunt quoq; minutiæ A B, C B, ſimul æquales minutiæ D B. Quod eſt propoſitum.*

Deinde ſint addendæ duæ minutiæ A B, C D, diuerſarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem poſterioris; & C, numerator poſterioris in B, denominatorem prioris, collectaq; ſit ſumma E, ex duobus illis productis, cui ſupponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorum B,D, procreatus. Dico minutiam E F, eſſe ſummam ex datis duabus minutijs A B, C D, collectam. [b] *Quoniam enim eſt, vt integrum ad ſummam duarum minutiarum A B, C D, ita F, ex denominatoribus producta ad E, ſummam productorum ex numeratoribus in denominatores viciſſim*

b 6. huius. A, 2. B, 3. ⋈ C, 3. D, 4. E, 17. F, 12.

c 2. huius. *ductis; erit conuertendo, vt ſumma minutiarum A B, C D, ad integrum, ita E, ad F:* [c] *Vt autem E, ad F, ita quoq; eſt minutia E F, ad idem integrum. Igitur erit, vt ſumma minutiarum A B, C D, ad integrum, ita minutia E F, ad idem integrum. Quapropter ſumma minutiarum A B, C D, æqualis erit minutiæ E F: ac proinde minutia E F, ſumma erit ex minutijs A B, C D, collecta. quod eſt propoſitum.*

Vel ſic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores viciſſim, & ex multiplicatione denominatorum inter ſe, fiunt duæ minutiæ eiuſdem denominationis, minutijs A B, C D, æquales, vt ex demonſtratione propoſitionis 10. conſtat: ſi ſummæ E, productorum ex numeratoribus in denominatores ſupponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia E F, ſumma minutiarum A B, C D; hoc eſt, duarum illarũ eiuſdem denominationis, ad quas A B, C D, reductæ ſunt, vt initio huius propoſitionis eſt demonſtratum.

Iam verò datis pluribus minutijs, addendæ primùm erunt duæ primæ: deinde hæc ſummæ cũ tertia coniungenda, atq; hæc ſumma cum quarta, & ſic deinceps, donec omnes abſoluantur.

Quod ſi dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra ſeorſum, & minutiæ ſeorſum.

Sint verbi gratiâ, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. ſunt 40. & $\frac{3}{4}$. ſunt 45. Ex 40. & 45. ſit ſumma 85. hoc eſt, totus numerus integer 60. & inſuper 25. vnitates, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta eſt ſumma $\frac{17}{12}$. id eſt, ſemel 1. & inſuper $\frac{5}{12}$.

Ita etiã ſumma minutiarũ $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. eſt $\frac{2}{2}\frac{7}{7}$. hoc eſt, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarũ minutiarum integrũ ſit 36, erit $\frac{1}{3}$. ipſius 12. at $\frac{4}{9}$. eiuſdem, 16. Vbi vides ex 12. & 16. conſici 28. hoc eſt, $\frac{7}{9}$. ipſius integri 36.

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

Ex maiore minutia A B, detrahenda ſit minor C B, ſintq; primũ hæ minutiæ eiuſdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquus ſit numerus D, cui idem denominator B, ſupponatur. Dico minutiã D B, reliquam eſſe poſt detractionem minutiæ C B, ex minutia A B. Quia enim C, ex A, ſubtractus relinquit D; componetur A, ex C, & D. Minutia ergo A B, cuius numerator A, ex numeratoribus C, D, collectus eſt, ſumma eſt duarum minutiarum C B, D B, vt in prima parte antecedentis propoſitionis oſtenſum eſt. Quare detracta minutia C B, ex minutia A B; reliqua fiet minutia D B. Quod eſt propoſitum.

A, 7. B, 10. C, 3. B, 10. D, 4. B, 10.

Deinde minutiæ A B, C D, habeant diuerſos denominatores, detrahendaq; ſit minor C D, ex maiore A B. Ex C, numeratore minoris in B, denominatore maioris fiat E; & ex A, numeratore maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atq; E, ablatus ex F, relinquat G, cui ſupponatur denominator H, ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam G H, eſſe reliquã poſt detractionem minutiæ C D, ex minutia A B. Quoniam enim D, multiplicans A, B, facit F, H; [d] *erit vt A, ad B, ita F, ad H:* [e] *vt autẽ A, ad B, ita eſt minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoq; vt F, ad H, ita minutia A B, ad integrum. Rurſus quia B, multiplicãs C, D, facit E, H;* [f] *erit vt C, ad D, ita E, ad H,* [g] *Vt autem C, ad D, ita eſt minutia C D, ad integrum. Igitur erit quoq; vt E, ad H, ita minutia C D, ad integrum. Quia igitur eſt, vt E, primus ad H, ſecundum, ita minutia C D, tertius numerus ad integrũ, quartum numerũ,* [h] *Et vt G, quintus ad eundem ſecundum H, ita minutia G H, ſextus numerus ad idem integrum, quartũ numerum; erit ex 5. theor. ſcholij propoſ 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus ſimul, ad H. ſecundum, ita minutia C D, G H, tertius & ſextus numerus ſimul, ad integrũ. Vt autem E, G, ſimul ad H, ita eſt F, ipſis E, G, æqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoq; vt F, ad H, ita minutia C D, G H, ſimul ad integrũ. Cũ ergo oſtenſum ſit, vt eſt F, ad H, ita eſſe minutiam A B, ad integrũ; erit quoq; vt minutia A B, ad integrũ, ita minutia C D, G H, ſimul ad idem integrũ: ac propterea æquales erũt minutia A B, & minutia C D, G H, ſimul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. qd eſt propoſitũ. Vel ſic. Quoniã ex multiplicatione numeratorũ in denominatores viciſſim, & ex ductu denominatorũ inter ſe, gignũtur duæ minutiæ eiuſdẽ denominatiõis minutijs datis æquales, vt ex demõſtratione propoſ. 10. cõſtat: ſi E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; et reliquo*

d 17. ſept. e 2. huius. F, 15. E, 8.

f 17. ſept. g 2. huius. A, 3. B, 4. ⋈ C, 2. D, 5. G, 7. H, 20.

h 2. huius.

numero G, ſupponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliqua poſt detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, veluti initio huius propoſitionis oſtenſum eſt.

IAM verò ſi dentur integra vnà cum minutijs, ſubtrahenda erunt integra ſeorſum ab integris, & minutia à minutia. Quòd ſi minutia detrahenda, maior ſit, quàm ea, à qua fieri debet ſubtractio, [a] reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit ſubtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærentis. Vt ſi ſubtrahenda ſint $6\frac{2}{5}$. ex $10\frac{3}{4}$. ſubtractis 6. ex 10. ſuperſunt 4. & ſubductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. ſupereſt minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At ſi ſubtrahenda ſint $4\frac{9}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebunt q; 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. ſuperſunt 15. & ſubducta minutia $\frac{9}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua eſt minutia $\frac{2}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{2}{28}$. a 11. huius.

SINT verbi gratiâ $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ huius numeri integri 40. Igitur ſi $\frac{2}{5}$. id eſt, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc eſt, ex 30. ſuperſunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt ſuperior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A, C, inter ſe fiat E, cui ſupponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter ſe. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F: [b] Erit q; vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia verò C, multiplicans A, F, facit E, H; [c] erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rurſus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F; [d] erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita oſtendimus eſſe minutiam E F, ad minutiam C D: [e] Et vt A, ad B, ita eſt minutia A B, ad integrum; hoc eſt, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex definitione Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D. Quod eſt propoſitum.

H, 60. G, 40.
A, 2. C, 4. E, 8.
B, 3. D, 5. F, 15.
A. G.
E. F.
B. H.

b 5. huius. c 17. ſept. d 17. ſept. e 12. huius.

QVOD ſi minutia per numerum integrum ſit multiplicanda, ſupponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt numerus integer datus, denominator autem vnitas. Ex quo fit, ſatis eſſe, ſi tunc numerator propoſitæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero ſupponatur eiuſdem minutiæ propoſitæ denominator; propterea quòd vnitas integro numero ſuppoſita in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ nõ auget. Vt ſi multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. per 5. fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

SI verò integris minutiæ adhæreant, [f] reuocanda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, atq; ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis vnus numerator conſtitui. Vt ſi multiplicanda ſint $7\frac{2}{3}$. per $4\frac{1}{2}$. fient hæ duæ minutiæ multiplicandæ $\frac{23}{3}\cdot\frac{9}{2}$. f 11. huius.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero aſſumpto conferenda, vt in additione, ac ſubtractione factum eſt, ſed cum quadrato numeri integri aſſumpti: quia cùm comparatio inter ſimilia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter ſe gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri; hoc eſt, cum eius quadrato. Itaque ſint $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$. minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Neceſſe eſt ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiuſdem faciant numerum, qui conſtituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in ſe producitur. Id quod liquidò conſtat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. ſunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiuſdem ſunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$. numeri 3600, hoc eſt, quadrati ipſius 60. g 9. pron. h 22. huius.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia A B, per minutiam C D, & primùm huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F; ita vt diuiſo A, per C, Quotiens ſit E, & diuiſo B, per D, Quotiens ſit F. Dico minutiam E F, eſſe Quotientem diuiſionis minutiæ A B, per minutiam C D. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; & gignetur A, ex C, in E; & B, ex D, in F. [h] Igitur minutia A B, producta eſt ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D: ac proinde ex definitione multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia E F, ad 1. Quocirca cùm ſit, vt A B, minutia diuiſa ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia E F, ad 1. erit ex defin. Diuiſionis minutia E F, Quotiens diuiſionis minutiæ A B, per minutiam C D. Quod eſt propoſitum.

A, 12. C, 3. E, 4.
B, 16. D, 8. F, 2.
A, 6. C, 3. E, 2.
B, 8. D, 8. F, 1.
A, 3. C, 3. E, 1.
B, 8. D, 4. F, 2.

DEINDE numeri C, D, minutiæ C D, non metiantur numeros A, B, minutiæ A B. [i] Reducatur minutia i 15. huius.

E, 24. A, 2. K, 12. C, 3. G, 8.
F, 36. B, 3. D, 4. H, 9.

E, 90. A, 6. K, 15. C, 3. G, 30.
F. 135. B, 9. D, 5. H, 27.

AB, ad aliam æqualem EF, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutiæ CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, veluti propos. 15. ostensum est. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H; erit minutia GH, Quotiens diuisionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, vt initio huius propositionis demonstratum est. Quod est propositum.

QVIA verò G, H, numeri minutiæ Quotientis GH, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum est, facti est ad diuisionem cuiusuis minutiæ per quamlibet minutiam, si numerator A, minutiæ diuidendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis; & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterior H, denominatorẽ Quotientis minutiæ GH. Atque hoc verum est in omnibus minutijs, siue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, siue non. Nam semper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ diuidendæ secundùm doctrinam propos. 15. reuocatur, vt ex eius propos. demonstratione liquet, at q_3 in hoc apposito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeros A, B, metiuntur per G, H, & numeros E, F, procreatos ex AB, in K, productum ex C, in D, idem numeri C, D, metiuntur per L, M: at q_3 adeò tam minutiæ GH, q_3 L, M, Quotiens est minutia AB, per minutiam CD, diuisæ.

E, 48. A, 8. K, 6. C, 2. G, 4. L, 24.
F, 54. B, 9. D, 3. H, 3. M, 18.

IAM verò si numerus integer diuidendus sit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, supponenda est ei vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est datus numerus integer, & denominator 1. Vt si numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{1}{1}\frac{6}{2}$. vt in apposito priori exemplo perspicuum est. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda sit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in posteriori exemplo apparet.

$\frac{8}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{16}{1}$

$\frac{1}{2}\ \frac{8}{1}\ \frac{1}{16}$

QVOD si minutiæ adhæreant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propositionis diximus.

VERVM quia non facilè est memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorẽ autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; satius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter se permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vsurpare. Vt si diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{21}{8}$. vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ semper ducitur in denominatorẽ minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores esse multiplicandos inter se, vt fiat numerator, &c.

$\frac{3}{4}\ \frac{7}{2}\ \frac{21}{8}$

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda sit per eiusdem $\frac{2}{7}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuum autem est, diuisis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{5}{8}$, id est, minutiam $\frac{21}{8}$. quæ proximè inuenta est. Sic etiam si integer numerus 10. vicies sumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus suprà fuit, ex diuisione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIIII.

MINVTIAM in minutiam inferre.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inferenda, sit q_3 primùm sensus, addendam esse minutiam AB, vnius particulæ minutiæ CD, ad minutiam CD: hoc est, addendas esse $\frac{3}{4}$. vnius septimæ ad $\frac{5}{8}$. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numerator prioris, & composito numero G, supponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam GH, procreari ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo sensu, quem diximus: hoc est, minutiam GH, æqualem esse minutiæ AB, reſpectu vnius particulæ minutiæ CD, additæ ad minutiam CD. Quoniam enim AB, minutia vnius particulæ minutiæ CD, [a] *reducitur ad simplicem minutiam AH, cuius numerator idem est, qui A, productus, nimirum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in apposito hoc exemplo apparet. Item minutiæ FH, minutiæ CD, æqualis est, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem verò E, ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cùm enim B, in C, D, faciat F, H; [b] erit vt C, ad D, ita F, ad H; [c] ac propterea*

F. 24.
A, 3. C, 6. G, 27.
B, 4. D, 7. H, 28.

214. huius.

A, 3. 1 A, 3.
B, 4. D, 7. H, 28.

b 17. sept.
c 8. huius.

propterea minutia C D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, componitur, (nimirũ ex numero ex C, in B, producto, & ex A,) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquam, minutiam G H, ſummam eſſe minutiarum F H, A H, vt initio propoſ. 20. oſtenſum eſt; hoc eſt, ſummam ex minutia A B, reſpectu vnius particulæ minutiæ C D, quæ minutiæ A H, oſtenſa eſt æqualis, & ex minutia C D, quæ oſtenſa eſt æqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D; id eſt, æqualis eſt minutiæ A B, vnius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D, ſimul. Quod eſt propoſitum.

IAM verò ſi plures minutiæ A B, C D, E F, G H, ſint inferendæ; hoc eſt, ſi minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore poſtremæ minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiuſdem penultimæ minutiæ E F, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiuſdem minutiæ C D, vt fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adÿciatur A, numerator eiuſdem minutiæ A B, vt fiat P: Atque ita deinceps ducatur ſemper vltimus numerus conflatus in denominatorem proximè antecedentis minutiæ; producto q̃ numerator eiuſdem proximè antecedentis minutiæ adÿciatur, donec nulla minutia ſuperſit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex denominatoribus inter ſe multiplicatis procreatus, ducendo primùm H, in F, vt fiat L; deinde L, in D; vt fiat N; poſt hæc N, in B, vt fiat Q, &c.

P, 119. M, 59. K, 14.
A, 1. C, 3. E, 2. G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.
Q, 120. N, 60. L, 15.

Dico minutiam P Q, ex inſitione datarũ minutiarum produci in eo ſenſu, quẽ expoſuimus. Nã vt in duabus minutijs oſtenſum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiæ E F, in minutiã G H: hoc eſt, æqualis eſt ſummæ ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collectæ. Deinde minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [a] facit minutiã ſimplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatẽ bis poſitam hoc modo, 3.1.1.) & denominator N, ex D, in L: hoc eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, [b] æqualis eſt minutiæ K L: [c] quòd numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cùm D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur cùm per ea, quæ ad initium propoſitionis 20. demonſtrauimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator verò N; æqualis quoque erit eadem minutia M N, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, atque ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rurſus minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [d] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N; id eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex B, in M, procreatus: denominator verò idem numerus Q, ex B, in N, productus, [e] æqualis eſt minutiæ M N, [f] quòd numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cùm B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cùm minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator verò Q, vt initio propoſitionis 20. monſtratum eſt; æqualis quoque erit eadem minutia P Q, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. quod eſt propoſitum. Eadem q̃ ratio eſt de pluribus.

a 14. huius.
b 8. huius.
c 17. ſept.
d 14. huius.
e 8. huius.
f 17. ſept.

SIT deinde ſenſus, addendam eſſe minutiam A B, totius minutiæ C D, ad minutiam C D. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflato q̃ numero G, ſupponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G H, produci ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo, quem diximus, ſenſu: hoc eſt, minutiam G H, æqualem eſſe ſummæ collectæ ex minutia C D, & ex minutia A B, minutiæ C D. Quoniam enim minutia A B, minutiæ C D, [g] reducitur ad minutiam ſimplicem E H, cuius numerator eſt E, ex numeratoribus A, C, procreatus; denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, vt exemplum appoſitum demonſtrat: [h] Minutia quoque F H, æqualis eſt minutiæ C D; [i] quòd numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cùm B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia G H, (quæ ex ijs, quæ ad initium propoſitionis 20. oſtendimus, æqualis eſt

E, 18. F, 24.
A, 3. C, 6. G, 42.
B, 4. D, 7. H, 28.
A, 3. C, 6. E, 18.
B, 4. D, 7. H, 28.

g 14. huius.
h 8. huius.
i 17. ſept.

ſummæ minutiarum E H, F H,) æqualis ſummæ collectæ ex minutia C D; (hoc eſt, ex minutia F H,) & ex minutia A B, minutiæ C D, (id eſt, ex minutia E H,) atque ideò minutia G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in hoc poſteriori ſenſu. Quod eſt propoſitum.

Quod ſi plures ſint minutiæ inſerendæ A B, C D, E F, G H; hoc eſt, minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & minutia E F, minutiæ G H, addendæ ſint ad minutiam G H, ita agendum erit: Ducatur G, in F, producto quoq; numero, addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroq; producto adjiciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoq; numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atq; ita deinceps ducatur ſemper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroq; procreato adjiciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vſque locum aſſumptarum productus, donec nulla ſuperſit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori ſenſu. Dico minutiam P Q, produci ex inſitione dictarum minutiarum, ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt. Nam, vt in duabus minutijs demonſtratum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiarum E F, G H, id eſt, æqualis eſt ſummæ collectæ ex mutia E F, totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D, totius minutiæ E F, totius minutiæ G H, [a] *facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E G, producitur, denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N, ex D, in L; hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus;* [b] *æqualis eſt minutiæ K L;* [c] *quòd numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandem: quippe cùm D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cùm minutia M N, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autē N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò eſt idem N; æqualis erit etiam eadem minutia M N, ſummæ collectæ ex minutia G H; & ex minutia E F, minutiæ G H; & ex minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H. Rurſus minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H,* [d] *facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus, ſiue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoq;, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem eſt idem Q, ex B, in N, procreatus,* [e] *æqualis eſt minutiæ M N;* [f] *quòd harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cùm B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo P Q, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cùm æqualis ſit, ex ijs, quæ initio propoſ. 20. demonſtrata ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem eſt Q. atq; ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem eſt idem Q; æqualis quoq; erit ſummæ collectæ ex minutia G H; & ex minutia E F, minutiæ G H; & ex minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & ex minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H, quod eſt propoſitum. Eademq; de pluribus eſt ratio.*

P, 232. M, 104. K, 20.
A, 1. C, 3. E, 2. G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.
Q, 120. N, 60. L, 15.

a 14. huius.
b 8. huius.
c 17. ſept.
d 14. huius.
e 8. huius.
f 17. ſept.

DE PROPORTIONVM COMPOSITIONE.

Expeditis ijs, quæ ad fractorum numerorũ demonſtrationes pertinent, reliquũ eſt, vt compoſitionem proportionũ explicemus: id quod ad defin. 10. lib. 5. et ad defin. 5. lib. 6. et ad propoſ. 23. lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compoſitionẽ illam proportionũ, de qua Euclid. egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in ijs propoſitionibus, vbi duplicatam, triplicatã, aut compoſitam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonſtrat, non eſſe verè additionem proportionum, ita vt duplicata vel triplicata proportio ſit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatáue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus compoſita ſit verè totum quippiam, cuius partes ſint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerunque interpretes Euclidis exiſtimant, ex hoc perſpicuè confirmari poteſt: quòd pars eſſet vel æqualis, vel maior toto. Nam cùm hæc compoſitio intelligenda ſit, ſiue maior quantitas cum minore, ſiue minor cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. oſtendimus, ſi, poſitis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non ſolùm duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult defin. 10. lib. 5. ſed verè eſſet duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. æqualibus, vt Euclidis interpretes putant, quis non videt, partem eſſe maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars eſt, maiorem eſſe proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partem æqualem eſſe toti? Sic etiam, ſi, poſitis his tribus terminis non continuè proportionalibus 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. verè coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt ijdem auctores contendunt, eſſet quoq; pars maior, quam totum, quòd proportio dupla 4. ad 2. maior ſit proportione ſubdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundum, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod coguntur omnino concedere, volint nolint, ex propoſ. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri

meri plani 24. & 48. Prioris latera ſint 12. & 2. Poſterioris verò 3. & 16. Quoniam igitur Euclides ibi demonſtrat, proportionem 24. ad 48. compoſitam eſſe ex proportionibus laterum: hoc eſt, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componens, (ſi hæc compoſitio eſt vera additio.) nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet ſubdupla 24. ad 48. Pari ratione, ſi proportio ſubdupla 24. ad 48. verè totum eſt, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio ſuboctupla 2. ad 16. ſi alterutra harum ab illa ſubtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore ſubtrahi poteſt; nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſuboctupla 2. ad 16. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quàm ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quòd ſi poſterioris numeri plani 48. latera ſumantur 12. & 4. erit vna partium componentium, nimirum proportio 2. ad 4. æqualis toti, proportioni videlicet 24. ad 48. Et ſubtracta proportione 2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12. quæ maior eſt, quàm totum: hoc eſt, quàm proportio 24. ad 48. Rurſus ſequeretur, totum non augeri, etiamſi ei infinitæ partes adderentur.

24. 48.
12. 2. 3. 16.

24. 48.
12. 2. 12. 4.

Poſitis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. verè coaceruatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1. ſint æquales: ſi cum illis terminis continuentur adhuc aly tres termini hoc modo, 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eadem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicorum. Huc accedit, quòd ſecundùm communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplam, non autem noncuplam, vt prædicti auctores volunt, quanquam noncupla proportio dicatur triplæ duplicata, vt in hiſce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3. illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6. non autem vt 9? Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla conſici proportionem octuplam, propterea quòd duo mouentia vt 3. & 5. mouent ſimul ſumpta, vt 8. nõ autem ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem compoſita eſſe dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non poſſe dimidiari, eo quòd inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratiâ. Agens vt 6. non poſſet habere agens duplo minus, quòd inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non ſtatim intelligat, agens vt 3. in dupla proportione minus eſſe, quàm agens vt 6?

LIQVET ergo, huiuſmodi compoſitionem proportionum non eſſe additionem, ſed proportionum continuationem, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex medijs proportionibus compoſita propter terminorũ continuationem, quemadmodum & ad defin. 10. lib. 1. explicauimus, cur, poſitis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continuè proportionalibus, extremorum proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex ijs, quæ iam dicturi ſumus de vera compoſitione proportionum dicturi ſumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus; nimirum additio, ſubtractio, multiplicatio, ac diuiſio, fieri debent per proportionum denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in diſputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum ſunt fractiones, ſiue minutiæ, vt libro quinto docuimus, (cùm denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer eſt, ſupponi poſſit vnitas, vt ex eo fiat quaſi minutia ab vnitate denominata.) quarum quælibet æqualis eſt fractioni, quam conſtituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator eſt, ſi ex antecedente fiat numerator, & ex conſequente denominator: manifeſtò colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorum numerorum non differre, ſiue per proportionum denominatores, ſiue per numeros earundem proportionum quoſcunque; poſitis tamen conſequentibus terminis ſub antecedentibus, inſtar minutiarum, inſtituantur, vt egregiè Cardanus præcipit in ſua Arithmetica, vt iam apparebit.

3 5 12 40.
1 1. 4 8.
8 256
1. 32.

PRIMVM enim ſint in vnam ſummã colligenda duæ proportiones, tripla & quintupla. Quoniam denominatores ſunt 3. & 5. ex quorum additione fit ſumma 8. coaceruabitur octupla proportio ex illis. quæ ſumma etiam colligitur, ſiue denominatores, ſuppoſita prius vnitate cuilibet illorum, inſtar minutiarum addantur, ſiue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac ſi eſſent fracti numeri, poſitu terminis conſequentibus ſub antecedentibus, in vnã ſummam colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. poſteriori autem 256. ad 32. quarum vtraque octupla eſt. Sic etiam ex proportione dupla ſuperquadripartiente ſeptimas, & ſeſquialtera, quarum denominatores ſunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54. 21. &

18 3 54 6
7 2 21 4.
57 342
14 84

6.4. reperiuntur, sit proportio quadrupla sesquidecimaquarta, qualem habent tam numeri 57.14. q̃ 342.84. Sed quãdo p denominatores instituitur operatio, reuocandi prius sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum est. Nam $2\frac{4}{7}$. reuocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiã operationibus intelligendũ est.

8	3	256.	12	57	3	342	6	
1	1.	32	4.	14	2.	84	4.	
5		640		72		864		
1.		128.		28		336.		

3	2	6	12	10	120	3	8	24
1	1.	1.	4	5.	20.	2	5.	10.

9	16	144						
6	10.	60.						

DEINDE, *si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: Item ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur proportio sesquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla, & dupla superquadrupartiens septimas, vt hic perspicuum est.*

TERTIO, *si multiplicanda sit proportio tripla per 2. vel quod idem est, per proportionẽ duplam: Item proportio sesquialtera per supertripartientem quintas, instituenda erit operatio, vt hic videt, produceturq; ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.*

6	1	6	120	4	480	24	2	48
1	3.	3.	20	12.	240.	10	3.	30.

144	6	864			
60	9.	540.			

QVARTO et vltimo, *si proportio sextupla diuidenda proponatur p proportionem triplam: Item proportio dupla superbipartiens quintas per proportionem sesquialteram, si diuisoris termini permutentur, vt in diuisione minutiarum docuimus, ita instituetur operatio.*

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quòd in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorẽ & denominatorem, quemadmodum in minutijs.

IAM verò multiplicationem proportionum à nobis præscriptam, quam auctores additionem falsò nuncupant, cum proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. egit, conuenire, atque adeò compositionem illam Euclidis verè esse multiplicationem, non autem additionem, vt diximus, hoc modo demõstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, siue æquales, siue inæquales; ducatur q̃ A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex consequente verò B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, esse compositam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D: ita vt si proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earũ duplicata, vt vult defin. 10. lib. 5 si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G; [a] *erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F;* [b] *erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cùm hæ eædem sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cùm enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorũ inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra verò multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquidò constat, compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.*

A, 6.	C, 12.	A, 3.	C, 6.		
B, 2.	D, 4.	B, 2.	D, 5.		
E, 72.	F, 8.	F, 18.	E. 10.		
G, 24.		G, 12.			

[a] 18. septimi.

[b] 17. septimi.

EADEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum, quam ijdem auctores docent, nõ esse aliud q̃ diuisionem à nobis explicatam, esseq; compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem est, ac si termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionẽ E, ad F, quæ ex diuisione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, esse eam, quæ relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B; hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F. iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiũt G, F; [c] *erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rursus quæ ex A, in C, D, fiunt G, E;* [d] *erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cùm ergo proportio G, ad F, composita sit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoq; proportio A, ad B, (quæ eadem est, quæ G, ad F,) composita ex eisdem proportionibus G, ad E; hoc est, C, ad D, & E, ad F: ac proinde subducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius esse diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, q̃ proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit? At q̃ hæc de proportionum compositione: qui plura desiderat, legat eruditissimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conscriptũ.*

A, 9.	C, 3.	A, 4.	C, 6.		
B, 1.	D, 1.	B, 2.	D, 3.		
E, 9.	F, 3.	E, 8.	F, 12.		
G, 27.		G, 24.			

[c] 18. septimi.

[d] 17. septimi.

FINIS ELEMENTI NONI.

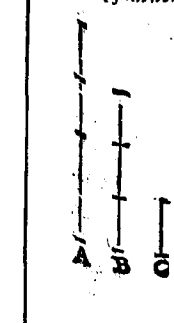
EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicũtur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cùm solidæ tum planæ, neq; perfectè intelligi possunt, neq; cùm res tulerit, in opus atq; vsum conferri; propterea quòd plerunque latera earum incommensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atq; solidis dici potest, quippe cùm & hæc incommensurabilia sæpenumero existant, vt ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam verò hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus disserit, obscuritatem; omnes neruos industriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt sine multo labore à quouis, qui præcedentium tamen librorum demonstrationes rectè intellexerit, possit percipi. Neque enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, sermonem instituit: Immò contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abest, vt existimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atq; calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quàm qui illarum omnino sit ignarus, propterea quòd ille demonstrationes ad vsum potest reuocare, hic verò nullo modo. Hac enim de causa & nos priora decem theoremata secundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vsurpasti, vt ea res & maiori voluptati esset, & cõmodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cùm enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius offusuri, quàm lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minus q; demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cùm additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ solæ necessariæ ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quòd qui in Algebra sunt versati facili negotio demõstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per se ipsos, quando volunt, præsertim cùm iam hoc ipsum non multò antè à Michaële Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accuratè.



ITAQVE, vt ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit; declarat primò loco, quenam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum; quia eas linea tam vnius palmi, quàm dimidiati palmi, quàm tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidaue commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.

II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, & latus eiusdem; quoniã nullam habent mẽsuram communem, vt propositione vltima huius libri demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc libro Geometra explicat, docetq; quanam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTAE lineæ potentia commensurabiles sunt, cùm quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirũ alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illæ, quas in expositione defin. 1. commensurabiles simpliciter diximus: quædam verò longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommensurabiles longitudine, aliæ sunt eiusmodi, vt earum quadrata sint commensurabilia; aliæ verò ita se habent, vt & quadrata earum incommensurabilia sint. Lineæ ergo illæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commensurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundùm earum potentias; hoc est, secundùm earum quadrata (est enim, vt ad propos. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiusque lineæ, quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licèt ipsæ secundùm longitudinem sint prorsus incommensurabiles.

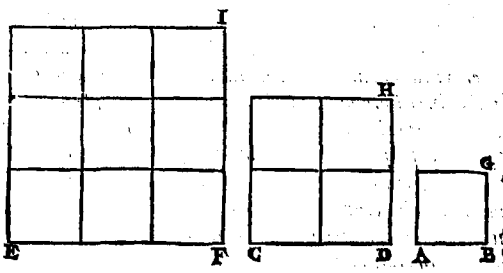
QVOD si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine, respondendum est, lineas longitudine commensurabiles satis superq; esse explicatas in definitione commensurabilium magnitudinum, cùm huiusmodi lineas vna cõmunis mensura metiatur, vt dictum est: At verò quoniam lineas potentia commensurabiles nulla communis mensura metiri potest, sed tantummodò earum quadrata idem spacium metitur, ideò necessarium omninò fuit, vt eæ propria definitione explicarentur.

IIII.

INCOMMENSVRABILES autem, cùm quadratis earum nullum spacium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommensurabiles, quarũ etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.

HABENT autem lineæ commensurabiles tam longitudine, q̃ potentia, hãc quasi conuenientiam inter se, & connexionem, vt lineæ longitudine commensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, ita vt nullæ lineæ dari possint commensurabiles longitudine, quin earum quadrata commensurabilia quoq; sint; quoniam quadratũ ex communi earum mensura descriptum metitur tanquam mensura communis earum quadratorum, vt in subiecta figura apparet: sicut enim recta AB, metitur rectas CD, EF, ita quoq; quadratum AG, quadratum CH, EI, metitur: Non autem, vt omnes lineæ potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multæ enim lineæ sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadratæ habent commensurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommẽsurabiles sunt, vt in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine, quàm potentia, huiusmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint etiã incommensurabiles longitudine; Non autem contrà, vt omnes lineæ longitudine incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles potentia, cùm multæ lineæ reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cùm tamen potentia, hoc est, secundùm earum quadrata, commensurabiles existant. Quæ quidem omnia perspicua erunt ex corollario propos. 9. huius libri.



V.

HIS positis, ostenditur, cuicunque rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidẽ longitudine, & potentia; alias verò potẽtia solùm. Vocetur autẽ proposita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erunt omnium aliarũ, quæ cum ipsa comparantur, quædam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quædam verò potentia tantùm; item quædam illi incommensu-

commensurabiles longitudine tantùm; quadam verò longitudine, & potentia, vt hoc 10. libro demonstrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis ostendi, seu colligi, (quanquam eius verba hoc sonare videantur) hæc ita se habere: sed solùm indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autẽ potentia tantùm, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa proposita, ratione cuius aliæ commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis verò Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa, & nota, aliæ verò cum illa comparatæ non semper notæ sunt, quamuis singulæ seorsum sumptæ existant certæ quoque, ac notæ; cùm qualibet in quotcunque partes æquales possit diuidi.

VI.

ET huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunque, appellari quoq; Rationales; non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm.

ITAQVE ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cùm potentia sit commensurabilis lineæ Rationali, (est enim tam numerus 20. quàm 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. vel 100. &c.) quamuis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quòd numero non possit exprimi.

VII.

HVIC verò incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM in antecedenti definitione Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantùm sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquidò constat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt vtroque modo; longitudine videlicet & potentia; non autem longitudine tantùm. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cùm non sit longitudine, & potentia, sed longitudine tantùm Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod à proposita recta fit dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur, ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoq; quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeq; illius aliæ superficies, commensurabiles, incommensurabilésue dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem, Rationalia.

OMNES planæ superficies quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidem expositione, vt illud, sed quia cum eo collatæ reperiuntur ei vel commensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunq; commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QVONIAM verò lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. definitione; perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta definitionem 6. Rationales.

X.

HVIC verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies plana quadrato à Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: siquidem ea quadrata sint, ipsa latera; si verò alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatiis incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita vt si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si verò non fuerint quadrata, sed aliæ quacunque figuræ rectilineæ, appellentur rectæ, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum ſuprà ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ poſſunt ſpatia commenſurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ poſſunt illa ſpatia incommenſurabilia, ſunt potentia incommenſurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cùm ergo omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint quoq; incommenſurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonſtrabitur q; in coroll. propoſ. 9. manifeſtum eſt, ex 7. defin. lineas illas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non eſt, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia: atque potentia tantùm: apponere ferè ſemper vocibus iſtis: commenſurabiles, ac incommenſurabiles: Vix autem, & rariſſimè his: Rationales, & Irrationales: Rectè enim dicuntur lineæ commenſurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantùm; Item incommenſurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantùm: Minus verò rectè Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantùm, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantùm. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occaſionem multis præbuit, vt varie & obſcurè in hoc 10. lib. de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibusq; nec non Rationalibus, Irrationabilibusq; ſint locuti.

CAETERVM, his definitionibus adiungemus poſtulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vſus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiuſdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiuſdem generis inæqualibus, cùm maior infinita nõ ſit, minor verò infinitè poſſit augeri; perſpicuum eſt, minorem toties poſſe multiplicari, donec ſuperet maiorem. Conſtat hoc etiam ex iis, quæ in defin. 5. lib. 5 ſcripſimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum eam ſeri eiuſdem magnitudinis, cùm alterutra ita poteſt multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuerſi eſſe generis, docuimus.

AXIOMATA, SIVE PRONVNCIATA.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compoſitam quoque ex ipſis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinẽ, & ablatam, metitur & reliquã.

HAEC axiomata, vt ad numeros pertinent, oſtenſa ſunt à nobis in vltimis tribus pronunciatis libri 7. Quare cùm ſit eadem ratio in magnitudinibus, non eſt, quòd fruſtra eorum demonſtrationes hic repetamus, præſertim quòd ad verbum huc poſſint transferri, mutata ſolùm voce numeri in vocem magnitudinis.

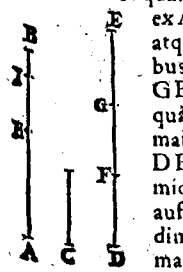
CAETERVM quia hoc in libro diſcedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propoſitionibus Euclidis ſequitur, vt ad propoſ. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ferè Campani negleximus: vt deducimus ad initium primi libri; curauimus vt duplex numerus in margine è regione propoſitionum apponeretur, quorum ſuperior ordinem Theonis, inferior autem Campani ferè demonſtraret. Quòd ſi vnus tantùm numerus reperiatur in margine, nullam tunc eſſe inter Theonem & Campanum diſcrepantiam, intelligas, quod ad numerum propoſitionum attinet.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

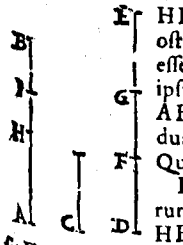
DVABVS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

PROPOSITAE ſunt duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, ſit maior. Dico ſi ex AB, auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquũ eſt, rurſum maius quàm dimidium, atque hoc ſemper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor ſit q̃ C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta DE, maior ſit q̃ AB, ita vt DE, ſit multiplex ipſius C, proximè

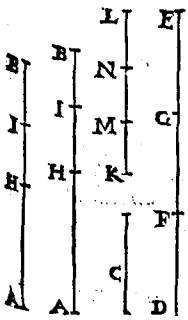
proximè maior quàm AB. Diuisa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipsi C, æquales, detrahatur



ex AB, maius quàm dimidiũ AH, & ex reliqua HB, maius quàm dimidium HI; atque hoc semper fiat, donec partes ipsius AB, multitudine æquales sint partibus ipsius DE. Sint ergo iam partes AH, HI, IB, tot, quot sunt ipsæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior est quàm AB; At ex DE, ablatum est DF, minus quàm dimidium, vel certè dimidium, si DE, ipsius C, sit duplex; ex AB, verò maius quàm dimidium AH; Erit reliquum FE, reliquo HB, maius. (Cùm enim DE, maior sit quàm AB; si ex DE, dimidium auferretur, necnon & ex AB, dimidium, esset quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quàm dimidium, vel certè dimidium, & ex AB, maius quàm dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rursus quoniam FE, maior est quàm HB, auferturq; ex FE, dimidium FG vel certè minus quàm dimidium, si FE, maior sit quàm duplex ipsius C; at ex HB, maius quàm dimidiũ HI; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem ipsius DE, qualis hîc est GE, maiorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hîc est IB. Dum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoq; C, maior quàm IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus ꝓpositis, si à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo IB; cùm ex maiori DE, ablatum sit DF, minus quàm dimidium, vel certè dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.



ALITER. Facta cõstructione, vt prius, sumatur KL, ita multiplex ipsius IB, vt est multiplex DE, ipsius C. Diuisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam verò AH, maior est quàm HB, vel certè illi æqualis, si ablatum sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quàm IB; erit quoque AH, maior quàm IB, hoc est, quàm KM. Rursus quia HI, maior est quàm IB, vel certè illi æqualis; est autem IB, ipsi MN, æqualis: erit quoq; HI, maior quàm MN, vel illi æqualis; atque adeò tota AI, maior, quàm tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quàm tota KL: Est autem DE, maior adhuc, quàm AB. Multò ergo maior erit DE, quàm KL. Quare cùm sit, vt DE, ad C, ita KL ad IB; (Sumpta enim fuit KL, ipsius IB, tam multiplex, quàm multiplex est DE, ipsius C,) [a] erit quoque C, maior quàm IB. Ac proinde relicta est IB, minor quàm C. Quod erat demonstrandum. [a] 14. quinti.

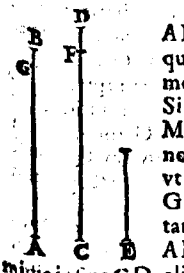
SCHOLIVM.

LICET clarius ex demonstratione huius Theorematis appareat, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 5. monuimus, cùm de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minimè præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.



DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis AB, CD, quarum minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex AB; & sic deinceps, alterna quadam detractione, auferatur semper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB, CD, incommensurabiles esse. Si enim non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mẽsura communis. Metiatur eas si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi AB, vel minor. Detracta autem AB, ex CD, quoties potest, relinquat FD, se minorem, ita vt AB, ipsam CF, metiatur. Rursus detracta FD, ex AB, relinquat se minorem GB, ita vt FD, metiatur ipsam AG; atque hoc semper fiat. [b] Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quàm E. (Quoniam cùm AB, ablata ex CD, relinquat FD, se minorem, erit CF, ablata maior, quàm dimidia ipsius CD; aliàs si esset dimidia, vel minor quã dimidia, posset adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, maior quàm dimidia ipsius AB: Et sic deinceps semper fiet. [b] 1. decimi.

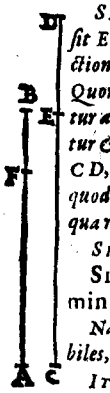
a 1. decimi. Quare cùm ſemper auferatur maius, quàm dimidium, a relinquetur tandem magnitudo quædam minor quàm E.) Sit ergo iam relicta G B, minor quàm E. Quoniam igitur E, metitur A B; & A B; metitur C F; b metietur quoque E, ipſam C F: Metitur autem E, & totam C D. c Igitur E, reliquam quoque F D, metietur. At F D, metitur A G: d quare & E, ipſam A G, metietur. Metitur autem E, & totam A B: e ergo E, reliquam etiam G B, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommenſurabiles ſunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat oſtendendum.

b 2. pron.
c 3. pron.
d 2. pron.
e 3. pron.

SCHOLIVM.

Hoc Theorema conuertemus ad hunc modum.

Si duabus magnitudinibus incommẽſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.



Sint incommenſurabiles magnitudines A B, C D, detrahaturq; minor A B, ex C D, & reliqua ſit E D. Item E D, ex A B, auferatur, relinquaturq; F B, & ſic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri poteſt, metiatur F B, præcedentem E D. a 2. pron. *Quoniam igitur F B, metitur E D;* b 1. pron. *& E D, metitur A F;* c 2. pron. *metietur quoque F B, ipſam A F: Metitur autem & ſe ipſam:* d 1. pron. *Igitur F B, & totam A B, metietur: Metitur autem A B, ipſam C E.* e *Igitur & F B, ipſam C E, metietur. Ponitur autem & F B, metiri ipſam E D: Igitur & F B, totam C D, metietur. Oſtenſa eſt autem & F B, ipſam A B, metiri. Quare F B, vtramq; A B, C D, metitur, quod eſt abſurdum. ponuntur enim A B, C D, incommenſurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod eſt propoſitum.*

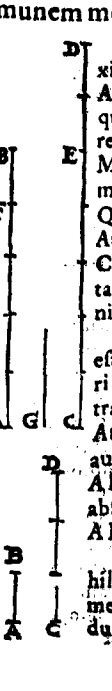
Similiter & hoc demonſtrabimus.

Si duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione: Metietur quædã reliqua præcedentẽ.

Nam ſi nunquam reliqua metiretur præcedentem, eſſent propoſitæ magnitudines incõmenſurabiles, vt demonſtrauit hoc theoremate Euclides. Quod eſt abſurdũ. ponuntur enim cõmenſurabiles. Itaque facile ex his dignoſcemus, an dua quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Nam detracta ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione, ſi reliqua quapiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propoſitæ commenſurabiles, cùm illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propoſitam, vt conſtat ex demonſtratione primi theorematis huius ſcholij. Ex eo enim, quòd reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur præcedentem E D, oſtenſum eſt, eandem reliquam F B, metiri vtramque magnitudinem A B, C D. Si verò nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonſtrauit.

3. PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.



Datæ duæ magnitudines commenſurabiles ſint A B, C D, quarum oporteat maximam menſuram inuenire. Quoniam A B, C D, commenſurabiles ſunt, fit vt ſi minor A B, ex maiore C D, detracta, quoties poteſt, relinquat E D; & E D, detracta ex A B, quoties poteſt, relinquat F B, & hoc ſemper fiat alterna quadam detractione: tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis ſcholij. Metiatur iam F B, reliqua præcedentem E D. Dico F B, eſſe maximam mẽſuram communem magnitudinum A B, C D. Quòd enim vtramque metiatur, ita oſtendemus. Quoniam F B, metitur E D, & E D, metitur A F; a metietur quoque F B, ipſam A F: At metitur F B, & ſe ipſam. b Igitur F B, totam A B, metietur; c atque adeo & ipſam C E, quam A B, metitur. Cùm ergo, & ipſam E D, metiatur; d metietur quoq; F B, totam C D. Metitur ergo F B, vtramque A B, C D. Quare vtriuſque A B, C D, communis menſura eſt F B.

a 2. pron.
b 1. pron.
c 2. pron.
d 1. pron.

Quod autem F B, ſit maxima earum communis menſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia communis earum menſura, maior quàm F B. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarum communis menſura, maior quàm F B. Quia igitur G, metitur vtramque A B, C D; metitur autem & A B, ipſam C E; e metietur quoq; G, ipſam C E: At metitur quoq; totam C D. f Igitur G, reliquam quoque E D, metietur: Metitur autem E D, ipſam A F. g Ergo & G, ipſam A F, metietur. Quare cùm G, totam etiam A B, metiatur; h metietur quoque eadem G, reliquam F B, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quàm F B, communis menſura eſt ipſarum A B, C D. Quare F B, maxima earum communis menſura eſt.

e 2. pron.
f 3. pron.
g 2. pron.
h 3. pron.

Quod ſi minor magnitudo A B, metiatur maiorem C D, ita vt detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipſa A B, ambarum maxima menſura communis; cùm & ſe ipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.

COROL.

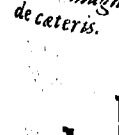
COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, quòd magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

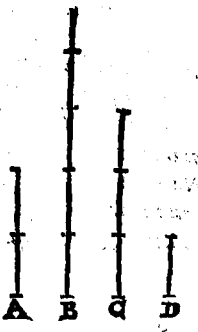
Elicitur hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est F B, esse maximam mensuram communem ipsarum A B, C D. Demonstratum enim est ibi, magnitudinem G, si metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoque maximam mensuram F B. Eademq; est ratio de cæteris.

SCHOLIVM.

Ex his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines propositæ sint cõmensurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primùm experior per ea, quæ ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commensurabiles sint, an non. Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A, B, C, esse incommensurabiles, quòd nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.



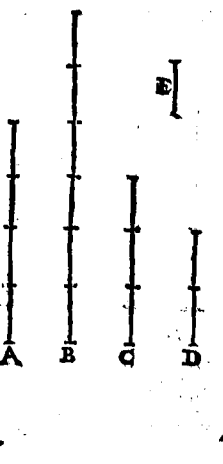
Si verò A, & B, fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inuenta D; quæ si metiatur quoq; magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cùm habeant communem mensuram D.



Quod si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoq; omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima cõmunis mensura ipsam D, maximam mẽsuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesim.

Si verò C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoq; tres A, B, C, commensurabiles. [a] *Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cùm E, metiatur D; & D, ipsas A, & B;* [b] *metietur quoq; E, ipsas A, & B. Quare cùm eadem E, metiatur quoq; C, metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.*





a 3. decimi.

b 2. pron.

Similiter explorabimus, an plures, datæ magnitudines, quàm tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si datæ sint quatuor, experiemur id primùm in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

4.

Tribvs magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.



Sint datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam si maior magnitudo quàm D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest. Si verò D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cùm enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura earum communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. [b] Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; [c] metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C, quemadmodum asseruimus.

a 3. decimi.

b 3. decimi.

c 2. pron.

Quod autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, maior quàm E, si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B, metietur quoque earum maximam mensuram D, per coroll.

præcedentis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum mensuram maximam E, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo q̃ E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima est earũ cõmunis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinib. cõmensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

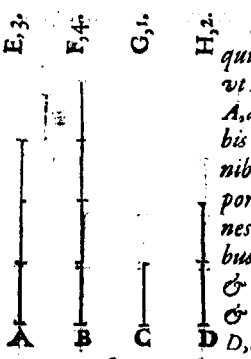
APERTE quoque ex hoc colligitur, quòd magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F, si metiatur ipsas A, B, C, metiri quoq; E, maximam illarum communem mensuram. Eademq; de cæteris est ratio.

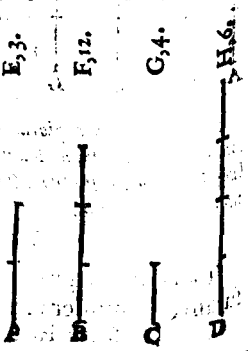
SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quàm tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primùm maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinq;, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua verò omnia absoluenda erũt, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA.

SI sint quotcunq; magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.



SINT quotcunq; magnitudines A, B, C, D, in eisdem rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex iis, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonstrata sunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quàm proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perspicuum est, cùm proportiones componẽtes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componũt, & compositas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales esse, hoc est, esse vt A, ad D, ita E, ad H. Quod est propositum.



IDEM sequitur, si magnitudinum, & numerorũ proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo est, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demonstratio.

SCHOLIVM.

QVONIAM præcedenti lemmate & in propositione, quæ sequitur, & in aliis multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonstrare, cùm non facilè videatur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersa genera quantitatis constituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa, tantùm est in quantitatibus eiusdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro verò 5. in magnitudinibus: quanquam demonstratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri possit, vbi omnes demonstrationes illius libri numeris quoq; conueniant. Vel certè demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cùm magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent easdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

5. THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam
a 3. decimi. numerus aliquis habet ad alium numerũ. Sit enim earum maxima mensura inuenta C. a Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D; Et quoties eadem C, repetita

petita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æquè metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Est autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quòd C, ipsam B, atque vnitas numerum E, æquè metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

CVM Euclides ad demonstrationem huius theorematis assumat maximam communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B, perspicuum est, lineas debere esse longitudine, & ob id potentia quoque commensurabiles, vt rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Hæ enim solæ communem recipiunt mensuram, atq; adeò in eis demonstratio locum habet.

QVOD si lineæ sint potentia tantùm commensurabiles, habebunt quidem earũ quadrata inter se rationem, quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atq; idcirco mensuram habent communem, ipsis q; demonstratio huius theorematis conuenit: At ipsæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommensurabiles cùm sint, communi mensura sunt expertes, ac propterea huius theorematis demonstratio in ipsas conuenire nullo modo potest.



Ex demonstratione porrò eiusdem huius theorematis liquidò constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos scilicet earum mensura communis maxima C, ipsas metitur.



VNDE si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æquè, ac communis magnitudinum commensurabilium A, & B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam vt demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD si loco maximæ mensuræ C, sumamus aliam quamcumque communem earum mensuram, nihilominus hoc theorema demonstrabimus eodem argumento. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac posteriori demonstratione, quàm in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, vt ex appositæ figura apparet. Quoniam verò in priori demonstratione numeri inuenti, sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea fortassis Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

THEOR. 4. PROPOS. 6.

6.

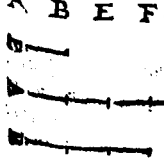
SI duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines.



HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarũ partium vni æqualis sit magnitudo E. Deinde quoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniá igitur magnitudo E, toties in A, cõtinetur, quoties vnitas in C; cõtinebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus vnitatẽ. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quòd E, ipsam F, & vnitas ipsam D, æquè metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F; [a] ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cùm E, ipsam F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipsam B: Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur; [b] Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duæ magnitudines inter se proportionem habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 9. quinti.

[b] 1. defin.



ALITER. Quot sunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quòd E, ipsam A, & vnitas ipsum C, æquè metiantur; ponitur q; vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lem-

ma superius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipsam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem communem mensuram E, [a] commensurabiles sunt. Quod est propositum.

a 1. defin.

COROLLARIVM.

Ex priori autem demonstratione theorematis aperta est nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates sunt in C; & sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot vnitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonstratum est.

C 3. D 3.

A G. F

Hinc rursus apparet, quânam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primùm linea F, ex iis, quæ modò diximus, ad quam sic se habeat A, vt C, ad D: [a] *Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cùm enim tres rectæ A, G, F, sint continuè proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeò vt numerus C, ad numerum D, (cùm sit vt A, ad F, ita C, ad D,) sic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cùm quadrata omnia sint similia similiterq; descripta.*

a 13. sexti.

SCHOLIVM.

In hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantùm; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

O. INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicâtur habere, quam numerus ad numerum: [a] erunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

a 6. decimi.

SCHOLIVM.

A B *Quocunque modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantùm, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam aliàs, vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.*

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

O. SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommensurabiles esse. Si enim A, & B, credantur esse commensurabiles; [b] erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionem nõ habeant, &c. Quod erat ostendendum.

b 5. decimi.

SCHOLIVM.

A B *Quod si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ necessariò, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propos. 5. huius lib. demonstrauimus. quod est contra hypothesim. Non autem colligendum est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessariò & potentia*

tentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur si potentia tantùm sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; immo nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Solùm igitur infertur ex huius theorematis demõstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

D, 49. E, 42. F, 36.

SI sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoq; proportionales; sitq; vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

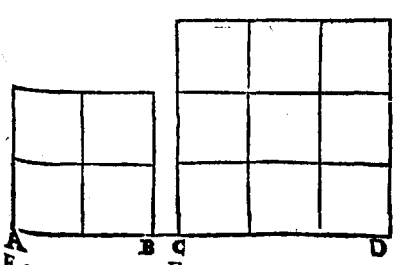
SINT continuè proportionales tam quantitates A, B, C, quàm D, E, F; sive priores in eodem genere sint, in quo posteriores, sive non; sitq; vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniã enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quàm proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturq; proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoq; proportiones A, ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ æquales sunt.

IDEM sequitur, si plures quantitates sint, quàm tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonstrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

A B C

THEOR. 7. PROPOS. 9. 7.

QVAE à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

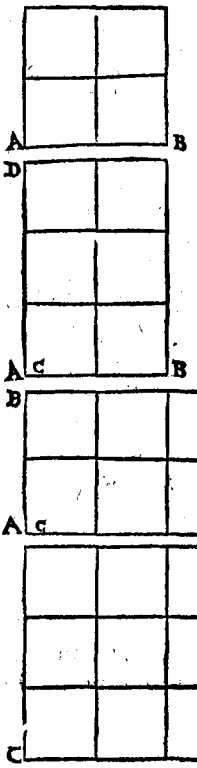


SINT primùm rectæ AB, CD, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerũ quadratum. Quoniam enim rectæ AB, CD, longitudine sunt commensurabiles; [a] erit AB, ad CD, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F: quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, numerus ad numerum F: [b] habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: [c] Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionẽ habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quãdoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ sunt proportionum æqualium. Quod est propositum.

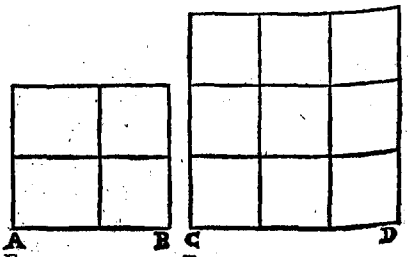
[a] 5. decimi.
[b] 20. sexti.
[c] 11. octauæ.

ALITER. Posita eadem constructione, contineatur rectãgulum BD, sub rectis AB, CD. Et E, F, se mutuò multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt constat ex demonstratione propos. 11. lib. 8. atq; adeò in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, ad F: [d] Vt autem AB, ad CD, ita est quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, si CD, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex AB, ad rectangulum BD, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est AB, ad CD, vt E, ad F, [e] Vt autem AB, ad CD, ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum

[d] 1. sexti.
[e] 1. sexti.



quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratū ex CD, in eadem ratione continua sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.



Sit secundò quadratū ex AB, ad quadratū ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerū quadratum H. Dico rectas AB, CD, esse longitudine commensurabiles. Sint enim numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur est quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: [a] Habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem duplicatam lateris AB, ad latus CD; [b] Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cùm rectæ AB, CD, proportionem habeant quam numeri E, F, [c] ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

[a] 20. sexti.
[b] 11. octaui.
[c] 6. decimi.

Aliter. Repetatur constructio figuræ posterioris. [d] Quia igitur est vt AB, ad CD, ita quadratum ex AB, ad rectangulum BD; Item vt AB, rursum ad CD, ita rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt suprà diximus; erunt quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, continuè proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineam CD: Sunt autem & numeri G, I, H, continuè proportionales in ratione numeri E, ad numerum F, vt suprà ostendimus; ponitur{que} quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit per lemma præcedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc est, vt E, ad F; [e] ideo{que} AB, CD, rectæ, proportionem habentes, quam numeri E, F, commensurabiles sunt longitudine. Quod est propositum.

[d] 1. sexti.
[e] 6. decimi.

Sint tertiò rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commensurabiles, vt iam est demonstratum. Quod est absurdum. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod est propositum.

A B

Qvarto ac postremò, quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine esse incommensurabiles, Si enim longitudine commensurabiles credantur; habebunt earum quadrata, vt est demonstratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ verò potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ verò potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum; [a] *ipsa commensurabilia erunt;* a 6.decimi
[b] *Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.* b 3.defin.

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen, quam numerus simpliciter ad numerum, [c] *potentia quidem commensurales sunt,* [d] *cùm earum quadrata commensurabilia sint; at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solùm enim eæ lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis.* c 3. defin. d 6.decimi

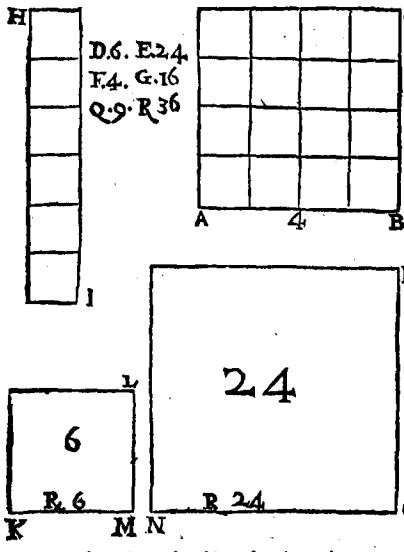
RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, vt modò diximus; liquidò constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse. Solùm enim eæ lineæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, [e] *potentia quoque incommensurabiles sunt,* [f] *cùm earum quadrata incommensurabilia sint.* e 4.defin. f 8. decimi

POSTREMO, lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIVM.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusq; percipiatur, diligenter considerandæ sunt hæc, quæ sequuntur. Primùm lineas rectas longitudine commẽsurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solùm esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ: (est enim recta A B, 2. & C D, 3.) verùm etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde e contrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, seu latera, ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solùm ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta: (continet enim quadratum ex A B, quatuor mensuras quadratas, & quadratũ ex C D, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quàm sunt vnitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpenumero enim lineæ datæ commensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quòd Rationali lineæ propositæ sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quàm sunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR linea Rationalis A B, expressa numero 4. cuius quadratum A C, continebit mensuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, & vt in g 26.octaui
Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangulum H I, constans ex sex quadratis mensuris quadrati A C, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; [h] *atq; ipsi H I, quadratum æquale constituatur K L, cuius latus K M. Postremò* h 14.secũdi
per ea, quæ in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta N O, ad cuius quadratum N P, ita se habeat K L, quadratum rectæ K M, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum K L, ad quadratum N P, per constructionem; Continet autem quadratum K L, 6. mensuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale A C: (constructum enim est quadratum K L, æquale rectangulo H I, constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris.) continebit quadratum N P, earundem mensurarum quadratarum 24. ac propterea K M, N O, latera quadratorum K L, N P, erunt



Rad.6.& Rad.24. quæ numeris exprimi nequeunt, cùm 6.& 24. non ſint numeri quadrati, eruntq; lineæ Rationali A B, longitudine incommenſurabilia, inter ſe autem commenſurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cùm eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt. Nam cùm quadrata K L, N P, proportionem habeant, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. duplicatam laterum K M, N O, ſit autem quadratorum proportio ſubquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum ſubdupla, videlicet 1. ad 2. huius enim illa duplicata eſt, vt hic apparet 1.2.4. [a] Quare longitudine cõmenſurabiles ſunt rectæ K M, N O, cùm proportionem habeant, quã numerus ad numerũ. Intelligenda ſunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commenſurabiles, quæ numeris non poſſunt exprimi. ſi cum linea Rationali comparentur. Quod ſi conſiderentur eadem lineæ K M, N O, ſimpliciter, & abſolutè, nulla habita ratione lineæ Rationalis A B, numeris poterunt efferri. Cùm enim proportionem habeant ſubduplam, ſi K M, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur N O, in eiuſdem magnitudinis partes 4. ſi illa in 3. ſecabitur hæc in 6. &c. At verò hæ partes nullo modo æquales ſunt partibus lineæ Rationalis A B, immò illis omnino ſunt longitudine incommenſurabiles, vt diximus.

Rvrsvs, quia quadrata K L, N P, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas menſuras continent æquales illis in quas A C, quadratum Rationalis lineæ A B, reſoluitur, quàm vnitates ſunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam K L, æquale eſt ſex huiuſmodi menſuris, & N P, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus, & G, ex 16.) Et ſi maiores quadrati in eadem proportione ſumantur Q, R, pauciores tales menſuras complectuntur quadrata K L, N P, quàm ſunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cùm alter ex 9. alter verò ex 36. vnitatibus conſtituatur; manifeſtum eſt, in hoc theoremate intelligenda quoq; eſſe quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas menſuras, vel plures comprehendunt, quàm vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, ſi ea conferantur cum quadrato lineæ Rationalis propoſitæ. Quod ſi eadem quadrata K L, N P, conſiderentur abſolutè, & ſimpliciter, nulla habita ratione quadrati A C, ex Rationali linea A B, deſcripti, reſolui poterunt in totidem menſuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nam ſi recta K M, diuidatur in duas partes, & N O, in quatuor, vt dictum eſt, continebit quadratum K L, quatuor menſuras quadratas, & quadratum N P, ſexdecim, quot ſcilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, ſi eadem lineæ ſecentur in partes tres, & ſex, habebunt earum quadrata menſuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiuſmodi menſuræ nullo modo æquales ſunt quadratis menſuris, in quas quadratum A C, Rationalis linea A B, reſoluitur.

Idem dicemus de omnibus aliis quadratis, eorumq; lateribus, quorum ſuperficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter ſe, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiuſmodi ſunt quadrata, quorum ſuperficies ſint 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

Itaqve theorema hoc intelligendum eſt de lineis longitudine commenſurabilibus inter ſe, quamuis interdum Rationali lineæ incommenſurabiles ſint, vt ſit ſenſus. Quadrata quæ deſcribuntur à rectis lineis longitudine inter ſe commenſurabilibus, licet interdum longitudine ſint incommenſurabiles lineæ Rationali propoſitæ, proportionem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipſa quadrata, ſi cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, ſæpenumero numeris quadratis nullo modo poſſint exprimi: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſiue hæc quadrata numeris quadratis poſſint exprimi, ſiue non, ſi comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter ſe commenſurabilia, etiamſi lineæ Rationali ſint longitudine incommenſurabilia, &c.

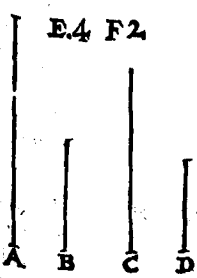
Colligit *Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem eſſe poteſt, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quòd inter numeros duplam proportionẽ habentes nullus medius cadat proportionalis, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerũ quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis eorum latera,*

nempe

nempe diameter, & latus in vno eodemq; quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 8. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 11.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima verò secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundę fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit. 10.



SINT proportionales quatuor magnitudines, A, B, C, D, sitq; A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam enim A, & B, inter se commensurabiles sunt, [a] habebit A, ad B, proportionem quam numerus ad numerum, nempe quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam numerus E, ad numerum F. [b] Quare C, & D, commensurabiles inter se sunt. a 5. decimi. b 6. decimi.

SED sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam enim A, & B, incommensurabiles sunt, [c] non habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. [d] Quare C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum. c 7. decimi. d 8. decimi.

SCHOLIVM.

QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secundæ commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudine commensurabilis, vt ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in scholio propos. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secundæ fuerit cōmensurabilis potentia tantùm, erit & tertia quartæ potentia tantùm commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, cōmensurabilis est potētia ipsi B, [a] erunt earum quadrata cōmensurabilia, [b] ac propterea proportionem habebunt, quā numerus ad numerum. [c] Est autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratū ex D. (quod quatuor lineæ propositæ A, B, C, D, proportionales sint, & earum quadrata figuræ similes similiterq; descriptæ.) Igitur & quadratæ ex C, D, proportionē habebunt, quam numerus ad numerum. [d] Quare commensurabilia erūt; [e] Ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles. Quòd autem potentia tantùm sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, cùm sint commensurabiles potentia tantùm, longitudine incommensurabiles sunt; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostendimus: Igitur potentia tantùm sunt commensurabiles. Quod est propositum. a 3. defin. b 5. decimi c 22. sexti. d 6. decimi e 3. defin.

EADEM ratione, si prima secundæ sit incommensurabilis longitudine tantùm, erit & tertia quartæ longitudine tantùm incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantùm incommensurabiles; erunt ipsarum potentiæ commensurabiles; ac propterea ipsa potentia tantùm commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, erunt quoq; rectæ C, D, potentia tantùm commensurabiles; Ac idcircò longitudine tantùm incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

RVRSVS, si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ verò reliquæ superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, ex iis, quæ in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cùm ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionē eandem, quam lineæ, erit quoq; illarum proportio, quæ numeri ad numerum; [f] atque adeò commensurabiles erunt. Si verò lineæ longitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerū, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neq; reliquarū duarū magnitudinū eandem cum illis proportionem habentiū, proportio erit, quæ numeri ad numerū. [g] Quare incōmensurabiles erunt. Quod est propositū. f 6. decimi g 8. decimi

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores verò duæ, lineæ, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incōmensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidáve commensurabilia sint, [h] habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipsis rationem habētes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si verò plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neq; lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum. h 5. decimi.

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QVOD si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cũ non sint plani similes, vt ad finẽ lib. 8. docuimus.

A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non similium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, nõ rectè quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est Federicus Cõmandinus. Quod vt ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

A, 2. C, 3. B, 6. D, 16. E, 12. F, 48.

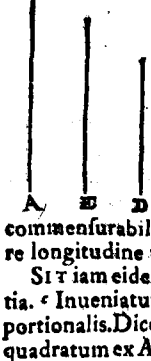
EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuum igitur est E, F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia non sunt, quod facere oportebat.

HAEC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia sæpenumero inuenti numeri secundùm eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48. sunt plani similes, cùm proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. vt constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quacunq; duo latera vnius proportionalia sint quibuscunq; duob. laterib. alterius; qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

10. 11.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentia.



SIT recta proposita A, cui primùm inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantùm. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Deinde ex corollario propos. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantùm. Quòd enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non est autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerũ quadratum; neq; quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. [c] Igitur rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quòd autem tantùm longitudine sint incommensurabiles, patet. Cùm enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, [b] ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commensurabiles. Quare longitudine tantùm incommensurabiles sunt.

c 9. decimi.

b 6. decimi.

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. [c] Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantùm incommẽsurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam enim est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum [d] erit & quadratum ex A, incommẽsurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib. & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonstrandum.

c 13. sexti.

d 10. decimi.

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensura cæterarum sumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit.

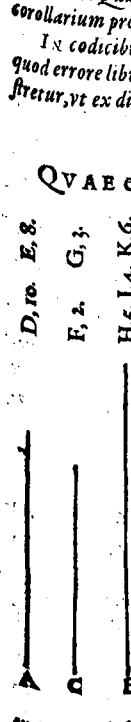
bilis sit. At verò E, Irrationalis, ex defin. 7. cùm Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CAETERVM ex demõstratione huius theorematis liquidò constat, rectam mediã proportionalẽ inter duas rectas potentia tãtùm cõmensurabiles, vel q̃ idem est, inter duas longitudine tantũ incõmensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilẽ longitudine & potentia; atque adeò appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quòd rectæ A, D, sunt longitudine tantùm incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantùm, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine, & potentia: Eodemq; argumento ostendemus eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cùm enim rectæ D, E, A, sint continuè proportionales, erit ex corollario propos. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Est autem recta D, recta A, incommensurabilis longitudine. [a] Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare rectæ D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia atque adeò & longitudine, per corollarium propos. 9. huius libri. a 10. decimi.

IN codicibus vulgatis, præponitur hæc vndecima propositio à Theone propositioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum esse puto, cùm secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demonstretur, vt ex dictis apparet.

THEOR. 9. PROPOS. 12. 12. 8.

QVAE eidẽ magnitudini sunt cõmensurabiles, & inter se sunt cõmensurabiles.



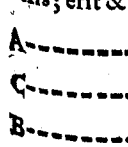
SIT vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cùm enim A, & C, sint commensurabiles, [a] habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoq; C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, [b] sumanturq́ tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitq́ue H, ad I, vt D, ad E; hoc est, vt A, ad C; & I, ad K, vt F, ad G; hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I; & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionẽ habentes, quam numeri H, K, [c] inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrãdum erat. a 5. decimi. b 4. octaui. c 6. decimi.

SCHOLIVM.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atq; A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoque A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B proportionẽ habere, quam habet numerus H, ad numerũ K: Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si verò A, & B, fuerint ipsi C, potentia cõmensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cùm enim A, & C, sint potentia commensurabiles, [a] erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cùm quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad G. [b] Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus; erit rursum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerum K. [c] Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt; atque adeò lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantùm esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ longitudine inter se commensurabiles, licet vtraque cuipiam alteri lineæ potentia tantùm sit cõmensurabilis; quales sunt duæ Rationales lõgitudine inter se cõmensurabiles, potentia verò tantũ Rationali expositæ cõmensurabiles, quas quidẽ inueniemus postea in scholio secundo, propositionis 19. huius libri. a 5. decimi. b 4. octaui. c 6. decimi

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus, hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera verò sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.



SINT enim A, & B, commensurabiles, sitq́; A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cùm enim tam B, quàm C, ipsi A, sit commensurabilis: erunt quoq; B, & C, est hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

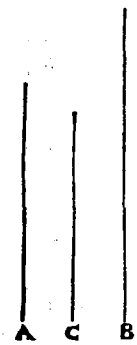
QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliquæ eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cùm tam B, quàm C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At verò si lineæ A, & B, potentia tantùm sint commensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis, siue longitudine, & potentia, siue potentia tantùm, colligemus quidem eodẽ argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem: quia vtraq; B, C, ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si A, ipsi C,

commensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitudine; at verò B, potentia tantùm, vt ex hypothesi constat.

12. 10.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera verò incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.



SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensurabilis ipsi A; cùm eidem A, commensurabilis ponatur C; [a] erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 12. decimi.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine: erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, [a] ostenderemus quoq; B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cùm hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, siue tantùm, siue etiam longitudine, at verò B, eidem C, potentia incommensurabilis: erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoq; B, & C, potentia commensurabiles. (cùm hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.

[a] 12. decimi.

QVONIAM verò hæc propositio 13. apud Theonem lemma est, fit, vt posthac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

13. 8.

THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autẽ ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.



SINT duæ magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cùm & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; [a] erunt & A, C, inter se commensurabiles. Quod est absurdũ. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines commensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 12. decimi.

SCHOLIVM.

HIC quoq; si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine: sit autem A, ipsi C, siue longitudine tantùm, siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, [a] essent quoq; A, & C, commensurabiles longitudine. (Cùm hoc posito, vtraq; A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quòd si A, & B, commensurabiles sint potentia tantũ, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Aliàs si B, C, potentia essent commensurabiles; [b] & A, C, potentia commensurabiles essent. (cùm hoc posito, vtraq; A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

[a] 12. decimi.

[b] 12. decimi.

COLLIGVNT porrò ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema, ad ea, quæ in hoc libro demonstrantur, perutile.

QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.



SINT duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; [c] erit quoque reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, & B, com-

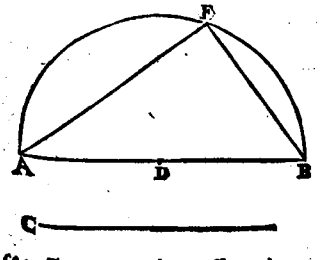
[c] 14. decimi.

B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensa ipsi C, incommensurabilis; [a] erit & D, reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum. a 14. decimi.

Si autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantùm incommensurabiles, vel longitudine & potentia: sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento longitudine incommensurabiles. Si verò A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantùm commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles: vt perspicuum est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, q̃ minor.



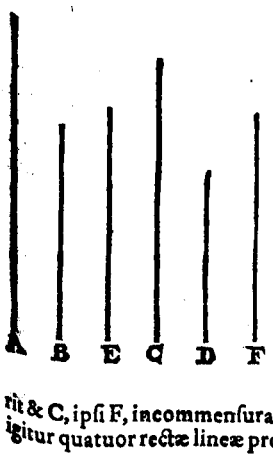
QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamen quia hîc breuius ex ijs, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales, A B, & C, quarum A B, maior, oporteatq; inuenire, quo A B, plus possit, quàm C. Diuisa A B, bifariam in D, describatur ex centro D, & interuallo D A, vel D B, semicirculus A E B, [b] in quo aptetur recta A E, ipsi C, æqualis, iungaturq; recta E B. Dico rectam A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ E B. [c] Cùm enim angulus E, in semicirculo rectus sit; [d] erit quadratum ex A B, æquale quadratis ex A E, E B, atq; idcirco A B, plus potest, quàm A E, hoc est, quàm C, quadrato rectæ E B. Quod est propositum. Similiter. b 1. quarti. c 31. tertij. d 47. primi.

DVABVS datis rectis lineis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas possit.

Hoc etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo datæ duæ rectæ A E, E B, quæ si coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta A B, [d] quippe cùm quadratum ex A B, æquale sit quadratis ex A E, E B. d 47. primi.

THEOR. 12. PROPOS. 15. 14. 12.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus possit q̃ secunda, quantũ est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit q̃ quarta, quantũ est quadratũ rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si prima tantò plus possit q̃ secunda, quantũ est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit q̃ quarta, quantũ est quadratũ rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.



SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, possitq; A, prima plus q̃ B, secunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus possit, q̃ D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilẽ esse longitudine ipsi C: Si verò E, sit longitudine incõmensurabilis ipsi A; & E, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothesim; & quadratũ ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; [b] Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, vt in scholio propos. 10. huius libri tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum. a 22. sexti. b 22. sexti.

SCHOLIVM.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantùm commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantùm ipsi C, esse commensurabilem, vt constat ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius libri scripsimus.

15. 9.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

Si duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines commensurabiles erunt.



COMPONANTVR duæ magnitudines commensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilem esse. [a] Sit enim ipsarum A B, B C, communis mensura D. Quoniam igitur D, ipsas A B, B C, metitur, [b] metietur quoque D, totam A C, ex ipsis compositam. Cùm ergo D, metiatur A C, & A B; erunt A C, A B, commensurabiles. Similiter cùm D, metiatur A C, & B C; erunt & A B, B C, commensurabiles: Ac propterea A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis erit.

SED iam tota A C, ex A B, B C, composita commensurabilis sit alteri ipsarum A B, B C, nempe ipsi A B. Dico & A B, B C, inter se commensurabiles esse. [c] Sit enim D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; [d] metietur quoque D, reliquam B C. Quare cùm D, metiatur A B, B C; commensurabiles erunt A B, B C, inter se. Eodem argumento ostendemus A B, B C, esse commensurabiles, si A C, ipsi B C, fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines commensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

a 3. decimi. b 1. pron. c 3. decimi. d 3. pron.

COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si A C, ipsi A B, sit commensurabilis, esse quoque eandem A C, reliquæ B C, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius A C, & ablatæ A B, cùm metiatur totam A C, & ablatam A B, metietur quoque reliquam B C, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt A C, B C. Quod est propositum.

16. 9.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.



COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipsarum A B, B C, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri potest, nempe ipsi A B, [e] sitque D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; [f] metietur quoque D, reliquam B C. Ac propterea cùm D, metiatur vtramque A B, B C, erunt A B, B C, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est A C, ipsi A B; Eademque ratione neq; ipsi B C, commensurabilis erit. Quare vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis est.

SED iam tota A C, composita ex A B, B C, incommensurabilis sit vni ipsarum componentium, nempe ipsi A B. Dico quoque A B, B C, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles, [g] erit quoque tota A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim A C, alteri ipsarū, nempe ipsi A B, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt A B, B C. Eodem argumento ostendemus A B, B C, incommensurabiles esse, si A C, ipsi B C, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incōmensurabiles componātur, &c. Quod erat ostendendū.

e 3. decimi. f 3. pron. g 16. decimi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse. Nempe si A C, incommensurabilis sit ipsi A B, esse quoque eandem A C, reliquæ B C, incommensurabilem. Si enim A C, ipsi B C, foret commensurabilis, esset quoque A C, ex coroll. precedentis propos. reliquæ A B, commensurabilis. Quod est absurdum. ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo A C, ipsi B C, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.

SCHOLIVM I.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumq; corollariis. si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad

vtriusque propositionis demonstrationem communis mensura D, &c. quam quidem solùm lineæ longitudine inter se commensurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

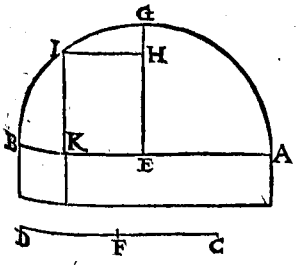
Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineę ex applicatione factis continetur.

Hoc lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

LEMMA II.

Dvabvs datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

Qvamvis id, quod hoc lemmate proponitur, absolui posśit ex propos. 28. libri 6. quòd quarta pars quadrati ex minore linea descripti, minor sit rectangulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficienteq; figura quadrata, vt vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptū, (quod quidē quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. libri 2.) minus sit quadrato ex dimidiata parte maioris descripto: (quod quidem applicatum est ad dimidium maioris, deficitq; figura quadrata.) Quamuis, inquam, absolui hoc posśit per propos. 28. lib. 6. libet tamen idipsum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales A B, C D, quarum A B, maior sit, oporteatq; ad A B, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum æquale sit quartæ parti quadrati ex recta C D, descripti. Sectis rectis A B, C D, bifariam in E, & F, describatur ex centro E, & interuallo E A, vel E B, semicirculus A G B; & ex E, perpendicularis ad A B, ducatur E G. Et quia tota A B, maior ponitur, quàm tota C D, erit quoq; A E, dimidia ipsius A B, hoc est, E G ipsi A E, æqualis, maior quàm C F, dimidia ipsius C D. Posita igitur E H, æquali ipsi C F, agatur per H, ipsi A B, parallela H I, demittaturq; I K L, ad A B, perpendicularis, & sit K L, ipsi K B, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum A L, & quadratum B L. Dico parallelogrammum A L, applicatum ad rectam A B, deficiens figurā quadrata B L, æquale esse quartæ parti quadrati rectæ C D. Quoniam enim K I, media proportionalis est inter A K, K B, vt in scholio propos. 13. lib. 6. tradidimus; [a] *erit rectangulum sub A K, K B, hoc est, rectangulum A L, æquale quadrato ex K I, hoc est, quadrato ex E H;* [b] *(est enim K I, ipsi E H, æqualis, ob parallelogrammum E I,) hoc est, quadrato ex C F: Est autem quadratum ex C F, quarta pars quadrati ex C D; quod quadratū ex C D, per scholium propositionis 4. libri 2. quadruplum sit quadrati ex C F. Igitur parallelogrammum A L, ad rectam A B, applicatum, deficiensq; quadrato B L, æquale est quartæ parti quadrati ex C D, descripti. Quod est propositum.*



a 17. sexti.

b 34. primi.

SCHOLIVM II.

Ex hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quàm quadratum à dimidia linea descriptum.

Sit enim recta data A B, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex C F, nō maius quàm quadratum ex dimidia A E, ita vt latus C F, non maius sit latere A E. Educta ergo ad A B, perpendiculari E G, sit E H, æqualis ipsi C F. Deinde acta H I, parallela ipsi A B, demittatur I K, perpendicularis ad A B. Quibus peractis, ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus A K, K B, æquale esse quadrato ex I K, hoc est, quadrato ex C F, atq; adeò & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex C F. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, q̄ quadratum ex dimidia linea descriptum; *quia si maius esset, esset quoq; recta C F, maior quàm recta E G. Quare ex E G, abscindi non posset recta ipsi C F, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.*

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.



SINT duæ rectæ inæquales A B, & C; & ad maiorem A B, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitq; illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, descripti, ita vt D B, latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta A D, D B, inæqualia esse. Si enim A D, D B, segmenta dicantur esse æqualia; cùm ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad A B, deficiensq; figura quadrata ex D B, descripta, æquale sit rectangulo sub A D, D B; sit autem quod sub æqualibus A D, D B, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex A D, dimidio ipsius A B, descriptum; atq; adeo ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex A B, quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratū ex C, per hypothesim, quadruplū eiusdē parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex A B, & C, æqualia sunt, atq; rectæ A B, & C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & A B, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta A D, D B. Quod est propositum.

Hoc facilè etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cùm enim abscissa sit per constructionem E H, æqualis dimidiatæ parti ipsius C D, nempe ipsi C F, ductaq; H I, parallela ipsi A B, & tandem demissa perpendicularis I K, vt partes factæ ex applicatione sint A K, K B; manifestum est A K, K B, segmenta esse inæqualia, cùm A B, in E, secta sit bifariam. Immò hinc constat, prius segmentū maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

17. 13. ## THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propositionis applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub A D, D B, faciatq; segmenta A D, D B, longitudine commensurabilia. Dico A B, plus posse, quàm C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniam enim per tertium lemma præcedentis propositionis A D, maior est, quàm D B; diuidatur A B, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cùm totæ E A, E B, æquales sint, & ablatæ quoque E F, E D; erunt & reliquæ A F, B D, æquales.



a 5. secundi. Et quia recta A B, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D; a erit rectangulum sub A D, D B, vnà cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E B: Ac propterea quadruplum rectanguli sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex E B: Est autem quadruplo rectanguli sub A D, D B, æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectangulum sub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D; (quadratum enim ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex E D, cùm F D, dupla sit ipsius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale est quadratum ex A B. (quòd quadratum ex A B, quadruplum sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex E B, dimidiata parte ipsius A B.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B; Ac proinde recta A B, plus potest, quàm recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur F D, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commensurabiles; b erit quoque tota A B, parti D B, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi D B, composita ex D B, A F, longitudine commensurabilis: (quòd composita ex D B, A F, dupla sit ipsius D B.) Igitur cùm vtraque A B, & composita ex D B, A F, longitudine sit commensurabilis ipsi D B; c erunt quoq; A B, & composita ex D B, A F, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cùm A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, commensurabilis sit longitudine compositæ ex A F, D B; erit eadem A B, ex corollario propos. 16. huius lib. commensurabilis longitudine reliquæ F D. Ergo A B, plus potest, quàm C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi commensurabilis.

b 16. decimi.

c 12. decimi.

SED iam A B, plus possit, quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque

eiatque segmenta A D, D B. Dico & rectas A D, D B, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ F D. Quare cùm A B, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta A B, ipsi F D, longitudine commensurabilis. Igitur cùm tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi F D; erit eadem A B, longitudine commensurabilis reliquæ compositæ ex A F, D B, per corollarium propos. 16. huius libri. Est autem & composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cùm ipsius sit dupla: Igitur cùm vtraque A B, D B, longitudine sit commensurabilis compositæ ex A F, D B; [a] erunt quoque A B, D B, longitudine inter se commensurabiles: Atq; adeò cùm tota A B, composita ex A D, D B, commensurabilis sit longitudine ipsi D B; [b] erunt ipsæ A D, D B, longitudine quoq; inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

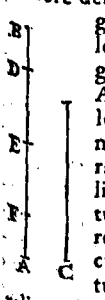
[a] 11. decimi.

[b] 16. decimi

THEOR. 16. PROPOS. 19. 18. 14.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tantò plus poterit, quàm minor, quantum est quadratū rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quòd si maior tantò plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiēs figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex C, minore descripti applicetur ad A B, per secundum lemma propositionis præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta A B, partes A D, D B, longitudine incommensurabiles. Dico A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim, quæ suprà constructis, similiter ostendemus A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommensurabiles; [c] erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommensurabilis. Sed D B, longitudine commensurabilis est compositæ ex D B, A F, cùm hæc illius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium D B, & quæ componitur ex D B, A F, ipsa D B, longitudine sit incommensurabilis rectæ A B: [d] erit quoque reliqua composita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommensurabilis: Ac propterea cùm A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, incommensurabilis sit longitudine compositæ ex A B, D B, erit eadem A B, per corollarium propos. 17. huius lib. & reliquæ F D, longitudine incommensurabilis. Ergo A B, plus potest, quàm C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi incommensurabilis.



[c] 17. decimi.

[d] 14. decimi.

IAM verò A B, plus possit, q̄ C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B, partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus vt prius, rectam A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ F D. Quare cùm A B, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; erit A B, ipsi F D, incommensurabilis longitudine. Igitur cùm tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna, longitudine incommensurabilis sit ipsi F D; erit eadem A B, per corollarium propositionis 17. huius libri, & reliquæ compositæ ex A F, D B, longitudine incommensurabilis: Est autem composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cùm illa huius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium, nempe quę ex A F, D B, componitur, & D B, ipsa composita ex A F, D B, longitudine incommensurabilis sit rectæ A B; [e] erit & reliqua D B, eidem A B, longitudine incommensurabilis; Ac proinde cùm tota A B, composita ex A D, D B, incommensurabilis sit ipsi D B, longitudine; [f] erunt & ipsę A D, D B, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.

[e] 14. decimi.

[f] 17. decimi.

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.

LEMMA I.

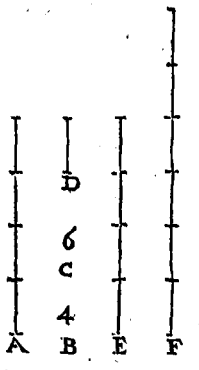
QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, potentia verò commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, &

ipsi commensurabilem, non solùm longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si verò expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, siquidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quòd si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantùm ipsi commensurabilis.

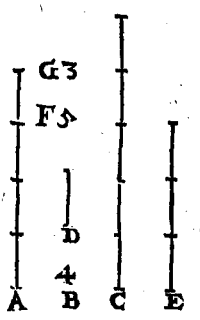
LEMMA II.

Ex Proclo. Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solùm. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solùm commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, inquam, inter se vel longitudine & potentia, vel potentia solùm: Et siquidem longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, vt intelligatur, etiam potẽtia commensurabiles esse; Si verò potentia inter se solùm sunt commensurabiles: dicuntur ipsæ quoq; Rationales, potentia solùm inter se commensurabiles.

SCHOLIVM.



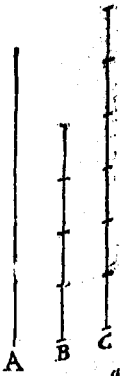
Itaque ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera æqualis est expositæ Rationali, ac proinde vtraque Rationali commensurabilis quoq; longitudine: Aut neutra Rationali expositæ æqualis est, longitudine tamen ei vtraque est commensurabilis: Aut denique vtraque expositæ Rationali commensurabilis est solùm potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo: Sit expositæ Rationalis A, diuisa in quatuor partes; quot nimirum vnitates sunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, sit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties vnitas est in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componũtur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales sunt ipsi D; ipsæ æquales erunt. Rursus quia D, metitur omnes tres, A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commensurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commensurabiles longitudine, Rationales sunt: Sunt autem & ostensa longitudine inter se commensurabiles, cùm habeant D, communem mensuram. Inuentæ ergo sunt duæ Rationales E, F, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, & quarum vna, nempe E, æqualis est Rationali expositæ A.



Iam verò D, metiatur duas lineas quasdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem sit qui B, ita vt vtraque linea C, & E, inæqualis sit ipsi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, mensuram habentes communẽ D, longitudine commensurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commensurabiles, Rationales sunt. Cùm ergo & inter se sint longitudine commensurabiles; inuentæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, quarum neutra æqualis est Rationali expositæ A.

a 11. decimi.

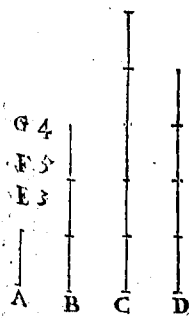
Postremo, expositæ Rationali A, [a] inueniatur recta B, longitudine tantùm incommensurabilis, quæ secetur in quotcunque partes æquales, & sumatur C, composita ex alijs quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales sint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commensurabiles. Dico easdem expositæ Rationali A, potentia solùm esse commensurabiles. Quoniam enim A, B, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B, commensurabile quadratum ex C: quòd E, C, longitudine sint commensurabiles, atque adeò & potentia; [b] Igitur quadrata rectarum A, & C, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare C, ipsi A, potentia est commensurabilis. Et quia duarũ rectarum B, C, longitudine commensurabilium B, est ipsi A, longitudine incommensurabilis; [c] erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommensurabilis. Est ergo C, solùm potentia ipsi A, commensurabilis. Et quia B, & C, Rationali expositæ A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuentæ erũt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia verò tantùm commensurabiles expositæ Rationali A. Quod est propositum.



b 12. decimi.

c 14. decimi.

Quod



QVOD si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo: Sumpta mensura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A, æqualibus, quot sunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.

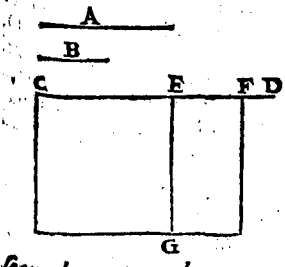
CAETERVM & omnes lineas Rationales, non solùm expositæ Rationali, sed etiã inter se esse commensurabiles, facilè hoc modo demonstrabimus. [a] *Quoniã Rationales lineæ sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm;* [b] *quæ autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunque inter se commensurabiles esse.*

a 6. defin.

b 12. decimi.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.



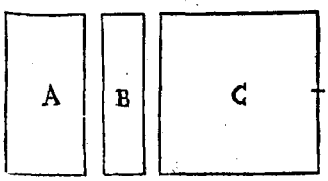
SINT duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex quantacunque enim linea recta C D, abscindatur C E, ipsi A, æqualis, & E F, ipsi B. Deinde super C E, describatur quadratum C G, perficiaturq; rectangulum G F, contentum sub C E, & E F, hoc est, sub A, & B. [c] *Quoniam igitur est vt C E, ad E F, hoc est, vt A, ad B, ita parallelogrammũ C G, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum G F, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.*

c 1. sexti.

EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectangulũ F G, ad quadratũ G C. Quod est propositũ.

LEMMA IIII.

SPATIVM Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.



SIT spatium A, commensurabile Rationali spatio B. Dico & A, Rationale esse. Sit namque C, quadratũ Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel irrationalia; quod nimirum ab exposita Rationali describitur. Quoniam igitur B, Rationale est, [d] *erit ipsum Rationali C, commensurabile: Est autem & A, ipsi B, commensurabile. Igitur A, & C, cùm commensurabilia sint ipsi B,* [e] *inter se quoque commensurabilia erunt; ac proinde spatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expositæ descripto commensurabile,* [f] *Rationale est. Quod erat demonstrandum.*

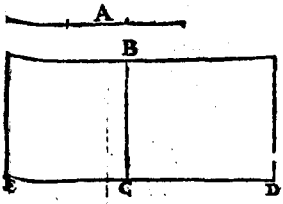
d 9. defin.

e 12. decimi.

f 9. defin.

THEOR. 17. PROPOS. 20. 19.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundùm aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est. 15.



SIT expositæ Rationalis A, & spatium rectangulum B D, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus B C, C D, secundùm aliquem prædictorum modorum. (hoc est, secundùm aliquem trium modorum, quos in scholio 2. antecedentis propositionis explicuimus; ita vt vel altera ipsarum B C, C D, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra: sed tamẽ ei vtraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantùm. Dico B D, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum; nempe ex B C, quadratum B E. Quoniam igitur B C, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solùm; [a] erit quoque quadratum B E, ex B C, descriptum quadrato ex A, commensurabile: [b] Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. [c] Igitur & B E, illi comensurabile, Rationale est. Quia verò B C, hoc est, E C, & C D, longitudine commensurabiles sunt; (ponuntur enim B C, C D, Rationales inter se longitudine cõmensurabiles.)

a 3. defin.

b 8. defin.

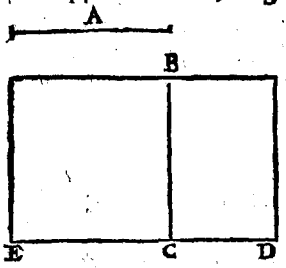
c 9. defin.

a 1. sexti. b 10. decimi. [a] & est vt E C, ad C D, ita E B, ad B D; [b] erunt quoque E B, B D, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propos. B D, Rationali B E, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

20. 16.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.



Sit rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis B C, secundùm aliquē modorum, quos in scholio 2. propos. 19. exposuimus, hoc est, siue B C, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, latitudinem faciens C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex B C, quadratum B E; quod similiter, vt in antecedenti propositione ostendemus Rationale esse. Quia igitur B E, B D, Rationalia sunt, [c] ipsa commensurabilia erunt quadrato ex lineâ Rationali expositâ A, descripto; [d] Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: [e] Est autem vt B E, ad B D, ita E C, hoc est, B C, ad C D. Igitur & B C, C D, commensurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo C D, ipsi B C, commensurabilis longitudine: [f] sed & Rationalis, quippe quæ Rationali B C, atq; idcirco Rationali expositæ A, commensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare latitudo C D, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi B C. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.

c 9. defin. d 12. decimi. e 1. sexti. f 6. defin.

LEMMA I.

Recta linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.

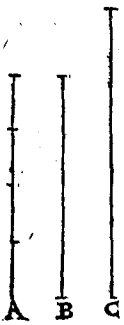


Possit recta A, spatium Irrationale, hoc est, quadratum ex A, æquale sit spatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem esse. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonstratione propos. 20. huius libri ostensum est. quod est absurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis est. Igitur Irrationalis.

Hoc idem constat ex defin. 11. huius lib. Vbi lineæ potentes spatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

Dvas rectas Rationales potentia solùm commensurabiles inuenire.



Dvo genera sunt linearum Rationalium potentia tantū inter se commensurabilium. Aut enim altera earū est æqualis expositæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus: Sit exposita Rationalis A, cui æqualis sumatur B. Deinde ipsi B, a *inueniatur C, longitudine tantū incommensurabilis, seu (quod idem est) potētia tantū commensurabilis. Quoniam igitur B, C, ipsi A, commensurabiles sunt, (B, quidem, q ei sit æqualis; at C, ex constructione, q inuenta sit potētia tantū commensurabilis ipsi B, atq; adeò ipsi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autē & potentia solùm cōmensurabiles. Inuentæ ergo sunt duæ Rationales B, C, potentia tantū commensurabiles, quarū altera, nempe B, expositæ Rationali A, æqualis est.*

a 11. decimi.

Posteriorīs autē generis lineas hac arte reperiemus: Sit rursus exposita Rationalis A, cui longitudine tantū incommensurabilis b *inueniatur B; & huic rursum longitudine tantū incommensurabilis C, maior aut minor q̄ A. Dico B, C, esse Rationales potentia tantū commensurabiles. Quod enim sint solùm commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quòd autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare cùm vtraq; B, C, expositæ Rationali A, sit potentia commensurabilis;* c *erūt B, C, Rationales. Inuentæ ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantùm commensurabiles.*

b 11. decimi. c 6. defin.



SCHOLIVM.

Qvod si inuenienda sunt quotcunq; lineæ Rationales potentia tantū inter se commensurabiles, exequemur hac ratione.

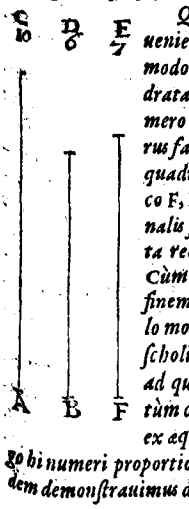
SVMAN-



SVMANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur; nempe A, B, C, D. Deinde ſumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratũ ex E, ad quadratum ex F, vt in corollario propoſitionis 6. huius libri oſtendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales eſſe, & potẽtia tantùm commenſurabiles inter ſe. Quòd enim Rationales ſint, manifeſtum eſt. Cùm enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex conſtructione; ſimiliterq; quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At verò ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; ſimiliterq; quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D.) [a] erunt ipſa inter ſe commenſurabilia, ac propterea & recta ipſa potentia ſaltem commenſurabiles. Exiſtente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quòd autem potentia tantùm ſint commenſurabiles, ita oſtendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia ſunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem nõ habent, quam quadrati numeri, vt ad finem libri 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati. [b] Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Rationales, & potentia commenſurabiles. Rationales igitur ſunt, & potentia tantùm commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

[a] 6. decimi.

[b] 9. decimi.



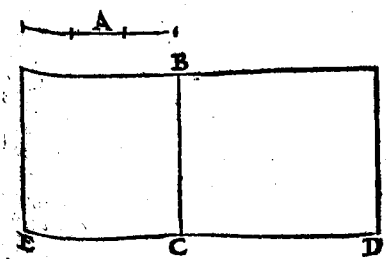
QVOD ſi propoſitis quotcunque Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus, inuenienda ſit adhuc alia, quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantùm, fiet id hoc modo: Sint propoſitæ duæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles A, B, quarũ quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipſorum C, D, primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facilè, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per corollarium propoſitionis 6. huius libri. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolùm commenſurabilem. Quòd enim Rationalis ſit, ex eo patet, quòd commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cùm quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numerus D, E, [c] commenſurabilia ſint. Cùm ergo proportio D, ad E, non ſit, qua numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem libri 8. oſtendimus; (quòd D, & E, qui ambo non ſunt quadrati, cùm E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoq; plani non ſimiles, ac proinde ex iis, quæ in ſcholio propoſitionis 26. libri 8. oſtendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum) [d] erunt rectæ B, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantùm commenſurabiles. Eadem ratione erũt A, & F, potentia ſolùm commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cùm ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod oſtendemus perinde, vt idem demonſtrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommenſurabiles, &c.

[c] 6. decimi.

[d] 9. decimi.

THEOR. 19. PROPOS. 22. 21. 19.

QVOD ſub Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.



SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum ſub Rationalibus B C, C D, potentia tantùm commenſurabilibus ſecundùm aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus. (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non.) Dico rectangulum B D, eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi B D, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex B C, quadratum B E, quod erit Rationale, vt in demonſtratione propoſ. 20. diximus. [a] Et quoniam eſt vt E C, hoc eſt, B C, ad C D, vt B E, ad B D. Eſt autem B C, ipſi C D, longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius libri tradidimus, B E, ipſi B D, incommenſurabile. [b] Quare cùm B E, commenſurabile ſit quadrato ex Rationali expoſita A; ſit autem B E,

[a] 1. ſexti.

[b] 9. defin.

a 14. decim. ipsi B D, incõmensurabile: a erit quoq; quadratũ ex Rationali exposita A, eidem B D, incommensurabile: Ac propterea B D, quadrato Rationalis expositæ incõmensurabile existens, b Irrationale
b 10. defin. est. Quamobrem & recta potens ipsum B D, Irrationalis est, ex 1. lemmate propos. antecedentis.
c 17. sexti. VOCETVR autem hæc linea potens ipsum B D, Media, c propterea quòd media proportionalis est inter duas B C, C D, Rationales potẽtia tantùm inter se commensurabiles, quippe cùm eius quadratum æquale sit rectangulo B D, sub ipsis B C, C D, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solùm commensurabilibus, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm inter se commen-
a 17. sexti. *surabiles, Media vocabitur.* a *Cùm enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facilè describemus, si dicamus eam esse lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantùm inter se commensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantùm inter se commensurabilibus contentum. Nam sola hæc linea Media hoc loco appellatur.*

VT autem rectè hoc loco monet Campanus, non solùm recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentum, Irrationalis est, vocaturq; Media: Verùm etiam quadratum ipsius, vel rectangulum illud medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solùm commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres lineæ sint continuè proportionales, quales sunt B C, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & C D; erunt quoque rectilineæ similia, similiterq; descriptæ super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata proportionalia, vt in scholio propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum proportionale est inter quadrata rectarum B C, C D, ideoq; Medium appellari potest.

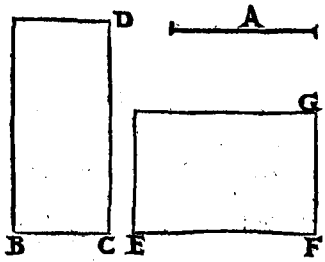
HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus, quale est Medium B D. Hoc enim falsum est, cùm & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe Medij longitudine, vel potentia tantùm inter se commensurabilibus, vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocantur, rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantùm inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentum, Medium est, vt ostendimus: At non omne spatium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus continetur. Vniuersè tamẽ omne spatium Medium, æquale est alteri cuipiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contento. Nam aliàs recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus comprehensum; vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm commensurabiles.

VNDE Medium describi sic poterit, vt dicamus, illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentũ: Vel certè rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus comprehenso æquale est, ita vt ipsum possit linea recta, quæ Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium nõ contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt duæ lineæ Rationales potentia tantùm commensurabiles, vt in scholio sequentis theorematis ostendemus.

22. 20.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinẽ efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.



a 45. primi. SIT linea Media A, & Rationalis B C, siue ea sit expositæ commensurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantũ; a appliceturq; ad B C, rectangulum B D, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale est, faciatq; latitudinẽ C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, longitudine incommensurabilẽ. Quoniam enim A, Media est, ipsa poterit rectangulũ sub duabus rectis Rationalibus potentia tantũ inter se commensurabilibus contentum; aliàs nõ posset dici Media. Sit igitur illud rectangulum E G, sub Rationalibus E F, F G, potentia tantùm commensurabilibus contentũ. Et quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum B D; æqualia erunt B D, & E G, b latera;
b 14. sexti. idcircò habebunt reciproca circa æquales angulos, nempe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad C D;
c 22. sexti. c Ac propterea quoq; vt quadratũ ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratũ ex B C, commensurabile est quadrato ex E F. (quòd rectæ B C, E F, ponantur Rationales, atque adeò inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potẽtia tantùm.)

tantùm.) [a] Igitur & quadratum ex F G, commensurabile erit quadrato ex C D; propterea{que} & rectæ F G, C D, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cùm F G, Rationalis expositæ Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est exposita Rationalis; erit quoque C D, expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atq; adeò C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quòd & longitudine incommensurabilis ipsi B C. Quoniam enim E F, F G, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt E F, ad F G, ita quadratum ex E F, ad rectangulum E G, sub E F, F G, contentum, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. [b] erit quadratum ex E F, incommensurabile rectangulo E G, atque adeò rectangulo B D, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex E F, commensurabile est quadrato ex C D. (quòd E F, C D, Rationales sint, atque idcirco saltem potentia commensurabiles.) Igitur cùm quadratum ex C D, commensurabile sit quadrato ex E F; at rectangulum B D, eidem quadrato ex E F, incommensurabile: [c] incommensurabilia erunt quadratum ex C D, & rectangulum B D. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex C D, ad rectangulum B D, vt recta C D, ad rectam B C. [d] Incommensurabiles ergo sunt longitudine C D, & B C. Rationalis ergo est C D, & Rationali B C, longitudine incommensurabilis. Quamobrem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 10. decimi
b 10. decimi
c 13. decimi.
d 10. decimi

SCHOLIVM.

FACILIVS quàm ex propos 45. lib. 1. applicabimus ad B C, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsis B C, & A, [a] sumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cùm enim B C, A, & C D, proportionales sint; [b] erit rectangulum B D, sub extremis B C, C D, contentum, æquale quadrato mediæ proportionalis A.

a 11. sexti.
b 17. sexti.

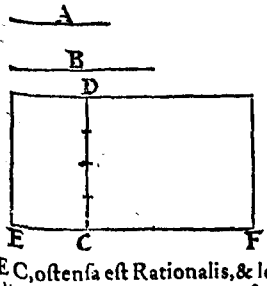
HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiusplam lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifestum est, omne Medium, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium contentum sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

23.
24.

MEDIAE commensurabilis, Media est.



SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potètia tantùm. Dico & B, Mediam esse. Exposita enim sit Rationalis C D, [a] ad quam applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinem; [b] erit C E, Rationalis ipsi C D, longitudine incommensurabilis. Rursus ad C D, Rationalem [c] applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, D E, D F, commensurabilia. [d] Est autem vt D E, ad D F, ita recta E C, ad rectam C F. [e] Igitur E C, C F, longitudine sunt commensurabiles: Sed E C, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi C D, incommensurabilis. [f] Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommensurabilis est. Cùm ergo & Rationalis sit, propterea quòd Rationali expositæ C D, sit commensurabilis; (Nam cùm E C, C F, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & E C, ipsi C D, commensurabilis saltem potentia, quòd Rationalis sit; erit & C F, eidem C D, commensurabilis potentia, ex iis, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus.) erunt C D, C F, Rationales potentia tantùm commensurabiles. [g] Ac proinde recta B, potens rectangulum D F, sub Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus C D, C F, Media est. Mediæ igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.

a 45. primi.
b 23. decimi
c 45. primi.
d 1. sexti.
e 10. decimi
f 14. decimi
g 22. decimi

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile, Medium esse. Postquam enim demonstratum est D F, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo mox fuit D F, esse quoque Medium: nimirum sub Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus C D, C F, contentum. Eademq; ratio est in cæteris. Quod tamè hoc etiam modo potest demonstrari.

SIT spatium D F, spatio Medio D E, commensurabile. Dico & D F, Medium esse. Posit enim A, Media ipsum D E, Medium. (Nam cùm D E, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius libri tradidimus.) & B, ipsum D F. Quoniam igitur D E, D F, commensurabilia sunt, erunt quoque quadratæ ex A, B, ipsis æqualia, commensurabilia. Quare A, B, rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Atque idcirco existente A,

Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.

LEMMA I.

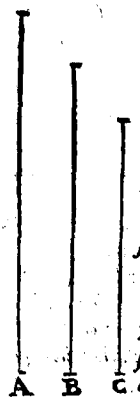
QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hîc de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solùm longitudine, sed & potentia; Vniuersè enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si verò recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Media rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solùm commensurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Mediας longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantùm commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur duæ rectæ commensurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc verò potentia tantùm; [a] *erit vtraque B, C, Media A, commensurabilis, Media. Cùm ergo A, B, sint longitudine cõmensurabiles; & A, C, potẽtia tantùm; erũt inuentæ A, B, Mediæ longitudine cõmensurabiles; & A, C, Mediæ potentia solùm cõmensurabiles. Quod est propositum.*

a 24. decimi.



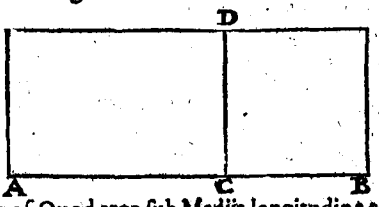
SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commensurabilis, Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis; cùm duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quánam via inueniẽdæ sint duæ Mediæ longitudine et potẽtia incõmensurabiles.

24. 23.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.



CONTINEATVR rectángulum A D, sub Mediis A C, C D, longitudine commensurabilibus. Dico A D, Medium esse. Describatur ex C D, Media quadratum B D, quod erit Medium. [a] Et quoniam est vt A C, ad C B, ita A D, ad D B: Sunt autem A C, C B, hoc est, A C, C D, longitudine commẽsurabiles; [b] erunt A D, D B, cõmensurabilia. Quare spatium A D, Medio D B, commensurabile, Medium est, ex coroll. præcedentis propos. Quod ergo sub Mediis longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. sexti.

b 10. decimi.

25. 23.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Mediis potentia tantùm commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum A C, comprehensum sub Mediis A B, B C, potentia tantùm commensurabilibus. Dico A C, esse vel Rationale, vel Medium. Describantur ex A B, B C, quadrata A D, C E, quæ Media erunt, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus; cùm rectæ A B, B C, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis F G, [c] ad quam applicetur rectangulum F H, quadrato A D, ex A B, describto æquale; & ad H I, rectangulum I K, rectangulo A C, æquale; & denique ad K L, rectangulum L M, æquale quadrato C E, ex B C, descripto; eritq; totum F M, vnum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib. 1. est ostensum. Quia verò A D, C E, Media sunt, erunt & F H, L M, illis [d] æqualia, Media: quæ cùm applicentur ad Rationales F G, K L, ([d] est enim & K L, Rationali F G, [e] æqualis, ob parallelogrammum F K, Rationalis.) faciantque latitudines G H, K M, [e] erunt rectæ G H, K M, Rationales, ipsi F G, seu K L, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ A B, B C, potentia inter se sunt commensurabiles, erunt & earum quadrata A D, C E, atque adeò & ipsis [f] æqualia rectangula F H, L M, commensurabilia: [f] Vt autem F H, ad L M, ita est recta G H, ad K M. [g] Igitur G H, K M, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare G H, K M, Rationales ostensæ, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali verò F G, solùm commensurabiles potentia, cùm ei ostensæ sint longitudine incommensurabiles; [b] Ac propterea rectangulum sub ipsis

c 45. primi.

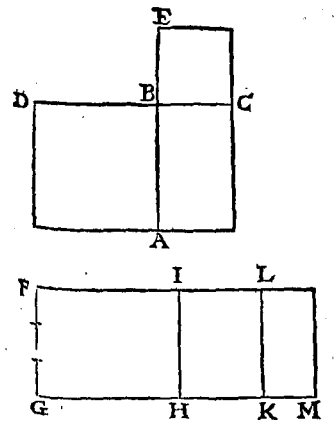
d 34. primi.

e 23. decimi.

f 1. sexti.

g 10. decimi.

b 20. decimi



ipſis G H, K M, Rationale eſt. Et quoniam eſt, vt D B, ad B C, ita A B, ad B E; (quòd D B, B C, ipſis A B, B E, ſint æquales, vtraque vtriq;) [a] & vt D B, ad B C, ita A D, ad A C; & vt A B, ad B E, ita A C, ad C E; erit quoq; vt A D; ad A C, ita A C, ad C E; atque adeò A D, A C, C E, proportionalia ſunt. Igitur & illis æqualia F H, H L, L M, proportionalia erunt: [b] Habent autem rectæ G H, H K, K M, eaſdem proportiones, quas rectangula F H, H L, L M. Igitur & rectæ G H, H K, K M, proportionales ſunt; [c] propterea q; rectangulum ſub G H, K M, quadrato ex H K, æquale eſt. Eſt autem rectangulum ſub G H, K M, oſtenſum Rationale. Igitur & quadratũ ex H K, Rationale eſt; Ideoq; & recta H K, Rationalis erit; [d] & ob hoc ipſi F G, Rationali expoſitę, hoc eſt, ipſi H I, commenſurabilis vel longitudine, & potentia, vel ſolùm potentia. Et ſi quidem H K, ipſi H I, longitudine ſit commenſurabilis; [e] rectangulum H L, ſub Rationalibus H I, H K, longitudine commenſurabilibus contentum, hoc eſt, A C, illi æquale, erit Rationale. Si verò H K, ipſi H I, potentia ſolùm commenſurabilis ſit; [f] erit rectangulum H L, ſub Rationalibus H I, H K, potentia tantùm commenſurabilibus contentum, hoc eſt, A C, illi æquale, Medium. Eſt ergo A C, rectangulum ſub Mediis A B, B C, potentia tantùm commenſurabilibus contentum, vel rationale, vel Mediũ. Quocirca, quod ſub Mediis potentia tantũ cõmenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendũ.

a 1. ſexti.
b 1. ſexti.
c 17. ſexti.
d 6. deſin.
e 20. decimi
f 23. decimi

SCHOLIVM.

FACILIVS quàm ex 4c. propoſ. lib. 1. applicabimus ad H I, rectangulum ipſi A C, æquale, [a] ſi tribus rectis H I, A B, B C, quarta proportionalis ſumatur pro latere H K. [b] Nam rectangulum ſub extremis H I, H K, æquale erit rectangulo ſub mediis A B, B C.

a 12. ſexti.
b 16. ſexti.

HAC eadem arte vtemur inſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM verò in hoc theoremate demonſtratur, rectangulum contentum ſub duabus rectis Mediis potentia tantùm commenſurabilibus eſſe vel Rationale, vel Medium; docebit Euclides propoſ. 28. quánam ratione inueniendæ ſint duæ Mediæ potẽtia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propoſ. verò 29. duas Medias potentia ſolùm commenſurabiles inquiret, quæ ſpatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, [c] rectangulum contentum ſub duabus Rationalibus longitudine commenſurabilibus eſſe Rationale; [d] Sub duabus verò Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentum rectangulum eſſe Irrationale, appellariq; Medium, & rectam, quæ ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex demonſtratis conſtat, [e] rectangulum comprehenſum ſub duabus Mediis longitudine commenſurabilibus eſſe Medium; [f] Rectangulum autem ſub duabus Mediis potentia ſolùm commenſurabilibus comprehenſum eſſe vel Rationale, vel Medium.

c 20. decimi.
d 22. decimi.
e 25. decimi.
f 26. decimi.

QVOD ſi quis roget, qualénam rectangulum ſit illud, q; ſub duabus Mediis longitudine & potẽtia incõmenſurabilibus cõtinetur; Reſpondemus illud nec Rationale eſſe, nec Medium ſed tertiũ quoddã genus conſtituere; nempe æquale eſſe rectangulo, q; cõtinetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulum A C, comprehenſum ſub duabus Mediis A B, B C, longitudine & potentia incommenſurabilibus. Dico A C. neq; Rationale eſſe, neq; Medium, &c. Conſtructis enim eiſdem, vt in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas G H, K M, Rationales eſſe, & ipſi F G, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ A B, B C, ponuntur incommenſurabiles longitudine & potentia; erunt & earum quadrata A D, C E, atque adeò ipſis æqualia rectangula F H, L M, incommẽſurabilia: [g] Vt autem F H, ad L M, ita eſt recta G H, ad rectam K M. [h] Igitur rectæ G H, K M, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabiles. Quare G H, K M, oſtenſæ Rationales, ſunt potentia tantùm inter ſe commenſurabiles; [i] Ac propterea rectangulum ſub ipſis G H, K M, Irrationale eſt, quod Medium appellatur, & recta ipſum potens, Irrationalis, qua dicitur Media. [k] Poteſt autem rectangulum ſub ipſis G H, K M, recta H K: (Nam, vt prius, oſtendemus tres G H, H K, K M, eſſe proportionales.) Igitur H K, Irrationalis eſt, & Media. Quare I K, Rationale non eſt: ſi enim Rationale eſſet, [l] faceret ipſum ad Rationalem H I, applicatum latitudinem H K, Rationalem, & ipſi H I, longitudine commenſurabilem. Quod eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt H K, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neq; I K, Medium eſt; Si enim eſſet Medium, [m] faceret ipſum applicatum ad Rationalem H I, latitudinem H K, Rationalem, & ipſi H I, longitudine incommenſurabilem. quod eſt abſurdum. oſtenſa eſt enim H K, Irrationalis, & Media. Itaque cùm I K, neq; Rationale ſit, neq; Medium; neceſſariò neq; A C, illi æquale, Rationale erit, neque Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituet, nempe æquale erit ipſi I K, quod ſub Rationali, & Media, continetur, cùm H I, Rationalis ſit, & H K, oſtenſa Media. Ex quibus efficitur, rectam quæ poteſt ſpatiũ ſub duabus Mediis longitudine & potentia incommẽſurabilib. (quales ponuntur A B, B C,) comprehenſum, poſſe quoq; rectangulum ſub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, cõtentum. Quod eſt propoſitum.

g 1. ſexti.
h 10. decimi.
i 22. decimi.
k 17. ſexti.
l 21. decimi
m 23. decimi.

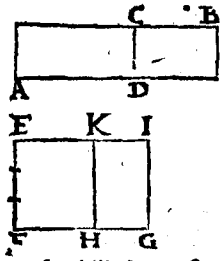
26. 22.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non superat Medium Rationali.

SVPERET Medium A B, Medium A C, rectangulo D B. Dico D B, nõ esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, D B, Rationale. Expositâ ergo Rationali linea E F; [a] ad ipsam applicetur rectangulum E G, Medio A B, æquale; & Medio A C, rectangulum E H, æquale, vt sit reliquum H I, Rationali D B, æquale. Erunt igitur E G, E H, æqualia Mediis A B, A C, Media; & H I, æquale Rationali D B, Rationale. Quoniam ergo Media E G, E H, ad Rationalem E F, sunt applicata; [b] erunt rectæ F G, F H, Rationales, & ipsi E F, incommensurabiles longitudine. Rursus, quia Rationale H I, applicatum est ad Rationalem H K; ([c] est enim recta H K, Rationali E F, æqualis) [d] erit recta H G, Rationalis, & ipsi E F, longitudine commensurabilis. Quare cùm H G, E F, longitudine sint commensurabiles; & E F, ipsi F H, longitudine incommensurabilis, vt est ostensum; [e] erit & H G, eidem F H, longitudine incommensurabilis. Est autem vt F H, ad H G, ita quadratum ex F H, ad rectangulum sub F H, H G, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. [f] Igitur quadratum ex F H, incommensurabile est rectangulo sub F H, H G. Sed quadrato ex F H, commensurabile est quadratum ex H G; (quòd sint ambo ex lineis Rationalibus F H, H G, descripta) [g] atque adeò & duo quadrata ex F H, H G, simul, quadrato ex F H, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub F H, H G, commensurabile est id, quod bis continetur sub F H, H G, (quia hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex F H, H G, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub F H, H G, bis. [h] Quare & compositum ex quadratis rectarum F H, H G, & ex rectangulo bis sub F H, H G, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum F H, H G. [i] At quadratis ex F H, H G, vnà cum rectangulo bis sub F H, H G, æquale est quadratum ex F G. Igitur & quadratum F G, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum F H, H G: Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quòd ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex F H. Igitur cùm huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex F G, [k] erit quadratum ex F G, Irrationale; [l] ac propterea & recta F G, Irrationalis erit. Quod est absurdum, ostensa enim est F G, Rationalis longitudine ipsi E F, incommensurabilis. Non ergo D B, quò Medium A B, superat Medium A C, Rationale est. Quam ob rem Medium non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.

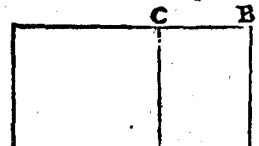
a 45. primi. b 23. decimi. c 34. primi. d 21. decimi. e 14. decimi. f 10. decimi. g 16. decimi h 17. decimi. i 4. secundi. k 10. defin. l 11. defin.



SCHOLIVM.

Ex dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat rationale Rationali.



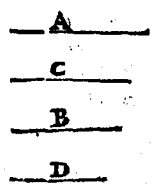
RATIONALE enim A B, superet Rationale A C, spatio D B. Dico D B, quoq; esse Rationale. Quoniã enim A B, A C, Rationalia sunt; [a] *erunt A B, A C, commensurabilia quadrato Rationalis expositæ;* [b] *atq; adeò & inter se commensurabilia. Quare cùm totum A B, cõpositum ex A C, D B, commensurabile sit ipsi A C; erit quoq; idem A B, reliquo D B, commẽsurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autẽ A B, Rationale. Igitur & D B, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.*

a 29. defin. b 12. decimi.

27. 0.

PROBL. 4. PROPOS. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.



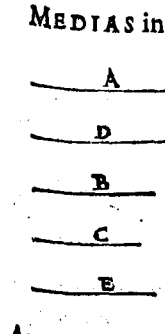
EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantùm cõmensurabiles [a] inter quas media proportionalis sumatur C; [b] fiatq; vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, esse Medias potẽtia tantùm commẽsurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantùm commensurabiles; [c] erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atq; adeò [d] cùm ipsum possit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D; suntq; A, B, potentia tantùm commensurabiles; erunt quoque C, D, solùm commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. [e] Est ergo & D, Mediæ C, commẽsurabilis, Media. Quare inuentæ sunt Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles. Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; ideoq; B, media proportionalis inter C, & D, [f] poterit rectangulum sub ipsis C, D, comprehensum. Est autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potẽtia tantùm commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

a 13. sexti. b 12. sexti. c 22. decimi. d 17. sexti. e 24. decimi f 17. sexti.

PROBL. 5.

PROBL. 5. PROPOS. 29. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantùm cõmensurabiles, quæ Medium contineãt. Q.



EXPONANTVR per ea, quę in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantùm commensurabiles; [a] & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. [b] Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias esse, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant. Quoniam enim A, B, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles; erit rectangulum sub A, B, atque adeò & quadratum ex D; [c] quod illi æquale est, [d] Irrationale, quod Medium dicitur; & ipsa recta D, Media. Et quia est vt B, ad C, ita D, ad E; sunt autem B, C, Rationales, & potentia solùm commensurabiles; erunt quoq; D, E, potentia solùm commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cùm ergo D, Media sit, [e] erit & E, illi potentia solùm commensurabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ sunt potentia tantùm commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam enim est vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. [f] Rectangulum igitur sub D, E, æquale est ei, quod sub A, C: Est autem quod sub A, C, Rationalibus potentia solùm commensurabilibus, [g] Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum sub D, E, Medium est. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

a 13. sexti. b 12. sexti. c 17. sexti. d 22. decimi e 14. decimi. f 16. sexti. g 22. decimi

SCHOLIVM I.

In iis quæ sequuntur, indigemus hoc problemate.

Dvos numeros planos similes inuenire.

A, 6. C, 12. B, 4. D, 8. E, 24. F, 96.

SVMANTVR quatuor quicunq; numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplicantes autem se mutuò A, & B, faciant E; Item C, & D, se multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex constructione est manifestum.

QVONIAM autem in lib. 9. [a] ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem verò, si impar multiplicet imparem; perspicuum est, quonam modo inueniri possint duo plani similes, quorum vterq; par sit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter verò impar. Si enim latera sumpta, sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam: si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si vnius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus, impar; horum verò par: Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum verò imparem, &c. a 28. & 29. noni.

LEMMA I.

Dvos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTVR per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes A B, & C, quorum vterque vel par sit, vel impar. [b] *Et quoniam, siue à pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; detracto B D, ex A B, qui æqualis sit ipsi C, erit reliquus A D, par. Quo diuiso bifariam in E; Dico numerum factum ex A B, in B D,* [c] *qui quidem quadratus est, compositum cum quadrato numeri E D, facere quadratum. Quoniam enim numerus A D, bifariam est diuisus in E, & ei additus D B; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato numeri D E, æqualis quadrato numeri E B. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex A B, in B D, & quadratus numeri D E, compositi faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex B E, gignitur. quod est propositum.*

A.....E.....D.....B
C.....

b 24. & 26. noni. c 1. noni.

COROLLARIVM.

Ex his manifestum est, quando A B, & C, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum B E, E D, quorum excessus, nimirum numerus ex A B, in B D, factus, etiam numerus quadratus sit.

QVOD si numeri sumantur A B, & C, non similes, vterq; tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum B E, E D, quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex AB, in B D, non est quadratus. Si enim quadratus esset, [d] *numeri A B, B D, hoc est, A B, & C, plani similes essent. Quod est absurdum. ponuntur enim non similes.* d 2. noni.

SCHOLIVM II.

IT*AQVE si iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorũ excessus etiam sit numerus quadratus;*



sumemus vt prius, duos planos similes, quorum vterq; par, vel impar sit, nempe A B, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate est dictum. Nam quadrati numeri ex B E, E D, descripti sunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratum ex E D, numero, qui producitur ex A B, in B D, qui etiam quadratus est.

Si verò inueniendi sint duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri

plani A B, & C, non similes, quorum vterque par sit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nam similiter ostendemus quadratum ex B E, æqualem esse quadrato ex D E, vnà cum eo qui ex A B, in B D, fit; Quare excessus quadratorum ex B E, E D, est numerus factus ex A B, in B D, qui cùm non sit quadratus; (Si enim esset quadratus, essent A B, B D, plani similes. quod non ponitur) constat propositum.

Hoc posterius facilius absoluemus, si quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter verò non. Vt si quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20 non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de cæteris.

LEMMA II.

Dvos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

Sint duo numeri plani similes A B, & C, pares, vel impares, vt in lemmate præcedenti, fiatq; eadem constructio, ita vt rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum A B, D B, inter se, vnà cum quadrato ex D E, æqualis sit quadrato ex B E. Auferatur deinde ex



D E, vnitas E F. Erit ergo quadratus ex D F, minor quadrato ex D E, quòd & latus D F, latere D E, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex A B, in B D, alter verò ex D F, inse fit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex B F, vel æqualis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primùm maior, quàm quadratus ex B F; ac propterea latus ipsius maius latere B F. Erit ergo latus ipsius vel æquale numero B E, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros B E, B F, sola vnitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne vnitas ipsa secetur; Esset autem dictum latus inter ipsos medium, si maius poneretur quàm B F, minus verò quàm B E.) Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex B E, æqualis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui fit ex A B, in B D, & ex quadrato numeri D F; cùm eidem quadrato ex B E, sit ostensus in præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D F, æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, eo scilicet qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoq; & latus D F, lateri D E, æquale, pars toti. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter verò ex D F, inse fit, æquale est numero B E. Sed neque maius. Sit enim, si fieri potest, latus illius æquale numero B I, qui maior sit, quàm B E, ita vt quadrato ex B I, æqualis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex B I, latere maiore, maior est quadrato ex B E, latere minore: erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter verò ex D F, in se fit, (cùm hic compositus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Est autem quadrato ex B E, ostensus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D; vnà cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus D F, latere D E, maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter sit ex A B, in B D, alter verò ex D F, in se, maius est latere B E. Sed neq; æquale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus maior est quadrato ex B F.

Sit iam, si fieri potest, numerus qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F; & ponatur numerus A H, duplus vnitatis E F. Quia igitur totus A D, totus E D, duplus est, (diuisus enim est A D, in E, bifariam) & ablatus A H, ablatæ vnitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex 7. huius, quæ ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque

idcirco HD, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, erit numerus qui fit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis est ei, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in BD, ei qui fit ex AB, in BD, æqualis. Quare cum HB, AB, multiplicantes eundem BD, producant æquales numeros; [a] habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB, ipsi AB, æqualis, pars toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis. a 18. septimi.

Sit tandem, si potest fieri, numerus qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quòd sit BG, ita vt qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis sit quadrato ex BG. Sumatur autem ipsius EG, duplus AI. Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus est, & ablatus AI, ablati EG; erit rursus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus qui fit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: ponitur autem eidem quadrato ex BG, æqualis qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, æqualis est ei, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG, & DF, quorum qui ex DG, minor est, remanebit qui ex IB, in BD, maior eo, qui ex AB, in BD, pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo quì ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF. Sed neque maior esse ostensus, neque æqualis. Non igitur quadratus est, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Quod est propositum.

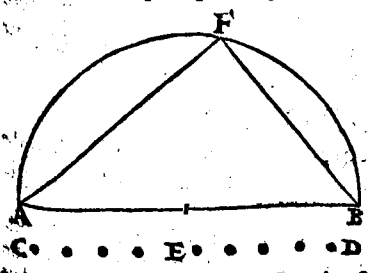
SCHOLIVM III.

Ex hoc facilè inuenietur duos numeros, ita vt ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

Idem obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionẽ habebit, q̃ quadratus ad quadratũ.

PROBL. 6. PROPOS. 30. 29. 17.

In venire duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.



Exponatur linea Rationalis AB, & inueniantur ex iis, quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum excessus DE, non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat vt CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF; accommodeturq; AF, in semicirculo ABF, circa diametrum AB, descripto: ac denique connectatur recta FB. [a] Quoniam ergo angulus F, rectus est in semicirculo; [b] erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB; hoc est, recta AB, plus poterit quàm AF, quadrato rectæ FB. Et quia est quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum DE; [c] erunt quadrata ex AB, AF, commensurabilia; atque adeò cùm quadratum ex AB, sit Rationale, nempe ex linea Rationali AB, descriptum; erit & quadratũ ex AF, Rationale, propterea q; & recta AF, ipsum describens, Rationalis. Rationales ergo sunt AB, AF: atque adeò commensurabiles saltem potentia. Quia verò quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: (cùm neque quadratus numerus CD, ad non quadratum DE, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: aliàs & DE, quadratus esset, [d] vt in Arithmeticis est demonstratum. quod non potest) [e] erunt rectæ AB, AF, longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, vt ostensum est. Igitur AB, AF, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles.

a 31. tertij. b 47. primi. c 6. decimi. d 24. decimi. e 9. decimi.

Iam verò quoniam est vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AF; erit per conuersionem rationis, vt quadratus numerus CD, ad quadratum numerum CE, ita quadratum ex AB, ad quadratũ ex FB, (sicut enim CD, superat DE, quadrato CE, ita etiam quadratũ ex AB,

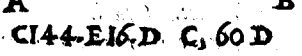
a 9.decimi. superat quadrátũ ex AF, quadrato ex FB.) a Quare rectæ AB, FB, longitudine commẽsurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantũ cõmensurabiles, ita vt maior AB, plus possit, q̃ minor AF, quadrato lineæ FB, sibi lõgitudine cõmensurabilis. Quod faciendũ erat.

30. PROBL. 7. PROPOS. 31.

18. INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incõmensurabilis.



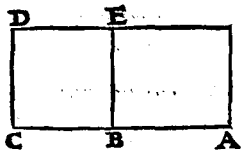
b 24. octaui



EXPONATVR Rationalis linea AB, inueniantúrq; per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati CE, ED, ita vt ex illis compositus CD, non sit quadratus, vel certè numerus aliquis quadratus CD, secetur in duos numeros non quadratos CE, ED: Vtrumuis enim horum fiat, totus CD, ad neutrũ ipsorum CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, aliàs secundùm priorem modum, esset totus CD, etiam quadratus: iuxta posteriorẽ verò, quilibet ipsorum CE, ED, quadratus quoque, b vt in Arithmeticis ostẽsum est, quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt GD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, vt ad id quod ex AF; accommodeturq; AF, in semicirculo AFB, circa AB, descripto. Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, vt in præcedenti, AB, plus quàm AF, quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia solùm commensurabiles: Eadem enim hìc est demonstratio, quæ in præcedenti propos. Quoniam verò rursus, vt prius, est per conuersionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB: Non habet autem CD, ad CE, proportionem quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. c Quare rectæ AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit quàm minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

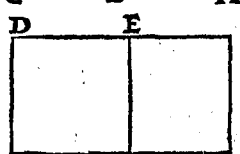
c 9. decimi.

LEMMA.



SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum constitutæ, quarum AB, maior sit. Dico esse, vt AB, ad BC, ita rectangulum sub AB, BC, ad quadratũ ex BC. Describatur enim ex BC, quadratum BD, compleaturq; rectangulum AD; eritq; rectangulum AE, sub AB, BC, contentum; quod BE, ipsi BC, sit æqualis: a perspicuum autem est, esse vt AB, ad BC, ita AE, ad BD.

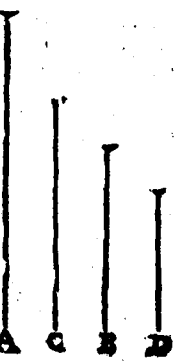


a 1. sexti.

EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, vt in secunda figura est manifestum, in qua AB, minor est, quàm BC.

31. PROBL. 8. PROPOS. 32.

24. 25. INVENIRE duas Medias potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.



a 30. decimi

b 22. decimi

c 24. decimi

d 17. sexti.

a REPERTAE sint duæ Rationales A, B, potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, maior plus possit quàm B, minor quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitq; C, media proportionalis inter A, & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniã igitur A, B, sunt Rationales potẽtia solùm commensurabiles; b erit rectangulum sub A, B, Irrationale; & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A, & B, potentia tantùm commẽsurabiles, erunt quoque C, & D, potentia solùm commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius libri ostendimus. c Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cùm enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autem vt A, ad C, ita C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; d Ac propterea rectangulum sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cùm quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulum sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantùm comẽ

tùm commensurabiles, Rationale. Quoniam verò est vt A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quàm B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione: [a] poterit quoq; C, plus quàm D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus possit quàm minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat. [a] 15. decimi.

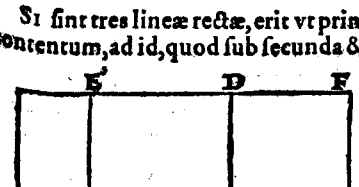
QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm B, quadrato lineę sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quàm minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac faciliùs idem sine ipso ostendimus, vt facilè iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, Medias esse potentia solùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.

LEMMA.

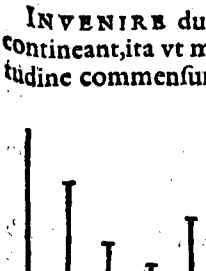
SI sint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.



SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum constitutæ. Dico esse vt AB, ad CD, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub BC, CD. Describatur enim ex BC, quadratum BCDE, perficiaturq; rectangulum AF; Eritq; AE, contentum sub AB, BC; & CF, sub BC, CD; quòd BE, CD, ipsi BC, æquales sint. [a] *Perspicuum autem est esse AB, ad CD, vt AE, ad CF. Quod est propositum.* [a] 21. sexti.

PROBL. 9. PROPOS. 33. 32. 26.

INVENIRE duas Medias potentia solùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.



SINT inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. [a] Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantùm commensurabilibus, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtriq; A, & C, potentia solùm commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus.) [b] Et ipsarum A, B, fumatur media proportionalis D: [c] fiatq; vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est vt A, ad C, ita rectãgulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C: [d] Est autem rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D; [e] & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quòd proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solùm commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solùm commensurabiles sunt, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. [f] Quia verò D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; [g] erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis, Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solùm commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, [h] quod Medium est, (quòd B, C, sint Rationales potentia tantùm cõmensurabiles,) æquale esse rectangulum sub D, E; erit rectangulũ sub D, E, Medium. Deniq; quia ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autẽ A, plus quã C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; [i] poterit etiã D, plus quàm E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus possit quàm minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

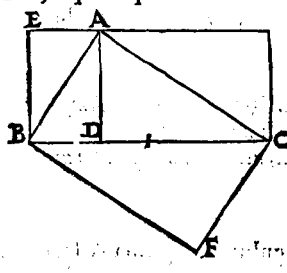
[a] 30. decimi
[b] 13. sexti.
[c] 12. sexti.
[d] 17. sexti.
[e] 16. sexti.
[f] 22. decimi.
[g] 24. decimi
[h] 22. decimi
[i] 15. decimi.

QVOD si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, vt prius, demõstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantùm commen-

ſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus poſsit quàm minor E, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Id quod facilè apparere poteſt ex adducta demonſtratione.

LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, à quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum ſub C B, B D, æquale eſſe quadrato ex A B: contentum autem ſub B C, C D, æquale quadrato ex A C: & contentum ſub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentũ deniq; ſub B C, A D, æquale cõtento ſub A B, A C.



a 17. ſexti. *QVONIAM ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis eſt inter C B, B D;* [a] *erit rectangulum ſub C B, B D, quadrato ex A B, æquale.*

EADEM ratione erit rectangulum ſub B C, C D, æquale quadrato ex A C; quoniam per idem coroll. A C, media proportionalis eſt inter B C, C D.

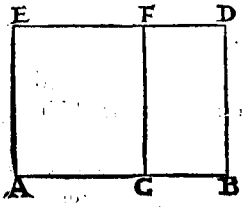
RVRSVS, quia ex eodem coroll. A D, inter B D, D C, media eſt proportionalis, erit eodem modo rectangulum ſub B D, D C, æquale quadrato ex A D.

b 8. ſexti. c 16. ſexti. *POSTREMO,* [b] *quia triangula A B C, A B D, ſimilia ſunt; erit vt B C, ad A C, ita A B, ad A D.* [c] *Quare rectangulum ſub B C, A D, æquale eſt rectangulo ſub A B, A C. Quod etiam ita oſtendetur. Compleatur rectangulum C E, contentum ſub B C, A D: item rectangulum*

d 41. primi *A F, ſub A B, A C, contentum.* [d] *Quoniam igitur rectangulum C E, duplum eſt trianguli A B C, necnon & rectangulum A F, eiuſdem trianguli eſt duplum; erunt inter ſe æqualia rectangula C E, A F. quod eſt propoſitum.*

LEMMA II.

SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.

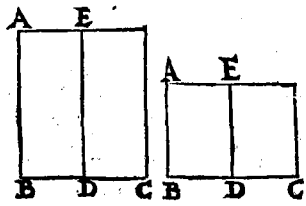


e 1. ſexti. *SECETVR recta A B, non bifariam in C, ſitq; maior pars A C. Dico eſſe vt A C, ad C B, ita rectangulum ſub A B, A C, ad rectangulum ſub A B, C B. Deſcribatur enim ipſius A B, quadratum A B D E, ducaturq; C F, ipſi A E, parallela; eritq; A F, contentum ſub A B, A C, & C D, contentum ſub A B, C B; quòd A E, C F, ipſi A B, æquales ſint.* [e] *Quoniam igitur eſt vt A C, ad C B, ita A F, ad C D; conſtat propoſitum.*

EADEM ratione erit, vt minor pars B C, ad maiorem C A, ita B F, contentum ſub A B, B C, tota, & minore parte, ad C E, contentum ſub A B, C A, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifariam; erit rectangulũ ſub ipſis contentũ duplum rectanguli, q; ſub maiori linea & dimidia parte minoris cõtinetur.



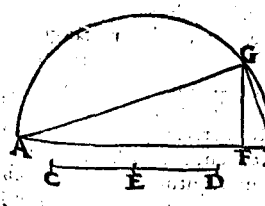
f 1. ſexti. *SINT duæ rectæ inæquales A B, B C, angulum rectum conſtituentes A B C, ſecetur q; minor B C, bifariam in D. Dico rectangulũ ſub A B, B C, duplum eſſe rectãguli ſub A B, B D. Compleatur enim rectangulũ A C, ſub A B, B C; ducaturq; D E, ipſi A B, parallela; eritq; B E, contentũ ſub A B, et B D, dimidia minoris.* [f] *Quoniam igitur A C, ipſius B E, duplum eſt, q & baſis B C, dupla ſit baſis B D; conſtat propoſitum.*

EODEM modo, ſi B C, ſecta bifariam, ſit maior, erit quod ſub A B, B C, continetur, duplum eius, q cõtinetur ſub A B, minore & B D, dimidia maioris, vt ex ſecũda figura apparet.

33. PROBL. 10. PROPOS. 34.

27. INVENIRE duas rectas lineas potẽtia incõmenſurabiles, q faciant cõpoſitum quidẽ ex ipſarũ quadratis, Rationale; Rectangulũ verò ſub ipſis contentũ, Medium.

a 31. *decimi.* [a] REPERIANTVR duæ Rationales A B, C D, potentia ſolùm commenſurabiles, ita vt maior A B, plus poſsit, quàm minor C D, quadrato lineæ longitudine ſibi incommẽſurabilis; ſecetur q C D, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. ad A B, applicetur quadrato ex O E, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex C D, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & ſit illud quod ſub A F, F B, continetur. Poſtremò, deſcripto ſemicirculo A G B, circa A B, erigatur F G ad A B,

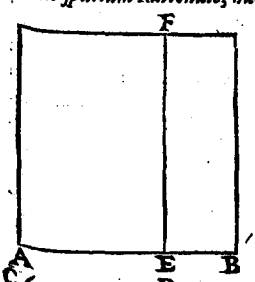


AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus potest, quàm CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumq; est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata: [a] erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. Est autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, ad rectangulum sub AB, FB; Rectangulum verò sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; [b] quòd angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. Igitur quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB; ac propterea cùm AF, FB, longitudine sint incommensurabiles, [c] erunt quadrata ex AG, GB, incommensurabilia. [d] Igitur rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est, [e] æqualeq; quadratis ex AG, GB; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale est factum, [f] æquale est quadrato ex FG; (propterea quòd angulus AGB, rectus est, & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla existens ipsius CE, dupla etiá erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD, duplum erit reQanguli sub AB, FG. (cùm FG, dimidia sit minoris CD.) [g] Sed rectangulum sub AB, CD, Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cùm sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulum sub AG, GB. Contentum igitur sub AG, GB, Medium quoque est: Ostensum autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum; Medium. Quod faciendum erat.

a 19. decimi
b 31. tertij.
c 10. decimi.
d 4. defin.
e 47. primi.
f 17. sexti.
g 22. decimi

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac ferè ratione.



EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatq; vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniam igitur est vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; Non habet autem C, ad D, proportionem quam quadratus ad quadratum; [a] erunt latera AB, AE, dictorum quadratorum proportionem nõ habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cùm AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliquæ EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. [b] Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur cùm AB, AE, incommensurabiles sint longitudine, [c] erunt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommensurabilia. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quòd & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemq; argumento ostendemus BF, Irrationale esse. Quia verò AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.

a 9. decimi
b 1. sexti.
c 10. decimi

AT verò si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totum AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cùm enim vtrumq; AF, FB, Rationale sit; erunt ipsa inter se commensurabilia. [d] Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum vtrique eorum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile vtrique Rationali AF; FB, [e] Rationale quoq; est. Quod est propositum.

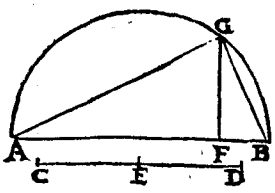
d 16. decimi.
e 9. defin.

PROBL. II. PROPOS. 35. 34. 28.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale.

REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ sibi lõgitudine incommensurabilis; fiantq; reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, æquale existens quadratis rectarum AG, GB, Medium est; erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in antecedenti propositione, ostendemus rectan-

a 32. decimi
b 47. primi.



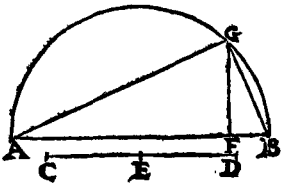
gulum ſub A B, C D, duplum eſſe rectanguli ſub A B, F G: atq; adeò illud eſſe huic commẽſurabile. Quare cùm rectangulum ſub A B, C D, Rationale ſit, ex conſtructione; erit & rectangulum ſub A B, F G, illi commenſurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. rectangulo ſub A B, F G, æquale eſt rectangulum ſub A G, G B. Igitur & rectangulum ſub A G, G B, Rationale eſt. Oſtenſum autem eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum A G, G B, eſſe Medium. Igitur duæ rectæ A G, G B, quæ oſtenſæ ſunt potentia incommenſurabiles, faciunt compoſitum ex earum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem comprehenſum, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ A G, G B, potentia incommẽſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, Rectangulum verò ſub ipſis cõtentum, Rationale. Quod erat faciendum.

55. 29.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.

a 33. decimi.



b 47. primi.

a REPERIANTVR duæ Mediæ A B, C D, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior A B, plus poſsit quàm minor C D, quadrato lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis; fiantq; reliqua, vt in propoſ. 34. Oſtendemus igitur ſimiliter, rectas A G, G B, potentia incommenſurabiles eſſe. Et quia quadratum ex Media A B, Medium eſt, b & quadratis rectarum A G, G B, æquale; erit & compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rurſus, vt in 34. demonſtrabimus, rectangulum ſub A B, C D, duplum eſſe rectanguli ſub A B, F G, atque adeò illud eſſe huic commenſurabile. Quare cùm ex conſtructione, rectangulum ſub A B, C D, Medium ſit: erit quoq; rectangulum ſub A B, F G, hoc eſt, ſub A G, G B, quod illi per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. æquale eſt, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Quoniam verò A B, longitudine incommenſurabilis ponitur ipſi C D; Eſt autem eidem C D, ipſa C E, longitudine commenſurabilis, quòd illa huius ſit dupla; c erunt A B, C E, longitudine incommenſurabiles: Sed vt A B, ad C E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex A B, ad rectangulum ſub A B, C E, hoc eſt, ad rectangulum ſub A B, F G, hoc eſt, ſub A G, G B, (ſunt enim rectangula ſub A B, F G, & ſub A G, G B, per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. æqualia.) d Igitur quadratum ex A B, incommenſurabile eſt rectangulo, ſub A G, G B. Inuentæ ſunt ergo duæ rectæ lineæ A G, G B, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. Quod faciendum erat.

c 13. decimi.

d 10. decimi

SCHOLIVM.

Ex hoc verò problemate facilè illud abſoluemus, quod ad propoſ. 24. huius lib. nos demonſtratures recepimus, nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles.

QVONIAM oſtenſum eſt tam compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, quàm rectangulum ſub ipſis, eſſe Medium, & hoc illi compoſito incommenſurabile; erunt quoq; lineæ potentes illud compoſitum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ, incommenſurabiles tam longitudine, quàm potẽtia. Si enim potentia eſſent commẽſurabiles, eſſent & earum quadratа, hoc eſt, compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, & rectangulum ſub A G, G B, cõmenſurabilia. quod non ponitur. Quocirca ſi ſumatur A B, potens compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, & alia recta potens rectangulum ſub A G, G B, id eſt, media proportionalis inter A G, G B; inuentæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

PRINCIPIVM SENARIORVM PER compoſitionem.

56. 30.

THEOR. 25. PROPOS. 37.

SI duæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales A B, B C, potentia ſolùm commenſurabiles, inuentæ per 2. lemma propoſ. 21. huius lib. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Quoniam enim A B, longitudine incommẽſurabilis eſt ipſi B C; & vt A B, ad B C, ita eſt rectangulum ſub A B, B C, ad quadratũ ex B C, per



B C, per lemma propoſ. 31. huius libri, [a] erit rectangulum ſub A B, B C, quadrato ex B C, incommenſurabile. Sed rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt eius duplũ, nempe quod bis ſub A B, B C, cõtinetur; & quadrato ex B C, commenſurabile eſt quadratum rectæ A B; (omnia enim ſunt Rationalia) [b] atq; adeò & compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, eidem quadrato ex B C, commenſurabile eſt. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius libri oſtendimus, & quod bis ſub A B, B C, continetur, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum A B, B C. Quamobrem & compoſitum ex eo, quod bis ſub A B, B C, & ex compoſito quadratorum rectarum A B, B C, hoc eſt, quadratũ ex tota A C, ([c] Eſt enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum A B, B C, vnà cum rectangulo ſub A B, B C, bis) compoſito ex quadratis rectarum A B, B C, [d] incommenſurabile erit: Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale, quòd commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex B C, Rationali. Igitur quadratum ex A C, quadrato Rationali ex B C, incommenſurabile, [e] Irrationale eſt; atque adeò & recta ipſa A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu, vt alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis, A B, B C, potentia ſolùm commenſurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantùm commenſurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod oſtendendum erat.

a 10. decimi

b 16. decimi

c 4. ſecundi.

d 17. decimi.

e 10. defin.

SCHOLIVM.

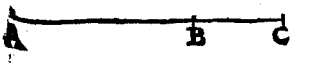
IT A QVE ex duabus Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta, quæ inter eas eſt medio loco proportionalis, [a] Irrationalis eſt, quæ Media vocatur. At verò compoſita ex ipſis, [b] Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur.

a 22. decimi.

b 37. decimi.

THEOR. 26. PROPOS. 38. 37. 31.

SI duæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.



COMPONANTVR duæ Mediæ, [a] ſuperius inuentæ A B, B C, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Quia enim A B, eſt ad B C, vt rectangulum ſub A B, B C, ad quadratum ex B C, vt in lemmate propoſ. 31. huius lib. eſt oſtenſum; ſunt autem A B, B C, longitudine incommenſurabiles; [b] erunt rectangulum ſub A B, B C, & quadratum ex B C, incommenſurabilia: Sed rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt, quod ſub A B, B C, bis; & quadrato ex B C, commenſurabile eſt compoſitũ ex quadratis rectarum A B, B C. (Nam cùm A B, B C, potentia ſint commenſurabiles, erũt ipſarum quadrata commenſurabilia, [c] atque adeò & compoſitum ex ipſarum quadratis quadrato ex B C, commenſurabile erit.) Igitur & rectangulum ſub A B, B C, bis, & compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, incommenſurabilia inter ſe ſunt, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. ſunt demonſtrata. Ergo compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, vnà cum rectangulo bis ſub A B, B C, hoc eſt, quadratum ex A C, [d] quod huic compoſito æquale eſt, [e] incommenſurabile quoq; eſt rectangulo ſub A B, B C, bis: Eſt autem eidem rectangulo bis ſub A B, B C, commenſurabile rectangulum ſemel ſub A B, B C, cùm hoc ſit illius dimidium. [f] Igitur quadratum ex A C, incommenſurabile eſt rectangulo ſub A B, B C: Ponitur autem rectangulum ſub A B, B C, Rationale. [g] Irrationale ergo eſt quadratum ex A C, [h] & ob id recta quoq; A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel, vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 28. decimi

b 10. decimi

c 16. decimi

d 4. ſecundi.

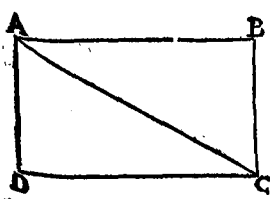
e 17. decimi.

f 13. decimi.

g 10. defin.

h 11. defin.

LEMMA.



QVOD ſub linea Rationali & Irrationali cõtinetur rectangulum, Irrationale eſt.

CONTINEATVR rectangulum A B C D, ſub Rationali A B, & Irrationali B C. Dico ipſum Irrationale eſſe. Si enim dicatur eſſe Rationale, [a] faciet ipſum ad Rationalem A B, applicatum latitudinem B C, Rationalem. Quod eſt abſurdum. ponitur enim B C, Irrationalis. Non ergo A C, Rationale eſt. Igitur Irrationale. Quod eſt propoſitum.

a 21. decimi.

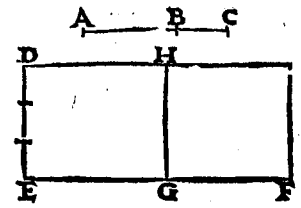
THEOR. 27. PROPOS. 39. 38. 32.

SI duę Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ [a] ſuperius inuentæ A B, B C, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineãt. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis D E,

a 29. decimi

a 45. primi. ad quã applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C; & compoſito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eandem D E, applicetur D G. Et quia quadratũ ex A C, hoc eſt, rectan-
b 4. ſecundi. gulum D F, b æquale eſt duobus quadratis ex A B, B C, vnà cum rectangulo bis ſub A B, B C; erit reliquum H F, æquale reliquo rectangulo, quod bis ſub A B, B C, continetur. Quoniam verò ex hy-
potheſi, rectangulum ſub A B, B C, Medium eſt; erit & rectangulum bis ſub A B, B C, ei commenſurabile: hoc eſt, H F, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Rurſus quia quadrata Mediarum A B, B C, potentia commenſu-
c 16. decimi. rabilium, commenſurabilia ſunt; c erit & compoſitum ex ipſis, nimirum rectangulum D G, vtriuis ipſorum commenſurabile: Sed vtrumq; quadratorum ex Mediis A B, B C, Medium eſt. Igi-
d 34. primi. gitur & D G, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media D G, H F, applicantur ad Rationalem D E; (d eſt e-
e 23. decimi. nim G H, Rationali D E, æqualis.) e erunt eorũ latitudines E G, G F, Rationales ipſi D E, longitudine incommenſurabiles. Rur-



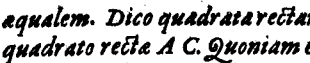
ſus quia A B, B C, longitudine incommẽſurabiles ſunt; & eſt vt A B, ad B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum ſub A B, B C, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. erit quadratũ ex A B, incommenſurabile rectangulo ſub A B, B C, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtenſum eſt: Atqui quadrato ex A B, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitũ ex quadratis rectarũ A B, B C; & rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt, quod cõtinetur bis ſub A B, B C, cùm hoc illius ſit duplum. Igitur & ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. diximus, erit & compoſitũ ex quadratis rectarum A B, B C, hoc eſt, rectangulum D G, incommẽſurabile rectangulo bis ſub A B, B C, hoc eſt, rectangulo H F,
f 1. ſexti. f Cùm ergo ſit vt D G, ad H F, ita E G, ad G F; g erit E G, ipſi G F, longitudine incommẽſurabilis;
g 10. decimi. oſtenſum autẽ iam fuit E G, G F, eſſe Rationales. Rationales igitur ſunt E G, G F, potentia tantùm
h 37. decimi commenſurabiles, h ac propterea & tota E F, compoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lemma antecedens, D F, contentum ſub Rationali D E, & Irrationali E F, Irrationale eſt; Ac propterea & quadratum ex A C, ipſi D F, æquale, Irrationale eſt. Quare & recta A C, Irrationalis eſt. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda, ſeu vt aliis placet, Bimediale ſecundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commenſurabiles, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propoſ. lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantùm commenſurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Mediis primam: Hic verò lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantũ commenſurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Mediis ſecundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius eſt Medio, quod Irrationale eſt, ex propoſ. 22. huius libri.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam ſecetur, erit compoſitũ ex quadratis partium maiusq̃ rectangulũ ſub partibus bis cõprehenſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorẽ ſuperat.



SECETVR recta A D, in B, non bifariam, ſitq; maior pars A B; in qua ſumatur B C, minori parti B D, æqualis, vt ſit A C, exceſſus, quo A B, ſuperat B D, hoc eſt, B C, ipſi B D, æqualem. Dico quadrata rectarum A B, B D, ſimul maiora eſſe rectangulo bis ſub A B, B D,
a 7. ſecũdi. *quadrato rectæ A C. Quoniam enim quadrata ex A B, B C, a æqualia ſunt rectangulo bis ſub A B, B C, vnà cum quadrato ex A C; eſtq; B C, ipſi B D, æqualis: erũt quoq; quadrata ex A B, B D, æqualia rectangulo bis ſub A B, B D, vnà cũ quadrato ex A C. Quare quadrata ex A B, B D, maiora ſunt, q̃ rectangulum bis ſub A B, B D, quadrato rectæ A C. Quod eſt propoſitum.*

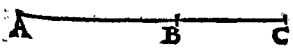
COROLLARIVM.

Ex hoc ſequitur, quadrata partium inæqualium ſimpliciter eſſe maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus continetur.

39. 33. ## THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur; quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

a 34. decimi. COMPONANTVR duæ rectæ a ſuperius inuentæ A B, B C, potẽtia incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulum verò ſub ipſis contẽtum, Medium. Dico totam A C, eſſe Irrationalem. Quoniam enim rectangulum ſub A B, B C, Medium ponitur, erit & rectangulum bis ſub A B, B C, illi commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. atq; adeò Irrationale. Ponitur autẽ compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, Ratio-
b 10. defin. nale. b Incommenſurabile ergo eſt rectangulum bis ſub A B, B C, cõpoſito ex quadratis rectarum A B, B C,



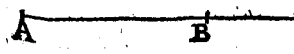
AB,BC. [a] Igitur & rectangulum bis ſub AB,BC, vnà cũ quadratis ex AB,BC, hoc eſt, quadratũ ex AC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. Cùm ergo hoc compoſitum ponatur Rationale; [b] erit quadratũ ex AC, illi in- [a] 17. decimi [b] 10. defin.

commenſurabile, Irrationale; [c] Ac propterea recta AC, Irrationalis eſt. Vocetur autẽ Maior, quia [c] 11. defin. [d] cùm poſsit duo quadrata ex AB, BC, & rectangulum bis ſub AB, BC; compoſitũ ex quadratis [d] 4. ſecundi. rectarum AB, BC per lemma antecedens, maius eſt rectangulo bis ſub AB, BC. Quare cùm compoſitum ex quadratis rectarũ AB, BC, Rationale ſit, rectangulum verò bis ſub AB, BC, Medium: rectè vocabitur AC, Maior, ſiquidem à Rationali, quod maius eſt, nomẽ conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 29. PROPOS. 41. 40. 34.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

COMPONANTVR duæ rectæ [e] ſuperius inuentæ AB, BC, potẽtia incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum, Medium; rectangulum verò ſub ipſis contentum, Rationale. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, Medium eſt; quod verò continetur bis ſub AB, BC, Rationale, quòd eius dimidiũ, nempe quod ſub AB, BC, ſemel continetur, Rationale ponatur; [f] erit compoſitũ ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC. [g] Igitur & compoſitũ ex quadratis rectarum AB, BC, vnà cum rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AB, BC. Cùm ergo rectangulum bis ſub AB, BC, vt diximus, ſit Rationale; [h] erit quadratum ex AC, illi incommenſurabile, Irrationale; [i] Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autẽ Rationale ac Medium potens, quia poteſt Medium, nempe compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum ſcilicet bis contentum ſub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali antetoni. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.

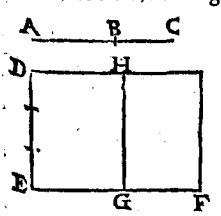


[e] 35. decimi. [f] 10. defin. [g] 17. decimi [h] 10. defin. [i] 11. defin.

THEOR. 30. PROPOS. 42. 41. 35.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium, & quod ſub ipſis cõtinetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONANTVR duæ rectæ [k] ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis DE, [l] ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; Et [m] compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc eſt, rectangulum DF, [m] æquale eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, vnà cum rectangulo bis ſub AB, BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo bis ſub AB, BC. Quoniam verò tam compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc eſt, rectangulum DG, quàm rectangulum ſub AB, BC, atque adeò ex corollario 24. huius libri, quod bis ſub AB, BC, nempe ipſum HF, (cùm illi ſit commenſurabile) Medium ponitur, [n] facient DG, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia ebimpoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, id eſt, rectangulum DG, incommenſurabile ponitur rectangulo ſub AB, BC. Eidem autem rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt ipſius duplum, nempe quod bis continetur ſub AB, BC, hoc eſt, ipſum HF; [o] erunt & DG, HF, incommenſurabilia. Quare [p] cùm ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [q] erunt EG, GF, longitudine incommenſurabiles: Atqui EG, GF, oſtenſæ ſunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles; [r] Ac propterea tota EF, ex ipſis compoſita Irrationalis eſt. Quare DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propoſ. 18. huius lib. Irrationale eſt. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale eſt; [s] ideoque & recta ipſa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC; & rectangulum bis ſub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitũ ex ipſarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonſtrandum.



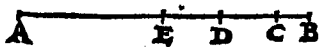
[k] 36. decimi [l] 45. primi. [m] 4. ſecũdi. [n] 23. decimi. [o] 13. decimi. [p] 1. ſexti. [q] 10. decimi [r] 37. decimi. [s] 11. defin.

LEMMA.

Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rursus inæqualiter in D, sintq; priores partes AC, CB, magis inæquales, quàm posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiora esse quadratis ex AD, DB, simul. Diuisa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primùm inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC, CB, vnà cum quadrato ex EC, [a] *æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vnà cum quadrato ex ED, æquale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vnà cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vnà cũ quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cùm quadratum ex EC, maius sit quadrato ex ED; erit reliquum rectangulum sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB, minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quoniã verò quadratum ex AB,* [b] *æquale est tam rectangulo bis sub AC, CB, vnà cũ quadratis ex AC, CB, quàm rectangulo bis sub AD, DB, vnà cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis sub AC, CB, vnà cum quadratis ex AC, CB, æquale rectangulo bis sub AD, DB, vnà cum quadratis ex AD, DB. Quare cùm rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB, erũt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.*

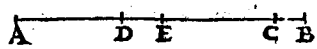
a 5. secũdi.



b 4. secũdi.

SED cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC, CB, magis inæquales ponũtur, quàm partes AD, DB; erit AD, (quæ minor est posteriorũ) maior quam CB; (quæ priorum minor est) ac proinde cùm AE, EB, æquales sint, erit reliqua EC, maior quã reliqua DE. Itaq; quia rectangulum sub AC, CB, vnà cũ quadrato ex EC, [c] *æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vnà cum quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vnà cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vnà cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.*

c 5. secũdi.

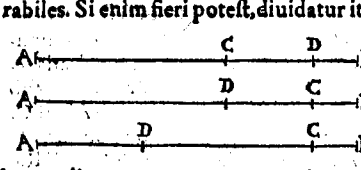


42. THEOR. 31. PROPOS. 43.

36. QVAE ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantũ commensurabiles, vt vult propos. 37. huius lib. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantũ commensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam si bifariam diuideretur, essent AC, CB, longitudine commensurabiles. quod est absurdũ. ponuntur enim Rationales potentia tantùm commensurabiles. Eodem modo neq; ad D, bifariam secabitur AB, cùm & AD, DB, Rationales sint potentia tantùm commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, q̃ ad D, inæqualiter: ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales sunt q̃ partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC, CB, vel minora sunt quadratis ex AD, DB, vel maiora. (Neq; enim partes AD, DB, vbicunq; punctum D, extiterit, partibus AC, CB, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur AB, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia verò si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pron. 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex AC, CB, vnà cum rectangulo bis sub AC, CB, æqualia quadratis ex AD, DB, vnà cum rectangulo bis sub AD, DB, [a] quòd tam illa, quàm hæc æqualia sint quadrato ex AB; fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compositi ex quadratis rectarum AD, DB, idem sit reliqui rectanguli bis sub AC, CB, & reliqui rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarũ AD, DB, spatium Rationale est. (cùm enim rectæ AC, CB, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex ea-

a 4. secundi.



ex earum quadratis, Rationale, ex iis, quæ in ſcholio propoſitionis 34. huius libri oſtendimus: eademque ratione erit & compoſitum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cùm Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri demonſtrauimus; manifeſtum eſt, exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt. [a] Quoniam verò rectangulum ſub A C, C B, Medium eſt, erit & quod bis ſub A C, C B, illi commenſurabile, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis ſub A D, D B, Medium erit. [b] Quare cùm Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale: Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

[a] 22. decimi.

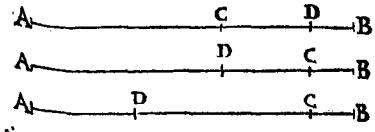
[b] 27. decimi.

THEOR. 32. PROPOS. 44.

43. 37.

QVAE ex binis Mediis prima, ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Mediis prima A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt A C, C B, ſint Mediæ potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propoſitio 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantùm commenſurabiles, continentesque Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina A D, D B. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti



propoſ. exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B: Sed exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. (Cùm enim A C, C B, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub A C, C B, ei, quod continetur ſemel ſub A C, C B, commenſurabile, Rationale. Eodemq; modo Rationale erit, quod bis ſub A D, D B. Quare cùm Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius lib. oſtendimus; perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatiũ eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale eſt. Quia verò rectæ A C, C B, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles, erunt earũ quadrata Media quoq;, & commenſurabilia. [c] Quare & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Igitur cùm vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis, per corollarium propoſ. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarũ A D, D B. [d] Cùm ergo Medium nõ ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis Mediis prima ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.

[c] 16. decimi.

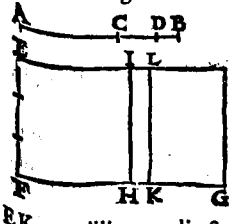
[d] 27. decimi.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

44. 38.

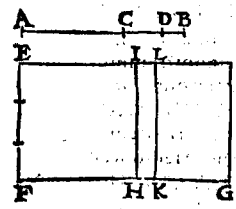
QVAE ex binis Mediis ſecunda, ad vnũ duntaxat punctũ diuiditur in nomina.

SIT ex binis Mediis ſecunda A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt A C, C B, Mediæ ſint potentia tantũ commenſurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propoſ. 39. huius lib. Dico A B, ad aliud punctum diuidi nõ poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam lineæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles, continentesq; Medium. Diuidatur enim, ſi poteſt fieri, in alia nomina A D, D B. Igitur vbicunq; punctum D, exiſtat, ſimiliter oſtendemus, vt in propoſ. 43. quadrata ex A C, C B, vel maiora eſſe quadratis ex A D, D B, vel minora. Exponatur Rationalis E F, [e] ad quam applicetur rectangulum E G, æquale quadrato ex A B. Item E H, æquale quadratis ex A C, C B. Erit igitur reliquum I G, æquale ei, quod continetur bis ſub A C, C B, quandoquidem quadratum ex A B, [f] æquale eſt quadratis ex A C, C B, & rectangulo bis ſub A C, C B. Eodem modo ſi ad E F, applicetur E K, quadratis ex A D, D B, æquale; erit reliquum L G, æquale rectangulo bis ſub A D, D B, comprehenſo. Et quia quadrata ex A C, C B, inæqualia ſunt quadratis ex A D, D B; erunt quoque rectangula E H, E K, quæ illis æqualia ſunt, inæqualia; ac propterea & rectangulum F H, F K, inæquales erunt. Rurſus quia quadrata ex A C, C B, maiora ſunt, per lemma propoſ. 39. huius libri, rectangulo bis ſub A C, C B; erit & E H, maius quàm I G; ac propterea E H, maius quàm dimidium ipſius E G, ideoq; & recta F H, maior quàm dimidium ipſius F G. Eadem ratione oſtendemus F K, maiorem eſſe dimidio ipſius F G. Inæquales ergo ſunt partes F H, H G, partibus F K, K G, ſingulæ ſingulis.



[e] 45. primi.

[f] 4. ſecundi.



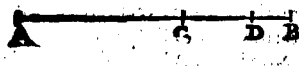
Quoniam verò A C, C B, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; *a* 16. decimi. erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia. *a* Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Cùm ergo vtrumque ipſorum ſit Medium, erit quoq; compoſitum ex ipſis, hoc eſt, E H, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit E K. *b* Quare E H, E K, ad Rationalem E F, applicata faciunt latitudines F H, F K, Rationales ipſi E F, longitudine incommenſurabiles. Eodem modo cùm rectangulum ſub A C, C B, ponatur Medium, erit & quod bis ſub A C, C B, hoc eſt, I G, illi commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Quare cùm applicetur ad Rationalem H I, *c* erit H G, Rationalis ipſi H I, longitudine incommenſurabilis. Non aliter oſtendemus L G, Medium eſſe, & K G, Rationalem ipſi K L, longitudine incommenſurabilem. Rurſus quia A C, C B, longitudine ſunt incommenſurabiles; & eſt vt A C, ad C B, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, *d* erit quadratum ex A C, rectangulo ſub A C, C B, incommenſurabile. Sed quadrato ex A C, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B: (cùm enim A C, C B, potentia ſint commenſurabiles, atque adeò ipſarum quadrata commenſurabilia; *e* erit & compoſitum ex ipſis vtrilibet ipſorum, nimirum quadrato ex A C, commenſurabile.) Rectangulo verò ſub A C, C B, commenſurabile eſt, quod bis ſub A C, C B. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc eſt, rectangulum E H, incommenſurabile eſt, per ſcholium propoſ. 14. huius libri, rectangulo bis ſub A C, C B, hoc eſt, ipſi I G. Quocirca *f* cùm ſit, vt E H, ad I G, ita F H, ad H G, *g* erunt F H, H G, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt F H, H G, potentia ſolùm commenſurabiles. *h* Igitur F G, tota Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Eodem modo oſtendemus & F G, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poteſt, *i* vt demonſtratum eſt in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Mediis ſecunda non diuiditur in ſua nomina ad aliud punctum, quàm ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat oſtendendum.

b 23. decimi.
c 23. decimi.
d 10. decimi.
e 16. decimi.
f 1. ſexti.
g 10. decimi.
h 37. decimi
i 43. decimi.

45. THEOR. 34. PROPOS. 46.

39. MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior A B, diuiſa in ſua nomina ad punctum C, ita vt A C, C B, potentia ſint incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulum verò ſub ipſis Medium, vt vult propoſ. 40. huius libri. Dico A B, non poſſe diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ ſcilicet lineæ incommenſurabiles quoque ſint potentia, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, & rectangulũ ſub ipſis Medium.



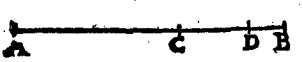
Si enim fieri poteſt, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunq; ergo punctum D, extiterit, demonſtrabimus ſimiliter, vt in propoſ. 43. exceſſum compoſiti ex quadratis rectarũ A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, eum eſſe, qui rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarũ A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſt Rationale: (quia cùm vtrumque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, erit quoque eorum exceſſus ſpatium Rationale, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quoniam verò rectangulum ſub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis ſub A C, C B, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri, cùm ei ſit commenſurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis ſub A D, D B. *k* Igitur cùm Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, ſpatium Rationale: Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

k 27. decimi

46. THEOR. 35. PROPOS. 47.

40. RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens A B, diuiſa in ſua nomina in puncto C, ita vt A C, C B, incommenſurabiles ſint potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; rectangulum verò ſub ipſis Rationale, vt vult propoſ. 41. huius libri. Dico A B, non poſſe diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum ſint lineæ quoque incommenſurabiles potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat, oſtendemus non aliter, ac in propoſ. 43. huius libri, exceſſum rectanguli

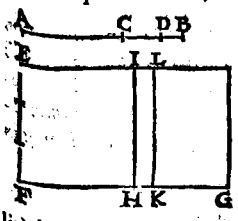


rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B. Sed exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt, quod oſtendemus, vt in propoſ. 44. Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quia verò compoſita ex his quadratis ponuntur eſſe Media: [a] Medium autem non ſuperat Medium Rationali; nõ erit eorum exceſſus ſpatium Rationale. Sed & Rationale oſtendimus. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat. *a 27. decimi*

THEOR. 36. PROPOS. 48. 47. 41.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media A B, diuiſa in ſua nomina ad C, ita vt A C, C B, potentia incommenſurabiles ſint, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex earum quadratis, vt vult propoſ. 42. huius libri. Dico A B, diuidi non poſſe ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet ſint etiam lineæ potentia incommenſurabiles, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis. Nam, ſi poteſt fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunq; hoc punctum D, exiſtat. Conſtructio autem eadem fiat, quæ in propoſitione quadrageſimaquinta: oſtendemusque, vt ibi, partes F H, H G, partibus F K, K G, inæquales eſſe ſingulas ſingulis. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & E H, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub A C, C B, ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo æquale, Medium, ex corollario propoſ. 24. huius lib. quia illi commenſurabile eſt. Igitur Media E H, I G, applicata ad Rationalẽ E F, (eſt enim I H, ipſi E F, æqualis) [b] faciunt latitudines F H, H G, Rationales, longitudine ipſi E F, incommenſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus, & rectas lineas F K, K G, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi E F. Quia verò compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum E H, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub A C, C B, nempe rectangulo I G, [c] eſtq; vt E H, ad I G, ita F H, ad H G: erunt F H, H G, longitudine incommenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtendimus: Sed oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt F H, H G, potentia ſolùm commenſurabiles. Igitur tota F G, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & F G, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina, ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, [d] iam ante demonſtratum eſt. Igitur A B, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quàm ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.



b 23. decimi

c 1. ſexti.

d 43. decimi

DEFINITIONES SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit, quàm minus, quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI verò minus nomen expoſitæ Rationali longitudine ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecunda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia,

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

IIII.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI verò minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum ſex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, ſunt lineæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles, non poterit vtrumque nomen expoſitæ Rationali commenſurabile eſſe longitudine; (aliàs enim nomina ipſa eſſent quoque lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 12. huius libri docuimus. quod non ponitur.) Sed vel vnum tantùm, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt; (aliàs enim eſſent lineæ inter ſe longitudine conmenſurabiles. quod nõ ponitur.) poterit maius nomen plus, quàm minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, conſtituentur vnà cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si verò plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, efficientur vnà cum eiſdem tribus generibus aliæ tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & ſexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

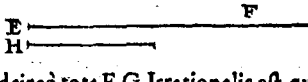
PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus poteſt, quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Secundas verò tres reliquas, in quibus maius nomen plus poteſt, quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: propterea quòd commenſurabile antecedit incommenſurabile, vt manifeſtum eſt.

RVRSVS rectè adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomẽ commenſurabile eſt longitudine expoſitæ lineæ Rationali; & ſecundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expoſitæ longitudine eſt commenſurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cùm minus à maiori contineatur; tertiam verò, in qua neutrum ipſorum nominũ expoſitæ Rationali longitudine eſt commenſurabile; Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti ſecundi ordinis quartam appellans; ſecundam, quintam; & tertiam, ſextam.

48. 42. ## PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex iis, quæ in ſcholio 2. propoſ. 29. huius libri ſcripſimus, quorum exceſſus AC, non ſit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratũ: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propoſ. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico EG, eſſe ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex EF, FG, cùm proportionem habeant, quam numeri AB, AC, [a] commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ EF, FG, commenſurabiles, ſaltem potẽtia: Oſtenſa autem eſt EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis eſt. Quia verò AB, ad AC, proportionem non habet, quã quadratus ad quadratum, nõ habebunt quoq; quadrata ex EF, FG, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. [b] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia ſolùm cõmenſurabiles; [c] Atq; idcircò tota EG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam eſſe. Cùm enim ſit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; ſit autem AB, maior, quàm AC; erit quoque quadratum ex EF, maius quàm quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propoſ. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eſt, vt AB, numerus ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuerſionẽ rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad exceſſum, quo antecedens AB, ſuperat conſequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad exceſſum, quo antecedens quadratum ex EF, ſuperat conſequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [d] ac proinde rectæ EF, H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quàm minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis eſtque idem maius nomen EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.



a 6. decimi.
b 9. decimi.
c 37. decimi.
d 9. decimi.

49. 43. ## PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in præcedenti propoſitione, expoſitaque Rationali

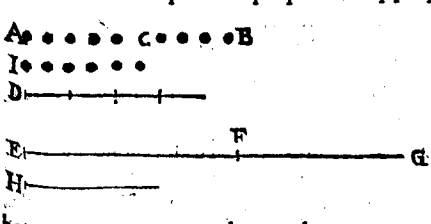
Rationali quadam D; sumatur ei longitudine commensurabilis F G. Erit ergo & F G, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde, vt numerus A C, ad numerum A B, ita p corollarium propos. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, esse ex binis nominibus secundam. Quoniam enim quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, [a] commensurabilia sunt; erunt & rectæ F G, E F, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis est. Quia verò A C, A B, proportionẽ non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebũt, quam numeri quadrati. [b] Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia tantùm commensurabiles; [c] Atque idcircò tota E G, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cùm enim sit vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex F G, ad quadratũ ex E F: Et conuertendo vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; sit autem A B, maior quàm A C; erit & quadratum ex E F, maius, quàm quadratum ex F G. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in precedenti propos. H, ipsi E F, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, quàm minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estq; minus nomen F G, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundá. Quod erat faciẽdum.

[a] 6. decimi.
[b] 9. decimi.
[c] 37. decimi.

PROBL. 15. PROPOS. 51. 50. 44.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proximè maior, quàm A C. Ita enim, cùm nõ sit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratũ. Rursus cùm sit non quadratus proximè maior, q̃ A C, differet vel sola vnitate ab A C, vel binario. (Vnitate quidem, quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario verò, quando vnitas addita ad A C, quadratum facit. Vt si A C, sit 8. erit non quadratus proximè maior 10. differens ab 8. binario. quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si A C, sit 5. erit non quadratus proximè maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus, non cadet inter I, & A C, medius proportionalis. Igitur non erunt similes plani; ac propterea neq; proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Exsita iam Rationali quapiam D, fiat p̃ corollarium propos. 6. huius lib. vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F. [d] Erunt ergo quadrata ex D, & E F, proportionẽ habentia, quam numerus I, ad numerum A B, commensurabilia; atque adeò & lineę D, E F, commensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Quia verò I, ad A B, hoc est, quadratũ ex D, ad quadratum ex E F, proportionẽ non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [e] erunt D, & E F, rectæ inter se longitudine incommensurabiles. Rursus per dictum coroll. fiat vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. [f] Erunt ergo quadrata ex E F, F G, proportionem habẽtia, quam numerus ad numerum, commensurabilia; Ideoq; & lineæ E F, F G, commensurabiles saltem potentia. Igitur cùm E F, ostensa sit Rationalis; erit & F G, Rationalis. Et quia A B, ad A C, hoc est, quadratum ex E F, ad quadratum ex F G, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerũ quadratum; [g] erunt E F, F G, longitudine incommensurabiles. Sunt ergo E F, F G, Rationales potentia tantùm commensurabiles; [h] Atq; idcircò tota E G, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est, vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F; Et vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex F G; erit ex æqualitate vt I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratũ ex F G: Non habet autem I, ad A C, proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & F G, proportionem habebũt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; [i] ac propterea rectæ D, & F G, longitudine incommensurabiles sunt. Quoniam autem est vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex F G; Est autem A B, maior q̃ A C; erit & quadratum ex E F, maius q̃ quadratum ex F G. Sit ergo maius, per lemma propos. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Ostendemus iam similiter, vt in 49. propos. H, ipsi E F, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, q̃ minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; & neutra ipsarum E F, F G, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D, vt demonstratũ est; Erit E G, p̃ definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

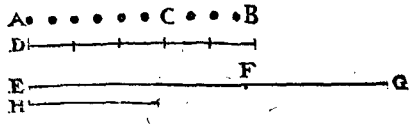


[d] 6. decimi.
[e] 9. decimi.
[f] 6. decimi.
[g] 9. decimi.
[h] 37. decimi
[i] 9. decimi.

PROBL. 16. PROPOS. 52. 51. 45.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris, A C, C B, ita vt compositus ex ipsis A B, ad neutrum ipsorũ proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex iis, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur E F. Erit ergo & E F, Rationalis, cùm Rationali D, commensurabilis sit. Quòd si reliqua construantur, vt in propos. 49. ostẽdemus similiter, vt ibi, totam E G, ex binis nominibus esse. Dico & quartam esse. Erit enim rursus, vt in 49. propos. quadratũ ex E F, maius q̃ quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propos. per conuersionem rationis est, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H: Non est autem A B, ad C B, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratum ex E F, ad quadratum ex H, erit vt numerus quadratus ad numerũ quadratum. [a] Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectæ E F, & H. Itaq; cùm maius nomẽ E F, plus possit, q̃ minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius rursus nomen E F, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit E G, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.



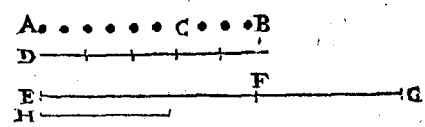
a 9. decimi.

52. 46.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, vt in præcedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur F G, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D, &c. Ostendemus ergo, vt in propos. 50. E G, esse ex binis nominibus. Dico & quintã esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex E F, maius esse, q̃ quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam verò, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex H. Ostendemus, vt in propos. antecedenti, rectas E F, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cùm maius nomẽ E F, plus possit, quàm minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen F G, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem E G, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

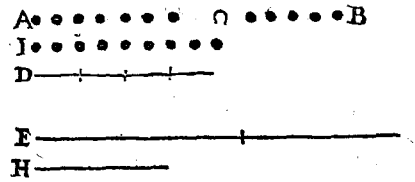


53. 47.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis A B, non sit quoq; quadratus, habeatq; ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos. [b] Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipsorum primus erit; atq; idcirco proportionem ad illos nõ habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8. demonstrauimus. Sumatur alius numerus quicunq; I, qui nec ad A B, nec ad A C, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus. Hic enim ad A B, & A C, nõ quadratos, proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri, & reliqua fiant, vt in propos. 51. ostendemus q; vt ibi, rectas D, & E F, esse longitudine incommensurabiles, atq; totam E G, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, vt in 51. propos. D, & F G, longitudine esse incommensurabiles, esseq; quadratum ex E F, maius, quàm quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostendemus quoq;, vt in propos. 49. per conuersionem rationis, esse vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cùm igitur A B, ad C B, atq; adeò quadratum ex E F, ad quadratum ex H, proportionem nõ habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; [c] erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cùm maius nomen E F, plus possit, quàm minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorũ nominum E F, F G, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextam. Quod faciendum erat.



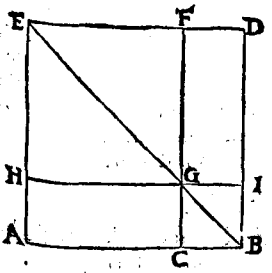
b 30. sept.

c 9. decimi.

LEMMA.

SI recta linea secta sit vtcunque; erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA



SECTA sit recta A B, vtcunque in C. Describatur ex A B, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Ducta autem ex C, recta C F, ipsi B D, parallela, qua diametrum secet in G, agatur per G, ipsi A B, parallela H I. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2. F H, C I, quadrata partium A C, C B; vtrumque autem rectangulorum D G, G A, comprehensum sub eisdē partibus: At verò rectangula C D, A I, sub tota A B, & parte C B, contenta. Dico D G, mediū proportionale esse inter quadrata F H, C I: At C D, medium esse proportionale inter quadrata A D, C I. Quoniam enim [a] *vt H G, ad G I, ita est tam F H, ad D G, quàm A G, ad C I; erit vt F H, ad D G, ita A G, ad C I:* [b] *Est autem A G, ipsi D G, æquale. Igitur erit quoque, vt F H, ad D G, ita D G, ad C I; Atque adeò D G, medium proportionale est inter quadrata F H, C I.*

a 1. sexti.

b 43. primi.

RVRSVS quia est [c] *vt A B, ad C B, ita tam A D, ad C D, quàm A I, ad C I; erit vt A D, ad C D, ita A I, ad C I: Est autem A I, ipsi C D, æquale. Igitur erit vt A D, ad C D, ita quoque C D, ad C I. Quare C D, medium proportionale est inter quadrata A D, C I. Eodem modo erit A F, medium proportionale inter quadrata A D, F H.*

c 1. sexti.

THEOR. 37. PROPOS. 55. 54. 48.

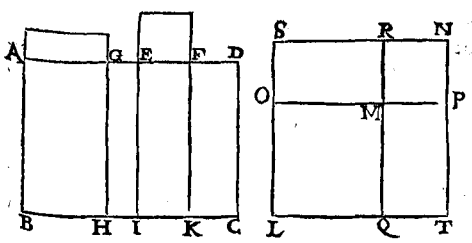
SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus prima A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipsius A D, maius nomen A E. Erunt igitur ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & A E, plus poterit, q̄ E D, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & denique A E, expositæ Rationali A B, longitudine commensurabilis erit. Secetur E D, bifariam in F. Quia igitur A E, plus potest q̄ E D, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, si quartę parti quadrati ex E D, hoc est, quadrato ex E F, æquale parallelogrammū sub A G, G E, contentum, per 2. lemma propos. 17. huius libri, applicetur deficiēs figura quadrata [a] in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet. Quare A G, G E, partes inter se longitudine commensurabiles sunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipsis A B, D C, parallelæ G H, E I, F K. [b] Et parallelogrammo A H, æquale quadratū fiat L M: At parallelogrammo G I, æquale fiat quadratum M N; coniunganturq; quadrata L M, M N, ita ad angulum M, vt latera M O, M P, vnam rectam lineam constituant O P. Facient ergo & latera M Q, M R, vnam rectam Q R, vt demonstratū est à nobis ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. propterea quòd anguli O M Q, P M R, ad verticem M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo L N, cùm rectæ O M, M P, rectis Q M, M R, æquales sint, ideoq; & tota O P, toti Q R; [c] sit autem O P, ipsis S N, L T; & Q R, ipsis L S, T N, æqualis; æquilaterum erit rectangulum L N; ideoque quadratum.

a 18. decimi

b 14. secūdi.

c 34. primi.



QVONIAM verò rectangulum sub A G, G E, æquale est, per constructionem, quadrato ex E F; erit vt A G, ad E F, ita E F, ad G E: [e] Ac propterea & vt A H, ad E K, ita E K, ad G I. Quare E K, medium proportionale est inter A H, G I, hoc est, inter quadrata L M, M N, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, M N, medium proportionale est T M, ex antecedenti lemmate. Æquale igitur est T M, ipsi E K. [f] Cùm ergo ipsi T M, æquale sit M S, [g] & ipsi E K, æquale sit F C; erit & M S, ipsi F C, æquale. Quocirca totum quadratum L N, toti rectangulo A C, æquale est; atque adeò recta O P, potest spatium A C, contentum sub A B, Rationali, & A D, ex binis nominibus prima. Dico O P, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

d 17. sexti.

e 1. sexti.

f 43. primi.

g 36. primi.

QVONIAM enim A G, G E, ostensæ sunt longitudine commēsurabiles; [h] erit & tota A E, vtriq; ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem A E, cùm sit maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commensurabilis longitudine. Igitur & A G, G E, eidem A B, ex scholio propos. 12. huius lib. longitudine commensurabiles sunt; Atq; adeò cùm A B, sit Rationalis, erunt & A G, G E, Rationales. [i] Quare rectangula A H, G I, sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contenta Rationalia sunt; Ideoq; & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ O M, M P, Rationales erunt.

h 16. decimi

i 20. decimi.

ET quoniam A E, ipsi E D, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis A G, & ipsi E D, commensurabilis est longitudine E F, eius dimidia; erūt

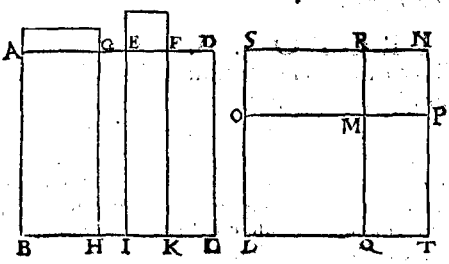
ex scholio propos. 14. huius lib. & AG, EF, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & AH, EK, a eandem proportionē habētia, quam AG, EF, b incommensurabilia sunt, ac proinde & LM, MT, illis æqualia, sunt incommensurabilia. c Igitur & rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles, d cùm eandem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autē & OM, MP, Rationales ostensæ. Igitur OM, MP, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles. e Quapropter tota OP, potens spatium AC, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

a 1. sexti.
b 10. decimi.
c 10. decimi.
d 1. sexti.
e 37. decimi.

55. 49. THEOR. 38. PROPOS. 56.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineā, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis Mediis prima dicitur. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantū commensurabiles; & AE, plus poterit, q̄ ED, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique ED, Rationali expositę AB, longitudine commensurabilis. Secetur ED, bifariam in F, & reliqua construantur, vt in antecedenti propositione. Quo facto, demonstrabimus similiter, vt ibi, rectam OP, posse spatium AC, contentum sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico iam OP, Irrationalem esse, quæ ex binis Mediis prima vocatur.



f 13. decimi.
g 16. decimi.

QVONIAM enim AE, longitudine incommensurabilis est ipsi ED, & ED, minus nomē existēs ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, longitudine commēsurabilis est Rationali AB; f erūt AE, AB, longitudine incommensurabiles. Et quia AG, GE, ostensæ sunt in antecedenti propos. longitudine commensurabiles; g Erit quoq; tota AE, vtriq; ipsarum commensurabilis. Quare cùm AE, maius nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales: quòd cùm vtraque AG, GE, ipsi AE, sit longitudine commensurabilis; at verò AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis; h erit vtraque AG, GE, eidem AB, incommensurabilis longitudine. Ac proinde tam AB, AG, quàm AB, GE, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles. i Igitur rectangula AH, GI, Media sunt, propterea quæ & quadrata LM, MN, ipsis æqualia; Media sunt. Ergo & rectæ OM, MP, sunt Mediæ.

h 14. decimi.
i 22. decimi.

k 10. decimi

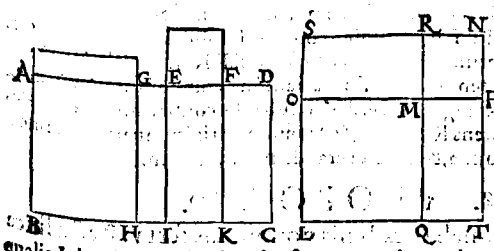
QVIA verò AG, GE, longitudine sunt commensurabiles; k erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionē habētia, commensurabilia, atq; idcircò & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ OM, MP, commensurabiles sunt, saltē potentia. Et quoniā AE, ED, longitudine incommensurabiles sunt; Ipsi verò AE, ostensa est longitudine commēsurabilis AG; & ipsi ED, longitudine commensurabilis est EF, eius dimidia; erunt p scholium propos. 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommensurabiles; Ac proinde AH, EK, eandem habētia proportionē cum ipsis, l incommensurabilia sunt. Igitur & LM, MT, ipsis AH, & EK, æqualia, incommensurabilia sunt. m Ideoq; & rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles. n cùm eandē habeāt proportionem, quā LM, MT. Cùm ergo ostensum sit OM, MP, Medias esse, & commensurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia solùm commensurabiles. Quoniam deniq; ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi AB, hoc est, ipsi EI: Est autē EF, ipsi ED, quoq; longitudine commensurabilis; o erunt etiam EI, EF, longitudine commensurabiles; Ac propterea cū EI, Rationalis sit, erit & EF, Rationalis. p Quare EK, rectangulum, Rationale est: Est autē MT, sub OM, MP, contentum ipsi EK, æquale. Igitur & MT, Rationale est. Quapropter OM, MP, Mediæ sunt potentia tantū commensurabiles, Rationale q̄ continentes; q atq; adeò OP, Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

l 10. decimi.
m 10. decimi
n 1. sexti.
o 12. decimi.
p 20. decimi
q 38. decimi

56. 50. THEOR. 39. PROPOS. 57.

Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur;

CONTINEATVR spatiū AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam, quæ potest spatiū AC, Irrationalem esse, quę dicitur ex binis Mediis secunda. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantùm commensurabiles; & AE, plus poterit, q̄ ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Et deniq; neutra ipsarum AE, ED, Rationali expositę AB, longitudine commensurabilis erit. Secta ED, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propos. 55. Similiter ergo, vt ibi, ostendemus rectam OP, posse spatium AC: Et vt in antecedenti propos. 56. rectas OM, MP, esse Medias potentia tantū commensurabiles; propterea quòd AE, Rationali AB, ponitur longitudine incommensurabilis, quemadmodum &



dum & ibi eadem AE, ipſi AB, longitudine erat incommenſurabilis. Quoniam verò ED, EF, ſunt commenſurabiles longitudine; eſtque ED, ipſi AB, Rationali, hóc eſt, ipſi EI, longitudine incommenſurabilis; [a] erit quoque EF, eidem EI, longitudine incommenſurabilis: Sunt autem EF, EI, Rationales, quod EF, dimidia ſit ipſius ED, Rationalis; & EI, expoſitæ Rationali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rationales ſunt potentia tantùm commenſurabiles. [b] Ac propterea EK, Medium eſt; ideoq; & MT, æquale ipſi EK, Medium eſt, quod ſub Mediis OM, MP, continetur. Itaque cùm OM, MP, Mediæ ſint potentia ſolùm commenſurabiles, contineantque ſpatium Medium; [c] erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda appellatur. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 14. decimi

[b] 22. decimi

[c] 22. decimi

THEOR. 40. PROPOS. 58. 57.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior. 51.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit enim AE, ipſius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commenſurabiles: & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, & denique AE, ipſi AB, commenſurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propoſ. 55. [d] Erunt ergo AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Demonſtrabimus iam eodem modo, vt ibi, OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ vocatur Maior. Quoniam enim AG, GE, longitudine incommenſurabiles ſunt; [e] erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommenſurabilia; atq; adeò & quadrata LM, MN, ipſis AH, GI, æqualia, incommenſurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia ſunt incommenſurabiles. Quia verò AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine commenſurabilis Rationali AB; erit & AE, Rationalis; [f] & rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Rationale. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN: Compoſitum ergo ex quadratis LM, MN, Rationale eſt.

[d] 19. decimi

[e] 10. decimi.

[f] 20. decimi

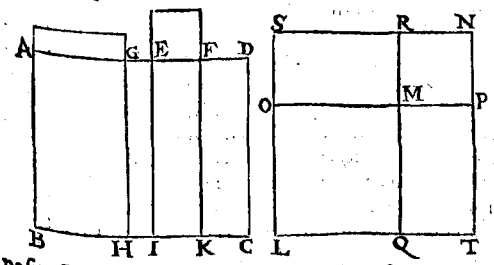
ET quoniam ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine incommenſurabilis Rationali AB, erit & EF, ipſius dimidia eidem AB, longitudine incommenſurabilis; Et eſt EF, Rationalis, cùm ſit Rationali ED, commenſurabilis. Igitur EF, & AB, Rationales ſunt potentia ſolùm cómenſurabiles. [g] Quare EK, Medium eſt, ſub ipſis cótentum; ideoq; & MT, illi æquale, contentumq; ſub OM, MP, Medium eſt. Quocirca cùm OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Rationale: Rectangulũ verò ſub ipſis MT, Mediũ; [h] Irrationalis erit tota OP, quæ maior nominatur. Si ſpatiũ ergo cõtineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat oſtendendũ.

[g] 22. decimi

[h] 40. decimi

THEOR. 41. PROPOS. 59. 58.

SI ſpatium cõtineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur. 52.



CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & AE, plus poteſt, quàm ED, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; & denique ED, longitudine commẽſurabilis eſt expoſitæ Rationali AB. Secta ED, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propoſ. 55. [i] Erunt igitur rurſus AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Simili autem modo, vt in propoſ. 55. conſtabit rectam OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propoſ. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommenſurabiles. Et quia AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quintæ, linea eſt Rationalis & longitudine incommenſurabilis Rationali AB; erunt AE, AB, Rationales potentia tantùm commenſurabiles. [k] Quare rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Medium eſt. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN. Igitur & compoſitum hoc, Medium erit. Rurſus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commenſurabilis Rationali AB, cùm ſit minus nomẽ ipſius AD, ex binis

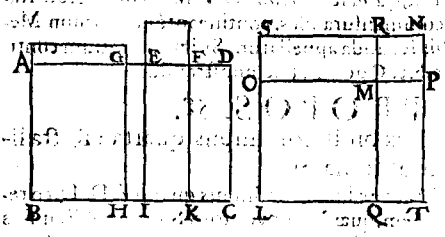
[i] 19. decimi.

[k] 22. decimi

nominibus quintæ; erit & EF, ipsius dimidia, eidem AB, commensurabilis longitudine, & Ra-
a 20.decimi tionalis. a Quare EK, sub Rationalibus EI, EF, longitudine commensurabilibus, Rationale est; atque idcirco & MT, sub OM, MP, contentum Rationale erit, cùm ipsi EK, sit æquale. Quamobrem cùm rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum verò MT, sub ipsis contentum, Rationale;
b 41.decimi b Irrationalis erit tota OP; quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur spatium cõtineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

59. 53. THEOR. 42. PROPOS. 60.

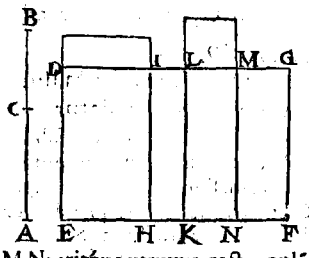
Si spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.



CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, Irrationalem esse, quæ dicitur potes bina Media. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantum commensurabiles, & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & denique neutra ipsarum AE, ED, longitudine erit cõmensurabilis Rationali AB. Fiant om-
c 19.decimi. nia, quæ in superioribus; c eruntque AG, GE, longitudine incommensurabiles. Iam verò ostendemus similiter, vt in propos. 55. rectam OP, posse spatium AC. Item vt in propos. 58. rectas OM, MP, potentia esse incommensurabiles. Rursus, vt in antecedenti propos. erit compositum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autem in propos. 58. erit quoque MT, sub OM, MP, comprehensum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommensurabilis est longitudine
d 13. decimi ipsi ED; hæc verò eidem commensurabilis; d erunt AE, EF, longitudine incommensurabiles.
e 10.decimi e Igitur & AI, EK, incommensurabilia sunt. f cùm eandem rationem habeant, quam AE, EF.
f 1. sexti. Quare & compositum ex quadratis LM, MN, quod ipsi AI, æquale est, & rectangulum MT, quod ipsi EK, est æquale, incommensurabilia sunt. Quapropter cùm rectæ OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantq; & compositum ex ipsarum quadratis LM, MN, Medium, &
g 42.decimi MT, sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileq; compositio ex ipsarum quadratis; g erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta, &c. Quod ostendendum erat.

60. 54. THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.



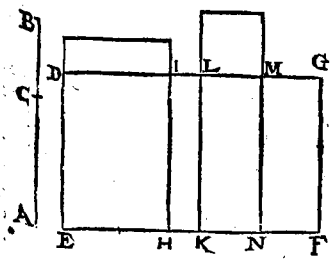
h 45.primi. SIT ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC; h & ad Rationalem expositam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB. Erit igitur reliquũ LF, æquale ei, quod bis sub AC, CB, continetur, cùm quadrata ex AC, CB, vnà cum rectangulo bis sub AC, CB, i æqualia
i 4.secundi. sint quadrato ex AB, quemadmodũ & eidem quadrato ex AB, æquale est, per cõstructionem, rectangulum DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, per quod ipsis LK, GF, parallela agatur
k 37.decimi MN: eritque vtrumq; rectangulũ LN, MF, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur. k Et quoniã
l 16.decimi. AC, CB, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles, quòd tota AB, sit ex binis nominibus; erunt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commensurabilia; l quorum vtrique cùm etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum DK. Igitur
m 21.decimi & DK, Rationale erit; quod cum applicatum sit ad Rationalem DE, m faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipsi DE, longitudine commensurabilem.
n 22.decimi RVRSVS quia AC, CB, Rationales sunt solùm potentia commensurabiles, n erit rectangulum sub ipsis, Medium, atq; adeò, & quòd bis sub ipsis, cùm sit ei commensurabile, hoc est, ipsum
o 23.decimi. LF, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare LF, applicatum ad LK, Rationalem, o facit LG, latitudinem Rationalem, & ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilem.
p 13. decimi. Est autem DL, ostensa eidem DE, commensurabilis longitudine. p Igitur DL, LG, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantùm commensurabiles;
q 37.decimi q Ac propterea DG, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

QVONIAM

QVONIAM enim ex lemmate propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub A C, C B, medium proportionale eſt inter quadrata ex A C, C B, erit quoque L N, medium proportionale inter D H, I K, atque adeò [a] cùm rectæ D I, L M, I L, eandem rationem habeant, quam D H, L N, I K; erit quoque [a] 1. ſexti.
recta L M, media proportionalis inter D I, I L. [b] Quare rectangulum ſub D I, I L, æquale eſt quadrato ex L M. Et quia quadrata ex rectis A C, C B, commenſurabilia ſunt, quòd A C, C B, ponuntur potentia commenſurabiles; erunt & D H, I K, ipſis æqualia, commenſurabilia. [c] Igitur & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam autem D K, maius eſt, quàm L F, quòd & quadrata ex A C, C B, maiora ſint, per lemma propoſ. 29. huius libri, quàm rectangulum bis ſub A C, C B; erit & recta D L, maior quàm L G, [d] cùm D L, L G, eandem rationem habeant, quam D K, L F. Itaque quoniam D L, maior eſt, quàm L G, & ad D L, applicatur rectangulum ſub D I, I L, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex L M, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex minore L G, deſcripti; (oſtenſum enim eſt rectangulum ſub D I, I L, æquale quadrato ex L M.) diuiditurq; D L, ad I, in partes D I, I L, longitudine commenſurabiles, vt eſt demonſtratum; [e] poterit D L, maior plus quàm L G, minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cùm D G, oſtenſa ſit ex binis nominibus, & D L, maius nomen plus poſſe, quàm L G, minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; atque idem maius nomen D L, longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus prima. Quadratũ ergo eius, q̃ eſt ex binis nominibus, &c. Quod oſtẽdendũ erat. [d] 1. ſexti. [e] 18. decimi.

THEOR. 44. PROPOS. 62. 61.

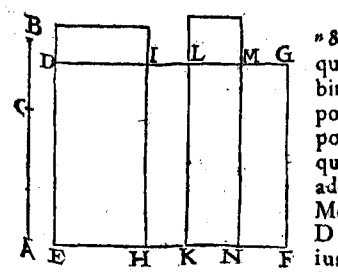
QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam. 55.



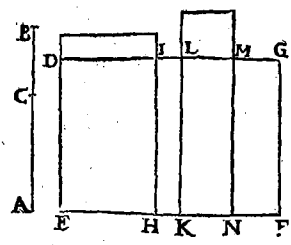
SIT ex binis Mediis prima A B, cuius maius nomẽ A C; [f] & ad Rationalẽ D E, applicetur rectãgulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus eſſe ſecundam. Conſtituatur enim eadẽ, quæ in propoſ. præcedenti, ita vt rurſus D H, I K, æqualia ſint quadratis ex A C, C B, & vtrumque ipſorum L N, M F, ei quòd ſub A C, C B, cõtinetur. Quoniam igitur A C, C B, ex binis Mediis primam A B, componentes, [g] Mediæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex A C, C B, atq; adeò rectãgula ipſis æqualia D H, I K, commenſurabilia, atque Media. [h] Cùm ergo propterea & totum D K, vtriq; ipſorum D H, I K, ſit commẽſurabile; erit quoq; ex coroll. propoſ. 24. huius lib. D K, Medium; quod cùm applicatum ſit ad Rationalem D E; [i] erit eius latitudo D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam rectangulum ſub A C, C B, Rationale eſt; erit & eius duplum, nempe L F, Rationale; quod cum applicatum ſit ad Rationalem L K; [k] erit eius latitudo L G, Rationalis ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, ipſa L G, ſit ipſi D E, commenſurabilis longitudine, at D L, longitudine incommenſurabilis, [l] erunt D L, L G, longitudine incommenſurabiles. Quòd cum D L, L G, oſtenſæ ſint Rationales; erunt ipſæ Rationales potentia ſolùm cõmenſurabiles; [m] ac propterea tota D G, ex binis nominib. eſt. Iam verò vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus D L, maius nomẽ eſſe, & poſſe plus, q̃ minus L G, quadrato rectæ ſibi lõgitudine cõmenſurabilis. Quocirca cùm ipſius D G, maius nomẽ D L, plus poſſit, q̃ minus nomen L G, quadrato rectæ ſibi longitudine cõmenſurabilis, & minus nomẽ L G, oſtenſum ſit longitudine cõmenſurabile Rationali expoſitæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus ſecũda. Quadratũ ergo eius, q̃ eſt ex binis Mediis prima, &c. Quod erat oſtendendũ. [f] 45. primi. [g] 38. decimi [h] 16. decimi [i] 23. decimi. [k] 21. decimi. [l] 13. decimi. [m] 37. decimi

THEOR. 45. PROPOS. 63. 62.

QVADRATVM eius, quę ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. 56.



SIT ex binis Mediis ſecunda A B, cuius maius nomen A C, [n] & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, eſſe ex binis nominibus tertiam. Conſtructis enim iiſdem, quę in propoſ. 61. quoniam A C, C B, ex binis Mediis ſecundam A B, componentes, [o] Mediæ ſunt potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium continent; Erunt quadrata ex A C, C B, atque adeò rectangula ipſis æqualia D H, I K, commenſurabilia, & Media. [p] Cùm ergo propterea & totum D K, vtrique ipſorum D H, I K, ſit commenſurabile; erit & ex coroll. propoſ. 24. huius libri D K, Medium; quod cùm applicatum ſit ad Rationalem D E; [q] erit eius latitudo D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub A C, C B, Medium eſt; erit & eius duplum L F, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalem L K; [r] erit latitudo L G, Rationalis [n] 45. primi. [o] 39. decimi [p] 16. decimi [q] 23. decimi [r] 23. decimi

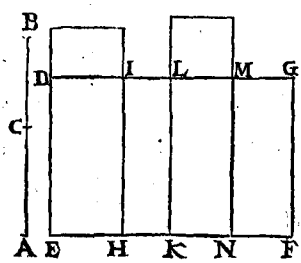


ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Et quia A C, ipſi C B, longitudine eſt incommenſurabilis; eſtque vt A C, ad C B, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratũ ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, [a] erit quoq; quadratum ex A C, rectangulo ſub A C, C B, incommenſurabile. [b] Eſt autem quadrato ex A C, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, quòd quadrata ex A C, C B, commenſurabilia ſint, quippe cùm rectæ ipſæ potentia ponantur commenſurabiles; & rectangulo ſub A C, C B, commenſurabile eſt eius duplum, nimirum rectangulum bis ſub A C, C B. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc eſt, rectangulum D K, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub A C, C B, hoc eſt, rectangulo L F, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius libri conſcripſimus. Quare rectæ [c] D L, L G, eandem rationem cum D K, L F, habentes [c] longitudine ſunt incommenſurabiles: Sunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantùm commenſurabiles; [d] ac propterea tota D G, ex binis nominibus eſt. Iam verò, vt in propoſ. 61. oſtendemus D L, eſſe maius nomen, poſſeq; plus, q̃ minus L G, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quamobrẽ cùm D L, maius nomen plus poſsit, quã L G, minus, quadrato rectæ ſibi longitudine cõmenſurabilis, & neutra ipſarũ D L, L G, Rationali expoſitæ D E, ſit oſtenſa longitudine cõmenſurabilis; erit ex defin. D G, ex binis nominibus tertia. Quadratũ ergo eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinẽ facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonſtrandũ.

a 10. decimi
b 16. decimi
c 10. decimi.
d 37. decimi

63. THEOR. 46. PROPOS. 64.

57. QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



SIT Maior A B, cuius maius nomen A C, [e] & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus eſſe quartam. Conſtruãtur enim eadem prorſus, quæ in propoſ. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes, [f] potentia incommenſurabiles ſunt, faciuntq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectãgulum verò ſub ipſis, Medium; erit quoque D K, compoſito ex quadratis rectarum A C, C B, æquale exiſtens, Rationale; At verò L F, duplum eius, quod ſub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur rationale D K, ad Rationalem D E, eſt applicatum; [g] erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Item cùm L F, Medium ſit applicatum ad Rationalem L K; [h] erit L G, Rationalis ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, illa quidem ipſi D E, commenſurabilis ſit longitudine; hæc verò eidem D E, longitudine incommenſurabilis; [i] incommenſurabiles erunt longitudine D L, L G: Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Sunt igitur D L, L G, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; [k] ideoq; D G, ex binis nominibus eſt. Iam verò, vt in propoſ. 61. demonſtrabimus rectãgulum ſub ſub D I, I L, æquale eſſe quadrato ex L M. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommenſurabilia ſunt, quòd rectæ A C, C B, potentia incommenſurabiles ſint; Erunt etiam illis æqualia D H, I K, incommenſurabilia; [l] atque adeò & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommenſurabiles. Quoniam verò, vt in propoſ. 61. oſtendimus, D L, maior eſt, quàm L G, & ad D L, applicatum eſt rectangulum ſub D I, I L, quadrato ex L M, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex L G, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipſam D L, ad I, in partes longitudine incommenſurabiles; [m] poterit D L, plus quàm L G, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quam ob rem cùm & ipſa D L, (maius nomen ipſius D G, quæ eſt ex binis nominibus.) oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

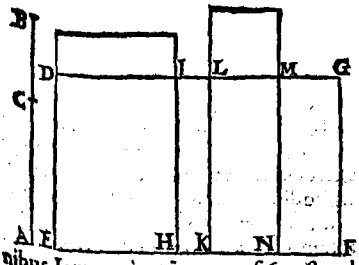
e 45. primi.
f 40. decimi
g 21. decimi
h 23. decimi.
i 13. decimi.
k 37. decimi
l 10. decimi.
m 19. decimi

64. THEOR. 47. PROPOS. 65.

58. QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium A B, cuius maius nomẽ A C; [n] & ad Rationalem D E, rectangulum D F, applicetur æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus quintam eſſe. Fiant enim eadem omnino, quæ in propoſ. 61. Quoniam igitur rectæ A C, C B, componentes A B, potentem Rationale ac medium, [o] potentia incommenſurabiles ſunt, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, at rectãgulum ſub ipſis contentũ, Rationale; erit D K, æquale compoſito ex quadratis rectarum A C, C B, Medium; & L N, æquale ei, quod ſub A C, C B, continetur, atque adeò ipſius duplum L F, Rationale. Igitur Medium D K, applicatum

n 45. primi.
o 41. decimi.

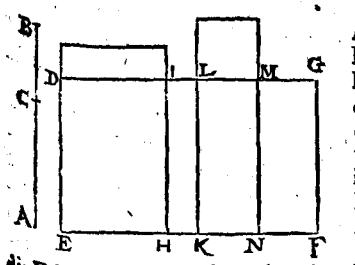


applicatum ad Rationalem DE, [a] facit latitudinem DL, Rationalē, & longitudine Rationali DE, incommensurabilem: At verò Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, [b] facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali DE, illa verò longitudine incommensurabilis; [c] erunt DL, LG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles; [d] Ac propterea DG, est ex binis nominibus. Iam verò, vt in propos. 61. ostendemus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM; & vt in antecedente propos. DL, maius nomen esse, atque posse plus, quàm LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cùm & minus nomen LG, ostensum sit rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cùm & minus nomen LG, ostensum sit expositæ Rationali DE, longitudine commensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quę Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrādum erat.

[a] 23. decimi.
[b] 21. decimi
[c] 13. decimi.
[d] 37. decimi

THEOR. 48. PROPOS. 66. 65.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. 59.

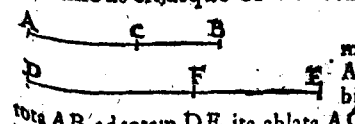


SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC, [e] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus sextam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam rectæ AC, CB, componentes ipsam AB, potentem bina Media, [f] potentia incommensurabiles sunt, faciuntq; & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, & incommensurabile composito ex quadratis ipsarum; erit tam DK, illi composito æquale, quàm LF, rectangulo bis sub AC, CB, æquale, Medium. Et quia Media DK, LF, applicata sunt ad Rationalem DE; [g] erunt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. [h] Quoniam verò compositum ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC, CB; eidem verò rectangulo sub AC, CB, commensurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cùm hoc illius sit duplum; [i] Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, DK, incommensurabile rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, [k] longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solùm commensurabiles; [l] Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam verò, vt in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen; possèq; plus quàm LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cùm ergo ostensum sit neutram ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest, ad Rationalē applicatū, latitudinē facit ex binis nominib. sextam. Quod erat ostendendū.

[e] 45. primi.
[f] 42. decimi
[g] 23. decimi
[h] 42. decimi
[i] 13. decimi.
[k] 10. decimi
[l] 37. decimi.

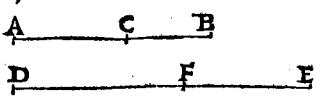
THEOR. 49. PROPOS. 67. 66.

EI, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem. 60.



SIT ex binis nominibus quęcunque AB, diuisa in sua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, sitq; recta DE, ipsi AB, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoq; esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi AB. [m] Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. [n] Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, longitudine commensurabilis ponitur DE; [o] erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis: [p] Sunt autem AC, CB, cùm sint nomina eius, q̄ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE, Rationales sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutādo vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Sunt autē AC, CB, potentia solū cōmensurabiles; [q] erunt & DF, FE, potētia solū cōmensurabiles. Igitur DF, FE, Rationales sunt potētia tantū commēsurabiles; [r] Ac propterea DE, ex binis est nominibus. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Aut enim AC, plus potest q̄ CB, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cōmensurabilis, aut incōmensurabilis. Si quidem AC, plus potest q̄ CB, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis; [s] poterit & DF, plus q̄ FE, quadrato rectę sibi longitudine cōmensurabilis. Quod si AC, cōmensurabilis sit lōgitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis nominib. prima; [t] erit & DF, eidē Rationali lōgitudine cōmēsurabilis, cū vtraq;, & Rationalis, & DF,

[m] 12. sexti.
[n] 19. quinti
[o] 10. decimi.
[p] 37. decimi
[q] 10. decimi
[r] 37. decimi
[s] 15. decimi.
[t] 12. decimi.



eidem A C, sit commensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadē. Si verò C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis
a 12. decimi. expositæ Rationali, ita vt A B, sit ex binis nominibus tertia; a erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine cōmensurabilis expositę Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.
b 15. decimi. At si A C, plus possit, quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; b poterit & D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus D E, ex binis nominibus quartam esse, vel quintam, vel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta. Ei igitur, quę ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Quod si recta D E, potentia tantùm commensurabilis sit ipsi A B, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione ꝛeponamus vbique: commensurabilis potentia tantùm:) & D E, esse ex binis nominibus: At eam esse ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si A C, maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali; & D F, maius nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quòd non vtraque, nempe expositæ Rationalis, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At verò D F, potentia tantùm, ex hypothesi. Immo verò, si A B, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt D E, illi potentia tantùm commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

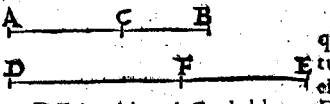
Sit enim A B, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad C: sitq; ei commensurabilis potentia tantùm D E, quam quidem, vt in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamq; esse in sua nomina ad F; & partes A C, C B, partibus D F, F E, proportionales esse, nimirū illas ad has eandem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri posse, vt D E, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi A B. Nam si potest fieri, sit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo
a 12. decimi. *vtrumque maius nomen A C, D F, ex defin. Rationali expositæ commensurabilis longitudine.* a *Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est vt A C, ad D F, ita A B, ad D E;* b *erunt propterea*
b 10. decimi. *& A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim D E, ipsi A B, potentia solùm commensurabilis. Non ergo vtraq; A B, D E, ex binis nominibus prima est. Eodem modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; secunda vel quinta. Esset enim vtrumq; nomen minus C B, F E, ex defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atq; adeò & inter se. Igitur & totæ A B, D E, longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.*

Semper tamen verum est, si A B, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam D E, ipsi A B, potentia solùm commensurabilem, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit A C, plus quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cùm ergo sit, vt
c 15. decimi *A C, ad C B, ita D F, ad F E;* c *poterit quoque D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit D E, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si A B, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt A C, plus possit, quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudi-*
d 15. decimi *ne incommensurabilis;* d *poterit quoque D F, plus quam F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cùm sit, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur ex defin. erit D E, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi A B.*

In sequentibus autem quatuor propositionibus necessariò erit D E, eadem ordine ipsi A B, quanquam potentia tantùm illi commensurabilis sit.

67. THEOR. 50. PROPOS. 68.

61. Ei, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.



Sit ex binis Mediis A B, quæcunq; diuisa in sua nomina, quorum A C, maius, & C B, minus, sitque ei recta D E, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque ex binis Mediis
a 12. sexti. esse, & ipsi A B, ordine eandem. a Fiat enim vt tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F.
b 19. quinti. b Erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, vt tota A B, ad totam D E. Et quoniam ipsi A B, ponitur longitudine commensurabilis D E,
c 10. decimi. c erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis. Sunt autem A C, C B, Mediæ.
d 24 decimi d Igitur & D E, F E, illis commensurabiles, Mediæ sunt. Rursus quia est vt A C, ad D F, ita C B, ad F E;
e 38. decimi. & permutando vt A C, ad C B, ita D F, ad F E;
f 10. decimi. e Sunt autem A C, C B, potentia solùm commensurabiles; f erunt & D F, F E, solùm commensurabiles potentia. Cùm ergo & ostensæ sint Mediæ, erunt D F, F E, Mediæ

FE, Mediæ potentiâ tantùm commensurabiles: [a] Atque idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipsi AB, eandem esse ordine. Quoniam enim est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Est autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF; quòd rectæ AC, DF, commensurabiles ostensæ sint longitudine. [b] Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. Quare si rectangulum sub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, sit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum sub DF, FE, Rationale, cùm illi sit commensurabile; [c] atque adeò & DE, ex binis Mediis prima erit. Si verò rectangulum sub AC, CB, fuerit Medium, ita vt AB, sit ex binis Mediis secunda: erit & rectangulum sub DF, FE, ei commensurabile, Mediũ, ex corollario propos. 24. huius lib. [d] Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis secunda. Quare ei, quę ex binis Mediis lõgitudine cõmensurabilis, &c. Quod demonstrandũ erat.

[a] 38. vel 39. decimi.
[b] 10. decimi
[c] 38. decimi.
[d] 39. decimi

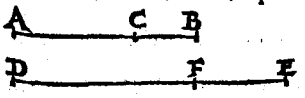
SCHOLIVM.

Eodem prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam DE, si potentia tantùm fuerit commensurabilis ipsi AE, quæ est ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atque ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est; si modò loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique; commensurabilis potentia tantùm, &c. vt manifestum est.

THEOR. 51. PROPOS. 69. 68. 62.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea maior AB, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm. Dico & DE, Maiorem esse. Fiant enim eadem, quæ superius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE. Quoniam igitur AB, DE, cõmensurabiles sunt vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; [e] erunt quoque tam AC, DF, quàm CB, FE, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [f] erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratũ ex DF, ad quadratum ex FE; & componẽdo vt compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutãdo vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quòd rectæ CB, FE, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia vel potentia tantùm. [g] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile est composito ex quadratis rectarum DF, FE. [h] Est autem compositum illud Rationale, cùm rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. [i] Igitur & hoc Rationale est.



[e] 10. decimi
[f] 22. sexti.
[g] 10. decimi
[h] 40. decimi
[i] 9. defin.

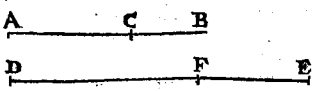
RVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE: Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commẽsurabile, quòd rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. [k] Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. [l] Est autem rectangulum sub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE, illi commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam verò est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [m] suntque AC, CB, potentia incommensurabiles, cùm componant Maiorem AB; [n] Erunt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles. Itaq; cùm DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est; [o] erit tota DE, Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat.

[k] 10. decimi
[l] 40. decimi.
[m] 40. deci.
[n] 10. decimi
[o] 40. deci.

THEOR. 52. PROPOS. 70. 69. 63.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm. Dico & DE, esse potentem Rationale ac Medium. Constructis enim iisdem, quæ suprà, ostendemus, vt in præcedenti propos. compo-



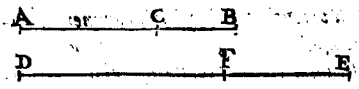
situm ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile esse compositio ex quadratis rectarum DF, FE. [a] Est autem illud compositum Medium, cùm rectæ AC, CB, componant ipsam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propos. 24. huius libri, & hoc compositum illi commensurabile, Medium est. Eodem modo, vt in eadem propos. antecedenti, erit rectangulum sub AC, CB, [b] quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub DF, FE; atque adeò & rectangulum sub DF, FE, Rationale est, ex 9. defin. Deniq; vt in eadem superiori propos. erunt DF, FE, potentia incommensurabiles. Quare cùm DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale, vt demonstratum est; [c] erit tota DE, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 41. decimi.
[b] 41. decimi
[c] 41. decimi

70. 64.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.



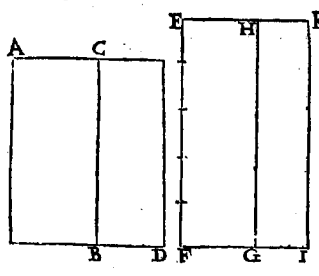
SIT bina Media potens AB, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm. Dico & DE, esse bina Media potentem. Construct is enim iisdem, quæ suprà, ostendemus, vt in propos. 69. compositum ex quadratis rectarum AC, CB, composito ex quadratis rectarum DF, FE, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub AC, CB, esse commensurabile rectangulo sub DF, FE. [d] Cùm ergo tam compositum ex quadratis rectarum AC, CB, quàm rectangulum sub AC, CB, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 24. huius libri, tam compositum ex quadratis rectarum DF, FE, quàm rectangulum sub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incommensurabiles sunt, vt prius. Postremò, [e] quia compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum sub AC, CB, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quòd AB, bina Media potest: Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum DF, FE; & rectangulo sub AC, CB, probauimus commensurabile rectangulum sub DF, FE; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, FE, & rectangulum sub DF, FE, incommensurabilia. Quare cùm rectæ DF, FE, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabile eq; compositio ex quadratis ipsarum; [f] erit DE, bina Media potens. Itaq; bina Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendendum.

[d] 42. decimi
[e] 42. decimi
[f] 42. decimi

71. 65.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

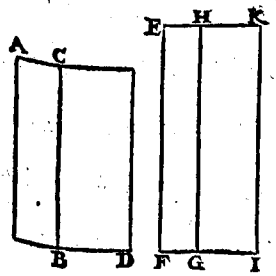


SIT Rationale spatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum spatium AD, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Mediis primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim AB, vel maius quàm CD, vel minus: Æquale siquidem nó erit; aliàs cùm AB, sit Rationale, esset & illi æquale CD, Rationale. quod non ponitur. Sit primò maius, & exposita Rationali EF, [g] applicetur ad eam rectangulum EG, æquale ipsi AB; & ad HG, aliud HI, æquale ipsi CD, vt totum EI, toti AD, sit æquale. Et quoniam AB, Rationale est, & CD, Medium; erit quoque EG, Rationale, & HI, Medium: quæ cùm applicentur ad Rationalem EF; [h] erit EH, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis; [i] At verò HK, Rationalis, & eidem EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia EG, HI, incommensurabilia sunt, vt constat ex definitionibus: quòd EG, Rationale sit, at HI, Irrationale, nempe Medium; [k] erunt EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, incommensurabiles longitudine. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solùm commensurabiles; [l] Ac propterea EK, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur AB, quàm CD, hoc est, EG, quàm HI; erit quoque EH, maior quàm HK, [m] cùm EH, HK, eandem rationē habeant, quam EG, HI. Iam verò maius nomen EH, plus poterit quàm minus HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus posit EH, quàm HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit EK, ex defin. ex binis nominibus prima, cùm EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeò & spatium AD, compositum ex Rationali AB, & Medio CD, [n] Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

[g] 45. primi.
[h] 21. decimi
[i] 23. decimi.
[k] 10. decimi
[l] 37. decimi.
[m] 1. sexti.
[n] 55. decimi

SI verò

Si verò EH, plus possit quàm HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cùm EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeò & spatium AD, [a] Irrationalis est, quæ vocatur Maior. [a] 58. decimi

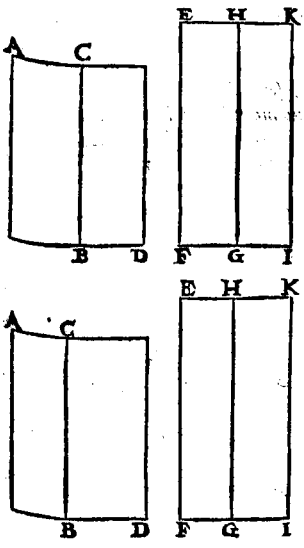


Sit deinde AB, minus quàm CD; & eadem construantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis nominibus, & EH, ipsi EF, longitudine commensurabilis. Et quia AB, minus est, quàm CD, hoc est, EG, quàm HI; erit quoque recta EH, minor quàm HK. Poterit igitur rursus HK, maius nomen ipsius EK, quæ est ex binis nominibus, plus quàm EH, minus nomen, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; vel incommensurabilis. Si plus possit HK, quàm EH, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit EK, ex binis nominibus secunda, cùm EH, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali EF, vt ostensum est. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus secunda EK, atq; adeò & spatium AD, ex Rationali AB, & Medio CD, compositum, [b] Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Mediis prima. [b] 56. decimi

Si verò HK, plus possit quàm EH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; erit EK, ex binis nominibus quinta, cùm EH, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeò & spatium AD, [c] Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat. [c] 59. decimi

THEOR. 55. PROPOS. 73. 72. 66.

Si duo Media inter se incommensurabilia componãtur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.



Componantvr duo Media incommensurabilia AB, CD. Dico rectam, quæ potest totum spatium AD, esse vel ex binis Mediis secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus AB, vel maius, quàm CD, vel minus: Æquale siquidem non erit; aliàs essent AB, CD, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primò maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia AB, CD, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt & spatia EG, HI, Media & incommensurabilia; cùm illis sint æqualia. [d] Igitur rectæ EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & vtraque (cùm EG, HI, Media sint, applicenturq; ad Rationalem EF.) [e] Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solùm commensurabiles; [f] ac propterea EK, ex binis nominibus est. Quoniam verò AB, maius ponitur quàm CD; erit vt in antecedenti propos. EH, maius nomen ipsius EK. Poterit ergo plus quàm HK, quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit EH, quàm HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cùm vtrumque nomen EH, HK, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeò & spatium AD, [g] Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur. [d] 10. decimi. [e] 23. decimi. [f] 37. decimi. [g] 57. decimi

Si verò EH, plus possit quàm HK, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cùm vtrumque nomen EH, HK, longitudine sit incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus sexta, vt constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI, siue spatium AD, [h] Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur. [h] 60. decimi

Qvod si AB, minus sit, quàm CD; non aliter propositum concludemus, vt ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

Ex his omnibus facilè colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se easdem esse.

a 23. decimi. *NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, [a] latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.*

b 61. decimi. *AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, [b] latitudinem efficit ex binis nominibus primam.*

c 62. decimi. *ET quadratum eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, [c] latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.*

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum,

d 63. decimi. *[d] latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.*

e 64. decimi. *AT verò quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, [e] latitudinem facit ex binis nominibus quartam.*

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum,

f 65. decimi. *[f] latitudinem facit ex binis nominibus quintam.*

g 66. decimi. *POSTREMO, quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, [g] latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.*

ITAQVE cùm hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter ſe; à latitudine quidem Mediæ, quòd hæc Rationalis ſit, illæ verò Irrationales; Inter ſe autem, quòd ordine non ſint eadem ex binis nominibus; perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differentes eſſe.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenariis.

IN primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum ſex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Mediis ſecunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium poteſt; & denique eius, quæ poteſt bina Media.

IN ſecundo, quem continent propoſ. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuiſionibus, docens ſingulas in ſingulis duntaxat punctis diuidi poſſe in ſua nomina.

IN tertio deinde, contento propoſ. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet primæ, ſecundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & ſextæ.

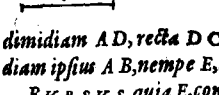
IN quarto, quem abſoluunt propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. oſtendit, quo modo hæ ſex lineæ Irrationales, quæ in primo ſenario explicantur, inter ſe differant, docens, quænam linea Irrationalis ſit illa, quæ poteſt ſpatium contentum ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus ſecunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel ſexta.

IN quinto autem, quem reperies in propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quáſnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo ſenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN ſexto verò, qui quinque propoſ. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abſoluitur, demonſtrauit lineam quamcunque commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium in primo ſenario, eſſe Irrationalem eandem illi, cui commenſurabilis eſt.

IN ſeptimo denique, contento duabus propoſitionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rurſus differentiam aliam ſex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his ſex lineis Irrationalibus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem conſiſtit in exceſſu eodem. Et recta media proportionalis, ſecundùm Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit.



SIT enim quacunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; & diuidatur A B, bifariam in D; & eius dimidiæ A D, vel D B, æqualis ſumatur E. Dico E, mediam eſſe, ſecundùm Analogiam Arithmeticam, inter A C, C B: & E, eſſe quoque ex binis nominibus. Quoniam enim A C, ſuperat dimidiam A D, rectâ D C; & dimidia D B, ſuperat ipſam C B, eadem rectâ D C; perſpicuum eſt, dimidiam ipſius A B, nempe E, eſſe mediam proportionalem inter A C, C B, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commenſurabilis eſt longitudine totî A B, cùm hæc illius ſit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipſi A B, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.

IDEM oſtendamus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SEQVVNTVR iam ſeptem alij ſenarij, in quibus eadem Euclides demonſtrat de ſex aliis lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quá in præcedentibus ſeptem ſenariis de Irrationalibus, quæ per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.

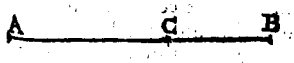
PRINCI-

PRINCIPIVM SENARIORVM per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. 73. 68.

SI à Rationali Rationalis auferatur, potentia tantùm commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia solùm commensurabilis ipsi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim per lemma 3. propos. 19. huius lib. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, AC: Et sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles; [a] erunt incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (cùm enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia. [b] Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo verò sub AB, AC, commensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum sub AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. [c] Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cùm ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, sit Rationale; (propterea quòd commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto;) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeò & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.



[a] 10. decimi

[b] 16. decimi

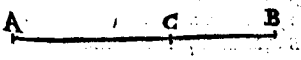
[c] 7. secundi

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

NAM cùm AB, AC, sint Rationales, potentia tantùm commensurabiles; [a] erit compositum ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomẽ AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori nomine AB, vt relinquatur Apotome BC.

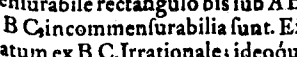


[a] 37. decimi

THEOR. 57. PROPOS. 75. 74. 69.

SI à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solùm commensurabilis ipsi AB. sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensurabiles: erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia: [a] atq; adeò & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AC. Est autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale: erit & rectangulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC. [b] Cùm ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. [c] Quare & rectagulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia sunt. Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Mediis primæ, à maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.



[a] 16. decimi

[b] 7. secundi.

[c] 17. decimi.

SCHOLIVM.

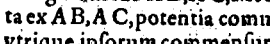
POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

238. deci. *Cvm enim AB, AC, sint Mediæ potentia solùm commensurabiles, contineantq; Rationale; [a] erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome prima.*

75. 70. THEOR. 58. PROPOS. 76.

Si à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.



DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solùm commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex AB, AC, potentia commensurabilibus commẽsurabilia sunt; [a] erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrumque ipsorum Medium, quòd & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, vtrique commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Rursus quia rectangulum sub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum, videlicet bis sub AB, AC, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. [b] Cùm ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC; superabit compositũ ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium est, rectangulum bis sub AB, AC, quod etiam Medium est, quadrato ex BC. [c] Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergò quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationalis, & ipsa recta BC, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis secunda, à maiori nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur à Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

a 16. decimi
b 7. secundi
c 27. decimi

SCHOLIVM.

Hoc etiam theorema ita potuisset proponi.

Si à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

239. deci. *Quoniam enim AB, AC, Mediæ sunt potentia tantùm commẽsurabiles, continentq; Medium; [a] erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome secunda.*

76. 71. THEOR. 59. PROPOS. 77.

Si à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum totâ faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.



DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum verò sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum verò sub AB, AC, atque adeò, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale; [a] erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. [b] Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. [c] Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris, à maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 10. defin.
b 7. secundi
c 10. defin.

SCHOLIVM.

Sic etiam theorema hoc poterat proponi.

Si à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

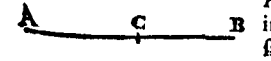
240. deci. *Nam cùm AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium; [a] erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiusq; maius nomen AB, minus autem AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.*

THEOR.

THEOR. 60. PROPOS. 78. 77. 72.

SI à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cùm tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipſi A B, incommenſurabilis; ſit autem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis, Rationale. Dico reliquam B C, eſſe Irrationalem. Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, Medium eſt, hoc eſt, Irrationale; at rectangulum ſub A B, A C, atq; adeò & eius duplum, nempe quod bis ſub A B, A C, Rationale; [a] erit compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, incommenſurabile rectangulo bis ſub A B, A C. [b] Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale rectangulo bis ſub A B, A C, vnà cum quadrato ex B C. Igitur & rectangulum bis ſub A B, A C, vnà cum quadrato ex B C, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub A B, A C. [c] Sunt ergo & rectangulum bis ſub A B, A C, & quadratum ex B C, incommenſurabilia. Cùm ergo rectangulum bis ſub A B, A C, Rationale ſit; [d] erit quadratum ex B C, Irrationale, & recta B C, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis ſub A B, A C, quod Rationale eſt, facit totum compoſitũ ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium exiſtit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cũ tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 10. defin. [b] 7. ſecundi. [c] 17. decimi. [d] 10. defin.

SCHOLIVM.

Hoc etiam modo Euclides theorema hoc potuiſſet proponere.

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

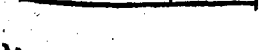
CVM enim A B, A C, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitũ quidem ex ipſarum quadratis, Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; [a] *erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen eſt A B, minus autem A C. Aufertur igitur minus nomen A C, à maiori A B, vt B C, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.*

[a] 14. decimi.

THEOR. 61. PROPOS. 79. 78. 73.

SI à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipſi A B, incommenſurabilis; Sitq; tam compoſitum ex ipſarum quadratis, q̃ rectangulum ſub ipſis Medium, incommẽſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. Dico reliquam B C, eſſe Irrationalem. [a] Quoniam enim compoſitũ ex quadratis rectarum A B, A C, æquale eſt rectangulo bis ſub A B, A C, vnà cum quadrato ex B C, ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium ponitur, rectangulum bis ſub A B, A C, quod ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium etiam eſt, (cùm Medio, quod ſub A B, A C, continetur, ſit commenſurabile) quadrato ex B C. [b] Medium autẽ non ſuperat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex B C, Rationale eſt. Ergo Irrationale, & recta ipſa B C, Irrationalis. Vocetur autẽ cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratũ cum rectangulo bis ſub A B, A C, quod Medium eſt, facit totum compoſitũ ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium etiam eſt. Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 7. ſecundi. [b] 27. decimi

SCHOLIVM.

IN *hunc modum proponi quoque potuiſſet hoc theorema.*

SI à maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QVONIAM cùm A B, A C, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; & compoſitũ ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommẽſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarũ; [a] *erit compoſita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferetur igitur minus nomen A C, ex maiori A B, vt relinquatur B C, cum Media Medium totum efficiens.*

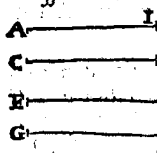
[a] 42. decimi.

LEMMA.

SI idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam ma-

gnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

Sint quatuor magnitudines A B, C D, E F, G H, sitq; I B, excessus inter A B, C D, æqualis excessui K F, inter E F, G H. Dico eundem esse excessum inter A B, E F, qui est inter C D, G H.



Quoniam enim I B, excessus est inter A B, & C D; erit A I, ipsi C D, æqualis. Eodem modo æqualis erit E K, ipsi G H. Idem igitur excessus erit inter A I, & E K, qui inter C D, & G H; cũ hæ magnitudines illis sint æquales, singulæ singulis. Est autẽ totorum A B, E F, ex pronunciato 16. lib. 1. idem excessus, qui inter A I, E K; quòd I B, K F, æquales ponantur. Igitur idem quoque excessus erit inter A B, & E F, qui inter C D, & G H. quod est propositum.

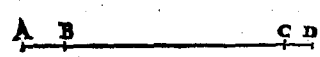
COROLLARIVM.

Ex his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoq; vicissim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

79. THEOR. 62. PROPOS. 80.

74. APOTOMAE vna tantùm congruit recta linea Rationalis, potẽtia solùm commensurabilis existens toti.

SIT Apotome A B; congruẽs autem ei Rationalis B C, potentia solùm toti A C, commensurabilis. Dico ipsi A B, aliam Rationalem nõ congruere, quæ toti sit potentia tantũ commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis B D, ita vt B D, ipsi A D, sit potentia solùm commensurabilis. Et quia B C, Rationalis est; erit A C, illi solùm potentia commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt A C, B C, potentia tantũ commensurabiles. Eodem modo erunt & A D, B D, Rationales potentia solùm commensurabiles. Quoniam verò idem excessus est inter compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum bis sub A C, B C, qui inter compositum ex quadratis rectarum A D, B D, & rectangulum bis sub A D, B D; (superat enim compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, rectangulum bis sub A C, B C, quadrato ex A B; [a] & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale sit rectangulo bis sub A C, B C, vnà eum quadrato ex A B. Et eodem modo compositũ ex quadratis rectarum A D, B D, superat rectangulum bis sub A D, B D, quadrato eodẽ ex A B, [b] cùm & compositũ ex quadratis rectarũ A D, B D, æquale sit rectangulo bis sub A D, B D, vnà cũ quadrato ex A B.) erit quoq; permutando, ex lemmate antecedẽti, idem excessus inter compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, D B. Est autẽ excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius lib. 9. vtrumq; Rationale sit. (Nam cùm A C, B C, sint Rationales potentia solùm commensurabiles; erunt earum quadrata, Rationalia, & commensurabilia. [c] Igitur & compositum ex ipsis vtriq; illorum commensurabile est, atq; adeò & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus compositũ ex quadratis rectarum A D, B D.) Igitur & excessus inter rectangulũ bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatiũ Rationale est. [d] Et quia rectangulum sub A C, B C, Rationalibus potẽtia solùm commensurabilibus Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Eademq; ratione Medium erit rectangulum bis sub A D, B D. [e] Medium autẽ non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, Rationale spatium nõ est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdũ. Ergo ipsi A B, alia Rationalis non congruit, præter B C, q̃ toti sit potẽtia tantũ commẽsurabilis. Apotomæ igitur vna tantũ cõgruit, &c. Quod erat ostendendũ.



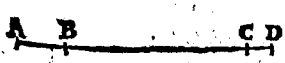
a 7. secundi.
b 7. secundi.
c 61. decimi
d 22. decimi.
e 27. decimi.

80. THEOR. 63. PROPOS. 81.

75. MEDIAE Apotomæ primæ vna tantùm congruit recta linea Media, potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotomæ prima A B, & ipsi congruat B C, Media toti A C, potẽtia solùm commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Rationale. Dico ipsi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantùm commensurabilis, contineatq; cum tota, Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia B D, Media toti A D, potentia tantùm commensurabilis, sitq; rectangulum sub A D, B D, Rationale. Et quia B C, Media est potẽtia solùm ipsi A C, commensurabilis; [f] erit & A C, Media,

f 24. decimi



Media, cùm illi sit commensurabilis. Mediæ ergò sunt A C, B C, potentia tantũ commensurabiles. Quoniam verò idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarũ A C, C B, & compositũ ex quadratis rectarũ A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, vt in propos. præcedẽti ostensum est: Est autẽ excessus inter hæc rectangula, ex scholio propos. 27. huius lib. spatium Rationale: quòd vtrumq; sit Rationale, (cùm enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub A C, B C, illi commensurabile, Rationale. Atq; eadẽ ratione Rationale erit rectangulũ bis sub A D, B D.) Igitur & excessus inter compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, & compositũ ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale est. Et quoniam rectę A C, B C, Mediæ sunt potentia solùm commensurabiles; erunt & ipsarũ quadrata Media, & commensurabilia. [a] Igitur & compositũ ex ipsis vtriq; ipsorum commensurabile est, atq; adeò & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoq; Medium erit compositum ex quadratis rectarum A D, B D. [b] Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Media non congruit, præter B C, quæ toti sit potentia solùm commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

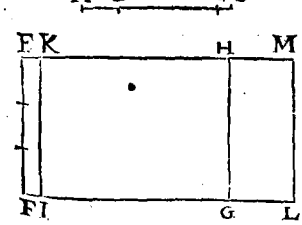
[a] 16. decimi

[b] 27. decimi

THEOR. 64. PROPOS. 82. 81. 76.

MEDIAE Apotomæ secundę vna tantùm congruit recta linea, Media potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotomæ secunda AB, cui congruat Media B C, toti A C, potentia tantũ commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Medium. Dico ipsi A B, aliã mediam nõ congruere, quæ toti sit potentia tantũ commensurabilis, contineatq; cum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia B D, media toti A D, potentia tantũ commẽsurabilis, sitq; rectangulũ sub A D, B D, Medium. Exponatur Rationalis E F, [c] ad quã applicetur rectangulum E G, æquale composito ex quadratis rectarũ A C, B C, & ad eandẽ E F, aliud E I, applicetur æquale ~~quadrato~~ ex A B. Et deniq; aliud E L, æquale composito ex quadratis rectarũ A D, B D. [d] Quoniam igitur compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, æquale est rectangulo bis sub A C, B C, vnà cũ quadrato ex A B; erit K G, æquale ei, quod bis cõtinetur sub A C, B C. Eodemq; modo erit K L, æquale ei, quod bis continetur sub A D, B D. Et quoniam A C, B C, Mediæ sunt, & potẽtia commensurabiles; (cùm enim B C, Media ponatur, [e] erit & A C, ipsi potẽtia commensurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. [f] Ergo & compositũ ex ipsis, commensurabile est vtrique eorũ; atq; idcircò & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Igitur & E G, quod illi composito æquale est, Medium est; quæ cũ applicetur ad Rationalẽ E F, [g] erit E H, Rationalis ipsi E F, longitudine incommẽsurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe K G, Medium: quod cũ applicetur ad Rationalem K I, [h] erit K H, Rationalis ipsi K I, hoc est, ipsi E F, longitudine incõmensurabilis. Et quia A C, B C, longitudine incommensurabiles sunt, estq; vt A C, ad B C, ita quadratũ ex A C, ad rectangulum sub A C, B C, vt ostendimus lemmate 3. ad propos. 19. huius lib. [i] erit quadratũ ex A C, incommẽsurabile rectangulo sub A C, B C. Est autẽ quadrato ex A C, commensurabile compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, rectangulum E G. (cùm enim rectæ A C, B C, ponantur potẽtia commensurabiles; erũt & earũ quadrata commensurabilia. [k] Igitur & compositũ ex ipsis commensurabile est vtriq; ipsorum, nempe quadrato ex A C.) & rectangulo sub A C, B C, commensurabile est eius duplũ; videlicet K G. Igitur & E G, ipsi K G, incommensurabile est, ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. [l] Rectæ igitur E H, K H, eandem habentes rationẽ cum E G, K G, longitudine incommensurabiles sunt: Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantũ commensurabiles. Quapropter cũ ex Rationali E H, auferatur Rationalis K H, potentia solùm commensurabilis ipsi E H, [m] erit E K, Apotome, & illi congruẽs K H. Similiter demonstrabimus E K, Apotomen esse, & illi congruentẽ K M. Non igitur Apotomæ vna tantũ congruit recta linea Rationalis potentia solùm commensurabilis existens toti. quod est absurdum. Vnam enim tantùm congruere, [n] demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.



[c] 45. primi.

[d] 7. secundi.

[e] 24. decimi

[f] 16. decimi.

[g] 23. decimi

[h] 23. decimi

[i] 10. decimi.

[k] 16. decimi

[l] 10. decimi.

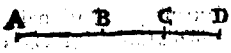
[m] 74. decimi.

[n] 80. decimi

THEOR. 65. PROPOS. 83. 82. 77.

MINORI vna tantũ congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

SIT minor A B, & illi congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale, & rectangulum sub A C, B C, Medium. Dico ipsi A B, aliam nō congruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens B D, toti A D, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Rationale, at rectangulum sub A D, B D, Medium. Quoniam igitur, vt in propositione 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & & rectangulum bis sub A D, B D: Est autem excessus inter alia composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri; quòd vtrumque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatium est Rationale, sed & non Rationale est. (Cùm enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propositionis 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Similiterque
a 27. decimi Medium erit rectangulum bis sub A D, B D. a Quare vnum non superabit alterum Rationali.) Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergo vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

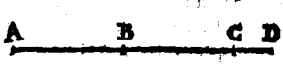


83. 78.

PROBL. 66. PROPOS. 84.

ET, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens A B, cui congruat recta B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositū quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, rectangulum verò sub A C, B C, Rationale. Dico ipsi A B, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia recta B D, toti A D, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Medium, rectangulum verò sub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur, vt in propos. 80. ostensum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D. Est autem excessus inter hæc rectangula, spatium Rationale, vt in propos. 81. demonstrauimus. Igitur & excessus inter illa composita, spatium Rationale est: sed & non Rationale
b 27. decimi est; cùm vtrumque sit Medium. b Medium enim Medium non superat Rationali. Quod est absurdum. Non ergo ipsi A B, alia recta, quàm B C, congruet potentia toti incommensurabilis, &c. Quare ei, quę cū Rationali Medium totū facit, vna tantū congruit, &c. Quod erat demonstrandū.

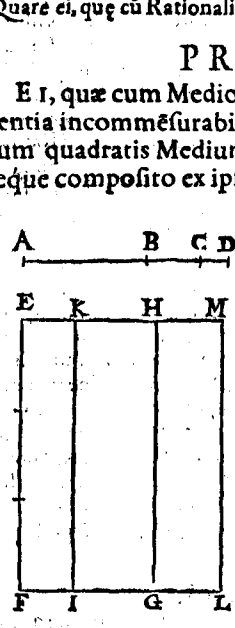


84. 79.

PROBL. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea, potentia incommēsurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

SIT recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipsi verò congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensq; & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub A C, B C, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis rectarum A C, B C. Dico ipsi A B, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi recta alia B D, toti A D, potentia incommensurabilis, ita vt & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium sit, & rectangulum sub A D, B D, Medium quoque, ac incommensurabile composito ex quadratis rectarum A D, B D. Constructis autem iisdem, quæ in propos. 82. quoniam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium est;
c 23. decimi. erit etiam E G, illi æquale, Medium. c Recta igitur E H, Rationalis est,
d 23. decimi. ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Medium est; erit & eius duplum K G, Medium. d Igitur & recta K H, Rationalis est, longitudine ipsi E F, incommensurabilis. Et quoniam K G, commensurabile est rectangulo sub A C, B C, cùm illud huius sit duplum; at rectangulum sub A C, B C, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum A C, B C;
e 14. decimi. erit quoque K G, eidem composito, hoc est, ipsi E G, incommensurabile; ac propterea rectæ E H,
f 10. decimi. K H, eandem habentes cum E G, K G, rationem, f longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantùm commensurabiles. Quare cùm ex



Rationali

Rationali E H, auferatur Rationalis K H, potentia solùm commensurabilis ipsi E H; [a] erit E K, Apotome, & ei congruens K H. Non aliter ostendemus E K, esse Apotomen, & ei congruentem esse K M. Non igitur Apotomæ vna tantùm recta congruit, &c. Quod est absurdum. [b] Vnam enim tantùm congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit, &c. Quod erat ostendendum. [a] 74. decimi [b] 80. decimi

DEFINITIONES TERTIAE.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositę Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis,

IIII.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD si neque tota, neque congruēs expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

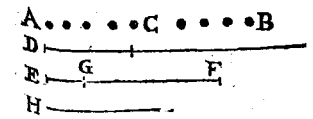
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus est perspicuum.

PROBL. 19. PROPOS. 86. 85. 80.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum excessus A C, non sit quadratus; ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum, at A B, A C, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit E F. Eritque E F, cùm commensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A B, ad numerum A C, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex E F, ad quadratum ex G F. Dico E G, esse primam Apotomen. [c] Quoniam enim quadrata ex E F, G F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ E F, G F, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo E F, ostensa sit Rationalis, erit & G F, Rationalis. Quia verò A B, A C, proportionē non habent, quàm quadrati numeri; neque quadrati ex E F, G F, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. [d] Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectę E F, G F. Rationales ergo sunt E F, G F, potentia tantùm commensurabiles; [e] atque idcirco reliqua E G, Apotome est. Dico & primam esse. Posit enim recta E F, plus quàm recta G F, quadrato H, Et quia est, vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Habent autem A B, C B, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; [f] Ac propterea rectæ E F, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniā igitur tota E F, plus potest, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem E F, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine; erit E G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.



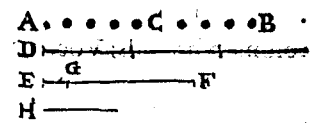
[c] 6. decimi. [d] 9. decimi. [e] 74. decimi [f] 9. decimi.

86. 81.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

INVENIRE ſecundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propoſitione præcedenti; expoſitaque Rationali D, ſumatur ei longitudine commenſurabilis G F; eritque G F, Rationali D, commenſu-
a 6. decimi. rabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex E F, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Dico E G, eſſe ſecundam Apotomen. [a] Quoniam enim quadrata ex G F, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ G F, E F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cùm ergo G F, ſit oſtenſa Rationalis; erit quoque E F, Rationalis. Quia verò numeri A C, A B, atque adeò & quadrata ex G F, E F, proportionem non habét, quam numeri quadrati; [b] erunt G F, E F, longitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt G F, E F, potentia ſolùm commenſurabiles; [c] Ideoque E G, reliqua, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Poſsit enim recta E F, plus



b 9. decimi.

c 74. decimi

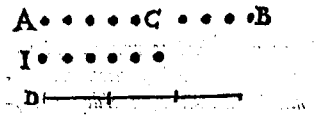
quàm G F, quadrato ex H. Quoniam ergo eſt, vt A C, ad A B, ita quadratum ex G F, ad quadratum ex E F; & conuertendo, vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F: Oſtendemus iam, vt in antecedéti propoſitione rectam H, ipſi E F, longitudine eſſe commenſurabilem. Quam ob rem cùm tota E F, plus poſsit, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis, ſitq; congruens G F, expoſitæ Rationali D, longitudine commenſurabilis; erit E G, ex defin. ſecunda Apotome. Inuenimus ergo ſecundam Apotomen. Quod erat faciendum.

87. 82.

PROBL. 21. PROPOS. 88.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propoſ. 86. ſumatur alius numerus I, vt in propoſ. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Expoſita deinde Rationali D, fiat vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad
d 6. decimi. quadratum ex E F, per coroll. propoſ. 6. huius libri. [d] Eruntque quadrata ex D, & E F, proportionem habentia, quam numeri I, & A B, commenſurabilia; atque adeò & rectæ D, & E F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente ergo D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Et quia numeri I, &
e 9. decimi. A B, ac propterea quadrata ex D, & E F, proportionẽ non habent, quam numeri quadrati; [e] erunt rectæ D, & E F, longitudine incommenſurabiles. Rurſus fiat, vt A B, ad A C, ita quadratũ ex E F, ad quadratum ex G F, ex eodem coroll. propoſ. 6. huius libri.



f 6. decimi.

Dico E G, eſſe tertiam Apotomen. [f] Quoniam enim quadrata ex E F, G F, proportionẽ habentia, quam numeri A B, A C, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ E F, G F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cùm ergo E F, oſtenſa ſit Rationalis, erit & G F, Rationalis, cùm illi hæc ſit commenſurabilis, vt demonſtrauimus. Et quia A B, A C, atque adeò & quadrata ex E F, G F, proportionem nõ habent, quam numeri quadrati; [g] Erunt rectæ E F, G F, longitudine incõmenſurabiles. Ra-

g 9. decimi.

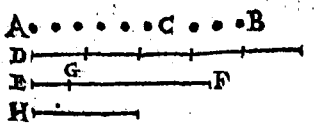
h 74. decimi tionales ergo ſunt E F, G F, potentia ſolùm commenſurabiles: Ac propterea cùm ex E F, auferatur G F, potentia illi ſolùm commenſurabilis; [h] reliqua E G, Apotome erit. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F; & vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit ex æquo vt I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratum ex G F; Non habent autem numeri I, & A C, proportionem, quam numeri quadrati. Neque igitur

i 9. decimi. quadrata ex D, & G F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [i] Sunt ergo rectæ D, & G F, longitudine incommenſurabiles. Igitur neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſsit iam E F, plus quàm G F, quadrato rectæ H; Oſtendemus, vt in propoſ. 86. rectam H, eſſe ipſi E F, longitudine commenſurabilem. Quapropter cùm tota E F, plus poſsit quàm congruens G F, quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis, & neutra ipſarum E F, G F, longitudine commenſurabilis ſit Rationali D, expoſitæ; erit ex defin. E G, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

88. 83.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.



REPERTIS duobus numeris A C, C B, ita vt A B, ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratũ, per ea, quæ in ſcholio 3. propoſitionis 29. huius lib. docuimus: exponatur Rationalis D, cui longitudine commenſurabilis ſit E F: eritque propterea & E F, Rationalis. Quòd ſi reliqua fiant, quæ in propoſ. 86. oſtendemus, vt ibi, E G, eſſe Apotomen. Dico & quartam eſſe. Poſsit enim E F, plus ꝙ G F, quadra-

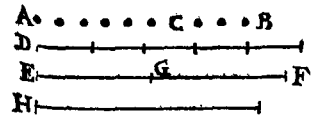
toro-

to rectæ H. Et quia est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cùm ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; [a] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estq; eadē tota EF, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum. [a] 9. decimi.

PROBL. 23. PROPOS. 90. 89. 84.

INVENIRE quintam Apotomen.

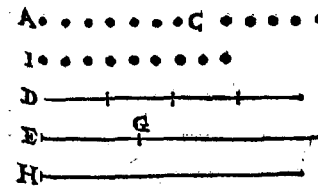
REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propositione præcedenti, fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur GF, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo, vt in propos. 87. EG, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Posit enim EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis, esse vt AB, ad CB, ita quadratum EF, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propositione antecedenti, rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles; estque congruens GF, Rationali D, commensurabilis longitudine; erit ex defin. EG, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.



PROBL. 24. PROPOS. 91. 90. 85.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris AC, CB, & I, vt in propos. 54. ita vt AB, ad neutrum ipsorum AC, CB; & I, ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, vt in propositione 88. Ostendemus ergo similiter, vt ibi, D, & EF, longitudine incommensurabiles esse; & EG, Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam vt in propos. 88. erūt D, & GF, longitudine quoq; incommensurabiles; Atque adeò neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Posit iam EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi EF. Igitur cùm tota EF, plus possit, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. EG, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.



SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome. [a] *Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis sit ipsi CB: Dico AD, esse primam Apotomen. Quoniam enim AC, CB, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; erūt etiam AC, DC, Rationales potentia tantùm commēsurabiles.* [b] *Est ergo AD, Apotome. Et quia AC, plus potest, quàm CB, hoc est, quàm DC, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: & est AC, Rationali expositæ longitudine commensurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotomæ primæ, AD, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.*

[a] 49. decimi.

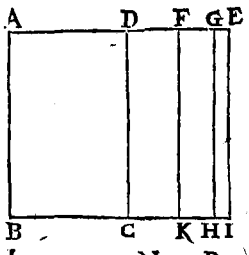
[b] 74. decimi.



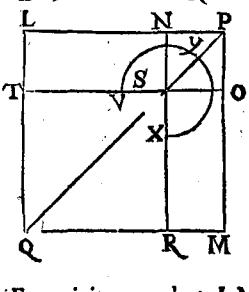
THEOR. 68. PROPOS. 92. 91. 86.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Apotomen esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solùm commensurabiles; & tota AE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & deniq; eadem AE, tota plus poterit, quàm congruens DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE, hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulum æquale sub AG, GE, desiciens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17. huius lib. Et quia AE, plus potest, quàm DE, qua-



drato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; [a] erunt rectæ AG, GE, longitudine commenſurabiles; [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis erit: Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine commenſurabilis. [c] Igitur & vtraque AG, GE, ipſi AB, longitudine eſt commenſurabilis; atq; ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipſi AB, parallelis, quæ ipſi BC, productæ occurrant in H, I; [d] erit vtrumque rectangulum AH, GI, contentum ſub duabus rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationale. Rurſus quia vtraque DF, FE, longitudine commenſurabilis eſt ipſi DE; & DE, longitudine incommenſurabilis eſt Rationali AB; (Nam ſi commenſurabilis eſſet longitudine, cùm & AE, ſit eidem AB, longitudine commenſurabilis; [e] eſſent AE, DE, longitudine quoq; commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim ſolùm potentia commenſurabiles:) [f] erit etiam vtraq; ipſarum DF, FE, ipſi AB, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam vtraque DF, FE, Rationali DE, commẽſurabilis, Rationalis eſt; Erunt propterea tam AB, DF, quàm AB, FE, Rationales potentia tantũ commenſurabiles. Quare ducta FK, ipſi AB, parallela, [g] erit vtrumque rectangulum DK, FI, contentũ ſub Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, Medium.

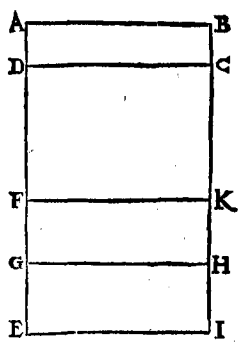


IAM verò ipſi AH, [h] fiat quadratũ æquale LM, & ipſi GI, æquale fiat quadratum NO, communẽ habens cum LM, angulum LPM. [i] Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ ſit PQ. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum ſub AG, GE, per conſtructionem, æquale eſt quadrato ex FE; [k] erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; [l] Ac propterea cùm AH, FI, GI, eandem cum ipſis habeant rationem; erit FI, medium proportionale inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Eſt autem inter eadem LM, NO, per lemma propoſ. 14. huius lib. medium quoq; proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia ſunt: [m] Sed ipſi FI, æquale eſt DK, & ipſi LO, æquale eſt MN. Eſt ergo totum DI, toti gnomoni VYX, cum quadrato NO, æquale. Eſt autem & totum AI, per conſtructionem, æquale quadratis LM, NO. Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, eſt æquale; Ac propterea recta TS, poteſt ſpatiũ AC. Dico TS, Apotomẽ eſſe.

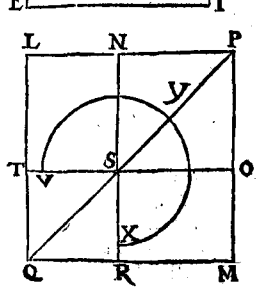
QVONIAM enim ſpatia AH, GI, oſtenſa ſunt Rationalia; & eis æqualia ſunt LM, NO, erunt quoq; quadrata LM, NO, Rationalia; atq; adeò & rectę TO, SO, Rationales. Rurſus quia FI, Medium eſt oſtenſum; erit & LO, illi æquale, Mediũ. Incommenſurabilia ergo ſunt LO, & NO, cùm vnum ſit Irrationale, alterum verò Rationale. Igitur rectæ TO, SO, [n] eandem rationem habẽtes cum LO, NO, [o] longitudine incommenſurabiles ſunt; [p] Atque idcirco reliqua TS, Apotome eſt. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 69. PROPOS. 93.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.



CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſecunda AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Mediæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomę ſecundæ, Rationales potentia tantùm commenſurabiles, & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit quàm DE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia conſtruantur, vt in propoſitione præcedenti. [q] Eruntque rurſus, vt in antecedenti propoſ. AG, GE, longitudine commenſurabiles; [r] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis. Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi AB, longitudine, cùm DE, eidem AB, ponatur longitudine commenſurabilis; [s] eſſent AE, DE, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim potentia tantùm commenſurabiles.) [t] Igitur & vtraque ipſarum AG, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidem AB. Eſt autem vtraque AG, GE, Rationali AE, commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam AB, AG, quàm AB, GE, potentia ſolùm commenſurabiles; [u] Atque idcirco rectangulum vtrumque AH, GI, contentum ſub Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia vtraque DF, FE, ipſi DE, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur

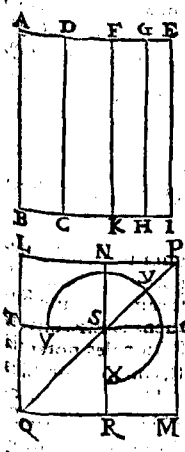


nitur D E, Rationali A B, longitudine commensurabilis; erit quoq;, vt in scholio propos. 12. huius libri ostendimus, eidem A B, Rationali longitudine commensurabilis vtraque D F, F E; atq; adeò & Rationalis. [a] Vtrumque ergo rectangulum D K, F I, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam verò, vt in præcedenti propositione, demonstrabimus rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, Mediæ Apotomen esse primam. [a] 20. decimi

QVONIAM enim A G, G E, longitudine sunt commensurabiles, [b] erunt & A H, G I, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atq; adeò & L M, N O, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectę T O, S O, saltem potentia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quòd quadrata L M, N O, Mediis A H, G I, æqualia, (ostensa enim sunt A H, G I, Media esse.) Media sint. Et quoniam F I, atque adeò sibi æquale L O, Rationale est, propterea q; Medio N O, incommensurabile; [c] erunt rectæ T O, S O, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles; erunt T O, S O, Mediæ potentia tantùm commensurabiles. Cùm ergo contineant L O, quod Rationale est ostensum; [d] erit T S, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatiũ contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat. [b] 10. decimi. [c] 10. decimi [d] 75. decimi

THEOR. 70. PROPOS. 94. 93. 88.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.



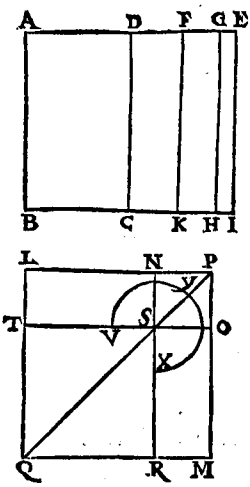
CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma tertia A D. Dico rectam, quæ spatium A C, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, A E, D E, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & neutra ipsarum A E, D E, longitudine commensurabilis Rationali A B. Et denique A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectę sibi longitudine commensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. eruntque rursus, vt ibi, A G, G E, longitudine inter se commensurabiles; [e] Ac propterea & vtraque totI A E, longitudine commensurabilis erit. Est autẽ A E, posita incommensurabilis longitudine Rationali A B. [f] Igitur & vtraq; A G, G E, eidem A B, longitudine erit incommensurabilis. Cùm ergo vtraque A G, G E, Rationali A E, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam A B, A G, quàm A B, G E, Rationales potentia solùm commensurabiles; [g] Ac propterea vtrumque rectangulum A H, G I, Medium erit. Rursus quia D E, longitudine ponitur incommensurabilis Rationali A B; erit quoque vtraque D F, F E, ipsi D E, longitudine commensurabilis existẽs, [h] eidem A B, longitudine incommensurabilis. Cùm ergo vtraque D F, F E, Rationali D E, commensurabilis, sit Rationalis; erunt tam A B, D F, quàm A B, F E, Rationales potentia tantùm commensurabiles; [i] atq; propterea vtrumque rectangulum D K, F I, Medium erit. Similiter iam demonstrabimus, vt in propositione 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse Mediæ Apotomen secundam. [e] 16. decimi. [f] 14. decimi. [g] 22. decimi [h] 14. decimi. [i] 22. decimi.

QVONIAM enim A H, G I, Media sunt ostensa; erunt & quadrata L M, N O, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ T O, S O, Mediæ. Et quia A H, G I, eandem habentia rationem, quam A G, G E, quas ostendimus commensurabiles esse, [k] commensurabilia sunt; Erunt & quadrata L M, N O, commensurabilia. Igitur & rectæ T O, S O, commensurabiles sunt, saltem potentia. At verò quia A E, D E, potentia solùm sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, est quę ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis G E, ipsi verò D E, commensurabilis est longitudine F E; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & G E, F E, longitudine incommensurabiles; [l] ac propterea G I, F I, eandem rationem habentia, quam G E, F E, hoc est, illis æqualia N O, L O, incommensurabilia. Quare T O, S O, eandem rationem habentes, quam L O, N O, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt T O, S O, potentia solùm commensurabiles. Et quoniã continent L O, Medium; (cùm enim L O, æquale sit ipsi F I, vt constat ex propos. 92. quod Medium esse ostendimus; erit & L O, Medium.) [m] erit T S, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum. [k] 10. decimi. [l] 10. decimi. [m] 76. decimi.

THEOR. 71. PROPOS. 95. 94. 89.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens, Minor est.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma quarta A D. Dico rectã lineam, quæ potest spatium A C, Minorem esse. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo A E, D E, Rationales potentia solùm commensurabiles; ex definitione Apotomæ quartæ; & A E, longitudine



commensurabilis Rationali AB, & eadē AE, plus poterit, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. [a] Erunt ergo AG, GE, incommensurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus potest, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & ad AE, applicatum est rectangulum sub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commēsurabilis; [b] erit rectangulum AI, Rationale. Rursus quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis; [c] erit DI, atque adeò & eius dimidium FI, Medium. Amplius cùm AG, GE, sint longitudine incommensurabiles; [d] incommensurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam verò similiter demonstrabimus, vt in propositione 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Minorem.

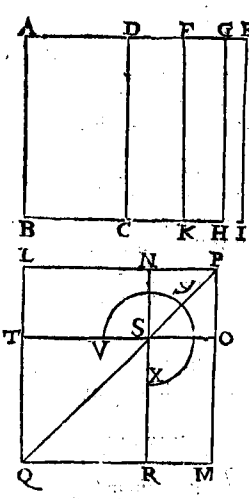
a 19. decimi
b 20. decimi
c 22. decimi.
d 10. decimi.

QVONIAM enim ex constructione, rectāgulo AI, æquale est compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Item quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, contentum sub TO, SO, illi æquale, Medium. Denique quoniam AH, GI, incōmensurabilia sunt demonstrata; erūt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommensurabilia; Atq; adeò rectæ TO, SO, potentia incommensurabiles. Quapropter cùm TO, SO, potentia sint incommensurabiles, sitq; compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum verò sub ipsis, Medium; [e] erit reliqua TS, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

e 77. decimi

95. 90. ## THEOR. 72. PROPOS. 96.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.



CONTINEATVR spatium AC, (repetita figura proximè antecedentis propositionis) sub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ spatium AC, potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ AE, DE, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construantur, vt prius. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propositione, AG, GE, longitudine incommensurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incommensurabilis est Rationali AB, vt in propos. 93. diximus; [f] erit rectangulum AI, Medium. Item quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; [g] erit DI, atque idcirco & eius dimidium FI, Rationale. Rursus erūt, vt in præcedenti propositione AH, GI, incōmensurabilia; poteritq; vt ostensum est in propos. 92. recta TS, spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

f 22. decimi.
g 20. decimi

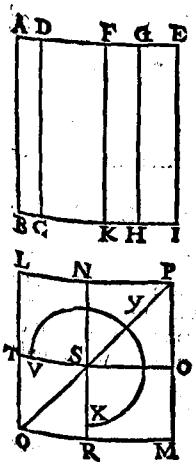
QVONIAM enim ostensum est AI, Medium esse; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demonstrauimus FI, Rationale esse; erit & LO, rectangulum sub TO, SO, contentum, cùm illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & TO, SO, potentia incommensurabiles, vt in propositione antecedenti est demonstratum. Igitur cùm TO, SO, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectāgulum verò sub ipsis, Rationale; [h] erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totū efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

h 78. decimi

96. 91. ## THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma sexta AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, esse eam, quæ cum Medio Medium totū efficit. Sit enim ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, AE, DE, Rationales potentia tantùm commensurabiles,



surabiles, & neutra ipsarum A E, D E, Rationali A B, commensurabilis longitudine: Et denique A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua construantur, vt suprà. Erunt ergo rursus, vt in propositione 95. A G, G E, longitudine incommensurabiles. Et quia tam A E, quàm D E, Rationalis est, & Rationali A B, longitudine incommensurabilis: [a] erit tam A I, quàm D I, atque adeò & huius dimidium F I, Medium. Eruntque, vt in propositione 95. A H, G I, incommensurabilia. Et quoniam A E, D E, potentia solùm sunt commensurabiles: [b] Erunt A I, D I, eandem habentia cum illis proportionem, incommensurabilia: Atque adeò cùm D I, F I, commensurabilia sint: [c] erit F I, ipsi A I, incommensurabile. Iam verò demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

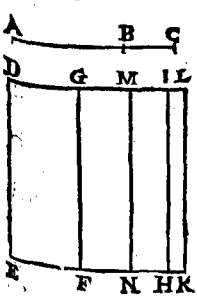
[a] 22. decimi
[b] 10. decimi
[c] 14. decimi.

QVONIAM enim A I, Medium ostendimus, erit & compositum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O, illi æquale, Medium. Item quia F I, Medium ostensum est: erit & L O, illi æquale, contentumque sub T O, S O, Medium. Rursus quoniam F I, ipsi A I, est incommensurabile, vt ostendimus: erit quoque L O, sub T O, S O, contentum, incommensurabile composito ex quadratis rectarum T O, S O: propterea quòd L O, ipsi F I, & compositum ex quadratis rectarum T O, S O, ipsi A I: est æquale. Denique T O, S O, potentia incommensurabiles sunt, vt in propos. 95. est demonstratum. Quamobrem cùm T O, S O, sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsis quadratis, Medium: necnon & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc composito ex quadratis ipsarum incommensurabile: [d] erit reliqua T S, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum.

[d] 79. decimi

THEOR. 74. PROPOS. 98. 97. 92.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.



SIT Apotome A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, sint Rationales potentia solùm commensurabiles: [e] & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A B, latitudinè faciens D G. Dico D G, esse Apotomen primam. Ad eandem enim D E, applicetur rectangulum D H, æquale quadrato ex A C: & ad I H, aliud I K, æquale quadrato ex B C: ita vt totum D K, æquale sit composito ex quadratis rectarum A C, B C. [f] Et quoniam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale est rectangulo bis sub A C, B C: vnà cum quadrato ex A B: si auferatur quadratum ex A B, & rectangulum D F: relinquetur G K, rectangulo bis sub A C, B C, æquale: atque adeò diuisa G L, bifariam in M, ductaque M N, ipsi D E, parallela, erit M K, æquale rectangulo sub A C, B C. Et quoniam A C, B C, Rationales sunt: erunt quoque quadrata ex A C, B C, Rationalia: ideoque commensurabilia. [g] Cùm ergo & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, vtrique ipsorum sit commensurabile: erit & illud compositum, hoc est, illi æquale D K, Rationale. Quod cùm applicetur ad Rationalem D E, [h] erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Rursus quia A C, B C, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles: erit rectangulum sub ipsis, atque adeò & eius duplum G K, Medium. Quod cùm applicetur ad Rationalem G F, [i] erit G L, Rationalis ipsi G F, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quoniam D K, Rationale, & G K, Medium, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt: [k] erunt rectæ D L, G L, eandem habentes proportionem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles. Quare cùm & Rationales sint demonstratæ: erunt D L, G L, Rationales potentia tantùm commensurabiles: [l] Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam esse.

[e] 45. primi.
[f] 7. secundi.
[g] 16. decimi.
[h] 21. decimi.
[i] 23. decimi.
[k] 10. decimi
[l] 74. decimi

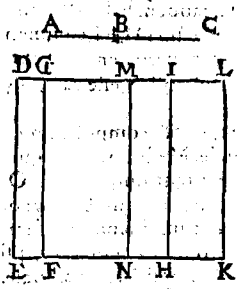
QVONIAM enim per lemma propositionis 54. huius libri, rectangulum sub A C, B C, hoc est, M K, medium est proportionale inter quadrata rectarum A C, B C, hoc est, inter D H, I K: erunt D H, M K, I K, continuè proportionalia: atque adeò & rectæ D I, M L, I L, eandem cum illis habentes proportionem, continuè proportionales sunt. [m] Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex M L, hoc est, quartæ parti quadrati ex G L. Et quoniam quadrata ex A C, B C, hoc est, illis æqualia D H, I K, commensurabilia sunt, [n] erunt rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaq; cùm duæ rectæ D L, G L, inæquales sint, & ad maiorem D L, applicatum rectangulum sub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficiensque figura quadrata: atque sit ostensa D I, ipsi I L, longitudine commensurabilis: [o] poterit D L, plus quàm G L, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cùm sit ostensum D G, esse Apotomen, & totam D L, plus posse, quàm G L, congruentem, quadrato re-

[m] 17. sexti.
[n] 10. decimi.
[o] 18. decimi.

ctæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

98. ## THEOR. 75. PROPOS. 99.

93. QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.

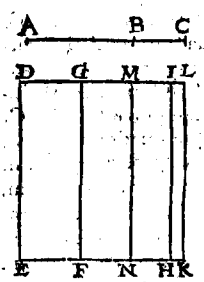


a 45 primi. Sit Mediæ Apotome prima AB, & ipsi congruens B C, ita vt AC, B C, sint Mediæ potentia solùm commensurabiles, contineantq; Rationale: a Et ad Rationalem D E, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen secundam esse. Construantur enim eadem, quæ in antecedenti propositione, ita vt rursus D H, I K, æqualia sint quadratis ex A C, B C; & G K, æquale ei, quod sub A C, B C, bis continetur; ac proinde M K, ei, quod sub A C, B C, continetur semel. Quoniam igitur A C, B C, Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata, hoc est, illis æqualia, D H, I K, Media, & commensurabilia; b ac proinde & totum D K, vtrique illorum commensurabile erit; Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius lib. Cùm ergo D K, applicetur ad Rationalem D E, c erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Rationale ponitur, erit quoq; eius duplum G K, Rationale. Quod cùm applicetur ad Rationalem D E, d erit G L, Rationalis longitudine commensurabilis ipsi D E. Quia verò D K, Medium, id est, Irrationale, & G K, Rationale, incommensurabilia sunt; e erunt rectæ D L, G L, eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo Rationales sint ostensæ, erunt D L, G L, Rationales potentia tantùm commensurabiles; f Ac propterea reliqua D G, Apotome est. Dico & secundam esse: Nam similiter, vt in præcedenti propositione, demonstrabimus totam D L, plus posse, quàm congruentem G L, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cùm congruens G L, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali D E, erit ex defin. D G, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.

b 16. decimi.
c 23. decimi.
d 21. decimi.
e 10. decimi
f 74. decimi

99. ## THEOR. 76. PROPOS. 100.

94. QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.



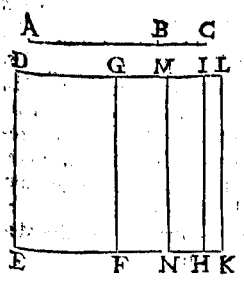
g 45. primi. Sit Mediæ Apotome secunda A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, sint Mediæ potentia tantùm commensurabiles: contineantque Medium. g Et ad Rationalem D E, applicetur D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ suprà. Ostendemus iam, vt in propositione præcedenti, D K, Medium esse, h atque adeò rectam D L, Rationalem ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Et quia rectangulum sub A C, B C, Medium est, atque ob id, & eius duplum G K; i erit quoque G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Quia verò A C, B C, longitudine sunt incommensurabiles, estque vt A C, ad B C, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, B C; k erit quadratum ex A C, incommensurabile rectangulo sub A C, B C. l Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis rectarum A C, B C; quòd quadrata ex rectis A C, B C, potentia commensurabilibus descripta, commensurabilia sint; rectangulo verò sub A C, B C, commensurabile est rectangulum bis sub A C, B C. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, D K; incommensurabile est rectangulo bis sub A C, B C, hoc est, ipsi G K; m Atque adeò rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solùm commensurabiles; n Ac proinde reliqua D G, Apotome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, vt in propos. 98. demonstrabimus D L, totam plus posse, quàm G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cùm ergo neutra ipsarum D L, G L, Rationali D E, longitudine sit commensurabilis, vt demonstratum est; erit ex definitione D G, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

h 23. decimi
i 23. decimi.
k 10. decimi
l 16. decimi.
m 10. decimi
n 74. decimi.

100. ## THEOR. 77. PROPOS. 101.

95. QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

Sit



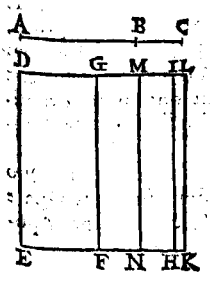
SIT Minor AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommensurabiles sint, facientesq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum verò sub AC, BC, Medium: [a] & ad Rationalem DE, applicetur spatium DF, quadrato ex AB, æquale, latitudinẽ faciens DG. Dico DG, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale DK, Rationale est; [b] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeò & eius duplum GK, Medium est; [c] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Medium, incommensurabilia sunt; [d] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia tantùm commensurabiles; [e] Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BC, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, incommensurabilia; [f] Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum; [g] poterit DL, plus quàm GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem, applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiens figura quadrata, dividensq; maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaq; cùm tota DL, plus possit, quàm congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 45. primi.
[b] 21. decimi.
[c] 23. decimi
[d] 10. decimi
[e] 74. deci.
[f] 10. decimi
[g] 19. decimi

THEOR. 78. PROPOS. 102.

101. 96.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.



SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum verò sub iisdem AC, BC, Rationale: [b] Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Construantur enim eadem, quæ suprà. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atque adeò & illi æquale DK, Medium est; [i] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeò & eius duplum GK, Rationale est; [k] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; [l] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solùm commensurabiles; [m] Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, vt in antecedenti propos. demonstrabimus DL, totam plus posse quàm GL, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cùm congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 45. primi.
[i] 23. decimi.
[k] 21. decimi
[l] 10. decimi.
[m] 74. deci.

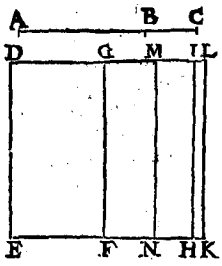
THEOR. 79. PROPOS. 103.

102. 97.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; & compositum ex quadratis rectarũ AC, BC, Medium, & rectangulum sub iisdem AC, BC, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: [n] Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato ex AB, spatium æquale DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ suprà. Quoniam igitur tam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale DK, quàm rectangulum sub AC, BC, atq; adeò & eius duplum GK, Medium est; [o] Erit tam DL, quàm GL, Rationalis ipsis DE, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub AC, BC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AC, BC; Et sunt rectangulum sub AC, BC, & eius duplum

[n] 45. primi.
[o] 23. decimi



GK, commensurabilia; [a] Erit & GK, eidem compositio, hoc est, ipsi DK, incommensurabile; [b] propterea{que} rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solùm commensurabiles; [c] Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus enim similiter, vt propos. 101. totam DL, plus posse, quàm congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cùm igitur neutra ipsarum DL, GL, commẽsurabilis sit longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

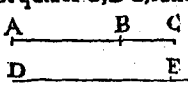
a 14. decimi.
b 10. decimi
c 74. deci.

103. 98.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solùm commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi AB. [d] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. [e] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles; [f] Erunt quoque AC, DF, necnon & BC, EF, commensurabiles longitudine. Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus:



quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & sunt AC, BC, potentia solùm commensurabiles; erunt quoque ex iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantùm commẽsurabiles. Quare cùm & Rationales sint ostensæ, [g] reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Possit enim primùm AC, plus quàm BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, [h] poterit & DF, plus quàm EF, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; [i] erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cùm tam Rationalis exposita, quàm DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si verò BC, sit longitudine commẽsurabilis Rationali; erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeò vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; [k] erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.

g 74. decimi
h 15. decimi
i 12. decimi.
k 14. decimi

POSSIT iam AC, plus quàm BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, [l] poterit & DF, plus quàm EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostẽdemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

l 15. decimi.

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Nempe, si recta DE, commensurabilis sit ipsi AB, potentia tantùm, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantùm commẽsurabilis:) & DE, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eandem ipsi AB. Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quòd non vtraque; nempe Rationalis exposita, & DF; eidem AC, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At verò DF, potentia tantùm ex hypothesi. Immo verò, si AB, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, vt DE, illi potentia tantùm commensurabilis, sit Apotome eadem ordine.

SIT enim AB, prima Apotome, secunda, quarta, vel quinta, eiq; congruens BC; & sit DE, ipsi AB, potentia tantùm commensurabilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendemus Apotomen esse, eiq; congruentem EF; & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nullâ ratione DE, Apotomen esse ordine eandem ipsi AB. Nam si fieri potest, sit vtraque Apotome prima. Quo posito, erit tam AC, tota, quàm tota DF, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expositæ commensurabilis longitudine; [a] atque adeò & inter se longitudine commensurabiles erunt AC, & DF. Quare cùm sit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt quoque AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solùm commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima est. Eodem modo neq; quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim vtraq; congruens BC, EF, ex defin. longitudine commensurabilis Rationali expositæ, atque adeò & ipsa inter se. Quocirca & AB, DE, inter se longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.

a 12. deci.
b 10. deci.

SEMPER

SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam DE, quæ ipſi AB, potentia ſolùm eſt commenſurabilis, eſſe quoq; vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit AC, plus quàm BC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cùm ergo ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [a] *poterit quoque DF, plus quàm EF, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi AB, eſt Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt AC, plus poſit, quàm BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit quoq; DE, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, quamuis ordine non eadem ipſi AB: quia rurſus, cùm ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF,* [b] *poterit quoque DF, plus quàm EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta.*

[a] 15. decl.

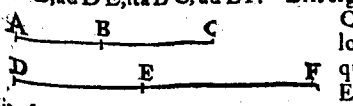
[b] 15. decimi

IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſariò erit DE, eadem ordine ipſi AB, licet potentia ſolùm illi fuerit commenſurabilis.

THEOR. 81. PROPOS. 105. 104. 99.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis; & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine erit.

SIT Mediæ Apotome quęcunq; AB, eiq́ue congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia ſolùm commenſurabiles: Sit autem ipſi AB, commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm. Dico & DE, Mediæ Apotomen eſſe, & ipſi AB, ordine eandem. [a] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. [b] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF.



Quoniam igitur AB, DE, commenſurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; [c] erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodem modo commenſurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ ſunt, [d] erunt quoque DF, EF, illis cõmenſurabiles, Mediæ. Rurſus, quia eſt vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autem AC, BC, potentia ſolùm commenſurabiles, erunt etiam, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. DF, EF, ſolùm potentia commenſurabiles. Quare cùm DF, EF, Mediæ ſint oſtenſæ; [e] erit reliqua DE, Mediæ Apotome. Dico & eandem eſſe ordine ipſi AB. Quoniam enim eſt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita eſt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum ſub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum ſub DF, EF; Et permutãdo, vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, BC, ad rectangulum ſub DF, EF. Igitur cùm quadratum ex AC, commenſurabile ſit quadratõ ex DF, quòd rectæ AC, DF, oſtenſæ ſint commenſurabiles; [f] erit & rectangulum ſub AC, BC, rectangulo ſub DF, EF, commenſurabile. Quare ſi rectangulum ſub AC, BC, ſit Rationale, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum ſub DF, EF, Rationale, cùm illi ſit commenſurabile; [g] atq; adeò & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si verò rectangulum ſub AC, BC, ſit Medium, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome ſecunda; erit quoq; rectangulum ſub DF, EF, ei commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. [h] Ac proptereа & DE, Mediæ Apotome ſecunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 12. ſexti.

[b] 12. quinti.

[c] 10. decimi

[d] 24. decimi

[e] 75. vel 76. decimi.

[f] 10. decimi

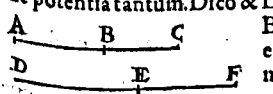
[g] 75. decimi

[h] 76. decimi

THEOR. 82. PROPOS. 106. 105. 116. 100.

RECTA linea Minori commenſurabilis; & ipſa Minor eſt.

SIT Minor AB, ipſiq́; congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommenſurabiles, facientesq́ue compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum verò ſub iiſdem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipſi AB, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm. Dico & DE, Minorem eſſe. Fiant enim eadem, quæ ſuprà, ita vt rurſus AB, BC, ad DE, EF, eandem habeant rationem, quã AC, ad DF. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. DF, EF, ipſis AC, BC, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm. Et quoniam eſt, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [i] erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex BC, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex EF; & componendo, vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ad quadratum ex BC, ita compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF; & permutando vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ad compoſitum ex quadratis rectarũ DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Eſt autem quadratum ex BC, commenſurabile quadrato ex EF; quòd rectas BC, EF, oſtenderimus commenſurabiles eſſe. [k] Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, compoſito ex quadratis rectarum DF, EF, commenſurabile eſt. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypotheſi, Rationale. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale eſt. Rurſus quoniam, vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus rectangulum ſub AC, BC, rectangulo ſub DF, EF, eſſe commenſurabile: ponitur autem rectangulum ſub AC, BC, Medium; Erit quoq; rectangulum ſub DF, EF, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Et quia eſt vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, ſuntq;



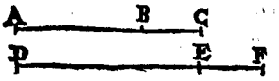
[i] 22. ſexti.

[k] 10. decimi

a 10. decimi AC, BC, potentia incommensurabiles: a erunt etiam DF, EF, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cùm DF, EF, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex
b 77. decimi quadratis rectarum DF, EF, Rationale, rectangulum verò sub iisdem DF, EF, Medium: b erit
106 117. DE, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

101. ## PROBL. 83. PROPOS. 107.

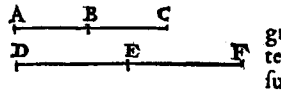
RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.



SIT recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium: at rectangulum sub AC, BC, Rationale: Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis quocunque modo. Dico & DE, esse, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ suprà, ostendemus vt in antecedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cùm ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus, vt in propos. 105. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, cõmensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cùm ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propos. est probatum, recte DF, EF, potentia incommensurabiles. Igitur cùm DF, EF, incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex
c 78. decimi ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis, Rationale; c erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.

107. ## THEOR. 84. PROPOS. ~~108.~~

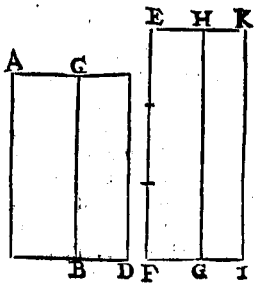
102. RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.



SIT recta AB, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesq; compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoque, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: Sit autem DE, ipsi AB, quomodolibet commensurabilis. Dico & DE, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ suprà, probabimus similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cùm ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cùm ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommensurabiles. Postremò, quia compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum est; & rectangulo sub AC, BC, commensurabile rectangulum sub DF, EF: Sunt autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC, per hypothesin, incommensurabilia: erunt quoque, ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, EF, & rectangulum sub DF, EF, incommensurabilia. Quocirca cùm DF, EF, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon &
d 79. deci. rectangulum sub ipsis, Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; d erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

108. ## THEOR. 85. PROPOS. 109.

103. MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.



DETRAHATVR à Rationali AD, Medium CD. Dico rectam, quæ
e 45. primi. potest spatium reliquum AB, esse vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis EF, e ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipsi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipsi CD, ita vt totum EI, toti AD, sit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD,
f 21. decimi. Rationale est; f erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine com-
g 23. decimi mensurabilis. Rursus quia HI, Medio CD, æquale Medium est, g erit HK, Rationalis, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Itaq; cùm
h 13. decimi EK, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi EF; at HK, eidem EF, longitudine incommensurabilis, h erunt EK, HK, longitudine
i 74. decimi incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantùm commensurabiles: i propterea q; reliqua EH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest quàm HK, quadrato

drato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt E K, quàm H K, quadrato rectæ lineæ commenſurabilis ſibi longitudine, cùm tota E K, oſtenſa quoque ſit longitudine commenſurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome prima. Quare recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma prima E H, hoc eſt, ſpatium A B, ſibi æquale, [a] Apotome eſt. Si verò E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cùm tota E K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali E F; erit ex definitione E H, Apotome quarta. Quapropter recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma quarta E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, [b] Minor eſt. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 92. decimi

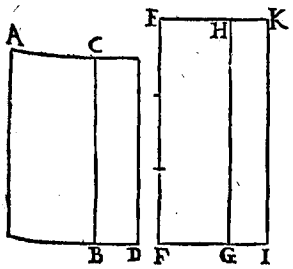
[b] 95. quinti

THEOR. 86. PROPOS. 110.

109.

104.

RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.



DETRAHATVR à Medio A D, Rationale C D. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium A B, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim conſtruantur, quæ ſuprà. Et quia E I, Medio A D, æquale, Medium eſt; [c] erit E K, Rationalis ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Item quia H I, æquale Rationali C D, Rationale eſt; [d] erit H K, Rationalis ipſi E F, longitudine commenſurabilis. Itaque cùm H K, quidem ipſi E F, ſit commenſurabilis longitudine, at E K, eidem E F, longitudine incommenſurabilis; [e] erunt H K, E K, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolùm commenſurabiles; [f] Ac proinde reliqua E H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cùm congruens H K, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome ſecunda. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſecunda E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, [g] Mediæ eſt Apotome prima. Si verò E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cùm congruens H K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali E F; erit E H, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma quinta E H, hoc eſt, ſpatium illi æquale A B, eſt ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quamobrem Rationali à Medio detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

[c] 23. decimi

[d] 21. decimi.

[e] 13. decimi.

[f] 74. primi.

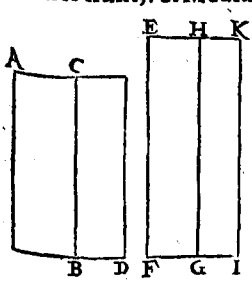
[g] 93. decimi

THEOR. 87. PROPOS. 111.

110.

105.

MEDIO à Medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome ſecunda, vel cum Medio Medium totū efficiēs.



DETRAHATVR à Medio A D, Medium C D, quod incommenſurabile ſit toti A D. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium A B, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen ſecundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſuprà; quoniam E I, H I, Mediis A D, C D, æqualia, Media ſunt; [h] erunt E K, H K, Rationales ipſi E F, longitudine incommenſurabiles. Et quia A D, C D, hoc eſt, E I, H I, ponuntur incommenſurabilia; [i] erunt E K, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantùm commenſurabiles; [k] Ac propterea reliqua F H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt E K, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cùm neutra ipſarum E K, H K, Rationali E F, longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa; erit ex defin. E H, Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale; [l] Mediæ Apotome eſt ſecunda. Si verò E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cùm neutra ipſarum E K, H K, Rationali E F, ſit longitudine commenſurabilis, vt demonſtrauimus; erit ex defin. E H, Apotome ſexta. Quam ob rem recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſexta E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, [m] eſt ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo à Medio detracto, &c. Quod demonſtrandum erat.

[h] 23. decimi.

[i] 10. decimi.

[k] 74. decimi

[l] 94. decimi

[m] 97. deci.

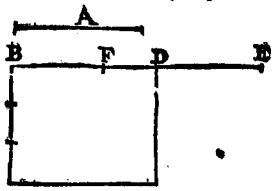
THEOR. 88. PROPOS. 112.

111.

116.

APOTOMEN non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si
a 45 primi. fieri potest, A, aliqua ex binis nominibus. Expositа autem Rationali B C, a applicetur ad B C, re-
b 98 decimi ctangulum C D, æquale quadrato ex A. Quoniam igitur A, Apotome est; b erit latitudo B D, Apo-
tome prima. Sit ergo ei congruens D E. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ B E, D E, Ratio-
nales potentia tantùm commensurabiles, poteritq; B E, plus quàm D E, quadrato rectæ sibi lon-
gitudine commensurabilis, & ipsa B E, Rationali B C, commensurabilis erit longitudine. Rursus
c 61. decimi quia A, ponitur esse quoque ex binis nominibus; c erit latitudo eadem B D, ex binis nominibus
prima. Sit ergo maius ipsius nomen B F. Erunt igitur ex defin.
eius, quæ ex binis nominibus prima est, B F, F D, Rationales
potentia solùm commensurabiles, poteritque B F, plus quàm
F D, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa
B F, Rationali B C, longitudine commensurabilis erit. Itaque
cùm tam B E, quàm B F, longitudine sit cõmensurabilis eidem
d 12 decimi. B C; d erunt quoq; B E, B F, inter se commensurabiles longi-
tudine. Igitur cùm tota B E, sit longitudine commensurabilis
parti B F, erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine com-



mensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri; Atque adeò cùm B E, Rationalis sit, & F E, Ratio-
nalis erit. Quoniam verò duarum linearum B E, F E, longitudine commensurabilium, ipsa B E,
longitudine incõmensurabilis est ipsi D E; (quòd B E, D E, Rationales sint potentia solùm com-
e 14. decimi mensurabiles) e erit quoque altera F E, eidem D E, incommensurabilis longitudine. Sed & vtra-
f 74. decimi que F E, D E, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt F E, D E, potentia solùm commensura-
biles. Quare reliqua F D, f Apotome est; Atque adeò Irrationalis. Ostensa est autem & Ratio-
nalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus.
Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

Ex demonstratis quoque facilè colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.

a 23. decimi. *QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, a latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.*

b 98. decimi. *AT quadratũ Apotomæ ad Rationalem applicatũ, b latitudinẽ efficit Apotomen primã.*

c 99. decimi. *ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, c latitudinem efficit Apotomen secundam.*

d 100. decimi. *QVADRATVM verò Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, d latitudinem efficit Apotomen tertiam.*

e 101. decimi. *QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, e latitudinem efficit Apotomen quartam.*

AT verò quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum,

f 102. decimi. *f latitudinem efficit Apotomen quintam.*

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem

g 103. decimi. *applicatum, g latitudinem efficit Apotomen sextam.*

ITAQVE cùm hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quòd hæc Rationalis sit, illæ verò Irrationales; inter se autem, quòd ordine non sint eædem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & à Media, & inter se se differre.

QVONIAM verò in hoc theoremate demonstrauimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At verò quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquidò cõstat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, easdem nõ esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differũt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem cùm & tam illæ, quàm hæ à Media differant; efficitur, Rationalis quapiam expositа tredecim numero esse lineas Irrationales inter se se differentes, de quibus hactenus disputauimus; Hæ scilicet.

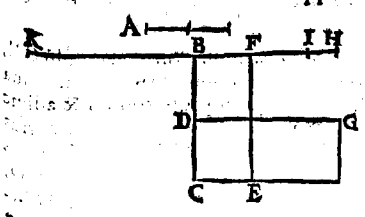
1. Media-

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis secunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam species sex sunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR. 89. PROPOS. 113. 112.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus. 0.

SIT Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius maius nomen B D, [a] & ad B C, applicetur rectangulum B E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F. Dico B F, esse Apotomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc Apotomen B F, esse ordine eandem ipsi B C, ex binis nominibus. [b] Applicetur enim rursus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A; atq; adeò rectangulo B E, latitudinem faciens D G; sitque ipsi D G, æqualis B H. Et quoniã æqualia sunt B E, C G; [c] erit vt B C, ad D C, ita D G, hoc est, sibi æqualis B H, ad B F. Et diuidendo vt B D, ad D C, ita H F, ad F B: Est autem B D, maior, quàm D C. Igitur & H F, maior est, quàm F B. Ponatur F I, ipsi F B, æqualis; [d] & fiat vt H I, ad I F, ita F B, ad B K. Erit ergo componendo vt H F, ad I F, hoc est, ad sibi æqualem B F, ita F K, ad B K. Ostẽsum est autem esse vt H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quoque vt B D, ad D C, ita F K, ad B K. At B D, D C, (cùm sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles. [e] Igitur & F K, B K, potentia solùm commensurabiles sunt.



a 45. primi.
b 45. primi.
c 14. vel 16. sexti.
d 12. sexti.
e 10. decimi.

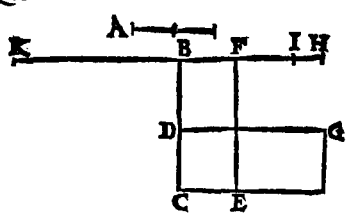
RVRSVS quia est vt H F, ad B F, ita F K, ad B K, [f] erunt quoque H F, F K, antecedentes simul, nempe tota H K, ad B F, & B K, consequentes simul, hoc est, ad totam F K, vt F K, ad B K. Ac propterea F K, media proportionalis est inter H K, B K. Quare vt H K, prima ad B K, tertiam, ita erit, per 20. roll. propos. 20. lib. 6. quadratum ex H K, prima ad quadratum ex F K, secunda. Quia verò C G, cùm Rationale sit, (est enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem D C, applicatũ, facit D G, latitudinem Rationalem, ipsi D C, longitudine commensurabilem; Erit quoque H B, ipsi D G, æqualis, Rationalis & longitudine commensurabilis ipsi D C. Et quoniam ostensum est, esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K: Vt autem F K, ad B K, ita H K, ad F K; erit quoque vt B D, ad D C, ita H K, ad F K. [h] Igitur vt quadratum ex B D, ad quadratum ex D C, ita quadratum ex H K, ad quadratum ex F K. At quadratum ex B D, commensurabile est quadrato ex D C, (quòd rectæ B D, D C, sint Rationales potentia commensurabiles, cùm sint nomina ipsius B C, ex binis nominibus.) [i] Commensurabile igitur erit quoque quadratum ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit vt quadratum ex H K, ad quadratum ex F K, ita recta H K, ad B K. [k] Igitur longitudine commensurabilis est H K, ipsi B K; atque adeò & reliquæ B H, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa est autem B H, Rationalis. Igitur & H K, illi commensurabilis, Rationalis est: ac propterea & B K, ipsi H K, cõmensurabilis, Rationalis existit. Cùm ergo ostensa sit F K, ipsi B K, potentia solùm commensurabilis, erit quoq; F K, Rationalis. Quare cùm F K, B K, Rationales sint, & potentia tantùm commensurabiles, [l] erit reliqua B F, Apotome, & ei congruens B K. Quod est primum.

f 12. quinti.
g 21. decimi.
h 22. sexti.
i 10. decimi
k 10. decimi
l 74. decimi

QVONIAM verò ostensum est, esse rectam H K, totam parti B K, longitudine commensurabilem, [m] erunt propterea & B K, B H, longitudine inter se commensurabiles. Cùm ergo B H, ostensa sit longitudine cõmensurabilis ipsi D C; erit quoque B K, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem

m 16. decimi

D C, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est, esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; & permutando vt B D, ad F K, ita D C, ad B K: Sunt autem modò D C, B K, ostensæ longi-
a 10. decimi. tudine commensurabiles; a Erunt quoque B D, F K, commensurabiles longitudine. Itaque cùm F K, ipsi B D, & B K, ipsi D C, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ B F, nomina F K, B K, nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.



Item quia demonstrauimus esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; erunt idcirco Apotomæ nomina F K, B K, in eadem ratione cum B D, D C, nominibus ipsius B C, quæ est ex binis nominibus. Quod est tertium.

Postremo, vel B D, plus potest, quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest B D, quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cùm
b 15. decimi. sit vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; b poterit quoq; F K, plus quàm B K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si B D, plus potest quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & F K, plus quàm B K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem B D, expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis; erit & F K, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi B D, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Si verò D C, sit Rationali commensurabilis longitudine; erit & eadem ratione B K, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si deniq; neutra ipsarum B D, D C, sit Rationali longi-
c 14. decimi. tudine commensurabilis; c erit quoque neutra ipsarum F K, B K, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome B F, ipsi B C, ex binis nominibus, vt constat ex definitionibus secundis, atque tertiis. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

113. THEOR. 90. PROPOS. 114.

O. Quadratvm Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomę nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quę ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

d 45. primi. Sit Rationalis A, & Apotome B C, cui congruat C D, d & ad B C, applicetur rectangulũ G E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B E. Dico B E, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus B D, C D, Apotomæ B C, & in eadem proportione; & adhuc
e 45. primi. ipsam B E, ex binis nominibus, esse ipsi B C, Apotomæ ordine eandem. e Applicetur enim rursus ad B D, totam, rectangulum B F, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi C E, latitudinẽ faciens B G: Et quoniam B F, C E, æqualia sunt; f erit vt B E, ad B G, ita B D, ad B C; & per conuersionem rationis, vt B E, ad G E, ita B D, ad C D. Se-
f 14. vel 16. sexti. cetur quoque E G, ad H, secundùm proportionem B E, ad G E, ex iis, quæ in schol. propos. 10. lib. 6. conscripsimus; vt sit E H, ad H G, quemadmodum B E, ad G E. Quia igitur est vt B E, tota ad G E, totam, ita E H, ex B E, ablata ad H G, ex G E, ablatam; erit quoque B H, reliqua ipsius B E, ad H E, reliquam ipsius G E, vt tota B E, ad totam G E: Erat autem vt B E, ad G E; ita E H, ad H G. Erit igitur quoque vt B H, ad H E, ita E H, ad G H; atque adeò H E, media proportionalis est inter B H, G H. Quare erit vt B H, prima ad G H, tertiam, ita quadratum ex B H, prima ad quadratum ex H E, secundam, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia verò fuit vt B D, ad C D, ita B E, ad G E, hoc est, B H, ad H E: & sunt B D, C D, cùm sint nomina Apotomæ B C, Rationales potentia tantùm commensurabiles;
g 10. decimi g Erunt quoq; B H, H E, potentia solùm commensurabiles; Ac propterea quadrata ex B H, H E, commensurabilia. Igitur rectæ B H, G H, eandem habentes rationem cum quadratis ex B H, H E,
h 10. decimi vt demonstrauimus, h longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota B H, longitudine commensurabilis existens parti G H, commensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll. propos. 16. huius libri. At verò cùm B D, Rationalis sit, nempe maius nomen Apo-
i 21. decimi. tomæ B C; & rectangulum B F, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; i erit latitudo B G, Rationalis commensurabilis longitudine ipsi B D. Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. & B H, eidem B D, Rationali commensurabilis est longitudine, atque adeò Rationalis existit; quandoquidem B H, B G, longitudine commẽsurabiles sunt ostensæ. Quia verò B H, H E, ostensæ sunt commensurabiles potentia tantùm, & B H, Rationalis; erit quoque H E, illi commensurabilis,
k 37. decimi Rationalis. Rationales ergo sunt B H, H E, potentia solùm commensurabiles; k Ac propterea B E, ex binis nominibus est. Quod est primum.

Quoniam verò ostendimus esse B H, ad H E, vt B D, ad C D; atque adeò permutando B H,
l 10. decimi. ad B D, vt H E, ad C D; Ostensa est autem B H, ipsi B D, longitudine commensurabilis; l erit quoque

quoque HE, ipsi CD, commensurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipsius BE, ex binis nominib⁹, cõmensurabilia sunt lõgitudine nominib⁹ BD, CD, Apotomę BC. Quod est secundũ.

IMMO & in eadem proportione, cùm demonstratum sit esse BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod est tertium.

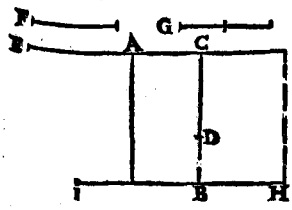
POSTREMO vel BD, plus potest quàm CD, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, [a] põterit quoq; BH, plus quàm HE, quadrato rectæ sibi commẽsurabilis longitudine: Et si BD, plus potest, quàm CD, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam BH, plus quàm HE, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidem BD, Rationali expositæ longitudine sit commensurabilis; erit quoque BH, commensurabilis existens lõgitudine ipsi BD, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propos. 12. huius lib. Si verò CD, longitudine sit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si verò neutra ipsarum BD, CD, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; [b] erit quoq; neutra ipsarum BH, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atque tertiis definitionibus, ipsa BE, ex binis nominibus, ordinè eadem est ipsi Apotomæ BC. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 15. decimi

[b] 14. decimi

THEOR. 91. PROPOS. 115. 114.

SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. 0.



CONTINEATVR spatiũ AB, sub Apotoma AC, & sub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, commensurabilia sint nominibus CE, AE, Apotomæ AC, & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Posit autem recta F, spatiũ AB. Dico F, esse Rationalem. Exposita enim Rationali G, [c] applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato ex G. [d] Erit ergo latitudo BH, Apotome, cuius nomina HI, BI, longitudine commensurabilia sunt nominibus CD, DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, vt CD, ad DB; atque adeò vt CE, ad AE, & permutando, vt tota HI, ad totam CE, ita ablata BI, ad ablatam AE. [e] Erit ergo & reliqua BH, ad reliquam AC, vt tota HI, ad totam CE: [f] Commensurabilis autem est longitudine HI, ipsi CE, quòd vtraque HI, CE, commensurabilis fuerit longitudine ipsi CD. [g] Igitur & BH, ipsi AC, longitudine est commensurabilis; [h] Atque idcirco & HC, ipsi BA, commensurabile erit, [i] cùm sit vt HB, ad AC, ita HC, ad BA: Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale, Rationale est. Igitur & BA, illi commensurabile, Rationale erit, proptereaque & recta F, ipsum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatiũ potẽs, est Rationalis. Quod erat demonstrandũ.

[c] 45. primi.

[d] 113. decimi

[e] 19. quinti.

[f] 12. decimi

[g] 10. decimi

[h] 10. decimi

[i] 1. sexti.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, fieri posse, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium AB, contentum sub AC, CB, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

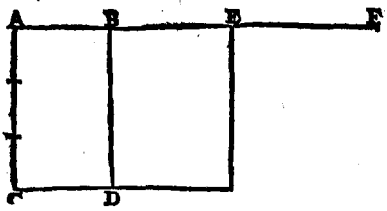
SCHOLIVM.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus, commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In posteriori verò, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantùm commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116. 115.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem. 107.

SIT Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali AC, contineatur sub AB, Media, & Rationali AC, spatium AD. Est ergo AD, spatium sub Rationali AC, & Irrationali AB, contentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Posit ipsum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non esse eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cùm quadratum Mediæ ad Rationalem AC, appli-



a 23. decimi catum, a latitudinem faciat Rationalem ipsi AC, longitudine incommensurabilem: Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eadem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt constat ex propos. 61.62.63. 64.65.66.98.99.100.101.102.& 103. huius lib. At verò quadratum huius Irrationalis BE, ad eandem Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinem Mediam; perspicuum est, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

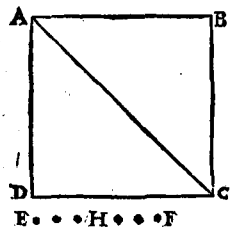
QVOD si compleatur rectangulum DE; erit & hoc contentum sub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lemmate propos. 38. Posit ergo ipsum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rursus EF, non esse eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi BE. Hoc autem manifestum est, cùm quadratum ipsius EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius BE, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes à BE, vt demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

118. 7.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommensurabilem esse lateri AB. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; b 5. decimi. b ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; sintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus c 20. sexti, & 11. octaui ex EF, ad quadratum numerum ex G, (c Cùm enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cùm sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratū ex AC, duplum est quadrati ex AB, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus ex EF, cùm dimidium habeat, atque adeò bifariam posit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipse EF, illum producens, par erit. (Si namque impar esset, cùm se ipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; d eo quòd impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia verò EF, & G, in sua proportione minimi, e inter se primi sunt; & EF, ostensus est par, erit G, impar. (Si enim par etiam esset, metiretur vtrumq; EF, & G, binarius; atque adeò non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus est numeri EH; f & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4.2.1.) Itaq; cùm quadratus ex EF, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partium 4. est quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G; & talium 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex EH, cùm illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt suprà de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter AC, lateri AB. Igitur incommensurabilis longitudine.



d 29. noni.

e 24. septimi

f 11. octaui.

ALITER. Sit, si potest fieri, diameter AC, commensurabilis longitudine lateri AB; habeantq; AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi sint in sua proportione; atque adeò inter se primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cùm enim quadratum ex AC, duplum sit quadrati ex AB; sit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonstratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est vnitas, atque adeò & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod est absurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam est demonstratum, quadratus ex EF, duplus est quadrati ex G; metietur quadratus ex G, quadratum ex EF; g ac propterea & G, latus, metietur latus EF. Cùm ergo & G, se ipsum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G; Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum.

g 14. octaui.

absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter A C, longitudine lateri A B. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

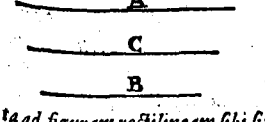
SED & affirmatiuè hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex iis, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata à nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. [a] solum tertius ab vnitate quadratus est, & cæteri omnes vnum intermittentes; quòd primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solùm hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui verò 2. 8. 32. non quadrati. Quare cùm 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; ([b] aliâs & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. [c] Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.

a 10. noni.
b 24. octaui
c 9. decimi

HOC etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8. lib. 8. & in scholio propos. 9. huius libri.

CÆTERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometriæ libris pendet, vt meritò omitti posset. Verùm quia in ea cõtinetur doctrina non contemnenda ad commensuralitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens; visum est, eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.



INVENTIS lineis rectis longitudine incommẽsurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ scilicet, atq; solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A, B, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit C. Quoniam igitur ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad B, ita est figura rectilinea quæuis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterq; positam super C; & sunt A, & B, longitudine incommensurabiles; [d] erunt rectilineæ illæ figuræ super A, & C, incommensurabiles.

d 10. deci.

RVRSVS [e] quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, descripta: Quadrata autem hæc, cùm sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; posita, proportionem habent, quam rectæ A, & B, ex coroll. propos. 20. lib. 6. [f] Habebunt quoque circuli diametrorum A, C, eandem proportionem, quam rectæ A, B: Sed rectæ A, B, incommensurabiles sunt longitudine. [g] Igitur & circuli diametrorum A, C, incommensurabiles sunt.

e 2. duodecimi.
f 11. quinti.
g 10. deci.

IAM verò si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; descriptæ super A, C, [h] habebunt pyramides, atque prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cùm rectilineæ illæ figuræ incommensurabiles sint, vt modò est demonstratum; [i] incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata.

h 5. 6. vel 7. duodecimi
i 10. decimi

QVOD si coni, vel cylindri æquè alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, C, [k] habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cùm ergo circuli ostensi sint incommensurabiles; [l] Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non solùm lineæ, & superficies incommensurabiles, verùm etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum.

k 11. duodecimi.
l 10. decimi

EADEM autem ratione, si rectæ A, & B, longitudine commensurabiles sint, [m] ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterq; descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensurabiles esse, [n] atque adeò & earundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modò eandem habeant altitudinem, vt perspicuum est.

m 10. deci.
n 5. 6. 7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM VNDECIMVM:

& Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POSTQVAM Euclides in prioribus sex libris abundè de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, vsurpauit; & in subsequentibus verò tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearum commensurabilium, atque incommensurabilium, quas idcirco luculentissimè in libro decimo deinde exposuit, vt constructio, atque natura quinque corporũ regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissimè disseritur, perfectius posset cognosci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo, eam partem Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat, proprioq; vocabulo Stereometria est appellata.

EXPLICAT autem prius, more suo, voces ad eam rem perneccessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemq; sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita vt tres dimensiones possideat, vnam quidem secundùm longitudinem, aliam verò secundùm latitudinem, & tertiam secundùm profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemue, appellari solidum, siue corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantùm habens, linea; quæ verò longitudini latitudinem adiicit, superficies vocatur, vt in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt rectè intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod è loco in locum moueri; hoc enim describit vestigium quoddam longum tantùm, hoc est, lineam, propterea quòd punctum omne est magnitudinis expers; vt autem percipiamus superficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri; hæc enim describet vestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem linea, latum verò propter motum illum, qui in transuersum est factus; carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditam; consultum, vt concipiamus superficiem aliquam æqualiter eleuari, siue in transuersum moueri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundum verò seu crassum, propter eleuationem illam, seu motum superficiei. Hæc ergo quantitas, solidum siue corpus vocatur. Neque verò alia quantitas quarta distincta à linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quòd triplex tantùm dimensio possit assignari, vt perspicuè in cõmentariis, quos in Sphæram Ioannis de Sacro Bosco conscripsimus, à nobis fuit demonstratũ ex Ptolemæo in libello de Analemate.

II.

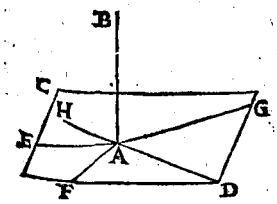
SOLIDI autem extremum, est superficies.

QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, superficies verò lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cùm enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

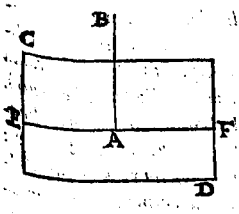
LINEA recta est ad planum recta, cùm ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

VT linea recta A B, plano C D, insistens, ita vt B, punctum sit in sublimi extra planum C D, at punctum A, in ipso plano, tùm demum dicetur recta, seu perpendicularis ad planum C D, cùm rectos effecerit angulos cum lineis A E, A F, A D, A G, & cum omnibus aliis, quæ in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt A B, æqualiter insistat plano C D, & non magis in vnam partem, quàm in aliam



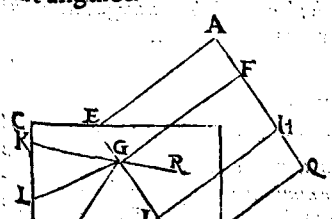
in aliam inclinet. Nam producta recta D A, ad H, cùm angulus B A D, ponatur rectus, erit quoque ei deinceps B A H, rectus, ideóque illi æqualis. Eadémque ratione protracta qualibet linea in plano C D, faciet A B, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quòd si fieri posset, vt A B, cum vnâ linea ex A, in plano C D, educta, non efficeret angulum rectum, etiamsi cum aliis omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur A B, recta ad planum C D. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et è contrario, vt rectè concludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.

Vt autem recta quæpiam plano cuicunque insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamq; tangentibus, satis est, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, sed se mutuò secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc rectè colligitur, eam cum omnibus aliis rectos quoque angulos efficere, vt perspicuum fiet ex propositione 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnam: quia si duæ lineæ componant vnam rectam lineam, non necessariò efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus aliis rectos conficere angulos. Recta enim A B, insistat plano C D, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis A E, A F, quæ rectam vnam lineam componant. Dico A B, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos constituere; atque idcircò non esse rectam ad planum C D. Hoc autem perspicuum est, cùm A B, circa E F, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modò sit plano propinquius, modò ab eodem remotius; nihilominus tamen ipsa cum E F, semper eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quòd si eadem A B, cum duabus angulum componentibus, quales sunt A G, A D, in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cum omnibus aliis rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucidè demonstrabitur propos. 4. huius libri.



IIII.

PLANVM ad planum rectum est, cùm rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

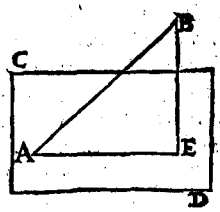


INSISTAT planum A B, plano C D, ita vt linea A Q, sit in sublimi, hoc est, extra planum subiectum C D, at E B, in ipso eodem plano: Sit autem horum planorum communis sectio E B, quæ, vt demonstrabitur propositione 3. huius libri, recta erit linea. In hac autem sumptis quotcunque punctis G, I; ex ipsis in plano A B, ducantur G F, I H, perpendiculares ad communem sectionem E B. Si igitur lineæ F G, H I, ad planum alterum C D, rectæ fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis G K, G L, G M; I N, I O, I P, & cum aliis omnibus in plano C D, à punctis G, & I, ductis; dicetur planum A B, ad planum C D, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quàm in alteram, sed æquabiliter illi insistet. Si enim K G, producatur ad R, cùm angulus F G K, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps F G R, rectus; ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano C D, fient vtrobique à lineis F G, H I, anguli æquales. Quare planum A B, æquabiliter plano C D, insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoq; esse ad alterum planum. Et contra, vt colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.

V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio est, cùm à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea, & adiuncta comprehensus.

INSISTAT recta A B, plano C D, non ad angulos rectos, sed inclinata, ita vt punctum B, sit extra pla-

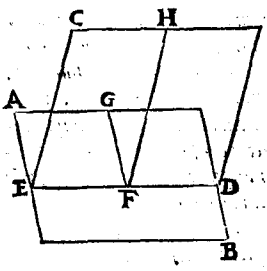


num in sublimi, punctum verò A, in plano. Deinde ex B, termino sublimi rectæ A B, intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis B E, faciens in plano punctum E; at q̃ ab E, ad A, adiungatur recta E A; erit q̃ necessariò angulus B A E, acutus, [a] cùm in triangulo A B E, duo anguli B A E, B E A, duobus sint rectis minores, & angulus B E A, rectus. Angulus igitur acutus B A E, comprehensus lineæ insistentæ A B, & adiunctæ A E, dicitur inclinatio rectæ A B, ad dictum planum C D; Ita vt tanta dicatur recta esse inclinatio lineæ A B, ad planum C D, quantus est dictus angulus acutus B A E.

a 17. primi.

VI.

PLANI ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in vtroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductę, rectos cum sectione angulos efficiunt.



PLANO namque A B, insistat planum C D, ita vt pars ad C, sit in sublimi extra planum A B, & pars ad D, in ipso plano A B, sit q̃ C D, inclinatum ad A B; & communis eorum sectio sit D E. Si igitur ad D E, communem sectionem ex eius puncto E, duæ perpendiculares ducantur; F G, quidem in plano A B, & F H, in plano C D; dicetur angulus acutus G F H, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani C D, ad planum A B, ita vt tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.

INTERDVM Geometræ angulum G F H, dicunt angulum inclinationis plani C D, ad planum A B, siue is acutus sit, siue rectus, obtususve: quamquã propriè solum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationem vnius plani supra aliud, quàm inclinationẽ vnius ad alterum; obtusus verò recessum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu eleuationem vnius plani supra alterum, generaliter dici consueuit à plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cuiusmodi est angulus G F H, siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

VII.

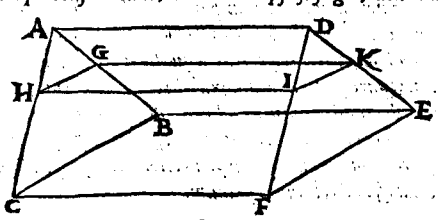
PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cùm dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON obscura est hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, at q̃ adeò à recto magis recesserit.

VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunque partem, etiam infinitè, producantur; hoc est, siue ad dexteram, siue ad sinistram, & siue sursum, siue deorsum, &c. Sunt enim quædam plana, quæ nec ad dexteram, nec ad sinistram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda: quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coëunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscissum; remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinitè ad dexteram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa coëunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.



SIT enim tectum quodpiam A B C D E F, contentum duobus planis A B E D, A C F D, cuius basis B C F E; auferatur q̃ fastigium A G H D K I. Quo facto, perspicuum est, reliqua plana G B E K, H C F I, non conuenire inter se, si ad partes G B, H C, vel ad partes K E, I F, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cùm producta ad partes G H, K I, conueniant in fastigio A D. Vt igitur plana aliquando dicantur parallela, necesse est, vt in nullam partem producta inter se conueniant. Sicut autẽ lineæ in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum, at q̃ deorsum. Itaque duo plana quæcunque, vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta coëunt: lineæ verò rectæ, vel sunt parallelæ, vel ad alteram partem protractæ conueniunt, si nimirum in eodem existant plano, vel tandem nec sunt parallelæ, neq̃ vnquã conueniunt, si videlicet in diuersis sint planis, & in transuersum positæ. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cùm in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.

IX.

SIMILES ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides ſimiles figuras ſolidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis ſimilibus definiendis: Satius tamen eſſe indicauit, vt breuitati conſulens, eas ex ſimilibus planis multitudine æqualibus deſcriberet; præſertim quòd ex ſimilitudine planorum ſtatim conſequatur & angulorum ſolidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cùm illos conſtituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum ſimilitudinem.

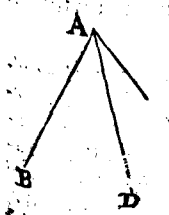
X.

AEQVALES, & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

QVOD ſi plana ſimilia, quibus corpora ſimilia ex præcedenti definitione circumſcribuntur, fuerint æqualia, ſingula ſingulis, dicentur eiuſmodi figuræ ſolidæ non ſolùm ſimiles, verùm etiam æquales. Nam ſi animo concipiantur ſeſe penetrare mutuò huiuſmodi ſolida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac ſimilitudinem planorum. Ex ſimilitudine enim planorum infertur angulorum ſolidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem verò æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare ſolida illa omni ex parte ſibi mutuò congruent; ac propterea inter ſeſe exiſtent æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus eſt plurium, quàm duarum linearum, quæ ſe mutuò contingant, nec in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio.



DVÆ lineæ in eodem exiſtentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum, vt lib. 1. expoſuimus, qualis eſt angulus B A C, contentus duabus lineis A B, A C, in eodem plano conſtitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea A D, quæ non in eodem cum illis plano exiſtat, ſed punctum D, ſit in ſublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus ſolidus, ſiue corporeus. Idem contingeret, ſi quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum ſolidum conſtituentes, non debere in eadem ſuperficie exiſtere, quoniam videlicet, ſi tres lineæ A B, A C, A D, in eadem conſiſterent ſuperficie, non efficeretur angulus ſolidus ad punctum A, ſed planus duntaxat ex duobus planis B A D, D A C, compoſitus. Quòd ſi A D, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum, in quo ſunt A B, A C, iam non componeretur angulus planus totus ex B A D, D A C; immò circa punctum A, tres plani conſiſtent anguli B A D, D A C, C A B, qui, vt mox dicetur, ſolidum conſtituunt angulum. Idem dices, ſi plures fuerint lineæ, & idcircò plures quoq; anguli plani.

ALITER.

SOLIDVS angulus eſt, qui pluribus, quàm duobus planis angulis in eodē non conſiſtentibus plano, ſed ad vnum punctum conſtitutis, continetur.

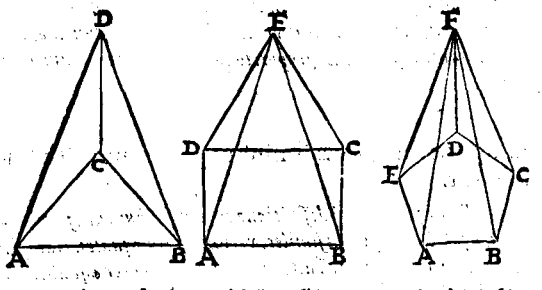
HÆC definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, præcedenti rectè intellecta. Cùm enim ſaltem tres lineæ in eodem non exiſtentes plano nec eſſariæ ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt, cùm minimum tres planos angulos requiri, vt angulus ſolidus efficiatur, vt ex ſuperiori figura apparet. Angulus enim B A D, in plano eſt, in quo recta A B, A D: & angulus D A C, in plano, in quo recta A D, A C: angulus denique C A B, in plano, in quo recta A C, A B; atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum A, conſtituitur. Quòd ſi tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum conſiſtant, in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus ſolidus, ſed totus quidam angulus planus, vt ſuprà diximus de lineis in eadem ſuperficie exiſtentibus. Neque verò ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiamſi in diuerſis ſint planis. Hiabit enim ſemper ex altera parte. Vnde neceſſe eſt, vt tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius angulus planus conſiſtat. Anguli porrò ſolidi exemplum clariſſimū nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coëunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Vbi manifeſtum eſt, ſi vna earum ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remanere q; tantùm duas ſuperficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his verò perſpicuum cuiuis erit, illos angulos ſolidos inter ſe eſſe æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiuſmodi anguli ſibi mutuò congruent, ſi ſeſe penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in primo libro, Euclides ex omnibus angulis planis ſolùm rectilineum aſſumpſit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quàm duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac definitione angulus coni, qui vnica ſu-

perficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera verò curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

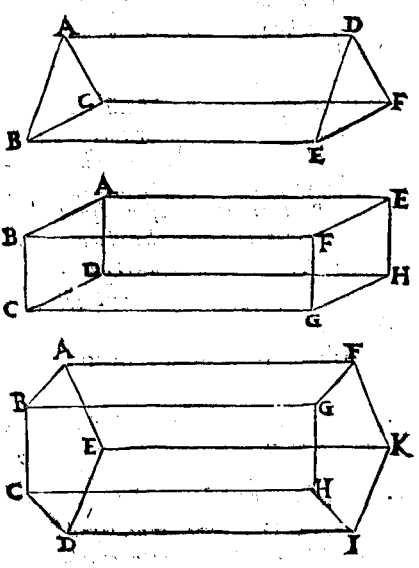
PYRAMIS est figura solida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum constituta.



VIDELICET figura solida à planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, constituta, appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cùm omnia ad vnũ punctum tendant; excepto plano, à quo omnia tendunt, quodq; puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem sumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Vt pyramidis triangularis, præter basin, triangula sunt ABD, ACD, BCD: Quadrangula verò ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela, alia verò parallelogramma.



FIGVRAE scilicet solidæ, quarum plana aduersa, & æqualia, & similia, & parallela sunt triangula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogramma verò ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG: dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud erit, quàm columna quædam laterata æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallelæ, siue hæ sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, & Vnde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quot latera, siue anguli, in vno quoque oppositorum planorum reperiuntur, vt figuræ indicant.

Ex his manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela, æqualia, similiaque, triangula sunt; reliqua verò tria parallelogramma. Quam quidem figurã solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cùm enim hæc figura sit solùm vna species prismatis, definitio autem tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt constat; præsertim quòd plurima demonstrationes in hoc libro, & duodecimo sequenti, ex æquo omnibus prismatibus conueniunt; perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantùm prismatis genus ex hac definitione colligunt. Sumpserunt autem fortasse hi auctores occasionem errandi, quòd Euclides & in propositione vltima huius libri, & in tertia, quarta, & quinta propositione, libri duodecimi, solùm de ea prismate loquatur, quòd duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, septimam propositionem libri duodecimi illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum oppositorum, eo quòd tali prismati solùm demonstratio illa conueniat. Quòd si sola ea figura, vt ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustrà dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cùm nullum aliud prisma daretur. Immò in corollario dictæ propositionis septimæ infert Theon, Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum illa basin habentis, & altitudinem æqualem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quauis rectilinea, æqualia tamen & similia

similia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundùm Theonem, atq; adeò secundùm Euclidem, cùm communi omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ, sint Euclidis. Accedit etiam, quòd à Theone in demonstratione propos. 10. lib. 12. apertissimè appellantur prismata omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & æqualia, & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua verò parallelogramma.

XIIII.

SPHAERA est, quando, semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in seipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumassumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum: ita & semicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit, quam Geometræ Sphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescès, à quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quòd omnes æquales existunt illi lineæ circumvolutæ: Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales: eo quòd omnes sunt semidiametro dicti semicirculi æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphæra definiri poterit hoc etiam modo.

SPHAERA est figura solida, vna superficie comprehẽsa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

CICERO *in libro de Vniuersitate de mundo loquens, eleganter hanc definitionem expressit, his verbis: Ergo globosus est fabricatus, quod σφαιροειδὲς Graci vocant, cuius omnis extremitas paribus à medio radiis attingitur.*

XV.

AXIS autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM sphæræ est idem, quòd & semicirculi.

XVII.

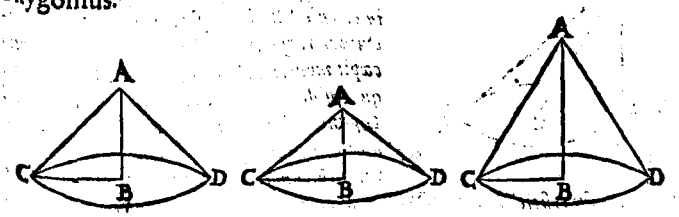
DIAMETER autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à sphæræ superficie terminata.

HAE tres definitiones non egent expositione; dummodò hoc solùm notetur, omnem diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæra circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si verò minor, Amblygonius: Si verò maior, Oxygonius.



Vt si triangulum rectangulum A B C, circa latus quiescens A B, quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionẽ expleat, describetur solida quædam figura, quæ continetur duabus superficiebus, circulari vna, ac plana, quam B C, latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit; & curua alia, eaq; conuexa, quam latus A C, recto angulo oppositum delineat. Hac igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.

QVOD si latus quiescens A B, æquale fuerit circumducto B C, vt in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus est. Cùm enim latera A B, B C, ponantur æqualia; [a] erunt & anguli B A C, B C A, æquales; qui cùm æquiualeant vni recto, eo quòd A B C, rectus est; erit angulus B A C, semirectus. Eodémque modò angulus B A D, ex parte opposita

a 5. primi.

semirectus erit. Quare totus angulus C A D, rectus erit. Si verò quiescens latus A B, minus fuerit circumducto B C, vt in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet an-
a 18. primi. *gulus ad verticem A, obtusus existit. Cùm enim B C, latus latere A B, sit maius; [a] erit angulus B A C, maior angulo B C A. Quare cùm hi duo aequipolleant vni recto, propterea quòd angulus A B C, ponitur rectus, erit B A C, semirecto maior. Similiter B A D, maior erit semirecto; atque adeò totus C A D, recto maior erit. Si denique quiescens latus A B, maius fuerit circumducto B C, vt in tertia figura, appellabitur conus descriptus Oxygonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus est. Cùm enim latus A B, maius sit*
b 18. primi. *latere B C, [b] erit & angulus B C A, angulo B A C, maior. Quapropter cũ hi duo vni recto aequiualeant, quòd angulus A B C, rectus ponatur, erit B C A, semirecto maior, ideoq; reliquus B A C, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus B A D, minor esse semirecto. Igitur totus C A D, recto erit minor.*

X I X.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono superius descripto, axis est recta quiescens A B.

X X.

BASIS verò coni est circulus, qui à circumducta linea recta describitur.

NIMIRVM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est B C, in superioribus conis. Itaq; huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

QVONIAM verò Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ad basim rectus non est; placuit ex Apollonio Pergaeo adducere generalem coni descriptionem, quae & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quòd in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, quae Euclides de recto cono ostendit, vt ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui nó sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: Superficiem à recta linea descriptam, constantemq; ex duabus superficiebus ad verticem inter se aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quae eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiem.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quae per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentam circulo, & conica superficie, quae inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & superficiei conicae vertex est.

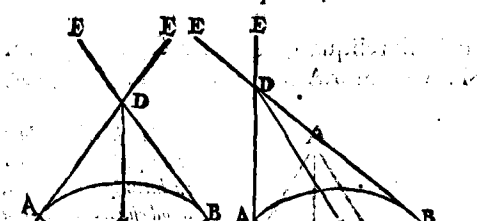
AXEM, rectam lineam, quae à vertice ad circuli centrum producitur.

BASIM, circulum ipsum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

SCALENOS verò, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

HAEC autem omnia ita explicat Eutocius in Commentarijs, quos in Apollonium scripsit.

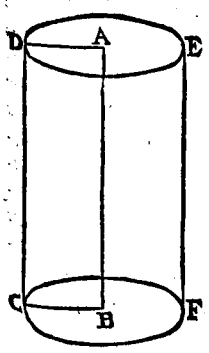


SIT circulus A B, cuius centrum C, & punctum aliquod sublime D; iunctaq; D B, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea D B, feratur eousque in circuli A B, circumferentia, quousque punctum B, rursus in eum locum restituatur, à quo cœpit moueri: describet superficiem quandam, quae quidem constat ex duabus superficiebus ad D, punctũ sese tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam superficiem, quae & augetur in infinitũ, cùm recta linea D B, ipsam describens in infinitum producitur. Verticem superficiei dicit punctum D. Axem, rectam D C. Conum verò appellat figuram contentam circulo A B, & ea superficie, quam D B, sola describit. Coni verticem, punctum D, Axem D C. Basim A B, circulum. Quòd si D C, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

X X I.

CYLINDRVS est, quando rectanguli parallelogrammi manẽte vno latere eorum, quae circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde coeperat moueri, circumassumpta figura.

VELVT



VELVTI si rectangulum parallelogrammum A B C D, circa latus quiescēs A B, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera A D, B C, describūt; & altera curua, eaq; conuexa, quam latus C D, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta A B, in superiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES verò cylindri sunt circuli à duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

QVALES sunt circuli à lateribus A D, B C, oppositis descripti.

EVCLIDES porrò solùm cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atq; de hoc solùm in lib. 12. est disputaturus. Cùm igitur nos eadem ferè theoremata, ex alijs Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt complectitur tam rectum, quàm inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de Sectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea, diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cœpit: Superficies, quæ à circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

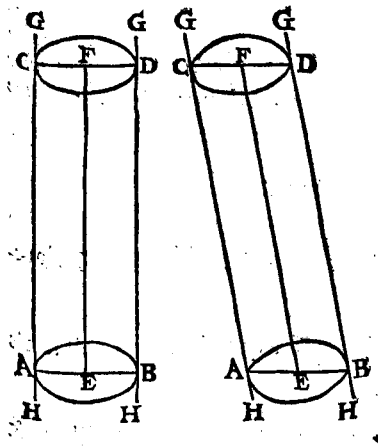
CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

LATVS autem cylindri, linea, quæ cùm recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit; quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

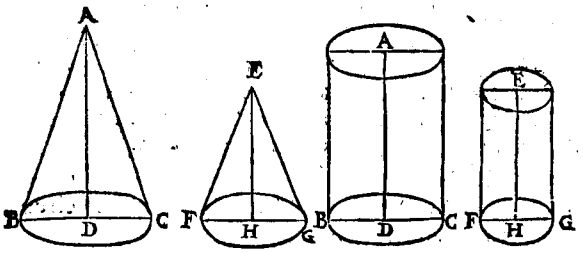


SINT duo circuli æquales, & æquidistātes A E, C D, quorum centra E, F, & diametri æquidistantes quoque A B, C D: iunctaq; recta A C, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri A B, C D, circa centra E, F, in planis circulorū semper æquidistantes, vnà cum recta A C, circumducantur, donec ad eum locum restituantur, vnde moueri cœperunt: describetur à linea A C, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cùm recta A C, ipsam describens in infinitum producitur. Cylindrum verò appellat figuram A B D C, circulis A B, C D, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola A C, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos A B, C D. Axem, rectam E F, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam A C. Quòd si axis E F, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

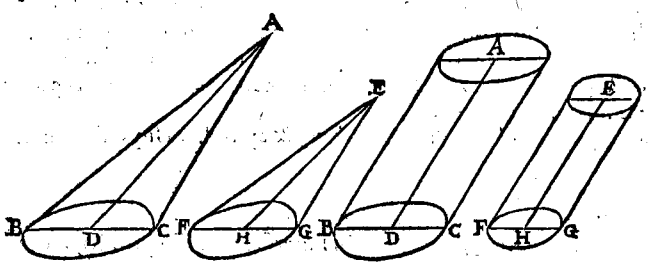
XXIIII.

SIMILES coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundùm duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes verò eosdem secundùm profunditatem, seu altitudinem similes esse de-



monſtrant. Sint enim duo coni A B C, E F G; Item duo cylindri in conis autem axes A D, E H, & baſium diametri B C, F G; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit, vt axis A D, ad axem E H, ita B C, diameter baſis ad F G, diametrum baſis, dicentur tam coni, quàm cylindri ſimiles inter ſe; quia videlicet hac ratione tam ſecundùm longitudinem et latitudinẽ ſimiles ſunt, quàm ſecundùm profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones proportionales ſunt: Vel etiam, quia triangula A D B, E H F, ex quorum reuolutione deſcripti ſunt coni, nec non rectangula A B, E F, quorum conuerſiones cylindros effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cùm enim ſit vt A D, ad E H, ita
a 15. quinti. B C, ad F G; Sit autem vt B C, ad F G, [a] ita dimidia B D, ad dimidiam F H; erit quoque vt A D, ad E H, ita D B, ad H F: & permutando vt A D, ad D B, ita E H, ad H F. Quare tam in triangulis, quàm in rectangulis latera, circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt; ac propterea & triangula & rectangula
b 6. ſexti. ſimilia inter ſe erunt: Triangula quidem, [b] propterea quòd triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula ſunt, [c] ideoq; latera omnia cir-
c 5. ſexti. d 34. primi. ca angulos æquales habent proportionalia, atque adeò inter ſe ſimilia exiſtunt: Rectangula verò, [d] eo quòd reliqua duo latera duobus lateribus A D, D B, ſunt æqualia, oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.



QVOD ſi coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit.) dicentur ij tum demum ſimiles, quando eorum axes, et diametri baſium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi ſunt, vt in defin. 5. dictum eſt. Sint enim coni inclinati, ſimiliter & cylindri A B C, E F G: In conis autẽ axes ſint A D, E H, & baſium diametri B C, F G; ſimiliter & in cylindris. Itaq; ſi fuerit tam in conis, quàm in cylindris, vt A D, ad E H, ita B C, ad F G, extiterintq; anguli inclinationum A D B, E H F, tam in conis, quàm in cylindris, æquales inter ſe, dicentur & coni inter ſe, & cylindri quoque inter ſeſe ſimiles: quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimenſiones ſunt proportionales, vt ſuprà diximus, & rurſus tam triangula A D B, E H F, quàm rectangula A B, E F, quorum conuerſiones conos, & cylindros effecerunt, inter ſe ſimilia ſunt, veluti in rectis conis, cylindriſq; demonſtrauimus. Eſt enim prorſus eadem demonſtratio, cùm anguli A D B, E H F, ponantur æquales, licèt non ſint recti.

XXV.

CVBVS eſt figura ſolida, ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDVM eſt figura ſolida, ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM eſt figura ſolida, ſub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

DODECAEDRVM eſt figura ſolida, ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

ICOSAEDRVM eſt figura ſolida, ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

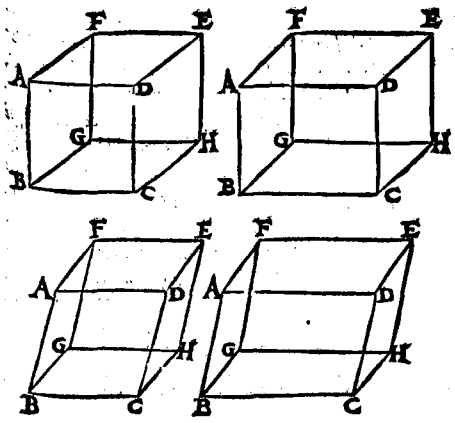
HAEC ſunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quòd omnia plana, quibus continentur, æqualia ſint.

sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quòd Plato in Tymæo quinque mundi corpora, quæ simplicia à Philosophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aërem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat, vt in sphæra Ioannis à Sacro Bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraëdri verò propos. 13. Octaëdri deinde propos. 14. Dodecaëdri autem propos. 17. Icosaëdri denique propos. 16. Vbi planius perfectiusq; definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet secundùm eorum soliditatem possit conficere. Neque verò aliud corpus regulare, præter quinque illa, dari potest, vt demonstrabimus ad finem lib. 13.

Qvoniam verò frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneq; corporũ regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit Parallelepipedum, quidq; sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt, contenta.

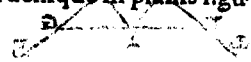


Velvti solida figura comprehẽsa sex quadrilateris A B C D, D E F A, A B G F, F G H E, E D C H, H C B G, quarũ oppositæ A C, F H; Item D F, C G; Item A G, D H, sunt parallela, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa: quæ quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur propos. 24. huius libri.

Svnt autem tot parallelepipedorũ genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedũ illud, cubus, respondebitq; quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quòd si sex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neq; rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantùm, vel æquilatera tantùm, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterùm quodcunq; parallelepipedum vocari etiã poterit Prisma, vt ex defin. prismatis constat.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.



XXXII.

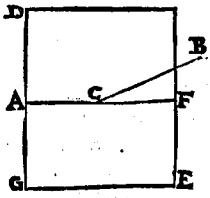
SOLIDA figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

Non est necesse, vt anguli interioris figuræ constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cùm interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quàm interior: sed satis est, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figuræ exterioris.

Vervm duæ hæ postremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusq; mutuis corporum regularium copiosè agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

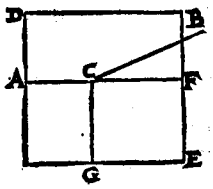
RECTAE lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam verò in sublimi.



SIT enim, si fieri potest, rectæ lineæ AB, pars quidem AC, in subiecto plano DE, pars verò CB, in sublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta verò omnia partis CB, supra planum DE, existant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipsi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum posita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent segmentum AC. quod est absurdum, vt in pronunciato 10. libri 1. demonstrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam verò in sublimi. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HAEC est communis demonstratio interpretum. Sed fortasse dicet aliquis, in ea aliquid desiderari, nempe vt ostendatur, rectæ AC, esse aliquam rectam in plano DE, in directum, & continuum positam. Qui enim concedit, rectæ AB, partem quidem AC, esse in plano DE, partem verò CB, in sublimi, vtique negabit, rectæ AC, in plano DE, dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuum positam esse fatetur ipsi AC. Veruntamen ei, qui sic dubitat; respondendum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam, posse in eodem vlterius produci in rectum & continuū, cùm plana superficies sit illa, quæ ex æquali suas interiacet lineas, hoc est, quæ recte & æqualiter semper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem si AC, in plano DE, producatur vsque ad F, erit CF, recta recte AC, in continuum & directum posita. Verùm demonstrauimus iam id ipsum Geometricè, in plano videlicet DE, ipsi AC, dari posse aliam rectam, quæ cum ipsa vnam rectam lineam constituat, quamuis quis dicat, AB, esse



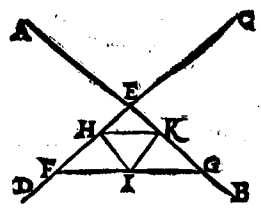
a 11. primi. *quoque rectam, eiusq; partem AC, in plano DE, partem verò CB, in sublimi esse positam.* [a] *Ducatur enim in plano DE, ipsi AC, perpendicularis CG; & in eodem plano ipsi CG, perpendicularis CF. Dico CF, esse ipsi AC, positam in continuum & rectum. Cùm enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos*

b 14. primi. *rectos angulos constituant ACG, FCG, ex constructione;* [b] *erunt AC, & FC, in directum & continuum positæ. Quamobrem etiamsi quis contendat, AB, esse rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, subiecto, pars autem CB, in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ tum AC, vnam rectam constituat lineam; atque adeò duæ rectæ AB, AF, segmentum commune habebunt AC. Quod est absurdum.*

HINC fit, omnes partes cuiusuis rectæ lineæ, hoc est, totam rectam lineam, in vno existere plano.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.



RECTAE lineæ AB, CD, se mutuò secent in E, & in EB, ED, sumptis punctis F, & G, vtcumque ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno esse plano; Item rectas AB, CD, in vno quoq; plano existere. Si enim triangulum EFG, pars quædam, nimirum EHIG, in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in sublimi, vel contrà; Existent quoque rectarum EF, GF, partes quidē EH, GI, in vno plano, partes verò HF, IF, in sublimi, vel contrà. quod fieri non posse, iam suprà [a] demonstratum est.

a 1. vndec.

Quòd si eiusdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur esse, pars autem GIK, in sublimi, vel contrà; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes verò KG, IG, in sublimi, vel contrà. Si deniq; eiusdem trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur esse plano, pars verò EHK, in sublimi, vel contrà; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel contrà. Quæ omnia absurda sunt, [b] vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

b 1. vndec.

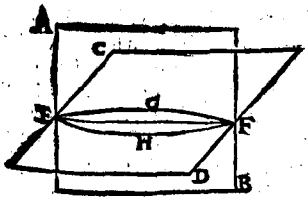
QVIA verò, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG, [c] in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes verò aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulum EFG, consistere demōstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuò secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

c 1. vndec.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI duo plana se mutuò secent, communis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuò plana AB, CD, sitque communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectam.



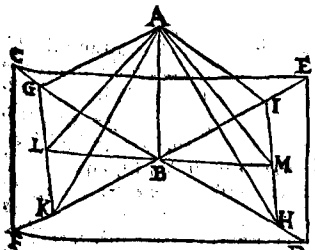
rectam. Si enim nō credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cùm eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. libri ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea: Ac proinde si duo plana se mutuò secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.

ALITER. Secent se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si verò EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cùm eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantùm plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF, includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeò communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuò secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.



RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoq; rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cùm enim se mutuò secent in B; [a] erunt ipsę in vno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK; ducanturq; rectæ GK, IH; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planū rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; [b] & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cùm sint ad verticem B, oppositi, æquales: [c] Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales. *a 2. vndec.* *b 15. primi.* *c 4. primi.*

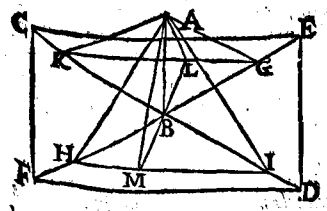
RVRSVS [d] cùm anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales: Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex constructione. [e] Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt. *d 15. primi.* *e 26. primi.*

PRAETEREA cùm latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, [f] erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK. *f 4. primi.*

AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, triāguli, AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; [g] erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales. *g 8. primi.*

ITAQVE cùm latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus; [h] erunt quoque bases AL, AM, æquales. *h 4. primi.*

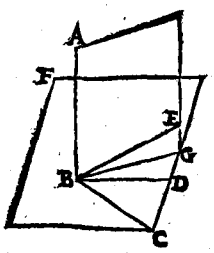
QVONIAM denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; [i] erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehēsi, æquales; qui cùm sint deinceps, recti erūt, ex definitione 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit, cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Eademque ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter puncta G, I, & K, H, ductę sint, dummodò rectæ GI, KH, iungantur: vel certè literæ dispo nantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen LM, non ducitur à sinistra in dextram, vt in priori figura, sed à superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuò secantibus, &c. Quod demonstrandum erat. *i 8. primi.*



THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuò tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.



a 2. vndec.

b 2. vndec.

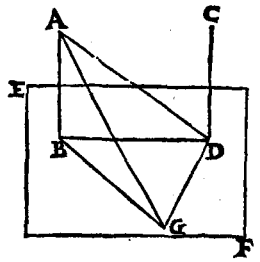
c 3. vndec.

d 4. vndec.

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse. [c] Cùm enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quòd productæ ad partes B, se mutuò secent in B; sint BC, BD, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. [b] Quoniam verò duæ rectæ AB, BE, in vno sunt plano, cùm se mutuò secent in B; sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuò occurrunt in B; necessariò producta se mutuò secabunt. [c] Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia verò recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; [d] erit propterea & plano FC, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ BG, quæ ipsam in B tangit, ex defin. 3. huius libri. Quare recti anguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto, æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis BC, BD, in vno plano FC, existentibus, non erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuò tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.



e 4. primi.

f 8. primi.

SINT duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius libri. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturq; æquales AB, DG. Connectátur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; [e] erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA; Est autem & basis communis AG; [f] Erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam verò ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos.

g 5. vndec.

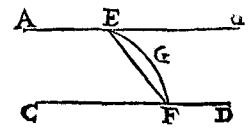
h 2. vndec.

i 28. primi.

[g] Quare rectę DB, DA, DC, in vno erunt plano; hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: [h] Est autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cùm anguli interni ABD, CDB, sint recti, [i] erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.



k 3. vndec.

IN parallelis AB, CD, sumantur vtcunque duo puncta E, & F, quę recta connectátur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extrà: secet iam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, [k] quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cùm habeant eosdem terminos E, & F, superficiē claudent. Quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.

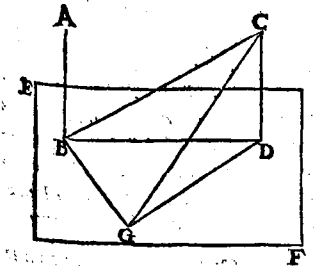
SCHOLIVM.

HAEC eadem propositio vera est, etiamsi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non sint, dummodò in eodem plano existant, vt manifestum est ex demonstratione.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ AB, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF; erit per defin. 3. huius libri, angulus



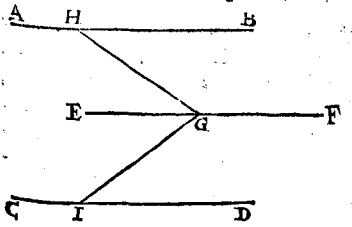
angulus CDB, rectus: [a] Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD; ponanturq; æquales BG, CD. Coniungátur deinde rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex constructione; & angulí quoque ipsis contenti, CDB, GBD, æquales, nimirum recti; [b] Erunt bases CB, GD, æquales. Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, BC, trianguli GBC; & basis est cómunis CG; [c] Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus cõprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, se mutuò secantibus in B, (Si namque producerentur DB, CB, secarent sese in B, ob angulum CBD.) ad rectos angulos existit; [d] ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: [e] Est autem in hoc eodem plano recta AB; propterea quòd rectæ BD, BC, in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB, CD; cùm puncta B, C, D, existãt in parallelis AB, CD. Igitur & GB, recta rectæ BA, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cùm AB, recta sit ad rectas BG, BD; [f] erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.

a 29. primi.
b 4. primi.
c 8. primi.
d 4. vndec.
e 7. vndec.
f 4. vndec.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

QVAE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.



SINT rectæ AB, CD, ipsi EF, parallelæ; non sint autem in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoq; esse. Nam à quolibet pũcto G, rectæ EF, ad ipsam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF; at GI, in plano parallelarũ CD, EF. Quoniam igitur EG, recta est ad duas rectas GH, GI, se tangentes mutuò in G; [g] erit recta quoque ad planum per ipsas GH, GI, ductũ. Quamobrem cùm sint parallelæ AB, EF; & EF, sit recta ad planum per GH, GI, ductum; [h] erit quoq; AB, ad idem planum recta. Similiter cùm sint parallelæ CD, EF; sit autem EF, recta ad planum per GH, HI, ductum; [i] erit etiam CD, recta ad idem planum; [k] Atque proinde rectæ AB, CD, cùm rectæ sint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

g 4. vndec.
h 8 vndec.
i 8. vndec.
k 6. vndec.

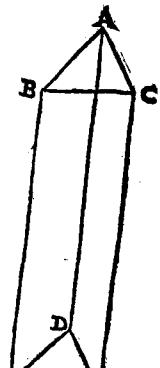
SCHOLIVM.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non esse in eodem plano cum recta EF, cui sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa EF; essent AB, CD, inter se parallelæ, ex 30. propos. 1. lib. Superuacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

10.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

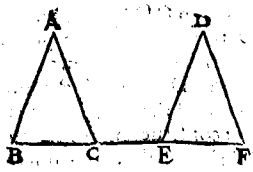


SINT rectæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, se tangentibus in D; non sint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipsis comprehẽsos esse æquales. Ponantur enim AB, DE, inter se æquales, & AC, DF, inter se; ducanturq; rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ sunt & æquales; [l] erunt quoq; BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cùm BE, CF, parallelæ & æquales sint eidem AD; [m] erũt etiam BE, CF, inter se parallelæ, & æquales: [n] Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, vt modò demonstrauimus; [o] Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, &c. Quod erat ostendendum.

l 33. primi.
m 9. vndec.
n 33. primi.
o 8. primi.

SCHOLIVM.

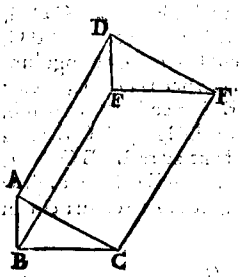
CONCLVSIO *huius theorematis vera etiam est, quando priores duæ*



lineæ in eodem sunt plano cum duabus posterioribus. Sint enim quatuor lineæ A B, A C, D E, D F, in eodem plano, sitq; A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F, parallelæ. Dico angulos B A C, E D F, esse æquales. Nam ponantur

a 29. primi *æquales A B, D E, & A C, D F; ducanturq; rectæ B C, E F, quæ aut in vna recta linea erunt constitutæ, aut non. Sint prius in vna recta B F. Quoniã igitur parallelæ sunt A B, D E,* a *æquales erunt anguli A B C, D E F, internus & externus. Similiter æquales erunt anguli A C B, D F E; Sunt enim*

b 32. primi *& A C, D F, parallelæ. Quare duo anguli A B C, A C B, trianguli A B C, æquales sunt duobus angulis D E F, D F E, trianguli D E F.* b *Igitur anguli quoque reliqui B A C, E D F, æquales erunt. Quod est propositum.*

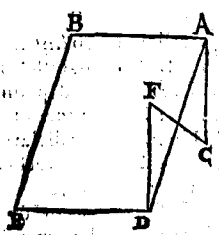


c 33. primi. *Non sint iam B C, E F, in vna recta linea constitutæ. Ductis rectis A D, B E, C F, cùm A B, D E, sint parallelæ & æquales;* c *erunt & A D, B E, parallelæ & æquales. Eadem ratione A D, C F, parallelæ erunt & æquales, eò quòd A C, D F, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & B E, C F, eidem A D, pa-*

d 30. primi e 33. primi *rallelæ existentes & æquales,* d *inter se parallelæ erunt & æquales:* e *Ac proinde parallelæ & æquales quoq; erunt B C, E F. Itaque cùm duo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, trianguli*

f 8. primi. *D E F; & basis B C, basi E F,* f *erunt anguli B A C, E D F, contenti dictis lateribus, æquales. Quod est propositum.*

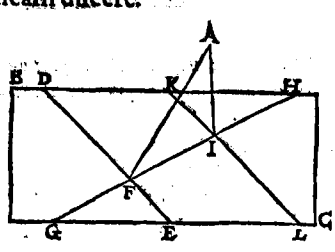
Caeterum vt conclusio huius theorematis rectè ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (siue omnes sint in eodem plano, siue non,) vt tres rectæ A D, B E, C F, nullatione se mutuò secent; vt ex prima & vltima figura apparet. Nam aliàs conclusio vera non erit.



Sunt enim rectæ A B, A C, rectis D E, D F, parallelæ in hac figura; & tamen anguli B A C, E D F, quos comprehendunt, non sunt æquales, cùm ille sit acutus, hic verò obtusus. Hoc autem ideò euenit, quòd A D, C F, se mutuò secant. Vnde quamuis A C, D F, sint parallelæ & æquales, non tamen propterea A D, C F, quæ eis coniungunt, parallelæ sunt & æquales, propterea quòd eas non coniungunt ad easdem partes, vt vult propos. 33. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in superioribus figuris seruatur.

11. PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.



a 12. primi. b 11. primi. c 12. primi. *Sit à puncto A, in sublimi ad subiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta vtcunque D E;* a *ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F;* b *Et in plano B C, per F, ad D E, perpendicularis ducatur G H;* c *ad quam ex A, perpendicularis demittatur A I. Dico A I, esse perpendicularem ad planum subiectum B C.* d *Ducta enim in plano B C, per I, ipsi D E, parallela K L; cùm D E, ad rectos angulos sit duabus F A, F H, ex constructione,* e *ac proinde recta ad planum per*

d 31. primi. e 4. vndec. f 8. vndec. g 2. vndec. h 4. vndec. *F A, F H, ductum;* f *erit quoque K I; ad idem planum per F A, F H, ductum recta.* g *Quoniam verò A I, in eodem est cum rectis F A, F H, plano, tangitque rectam K I, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus K I A, rectus; atque adeò A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F.* h *Igitur A I, ad planum B C, recta erit. A dato ergo puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendum erat.*

SCHOLIVM.

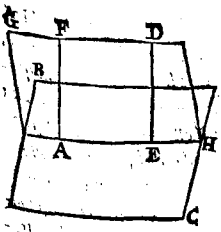
Quod si quando A I, ad G H, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem sit, quæ A F, ad

a 4. vndec. *D E, ducta perpendicularis;* a *erit ipsa A F, ab initio ad D E, ducta perpendicularis ad subiectum planum B C, perpendicularis, cùm perpendicularis sit ad vtramque D E, G H.*

12. PROBL. 2. PROPOS. 12.

Dato plano à puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

Sit

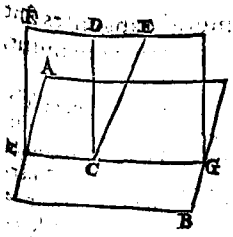


SIT à dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendicularis ad datum planum B C. [a] Ex quouis puncto D, in sublimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E, quæ si ceciderit in A, punctum factum erit, quod proponitur: Si verò ceciderit in aliud punctum E, extensa recta per E, & A, [b] ducatur per A, ipsi D E, parallela A F, in plano G H, per D E, E A, ducto. Dico A F, rectam esse ad planum datum B C. Cùm enim D E, A F, parallelæ sint; & D E, recta ad planum B C, ex constructione; [c] erit quoq; A F, ad idem planum B C, recta. Itaque dato plano, à puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.

[a] 11. vndec.
[b] 31. primi.
[c] 8. vndec.

THEOR. 11. PROPOS. 13. 13.

DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.



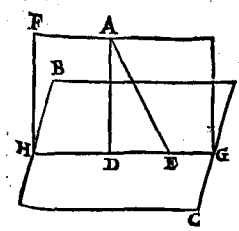
SIT datum planum A B. Dico à dato eius puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum A B. Ducantur enim, si potest fieri, duæ perpendiculares C D, C E, ad planum A B; & per C D, C E, [a] quæ in vno, eodemque plano sunt, ducatur planum F G, secans planum A B, per rectam lineam G H. Cùm igitur E C, D C, rectæ sint ad planum A B; erunt per defin. 3. huius lib. anguli E C G, D C G, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.

[a] 2. vndec.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum A B, duæ perpendiculares C D, C E. Cùm igitur duæ D C, E C, rectæ sint ad idem planum A B; [b] erunt ipsæ inter se parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

[b] 6. vndec.

SCHOLIVM.



EODEM modo à puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum B C, si fieri potest, duæ perpendiculares A D, A E. Ducatur per A D, A E [a] *quæ in vno plano sunt, planum F G, secans planum B C, per rectam G H. Cùm igitur A D, A E, rectæ sint ad planum B C, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli A D E, A E D, recti interni in triangulo A D E. Quod est absurdum;* [b] *cùm sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.*

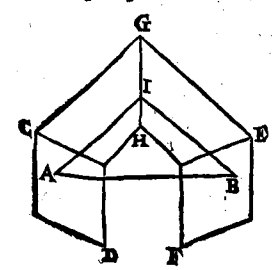
[a] 2. vndec.
[b] 17. primi.

ALITER. Si A D, A E, rectæ sunt ad planum B C; [c] *ipsæ erunt inter se parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.*

[c] 6. vndec.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.



SIT recta A B, ad plana C D, E F, recta. Dico parallela esse plana C D, E F. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E; [a] & faciant communem sectionem rectam lineam G H: In qua sumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ I A, I B, in planis G C D, G E F. Quia igitur A B, recta ponitur ad plana G C D, G E F; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli I A B, I B A, recti, in triangulo A B I. [b] Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana C D, E F, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadē recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

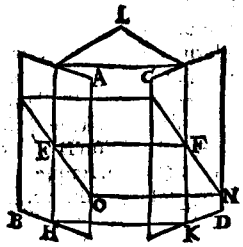
[a] 3. vndec.
[b] 17. primi.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

SINT duo plana parallela A B, C D, ad quorum alterum A B, recta sit linea recta E F. Dico E F, rectam quoq; esse ad planum reliquum C D. Secet enim planum aliquod, nempe G K, plana A B, C D, per lineam rectam E F, incedens, faciat q; communes sectiones cum dictis planis rectas G H, I K, eruntq; anguli G E F, H E F, recti, per definitionem 3. huius libri. Ac proinde recti etiam erunt anguli I F E, K F E. (Si enim



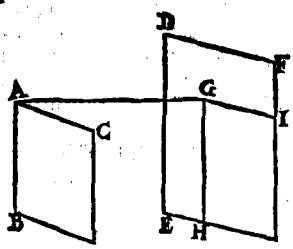
a 1. vndec.

b 4. vndec.

alter eorum, nempe I F E, dicatur acutus; erunt duo anguli G E F, I F E, duobus rectis minores. Quare recta E G, F I, ad partes G, I, in plano G K, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeò & plana A B, C D, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; [a] *cùm tota recta H G L, sit in vno plano, nempe in A B, producto; Item tota recta K I L, in vno quoque plano, nimirum in C D, protracto. Quod est absurdum, cùm ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli I F E, K F E.) Eodem modo si aliud planum, videlicet M N, eadem plana secet per E F, facietis alias rectas, communes cum ipsis sectiones M O, P N; erunt anguli P F E, N F E, recti. Itaque cùm E F, sit recta ad duas rectas I K, P N,* [b] *recta quoque erit E F, ad planum C D, per ipsas ductum. Quod est propositum.*

15. **THEOR. 13. PROPOS. 15.**

Si duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.



a 11. vndec.

b 31. primi.

c 9. vndec.

d 29. primi.

e 4. vndec.

f 14. vndec.

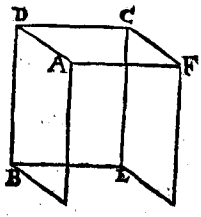
Sint duæ rectæ lineæ A B, A C, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis D E, D F, se tangentibus in D, existentibus; in alio cum illis plano. Dico & plana B C, E F, per ipsas ducta, esse parallela. [a] *Ex A, enim deducatur ad planũ E F, perpendicularis A G, occurrens plano E F, in puncto G.* [b] *Deinde in plano E F, per G, ducantur G H, G I, ipsis D E, D F, parallelæ. Quoniam igitur rectæ A B, G H, parallelę sunt ipsi D E,* [c] *erunt & A B, G H, inter se parallelæ:* [d] *Ac proinde anguli B A G, A G H, duobus rectis æquales: Est autem A G H, rectus, ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus B A G. Simili argumento concludes, angulum C A G, rectum esse. Itaque cùm recta G A, sit recta duabus A B, A C;* [e] *recta quoque erit G A, ad planum B C, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum E F, ex constructione.* [f] *Igitur parallela sunt plana B C, E F. Si ergo duę rectæ lineæ se mutuò tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

Quod si perpendicularis ex A, ad planum E F, ducta cadat in ipsummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quòd in plano E F, non sunt ducenda aliæ parallelæ. Vt si lineæ G H, G I, ponantur parallelæ rectis A B, A C, ita vt A G, ad planum H I, per G H, G I, ductum perpendicularis, cadat in G; ostendemus, vt prius, G A, esse rectam ad planum B C, per rectas A B, A C, ductum, &c.

Ex hoc theoremate non difficile erit problema subsequens: Videlicet.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.



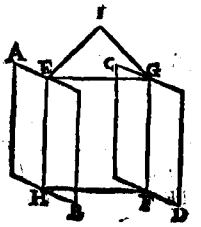
a 31. primi.

b 15. vndec.

Datum planum sit A B, punctumq́, extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum, plano A B, parallelum. In plano A B, ducantur vtcunque duæ rectæ D B, D A, se tangentes in D, puncto, à quo ad C recta ducatur D C. Deinde in plano B C, per rectas D B, D C, ducto, [a] *agatur C E, ipsi D B, parallela; Et in plano A C, per rectas D A, D C, ducto, fiat quoque C F, ipsi D A, parallela. Dico planum E F, per rectas C E, C F, ductum, parallelum esse plano dato A B. Cùm enim duæ rectæ D B, D A, se tangentes in D, duabus rectis C E, C F, se tangentibus in C, existentibusq́, in alio cum illis plano, parallelæ sint;* [b] *parallela erunt plana A B, E F, per ipsas ducta. Quod est propositum.*

16. **THEOR. 14. PROPOS. 16.**

Si duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illorum sectiones sunt parallelæ.



a 1. vndec.

Secentur plana A B, C D, parallela plano E F, per rectas E H, G F. Dico communes sectiones eorum E H, G F, esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cùm sint in plano E F, secante. Cõueniant igitur in puncto I. [a] *Quia ergo tota recta H E I, in vno est plano, nimirum in A B, producto; Item tota recta F G I, in vno quoq; est plano, videlicet in C D, producto; conuenient etiam plana A B, C D, producta ad I. Quod est absurdum, cùm ponantur parallela. Sunt igitur rectæ E H, G F, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.*

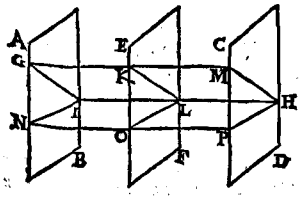
SCHO-

SCHOLIVM.

Hoc theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum, factæ ab alio plano secante, sint parallelæ, vt hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones factæ ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantùm sunt parallela, alia verò omnia in aliquam partem producta conueniunt.

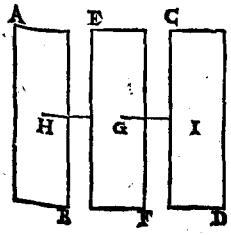
Porro ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.

QVAE eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.



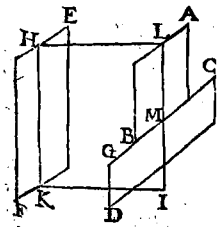
SINT duo plana AB, CD, plano EF parallela. Dico & AB, CD, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano GH, sintq; communes eorum sectiones recta GI, KL, MH. Secentur rursus alio plano NH, sintq; communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, vt duo plana secantia GH, NH, se quoque mutuò secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, secantur plano GH, [a] *erunt communes sectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL;* [b] *atque adeò parallelæ erunt inter se GI, MH. Non aliter ostendemus, parallelas esse NI, PH. Itaque cùm IG, IN, se mutuò tangentes in I, parallelæ sint rectis HM, HP, se tangentibus in H, existentibusq; in alio plano;* [c] *erunt plana AB, CD, per ipsas ducta, parallela. Quod est propositum.*

a 16. vndecimi. b 9. vndec. c 15 vndec.



ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta est ad planum EF, recta quoq; erit ad planum AB, sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propositionis 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cùm recta HI, sit recta ad plana AB, CD; [d] *parallela inter se erunt plana AB, CD. Quod est propositum.*

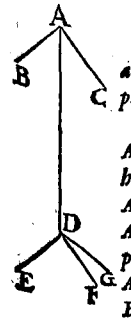
d 14. vndecimi.



QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantq; producta secundùm rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur parallela sunt plana AB, EF; [e] *erunt & communes sectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quam ob rem cùm recta LM, IM, parallelæ sint ipsi HK, existanti q; in eodem plano secante HI, & conueniant in M;* [f] *ipsæ erunt in rectum & continuum positæ, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficiet;* [f] *propterea quòd recta LI, in vno iaceat plano. Quod est propositum.*

e 16. vndecimi. f 1. vndec.

ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certè, si producta conueniant, vnum planum conficient.



PORRO conuersum quoq; propositionis 15. facilè demonstrabimus, hoc loco; videlicet.

SI in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius anguli lineæ vni alterius anguli parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modò ductæ sint ex eadem parte plani, per priores parallelas ducti.

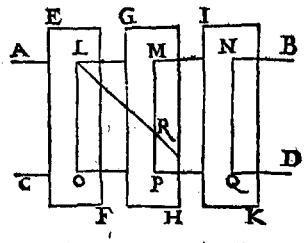
IN planis enim parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, sitq; AB, ipsi DE, parallela, & AC, DF, sint ad easdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque esse: hoc est, ductam rectam AD, planum per AC, AD, ductum, transire etiam per rectam DF; itavt AC, DF, sint communes sectiones factæ à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF, ductis. Hinc enim efficitur, [g] *sectiones AC, DF, parallelas esse. quod est propositum. Si namq; planum per AC, AD, ductum, non facit in illis planis parallelis sectiones AC, DF, faciat sectiones AC, DG,* [h] *quæ parallelæ erunt.* [i] *Igitur angulus EDG, angulo BAC, hoc est, angulo EDF, æqualis erit: quod est absurdum, cùm vnus sit totũ, & alter pars.*

g 16. vndecimi. h 16. vndecimi. i 10. vndec.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.



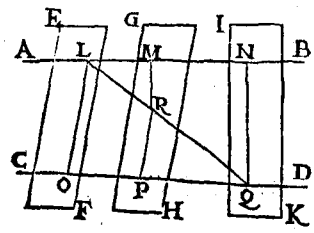
RECTÆ lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta, esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrés plano GH, in R, puncto, à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH. [a] Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam verò plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, [b] erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. [c] Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. vndec.
b 16. vndec.
c 2. sexti.

SCHOLIVM.

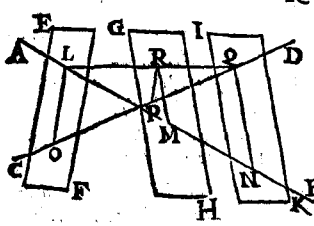
QVOD si data duæ rectæ AB, CD, sint in vno eodemq; plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, [a] quæ inter se parallelæ erunt, punctumq; R, in recta MP, existet, cùm sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atq; adeò in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionem planorum LOQN, GH.

a 16. vndecimi.



b 2. vndec.
c 1. vndec.

SI verò duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia [b] cùm triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namq; duo illa triangula in vno eodemq; plano existerent, essent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est contra hypothesim.) erunt rectæ RM, RP, in diuersis illis planis triangulorum; ac proinde vnam rectam non constituent; [c] aliàs in vno essent plano, quod est absurdum.

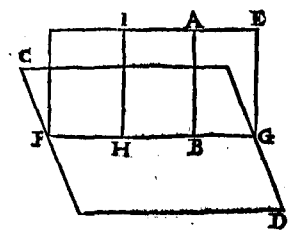


EADEM hac propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, non sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc MRP, semper erit vna linea recta, vt ab initium huius scholij demonstratum est, quãdo AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

NON secus, si plura plana parallela, quàm tria, rectas AB, CD, secent, erunt earum partes proportionales, & communes sectiones mediorum planorum & triangulorum LOQ, LNQ, rectas lineas constituent, si rectæ AB, CD, in vno sint plano, non rectas autem, si non sint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.

18. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.



SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunq; in recta FG, [a] ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ sunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; [b] erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3 huius libri, ad communem sectionẽ FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Similique argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

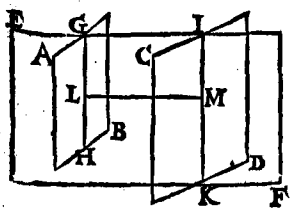
a 31. primi.
b 8. vndec.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Ex his aliud hoc theorema licebit demonstrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.



SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia sectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela esse. In plano enim EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: [a] *eadem q. perpendicularis erit ad IK; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumque planum AB, CD, recta est,* [b] *ipsa parallela erunt.* a 29. primi. b 14 vndec.

SED iam parallela sint plana AB, CD; sit q. AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum esse ad idem planum EF. Sint enim communes sectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; [c] *quæ parallelæ erunt. Ducta quoq. in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit.* [d] *Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoq. vicissim planum CD, ad planum EF, erit quoq. rectum. Quod est propositum.* c 16 vndec. d 18 primi.

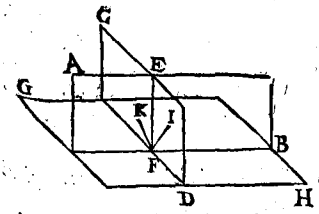
HINC etiam problema hoc absoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum.

SIT data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propos. oporteat q. per FG, planum ducere, quod ad planum CD, rectum sit. Ex quouis puncto B, rectæ FG, [e] *erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planum ducatur EF.* [f] *quod ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.* e 12 vndec. f 18. vndec.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 19.

SI duo plana se mutuò secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

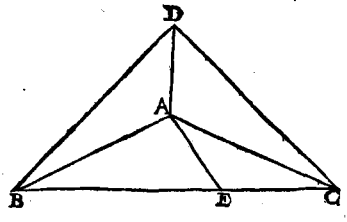


SINT duo plana AB, CD, se mutuò secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, [a] recta quoq; erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si verò EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantùm; sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem cõcludes, si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. huius lib. cùm perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; [b] ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse suprà [c] demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuò secantia plano cuidam ad rectos sint anguli, &c. Quod erat demonstrandum. a 4. vndec. b 11. primi. b 13. vndec.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

SI solidus angulus tribus angulis planis continetur: Ex his duo quilibet vtut assumpti, tertio sunt maiores.

CONTINEATVR angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si verò duo tantùm sint æquales, & tertius vtrouis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si vnus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC, maiores quoque esse angulos duos

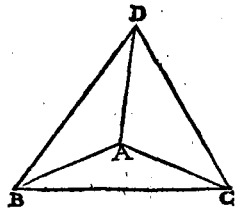


a 23. primi. BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto a fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; coniunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem, æquales; b erunt bases BD, BE, æquales. c Quia verò latera DB, DC, maiora sunt latere BC; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quàm CE. Cùm igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & basis CD, maior base CE; d erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multò maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

b 4. primi.
c 20. primi.
d 25. primi.

21. THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

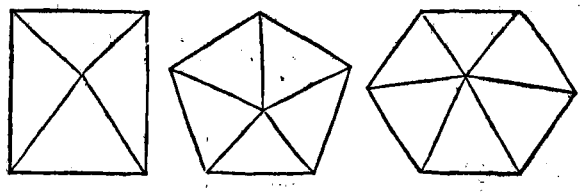


SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt constituti tres anguli solidi, B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB; D, verò sub CDA, ADB, BDC. e Quoniam verò duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD; similiterque duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. f Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cùm igitur sex illi, vnà cũ tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB, (g sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

e 20. vndec.
f 32. primi.
g 32. primi.

SCHOLIVM.

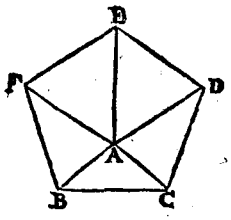
QVONIAM hac demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus, hoc modo.



SIT angulus solidus quicunq; contentus quotcunq; angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoq; minores. Nam si omnibus angulis planis rectæ subtendantur, ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumue, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorum, (a cùm anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales.) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cùm omnes anguli horum triangulorum prope basin maiores sint angulis basis, (propterea, quòd prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, b & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores.) superabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorundem prope basin, minoribus quàm quatuor rectis. Cùm ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.

a 32. primi.
b 20. vnde.

VERVM vt res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus subtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in vno eodemq; plano, in eo videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF, secat in punctis B, C, D, E, F; ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet, quot



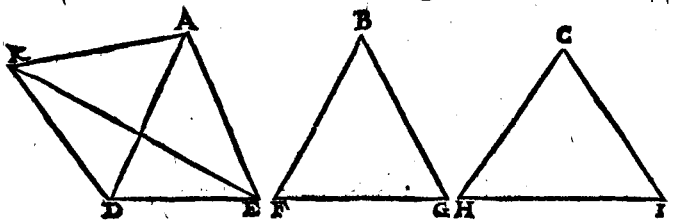
quot anguli plani componunt angulum ſolidum A. [a] *Quia verò omnes anguli quinque triangulorum B A C, C A D, D A E, E A F, F A B, æquales ſunt decem rectis: Anguli autem quinque baſis B C D E F, æquales ſunt ſex rectis, nempe decem, minus quatuor; ſuperabunt anguli triangulorum angulos baſis, quatuor rectis. Cùm igitur decem anguli triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (Cùm enim angulus ſolidus B, tribus planis angulis A B C, A B F, C B F, contineatur;* [b] *erunt duo C B A, A B F, qui ſunt in triangulis, maiores angulo C B F, qui eſt in baſi: Eademq; ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope baſin, reliquis angulis in baſi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta baſin, ſex rectis. Reliqui igitur quinquè angulum ſolidum A, conſtituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales ſunt decem rectis, vt dictum eſt. Eadem demonſtratio adhibenda eſt in aliis omnibus angulis ſolidis.*

a 32. primi.

b 20. vnde.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

Si fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet aſſumpti reliquo ſint maiores: comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales: fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur.



Sint tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus A D, A E, B F, B G, C H, C I, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo ſint maiores. Dico ex tribus rectis D E, F G, H I, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarum D E, F G, H I, quaslibet duas reliqua eſſe maiores. Nam hoc poſito, [a] ex ipſis triangulum facilè conficietur. Quòd enim duæ D E, F G, maiores ſint, quàm H I, ita oſtendetur. [b] Fiat angulus D A K, angulo B, æqualis, cadatque primùm A K, ad partes A D, ita vt fiat totus quidam angulus E A K, ex duobus E A D, D A K, compoſitus; quod quidem continget, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt minores. Ponatur A K, ipſi A D, æqualis, connectanturq; rectæ K D, K E. Quoniam igitur latera A K, A D, trianguli A K D, æqualia ſunt lateribus B F, B G, trianguli B F G; & anguli ipſis contenti D A K, & B, æquales; [c] erunt & baſes K D, F G, æquales. Rurſus quia latera A K, A E, trianguli A K E, æqualia ſunt lateribus C H, C I; & angulus E A K, maior angulo C; propterea quòd duo anguli D A E, & B, maiores ponuntur angulo C; [d] erit & baſis E K, maior baſe H I: [e] Sunt autem rectæ E D, D K, maiores recta E K. Igitur multò maiores erunt E D, D K, quàm H I. Cùm ergo D K, oſtenſa ſit æqualis rectæ F G; erunt quoq; D E, F G, maiores q̃ H I. Quod eſt propoſitũ.

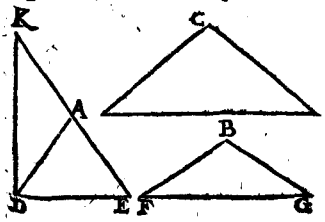
a 22. primi.

b 23. primi.

c 4. primi.

d 24. primi.

e 20. primi.

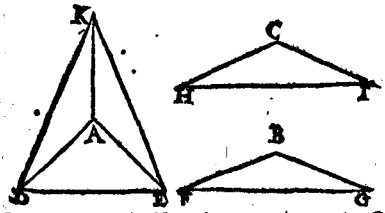


Cadat deinde A K, in rectum & continuum ipſi A E; quod quidem accidet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturq; A K, ipſi A D, æqualis rurſum, & connectatur recta K D. [f] Erit igitur, vt prius, K D, ipſi F G, æqualis. [g] Quoniam verò rectæ E D, D K, maiores ſunt recta K E; & K E, æqualis eſt rectis C H, C I, ex hypotheſi, & conſtructione; erunt quoque E D, D K, maiores duabus C H, C I: [h] Hæ autem maiores ſunt, quàm H I. Igitur multò maiores erunt E D, D K, quàm H I. Cùm ergo D K, oſtenſa ſit æqualis ipſi F G; erunt quoque D E, F G, maiores quàm H I. Quod eſt propoſitum.

f 4. primi.

g 20. primi.

h 20. primi.



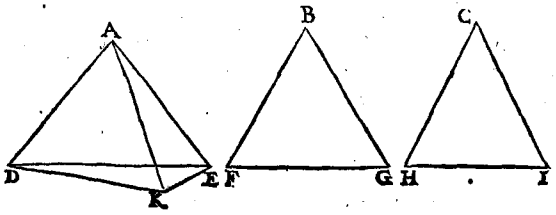
Cadat poſtremò A K, ad partes A E, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis E A D, D A K, nec recta ſit E A K; quod demum eueniet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt maiores. Ponaturq; rurſum A K, ipſi A D, æqualis, & ducantur rectæ K D, K E. [i] Erit igitur, vt prius, K D, ipſi F G, æqualis. [k] Quoniam verò duæ D E, D K, maiores ſunt duab. A E, A K; & A E, A K, æquales duabus C H, C I, ex hypotheſi & conſtructione; erunt quoque D E, D K, maiores quàm C H, C I: [l] Hæ autem maiores ſunt, quàm H I. Igitur multò erunt maiores D E, D K, quàm H I. Cùm ergo D K, oſtenſa ſit æqualis ipſi F G; erunt quoq; D E, F G, maiores quàm H I. quod eſt propoſitum. Eodem modo concludemus D E, H I, maiores eſſe,

i 4. primi.

k 21. primi.

l 20. primi.

quàm FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis: Item FG, HI, maiores, quàm DE, si angulo
a 22. primi. C, ad FB, constituatur angulus æqualis, &c. a Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonstrandum.

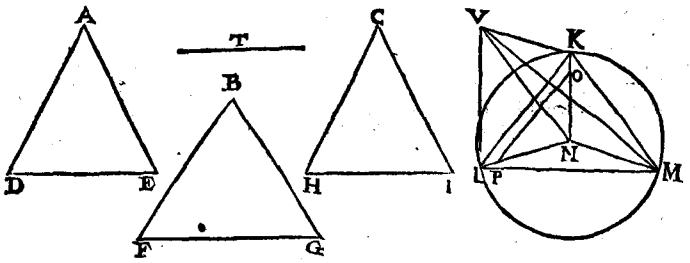


b 4. primi. ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales; b erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si verò duo tantùm anguli sunt æquales, & tertius minor;
c 4. primi. c erunt quoque duæ illorum bases æquales, d & basis tertij vtrâq; minor: Quare rursus quælibet
d 24. primi. duæ, maiores erunt reliqua. Quod si vnus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales;
e 24. primi. e erit quoque basis DE, omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quàm HI: Item DE,
f 23. primi. HI, maiores, quàm FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE. f Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quòd per puncta D, K, E, transit circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem; erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, triâguli ADK, æqualia sunt lateribus BF, BG, triangulí BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales;
g 4. primi. g erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateri-
h 24. primi. bus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; h erit & basis HI, maior basi KE. Quare cùm DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quàm DK, KE:
i 20. primi. i Sed DK, KE maiores sunt, q̃ DE. Igitur multò maiores erũt FG, HI, q̃ DE. Quod est ꝓpositũ.

23. PROBL. 3. PROPOS. 23.

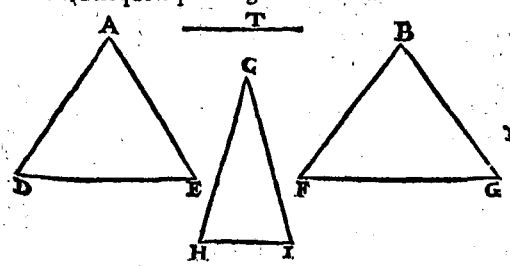
Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturq; bases DE,
k 22. vndec. FG, HI. k Fieri ergo potest, vt ex DE, FG, HI, triangulũ constituatur. Constituatur ex ipsis igitur



triangulum KLM, sitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG; & latus KM, rectæ HI, æquale.
l 5. quarti. l Describatur circa triângulum KLM, circulus, cuius cẽtrum N, à quo ducãtur rectæ NK, NL, NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe AD, AE, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ità ostendetur. Cadat primò centrum N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quando triangulum est oxygonium, vt ex coroll. propos. 5. lib. 4. constat. Si igitur AD, AE, maiores nõ credantur, quàm NK, NL, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, trianguli NKL; & basis DE, basi
m 8. primi. KL, æqualis: m erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cùm igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum, ponuntur enim quatuor rectis minores. Nõ igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quòd neq; minores. Si enim minores sint AD, AE, quàm NK, NL, abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturq; recta OP. Quoniã igitur est vt NK, ad NO, ita NL, ad NP,
n 2. sexti. cùm & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia; erunt latera NK, NL, trian-
o 29 primi. guli NKL, secta proportionaliter; n ac proinde OP, ipsi KL, parallela erit. o Quare anguli
p 4. sexti. NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangulum. p Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Estautem NK, maior quàm NO.
q 14. quinti. q Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quàm OP. Quocirca cùm latera AD, AE,

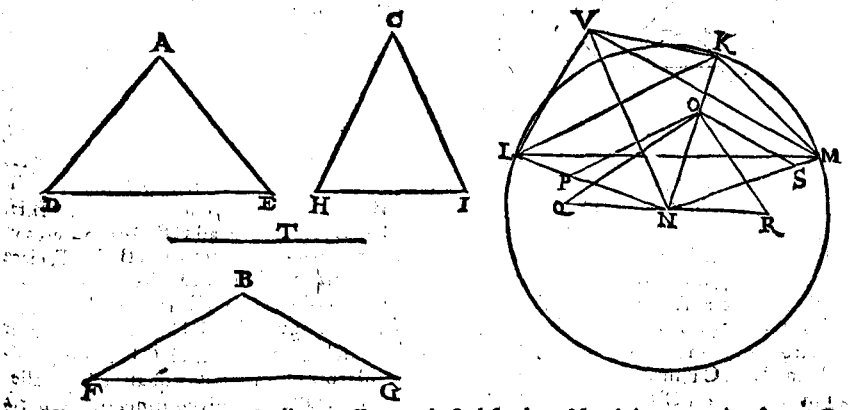
AD,AE,trianguli ADE, ſint æqualia lateribus NO, NP, trianguli NOP, & baſis DE, maior baſe OP; [a] erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior eſſe oſtendetur. Cùm igitur tres anguli ad N, quatuor ſint rectis æquales, ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erunt tres anguli A,B,C, maiores quatuor rectis. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores ſunt AD, AE, quàm NK, NL; ſed neque æquales. Igitur maiores. [a] 25. primi.



CADAT deinde centrum N, in latus LM; [b] tum continget, quàdo triãgulũ KLM, angulũ LKM, habuerit rectũ, vt ex eodẽ coroll. propoſ. 5. lib. 4. manifeſtum eſt.

Si igitur AD, AE, dicãtur eſſe æquales ipſis NK, NL; erunt quoq; BF, BG, æquales eiſdem NK, NL. Cùm ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; æquales erunt BF, BG, rectæ LM: Poſita autem fuit LM, æqualis ipſi FG. Igitur BF, BG, æquales quoque ſunt rectæ FG. [b] Sunt autem & maiores BF, BG, quàm FG. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quod ſi AD, AE, minores credantur, quàm NK, NL; erunt quoque BF, BG, minores quàm NK, NL. Cùm ergo NK, æqualis ſit ipſi NM; minores erunt BF, BG, quàm recta LM: poſita autem fuit LM, ipſi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque ſunt recta FG. Quod eſt abſurdum, [c] cùm ſint maiores. Non ergo minores ſunt AD, AE, quàm NK, NL; ſed neq; æquales: Igitur maiores. [b] 20. primi. [c] 20. primi.

CADAT poſtremò centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtuſus, vt ex coroll. dicto propoſ. 5. lib. 4 liquet. Si igitur dicantur AD, AE, eſſe æquales ipſis NK, NL; cùm & baſis DE, baſi KL, ponatur æqualis; [d] erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores ſunt ex hypotheſi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rurſus quia latera NL, NM, triãguli NLM, æqualia ſunt lateribus BF, BG, triãguli BFG, & baſis LM, baſi FG, æqualis; [e] erit angulus LNM, angulo B, [d] 8. primi. [e] 8. primi.



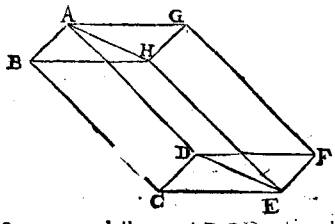
æqualis: Sed & maiorem oſtẽdimus eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Quòd ſi AD, AE, credantur eſſe minores, quàm NK, NL; ſi abſcindãtur NO, NP, ipſis AD, AE, æquales; & ducatur recta OP; demonſtrabitur, vt in primo caſu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. [f] Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturq; NQ, NR, æquales ipſis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetq; OQ, infra OP, propterea quòd p puncta O, P, Q, tranſit circumferentia circuli ex N, ad interuallũ NO, deſcripta, cùm æquales ſint rectæ NO, NP, NQ. [g] Quare cùm angulus PON, æqualis ſit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione oſtendetur angulus NOR, minor angulo NKM, ſi ducatur OS, parallela ipſi KM. Cadet enim ſimiliter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam verò latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia ſunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Eſt autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per cõſtructionem; [h] erit OQ, ipſi DE, hoc eſt, ipſi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipſi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cũ latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia ſint lateribus OQ, OR, triãguli OQR; & angulus LKM, maior angulo QOR, vt oſtendimus; [i] erit baſis LM, hoc eſt, FG, maior baſe [f] 23. primi. [g] 29. primi. [h] 4. primi. [i] 24. primi.

QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia sunt lateribus NQ, NR, trianguli
a 25. primi. NQR, & basis FG, maior basi QR; a erit angulus B, maior angulo QNR. Rursus quia angulus ONQ angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus est æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod est absurdum, cùm B, ostensus sit maior angulo QNR. Non ergo minores sunt AD, AE, quàm NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.

IAM vero, cùm rectæ AD, AE, maiores sint rectis NK, NL, vbicunq; centrum N, existat; posito recta AD plus quàm recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propos. 14. lib. 10. ita vt quadratum
b 12. vndec. rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, & T. b Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis; connectanturq; rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta est ad planum circuli KLM, recta quoq; eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas
c 47. primi. NK, NL, NM; c ac proinde quadratū rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cùm ergo & quadratum rectæ AD, æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erūt rectæ VK, AD. Rursus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL;
d 4. primi. & anguli ipsis contenti VNK, VNL recti; d erit basis VK, æqualis basi VL; Atque eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales sunt rectæ AD, & ob id, rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamobrem, cùm latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia sint lateribus AD,
e 8. primi. AE, trianguli ADE; & basis KL, basi DE; e erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

24. THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI solidum parallelis planis cōtineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia.



SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia. Cùm enim parallela plana BG, CF, secentur plano AC; f Erunt communes sectiones AB, CD, parallelæ. Similiter, cùm plana parallela AF, BE, secentur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est
f 16. vndec. figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cùm enim rectæ AB, BH,
g 10. vndec. parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eo lem plano, sed in oppositis; g erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reli-
h 34. primi. quis angulis parallelogrammi CF. h Quoniam verò AB, ipsi DC, in parallelogrāmo AC; & BH, ipsi CE, in parallelogrāmo BE, æqualis est; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE. Ac propterea vt BH, ad HG, ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrāmorum BG, CF, circa
i 34. primi. angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris AH, DE, i cùm latera AB, BH, triāguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trianguli DCE; &
k 10. vndec. angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt ostensum est; k erunt triāgula ABH, DCE, æqualia inter
l 4 primi. se. m Quare cùm triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorū BG, CF; erunt paral-
m 34. primi. lelogramma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogramma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

25. THEOR. 22. PROPOS. 25.

SI solidum parallelepipedū plano secetur, aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

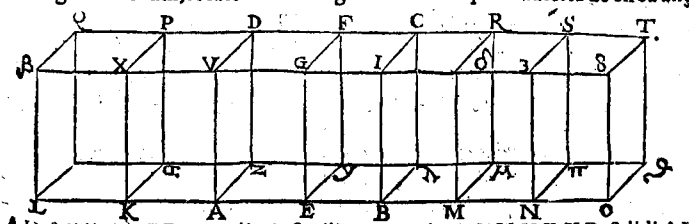
SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppositis planis AD, BC. Dico vt est basis AG, ad basin BG, ita esse solidum AEFD, ad solidū BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productum in vtramque partem quantumlibet, sumanturque in AB, protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipsi AE, & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per solidum propos. 15. huius lib. Quoniam igitur solidum AEFD, contine-
n 24. vndec. tur planis parallelis, ex hypothesi; ipsum parallelepipedum erit, ex definitione, n habebitq; plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF, BMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EQTF; habebuntque plana opposita,
o 36. primi. parallelogramma similia, & æqualia. o Quoniam verò parallelogramma AG, KV, LX, cùm sint

super

ſuper æquales baſes A E, A K, K L, æqualia ſunt: & ſimilia quoque, [a] cùm anguli vnius ſint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoq; proportionalia. Eademq; ratione æqualia, & ſimilia ſunt parallelográma AY, KZ, Lα. Cùm igitur æqualia quoq; ſint, & ſimilia parallelogramma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, ſolidi AEFD, æqualia, & ſimilia tribus planis KV, KZ, KP, ſolidi AKPD; & tribus planis LX, Lα, LQ, ſolidi KLQP: [b] Sunt autē tria in vnoquoq; ſolido æqualia, & ſimilia tribus reliquis oppoſitis in eodē, nempe AG, ipſi ZF; & AY, ipſi VF; & AD, ipſi EF, &c. Igitur p defin. 10. huius libri, æqualia ſunt ſolida AEFD, AKPD, KLQP. Eodē argumento æqualia oſtendentur ſolida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quàm multiplex eſt baſis LG, baſis AG, tam multiplex erit ſolidum LEFQ, ſolidi AEFD; Et quàm multiplex eſt baſis OG, baſis BG, tam multiplex erit ſolidum OEFT, ſolidi BEFC. Quoniam verò ſi baſis LG, (multiplex baſis AG, primæ magnitudinis,) æqualis eſt baſi OG, (multiplici baſis BC, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoq; eſt ſolidum LEFQ, (multiplex ſolidi AEFD, tertiæ magnitudinis) ſolido OEFT, (multiplici ſolidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quòd baſibus LG, OG, æqualibus exiſtentibus, æqualia quoque ſunt & ſimilia ſex parallelogramma ſolidi LEFQ, ſex parallelogrammis ſolidi OEFT: Si autem baſis maior eſt baſe, ſolidum quoque ſolido maius eſt; & ſi minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt baſis AG, prima magnitudo, ad baſin BG, ſecundam magnitudinē, ita ſolidum AEFD, tertia magnitudo, ad ſolidum BEFC, quartam magnitudinē. Eadem ratione demonſtrabitur eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis DY, ad baſin CY; & vt baſis AY, ad baſin BY; & vt baſis DG, ad baſin CG. Si ſolidum igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum,

[a] 29. primi.

[b] 24. vndec.

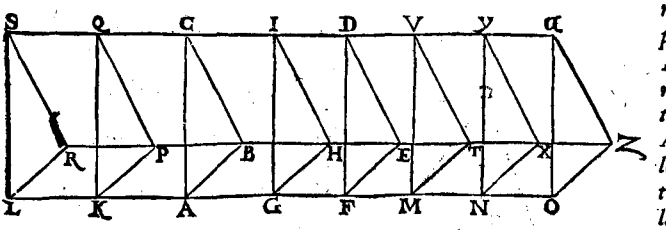


SCHOLIVM.

HAEC propoſitio accommodari etiā poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunq; plano ſecetur, aduerſis planis parallelo; erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primò priſma ABCDEF, cuius plana aduerſa ſint triangula ABC, DEF; ſecturq; plano GHI, aduerſis planis parallelo. Dico vt eſt baſis AI, ad baſin FI, ita eſſe ſolidum ABCIHG, ad ſolidum FEDIHG. Intelligatur enim priſma ABCDEF, in vtramque partem quantumlibet productum, & ex AF, protracta vtrinque capiantur quotcunque rectæ AK, KL, ipſi AG; & quotcunq; rectæ FM, MN, NO, ipſi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS; MTV, NXY, OZα, parallela planis ABC, GHI, FED, per ſchol. propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AI; [a] *erunt communes ſectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypotheſi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammū eſt AI. Rurſus quia plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AH;* [b] *erunt communes ſectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammū eſt AH. Eodem modo parallelogrammum oſtenditur CH. Quoniam verò latera AC, AB, trianguli*

[a] 16. vnde.

[b] 16. vnde.



ABC, æqualia ſunt lateribus GI, GH, trianguli GHI; [c] *cùm AC, ipſi GI, & AB, ipſi GH, ſit æquale;* [d] *& anguli CAB, IGH, ſunt quoq; æquales, eò quòd rectæ CA, AB, parallelæ ſunt rectis IG, GH, & non in eodem plano:* [e] *Erunt triangula ABC, GHI, æqualia inter ſe, & æquiangula.* [f] *Quare latera circum æquales angulos proportionalia habebunt; Atque idcirco ſimilia erunt. Igitur ſolidum ABCIHG, contentum duobus planis oppoſitis ABC, GHI, æqualibus & ſimilibus, at q; parallelogrammis AI, IB, BG, priſma eſt. Eadem arte priſmata erunt ABCQPK, KPQSRL; FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO, LRSIHG, OZαIHG. Quoniam verò parallelogramma AI, KC, LQ, æqualia ſunt & ſimilia; necnon AH, KB, LP, & CH, QR, SP; erunt omnia plana priſmatis ABCIHG, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatis ABCQPK, KPQSRL. Quare per defin. 10. huius libri, æqualia erunt priſmata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione æqualia erunt priſmata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO. Quare* [g] *multiplex eſt baſis LI, baſis AI, tam multiplex erit priſma LRSIHG, priſmatis ABCIHG; &* [g] *multiplex eſt baſis OI, baſis FI, tā multiplex erit priſma PZαIHG, priſmatis FEDIHG. Quia verò ſi baſis LI, (multiplex baſis AI, primæ magnitudinis) æqualis eſt baſi OI, (multiplici baſis FI, ſecundæ magnitudinis;) æquale quoq; eſt priſma LRSIHG, (multiplex priſmatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis) priſmati OZα-*

[c] 34. primi.

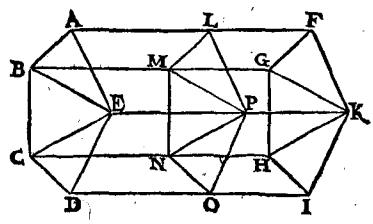
[d] 10. vnde.

[e] 4. primi.

[f] 4. ſexti.

IHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quartæ magnitudinis) propterea quòd basibus LI, OI, existentibus æqualibus, æqualia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZαIHG: Si autem basis LI, maior est base OI, prisma quoque prismate maius est: & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, vt est basis AH, ad basin FH: & vt basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT deinde prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sint polygona, nempe pentagona, secetur q; plano LMNOP. Dico rursus, vt est basis CM, ad basin NG, ita esse solidũ ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resoluantur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit vt basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit vt basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH: & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI. a *Vt autē BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est recta EP ad rectā PK, hoc est, vt CN, ad NH: & vt CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad prismata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG; ac proinde eandem inter se.* b *Vt autem vnum ad vnum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit vt prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH hoc est, vt basis CM, ad basin NG, ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositū ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunq; alio prismate.*



a 1. sexti.

b 12. quinti

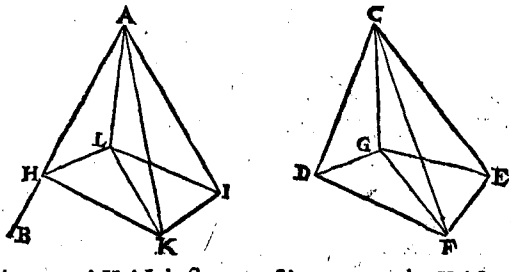
POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi, demonstratione, qua vsi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in vtramq; partem, c *erunt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia:* c *propterea quòd latera eorum sunt paral-*
c 16. vnde.
d 10. vnde. *lela, nempe communes sectiones parallelorum planorum:* d *ac proinde angulos æquales comprehendunt. &c. Vnde, vt prius, ostendentur prismata ex vna parte inter se æqualia, necnon & prismata ex altera parte, &c.*

COROLLARIVM.

EX his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est in priori prismate, triangulum GHI, æquale esse & simile triangulo ABC, atq; adeò triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

26. PROBL. 4. PROPOS. 26.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum angulum solidum constituere, solido angulo dato æqualem.



SIT ad punctū A, in data recta AB, constituēdus angulus solidus, æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodē plano existentibus. a Ducatur ex F, ad planum p CD, CE, ductum, perpendicularis FG; connectāturq; rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, b fiatq; angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ductum constituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto existit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. c Ex L, verò ad planum, in quo sunt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LK, quæ ipsi FG, æqualis ponatur, & coniungatur recta KA. Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL; cū latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, p constructionem; d Erunt bases HL, DG, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cùm igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia sint lateribus CG, CE, trianguli CGE, per constructionem; e æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF; & anguli HLK, DGF,

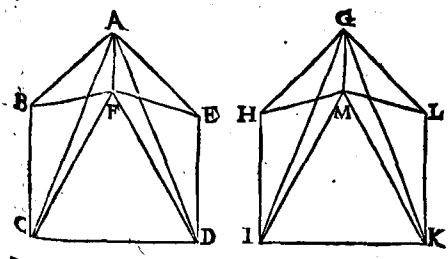
a 11. vndec.
b 23. primi.
c 12. vndec.
d 4. primi.
e 4. primi.

DGF, recti, ex defin. 3. huius lib. [a] erunt & baſes HK, DF, æquales. Quare cùm & latera AH, AK, trianguli AHK, ſint æqualia lateribus CD, CF, triãguli CDF, ex conſtructione. (cùm enim AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia ſint ex conſtructione, comprehendantq; angulos æquales; nimirũ rectos, ex defin. 3. huius lib. [b] erunt baſes AK, CF, æquales.) [c] Erunt quoq; anguli HAK, DCF, æquales. Deniq; quia latera LI, LK, ſunt æqualia lateribus GE, GF; & anguli ILK, EGF, recti, ex defin. 3. huius libri. [d] Erunt baſes IK, EF, æquales: Cùm igitur & latera AI, AK, trianguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, ſint æqualia ex conſtructione; [e] Erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, ſolidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum ſolidum C, componentibus; Atq; proinde ſolidus angulus A, ſolido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiusq; punctum, angulum ſolidum conſtituimus, ſolido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

[a] 4. primi.
[b] 4. primi.
[c] 8. primi.
[d] 4. primi.
[e] 4. primi.

SCHOLIVM.

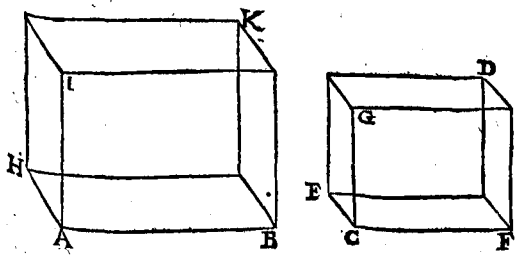
Quod ſi angulus ſolidus datus contineatur pluribus angulis planis, q̃ tribus, ſubtendendæ erunt omnibus angulis planis rectæ in vno eodemq; exiſtentes plano (in eo ſcilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum ſecet) ita vt figuram planam polygonam conſtituant, pyramisq; quædam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula reſoluatur, habebuntur tot pyramides trilaterę, quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis ſolidis omnium pyramidum triangularium æquales ſolidi anguli conſtituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur; conſtitutus erit totus angulus ſolidus toti angulo ſolido æqualis.



Vt ſi angulo ſolido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, conſtituendus ſit ſolidus angulus æqualis, ſubtendẽdæ ſunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, vt fiat pentagonum BCDEF, quòd in tria triangula reſoluatur BCF, FCD, DEF. Deinde ſolido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, conſtituendus ſolidus angulus æqualis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et ſolido angulo A, contẽto tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo ſolido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus ſolidus G, toti angulo ſolido A, æqualis. Atq; in hunc modum cuilibet angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtituetur.

PROBL. 5. PROPOS. 27. 27.

A DATA recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

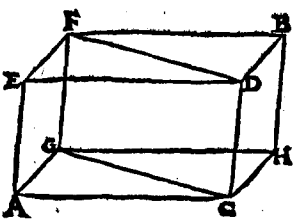


SIT à data recta AB, deſcribendum parallelepipedum ſimile, ſimiliterq; poſitum parallelepipedo CD. [f] Fiat ad rectam AB, eiusq; punctum A, angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales ſint tribus angulis planis ECG, GCF, FCE. Deinde vt eſt CF, ad CG, & ſic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH; eritq; ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH. Poſthæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela ſint parallelogrãmis BH, HI, IB. Dico parallelepipedũ AK, parallelepipedo CD, ſimile eſſe ſimiliterq; poſitum. Cùm enim anguli BAH, FCE, ſint æquales, & latera circa ipſos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex conſtructione; erunt parallelogramma HB, EF, ſimilia, ſimiliterq; poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimiliterq; poſita parallelogramma HI, EG; & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita tribus planis FE, EG, GF, ſolidi CD. [h] Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & ſimilia tribus reliquis oppoſitis. Quare ſex plana ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita ſex planis ſolidi CD; Ac proinde ex defin. 9. huius lib. ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita, ſolida AK, CD. A data ergo recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile, & ſimiliter poſitũ ſolidum parallelepipedum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[f] 26. vndec.
[g] 12. ſexti.
[h] 24. vndec.

28. ## THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.



a 34. primi.
b 9. vndec.
c 33. primi.
d 24. vndec.

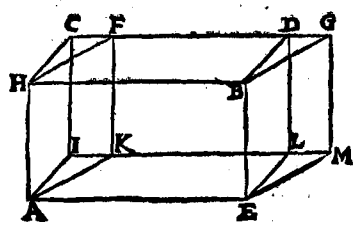
SIT parallelepipedũ AB, in quo plana opposita sint AH, EB, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela est, [a] & æqualis ipsi AE, cùm sint parallelogramma CE, GE; [b] erunt & inter se parallelæ, & æquales CD, GF. [c] Ac proinde, quæ ipsas coniungunt CG, DF, parallelæ erunt, & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, secare bifariam parallelepipedum AB. [d] Cùm enim plana AH, EB, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter

e 6. sexti.
f 24. vndec.

se: Sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG; FED, DBF, proportionalia. [e] Igitur similia quoque erunt dicta triangula. [f] Cùm igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile parallelográmo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, prismatis ACGFED, æqualia & similia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, prismatis HGCDBF; propterea quæ prismata æqualia erunt, ex definitione 10. huius libri: Quæ cùm componant parallelepipedum AB, sectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

29. ## THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorũ insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.



g 35. primi.
h 34. primi.

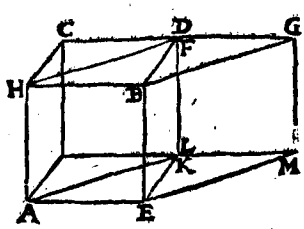
SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, esse inter se æqualia. [g] Cùm enim æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta; erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoque triangula AIK, ELM. [h] Quoniam verò omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. libri 1. ostendimus

i 4. sexti.
k 24. vndec.
l 36. primi.
m 34. primi.

[i] Ac propterea latera circa æquales angulos habebũt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit, & simile. [k] Rursus parallelogrammum AC, æquale est, & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG; [l] Sed & IF, ipsi LG, cùm bases IK, LM, sint æquales. ([m] Nam cùm rectæ IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoque inter se æquales; quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erunt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex definitione 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

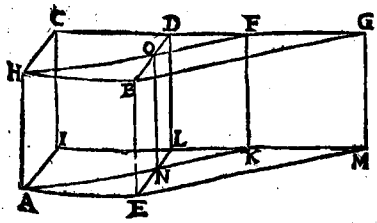
HAEC propositio perſimilis eſt propoſitioni 35. libri 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonſtratur hoc loco, eiſdem ferè mediis, dummodò loco triangulorum aſſumantur priſmata, vt



ex demonſtratione liquet. Vnde reliqui duo caſus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit, vel vltra L, eodem modo demonſtrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in ſecundo caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum cõmune ALE, erunt reliqua triangula AIK, ELM, æqualia. Vnde, vt prius, æqualia erunt priſmata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo priſmate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.

IN tertio verò caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, demantur triangulum cõmune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia; quibus ſi addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient.

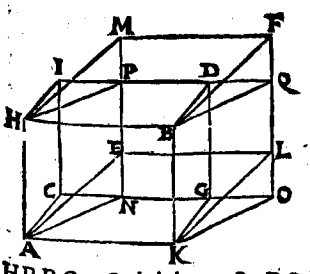
Vnde,



Vnde, vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB; à quibus si auferatur prisma cõmune KLNODF; (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO.) remanebit solidum comprehẽsum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique prisma commune AENOBH; fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se æqualia.

THEOR. 25. PROPOS. 30. 30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadẽ altitudine, quorũ insistentes lineæ nõ in iisdem collocãtur rectis lineis: inter se sunt æqualia.



SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineę ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD, productæ, transeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ, &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia. Cùm enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandẽ altitudinem parallelepipedorum; producãtur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, secet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, easdem in punctis P, Q; adiunganturque rectę AN, KO, HP, BQ. [a] Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cùm opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB. [b] Igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum est APQK. [c] Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi.
[b] 33. primi.
[c] 29. vndec.

SCHOLIVM.

CONVERTATVR *hæc propositio, atq; præcedens, in hunc modum.*

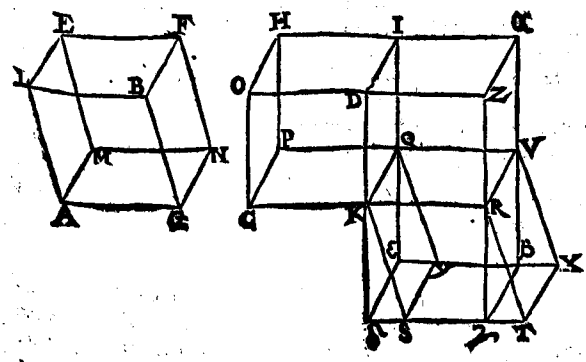
SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM si vnum dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum, & reliquum. [a] *Cùm igitur & totum huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.*

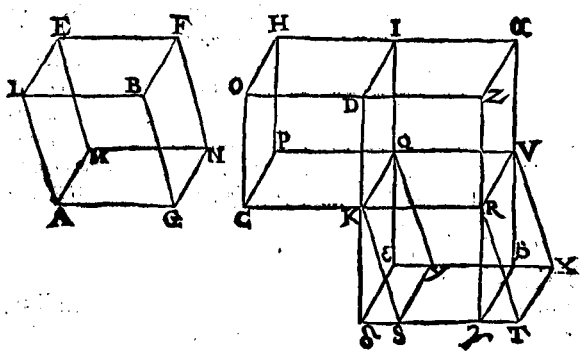
[a] 29. vel 30 vndec.

THEOR. 26. PROPOS. 31. 31. 32.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.



SVPER æquales bases AB, CD, in eadẽ altitudine sint constituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primùm insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinẽ. Producatur CK, in rectum, sitque KR, æqualis ipsi LB, & fiat an-



gulus RKS, in plano OK, extenſo, æqualis angulo BLA, ponanturq; KS, æqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod, ad altitudinem perpẽdicularis KQ, cõſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & ſimilia. Rurſus quia latera KQ, KS, æqualia ſunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eò q; KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG; erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & ſimilia. Eodem modo cùm latera KR, KQ, æqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem definitione 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æqualia & ſimilia. [a] Quare cùm tria plana KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia ſint & ſimilia tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG; [b] tam autem illa, quàm hæc æqualia ſint & ſimilia tribus reliquis oppoſitis: Erunt per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter ſe æqualia.

a 24. vndec.

b 24. vndec.

CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in α; & IQ, XY, in ε, compleaturq; parallelepipedum Qα, γV. Item HI, βV, protractæ conueniant in α; & OD, γR, in Z, perficiaturq; parallelepipedum IKRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Qαγ V, eandẽ habent baſin KV, ſuntq; in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, αX, & inſiſtentes ipſorum lineæ KS, Kα, RT, Rγ; QY, Qε, VX, Vβ, collocantur in eiſdem rectis αT, εX; [c] ipſa inter ſe æqualia erunt. Eſt autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale. Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Qαγ V.

c 29. vndec.

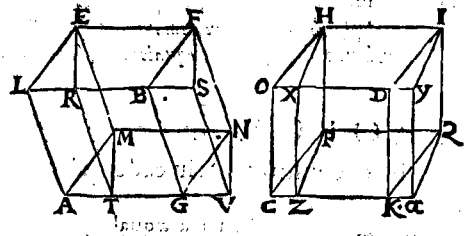
d 35. primi.

e 7. quinti.

f 25. vndec.

g 9. quinti.

[d] QVONIAM verò parallelogramma KT, Kγ, æqualia ſunt inter ſe; & KT, æquale eſt ipſi LG, erit & Kγ, ipſi LG, hoc eſt, ipſi CD, æquales; cùm baſes LG, CD, ponantur æquales. [e] Quare erit, vt CD, ad DR, ita Kγ, ad DR; [f] Vt autem CD, baſis ad baſin DR, ita eſt ſolidum CHIK, ad ſolidum KIαR; cùm parallelepipedum CHαR, ſecetur plano IK, planis oppoſitis CH, αR, parallelo: Et eadem ratione, vt Kγ, ad DR, ita eſt ſolidum Qαγ V, ad ſolidum IKRα; cùm & parallelepipedum Iαγα, ſecetur plano KV, oppoſitis planis Dα, αβ, parallelo. [g] Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, Qαγ V; cùm eandem habeant proportionem ad idem ſolidum IKRα: nimirum eandem, quam habent baſes æquales CD, Kγ, ad eandem baſin DR. Quare cùm parallelepipedum Qαγ V, ſit oſtenſum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod eſt propoſitum.



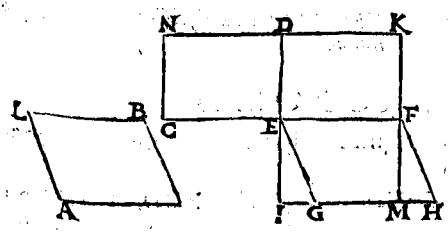
h 11. vndec.

SINT iam neque inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; neq; CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD, perpendiculares: [h] Et à punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo baſis AB, perpendiculares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo baſis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Erũt autem omnes hæ perpendiculares inter ſe æquales, cùm ſint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cùm ſint eiuſdem altitudinis, habeantq; inſiſtentes lineas perpendiculares, erunt inter ſe æqualia, vt oſtenſum eſt. [i] Sed parallelepipedum ETVF, æquale eſt parallelepipedo AEFG, cùm hoc eandem cum illo habeat baſin EN, eandemq; altitudinem; Et parallelepipedum HZαI, æquale eſt eadem ratione parallelepipedo CHIK, cùm hoc eandem cum illo baſin HQ, eandemque altitudinem poſſideat. Igitur & inter ſe æqualia ſunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque oſtendetur, ſi vnius parallelepipedi inſiſtentes lineæ ſint perpendiculares ad baſin, alterius verò non. Quocirca ſolida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, &c. Quod demonſtrandum erat.

i 29. vel 30. vndec.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortaſſe demonſtrari, quo parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia; Nimirum ex ſolis baſibus, ſine conſtructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem ſit demonſtratio illius, qua



quæ noſtra. Sint enim duæ baſes æquales, nempe duo parallelogramma A B, C D. Dico parallelepipeda ſuper ipſas conſtituta, in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes A B, C D, ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia. Protrahantur enim duo latera D E, C E, ad partes E. Deinde fiat angulus F E G, æqualis angulo L; & recta E F, rectæ L B; & recta E G, rectæ L A, ponatur æqualis; perficiaturq; parallelogrammum E H, quod æquale erit, & ſimile parallelogrammo A B. Conueniat autem H G, producta cum D E, producta in I, & compleatur parallelogrammum I K. Iam verò intelligantur ſuper baſes E H, I F, E K, conſtituta parallelepipeda eiuſdem altitudinis cum parallelepipedis ſuper A B, C D, conſtructis; ſintq; inſiſtentes lineæ perpendiculares ad dictas baſes. Perſpicuum eſt igitur, ſolidum ſuper E H, æquale eſſe ac ſimile ſolido ſuper A B, ex defin. 10. huius lib. cùm plana illius æqualia ſint & ſimilia planis huius, per conſtructionem: [a] Sunt autem & æqualia parallelepipeda ſuper E H, I F, cùm habeant baſin eandem, cuius infimum latus E F, erectam ſuper planum I K; Item plana baſi oppoſita, quorum latera infima G H, I M, in eodem plano, cuius infimum latus I H: atque inſiſtentes lineas E G, F H, E I, F M, &c. in eiſdem rectis lineis I H, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum ſuper I F, parallelepipedo ſuper A B. [b] Quoniam verò parallelogramma E H, I F, æqualia ſunt; & E H, æquale eſt ipſi C D: æqualia erunt I F, C D. [c] Erit igitur, vt I F, ad E K, ita C D, ad E K: [d] Eſt autem vt I F, ad E K, ita ſolidum ſuper I F, ad ſolidum ſuper E K, quòd ſolidum ſuper I K, ſecetur plano ſuper E F, erecto parallelo planis ſuper D K, I M, erectis. Et eadem ratione, vt C D, ad E K, ita ſolidum ſuper C D, ad ſolidum ſuper E K, cùm ſolidum ſuper C K, ſecetur plano ſuper D E, erecto parallelo planis ſuper C N, F K, erectis. Quare erit vt ſolidum ſuper I F, ad ſolidum ſuper E K, ita ſolidum ſuper C D, ad ſolidum ſuper E K; [e] Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda ſuper I F, & C D. Oſtenſum eſt autem parallelepipedum ſuper I F, æquale parallelepipedo ſuper A B. Æqualia ergo erunt & parallelepipeda ſuper A B, C D. Quod eſt propoſitum.

a 29. vndec.
b 35. primi.
c 7. quinti.
d 25. vndec.
e 9. quinti.

CONVERTETVR quoque hæc propoſ. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin:

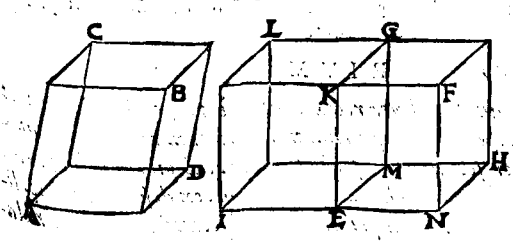
Si enim vnum altero credatur altius, ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, [f] *fient æqualia abſciſſum, & alterum. Cùm ergo & totũ ponatur æquale alteri; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum.*

f 31. vndec.

QVOD ſi in eadem ſint altitudine, & baſis vnius credatur maior baſe alterius, ſi ab ea abſcindatur baſis æqualis alteri, & ſuper abſciſſam intelligatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis, demonſtrabimus eodem modo, partem toti eſſe æqualem. Quod eſt abſurdum.

THEOR. 27. PROPOS. 32. 33.

SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine; inter ſe ſunt, vt baſes.



SINT duo parallelepipeda A B C D, E F G H, eiuſdem altitudinis ſuper baſes A B, E F. Dico eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis ad baſin. [a] Super rectam enim E K, conſtruatur parallelogrammum I K, æquale parallelogrammo A B, in angulo I E K, qui ſit æqualis angulo E N F. Conſtituent autem parallelogramma E F, I K, totum parallelogrammum vnum F I, vt in 45. poſitione lib. 1. demonſtratum eſt. Si igitur alia plana parallelepipedi E F G H, producatur ad partes E G, perficiaturque totum vnum parallelepipedum I F L H; [b] erunt parallelepipeda A B C D, I K L M, æqualia, cùm habeãt æquales baſes, per conſtructionem A B, I K; & eandem altitudinem, ex hypotheſi. [c] Quare erit vt ſolidum I K L M, ad ſolidum E F G H, ita ſolidum A B C D, ad idem ſolidum E F G H: [d] Eſt autẽ ſolidum I K L M, ad ſolidum E F G H, vt baſis I K, hoc eſt, illi æqualis baſis A B, ad baſin E F. Igitur & ſolidũ A B C D, erit ad ſolidum E F G H, vt baſis A B, ad baſin E F. Solida ergo parallelepipeda ſub eadẽ altitudine inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandũ.

a 45. primi.
b 31. vndec.
c 7. quinti.
d 25. vndec.

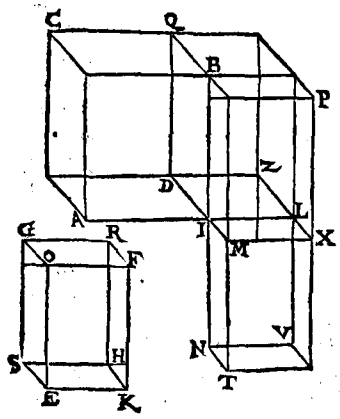
SCHOLIVM.

CONVERSO modo, *ſi ſolida parallelepipeda inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo: ex maiori abſcindatur minori æqualis, & ducatur planum baſi*

a 31 vnde. *parallelum; a erit q; vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque*
b 9 quinti. *erat ad totum. b Abscissum ergo æquale est toti. Quod est absurdum.*

36. THEOR. 28. PROPOS. 33.

SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.



SINT similia parallelepipeda A B C D, E F G H, super bases similes A B, E F, in quibus latera homologa sint A I, E K. Dico proportionem parallelepipedi A B C D, ad parallelepipedum E F G H, esse triplicatam proportionis laterum homologorũ A I, E K. Producatur enim A I, ad L, & fit I L, æqualis ipsi E K, vel G R; Item D I, ad M, & sit I M, æqualis ipsi H K, vel G O; Item B I, ad N, & sit I N, æqualis ipsi K F, vel G S. Deinde completis parallelogrãmis L M, L N, I T, perficiatur parallelepipedum T X I V. Quoniam verò latera I L, I M, æqualia sunt lateribus G R, G O; a & anguli contenti æquales, cùm angulus L I M, sit æqualis angulo A I D, qui ob similitudinem parallelepipedorum, æqualis est angulo E K H, seu R G O; erũt parallelogrammaI X, G F, similia & æqualia. Eadem ratione similia erũt, & æqualia L N, R S; item I T, G E. Quare tria plana I X, L N, I T, parallelepipedi T X I V, similia sunt & æqualia tribus planis G F, R S, G E, parallelepipedi E F G H: b Sũt autem tria cuiusque similia & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt & similia parallelepipeda T X I V, E F G H, ex defin. 10. huius lib. Rursus completis parallelogrammis M B, B L, L M, perficiatur parallelepipedum M P B L; Item completis parallelogrammis I Y, D L, I Q, perficiatur parallelepipedum I Y Q Z. Quoniam igitur ob similitudinem parallelepipedorum A B C D. E F G H, est vt A I, ad E K, hoc est, ad I L, ita D I, ad H K, hoc est, ad I M; & B I, ad F K, hoc est, ad I N. c Vt autem A I, ad I L, ita est parallelogrammum A D, ad D L; Et vt D I, ad I M, ita parallelogrammum D L, ad L M; & vt B I ad I N, ita parallelogrammum B L, ad L N. Igitur erit vt A D, ad D L ita D L, ad L M; & B L, ad L N. d Sed vt A D, basis ad D L, basin, ita est parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q; & vt basis D L, ad basin L M, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P; & vt basis B L, ad basin L N, ita parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Quare erit, vt parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P, & parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Ac proinde quatuor quantitates sunt continuè proportionales A D C B, D L Y Q, L M B P, L N T X, ideoque proportio primæ A D C B, ad quartam L N T X, hoc est, ad E F G H, erit triplicata proportionis primæ A D C B, ad secundam D L Y Q, ex defin. 10. lib. 5. e Vt autẽ A D C B, ad D L Y Q, ita est basis A D, ad basin D L; f Et vt A D, ad D L, ita est recta A I, ad I L, hoc est, ad E K. Igitur proportio parallelepipedi A D C B, ad parallelepipedum E F G H, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum A I, ad E K. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonstrandum.

a 15. primi.
b 24. vndec.
c 1. sexti.
d 32. vndec.
e 32 vndec.
f 1. sexti.

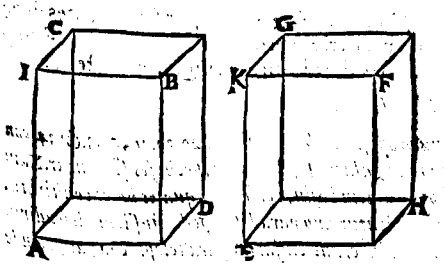
COROLLARIVM.

EX hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterq; descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonstratum est, quàm prima linea ad quartam, ex definitione 10. libri 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

34. 35. THEOR. 29. PROPOS. 34.

AEQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Illa sunt æqualia.

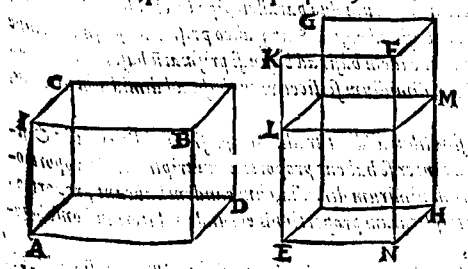
SINT æqualia parallelepipeda A D C B, E H G F, super bases A D, E H. Dico bases A D, E H, & altitudines parallelepipedorum A D C B, E H G F, esse reciprocas, hoc est, esse vt A D, ad E H, ita altitudinem solidi E H G F, ad altitudinem A D C B. Sint enim primùm insistentes lineæ A I,



EK, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita vt AI, EK, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, ſunt æquales: cùm & parallelepipeda æqualia ponantur: erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propoſitionis 31. huius lib. oſtendimus. Quare erit, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint: ſit EK, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis: & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholium propoſ. 15. huius libri. Quoniam igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF, [a] erit vt ADCB, ad ſolidũ EHML, ita EHGF, ad idem ſolidũ EHML: [b] Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cũ æquales ponantur altitudines AI, EL. Et vt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadem ratione, baſis KN, ad baſin LN, cùm hac ratione ſolida EHGF, EHML, eandẽ habeãt altitudinem, ſi nimirum baſes ponantur KN, LN: erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: [c] Sed vt KN, ad LN, ita eſt recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualem. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.

[a] 7. quinti.
[b] 32. vndec.
[c] 1. ſexti.

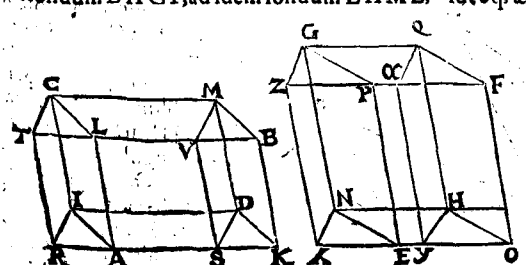


SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales: cùm ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi: erunt & baſes AD, EH, æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cùm æquales habeant baſes, & altitudinem eándem, inter ſe æqualia erunt.

[d] 31. vndec.

QVOD ſi altitudo EK, maior fuerit, abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH. Quia igitur ex hypotheſi eſt, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc eſt, ad EL, ipſi AI, æqualem; [e] Vt autem baſis AD, ad baſin EH, ita eſt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML: cùm altitudines AI, EL, æquales ponantur; [f] Et vt EK, ad EL, ita eſt KN, ad LN: [g] Vt autem baſis KN, ad baſin LN, ita eſt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, cùm ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi baſes ponantur KN, LN: erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH: Erit vt ſolidũ ADCB, ad ſolidũ EHML, ita ſolidum EHGF, ad idem ſolidum EHML: [h] ideóq; æqualia erunt ſolida ADCB, EHGF.

[e] 32. vndec.
[f] 1. ſexti.
[g] 32. vndec.
[h] 9. quinti.



SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorum inſiſtentes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG; nó ſint perpendiculares ad baſes AB, EF. Demittantur autem à punctis I, D, M, C, ad planum baſis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Item à punctis N, H, Q, G, ad planum baſis EF, perpendiculares NX, HY, Qα, GZ; connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Zα, XZ, Yα: Eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rurſus, vt baſis AB, ad baſin EF, ita eſſe altitudinem XN, ad altitudinem RI. [i] Cùm enim æqualia ſint ſolida ABCD, EFGH, ex hypotheſi, ſit autem ABCD, æquale ſolido RVCD, quòd habeant eandem baſin CD, eandemq; altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale ſolido XαGH. Erunt & parallelepipeda RVCD, XαGH, æqualia. Quare cũ habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes CD, GH; erit, vt iam demonſtratum eſt, vt baſis CD, ad baſin GH, hoc eſt, vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

[i] 29. vel 30. vndec.

SINT iam baſes atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Conſtructa enim figura, vt prius: Cùm ſit vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinẽ RI; [k] Sit autem AB, ipſi CD, & EF, ipſi GH, æqualis: erit quoque vt baſis CD, ſolidi RVCD, ad baſin GH, ſolidi XαGH, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Quare cùm XN, RI, ſint inſiſtentes lineæ, perpendiculares ad baſes CD, GH: erunt, vt iam oſtenſum eſt, æqualia parallelepipeda RVCD, XαGH. [l] Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia. Igitur

[k] 24. vndec.
[l] 29. vel 30. vndec.

æqualia quoque erunt parallelepipeda A B C D, E F G H: Idemque ostendetur si insistentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius verò non. Quam ob rem, & quæ-lium solidorum parallelepipedorũ bases, & altitudines reciprocãtur, &c. Quod erat ostendendũ.

SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoq; prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si prædicta hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis,
a 29. 30. vel 31. vndec. *& super eandem, vel æquales bases existentia.* [a] *Quare æqualia erunt eiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.*

RVRSVS, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis adiungantur duo alia prismata illis æqualia & similia; conficientur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis.
b 32. vndec. [b] *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt basis ad basin:* [c] *Atq; adeò prisma ad prisma, nempe*
c 15. quinti. *dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem basis ad basin, si prismatũ bases fuerint parallelogramma, vel certè vt triangulum ad triangulum, dimidium scilicet vnius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangula.*

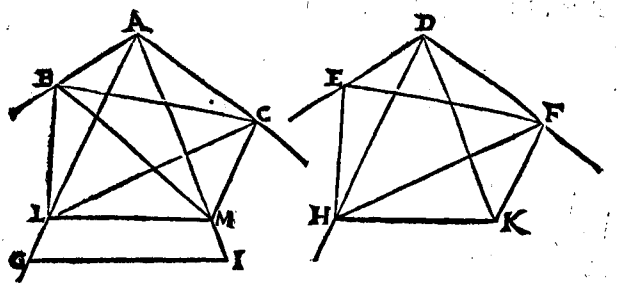
PRÆTEREA; si duobus prismatis prædictis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & si-
d 33. vndec. *milia, constituentur duo parallelepipeda similia,* [d] *quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum.* [e] *Igitur & prismata eorum nimirum dimidia, cùm eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoq; sunt latera homologa prismatum.*
e 15. quinti.

DENIQVE si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & simi-
f 34. vndec. *lia, componentur duo parallelepipeda æqualia eorundem altitudinum cũ prismatis.* [f] *Quare cùm bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciprocæ; & bases prismatum eadem sint, vel certè triangula eorum*
g 15. quinti. *dimidia,* [g] *eandem habentia proportionem. Erunt quoq; bases prismatum & eorum altitudines reciprocæ.*

37.

THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primùm positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primùm positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cũ sublimibus æquales angulos cõprehendẽt.



SINT duo anguli plani æquales B A C, E D F, quorum verticibus A, & D, insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ A G, D H, ita vt angulus B A G, angulo E D H, & angulus C A G, angulo F D H, sit æqualis: à sumptis autẽ punctis G, H, in rectis A G, D H, demittantur ad plana, in quibus anguli B A C, E D F, existunt, perpendiculares G I, H K, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ I A, K D. Dico angulos G A I, H D K, esse æquales inter se. Nam si A G, D H, sunt inæquales, auferatur à maiori A G, ipsi D H, æqualis linea A L; & ex L, in plano trianguli A G I, ducatur ipsi G I, parallela
a 8. vndec. L M. Quoniam igitur parallelæ sunt G I, L M; & est G I, ad planũ anguli B A C, recta, [a] erit quoq; L M, ad idem planum recta. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas A B, A C, D E, D F, perpendiculares M B, M C, K E, K F; & connectantur rectæ B C, B L, L C, E F, E H, H F. Et quia L M, recta est ad planum anguli B A C, ipsa rectum angulum efficiet cum recta A M; in eodem plano ducta, p
b 47. primi. defin. 3. huius libri. [b] Quare quadratum rectæ A L, æquale erit quadratis rectarum A M, M L: [c] Est
c 47. primi. autem quadratum rectæ A M, æquale quadratis rectarum A C, C M, cùm & angulus A C M, rectus sit, ex constructione. Quadratum ergo rectæ A L, æquale est quadratis rectarum A C, C M,
d 47. primi. M L: [d] At quadratis rectarum C M, M L, æquale est quadratum rectæ C L, cùm angulus C M L,
e 48. primi. rectus sit, per definitionem 3. huius libri. Igitur quadratum rectæ A L, æquale est quadratis rectaf 47. primi. rum A C, C L; [e] Ac proinde angulus A C L, rectus erit. [f] Rursus quia quadratum rectæ A L, æ-
g 47. primi. quale est quadratis rectarum A M, M L; [g] Est autem quadratum rectæ A M, æquale quadratis rectarum

ctarum AB,BM, cùm angulus ABM, per conſtructionem, ſit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB,BM,ML: [a] At quadratis rectarum BM, ML, æquale eſt quadratum rectæ BL, quòd & angulus BML, ſit rectus, ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BL; [b] proptereáque angulus ABL, erit rectus. Non aliter oſtendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales ſunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; ſuntque latera AL, DH, æqualia; [c] Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cùm latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypotheſi; [d] erunt & baſes BC, EF, inter ſe, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales: Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales, cùm omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt. Ac propterea cùm & latera BC, EF, ſint oſtenſa æqualia; [e] erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia ſunt oſtenſa lateribus DF, FK, trianguli DFK; & anguli ACM, DFK, ſunt recti; [f] erunt & baſes AM, DK, inter ſe æquales. Cùm autem æquales ſint oſtenſæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: [g] Quia verò quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quòd anguli BML, EKH, recti ſint, ex definitione 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia ſunt, & rectæ BM, EK, oſtenſæ ſint æquales; reliqua quadrata rectarũ LM, HK, æqualia erunt, ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cùm latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia ſint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & baſi LM, baſi HK, æqualis; [h] erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, &c. Quod oſtendendum erat.

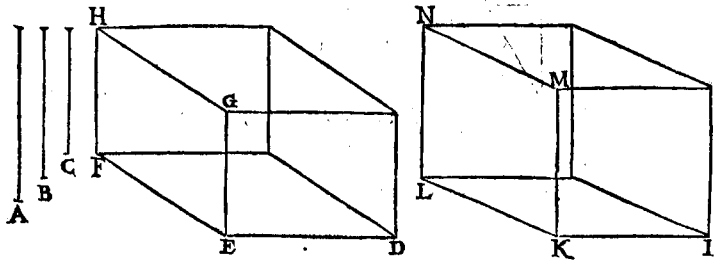
[a] 47. primi.
[b] 48. primi.
[c] 26. primi.
[d] 4. primi.
[e] 26. primi.
[f] 4. primi.
[g] 47. primi.
[h] 8. primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos contineãt æquales, vtrumque vtrique. Erunt à punctis extremis linearum ſublimium ad plana angulorum primò poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quòd anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales LAB, HDE; Item LAC, HDF; demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.

THEOR. 31. PROPOS. 36. 38.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum verò prædicto.



SINT continuè proportionales rectæ A, B, C. Cõſtituatúrque angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunq; DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE, ipſi A, & EF, ipſi B; & EG, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod ſub tribus rectis A, B, C, dicitur cõtineri, aut ex ipſis fieri. [i] Deinde ad rectam IK, eiuſq; punctum K, fiat ſolidus angulus K, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales ſint tribus DEF, DEG, FEG; ita vt rectæ IK, KL, KM, æquales ſint mediæ lineæ B. Completis verò parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN; quod contineri dicitur ſub linea B, ſeu ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum DH, æquale eſſe ſolido IN. Cùm enim ſit vt DE, ad IK, ita KM, ad EG, (& DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: [k] Erũt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea & latera habent circa æquales angulos reciproca. Quoniam verò anguli plani DEG, IKM, ſunt æquales, quorũ verticibus inſiſtunt ſublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cũ lineis primò poſitis, ex cõſtructione, vtrumq; vtriq;; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana baſium DG, IM, demiſſæ, nimirũ altitudines parallelepipedorum DH, IN, ſi baſes ſint DG, IM, inter ſe æquales, per coroll. propoſ. præcedentis. [l] Quare parallelepipeda DH, IN, cùm habeant baſes DG, IM, æquales, & æquales quoq; altitudines, inter ſe æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

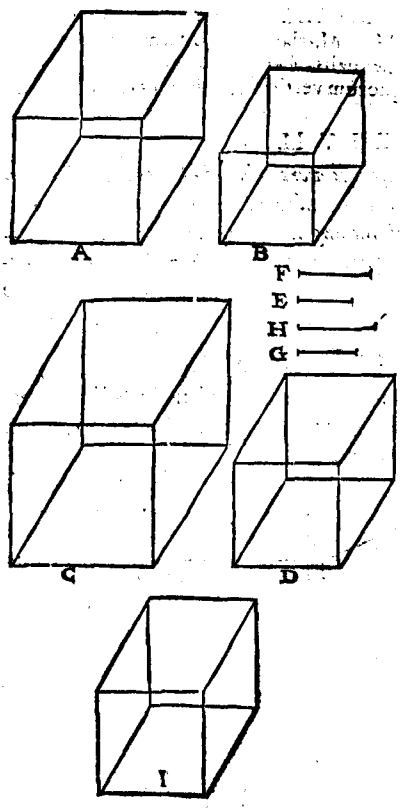
[i] 26. vndec.
[k] 14. ſexti.
[l] 31. vndec.

SCHOLIVM.

VICISSIM quoq; si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo à media linea descripto: erunt tres rectæ continuè proportionales. Sit enim parallelepipedum D H, descriptum ex rectis A, B, C, vt dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo I N, descripto à media B. Dico tres A, B, C, esse continuè proportionales. Nam veluti prius, ostendentur eorum altitudines ex F, I, dimissæ, esse æquales. Quare cùm & ipsa ponantur æqualia; erunt eorum bases D H, I M, æquales per eas quæ ad finem propos. 31. huius lib. demonstrauimus. Quæ bases, cùm angulos habeant æquales D E G, I K M, ex
214. sexti. *constructione; [a] habebũt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc est, vt D E, ad I K, ita K M, ad E G. Quapropter cùm D E, ipsi A; & I K, K M, ipsi B; & E G, ipsi C, sumpta sit æqualis; Erit quoq; vt A, ad B, ita B, ad C. Quod est propositum.*

39. THEOR. 32. PROPOS. 37.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; vt quidẽ A, ad B, ita C, ad D; constituanturq; super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterq; descripta; itẽ super C, & D, alia duo C, & D, similia similiterque posita, siue hæc sint illis similia, siue nõ. Dico esse quoque solida A, B, C, D, proportionalia: Vt quidem solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Inueniantur enim, per scholium propositionis 11. lib. 6, duabus rectis A, B, aliæ duæ continuè proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur sunt quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumuntur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autẽ A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B. Et vt C, ad H, ita solidũ C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. huius lib. Igitur erit vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.

a 12. sexti.
b 27. vndec.

SINT iam e contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoq; proportionales. [a] Tribus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, [b] super quã describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterq; positũ. Quoniam igitur est, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoq;, vt iam est ostensum, vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autẽ solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoq; solidum C, ad solidum D: Igitur erit vt solidũ C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. [c] Atque idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quæ cùm sint similia, similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & similia, habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt: Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem

c 9. quinti.

C, ad rectam D. Posita est autẽ C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectã B, ita recta C, ad rectam D. Itaq; si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

BREVIS tota hæc propositio demonstrabitur cũ Theone, hoc modo. Ponatur primùm vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoq; vt solidũ A, ad solidum B, ita solidum

d 33. vndec.

C, ad solidum D. [d] Cùm enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidũ B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionũ æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidũ D. Dico esse quoq;, vt rectã A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. [e] Cùm enim sit proportio soli-

e 33. vndec.

di A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D.

ad D, æquales: quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

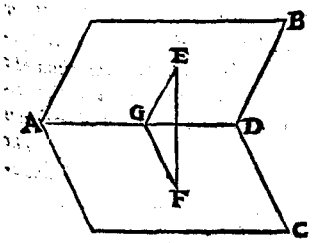
SCHOLIVM.

EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusq; solidū sumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demonstratū est. Cùm igitur solidū secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & linea secunda æqualis tertiæ lineæ; perspicuum est, quod proponitur.

TOTA verò hæc propositio cōuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia, sunt vel triangula, vel parallelogramma, vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ, vt hic est demonstratum, proportionalia erunt. [a] Cùm igitur prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur. a 15. quin.

THEOR. 33. PROPOS. 38. 13.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorū, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communē sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



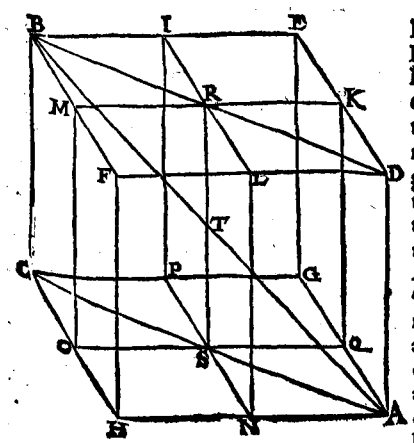
PLANVM enim AB, rectum sit ad planum AC, sitque eorum communis sectio recta AD: Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem AD. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, [a] & ab F, in plano AC, ducatur ad rectā AD, perpēdicularis FG, connectaturq; recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpēdicularis est ad communem sectionem AD; erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeò & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt. quod est absurdum; [b] cùm duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, nō extra communem sectionem AD, cadet. ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. a 12. primi. b 17. primi.

SCHOLIVM.

HAEC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AB, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionē; [a] ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ducta sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus. a 12. primi.

THEOR. 34. PROPOS. 39. 40.

SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuò secabunt.



SINT parallelepipedi AB, plana oppositā AC, BD, quorū omnia latera bifariā secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuò secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, triāguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarū æqualiū AG, CH; [a] & QS, OS, duabus æqualib. AN, HN, æquales, cùm sint parallelogrāma AS, HS,) [b] & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. [d] Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duob. sunt rectis æquales. [e] Ac propterea AS, CS, vnam rectā lineam constituent. Eodem modo ostendētur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineā rectam. Rursus quia vtraq; AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, [f] ipsæ quoque a 34. primi. b 29. primi. c 4. primi. d 13. primi. e 14. primi. f 9. vndec.

a 33. primi. inter ſe parallelæ erũt, & æquales. a Quare & rectæ A C, B D, earum extrema coniungentes, parallelæ ſunt, & æquales; Ac proinde ipſarũ dimidiæ A S, B R, æquales ſunt. Quia verò A C, B D, parallelæ ſunt; b erunt rectę A B, R S, in eodem cum ipſis plano, ideoq; ſe mutuò ſecabunt, in puncto videlicet T. c Cùm autem duo anguli A S T, A T S, trianguli A S T, æquales ſint duobus angulis B R T, B T R, trianguli B R T; & latus A S, lateri B R: d Erunt reliqua latera T A, T S, reliquis lateribus T B, T R, æqualia; Ac propterea A B, R S, ſe mutuò ſecant bifariam in T. Si igitur ſolidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerſo, &c. Quod erat oſtendendum.

b 7. vndec.

c 29. & 15. primi.

d 26. primi.

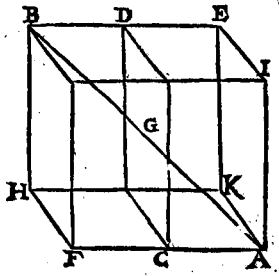
COROLLARIVM.

Hinc efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes ſe mutuò bifariã ſecare in vno puncto; ni mirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hîc demonſtratũ eſt, rectam R S.

SCHOLIVM.

[Huic theoremati addi poteſt aliud non diſſimile illi, quod ad 33. propoſ. 1. lib. demõſtrauimus, videlicet.

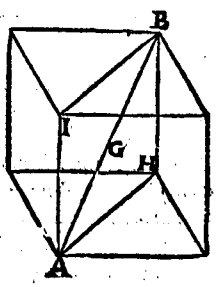
Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum: bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam: per centrum tranſibit ipſum planum.



a 17. vndec.

b 25. vnde.

Secetur parallelepipedũ A B, plano C D, per centrũ, hoc eſt, per punctũ mediũ diametri A B, quod ſit G. Dico parallelepipedũ bifariã ſecari. Sit enim primò planũ C D, oppoſitis planis A E, B F, parallelum. a *Et quia plana parallela B F, D C, E A, ſecãt rectas quaſcunq; proportionaliter; ſecatur autẽ B A, bifariã in G; ſecabuntur quoq; latera aduerſorum planorum A H, B I, atq; adeò & baſes A H, B I, bifariam.* b *Cùm igitur ſit vt baſis K C, ad baſim C H; ita ſolidũ A D, ad ſolidum C B; erit parallelepipedum A B, ſectum bifariam plano C D, per centrum G, ducto.*



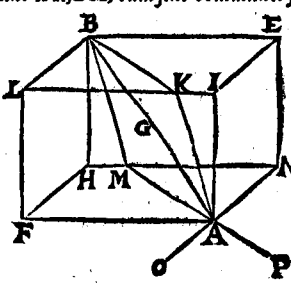
Transeat ſecundò planum ſecãs A I B H, per diametros B I, A H, planorum oppoſitorum; quoniam & ſic ſecatur parallelepipedum per centrum G, immo per totam diametrum A B; c *cùm A B, in plano ſit parallelarum A H, B I.* d *Demonſtratum autem eſt antea, parallelepipedũ ſecari plano per diametros oppoſitorum planorum ducto bifariam.*

c 7. vndec.

d 28. vnde.

Tertio, planum ſecans A K B M, neq; ſit aduerſis planis parallelum, neq; per diametros oppoſitorum planorum ductum, ſed tantùm per angulos A, & B, planorum A H, B I. Quoniam igitur plana parallela A H, B I, ſecantur plano A K B M; e *erunt communes ſectiones A M, B K, parallelæ. Similiter parallelæ erunt A K, B M, cùm ſint communes ſectiones planorum parallelorum A L, B N,*

e 16. vnde.



f 34. primi.

facta à plano A K B M. Quare parallelogrammum eſt A K B M, f *ideoq; tam recta A K, B M, quàm recta A M, B K, inter ſe erunt æquales. Quia ergo latera B K, B L, trianguli B K L, æqualia ſunt lateribus A M, A N, trianguli A M N; & angulus K B L, angulo M A N, æqualis. (Productis enim N A, M A, ad O, P, erunt A O, A P, rectis B L, B K, parallelæ;* g *ac proinde æquales anguli erũt O A P, L B K.* h *Cùm igitur O A P, æqualis ſit angulo M A N; æquales quoq; erũt anguli K B L, M A N.)* i *Erũt baſes K L, M N, inter ſe, & anguli B K L, B L K, angulis A M N, A N M, æquales; & triangulũ triangulo æquale. Quare & ſimilia erunt triãgula B K L, A M N;* k *cùm latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam verò recta K L, recta M N; & angulus B K L, angulo A M N; & angulus K B L, angulo M A N, eſt æqualis, vt oſtendimus; erit & reliqua I K, reliquæ H M; & reliquus angulus B K I, reliquo A M H; & reliquus K B E, reliquo M A F, æqualis. (Eſt enim tota L I, toti N H, æqualis, & tam anguli B K L, B K I, quàm anguli A M N, A M H, duobus rectis æquales; & totus angulus L B E, toti angulo N A F, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorũ L E, F N.) Sunt autem & latera B E, E I, lateribus, A F, F H, æqualia & anguli B E I, E I K, angulis A F H, F H M, ob parallelogramma L E, F N. Igitur quadrilaterum B K I E, & æquilaterum, & æquiangulum eſt quadrilatero A M H F; Ac propterea æquale & ſimile, cùm ſingula ſingulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & ſimilia triãgula B H M, A I K; & quadrilatera A K L F, B M N E, cùm inter ſe ſint & æquilatera & æquiangula. Quapropter ſolidum contentum planis A K L F, F H M A, A K B M, M H B, B K L, L B H F, æquale erit ſolido contento planis B M N E, E I K B, B M A K, K I A, A M N, N I E, per 10. defin. huius libri, cùm his planis illa ſint ſimilia & æqualia, vt demonſtratum eſt. Parallelepipedum ergo A B, ſectũ eſt plano A K B M, per centrum G, bifariam.*

g 10. vnde.

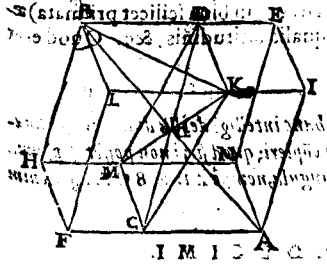
h 15. primi.

i 4. primi.

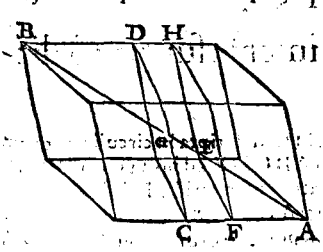
k 4. ſexti.

Postremo planum ſecans C D, neque aduerſis planis parallelum ſit, neque per diametros planorum op-

rum oppositorum, neque per vllos angulos eorum ductum, sed vtcunque secet plana opposita A H, B I Ostendemus autem, vt prius, planum secans C D, esse parallelogrammū, & tam rectas C K, D M, quàm rectas C M, D K, esse æquales. Ducantur in parallelogrammo C D, diametri C D, K M; connectanturq; rectæ A M, B K. Quoniam igitur A F, B E, parallelæ ipsi L I, ob parallelogramma A L, L E, [a] inter se sunt parallelæ; [b] Erunt A B, C D, in eodem cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in centro G. In solo enim centro G, recta A B, per hypothesim, secat planum C D, in quo existit recta C D. [c] Et quoniam angulus B D C, angulo alterno A C D, æqualis est: [d] Est autē & angulus B G D, angulo A G C, ad verticem æqualis; & latus B G, lateri A G, æquale, quòd A B, bifariā secetur in G, centro; [e] Erit & latus D G, lateri C G, æquale. Cùm ergo per ea, quæ ad propos. 34. lib. 1. ostendimus, diametri C D, K M, sese mutuò bifariam secent, transibit K M, per punctum G, ibiq; diametrū A B, secabit. Quia ergo latera B G, G D, trianguli B G D, æqualia sunt lateribus A G, G C, trianguli A G C; [f] & angulus B G D, æqualis angulo A G C. [g] Erit & basis B D, æqualis basi A C. Eodem argumento æquales erunt rectæ B K, A M. Quocirca cùm tria latera B D, D K, K B, triāguli B D K, æqualia sint tribus lateribus A C, C M, M A, trianguli A C M; Erunt, per ea, quæ ad propos. 8. l. 1. docuimus, anguli illius, angulis huius æquales: Est autem totus D B L, toti C A N, æqualis, ob similitudinem parallelogramorum B I, A H. Igitur & reliquus K B L, reliquo M A N, erit æqualis. Quoniam igitur latera B K, B L, trianguli B K L, æqualia sunt lateribus A M, A N, trianguli A M N; & angulus K B L, angulo M A N, æqualis; [h] Erit & basis K L, basi M N; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis B K L, A M N, æquales addantur anguli B K D, A M C, fient toti anguli D K L, C M N, æquales. Quare quadrilaterum B D K L, quadrilatero A C M N, & æquilaterum est, & æquiāgulum; Ac propterea æquale & simile, cùm singula cōtineant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota L I, toti N H, est æqualis, erit & reliqua I K, reliquæ H M, æqualis. Eademq; ratione reliqua D E, reliquæ C F, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum D E I K, æquilaterum est quadrilatero C F H M: Sed & æquiangulum; cùm anguli D E I, E I K, æquales sint angulis C F H, F H M, propter similitudinē parallelogrammorū B I, A H; & anguli E D K, I K D, angulis F C M, H M C, æquales, quòd æquales ostensi sint eorum anguli alterni L K D, B D K, angulis N M C, A C M. Igitur quadrilatera D E I K, C F H M, æqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, æqualia esse & similia quadrilatera A C K I, B D M H. Item D E N M, C F L K, cùm & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis C K L F, F H M C, C K D M, M H B D, D K L B, B H F L, per 10. defin. huius lib. æquale est solido cōtento planis D M N E, E I K D, D M C K, K I A C, C M N A, A I E N; cùm hisce illa sint demonstrata & æqualia & similia. Parallelepipedum igitur A B, sectum est per centrum G, plano C D, bifariam.



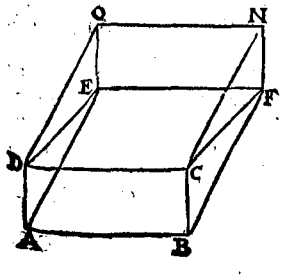
a 9 vndec.
b 7. vndec.
c 29. primi
d 15. primi.
e 26. primi
f 15. primi.
g 4. primi.
h 4. primi.

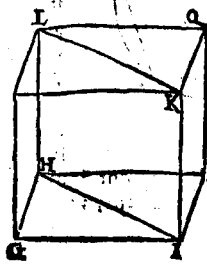


SED secetur iam parallelepipedum A B, plano C D, bifariam. Dico planum C D, per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G, in quo planum C D, secat diametrū A B, diuidere diametrum A B, bifariam. Si enim diameter A B, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt sit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum F H, plano C D, parallelum, secabitur parallelepipedum A B, bifariam plano F H, vt demonstratum est. Ponitur autem & bifariam secari plano C D; Igitur solida C B, F B, cùm sint dimidia parallelepipedi A B, inter se æqualia sunt, pars & totū. Quod est absurdū. Non ergo aliud punctū, praeter G, diuidet diametrū A B, bifariam; Ac proinde G, centrū erit parallelepipedi. Quod demonstrandū erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40. 41.

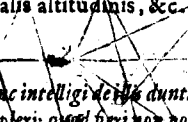
Si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud verò, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Aequalia erunt ipsa prismata.





SINT duo prismata æqualis altitudinis A B C D E F, G H I K L M, quorum illud basim habeat parallelogrammum A B C D, hoc verò, triangulū G H I; sitq; parallelogrammū A C, trianguli G H I, duplū. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda A N, G Q. Quod quidem fiet, si plana triangulorū extendantur, perficianturq; parallelogrāma B N, A O, G P, M Q. Si enim cōnectantur rectæ N O, P Q, cōstituta erūt

duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorũ
a 34. primi. opposita esse parallela, facilè colligetur ex propos. 15. huius lib. a Quoniam igitur parallelogrãmum GP, duplum est trianguli GHI: Ponitur autem & parallelogrammũ AC, eiusdem trian-
b 31. vndec. guli GHI, duplum: æqualia erunt parallelogrãma AC, GP. b Quare parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia. Atque propterea eorum
c 32. vnde. dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, (c Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduersorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita; cùm imperet parallelepipeda cõpleri; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum ABCD, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Esset enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM DVODECIMVM:

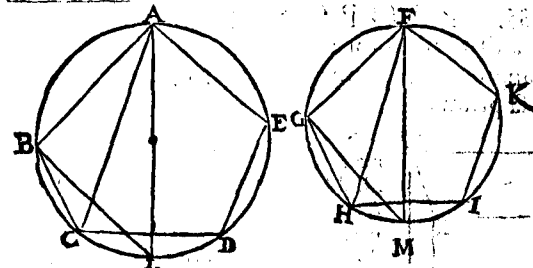
& Solidorum secundum.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

Qvæ in circulis polygona similia; inter se sunt, vt à diametris quadrata.



SInt duo polygona similia ABCDE, FGHIK, descripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est vt AB, ad BC,
d 6. sexti. ita FG, ad GH; d erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cùm circa angulos
e 21. tertij. æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia. e Est autẽ angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cùm ergo & anguli ABL, FGM, æquales



sint, f nempe recti in semicirculis existentes; g erũt & reliqui BAL, GFM, æquales. h Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad IG; & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. i Igitur est vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonũ ABCDE, super AB, ad polygonum FGHIK, super FG; cùm tam quadrata, quàm polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia inter se sunt, vt à diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

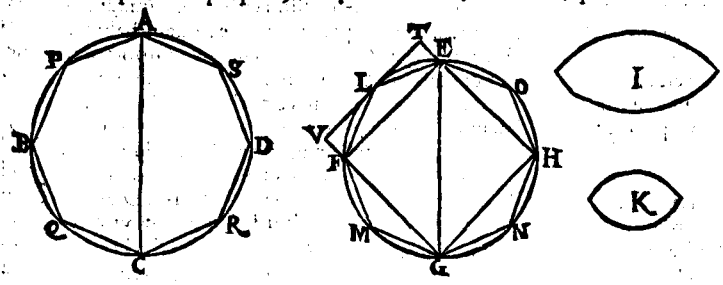
f 31. tertij.
g 23. primi.
h 4. sexti.
i 22. sexti.

THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter se sunt, quèmadmodum à diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Si enim esset æqualis, [a] haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eâdem proportionem: ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primùm I, minor, quàm circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis sit manitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quàm dimidium circuli EFGH.



Secentur bifariã peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiungãturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta TV, tangens circulũ in L, quæ parallela erit ipsi EF, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratque rectis HE, GF, productis in T, & V. [b] Quia ergo triangulum ELF, dimidium est parallelogrammi TEFV; maius erit triangulum ELF, quàm dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quàm dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quàm dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quàm dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam verò, si à circulo EFGH, auferatur plus quàm dimidium, nempe quadratum EFGH; & à reliquis segmentis plus quàm dimidium, nempe triangula ELF, FMG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; [c] relinquitur tandem minor magnitudo, quàm K, excessus inter circulum EFGH, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quàm magnitudo K. Cùm igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmẽtis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS, simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facilè fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secentur in B, & D, & rursus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia ABCD, in quot distributa est circumferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, vt patet. [d] Quoniam igitur est polygonum APBQCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc est, per hypothesim, vt circulus ABCD, ad I: Est autem polygonum APBQCRDS, minus circulo ABCD. [e] Igitur & polygonũ ELFMGNHO, minus erit quàm I. Ostensum autem est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.

[a] 7. quinti.

[b] 41. primi.

[c] 1. decimi.

[d] 11. duodec.

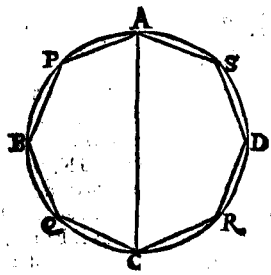
[e] 14. quinti

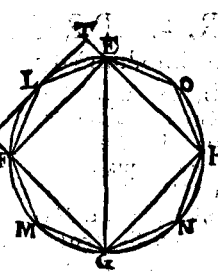
QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodẽ tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quàm maior circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum maioris diametri AC; Ita vt generaliter & vniuersè demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

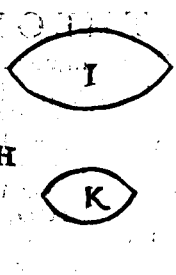
SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cùm ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulũ ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nẽpe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, [f] maior quoq; erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit vt quadratũ diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdũ. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, non posse esse vt quadratũ diametri ad quadratũ diametri, ita circulum ad magnitudinẽ circulo minorẽ; siue prior

[f] 14. quinti

circulus







circulus maior sit posteriore, siue minor. Quamuis autẽ circulus A B C D, maior est, & E F G H, minor: eadem tamen ratione ostẽdemus, quadratũ diametri circuli E F G H, ad quadratũ diametri circuli, A B C D, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus E F G H, ad magnitudinem circulo A B C D, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud cõcedatur) quadratrum diametri A C, ad quadratum diametri E G, eandem habere proportionem, quam habet circulus A B C D, ad magnitudinem circulo E F G H, minorem. quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersè quoque demonstratum sit, nunquã quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandẽ habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo E F G H: sed neque minor est ostensa æqualis igitur est. Quare cùm ponatur, vt quadratum diametri A C, ad
a 7. quinti. quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad I; [a] sit autem vt circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoq; vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H, siue circulus A B C D, circulo E F G H, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

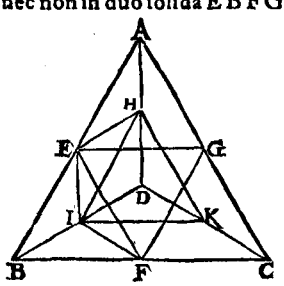
COROLLARIVM.

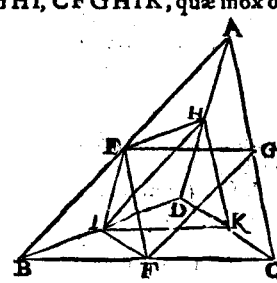
HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum
a 12. duode. *simile in hoc descriptum. Quoniam* [a] *tam circulus ad circulum,* [b] *quàm polygonum ad po-*
b 1. duode. *lygonum est, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.*

3. # THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius basis triangulum A B C, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, cõnectanturque rectæ E F, F G, G E, H I, I K, K H, H E, E I, I F. Diuisa itaq; est pyramis in duas pyramides A E G H, H I K D, quarum bases triangula A E G, H I K, & vertices H, D; nec non in duo solida E B F G H I, C F G H I K, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum





illius basis est parallelogrammum E B F G, & triangula opposita E H G, B I F; huius verò basis est triãgulum C F G, cui opponitur triangulum K I H, habentq; hæc prismata terminum communẽ, parallelogrammum F G H I; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt constat, si rectè concipiatur pyramidis vertex D in sublimi, nec non eius triangula circumia centia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cùm enim latera A D, B D,
a 2. sexti. trianguli A D B, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter: [a] erunt H I, A B, parallelæ: Eadẽ ratione parallelæ erunt I K, B C; & H K, A C; & E G, B C; & E F, A C; & F G, A B; & E H, B D;&
b 9. vndec. E I, A D; & I F, D C; & H G, D C. [b] Sunt autẽ & rectæ F G, H I, cùm parallelæ sint ipsi A B, inter se parallelæ: Atq; eadẽ ratione parallelæ sunt G H, F I, cùm sint parallelæ ipsi D C. Quare parallelogramma sunt A E I H, H E B I, I D H E, E B F G, G H K C, C K I F, F G H I. Quoniam verò rectæ
10. vndec. H E, H G, rectis D B, D C, sunt parallelæ, [c] erunt anguli E H G, B D C, æquales: Ac eadem rõne
d 4. sexti. æquales erunt anguli H E G, D B C; & H G E, D C B. [d] Proportionalia igitur sunt latera triãguli H E G, lateribus trianguli D B C, circa æquales angulos: ac proinde simile est triãgulum H E G, triangulo D B C. Sunt autem & triangula H A E, H A G, A E G, triangulis D A B, D A C, A B C, similia, per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo A E G H, pyramidi A B C D, similis est

per

per defin.9.huius lib. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ; [a] erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. [b] Quare latera trianguli HIK, lateribus triãguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. huius lib. Quoniam autem triãgula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. [c] ipsa quoque inter se similia erunt. Cùm igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cùm similia sint ostensa triangulo ADC, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula AEG, HIK, cùm similia sint ostensa triangulo ABC, & super rectas posita AE, HI, [d] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum AEIH. Non secus æqualia erũt & similia triangula EHG, IDK, cùm sint ostensa similia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, [e] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales sunt & similes, per 10. defin. 11. lib. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratum est.

a 10. vndec.
b 4. sexti.
c 21. sexti.
d 34. primi.
e 34. primi.

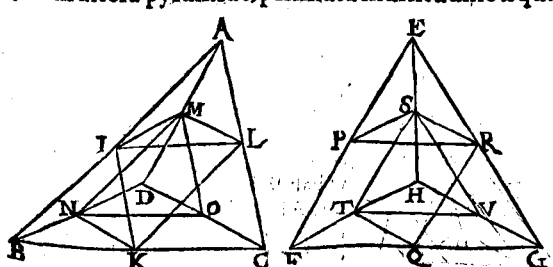
Rvrsvs, [f] quia rectæ EH, HG, GE, æquales sunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB; ob parallelogramma EHIB, FGHI, BFGE, erunt triangula EHG, BIF, æquiãgula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1. Ac propterea & similia: [g] Sunt autem & parallela; cùm EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelę sint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur solidum BIFGHE, contentum duobus triangulis EHG, BIF, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, prisma est, ex definitione. Eodem modo prisma ostendetur solidum CFGHIK. [h] Cùm enim rectæ FC, CG, GF, æquales sint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: [i] Sunt autem & parallela, quòd rectæ CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ sint rectis KI, KH, per quas planũ KIH, ducitur. Igitur solidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atq; tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, prisma est. Quoniam verò prismata EBFGHI, CFGHIK, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK, & parallelogrammum EBFG, basis illius, duplum est trianguli CFG, basis huius, per scholium propos. 41. lib. 1. [k] Ipsa inter se æqualia erunt.

f 34. primi.
g 15. vndec.
h 34. primi.
i 15. vndec.
k 40. vndec.

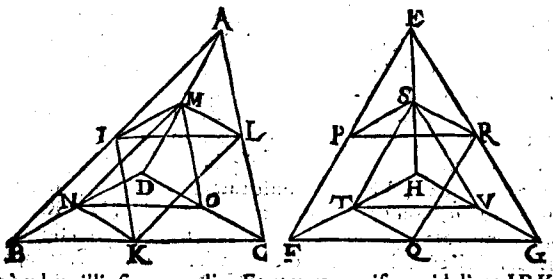
Denique quia prisma EBFGHI, maius est pyramide EBFI, totum parte: Est autem pyramis EBFI, æqualis & similis pyramidi AEGH, necnon pyramidi HIKD, vt perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maiora erunt prismata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ verò à dimidio eiusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor verò à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

Si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraque diuisa & in duas pyramidas æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraq; pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idq; semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.



Sint super bases triangulares ABC, EFG, duæ pyramides ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturq; rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI, PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraq; secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST, GQRSTV; vt vult propositio præcedens: eodemq; modo intelligantur esse diuisæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG. Cùm enim sit vt BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quòd vtraq; linea diuisa est bifariam; sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterque posita: Item trian-



a 22. sexti. gula EFG, RQG, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. a Erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulũ LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita eſt priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, vt mox oſtendemus, atque adeò ita priſma IBKLMN, ad priſma PFQRST, cùm hæc illis ſint æqualia: Et vt vnum priſma, videlicet IBKLMN, ad vnũ priſma PFQRST, b ita ſunt duo priſmata IBKLMN, CKLMNO, ad duo priſmata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita duo priſmata in pyramide ABCD, ad duo priſmata in pyramide EFGH. Simili argumento oſtendemus, ita eſſe bina priſmata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina priſmata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt ſunt baſes AILMNO, illarum pyramidum, ad baſes EPRSTV, harum pyramidum; & ſic deinceps, eadem ſemper facta diuiſione. Sed vt illæ baſes ad has, ita eſt LKC, baſis quæ illis eſt æqualis & ſimilis, ad baſin RQG, quæ his eſt æqualis, & ſimilis, vt in præcedenti oſtẽ demonſtratum, hoc eſt, ita eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Igitur erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita priſmata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad priſmata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, vt priſmata pyramidis ABOD, ad priſmata pyramidis EFGH, ita priſmata tam pyramidis AILM, ad priſmata pyramidis EPRS, quàm priſmata pyramidis MNOD, ad priſmata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cùm ſint, vt duo priſmata pyramidis ABCD, ad duo priſmata

b 12. quinti. pyramidis EFGH, c ita omnia priſmata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. ſimul ad omnia priſmata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. ſimul, ſi hæc illis multitudine ſint æqualia: Erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata in pyramide EFGH. Quocirca ſi fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 12. quinti.

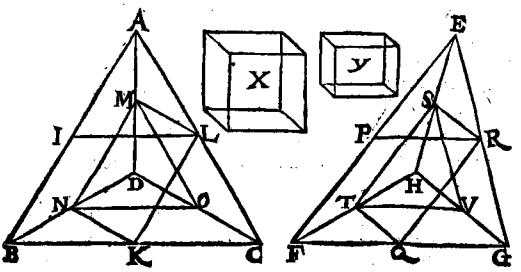
LEMMA.

Quod autem ſit LKC, ad RQG, ita priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ita oſtendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad baſes ABC, EFG, demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana

a 17. vndec. *parallela ABC, MNO, a ſecant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demiſſam proportionaliter; ſecatur autem DC, bifariam in O; ſecabitur quoque perpendicularis ex D, demiſſa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſecabitur à plano STV. Quare cùm totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata CKLMNO, GQRSTV, cùm habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, vt baſes LKC, RQG, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 11. demonſtrauimus.*

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.



SINT pyramides eiuſdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum baſes triangula ABC, EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Si enim non ita ſit, ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primò minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, iuxta propoſ. 3. huius lib. Rurſus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina priſmata æqualia, & ſic deinceps. Quoniam igitur, ſi à pyramide EFGH, auferatur plus quàm

a 3. duodec. dimidiũ, nempe duo priſmata PFQRST, GQRSTV, a quæ maiora ſunt dimidio pyramidis

EFGH.

EFGH: Item à reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quàm dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps: [a] relinquetur tandem minor magnitudo quàm Y, exceſſus pyramidis EFGH, ſupra ſolidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cùm autem pyramis EFGH, æqualis ponatur ſolidis X, Y; erunt reliqua priſmata in pyramide EFGH, maiora ſolido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqualia: Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. [b] Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide EFGH, vt baſis ABC, ad baſin EFG, hoc eſt, vt pyramis ABCD, ad ſolidum X: Sunt autem omnia priſmata in pyramide ABCD, minora, quàm tota pyramis ABCD; [c] erunt quoque omnia priſmata in pyramide EFGH, minora quàm ſolidum X. Oſtenſa verò ſunt & maiora. Quod eſt abſurdum. Non ergo minus eſt ſolidum X, pyramide EFGH.

[a] 1. decimi

[b] 4. duode.

[c] 14. quinti.

SIT deinde ſolidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt baſis ABC, ad baſin EFG; erit conuertendo ſolidũ X, ad pyramidem ABCD, vt baſis EFG, ad baſin ABC. Ponatur, vt ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y. Et quia ſolidũ X, maius ponitur pyramide EFGH; [d] erit & pyramis ABCD, maior ſolido Y. Quare erit, vt baſis EFG, ad baſin ABC, ita pyramis EFGH, ad ſolidũ Y, quod minus eſt pyramide ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe, vt eſt baſis ad baſin, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Non ergo maius eſt ſolidum X, pyramide EFGH: ſed neq; minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cùm ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; [e] Sit autem pyramis ABCD, ad ſolidũ X, vt ad pyramidẽ EFGH, ſolido X, æqualem: Erit quoq; vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidẽ EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtẽtes pyramides, &c. Quod erat oſtendendũ.

[d] 14. quinti.

[e] 7. quinti.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, ſi pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abſciſionis ad omnes angulos baſis ducantur rectæ lineæ; Erit q; vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem modò conſtitutam; Sed ſic quoq; erat ad totam pyramidem. [a] *Pyramis ergo conſtituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt abſurdum.*

[a] 9. quinti.

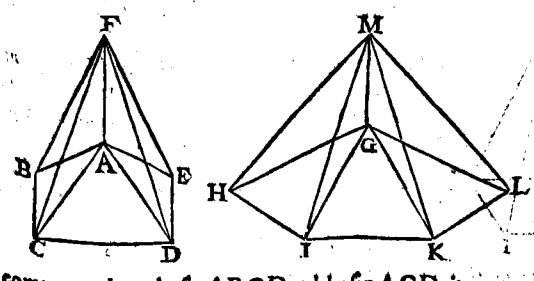
COROLLARIVM.

HINC fit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quòd eandem proportionem habent cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.

ITEM ſequitur, è conuerſo pyramides triangulares æquales ſuper eandẽ, vel æquales baſes, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemq; habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento oſtendemus, quo in conuerſo propoſ. 30. & 31. lib. 11. demonſtrando vſi ſumus: ſi tam in altitudine, quàm in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.



SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum baſes polygonę ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuiſa. [a] Quia verò eſt, vt baſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: [b] Sed rurſus eſt vt baſis ACD, ad baſin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidẽ ADEF. Igitur ex æquo vt baſis ABCD, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt baſis ABCDE, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt baſis GHIKL, ad baſin GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & conuertendo vt baſis GKL, ad baſin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. [c] Rurſus quoniam eſt, vt baſis ADE, ad baſin GKL, ita

[a] 5. duode.

[b] 5. duode.

[c] 5. duode.

ABCDE.	ABCDEF.
ADE.	ADEF.
GKL.	GKLM.
GHIKL.	GHIKLM

pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula videre; manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo, erit vt baſis ABCDE, ad baſin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus eiuſdem altitudinis loquatur, ſecundùm interpretes, quorum baſes polygona latera habent multitudine æqualia; facilè tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum vnius baſis plura continet latera, quàm baſis alterius. Sint enim primùm duæ pyramides eiuſdē altitudinis ABCDEF, GHIK, quarū illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, huius verò triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidē, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuiſa. [a] *Quoniam verò eſt, vt baſis ABC, prima quantitas, ad baſin GHI ſecūdam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quātitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quanti-*

a 5. duode.

b 24. quin.

tas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem: [b] *Erit vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidē GHIK, quartam quantitatē. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundā quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modò eſt oſtenſum:* [c] *& vt baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem;* [d] *Erit etiam baſis ABCDE prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quātitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quātitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Eodem modo ſemper procedendum eſt, ſi plura fuerint triangula in baſi polygona. Cùm autem vt demonſtratum eſt, ſit vt baſis polygona ABCDE, ad baſin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo, vt baſis GHI, ad baſin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quamobrem duæ pyramides qualibet, quarum vnius baſis eſt polygona, alterius triangularis, ſuis baſibus ſunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonſtratio incipiat à polygono, eiusq; pyramide, vt ex demonſtratione conſtat, tamen conuertendo licebit initium quoq; ſumere à triangulo, eiusq; pyramide, vt dictum eſt.*

c 5. duode.

d 24 quin.

SED iam ſint duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum baſes ſint polygona, ſintq; plura latera in vna baſe, quàm in altera. Dico rurſus eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuiſa pyramides. Quia verò, vt iam eſt demonſtratum, eſt vt baſis ABG, triangularis prima quantitas, ad baſin GHIK, polygonam, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHIK ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. [e] *Erit etiam vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proximè demonſtratum eſt; Et eſt quoq;, vt baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas, ad pyramidem*

e 24. quin.

f 24. quin.

GHIKL, quartam quantitatem, vt antè eſt oſtenſum; [f] *Erit etiam vt baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi ABCDE.*

HANC

HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases; eandem habēt altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea, quæ in scholio propos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

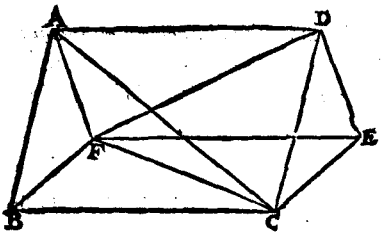
COROLLARIVM.

PERSPICVVM quoq; inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cùm eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.

RVRSVS contrà fit, pyramides multangulas æquales, & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemq; habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. propos. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. 6.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes,

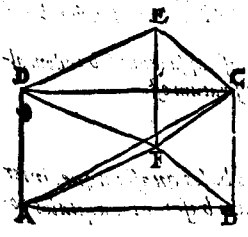


SIT prisma ABCDEF, cuius duo triāgula opposita, æqualia, ac similia ABF, DCE. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF. [a] Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia sunt; [b] estq; vt basis ABC, ad basin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cùm hæ pyramides eandē habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum ABCD, demissam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, super æquales bases ADF, EFD, constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C, ad planum ADEF, demissa. Est autē pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cùm illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc verò eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EFDC, cùm tam EFDC, quàm CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE, totum prisma componentes, vt perspicuum est) æquales sunt inter se. Ac propterea prisma ABCDEF, in tres pyramides æquales est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34 primi.
[b] 5. duodec.

COROLLARIVM I.

HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandē cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.

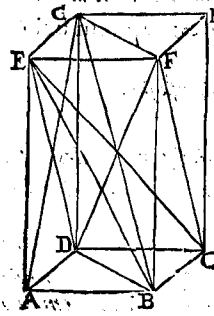


SIT enim primùm pyramis ABFC, triangularem habens basin ABF; & prisma ABCDEF: sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABF. Dico pyramidem esse tertiā partem prismatis. Namsi ducatur recta DF, erit prisma diuisum in tres pyramides æquales ABCF, ADFC, CDEF; [a] vt demonstratum est; Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cùm hæc illi sit æqualis, immo eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF. Cùm igitur pyramis ABFC, æqualis sit cuicunq; alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, cōstitutæ, ex toto 11. propos. 5. huius lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem, & altitudinem; ac propterea prisma è contrario esse pyramidis triplum,

[a] 7. duode.

SIT deinde pyramis ABCDE, cuius basis rectilineum quodcunq; ABCD, quotlibet laterum; & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano oppositio EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD; EHF, FGH: erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF: erit vt demonstratū est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFEHD; Itē pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare erit, vt pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad

a 12.quinti



prisma CDHGFB; [a] *Ac propterea vt vna pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul tertiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE; propterea quòd pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & sub eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt æquales, ex coroll. propos. 5. huius lib. Eademq; ratione æquales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basim, & sub eadem altitudine. Quapropter cùm pyramides ADBE, BCDE, componãt totam pyramidem ABCDE; erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cùm igitur pyramis ABCDE, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basim ABCD, constitutæ, per corollarium propos. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemq; altitudinem.*

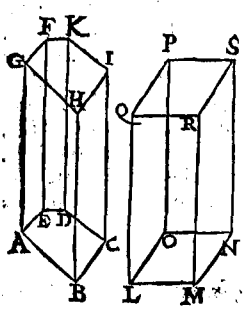
Quod si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singulæ pyramides triangulares horum prismatum erunt tertiæ partes singulorum prismatum. Cùm igitur omnes hæ pyramides æquales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

Eodem modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiusmodi pyramis æqualis est pyramidi illi, quæ eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem per coroll. propos. 6. huius lib. Quam quidem iam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIVM I.

Ex dictis facilè demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

Svb eadem altitudine existentia prismata, quascumque habeant bases; inter se sunt, vt bases.



Quamvis enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices verò lineæ rectæ; nempe de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen idipsum demonstrabimus vniuersè de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygona, quamuis plura latera, seu anguli in vnius basi reperiantur, quàm in basi alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum bases sint figuræ multilateræ. Dico vt est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis vtriusque basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases: Ac proinde per coroll. præditum huius propos. quælibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. [b] *Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, vt basis ad basin, vt ostensum est propos. 6. eiusq; scholio. Igitur erit quoque vt basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.*

b 15.quinti

Conuerso modo, si prismata quæruncunque basium inter se sint, vt bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholium propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIVM II.

Vnde prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ æquales nuntur, vel certè vna & eadem.

Econtrario, Prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. 11. suis demonstratum.

SCHOLIVM II.

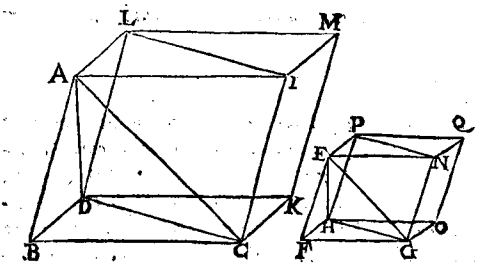
Cæterum tam ea, quæ in priori corollario, quàm illa, quæ in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodò de prismatis, quæ in vertice habent plana basi parallela, æqualia, & similia. Quod dixerim,

dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, æqualibus, & similibus; & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodo prisma dici ab Euclide, vt in definitione prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis vnum illorum triangulorum, erit necessariò pyramis eiusdem altitudinis, eandemq; habens basim, tertia pars ipsius prismatis, vt in coroll. 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, vt in scholio ostendimus. At verò si in prismate tali basis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice sit linea recta, nō erit pyramis eandem habens basim, eandemq; altitudinem, tertia eius pars, sed duæ tertiæ partes; hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud æquale & simile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex corollario prædicto, cùm parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirū sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinē, cùm sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quæ cùm ita sint, non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoq; & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel lineæ rectæ sunt, & bases parallelogramma, vel certè, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, æqualia atq; similia. Hac enim ratione, si vertices prismatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemq; altitudinis, duæ tertiæ partes prismatū, vt modò demonstrauimus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.



SINT pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita vt bases ABC, EFG, sint similes, & reliqua triangula vnius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ, conuenientes in M, connectatúrque recta KM. Erit igitur completum parallelepipedum BM, eiusdem cum pyramide altitudinis, cùm plana solidi BM, sint parallela, vt facilè colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodē modo perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur ob similitudinē pyramidum, anguli plani ABC, EFG, sunt æquales, estque vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, similia. Eodem modo cùm anguli ABD, EFH, sint æquales, sitque vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; item anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG; erunt & parallelogramma BL, BK, parallelogrammis FP, FQ, similia. [a] Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepipedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM; quàm tria FN, FQ, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ, [b] sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia sunt sex planis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex definit. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniam verò ductis rectis LI, PN, [c] prismata DBCILA, HFGNPE, habent eandem proportionem, quàm parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem quam prismata dicta, earum tripla; [d] habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. [e] Cùm igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 24. vndec.
[b] 24. vndec.
[c] 15 quinti.
[d] 11 quinti.
[e] 33. vndec.

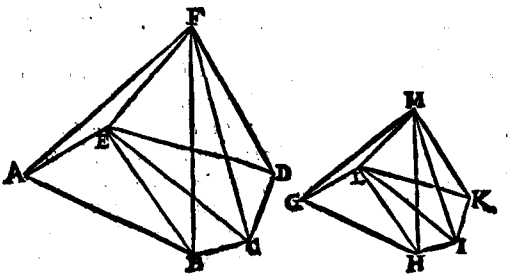
COROLLARIVM.

Ex hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quàm tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilineæ similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ EB, EC; LH, LI, [a] diuisæ erunt bases similes in trian-

[a] 20. sexti.

gula numerò æqualia, & similia; nimirum triangula A B E, E B C, C D E, similia erunt triangulis G H I, L H I, I K L. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula A E F, G L M, similia sunt, & angulus F E A, angulo M L G, æqualis; erit vt F E, ad E A, ita M L, ad L G. Vt autem E A, ad E B, ita L G, ad L H, propter similitudinem triangulorum A E B, G L H. Igitur ex æquo erit, vt F E, ad E B, ita M L, ad L H. Rursus quia est, vt E B, ad B A, ita L H, ad H G, ob triangula similia A B E, G H L; Et vt B A, ad B F, ita H G, ad H M, cùm ob pyramidum similitudinem similia sint triangula A B F, G H M: Erit quoque ex æquo, vt E B, ad B F, ita L H, ad H M; Ac propterea cùm sit, vt F E, ad E B, ita M L, ad L H; & vt E B, ad B F, ita L H, ad H M; erit etiam ex æquo, vt F E, ad F B, ita M L, ad M H. [a] *Quare æquiangula, atque adeò & similia sunt triangula F E B, M L H. Sunt autē & triangula F E A, F A B, A B E, triangulis M L G, M G H, G H L, similia. Igitur pyramides A B E F, G H L M, ex definitione 9. libri 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides E B C F, L H I M; Item C D E F, I K L M.* [b] *Quapropter, vt demonstratum est, pyramides A B E F, E B C F, C D E F, ad pyramides G H L M, L H I M, I K L M, singula ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum A B, B C, C D, ad G H, H I, I K, singulorum ad singula. Cùm igitur A B, B C, C D, ad G H, H I, I K, habeant vnam & eandem proportionem, ob similitudinem basium A B C D E, G H I K L; habebunt quoque pyramides A B E F, E B C F, C D E F, ad pyramides G H L M, L H I M, I K L M, vnam eandemq; proportionem, triplicatam scilicet illius;* [c] *Atque idcircò erit, vt vna pyramis A B E F, ad vnam pyramidem G H L M, ita omnes pyramides, nempe pyramis A B C D E F, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem G H I K L M. Quam ob rem,* [d] *cùm pyramis A B E F, ad pyramidem G H L M, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum A B, G H; habebit quoque pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K L M, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum A B, G H. Quod est propositum.*



a 5. sexti.

b 8. duodecimi.

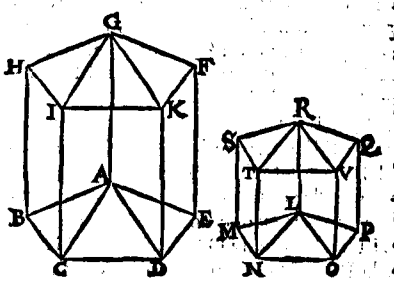
c 12. quinti.

d 8. duodecimi.

SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia A B C D E F G H I K, L M N O P Q R S T V. Dico eorum proportionem, esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ A C, A D; L N, L O, [e] *erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula A B C, C A D, D E A, triangulis L M N, N L O, O P L, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ G I, G K; R T, R V, erunt triangula G H I, I G K, K F G, & triangulis R S T, T R V, V Q R, & triangulis antè dictis, similia, cùm omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quansam verò ob similitudinem prismatum, parallelogramma C H, N S, similia sunt; erit vt I C, ad C B, ita T N, ad N M: Vt autem C B, ad C A, ita quoque est N M, ad N L, ob similitudinem triangulorum B C A, M N L. Igitur ex æquo erit, vt I C, ad C A, ita T N, ad N L. Rursus quoniam angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirum angulus M N O, angulo B C D, & angulus T N M, angulo I C B, & angulus T N O, angulo I C D: Conuenit autem & recta N L, rectæ C A, eò quòd anguli M N L, B C A, sunt æquales. Igitur anguli I C A, T N L, æquales sunt: Ac propterea cùm latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erunt parallelogramma C G, N R, similia. Atqui & parallelogramma C H, H A, parallelogrammis N S, S L, & triangula A B C, G H I, triangulis L M N, R S T, similia sunt. Igitur prismata A B C I G H, L M N T R S, similia sunt; ex definitione solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata C D A G I K, N O L R T V; nec non prismata A E D K G F, L P O V R Q. Quapropter prismata A B C I G H, C D A G I K, A E D K G F, ad prismata L M N T R S, N O L R T V, L P O V R Q, per ea, quæ demonstrauimus ad propositionem 34. libri 11. triplicatam habent proportionem, singula ad singula, latera in homologorū B C, C D, D E, ad M N, N O, O P, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus prismata A B C D E F G H I K, L M N O P Q R S T V, proportionē habere homologorum laterum B C, M N, triplicatam, quo paulò antè vsi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.*

[e] 20. sexti.



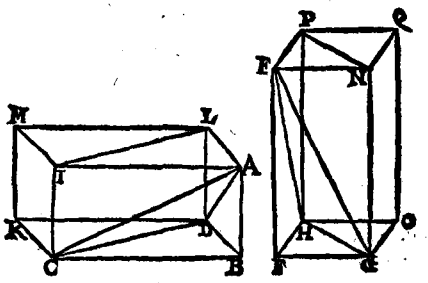
Ex quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, & numero

numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis corollarij.

Eodem modo infertur, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 7.

AEQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.



SINT æquales pyramides triangulares A B C D, E F G H. Dico earum bases A B C, E F G, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt A B C, ad E F G, ita altitudinem pyramidis E F G H, ad altitudinem pyramidis A B C D. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propositione dictum est, parallelepipeda B M, F Q, eorundem altitudinũ cum pyramidibus, connectanturque rectæ L I, P N; erunt prismata D B C I L A, H F G N P E, cùm sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda B M, F Q, cùm sint prismatum dupla, æqualia quoq; erunt. [a] Quare bases eorum & altitudines reciprocabũtur, hoc est, erit vt basis B I, ad basin F N, ita altitudo solidi F Q, ad altitudinẽ solidi B M: [b] Vt autem basis B I, ad basim F N, ita est triangulum A B C, ad triangulum E F G. Igitur erit quoque vt basis A B C, ad basin E F G, ita altitudo pyramidis E F G H, ad altitudinem pyramidis A B C D, cùm altitudines pyramidum eædem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

[a] 34. vndec.
[b] 15. quinti.

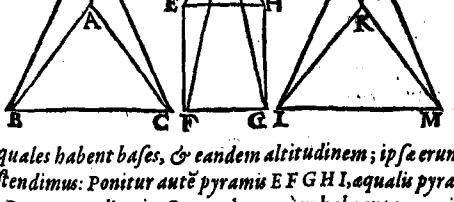
SINT iam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, vt prius; [c] cùm sit vt A B C, ad E F G, ita parallelogrammũ B I, ad parallelogrammũ F N; sintq; eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum & altitudines eorundem reciprocæ; [d] Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda B M, F Q. Quare & prismata D B C I L A, H F G N P E, eorum dimidia, æqualia erunt: Atq; propterea pyramides quoque, prismatũ tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 15. quinti.
[d] 34. vndec.

Q

SCHOLIVM.

EADEM ratione Aequalium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atq; altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. Sint enim primùm duæ pyramides æquales, quarum quidem A B C D, basin habeat triangularem; at verò E F G H I, non triangularem. Fiat basi non triangulari E F G H, æquale triangulum K L M. Quod quidem fiet, si basis multilatera æquecetur ad parallelogrammum, per propos. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facilè ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 42. lib. 1. Deinde super K L M, fiat pyramis K L M N, eiusdem altitudinis cum pyramide E F G H I. Quoniã ergo pyramides E F G H I, K L M N,



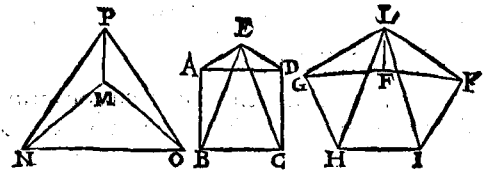
æquales habent bases, & eandem altitudinem; ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. huius libri ostendimus: Ponitur autẽ pyramis E F G H I, æqualis pyramidi A B C D. Igitur & pyramis K L M N, pyramidi A B C D, æqualis erit. Quamobrem, cùm habeant pyramides A B C D, K L M N, bases triangulares; [a] erit vt basis A B C, ad basin K L M, hoc est, ad huic æqualem basin E F G H, ita altitudo pyramidis K L M N, hoc est, altitudo pyramidis E F G H, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis A B C D. Ac proinde pyramidum A B C D, E F G H I, æqualium bases & altitudines reciprocantur.

[a] 9. duodecimi.

SED reciprocentur iam harum pyramidum bases atq; altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constructa enim figura eodem modo; cũ basis K L M, æqualis sit basi E F G H, & altitudo pyramidis K L M N, eadem, quæ pyramidis E F G H I; ponatur autem esse vt A B C, ad E F G H, ita altitudo pyramidis E F G H I, ad pyramidis A B C D, altitudinem; erit quoq; vt basis A B C, ad basim K L M, ita altitudo pyramidis K L M N, ad altitudinem pyramidis A B C D. [b] Quamobrem æquales sunt pyramides A B C D, K L M N. Cùm ergo pyramis K L M N, æqualis sit pyramidi E F G H I, per ea, quæ ostensa sunt in scholio propos. 6. huius lib. Erit & pyramis A B C D, pyramidi E F G H I, æqualis. Quod est propositum.

[b] 9. duodecimi.

SINT deinde pyramides æquales A B C D E, F G H I K L, quarũ bases sint multangula. Fiat rursus trian-



gulum MNO, æquale basi ABCD, & pyramis MNOP, eiusdem altitudinis cum pyramide ABCDE: Erit q; ex scholio propos. 6. huius libri, pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis est pyramidi FGHIKL. Quare, vt nunc demonstrauimus, erit vt basis MNO, hoc est, basis ABCD, sibi æqualis, ad basim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinẽ pyramidis MNOP, hoc est, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIKL, bases & altitudines reciprocantur.

SED reciprocentur iam bases harum pyramidum atque altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constituta enim eodem modo figura, cùm basis MNO; æqualis sit basi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinẽ pyramidis MNOP. Quare, vt ante ostendimus, æquales erũt pyramides MNOP, FGHIKL: Est autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis, ex scholio propos. 6. huius libri. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIKL, æqualis erit. Quod est propositum.

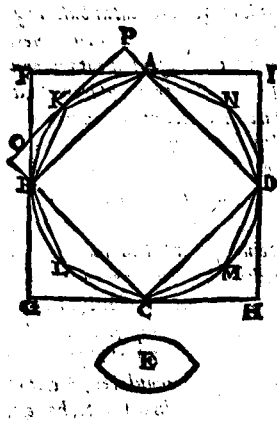
OMNIA hæc facilè quoq; demonstrabuntur conuenire prismatis quibuscunque. Nam si prismata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum cum ipsis, & super easdem bases, æquales; cùm sint eorum tertiæ partes, ex coroll. propos. 7. huius libri. Vel certè duæ tertiæ, si nimirum prismatum bases fuerint parallelogramma, & eorum vertices, lineæ rectæ, vt in scholio eiusdem propositionis ostensum est. Quare, vt modò demonstrauimus, bases harum pyramidum, atq; altitudines reciprocantur. Cùm ergo hæ bases & altitudines eadem sint, quæ prismatum; reciprocabuntur quoque bases prismatum atque altitudines.

RVRSVS, si prismatum bases, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines pyramidum, easdem bases & altitudines cum prismatis habẽtium. Quare, vt demonstratum est, pyramides æquales sunt; Ac propterea prismata, cùm earum sint tripla, vel certè sesquialtera, æqualia quoque sunt. Quod est propositum.

9.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.



HABEANT conus & cylindrus basin eandẽ circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non credatur esse tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, sed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primùm maior quàm triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus sit æqualis triplo coni, & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratũ ABCD, & circa eundẽ, quadratũ FGHI; intelligãturq; super hæc quadrata sub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniã igitur quadratũ ABCD, dimidiũ est quadrati FGHI, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus; [a] estq; vt basis ad basin, ita parallelepipedũ ad parallelepipedũ eiusdem altitudinis; Erit & parallelepipedum basis ABCD, dimidium parallelepipedi basis FGHI. Ac proinde parallelepipedũ basis ABCD, maius erit, q̃ dimidium cylindri, cuius basis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturq; rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoq; per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratq; rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AKB, ABOP, intelligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. [b] Quia ergo triangulum AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP; erit quoque prisma basis AKB, dimidium prismatis, seu parallelepipedi basis ABOP: cùm sit prisma ad prisma, vt basis ad basim, quemadmodum ad propos. 7. huius lib. demonstrauimus; Ac propterea prisma basis AKB, maius erit, quàm dimidium segmenti cylindri, cuius basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erũt prismata, quorũ bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quàm dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul maiora sunt, quàm dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quòd si rursus peripheriæ AK, KB, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo prismata eiusdem altitudinis cùm cono & cylindro, quæ maiora erunt simul, quàm dimidia omnium segmentorum cylindri simul,

a 32. vndec.

b 41. primi.

simul, quorum bases circuli segmenta, & sic deinceps. Quoniam verò si à cylindro, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus ℚ dimidium, nempe parallelepipedum basis A B C D; & à reliquis segmentis plus ℚ dimidium; nimirum prismata basium A K B, B L C, &c. atq; in hunc modū semper fiat detractio, [a] relinquitur tandem minor magnitudo, ℚ E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmenta cylindri relicta, basium A K, K B, B L, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora ℚ E. Cùm igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni vnà cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulæ A K B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maius ℚ reliquum triplum coni; ideoq; conus minor erit, ℚ tertia pars prismatis. Quare cùm dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni. [a] 1. decimi.

SIT deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior, ℚ tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior ℚ tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratū A B C D, & circa eundē quadratum F G H I; intelligantúrque super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratū A B C D, dimidium est quadrati F G H I, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus, [b] estque vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis. Erit quoque pyramis super A B C D, dimidium pyramidis super basin F G H I; ac proinde pyramis super basin A B C D, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus A B C D. Secētur peripheriæ A B, B C, C D, D A, bifariam in K, L, M, N, adiunganturq; rectæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi A B, vt ad propos. 27. lib. 3. demonstrauimus, occurratq; rectis D A, C B, productis in P, & O, & super A K B, A B O P, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. [c] Quia ergo triangulum A K B, dimidium est parallelogrammi A B O P, erit quoq; pyramis super basin A K B, dimidium pyramidis super basin A B O P; [d] cùm pyramides habeāt proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin A K B, maior erit dimidio segmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadē ratione erunt pyramides, quarū bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores ℚ dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, ℚ dimidia omnium segmētorum coni simul. Quòd si rursus peripheriæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, ℚ dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmēta: & sic deinceps. Quoniam verò si à cono, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus ℚ dimidium, nempe pyramis super basin A B C D, quam maiorem esse ostendimus, ℚ dimidium coni, cuius basis est circulus A B C D; & à reliquis segmētis plus ℚ dimidium, nimirum pyramides basium A K B, B L C, C M D, D N A; atq; in hunc modum semper fiat detractio, [e] relinquitur tandem minor magnitudo, ℚ E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, ℚ E. Cùm igitur conus æqualis ponatur tertię parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmēta prædicta, & ex tertia parte cylindri, vnà cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est, præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum A K B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quàm tertia pars cylindri reliqua: ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cùm prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt suprà in corollario propositionis septimæ huius libri à nobis est demonstratum, erit huiusce modi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, propterea quę conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinē æqualem. Quod erat demonstrandum. [b] 6. duodec. [c] 41. primi. [d] 6. duodec. [e] 1. decimi.

SCHOLIVM.

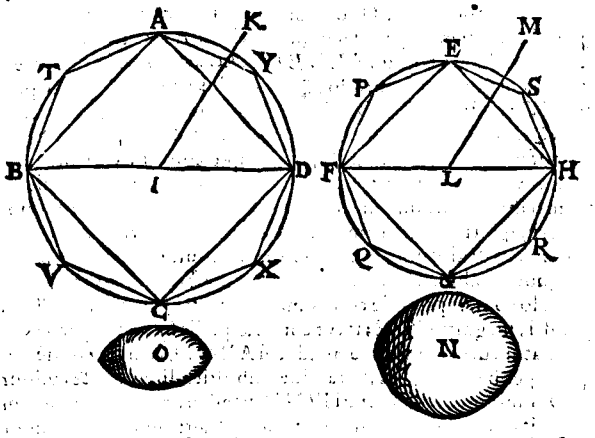
QVAMVIS propositio hac solùm intelligatur de conis & cylindris rectis, cùm hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quàm scalenis conuenit, vt perspicuum est eius demonstrationem diligenter intuenti. Itaque propositio vniuersè ita proponi poterit.

OMNIS conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri, siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, licèt non sit idem axis coni & cylindri.

THEOR. II. PROPOS. II.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases.

SINT sub eadem altitudine coni & cylindri, quorū bases circuli A B C D, E F G H, altitudines



verò æquales I K, L M. Dico vt est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrũ. Si enim hoc non credatur, sit vt basis A B C D, ad basim E F G H, ita conus A B C D K, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel maior erit, vel minor cono E F G H M. Si enim esset æqualis, *a* haberet conus A B C D K, ad conum E F G H M, & ad N, proportionem eandem ac propterea esset conus ad conum, vt basis ad basim; quæ non conceditur. Sit ergo primùm N, minor quàm conus E F G H M, magnitudine O, ita vt conus E F G H M, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribatur in circulo E F G H, quadratum E F G H, diuidanturque peripheriæ E F, F G, G H, H E, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ E P, P F, F Q, &c. Quoniam igitur si ex cono E F G H M, detrahatur pyramis super basin E F G H, eiusdē altitudinis, & à reliquis segmētis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basium E P F, F Q G, &c. atq; in hunc modũ semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est; *b* relinquetur tandem minor magnitudo, quàm O, excessus coni E F G H M, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium E P, P F, F Q, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quàm O. Cùm igitur conus E F G H M, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmentis maior est, erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum E P F Q G R H S, eiusdem altitudinis cũ cono, maior quàm N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo A B C D, polygonum A T B V C X D Y, simile polygono E P F Q G R H S, vt in propos. 2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri B D, F H. Quoniam igitur, per coroll. propos. 2. huius libri, est vt circulus A B C D, ad circulum E F G H, ita polygonum A T B V C X D Y, ad polygonum E P F Q G R H S: Vt autem circulus A B C D, ad circulum E F G H, ita ponitur conus A B C D K, ad magnitudinem N, *c* & vt polygonum, ad polygonũ, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, vt conus A B C D K, ad N. Cùm igitur pyramis A T B V C X D Y K, minor sit cono A B C D K, pars toto, *d* erit & pyramis E P F Q G R H S M, minor quàm N: Ostensa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono E F G H M.

a 7. *quinti.*
b 1. *decimi.*
c 6. *duodec.*
d 14. *quinti.*

Sit secundò N, maior cono E F G H M. Cùm igitur ponatur vt circulus A B C D, ad circulum E F G H, ita conus A B C D K, ad N; Erit & conuertendo vt circulus E F G H, ad circulũ A B C D, ita N, ad conum A B C D K. Ponatur vt N, ad conum A B C D K, ita conus E F G H M, ad magnitudinẽ O. Et quia N, maior ponitur cono E F G H M; *e* maior quoq; erit conus A B C D K, quàm O. Quare erit vt circulus E F G H, ad circulum A B C D, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O, quæ minor est cono A B C D K. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo cono E F G H M. Sed neq; minor est ostensa: Æqualis igitur est. Quapropter cùm ponatur, vt basis A B C D, ad basin E F G H, ita conus A B C D K, ad N; *f* Sit autem, vt conus A B C D K, ad N, ita idem conus A B C D K, ad conum E F G H M; erit quoque vt basis A B C D, ad basin E F G H, ita conus A B C D K, ad conum E F G H M.

e 14. *quinti.*
f 7. *quinti.*

g 15. *quinti.*

Quoniam autem, vt conus A B C D K, ad conum E F G H M, ita est cylindrus A B C D K, (qui triplus est coni A B C D K,) ad cylindrum E F G H M, (qui triplus est coni E F G H M,) erit quoque vt basis A B C D, ad basin E F G H, ita cylindrus A B C D K, ad cylindrum E F G H M. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo vsi sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Perspicuum quoq; est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solis rectis propo suit, ob rationem superius traditam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, vt eius demonstratio manifestè indicat, ita vt propositio vniuersè proponatur in hunc modum.

Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

Conuertetur hæc propositio quoq; hoc modo.

Si

Si coni & cylindri inter se sint, vt bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

Quod quidem demonstrabis eo modo, quo conuersum propos. 32. lib. 11. ostendimus.

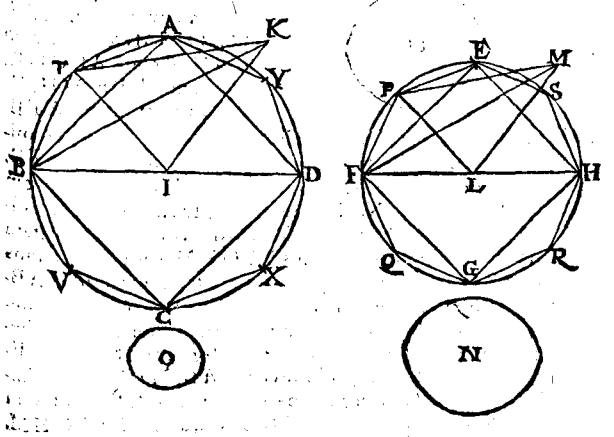
COROLLARIVM.

Hinc fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.

Item sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac conuersum propos. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

THEOR. 12. PROPOS. 12. 10.

Similes coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

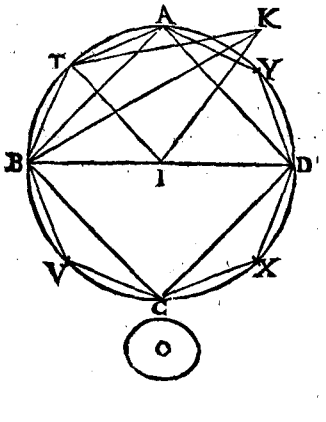


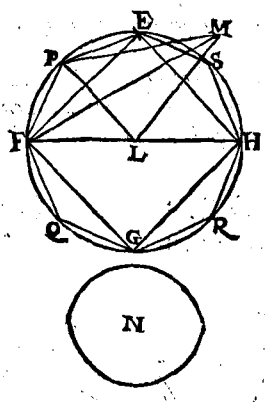
Sint similes coni & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, axes verò LK, LM, & diametri basium BD, FH. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc nõ credatur, habeat conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel maior cono EFGHM. Si enim esset æqualis, [a] haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionẽ eandem: Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conum EFGHM, esset quoq; triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH; quod nõ conceditur. Sit ergo primùm N, minor, q̃ conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita vt rursus pyramis EPFQGRHSM, maior ostendatur, q̃ N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, vt habeantur duo triangula BKT, EMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, similes ponuntur, erit, ex 24. defin. lib. 11. vt diameter BD, ad diametrum FH, [b] ac propterea vt semidiameter BI, ad semidiametrum FL, ita axis IK, ad axem LM; Ac permutãdo vt BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cùm igitur anguli BIK, FLM, recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, propterea q; axes recti ad eorum bases; [c] erunt triangula BIK, FLM, æquiangula; [d] Ac propterea vt KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Vt autem BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP. (Cùm enim anguli BIT, FLP, insistentes similibus arcubus BT, FP, sint æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostensum est; sitq; vt BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatem tam linearum BI, IT, q̃ FL, LP; [e] erunt triangula BIT, FLP, similia.) Igitur ex æquo, vt KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rursus quia latera KI, IB, trianguli KIB, æqualia sunt lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli dictis lateribus comprehensi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cùm axis IK, rectus ponatur ad circulum ABCD, [f] erunt bases KB, KT, æquales. Eodem modo, æquales erunt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cùm vtrobique sit proportio æqualitatis. [g] Quoniam verò vt KB, ad BT, ita KT, ad eandem BT; Item vt MF, ad FP, ita MP, ad eandem FP: Erat autem vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Erit q̃q; vt KT, ad BT, ita MP, ad FP; Et conuertẽdo vt BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cùm sit vt TK, ad KB, ita PN, ad MF; & vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Et vt BT, ad TK, ita FP, ad PM, voluti ostensum est; habebunt triangula BKT, FMP, latera proportionalia, [h] ideoq; æquiangula erunt; Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendetur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse. Quæ cùm sint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propos. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita est BI, ad FL, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP; Et vt BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad py-

[a] 7. quinti. [b] 15. quinti. [c] 6. sexti. [d] 4. sexti. [e] 6. sexti. [f] 4. primi. [g] 7. quinti. [h] 6. sexti. [i] 15. quinti.

ramidem habebit quoq; proportionẽ triplicatam diametrorũ B D, F H: Ponebatur autem & proportio coni A B C D K, ad N, earundem diametrorũ triplicata. Igitur erit vt pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, ita conus A B C D K, ad N. Quare cũ pyramis A T B V C X D Y K, minor sit cono A B C D K, pars toto: [a] erit & pyramis E P F Q G R H S M, minor q̃ N. Ostensa aũt est & maior. Quod est absurdũ. Non igitur minor est magnitudo N, cono E F G H M.

a 14. quinti.





SIT deinde N, maior cono E F G H M. Cùm ergo ponatur conus A B C D K, ad N, habere proportionẽ triplicatam diametri B D, ad diametrum F H; Habeat autẽ & pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, triplicatam proportionem earundẽ diametrorum vt proximè ostẽdimus: Erit vt conus A B C D K, ad N, ita pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, & conuertendo vt N, ad conũ A B C D K, ita pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y K. Quare cùm ex coroll. propos. 8. huius lib. pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y K, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum P F, ad T B, hoc est, diametri F H, ad diametrum B D; habebit quoq; N, ad conum A B C D K, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrũ B D. Ponatur vt N, ad conum A B C D K, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus E F G H M, ad O, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Et quia N, maior ponitur q̃ conus E F G H M, [b] erit quoq; conus A B C D K, maior q̃ O. Quapropter conus E F G H M, ad magnitudinem O, minorem cono A B C D K, proportionem habet triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinẽ alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono E F G H M: Sed neq; minor est ostensa. Æqualis igitur est: [c] ac proinde conus A B C D K, eandem habet proportionem ad conum E F G H M, & ad N. Cùm ergo ponatur conus A B C D K, ad N, in triplicata proportione diametrorũ B D, & F H; erit quoq; conus A B C D K, ad conũ E F G H M, in earundem diametrorum proportione triplicata.

b 14. quinti.

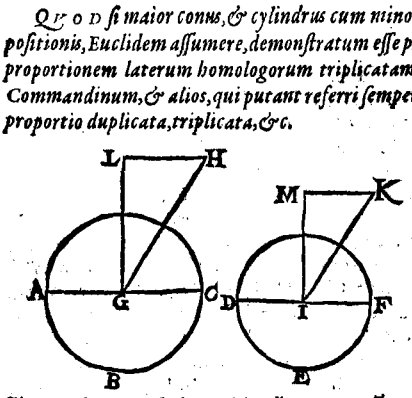
c 7. quinti.

[d] QVONIAM verò, quam proportionẽ habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo vsi sumus in conis, si modò loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.

d 15. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si maior conus, & cylindrus cum minore conferatur, perspicuum est, in secunda parte huius propositionis, Euclidem assumere, demonstratum esse propos. 8. huius lib. minorẽ pyramidem ad maiorem habere proportionem laterum homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra F. dericum Commandinum, & alios, qui putant referri semper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.



HAEC porrò propositio, quamuis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cùm in demonstratione assumatur axes rectos ad bases. Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni, & cylindri scaleni, quorũ bases circuli A B C, D E F, axes verò G H, I K. Dico tam conum ad conum, q̃ cylindrũ ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. Intelligantur enim super easdem bases duo coni, & cylindri recti earundem cum scalenis altitudinum, quorũ axes G L, I M. Ducantur q; per rectas G H, G L; Item per I K, I M, plana secantia bases lineis rectis A C, D F, quæ diametri basium erunt. Quoniam igitur axes G L, I M, recti sunt basibus A B C, D E F: [a] erunt & plana per G H, G L; & per I K, I M, ad easdem recta. [b] Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad bases demissæ cadent in A C, D F, communes sectiones; & proinde erunt an-

a 18. vnde.

b 38. vnde.

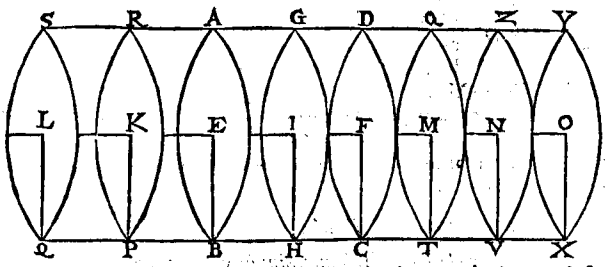
guli

guli C G H, F I K, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cùm coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem & anguli C G L, F I M, æquales, nempe recti, ex defin. 3. libri 11. [a] *Reliqui igitur H G L, K I M, æquales quoq; erunt. Quoniam verò coni A B C H, A B C L, ponuntur esse eiusdem altitudinis, erit recta H L, per axium vertices ducta ipsi A C, parallela,* [b] *ideoq; angulus L, rectus. Eodemq; argumẽto rectus erit angulus M, cùm & anguli C G L, F I M, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cùm sint æquales eorũ alterni anguli C G H, F I K. Triangula igitur G H L, I K M, æquiangula sunt;* [c] *atq; idcirco erit vt G H, ad G L, ita I K, ad I M; & permutando, vt G H, ad I K, ita G L, ad I M. Vt autem axis G H, ad axem I K, ita est A C, diameter ad D F, diametrum; & coni & cylindri scaleni ponuntur similes. Igitur & G L, axis ad I M, axem erit, vt diameter A C, ad D F, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti A B C L, D E F M, similes erunt, ex definitione.* [d] *Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia verò tam conus & cylindrus A B C L, cono & cylindro A B C H, (cùm eandem habeant basim, & altitudinem,) quàm conus & cylindrus D E F M, cono & cylindro D E F K, (ob eandem rationẽ,) est æqualis, vt constat ex corollario propos. 11. huius lib.* [e] *Erit vt conus & cylindrus A B C L, ad conum & cylindrum D E F M, ita conus & cylindrus A B C H, ad conum & cylindrum D E F K: ideoq; proportio coni & cylindri A B C H, ad conum & cylindrum D E F K, triplicata quoq; erit diametri A C, ad diametrum D F. Quod est propositum.*

a 32. primi.
b 29. primi
c 4. sexti.
d 12. duodecimi.
e 7. quinti.

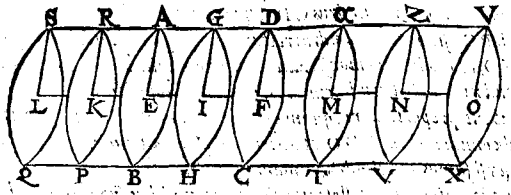
THEOR. 13. PROPOS. 13. 11.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.



SECETVR cylindrus A B C D, plano G H, parallelo aduersis planis A B, C D, quod quidem secet axem E F, in I. Dico vt est cylindrus A B H G, ad cylindrũ G H C D, ita esse axem E I, ad axem I F. Intelligatur enim cylindrus A B C D, in vtramque partem, vnà cum eius axe & rectangulo E C, ad cuius reuolutionem describptus est cylindrus, protractus quantumlibet: Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ E K, K L, æquales ipsi E I; Item quotcunque rectæ F M, M N, N O, æquales ipsi F I. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ I H, K P, L Q, M T, N V, O X, parallelæ, & æquales rectis E B, F C; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli E C, describẽt circulos G H, P R, Q S, T α, V Z, X Y, parallelos & æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circunferuntur. Ac propterea cylindri erunt S P, P A, A H, H D, D T, T Z, Z X, ex definitione, componentes totũ cylindrum S Q X Y. Quoniam verò tam cylindri S P, P A, A H, super bases æquales Q S, P R, B A, & sub altitudinibus æqualibus K L, E K, I E, æquales sunt, quàm cylindri X Z, Z T, T D, D H, super æquales bases X Y, V Z, T α, C D, & sub altitudinibus æqualibus N O, M N, F M, I F, ex corollario propositionis 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus S H, cylindri A H, quàm multiplex est axis I L, ipsius axis I E: Item tàm multiplex cylindrus X G, cylindri C G, quàm multiplex est axis I O, ipsius axis I F. Quoniam autem si axis I L, (multiplex I E, primæ magnitudinis) æqualis est axi I O, (multiplici axis I F, secundæ magnitudinis) æqualis quoq; est cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartæ magnitudinis) vt ex propositione 11. huius libri liquet. Si verò axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est: Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per definitionem 6. lib. 5. ita axis I E, prima magnitudo ad axem I F, secundam magnitudinem, vt cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersis planis parallelo: erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

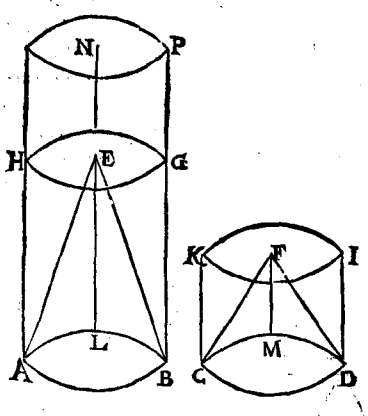


ERAT hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat: tamẽ eius demonstrationem cylindro scaleno facilè accommodabis, si modò adhibeas descriptionem cylindri scaleni, sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; itavt quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quiescens latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri L S, K R, I A, & C

semper æquidistantes circa centra L,K,E,&c. vnà cum recta SY, semidiametros coniungente. Hac enim ratione semper cylindri describentur, vt constat ex ijs, quæ scribit Serenus in lib. 1. de Sectione cylindri.

11. # THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualib⁹ basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.



SINT super bases æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis, axes ipsi sunt altitudines) LE, MF. Dico esse conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt est altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vnà cũ eius axe LE, & rectangulo AG; abscindaturque axis EN, æqualis axi MF, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, vt fiat cylindrus GHOP, eiusdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniam igitur cylindri HP, CI, cùm habeãt æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll. propos. 11. huius lib. [a] cylindrus AG, ad ipsos eandem habebit proportionem: [b] Est autem cylindrus AG, ad cylindrum HP, vt axis, seu altitudo LE, ad axem, seu altitudinem EN, hoc est, ad altitudinê MF, sibi æqualem. Igitur & cylindrus AG, ad cylindrum CI, erit quoque, vt altitudo LE, ad altitudinem MF.

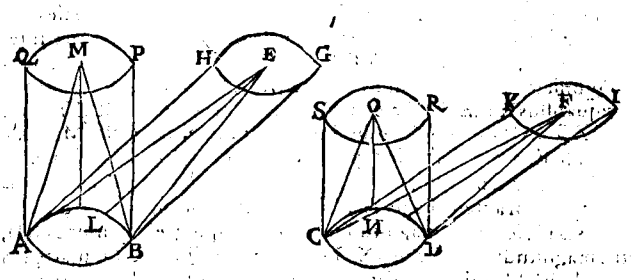
a 7. quinti.
b 13. duodec.

[c] Quia verò coni ABE, CDF, sunt tertiæ partes cylindrorum AG, CI; [d] ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LE, ad altitudinem MF. Super æqualibus igitur basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt altitudines. Quod ostendendum erat.

c 10. duodec.
d 15. quinti.

SCHOLIVM.

Hoc idem conuenire conis scalenis, hoc modo demonstrabimus. Sint super bases æquales AB, CD, coni ABE, CDF, & cylindri ABGH, CDIK, scaleni, quorum altitudines LM, NO. Dico conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, esse, vt est altitudo LM, ad altitudinem NO. Super basin enim AB, construatur cylindrus rectus ABPQ, sub altitudine LM; Item super basin CD, cylindrus CDRS, sub altitudine NO.



a 14. duodecimi.

[a] Quoniam igitur est cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO: Est autem cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Item cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex corollario propos. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

b 10. duodecimi.
c 15. quinti.

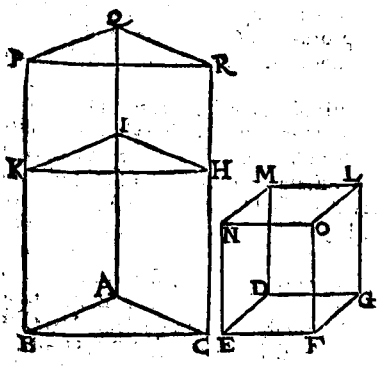
QVONIAM autem coni, [b] cùm sint tertiæ partes cylindrorum, [c] eandem habẽt proportionem, quam cylindri: Erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodem argumento, quo vsi sumus in cylindris, confirmari potest, vt perspicuum est, si super bases AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundem altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit scalenus, alter verò, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cùm cylindrus scalenus ABGH, æqualis sit cylindro recto ABPQ; sit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonstrauit: Erit quoq; cylindrus scalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

d 15. quinti
e 10. duodecimi.

QVONIAM verò coni eandem habent proportionem, quam cylindri, [e] cùm illi horum sint tertiæ partes; Erit etiam conus scalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO. Quod nihilominus ostendetur eadem ratione, qua vsi sumus in cylindris, vt manifestum est.

EADEM quoque hæc propositio conuenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. Sint enim super bases æquales ABC, DEFG, prismata ABCHIK, DEFGLMNO, & pyramides



pyramides ſub eiſdem altitudinibus. Dico eſſe priſma ad priſma, & pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem. Sint namque inſiſtentes lineæ A I, C H, B K, priſmatis A B C H I K, ad baſin A B C, perpendiculares, ita vt B K, ſit altitudo priſmatis A B C H I K; Productis autem rectis A I, C H, B K, ſumãtur I Q, H R, K P, æquales altitudini priſmatis E L; & ductis rectis P Q, Q R, R P, compleatur priſma H I K P Q R, eiuſdem altitudinis cum priſmate E L. Erunt q; priſmata H I K P Q R, E L, cùm habeant & baſes, & altitudines æquales, inter ſe æqualia, ex coroll. 2. propoſ. 7. huius lib. [a] Ac propterea priſma A B C H I K, ad vtrumq; eandem habebit proportionem. Quia verò ex ſcholio propoſitionis 25. lib. 11. priſma A B C H I K, ad priſma H I K P Q R, eſt vt planum B I, ad planum K Q; [b] Et vt planum B I, ad planum K Q, ita eſt recta B K, ad K P; erit priſma A B C H I K, ad priſma H I K P Q R, hoc eſt, ad priſma E L, vt B K, altitudo priſmatis A B C H I K, ad K P, altitudinem priſmatis H I K P Q R, hoc eſt, priſmatis E L. Quod eſt propoſitum.

a 7. quinti.

b 1. ſexti.

QVOD ſi inſiſtentes lineæ A I, C H, B K, non ſint perpendiculares ad baſin A B C, conſtituendum erit ſuper baſin A B C, aliud priſma, cuius inſiſtentes ſint perpendiculares ad baſin, & æquales altitudini priſmatis A B C H I K. Nam cùm ex 2. coroll. propoſ. 7. huius lib. hæc duo priſmata eandem habentia altitudinem, & baſin, ſint æqualia, ſit q; priſma conſtitutum ad priſma E L, vt illius altitudo ad huius altitudinem: erit & priſma A B C H I K, ad priſma E L, vt altitudo illius, ad altitudinem huius.

QVONIAM verò pyramides eandem habent proportionem cum priſmatis, [d] quòd illæ ſint horum tertia partes: Perſpicuum eſt, ita quoque eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem.

[c] 15. quin.

[d] 7. duode.

EADEM prorſus eſt ratio habenda de parallelepipedis, cùm parallelepipeda comprehendantur etiam nomine priſmatum, vt dictum eſt, atq; ob id eadem illis demonſtratio poſſit accommodari.

HÆC omnia eodem fere modo demonſtrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & priſmatis eandem habentibus baſem.

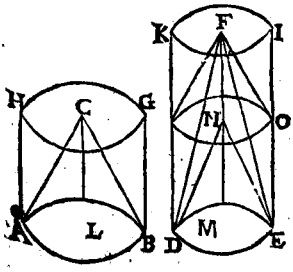
OMNIA quoq; hæc facilè conuerti poſſunt, hoc modo.

CONI & cylindri tam recti, quàm ſcaleni; Item priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, baſes habebunt æquales.

NAM alioquin pars æqualis foret toti, vt in conuerſo propoſ. 31. lib. 11. oſtenſum eſt.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 12.

AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.



SINT æquales coni A B C, D E F, & æquales cylindri A B G H, D E I K, quorum baſes A B, D E; axes, altitudines ſue L C, M F. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt A B, ad D E, ita M F, ad L C. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines L C, M F, ſint æquales, cùm cylindri ponantur quoque æquales; erunt & baſes æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare erit vt baſis A B, ad baſin æqualem D E, ita altitudo M F, ad altitudinem æqualem L C. Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines L C, M F, inæquales fuerint, ſit M F, maior, ex qua abſcindatur M N, ipſi L C, æqualis; & per N, ducatur planum O N, baſi D E, parallelum, vt in ſcholio propoſ. 15. lib. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri D O, O K. Quoniam igitur æquales ponũtur cylindri A B G H, D E I K; [a] erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus D E I K, ad eundem cylindrum D O. [b] Eſt autem vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita baſis A B, ad baſin D E, cùm æquales ſint altitudines: [c] Item vt cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, cùm baſes ſint æquales, immo vna & eadem D E. Igitur erit quoque vt baſis A B, ad baſin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, hoc eſt, ad huic æqualem L C; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.

[a] 7. quinti.

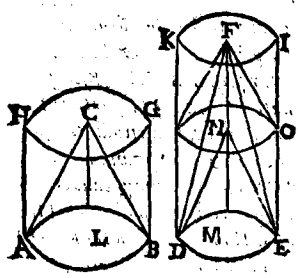
[b] 11. duodec.

[c] 14. duode.

IN conis verò ita concludemus propoſitum. Si coni A B C, D E F, ſint æquales; erunt & cylindri A B G H, D E I K, æquales, [d] cùm coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt oſtenſum

[d] 10. duod.

est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas: Ac propterea ex æqualitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo vsi sumus in cylindris, si modò sub altitudinibus M N, N F, constituantur duo coni, vt in figura.



a 11. duode.

b 14. duode.

Sed iam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines L C, M F, sint æquales, cùm sit vt basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem æqualem L C; erunt & bases A B, D E, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases A B, D E, & sub altitudinibus æqualibus L C, M F, æquales erunt, ex coroll. propos. 11. huius lib.

Quod si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio vt prius. Quia igitur ponitur vt basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinē L C, hoc est, ad huic æqualem M N; Est autem vt basis A B, ad basin D E, ita cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, cùm altitudines sint æquales: b Item vt altitudo M F, ad altitudinem M N, ita cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, cùm bases sint æquales; erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus D E I K,

c 9. quinti. ad eundem cylindrum D O; c Ideoque cylindrus A B G H, cylindro D E I K, æqualis erit.

At verò in conis hæc erit demonstratio. Si conorum A B C, D E F, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum A B G H, D E I K, cùm eædem sint bases, altitudinesq; conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, vt ostensum fuit, cylindri, ideoq; coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo, conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

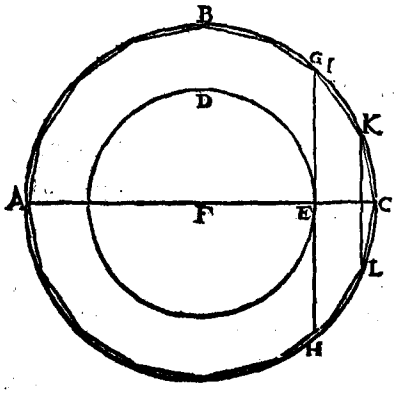
SCHOLIVM.

Non difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoq; recti, eosdem cum illis bases & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius libri. Quare, vt ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quòd si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoq; bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eædem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, vt demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt: Ac propterea coni & cylindri scaleni, cùm sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius libri, inter se quoq; erunt æquales.

Idem facilè concludetur, licet vnus conorum & cylindrorū sit rectus, & alter scalenus, vt perspicuum est ex ijs, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.

15. ## PROBL. I. PROPOS. 16.

Dvobvs circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterū inscribere, quod nō tangat minorē circulum.



d 1. decimi.

Sint duo circuli A B C, D E, circa idem centrū F, oporteatque in maiori A B C, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem D E. Extendatur per centrum F, recta A C, secans circulum D E, in E, puncto, & p E, ducatur G H, ad A C, perpendicularis, quæ tanget circulum D E, in E, ex corollario propos. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus A G C, maior est arcu G C, si ex A G C, auferatur dimidiū A B, & ex residuo B C, dimidium B I, & ex residuo I C, dimidium I K, & sic deinceps; d relinquetur tandem minor arcus, quàm C G. Sit igitur iam arcus C K, arcu C G, minor, & subtendatur recta C K. Dico rectam C K, esse vnum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus B I, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus C I; & quadrans A B, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans B C; nec non semicirculus A H C, in totidem partes, quot continet semicirculus A B C; deinde omnibus arcubus rectas

e 29. tertij. lineæ subtendantur, e quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ C K, eò quòd arcus arcui C K, æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo A B C, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem D E, ita ostendetur. Ex K, ad A C, demittatur per-

f 28. primi. pendicularis K L, secans ipsam A C, in M. Quoniā igitur anguli G E M, K M E, recti sunt; f erunt

rectæ

rectæ G H, K L, parallelę. Quare cùm recta G H, tangat circulum D E, in ſolo puncto E; recta K L, erit tota extra dictum circulum, nec vnquam ipſum continget, quòd nunquam cum recta G H, conueniat. Multò igitur minus recta C K, quæ longius à circulo D E, abeſt, quàm K L, circulum D E, tanget. Ac propterea neq; alia latera polygoni inſcripti, cùm æqualia ſint lateri C K; ideoq; æqualiter cum C K, à centro F, diſtent, circulum D E, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum. *a* 14. tertij.

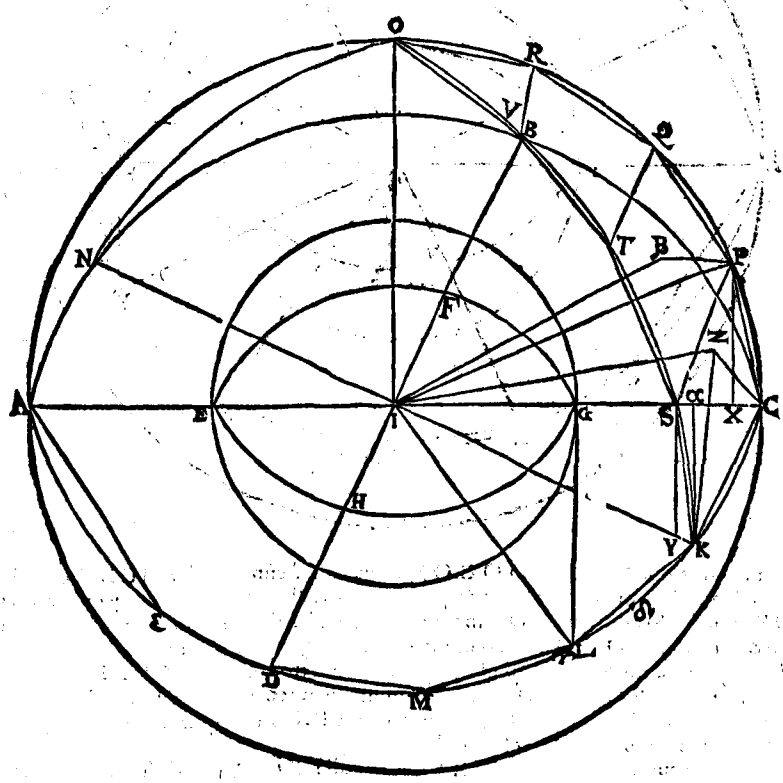
COROLLARIVM.

HINC eſt manifeſtum, ſi ab extremitate lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hāc nullo modo circulum minorem poſſe contingere, ſed totam extra ipſum cadere. Huiuſmodi enim eſt linea K L, quæ cùm ducatur ab extremo puncto K, lateris C K, cum diametro A C, conuenientis, ad A C, diametrum perpendicularis, oſtenſa eſt non tangere circulum D E.

PROBL. 2. PROPOS. 17. 14.

DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

SINT duæ ſphęræ A B C D, E F G H, circa idem centrum I, oporteatq; in maiori A B C D, inſcribere ſolidum polyedrum, ſeu multilaterum, quod non tangat minorem ſphæram E F G H. Secentur ambæ ſphæræ plano aliquo per centrum, ſintq; communes ſectiones factæ in ſphæris plana A B C D, E F G H, quæ circuli erunt, ex deſcriptione ſphæræ, habentes idem centrum ſphærarum I. Nam ſemicirculi, ad quorum circumuolutionem ſphæræ deſcribuntur, circumducti, congruent ſectionibus A B C D, E F G H. Quare dictæ ſectiones circuli erunt. Vel certè, quia omnes

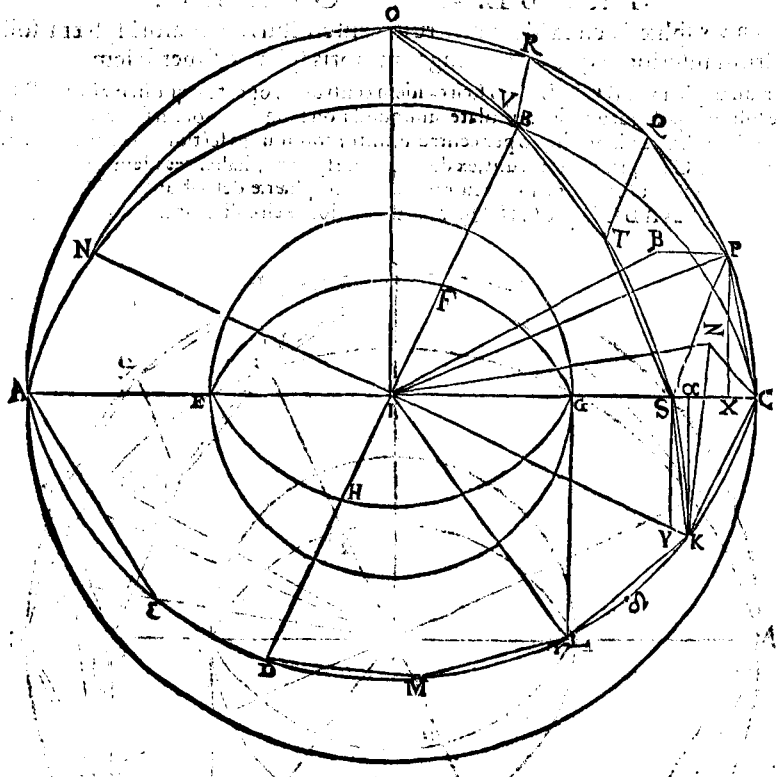


lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias ſectionum ſunt æquales, cùm ducantur ex centro ſphærarum ad earum ſuperficiem; erunt ipſæ ſectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri A C, B D, ſeſe in centro I, ſecantes ad angulos rectos, vt ſint quadrantes A B, B C, C D, D A, &c. Deinde in maiori circulo A B C D, inſcribatur polygonum non tangens minorem circulum E F G H. Quod quidem, vt facilius omnia demonſtrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad E G, ducatur perpendicularis G γ; ad circumferentiam verſq; circuli A B C D, quæ circulum E F G H, tanget in G, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Et recta G γ, applicetur in circulo A B C D, recta *b* 16. duodecimi. *c* 1. quarti.

a 19. primi. æqualis A ↄ. Quia verò si arcui C γ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum G C γ, ª latus C γ, oppositum maiori angulo, nempe recto, maius est latere G γ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto: erit quoq; recta C γ, maior recta A ↄ: ac proinde arcus C γ, arcu A ↄ, maior erit, vt constat ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus C ∂, arcui A ↄ, æqualis. Quod si ex quadrante C D, dimidium auferatur D L, & ex reliquo C L, dimidium L K, & sic deinceps, *b* relinquetur tandem arcus minor arcu C ∂, seu arcu A ↄ. Sitergo iam arcus C K, minor: Eritque recta C K, subtensa, minor quàm recta A ↄ, hoc est, quàm G γ, ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam C K, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cùm recta subtendés arcum C ∂, minorem arcu C γ, non tangat circulum E F G H, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet, multò minus recta C K, subtendens arcum minorem arcu C ∂, eundem circulum tanget. Rursus ducta diametro K N, ᶜ erigatur ex centro I, ad plana circulorum A B C D, E F G H, perpendicularis I O, occurrens superficiei sphæræ maioris in O. Eaper rectas O I, A C, & O I, K N, plana ducantur, ᵈ quæ ad circulum A B C D, recta erunt, efficientq; communes sectiones, circulos, vt iam dictum est, quorum semicirculi sint A O C, N O K. Quia verò anguli O I C, O I K, recti sunt,

a 12. vndec.

d 18. vndec.



e schol. 22. tertij. ex defin. 3. lib. 11. ᵉ quadrantes erunt O C, O K, atque adeò cùm circuli A B C D, A O C, N O K, æquales sint, quòd eorum diametri sint & sphæræ maioris diametri, erunt quoq; quadrantes C D, O C, O K, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus C L; & quadrantes O C, O K, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis

f 29. tertij. C D; *f* Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum C K, K L, L M, M D; C P, P Q, Q R, R O; K S, S T, T V, V O, æquales. Coniunctis autem rectis P S, Q T, R V, demittantur

g 38. vndec. ex P, & S, ad planum circuli A B C D, perpendiculares P X, S Y, *g* quæ in communes sectiones

h 6. vndec. A C, N K, cadent; *h* eruntque inter se parallelæ.

Quoniam igitur triangulorum P C X, S K Y, anguli P X C, S Y K, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11.

i 27. tertij. ⁱ & anguli P C X, S K Y, æquales, quòd & æquales sint peripheriæ A O P, N O S, quibus insistũt; (Nam si ex semicirculis A O C, N O K, æqualibus, demantur arcus æquales C P, K S, reliqui arcus A O P, N O S, æquales quoq; erũt.) Erunt duo anguli P C X, P X C, trianguli P C X, æquales duobus angulis S K Y, S Y K, trianguli S K Y: Sunt autem & latera P C, S K, rectis angulis opposita, æqualia. *k* Igitur reliqua latera P X, X C, reliquis lateribus S Y, Y K, æqualia erunt. Quare

k 26. primi.

l 33. primi. cùm rectæ P X, S Y, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta X Y; *l* æquales quoque erunt

m 2. sexti. & parallelæ P S, X Y, inter sese. ᵐ Atquia & rectæ C K, X Y, parallelæ sunt, quòd latera I C, I K, proportionaliter secta sint (Si enim ex semidiametris I C, I K, æqualibus demantur æquales rectæ C X, K Y,

CX, KY, relinquentur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad YK.) [a] Erunt parallelæ quoq; PS, CK, inter se, cùm vtraq; parallela sit ipsi XY; [b] ideoq; eas coniungentes rectæ CP, KS, in eodem cum ipsis plano existent. Totum igitur quadrilaterum CKSP, in vno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpediculares, & connectantur rectæ QC, TK, ostendemus similiter CK, QT, esse parallelas; atque adeò ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cùm eidem CK, sint parallelę; totumq; quadrilaterum PSTQ, in vno esse plano. Eadem ratione in vno erit plano quadrilaterum QTVR. [c] Est autem & triangulum RVO, in vno plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, vt tota sphæra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes OC, OK, super latus CK, constructis; inscriptum erit in sphæra maiori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphæram minorem EFGH.

a 9. vndec.
b 7. vndec.
c 2. vndec.

DVCATVR enim ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Cadere autē perpendicularem IZ, intra quadrilaterum CKSP, in scholio sequēti ostendemus. Quoniam igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti sunt; [d] erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cùm ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, æqualia erunt, ideoq; & ipsæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad PS, ducentur, æquales esse & inter se & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallum ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademq; ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos describi posse, demonstrabimus. Quoniam verò, vt postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est; erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cùm hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

d 47. primi.

DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis Kα. Cùm igitur AC, dupla sit ipsius AI, & Aα, maior sit, quàm AI, erit AC, minor duplo ipsius Aα. Quamobrem cùm sit, [e] vt AC, ad Aα, ita rectangulum sub AC, αC, ad rectangulum sub Aα, αC, quòd bases horum rectangulorum sint AC, Aα, & eadem altitudo αC; erit quoque rectangulum sub AC, αC, minus duplo rectanguli sub Aα, αC. [f] Est autem rectangulum sub AC, αC, æquale quadrato rectæ CK; & rectangulum sub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα; quòd recta CK, inter AC, αC, sit media proportionalis; & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cùm quadratum rectæ CK, ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ ZC; erit quadratum rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC. [g] Quoniam verò quadratum rectæ IC, æquale est quadratis rectarum IZ, ZC; & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum Iα, αK: Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK; Erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarum Iα, αK. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectæ αK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ IZ, maius quadrato reliquo rectæ Iα; ideoq; recta IZ, maior quàm recta Iα. Quapropter cùm punctum α, non tangat sphæram minorem EFGH, quòd, per coroll. propos. præcedentis, recta Kα, tota sit extra dictam sphæram; multò minus punctum Z, longius distans, eandem sphæram continget. Ac proinde cùm omnia alia puncta plani CKSP, longius absint à sphæra EFGH, quàm punctum Z, vt mox ostendemus, non tanget planum CKSP, sphæram EFGH.

e 1. sexti.
f 17. sexti.
g 47. primi.

SED & expeditius ex ipsa fere constructione figuræ ostendemus, planum CKSP, non tangere sphæram minorem FFGH, si prius ducatur recta Iγ, hoc modo. Quoniam ex cōstructione ostensum fuit, rectam CK, minorem esse recta Cγ; [h] Est autem CK, maior quàm ZC, quòd angulus CZK, obtusus sit, vt mox demonstrabitur; Multò maior erit Gγ, quàm ZC; Ac proinde quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ ZC. [i] Quia verò quadratum rectæ Iγ, æquale est quadratis rectarum IG, Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; sunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG, Gγ, quadratis rectarū IZ, ZC, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quàm IZ. Quam ob rem, cùm IG, sit sphæræ minoris EFGH, semidiameter; existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, sphæram EFGH, nequaquam continget.

h 19. primi.
i 47. primi.

DVCATVR rursus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritq; β, centrum circuli circa PSTQ, descripti, vt demonstratum est: Connexis autem rectis βP, IP, cùm angulus IβP, rectus sit, ex tertia definitione libri vndecimi, [k] erit quadratū rectæ IP, æquale quadratis rectarū Iβ, βP. Quia verò & quadratum rectæ IC, (quod æquale est quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale est quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia: Est autem quadratum rectæ ZC, maius quadrato rectę βP, quòd & linea ZC, maior sit, quàm linea βP, vt postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoq; & linea Iβ, maior quàm linea IZ: Ac proinde multò magis punctum β, extra sphæram EFGH, existet, quàm punctum Z, propterea q;

k 47. primi.

multò minus planum PSTQ, quàm CKSP, tanget sphæram minorem EFGH. Eodem modo demonstrabimus, quòd neque reliqua plana sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

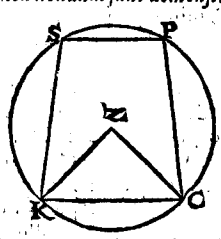
COROLLARIVM.

Ex iis, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum; vt constat, si intelligatur harum sphærarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuò lineæ rectæ ductæ à centris ad basium angulos, ob similitudinem basium; Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cùm singulæ pyramides in vna sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphærarum, vt constat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum. Habebit quoq; polyedrum vnius sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeò diametrorũ sphærarum, [a] *cùm semidiametri atq; diametri eandem habeãt proportionẽ.*

a 15. quinti.

SCHOLIVM.

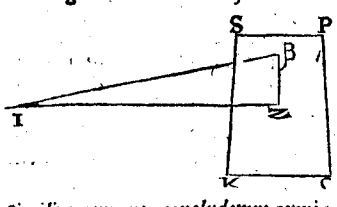
QVONIAM verò ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breuiter à nobis erunt demonstranda.



b 14. quinti

c 28. tertij.

PRIMVM ita q; ostendendum est, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK, esse obtusum. Quod vt commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura superiori, est vt IK, ad KC, ita IT, ad TX, (quòd per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ICK, IXT, similia sint.) Est autem IK, maior quã IT; [b] erit & KC, maior quàm TX. Cùm igitur TX, æqualis sit ostensa ipsi SP, erit quoq; KC, maior quàm SP; Ac propterea in hac figura, arcus CK, maior erit arcu SP, ex scholio propos. 28. lib. 3. [c] *Quare cùm arcus CP, KS, arcui CK, sint æquales, quòd & lineæ CP, KS, ipsi KC, lineæ sint æquales demonstratæ; (subtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex constructione figuræ superioris constat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores; Atq; idcirco quilibet arcuum CK, CP, KS, quadrantem circuli CKSP, excedet; atque à semicirculo superabitur, ac proinde multò magis segmentum SP, minus erit semicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non esse in illis segmentis. sed extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP. Eadem ratione ostendemus, perpendiculares ex I, ad plana aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est IB, cadere intra quadrilatera; necnon & perpendicularem ex I, ad triangulum ORV, ductam, cadere intra ipsum. Quia igitur arcus CK, quadrante maior est; angulus CZK, obtusus erit, nempe recto maior, cùm angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, vt perspicuum est ex scholio propos. 27. lib. 3.*



d 19. primi

SECVNDO demonstrandum est, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius à centro I, abesse, quàm punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur rectæ Iθ, Zθ. Quoniam ergo angulus IZθ, rectus est, ex defin. 3. lib. 11. [d] *Erit latus illi oppositum Iθ, maius latere IZ, quod minori angulo Iθ Z, nimirum acuto, opponitur. Ac propterea punctum θ, longius à centro I, distat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.*

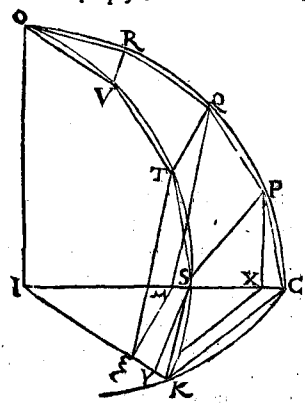
TERTIO, ac vltimo probandum est, rectam ZC, maiorem esse rectæ SP. Quod vt aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS, maiorem esse rectæ QT. Describatur igitur pars superioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur semidiametris IC, IK, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo est triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, [e] *quæ in communes sectiones IC, IK, cadent,* [f] *eruntq; inter se se parallelæ, vt de rectis PX, SY, dictum est. Quod si adiungatur recta μξ, erunt QT, μξ, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum fuit,*

e 38. vndecimi.

f 6. vndec.

fuit, parallelas esse & æquales PS, XY. [a] Quia verò μξ, ipsi CK, parallela est; quòd latera IC, IK, proportionaliter sint secta in μ, & ξ, veluti diximus de recta XT; [b] erunt quoque μξ, XY, parallelæ. Quare erit, ex corollario propos. 4. lib. 6. vt IT, ad TX, ita Iξ, ad ξμ: Est autem IT, maior quàm Iξ. [c] Igitur & TX, maior erit quàm ξμ; Ac proinde & PS, quæ æqualis est ipsi XY, maior erit quàm QT, quæ æqualis est ipsi ξμ.

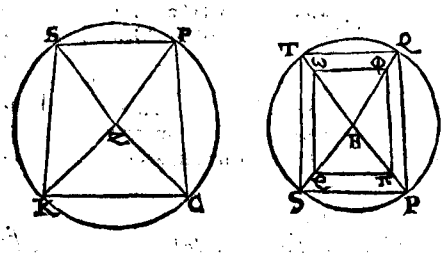
a 2. sexti.
b 30. primi
c 14. quinti



Hoc ergo demonstrato, describantur ex centris Z, β, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egredianturq; è centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP; βP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quàm βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primùm æqualis. Quia ergo latera ZK, ZC, æqualia ponuntur lateribus βS, βP, & basis KC, maior est basi PS; [d] erit angulus KZC, maior angulo SβP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TβQ. At quoniam bases KS, CP, basibus ST, PQ, sunt æquales; [e] erunt anguli KZS, CZP, angulis SβT, PβQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales cùm tam hi, quàm illi quatuor rectis sint æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur æqualis est recta ZC, rectæ βP.

d 25. primi
e 8. primi.

Sit deinde ZC, minor, quàm βP. Et abscindantur βπ, βρ, βω, βφ, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturq; rectæ πρ, ρω, ωφ, φπ,

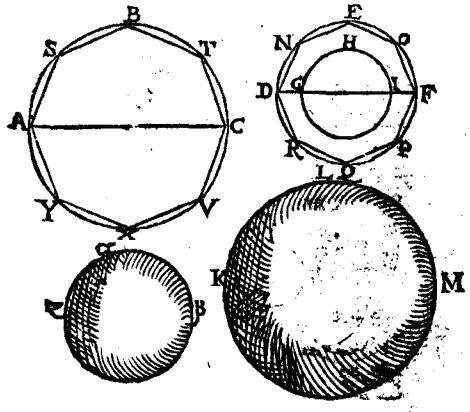


[f] quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eò quòd rectæ ex centris sectæ sunt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit vt βS, ad SP, ita βρ ad ρπ. Cùm ergo βS, maior sit quàm βρ, & erit & SP, maior quàm ρπ. Eademq; ratione maiores erunt ST, TQ, QP, rectis ρω, ωφ, φπ; Ac propterea cùm PS, minor sit, quàm CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quàm PS, erunt rectæ πρ, ρω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cùm rectæ βπ, βρ, βω, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sint æquales; [h] erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & æquales. quòd tam illi, quàm hi sint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC, quàm βP: Sed neque æqualis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.

f 2. sexti.
g 14 quinti
h 25. primi.

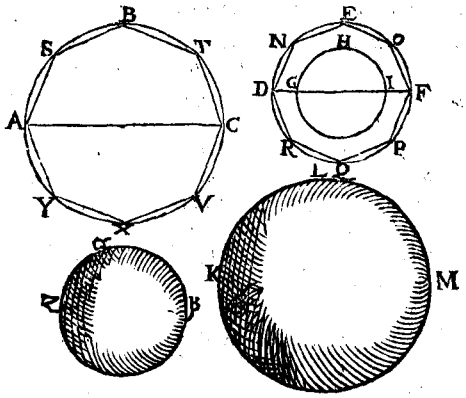
THEOR. 16. PROPOS. 18. 15.

SPHAERAE inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.



Sint duæ sphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit sphæra ABC, ad aliam sphęram GHI, minorem, vel KLM, maiorem, quàm DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad diametrum DF. Habeat primùm sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: intelligaturq; sphæra GHI, concentrica sphæræ DEF. [a] Inscribatur in sphæra maiori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem sphæram GHI; Atque huic simile polyedrum ASBTCVXY, inscribatur in sphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ ABC, ad sphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Est autem, per coroll. præcedentis propos. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt sphæra ABC, ad sphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cùm sphæra ABC, maior sit polyedro ASBTCVXY, [b] erit & sphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphęra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.

a 17. duodecimi.
b 14. quinti.



HABEAT ſecundò ſphæra A B C, ad ſphæram K L M, maiorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Cùm igitur, ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R, habeat proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; Erit vt ſphæra A B C, ad ſphæram K L M, ita polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R: Et conuertendo, vt ſphæra K L M, ad ſphæram A B C, ita polyedrum D N E O F P Q R, ad polyedrum A S B T C V X Y: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſitionis polyedrum D N E O F P Q R, ad polyedrum A S B T C V X Y, in triplicata proportione diametri D F, ad diametrum A C. Igitur & ſphæra K L M, ad ſphæram A B C, erit in triplicata proportione diametri D F, ad diametrum A C. Ponatur vt ſphæra K L M, ad ſphæram A B C, ita ſphæra D E F, ad aliam ſphæram Z α β. Habebit igitur & ſphæra D E F, ad ſphæram Z α β, proportionem triplicatam diametri D F, ad diametrum A C. Et quia ſphæra K L M, maior ponitur, quàm ſphæra D E F, erit quoque ſphæra A B C, maior, quàm ſphæra Z α β. Quapropter ſphæra D E F, ad ſphæram Z α β, minorem ſphæra A B C, proportionem habet triplicatam diametri D F, ad diametrum A C. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra A B C, ad ſphæram K L M, maiorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Sed neque ad minorem habet, vt demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Sphæræ itaque inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

HINC fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tam ſphæra ad ſphæram, quàm polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonſtratum eſt.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS

ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM:

& Solidorum tertium.

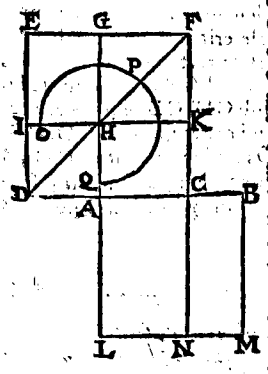
THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.



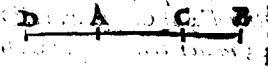
ECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitq; maius ſegmentum AC. Producta autem BA, ad D, ſit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum eſſe quadrati rectæ AD. Deſcribatur enim ſuper CD, quadratum CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipſi DE, parallela, ſecans diametrum in H, puncto, per quod ducatur IK, parallela ipſi CD. Producta deinde GA, perficiatur quadratũ AM, protrahaturq; FC, ad N. eruntq; ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. [a] Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum CM, ſub AB, CB, æquale ipſi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cùm ponatur AB, dupla ipſius AD, ſitque AL, ipſi AB; & AH, ipſi AD, æqualis; erit quoque AL, ipſius AH, dupla: [c] Eſt autem vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur eſt AN, ipſius AK. [d] Quoniam autem AK, ipſi IG, eſt æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cùm quadratum AM, quadruplum ſit quadrati AI, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quòd linea AB, dupla ponatur lineæ AD; erit & gnomon OPQ, eiuſdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, ſi gnomoni OPQ, addatur ipſum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.

a 3. defin. ſexti.
b 17. ſexti.
c 1. ſexti.
d 43. primi.



ALITER. Ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum eſt quadrati rectæ AD, quòd linea AB, dupla lineæ AD, ponatur. [e] Eſt autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis ſub AB, AC, & ſub AB, BC, comprehenſis: Et rurſus, quod ſub AB, AC, æquale eſt ei, quod ſub AD, AC, bis; (ſicut enim AB, ipſius AD, eſt dupla, [f] ita quoque erit rectangulum ſub AB, AC, rectanguli ſub AD, AC, duplum, cùm vtriuſq; rectanguli eadem ſit altitudo AC. Ac propterea rectangulum ſub AD, AC, biſ ſumptum æquale erit rectangulo ſub AB, AC.) [g] Quod verò ſub AB, BC, æquale eſt quadrato rectæ AC, cùm ſit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vnà cum rectangulo ſub AD, AC, bis, quadruplum quoq; erit quadrati rectæ AD: Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vnà cum rectangulo ſub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiuſdem rectæ AD. [h] Quocirca cùm quadratum rectæ CD, æquale ſit quadratis rectarum AC, AD, vnà cum rectangulo ſub AD, AC, bis; Erit & quadratum rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum. Si recta igitur linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

e 2. ſecundi.
f 1. ſexti.

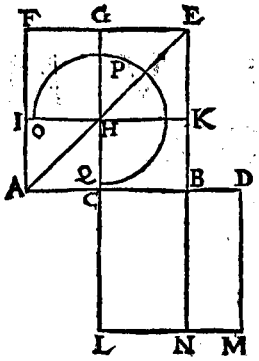


g 17. ſexti.
h 4. ſecundi

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſſit; Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ à principio, rectæ.

DIVISA ſit recta AB, in C, poſitq; quintuplum ſegmenti AC; ſumatur autem ipſius AC, dupla CD, quæ, vt poſt oſtendemus, maior erit reliquo ſegmento BC. Dico ſi CD, ſecetur extrema

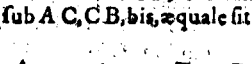


ac media ratione, maius ſegmentum eſſe CB, reliquam partem prioris lineæ. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipſi AF, parallela CG, ſecans diametrũ in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipſi AB. Producta deinde GC, perficiatur quadratũ CM, protrahaturq; EB, ad N. Eruntq; ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratum CI, relinquetur gnomon OPQ, eiuſdem quadrati CI, quadruplus: Eſt autem & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quòd recta CD, dupla ſit rectæ AC. Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rurſus quoniam CD, ponitur ipſius AC, dupla; eſtq; LC, ipſi CD; & CH, ipſi AC, æqualis; erit & LC, ipſius CH, dupla. [a] Cum igitur ſit vt LC, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum CK; erit quoque illud huius duplum: [b] Eſt autem CK, ipſi HF, æquale. Æquale igitur eſt LB, ipſis CK, HF; Ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam ergo ſunt tres rectæ CD, CB, BD; eſtque rectangulum BM, ſub CD, BD, comprehenſum æquale ipſi KG, quadrato rectæ CB; [c] Erit vt CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quamobrem, ex definitione, recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum CB.

a 1. ſexti.
b 43. primi.
c 17. ſexti.

ALITER. Quoniam quadratum rectæ AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC; [d] eſtque quadratum rectę AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, vnà cum rectangulo ſub AC, CB, bis. Erunt & quadrata rectarum CB, AC, vnà cùm rectangulo ſub AC, CB, bis, quintuplum quadrati rectæ AC. Dempto igitur quadrato rectæ AC, relinquetur quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadruplum eiuſdem quadrati rectæ AC. Eſt autem & quadratum rectæ CD, eiuſdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Æquale igitur eſt quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cùm ergo rectangulum ſub AC, CB, bis, æquale ſit rectangulo ſub CD, CB; (ſicut enim recta CD, dupla eſt rectæ AC, [e] ita quoq; duplum erit rectangulum ſub CD, CB, rectanguli ſub AC, CB; cùm vtriuſque rectanguli eadem ſit altitudo CB; Ac propterea rectangulum ſub CD, CB, æquale erit rectangulo ſub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: [f] At quadratum rectæ CD, æquale eſt rectangulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD. Igitur quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub CD, CB, æquale erit rectangulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo ſub CD, CB, [g] relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectangulo ſub CD, BD; & ideòque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtq; ſegmentum maius CB. Si igitur recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſsit, &c. Quod erat demonſtrandum.

d 4. ſecundi
e 1. ſexti.
f 2. ſecundi
g 17. ſexti.



LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior ſit neceſſario, quàm CB, ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum eſt, ex ſcholio propoſ. 4. lib 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarũ CD, AC, quintupla eiuſdem quadrati rectæ AC. Eſt autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarũ AC, CD, [a] cùm æquale ſit quadratis rectarum AC, CD, vnà cum rectangulo ſub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC; Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiuſdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quàm recta AB; ideoq; dempta communi AC; maior erit reliqua CD, quàm reliqua CB. Quod eſt propoſitum.

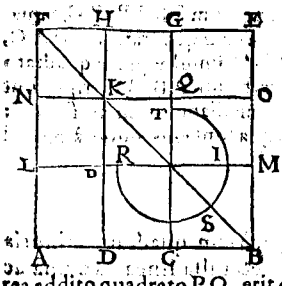
a 4. ſecũdi.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

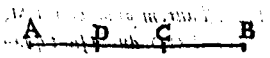
SI recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quintuplum eſſe quadrati rectæ CD. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipſis AF, BE, parallelæ CG, DH, ſecantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agãtur ipſis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ ſecent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntq; ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla eſt rectæ CD, erit ex ſcholio eiuſdem propoſ. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Eſt autem rectangulum CE, æquale

quadrato



quadrato L G. (Nam cùm sit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B, [a] erit rectángulum sub A B, C B, nempe C E, æquale quadrato rectæ A C, nimirum ipsi L G.) Igitur & C E, quadruplum erit quadrati P Q. Quia verò æqualia sunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum A D, C D; erunt earum latera H K, I Q, æqualia; [b] ac proinde rectæ E O, O M, ipsis oppositæ æquales erunt. [c] Quare rectangula I O, Q E, æqualia erunt: [d] Est autem I O, ipsi I D, æquale. Ergo & Q E, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo C O; totus gnomon R S T, rectángulo C E, erit æqualis. Cùm igitur C E, ostensum sit quadruplum quadrati P Q; erit etiã gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus: Ac propterea addito quadrato P Q, erit quadratũ D O, ex recta B D, quintuplũ quadrati P Q, ex recta C D. [a] 17. sexti. [b] 34. primi. [c] 36. primi. [d] 43. primi.



ALITER. Cùm A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B; [e] erit rectangulum sub A B, B C, vnà cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D. At rectangulum sub A B, B C, quadruplum est quadrati rectæ C D; (Nam cùm sit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; [f] erit rectangulum sub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C: quod cùm, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati rectæ C D; erit & rectangulum sub A B, B C, quadruplum eiusdẽ quadrati rectę C D.) Ac propterea rectangulum sub A B, B C, vnà cum quadrato rectæ C D, quintuplum quadrati rectæ C D. Igitur & quadratum rectæ B D, quintuplum erit quadrati rectæ C D. Si recta ergo linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum. [e] 6. secundi. [f] 17. sexti.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonstrabimus quoque cum Campano, ad hunc modum.

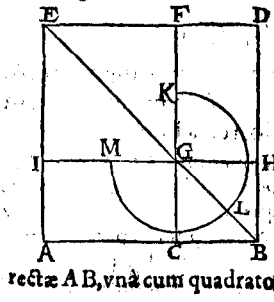
Si recta inæqualiter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quintuplum possit eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati; Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta A B, diuisa inæqualiter in C, cuius maius segmentum A C, bifariam sectum sit in D; sitq; quadratũ rectæ B D, quintuplum quadrati rectæ C D. Dico rectam A B, diuisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum L G, rectæ A C, quadruplum quadrati P Q, rectæ C D, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus. (cùm enim quadratum D O, rectæ B D, quintuplum ponatur quadrati P Q, ex recta C D; dempto quadrato P Q, relinquetur gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus.) Igitur gnomon R S T, æqualis erit quadrato L G: At gnomoni R S T, æquale est rectangulum C E, vt suprà ostensum est. Ergo & quadrato L G, rectæ A C, æquale erit idem rectangulum C E, sub A B, B C, comprehensum: [a] *Ac proinde erit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B. Quocirca, ex definitione, secta erit A B, in C, extrema ac media ratione. Quod est propositum.* a 17. sexti.

ALITER. Cùm A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B; [b] *erit rectangulum sub A B, B C, vnà cũ quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D; Ac propterea cùm quadratũ ex recta linea B D, descriptũ, quintuplum ponatur quadrati ex recta C D, descripti; erit & rectangulũ sub rectis lineis A B, B C, descriptũ, vnà cum quadrato rectæ C D, quintuplum eiusdem quadrati rectæ C D. Quare ablato quadrato rectæ C D; rectangulum sub A B, B C, quadruplum erit quadrati rectæ C D: Est autem eiusdem quadrati rectæ C D, quadruplum quadratum rectæ A C, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadratum rectæ A C, æquale est rectangulum sub A B, B C.* [c] *Quamobrem erit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; Ac proinde secta A B, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.* b 6. secundi. c 17. sexti.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 5.

Si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodq; à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur quadrati.



SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, sitq; segmentum maius A C, & minus C B. Dico quadrata rectarum A B, B C, simul tripla esse quadrati rectæ A C. Describatur enim super A B, quadratum A D, in quo ducta diametro B E, ducatur ex C, ipsi B D, parallela C F, secans diametrum in puncto G, per quod agatur H I, parallela ipsi A B. Erunt; C H, I F, quadrata rectarum B C, A C, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; [a] erit rectangulum sub A B, B C, nempe A H, æquale ipsi I F, quadrato rectæ A C. Cùm ergo A H, æquale sit ipsi C D; erit gnomon K L M, vnà cùm quadrato C H, duplus quadrati I F; Ac proinde, addito quadrato I F, erit quadratum A D, rectæ A B, vnà cum quadrato C H, rectæ B C, eiusdem quadrati I F, rectæ A C, triplum. a 17. sexti.

a 17. sexti. ALITER. Quoniam est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: [a] erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atq; adeò rectangulum sub AB, BC, bis, vnà cum quadrato rectæ AC, b 7. secundi triplum quadrati rectæ AC. [b] Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrato rectæ AC, vnà cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodq; à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

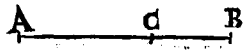
SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vnà cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectam AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cùm quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF; dempto quadrato IF, erit gnomon KLM, vnà cum quadrato CH, duplus eiusdem quadrati IF: Est autem gnomon KLM, vnà cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF; Ac propterea cùm æqualia sint AH, & CD; erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cùm rectangu- a 17. sexti. *lum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, rectæ AC; [a] erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde AB, diuisa erit in C, extrema & media ratione.*

b 7. secũdi. *ALITER. Cùm quadrata rectarum AB, BC, tripla sint quadrati rectæ AC; [b] sint verò quadrata rectarum AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectangulo sub AB, BC, bis;*

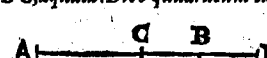


erit & quadratum rectæ AC, vnà cum rectangulo sub AB, BC, bis, triplum quadrati rectæ AC. Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectangulum sub AB, BC, bis, duplum quadrati rectæ AC; Et proinde rectangulum sub AB, BC; semel, æquale quadrato c 17. sexti. *rectæ AC. [c] Quare, vt prius, erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoq; AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.*

EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur quadrati. Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati: Recta illa linea secundùm extremam & mediam rationem secta est.

SIT primùm recta AB, secta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta BD, minori segmento d 8. secũdi. *BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum esse quadrati ex AC, maiore segmẽto. [d] Quoniam enim*



e 17. sexti. *quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater contento, vnà cum quadrato ex AC: [e] Rectangulum autem sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quòd AB, AC, CB, sint cõtinuè proportionales.) erit rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeò rectangulum sub AB, BC, quater vnà cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale ostensum est rectangulo sub AB, BC, quater, vnà cum quadrato ex AC,) eiusdem quadrati ex AC, quintuplum erit, quod est propositum.*

SIT deinde recta AB, secta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori segmento BC, æqualis, sitq; quadratum ex AD, quadrati ex AC, maiori segmento quintuplum. Dico AB, in C, sectam esse extrema ac

f 8. secũdi. *media ratione. [f] Quoniam enim quadratũ ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater, vnà cùm quadrato ex AC; erit quoque rectangulum sub AC, BC, quater, vnà cùm quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC; ac propterea rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC: hoc est, rectan-*

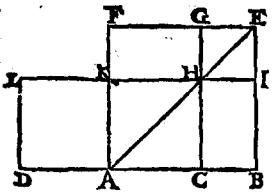
g 17. sexti. *gulum sub AB, BC, æquale quadrato ex AC. [g] Igitur erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, secta est extrema & media ratione. Quod est propositum.*

4. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; apponaturq; ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundùm extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ à principio recta linea.

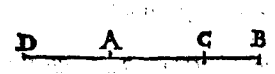
SECTVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentum AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori segmento AC. Dico rectam BD, secari in A, extrema ac media ratione, essèq; maius segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi BD, parallela IK, & ex D, ducatur ipsi AF, parallela DL, occurrens ipsi IK, productæ in L. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur est

vt AB,



vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: [a] Erit rectangulum IF, contentum sub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC. [b] Est autem CK, ipsi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipsi AL: additoq; communi BK, erit rectangulum BL, contentum sub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ AB: [c] Ac proinde erit vt BD, ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, secatur in A, extrema ac media ratione, estque maius segmentum AB.

[a] 17. sexti. [b] 36. primi. [c] 17. sexti.



ALITER. Quoniam est vt AB, ad AC, hoc est, ad AD, ita AC, ad CB: Erit conuertendo vt DA, ad AB, ita BC, ad CA: & componendo vt DB, ad AB, ita AB, ad CA, hoc est, ad AD. Secta igitur est BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur, apponaturq; ei æqualis maiori segmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.

Si recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturq; ex maiori segmento segmentum minus; erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione secetur in A, cuius maius segmentum AB, minus autem segmentum AD; & ex maiori segmento AB, detrahatur recta AC, æqualis minori segmento AD. Dico maius segmentum AB, diuisum esse in C, extrema ac media ratione, & maius segmentum esse rectam AC, quæ æqualis est minori segmento AD. Facta enim prioris figura constructione, cùm sit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD; [a] erit rectangulum BL, contentum sub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB; & ablato communi BK, erit AL, æquale ipsi IF; [b] Est autem AL, ipsi CK, æquale. Æquale igitur est IF, contentũ sub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC; [c] Ac proinde erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, secta est in C, extrema ac media ratione, cuius segmentũ maius est AC, minus verò segmentũ recta CB. Quod est propositũ.

[a] 17. sexti. [b] 36. primi [c] 17. sexti.

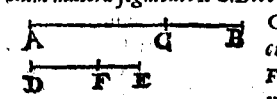
ALITER. Quoniam est vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc est, ad AC, detractam ex AB; [d] erit quoq; ita AD, reliqua ipsius BD, hoc est, AC, ad CB, reliquam ipsius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc est, vt AB, ad AC; Ac propterea diuisa erit AB, in C, extrema & media ratione. Quod est propositum.

[d] 19. quin.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

Si linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitq; DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse DF.



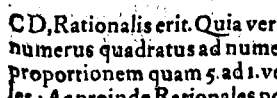
Cùm enim sit vt AB, tota ad DE totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cùm vtrobiq; sit proportio dupla; [e] erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam: Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE. [f] Quoniam verò est, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad DF, dimidiam huius: Item vt AC, ad CB, ita DF, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.

[e] 19. quinti [f] 15. quinti.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumq; segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati rectæ AD; habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. [b] Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea q; ipsæ rectæ CD, AD, commensurabiles quoque existent, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cùm sit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia verò quadrata rectarum CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt cõstat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) [c] erunt rectæ CD, AD, longitudine incommensurabiles: Ac proinde Rationales potentia tantùm commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantùm commensurabilis: [d] erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apotome.



[a] 1. tertij decimi. [b] 6. decimi. [c] 9. decimi. [d] 74. decimi

RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, CB; cùm sit vt AB, ad AC, ita
a 17. sexti. AC, ad CB; a erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apo-
b 98. deci. tomæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundùm lineam Rationalem AB, b facit alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano ostendemus.

SI recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C, sitq; maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Diuisa enim AC, bifariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cùm sit ipsi AC, commensurabilis. a *Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum*
a 3. tertij decimi. *est quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionẽ, quam*
b 6. decimi

numerus ad numerum; b *ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ BD, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cùm igitur CD, sit rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia verò quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde si à Rationali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantùm commensurabilis;* c *erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.*
c 74. deci.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primùm deinceps sint æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD; & ex puncto F, vbi se intersecant rectæ BE, AC, recta ducatur FD. Quoniá igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoq; ipsis contenti æquales, ex hypothesi; a erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales. b Sunt autẽ & anguli BED, BDE, æquales, cùm æqualia sint ostensa latera BE, BD; Toti igitur anguli AED, CDE, æquales erunt. Rursus quia latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; c Erit & basis BE, basi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cùm ergo æquales sint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; d erunt quoq; latera BF, AF, æqualia: Ac propterea si ipsa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cùm latera FE, ED, trianguli FED, æqualia sint lateribus FC, CD, trianguli FCD; & basis communis FD; e erunt & anguli dictis lateribus contenti FED, FCD, æquales; Sunt autem & anguli AEB, BCA, ostensi æquales. Æquales igitur sunt toti anguli AED, BCD; Ac proinde cùm angulo AED, ostensus sit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipsum pentagonum.

a 4. primi.
b 5. primi.
c 4. primi.
d 6. primi.
e 8. primi.

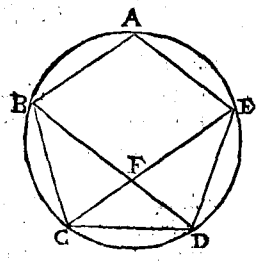
SINT secundò tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti, æquales; ex hypothesi; f Erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; g Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quòd æqualia ostensa sint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt. Quare cùm æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonstratum est, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

f 4. primi.
g 5. primi.

11. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione se mutuò secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui sunt deinceps C, D, rectæ DB, CE, se mutuò secãtes in F. Dico ipsas secari extrema ac media ratione, maio-



ne, maiorâq; earũ ſegmenta FB, FE, æqualia eſſe lateri cuilibet pentagoni. [a] Deſcripto enim circulo circa pentagonum, [b] erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia verò latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia ſunt lateribus DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi. [c] Erunt & baſes DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales: Ac proinde cùm in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, ſint æquales, [d] & ipſis æqualis ſit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: [e] Eſt autem & angulus BCE, eiuſdem anguli DCE, duplus, quòd & arcus BAE, arcus DE, ſit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales ſunt; [f] Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. [g] Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus inſiſtentes, æquales ſunt: erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD: [h] Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. [i] Quare erit vt BD, ad DC, hoc eſt, ad BF, æqualẽ ipſi DC, ita CD, hoc eſt, ſibi æqualis BF, ad FD: Ac propterea BD, ſecta eſt in F, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum BF, lateri pentagoni æquale, vt oſtenſum eſt. Simili ratione oſtendemus, rectam CE, ſecari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius ſegmentum EF, æquale eſſe lateri pentagoni DE. Itaque ſi pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 14. quarti. [b] 28. tertij. [c] 4. primi. [d] 32. primi. [e] 33. ſexti. [f] 6. primi. [g] 27. tertij. [h] 32. primi. [i] 4. ſexti.

SCHOLIVM.

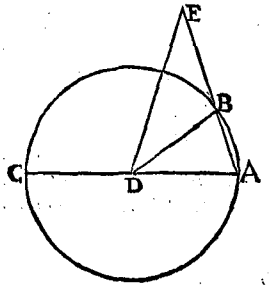
FACILE etiam demonſtrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ſubtendit, parallelam eſſe oppoſitò lateri: hoc eſt, BD, parallelam eſſe lateri AE; & CE, lateri AE. Deſcripto enim circulo circa pentagonum; [a] *Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quàm duo ABC, AEC, duobus rectis æquales ſunt: Sunt autem A, & ABC, inter ſe æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCF, AEC, æquales. Cùm ergo A, & BCE, duobus ſint rectis æquales; erunt etiam A, & AEC, duobus rectis æquales:* [b] *ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod eſt propoſitum.*

[a] 22. tertij. [b] 28. primi

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus.



IN circulo ABC, ſit latus decagoni AB, cui in rectum addatur BE, æqualis ſemidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inſcripti. Dico EA, rectam ſectam eſſe in B, extrema ac media ratione, maiusque ſegmentum eſſe EB, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diameter AC, coniungantúrque rectæ DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, eſt decima pars totius peripheriæ circuli; continebit arcus ſemicirculi arcum AB, quinquies; Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB. [a] Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rurſus quia latera BD, BE, ſunt æqualia, nempe latera hexagoni; (eſt enim BE, latus hexagoni ſemidiametro BD, æquale, ex coroll. propoſ. 15. libri 4.) [b] erunt & anguli BDE, BED, æquales; [c] quibus cũ æqualis ſit externus ABD; erit angulus ABD, duplus anguli BED: [d] Eſt aũt angulus ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatẽ laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, ſimul quadrupli erunt anguli BED. [e] Cùm ergo angulis DAB, DBA, æqualis ſit externus BDC; erit angulus BDC, quadruplus eiuſdem anguli BED: Atqui idem angulus BDC, oſtenſus fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales ſunt anguli AED, ADB. Quocirca cũ duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales ſint duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD; [f] erunt triangula ADE, ABD, æquiangula. [g] Igitur erit vt EA, ad AD, hoc eſt, ad EB, ipſi AD, æqualem, ita AD, hoc eſt, EB, ſibi æqualis ad BA; Atque idcircò recta EA, ſecta eſt in B, extrema & media ratione, eſtque maius ſegmentum EB, latus hexagoni. Itaque ſi hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. Quod erat demonſtrandum.

[a] 33. ſexti. [b] 5. primi. [c] 32. primi. [d] 5. primi. [e] 32. primi. [f] 32. primi. [g] 4. ſexti.

SCHOLIVM.

QVIA verò demonſtrauimus ad propoſ. 5. huius libri, ſi minus ſegmentum lineæ diuiſæ extrema ac media ratione ex maiori ſegmento detrahatur; maius ſegmentum ſecari quoque extrema & media ratione, eiusq; ſegmentum maius eſſe minus ſegmentum detractum. Hic autem oſtenſum eſt, latus hexagoni compoſitum cum latere decagoni, ſecari extrema ac media ratione: Fit, ſi latus hexagoni ſecetur extrema & media ratione, maius illius ſegmentum eſſe latus decagoni. Nam ſi hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod eſt

maius ſegmentum, diuiſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propoſ.5. huius libri oſtendimus. Hoc tamen aliter demonſtrabimus lib.14. propoſ.4.

CONVERSVM *quoq; huius theorematis facilè cum Campano demonſtrabimus: Videlicet.*

SI lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quòd ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

SIT enim AB, diuiſa in C, extrema & media ratione, ſitq; primùm AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus ſegmentum CB, eſſe eiuſdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur rectæ EA, EC. Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; & eſt AC, latus hexagoni æquale ſemidiametro EB, ex coroll. propoſ.15. libri 4. Erit quoque vt AB, ad BE, ita EB, ad BC, [a] *ideoq; triangula ABE, EBC, æquiangula erunt, cùm habeant latera circa communem angulum B, proportionalia: eritq; angulus A, angulo BEC, æqualis. Rurſus quia latera CA, CE, æqualia ſunt, nempe latera hexagoni;* [b] *erunt anguli CAE, CEA, æquales;* [c] *quibus cùm æqualis ſit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A:* [d] *Eſt autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, CBE, ſimul quadrupli erunt eiuſdem anguli A.* [e] *Cùm ergo angulis BCE, CBE, æqualis ſit externus CED; erit quoque angulus CED, eiuſdem anguli A, & propterea anguli BEC, qui æqualis oſtenſus eſt angulo A, quadruplus.* [f] *Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus ſemicirculi BCD, eiuſdem arcus BC, quintuplus exiſtet, ideoq; tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus eſt decagoni.*

a 6. ſexti.

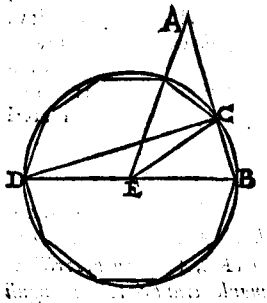
b 5. primi.

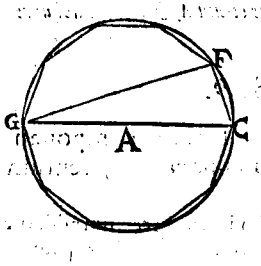
c 32. primi.

d 5. primi

e 32. primi.

f 33. ſexti.





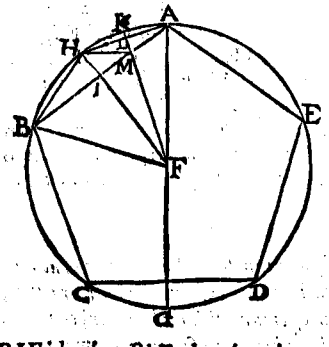
SIT deinde CB, minus ſegmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius ſegmentum AC, eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus BC, in circulo BCD, ducaturq; diameter BED. Deinde interuallo AC, deſcribatur circulus CFG, cuius diameter CAG; eritq; ex corollario propoſ.14. lib.4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniam igitur AB ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit, vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentum CB, latus decagoni eiuſdem circuli CFG. Deſcribatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterum & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD, decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; eruntq; latera BC, CF, inter ſe æqualia. Quoniam verò, ſi connectantur rectæ CD, FG, anguli CDB, FGC, ſunt æquales, vt in ſcholio propoſ.22. lib.3. oſtendimus, quòd inſiſtant arcubus ſimilibus BC, CF, nempe decimis partibus peripheriarũ, [g] *& ſunt quoq; anguli BCD, CFG, in ſemicirculis æquales, & nimirum recti:* [h] *Erunt quoq; latera BD, CG, inter ſe æqualia. Quam ob rem cũ diametri BD, CG, ſint æquales, æquales quoq; erunt circuli BCD, CFG. Ac proindè, cùm recta AC, ſit latus hexagoni circuli CFG, erit quoq; eadem recta AC, latus hexagoni circuli BCD. Quod eſt propoſitum.*

g 31. tertij.

h 26. primi

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.



IN circulo ABCDE, cuius centrũ F, deſcriptũ ſit pentagonum æquilaterum. Dico quadratũ lateris AB, æquale eſſe quadrato lateris hexagoni, vnà cũ quadrato lateris decagoni eiuſdem circuli. Ducatur enim diameter AFG, & connectatur recta FB. Diuiſo deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, ſecans rectam AB, in I; eritq; recta AH, latus decagoni, & BF, latus hexagoni. Rurſus diuiſo arcu AH, bifariã in K, adiungatur recta FK, ſecans rectã AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Quoniã igitur arcus AH, BH, æquales ſunt, [a] erunt & anguli ipſis inſiſtẽtes AFH, BFH, æquales. Quare cũ latera AF, FI, trianguli AFI, æqualia ſint lateribus BF, FI, trianguli BFI, & anguli ipſis contenti æquales quoq; [b] erunt & baſes AI, BI, æquales, & anguli AIF, BIF, ideoq; recti: Eademq; ratione æquales erũt rectæ AL, HL, & anguli ALF, HLF, recti. Deinde ſi ex ſemicirculis æqualib. ABCG, AEDG, demãtur æquales arcus ABC, AED, relinquẽtur arcus CG, DG,

a 27. tertij.

b 4. primi.

D G, inter ſeſe æquales, ideoq; erit arcus C G, dimidium arcus C D. Eſt autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cùm arcus A B, C D, æquales ſint; erunt quoq; eorum dimidij arcus C G, A H, æquales; Ac proinde cùm arcus A H, duplus ſit arcus H K, erit & arcus C G, duplus eiuſdem arcus H K. Eodem modo, quia arcus A B, B C, æquales ſunt, & eſt arcus A B, duplus arcus B H, erit etiam arcus B C, eiuſdem arcus B H, duplus. Quare arcus C G, B C, æquemultiplices ſunt, nempe dupli, arcuum H K, B H; [a] Ac propterea totus arcus B G, duplus quoque erit totius arcus B K; [b] & idcirco angulus quoque B F G, duplus anguli B F K: [c] Sed quia idem angulus B F G, ad centrum duplus eſt quoque anguli F A B; erunt idcirco anguli B F M, F A B, æquales; [d] Ac propterea triangula A B F, F B M, cùm habeant angulos F A B, M F B, æquales, & angulum A B F, communem, æquiangula erunt. [e] Quocirca erit vt A B, ad B F, ita B F, ad B M; [f] ideoque rectangulum ſub A B, B M, æquale erit quadrato rectæ B F.

a 1. quinti.
b 33. ſexti.
c 20. tertij.
d 32. primi.
e 4. ſexti.
f 17. ſexti.

RVRSVS quia latera A L, L M, triáguli A L M, æqualia ſunt lateribus H L, L M, triáguli H L M, & anguli quoque ipſis contenti æquales, nempe recti; [g] erunt & baſes A M, H M, & anguli L A M, L H M, æquales. [h] Eſt autem angulus L A M, angulo H B A, æqualis, & latera H A, H B, æqualia ſunt. Igitur & angulus L H M, eidem angulo H B A, æqualis erit; [i] Ac propterea triangula A B H, A H M, cùm habeát angulos A B H, A H M, æquales, & angulum H A M, communem, æquiangula erunt. [k] Quam ob rem erit vt A B, ad A H, ita A H, ad A M; [l] ideoq; rectangulum ſub A B, A M, æquale erit quadrato rectæ A H: Oſtenſum eſt autem & rectangulum ſub A B, B M, æquale quadrato rectæ B F. Igitur rectangula ſub A B, B M, & ſub A B, A M, ſimul æqualia ſunt quadratis rectarum B F, A H: [m] At verò rectangula ſub A B, B M, & ſub A B, A M, æqualia ſunt quadrato rectæ A B. Quadratum ergo rectæ A B, nempe lateris pentagoni, æquale eſt quadratis rectarũ B F, A H, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

g 4. primi.
h 5. primi.
i 32. primi.
k 4. ſexti.
l 17. ſexti.
m 2. ſecũdi.

COROLLARIVM I.

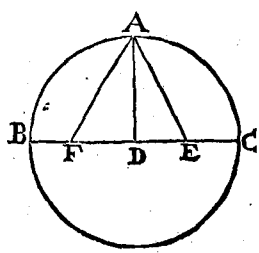
HINC ſequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoq; rectam illi arcui ſubtenſam bifariam, & ad angulos rectos. Oſtenſum enim eſt, rectam F H, propterea quòd arcum A B, diuidit bifariam, diuidere quoq; rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademq; in cæteris eſt demonſtratio.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoq; eſt, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppoſito ſubtendit, & latus ipſum oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos. Demonſtratum enim eſt, diametrum A G, ex puncto A, ductam, diuidere arcum C D, quem latus oppoſitum C D, ſubtendit, bifariam. Quare ex præfato corollario, cùm tranſeat per centrum, ſecabit quoque latus C D, bifariam, & ad angulas rectos. Eadem demonſtratio erit in omni polygono æquilatero in circulo deſcripto, ſi numerus laterum fuerit impar, vt conſtat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finẽ lib. 4. praxim quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademq; opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterũ deſcribitur, eiusq; demonſtrationem in hunc locum diſtulimus; paucis nunc à nobis ea demonſtranda eſt. Sit igitur datus circulus A B C, cuius centrũ D. Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuiſa ſemidiametro C D, bifariã in E, ducatur recta E A, cui æqualis abſcindatur E F, adiungaturq; recta A F. Dico rectam A F, eſſe latus pentagoni, & D F, latus decagoni. Cùm enim C D, ſecta ſit bifariam in E, eiq; addita D F; [a] erit rectangulum ſub C F, D F, vnà cum quadrato rectæ D E, æquale quadrato rectæ E F, ideoq; quadrato rectæ E A, quæ ipſi E F, eſt æqualis. [b] Eſt autem quadratum rectæ E A, æquale quadratis rectarũ A D, D E. Igitur rectangulum ſub C F, D F, vnà cum quadrato rectæ D E, æquale eſt quadratis rectarũ A D, D E. Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ D E, relinquetur rectangulum ſub C F, D F, æquale quadrato rectæ A D, hoc eſt, quadrato rectæ C D. [c] Quam ob rem erit vt C F, ad C D, ita C D, ad D F; propterea q; recta C F, diuiſa erit in D, extrema ac media ratione. Cùm igitur maius ſegmẽtum C D, ſit latus hexagoni circuli A B C, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. erit minus ſegmẽtum D F, latus decagoni eiuſdem circuli, vt demonſtrauimus ad propoſ. 9. huius lib. [d] Rurſus quoniã quadrato lateris hexagoni A D, vnà cum quadrato lateris decagoni D F, æquale eſt quadratum lateris pentagoni eiuſdem circuli; [e] Eſt autem eiſdem quadratis rectarum A D, D F, æquale quadratum rectæ A F; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ A F; Ac propterea recta A F, lateri pentagoni æqualis. Quod eſt propoſitum.



a 6. ſecũdi.
b 47. primi
c 17. ſexti.
d 10. tertij decimi.
e 47. primi

THEOR. II. PROPOS. II. 12.

SI in circulo, Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum de-

scribatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.



In circulo A B C D E, habente diametrum Rationalem, describatur pentagonũ æquilaterum A B C D E. Dico eius latus A B, esse lineam Irrationalem, quę dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri A G, B H, secetque A G, latus C D, in I, connectanturq; rectæ A C, A H, quarum A C, secet diametrum B H, in K. Abscindatur quoq; ex semidiametro F H, quarta eius pars F L; Item ex recta A C, quarta eius pars C M. Quia igitur diameter B H, ponitur Rationalis; erunt quoque F L, B F, illi commensurabiles, cùm sint eius partes aliquotæ, Rationales. Atque idcircò & tota B L, composita, [a] cùm sit commensurabilis vtriq; F L, B F, Rationalis erit. [a 16. decimi.]

Rvrsvs quoniam recta F B, ex centro ducta secat arcum A C, bifariam in B, secabit quoq; rectam A C, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propos. Secat autem & recta A G, rectam C D, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propos. Triangula ergo A C I, A F K, cũ habeãt angulos A I C, A K F, rectos, & angulum C A I, communẽ, [b] æquiangula inter se erũt. [c] Quamobrem erit vt C I, ad C A, ita F K, ad F A; & permutando vt C I, ad F K, ita C A, ad F A, siue ad F H, ipsi F A, æqualem: [d] Vt autem C A, ad F H, ita est C M, quarta pars ipsius C A, ad F L, quartam partẽ ipsius F H. Erit igitur vt C I, ad F K, ita C M, ad F L; & permutando vt C I, ad C M, hoc est, vt C D, dupla ipsius C I, ad C K, duplam ipsius C M, ita F K, ad F L; Arq; componẽdo, vt C D, C K, simul ad C K, ita F K, F L, simul, nimirum recta K L, ad F L; [e] Ac propterea erit, vt quadratũ rectæ compositæ ex C D, C K, ad quadratum rectæ C K, ita quadratum rectæ K L, ad quadratũ rectę F L. Quia verò si A C, secetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta B D,) [f] maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi C D; [g] Erit quadratum rectæ compositæ ex C D, maiori segmento, & C K, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ C K, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ K L, quintuplum erit quadrati rectæ F L; [h] ideoq; quadratũ rectæ K L, commensurabile erit quadrato rectæ F L; Ac proinde rectæ K L, F L, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autem F L, ostensa Rationalis. Igitur & K L, Rationalis erit.

[b 32. primi.] [c 4. sexti.] [d 15. quinti.] [e 22. sexti.] [f 8. tertiædecimi.] [g 1. tertiædecimi.] [h 6. decimi.]

Deinde quia qualium partium 4. est B F, talium 1. est F L; ac propterea qualium 5. est B L, talium 1. est F L; erit quadratũ rectæ B L, talium partium 25. qualium 1. est quadratũ rectæ F L, (vt in his numeris patet 1. 5. 25. [i] habent enim quadrata proportionẽ laterum duplicatam.) Qualium verò partium 1. est quadratũ rectæ F L, talium 5. ostensum est quadratum rectæ K L. Qualium igitur 25. est quadratũ rectæ B L, talium 5. est quadratũ rectæ K L; ac proinde quadratũ rectæ B L, quintuplum erit quadrati rectæ K L. Quia ergo quadrata rectarum B L, K L, proportionẽ non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ, (vt patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) [k] Erũt rectæ B L, K L, longitudine incommensurabiles; ideoq;, cùm ostensæ sint Rationales, erunt Rationales potentia tantũ commensurabiles. Quare si ex Rationali B L, dematur Rationalis K L, potentia tantùm commensurabilis; [l] erit reliqua B K, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei verò congruens erit K L.

[i 20. sexti.] [k 9. decimi.] [l 74. decimi]

Iam verò recta B L, possit plus q̃ recta K L, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratũ rectæ B L, æquale est quadratis rectarum K L, & N, Qualium autẽ partium 5. fuit quadratũ rectæ B L, talium 1. fuit quadratum rectæ K L; Erit reliquum quadratũ rectæ N, talium partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ B L; Ac propterea quadrata rectarum B L, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. [m] Quare commensurabilia erunt; propterea q; rectę ipsæ B L, & N, commensurabiles, saltem potentia: Est autem B L, ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia verò quadrata rectarum B L, & N, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quòd proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.) [n] Erunt rectæ B L, & N, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantùm commensurabiles. Quapropter cùm tota recta B L, Rationalis, longitudine sit commensurabilis Rationali B H; (Qualium enim partium 8. est B H, talium 5. est B L.) posităque plus, quàm congruens K L, quadrato rectæ N, sibi longitudine incommensurabilis, vt ostensum est; Erit B K, Apotome quarta, ex definitione.

[m 6. decimi.] [n 9. decimi.]

Postremo, quia recta A B, est media proportionalis inter B H, B K, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (quòd triangulum A B H, [o] habeat angulum B A H, rectum, à quo ducta est A K, ad basin perpendicularis) [p] erit quadratũ rectæ A B, æquale rectangulo sub B H, B K. Quocirca cùm superficiem contentam sub Rationali B H, & Apotoma quarta B K, posităque recta linea A B, [q] Erit A B, linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.

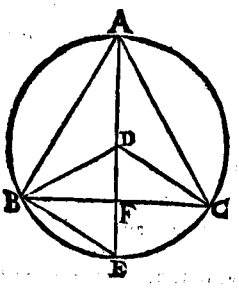
[o 31. tertij.] [p 17. sexti.] [q 95. decimi]

8. THEOR. 12. PROPOS. 12.

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

In circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur A B C. Dico quadratum lateris A B, triplum esse quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro A E, quæ secet, ex

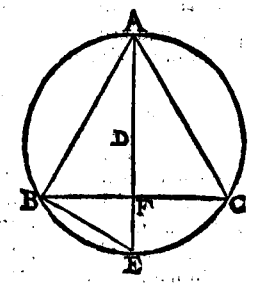
corollario



corollario 2. propoſ. 10. huius lib. arcum B C, bifariam in E, & rectam B C, bifariam quoque & ad angulos rectos in puncto F; cùm arcus B C, ſit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus B E, eiuſdem peripheriæ ſexta pars, ideoque coniuncta recta B E, latus erit hexagoni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex corollario propoſ. 15. libri 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus A B E, continet tres ſextas partes totius circuli; arcus verò A B, cùm ſit tertia pars totius circuli, duas ſextas comprehendit eiuſdem circuli. Igitur arcus B E, ſexta pars eſt eiuſdem, ac proinde recta B E, latus eſt hexagoni, & æqualis ſemidiametro D E, ex corollario propoſ. 15. lib. 4. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æquale eſt quadratis rectarum A B, B E, [b] quòd anguli A B E, in ſemicirculo rectus ſit; Eſt autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ B E, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quòd linea A E, dupla ſit lineæ B E; erunt quadrata rectarum A B, B E, ſimul, quadrupla quoque quadrati eiuſdem rectæ B E; Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum A B, B E, talium partium 1. erit quadratum rectæ B E; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ A B. Quare quadratum rectæ A B, triplum eſt quadrati rectæ B E, quæ æqualis eſt ſemidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 47. primi.
[b] 31. tertij.

COROLLARIVM I.



SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia eſſe ſeſquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti. Nam cùm latus A B, oſtenſum ſit potentia triplum ſemidiametri A D; poſito quadrato ex A B, 3. erit quadratum ex A D, 1. atq; adeò quadratum ex A E, quod ex ſcholio propoſitionis 4. libri 2. quadruplum eſt quadrati ex A D, erit 4. Quare quadratũ ex A E, quadrati ex A B, ſeſquitertium eſt, hoc eſt, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex corollario propoſitionis 8. libri 6. vt eſt A E, ad A B, ita ſe habet A B, ad A F; erit quoque latus trianguli æquilateri A B, perpendicularis A F, ex vno angulo ad baſim demiſſa potentia ſeſquitertium: quod tamen aliter demonſtrabitur ab Euclide lib. 14. propoſ. 12.

COROLLARIVM II.

HINC facilè etiam colligi poteſt, ſemidiametrum D E, bifariam ſecari in F, à latere trianguli B C. Cùm enim quadratum rectæ A B, triplum ſit quadrati rectæ B E; ſi ponatur quadratum rectæ A B, partium 12. erit quadratum rectæ B E, talium partium 4. [a] *Eſt autem quadratum rectæ B E, æquale quadratis rectarum B F, F E. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum B F, F E. Eſt autem talium partium 3. quadratum rectæ B F, (quòd quadratum rectæ A B, quadruplum ſit quadrati rectæ B F, ex ſcholio propoſitionis 4. lib. 2. Eſt enim A B, dupla ipſius B F.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ F E; Ac proinde quadratum rectæ B E, hoc eſt, quadratum rectæ D E, ſibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ F E. Quare ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. recta D E, dupla erit ipſius F E. Quocirca D E, bifariam ſecatur in F.*

[a] 47. primi.

SCHOLIVM.

Hoc tamen corollarium aliter demonſtrabitur, hoc theoremate propoſito.

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex vno angulo ducta, diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque viciſsim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur à latere oppoſito.

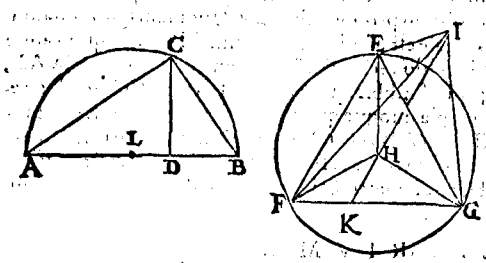
IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C. Dico rectam A E, per centrum D, ductam, hoc eſt, diametrum, ſecare bifariam & angulum B A C, & latus B C, nec non ad angulos rectos; Semidiametrum quoque D E, ſecari à latere B C, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis B D, C D, B E; cùm latera A B, A D, æqualia ſint lateribus A C, A D, trianguli C A D; & baſes B D, C D, æquales quoque: [b] *Erunt anguli B A D, C A D, æquales. Quod eſt primum. Deinde, cùm latera A B, A F, trianguli B A F, æqualia ſint lateribus A C, A F, trianguli C A F, & anguli ipſis contenti æquales oſtenſi ſint:* [c] *Erũt & baſes B F, C F, & anguli ad F, æquales, ideoq; recti. Quod eſt ſecundum. Poſtremò, cũ anguli B A E, C A E, demõſtrati ſint eſſe æquales;* [d] *erũt & arcus B E, C E, æquales. Quare cũ B E C, arcus ſit tertia pars circumferẽtiæ, erit B E, ſexta pars eiuſdẽ; Ac propterea recta B E, latus hexagoni, atq; ſemidiametro proinde B D,*

[b] 8. primi.
[c] 4. primi.
[d] 26. tertij.

a 5. primi. æqualis, ex coroll. propos. 15. lib. 4. [a] Igitur anguli B D E, B E D, æquales erunt. Quoniam ergo anguli B D F,
b 26. primi B F D, trianguli D B F, æquales sunt angulis B E F, B F E, trianguli E B F, & latus B F, commune; [b] Erunt
& latera D F, E F, æqualia. Quod est tertium.

13. PROBL. I. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere, & data sphæra complecti; & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.



SIT datæ sphæræ diameter A B, circa quam semicirculus describatur A B C; & ex A B, auferatur tertia pars B D, vt sit A D, ipsius D B, dupla; at verò A B, eiusdem D B, tripla; & ipsius A D, sesquialtera. Deinde ducta D C, perpendiculari ad A B, connectantur rectæ A C, B C. Ad interuallum rectæ H E, quæ æqualis sit ipsi D C, describatur circulus E F G, cuius centrum H, in quo triangulum æquilaterum inscribatur E F G, adiunganturque rectæ H F, H G, quæ singulæ æquales erunt ipsi D C, cùm æquales sint ipsi H E, ad cuius interuallum describtus est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis H I, quæ æqualis ponatur rectæ A D, & ex I, demittantur rectæ I E, I F, I G. Dico solidum contētum quatuor triangulis F E G, I E F, I F G, I E G, esse Pyramidem, siue Tetraedrum. Quoniam enim latera D A, D C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus H I, H E, trianguli I H E, & anguli ipsis contenti, rec-
a 4. primi. ti, ex hypothesi, & 3. defin. lib. 11. [a] erit basis A C, basi I E, æqualis. Non aliter ostendemus eandem rectam A C, æqualē esse rectis I F, I G. Rursus quia tres lineæ A D, D C, D B, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A D, ad D B, ita quadratum rectæ A D, ad quadratum rectæ D C; & componendo, vt A B, ad D B, ita quadrata rectarum A D, D C, simul
b 47. primi. ad quadratum rectæ D C: [b] Sunt autem quadrata rectarum A D, D C, æqualia quadrato rectæ A C. Igitur erit quoq; vt A B, ad D B, ita quadratum rectæ A C, ad quadratum rectæ D C; Ac proin de cùm A B, sit ipsius D B, tripla, erit quoque quadratum rectæ A C, triplum quadrati rectæ H E,
c 12. tertijd. cùm H E, æqualis sit ipsi D C: [c] Atqui & quadratum rectæ E F, triplum quoque est eiusdem quadrati rectæ H E. Quadratum ergo rectæ A C, quadrato rectæ E F, æquale erit; & propterea recta A C, rectæ E F. Quare cùm recta A C, ostensa quoque sit æqualis rectis I E, I F, I G; erunt quatuor triangula E F G, E F I, F G I, G E I, æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur iam est pyramis, seu Tetraedrum, cuius basis E F G, vertex verò I. Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data, cuius diameter A B; & diametrum sphæræ A B, potentia sesquialteram esse lateris E F, vel A C.

EXTENDATVR perpendicularis I H, vsque ad K, vt sit H K, ipsi D B, & tota I K, toti A B, æqualis. Quia ergo tres rectæ A D, D C, D B, proportionales sunt, quibus æquales existūt tres I H, H E, H K; erunt quoque I H, H E, H K, proportionales. Quare cùm H E, sit ad I K, perpendicularis, & media proportionalis inter I H, H K, semicirculus circa I K, descriptus in plano rectarum I K, H E, transibit per E, vt mox ostendetur; Eodemque argumento tam semicirculus circa eandem rectam I K, descriptus in plano rectarum I K, H F, transibit per F, quàm semicirculus circa eandem I K, descriptus in plano rectarum I K, H G, per G. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro, sphæram describet, quæ constitutum Tetraedrum complectitur, cùm per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cùm ergo hæc sphæra descripta æqualis sit sphæræ datæ, quòd diameter I K, æqualis ponatur diametro A B, comprehendetur idem Tetraedrum sphæra data.

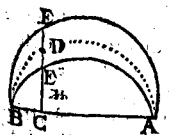
QVONIAM verò tres rectæ A B, A C, A D, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit vt A B, ad A D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Est autem recta A B, sesquialtera rectæ A D, quòd qualium partium 3. est A B, talium 2. sit A D. Igitur & quadratum rectæ A B, sesquialterum erit quadrati rectæ A C; Ac propterea cùm A B, sit diameter sphæræ, & A C, recta lateri pyramidis E F, æqualis; perspicuum est, diametrum sphæræ potentia sesquialteram esse lateris Tetraedri, seu pyramidis. Pyramidem ergo constituimus, & data sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

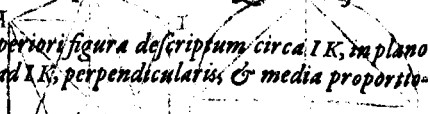
QVOD autem semicirculus circa I K, in plano rectarum I K, H E, descriptus, transeat per E, facilè demonstrabitur, hoc proposito theoremate.

SI ad lineā rectam perpendicularis ducatur, quæ sit media proportionalis inter segmenta lineæ; semicirculus circa illam lineam rectam descriptus, transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT

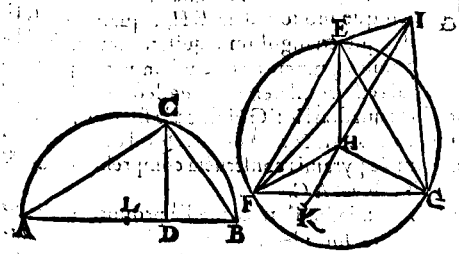


Sit enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico ſemicirculum circa AB, deſcriptum, tranſire per D. Nam ſi tranſeat citra D, vel vltra, nimirũ per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quàm quadratum rectæ CE, [a] *æquale erit rectangulo ſub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarũ CD, CE, inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.* [a] 17. ſexti.



Hinc manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura deſcriptum circa IK, in plano rectarum IK, HE, tranſire per E, cùm HE, ſit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.



Hinc facilè colligemus, diametrum ſphæræ eſſe potentia quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſim pyramidis deſcripti. Cùm enim diameter ſphæræ AB, oſtenſa ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualium 9. eſt quadratũ rectæ AB: At qualium partium 6. eſt quadratũ rectæ EF, talium partium 2. eſt quadratum rectæ HE, [b] *quòd quadratum rectæ EF, triplum ſit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE; Ac propterea diameter ſphæræ AB, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri HE, cùm proportio quadratorum ſit, quæ 9. ad 2.* [b] 12 tertij decimi.

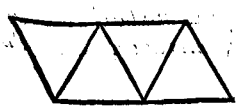
COROLLARIVM II.

Rvrsvs perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrũ ſemicirculi ACB, eritq; L, centrum quoque ſphæræ. Dico rectam LD, (quæ nimirum ex centro ſphæræ ad baſin EFG, ducitur perpendicularis; cùm AD, æqualis ſit ipſi IH, & ideò punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt, quod centrum ſphæræ) eſſe ſextam partem diametri ſphæræ, nempe rectæ AB, & tertiam partem ſemidiametri AL. Quoniam enim AD, dupla eſt ipſius DB; Qualium partium 4. eſt AD, talium 2. erit DB; ac proinde talium 6. tota AB, & ſemidiameter AL, talium 3. Quare ſi AD, eſt 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcircò LD, ſexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.

Similiter, altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

Rvrsvs, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. vt hîc apparet 9. 6. 4.

SCHOLIVM.



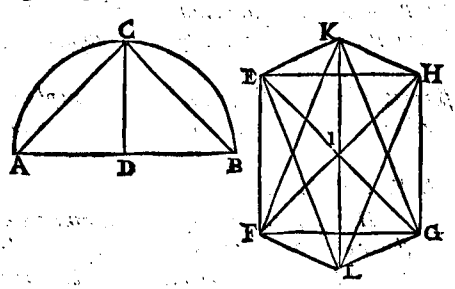
Qvod ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturq;, vt hæc figura indicat, facilè ex ipſis ritè inter ſe complicatis componetur Tetraëdrum, ſecundùm totam ſoliditatem. Hanc verò praxim, & ſequentes quatuor, quibus reliqua quatuor ſolida regularia in materia quauis ſenſibili conficiuntur, deſumpſimus ex Alberto Durero, non ignobili ſcriptore.

PROBL. 2. PROPOS. 14. 15.

OCTAEDRVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & pyramidem; & demonſtrare, quòd ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

Sit ſphæræ, quæ conſtituram pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturq; rectæ

a 4. primi. AC, BC, [a] quæ æquales inter se erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis sit ipsi AC, vel BC, describatur super eam quadratum EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, se mutuò secantes in I: eruntq; rectæ IE, IF, IG, IH, æquales, cùm sint semidiametri circuli circa quadratum descripti, vt in 4. lib. demonstratum est. Deinde ex I, in vtramque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipsi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico solidum contentum octo triangulis, KEF, KFG, KGH, KEH: LFE, LEH, LHG, LFG, esse octaedrum, quod quæritur.



b 8. primi. Quoniam enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia sunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At verò EIG, [b] eò quòd sit æqualis angulo GIH, sibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & basium EH, GH.) [c] Erit & basis EK, basi EH, æqualis. Eodemque modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH.

c 4. primi. Simili argumento concludemus, reliqua triangula esse æquilatera: atque adeò æqualia triangulo KEH, cùm illorum latera æqualia, sint lateribus quadrati EFGH, singulis singulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quòd octaedrum dico comprehendi sphæra diametri AB, qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur; & diametrum sphæræ AB, potentia duplam esse lateris EE, vel AC.

QVONIAM enim IE, perpendicularis est ad KL, ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter segmenta KI, IL; (quòd tres rectæ KI, IE, IL, æquales sint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, descriptus, transibit per punctum E, ex lemmate præcedētis propositionis. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, describet sphæram, quę complectitur octaedrum constitutum, cùm per omnes illius angulos incedat. Cùm ergo hæc sphæra æqualis sit datæ sphæræ, cuius diameter AB; (Nam cū rectæ AC, EF, æquales sint, ideoq; ipsarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, q̄ quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI; Erunt & rectæ AD, EI, hoc est, KI, semidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erūt; ac proinde sphæræ ipsarum æquales existent.) comprehendetur idem octaedrum data sphæra.

d 47. primi. QVIA verò quadratum rectæ AB, [d] æquale est quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt, erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cùm AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF, manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris octaedri. Itaque octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

Ex dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuò ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi

a 4. vndec. *sunt recti. Atque proinde, cùm KI, recta sit ad lineas EG, HF;* [a] *recta quoque erit ad planum*

b 18. vndec. *EFGH, per ipsas ductum;* [b] *Ideoq; & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planū EFGH. Immò eadem ratione, vt paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, se mutuò ad angulos rectos secabunt; Quæ quidem plana sunt quadrata, cùm omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantq; angulos rectos; eò quòd (cùm quadratum diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, vt ostendimus,) quadratū diametri HF, æquale existat quadratis laterū octaedri*

c 48. primi *FK, KH.* [c] *Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus sit. Eademq; est ratio de cæteris angulis.*

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, vertices verò K, & L; altitudines denique, semidiametri IK, IL: cuiusmodi sunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana vnius sunt similia & æqualia planis alterius, vt constat, cùm sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, vt est demonstratum.

COROLLARIVM III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquiter-

ſeſquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri ſphæræ diuiſum in ſex partes. [a] *Quoniam igitur diameter ſphæræ eſt potentia ſeſquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. eſt quadratũ diametri ſphæræ.* [b] *Rurſus quia diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. eſt quadratum diametri ſphæræ. Igitur cùm talium partium 4. ſit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. eſt quadratum lateris octaedri; perſpicuum eſt, latus tetraedri potentia ſeſquitertium eſſe lateris octaedri.*

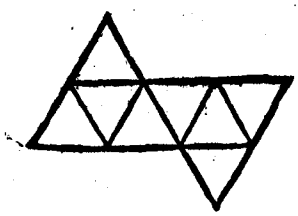
a 13. tertij decimi.

b 14. tertij decimi.

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela eſt rectæ FG; & in quadrato EL GK, recta EK, rectæ GL: [c] *Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto, parallelum. Cùm igitur eadem ſit ratio de lateris baſibus octaedri, efficitur, baſes octaedri oppoſitas inter ſe parallelas eſſe.*

c 15. vndec.

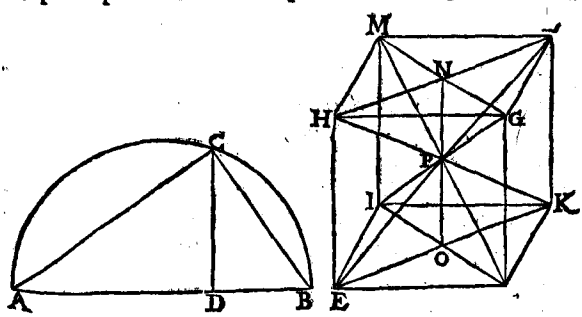


SCHOLIVM.

QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur octo triangula equilatera, inter ſe æqualia, diſponanturq́, vt hac figura indicat, facilè ex ipſis ritè inter ſeſe complicatis componetur octaedrum, ſecundùm totam ſoliditatem, vt ait Albertus Durerus.

PROBL. 3. PROPOS. 15. 14.

CVBVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quòd ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.



SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt ſit AB, ipſius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectãtur rectę AC, BC. Super rectã EF, quę rectæ BC, ſit æqualis, quadratum conſtituatur EFGH, ſuper quod erigantur perpẽdiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoque ipſi BC, quarum extremæ coniungantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, FK, ad planum EFGH, rectæ ſunt; [a] erunt rectæ EI, FK, parallelæ: Sunt autem & æquales, q vtraq; æqualis poſita ſit ipſi BC; hoc eſt, ipſi EF. [b] Igitur & EF, IK, parallelæ ſunt & æquales: & ideò parallelogrammum eſt EFKI. In quo, cùm lineæ EI, IK, KF, æquales ſint ipſi EF, omnes quatuor lineę æquales exiſtunt: [c] Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cùm EIK, FKI, æquales ſint oppoſitis angulis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratũ eſt. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE. Atq; idcircò & IKLM, quadratum erit, [d] cùm ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito EFGH. Eſt enim EL, ſolidum parallelepipedum, [e] quòd eius plana oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mutuò tangẽtes ductæ. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi ſphęra diametri AB. Sint enim planorum oppoſitorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM, HL, per quas ducãtur plana EKLH, FIMG. [f] Quia igitur tam planum EKLH, quàm FIMG, cubum bifariam ſecat; vtrumque per centrum cubi tranſibit, ex ſcholio propoſ. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiuſdem propoſ. ſe mutuò quoquè bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio, recta ſcilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia verò plana EKLH, FIMG, rectangula ſunt, (Cùm enim HE, perpendicularis ſit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM, EK; [g] perpendicularis quoque erit ad planum EK, ideoque & ad rectam EK, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt HEK. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, necnon & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo ſunt plana EKLH, FIMG.) & æqualia, quòd latera vnius æqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK FM, GI, æquales, vt conſtat ex ſcholio propoſitionis 34. libri 1. Ac proinde & ſemidiametri PE, PL, PH, PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare ſemicirculus circa EL, ex centro P, deſcriptus, & circumductus; fixa manente diametro EL, ſphæram deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem; quam quidem æqualem eſſe ſphæræ diametri AB, ita demonſtrabitur.

a 6. vndec.

b 33. primi.

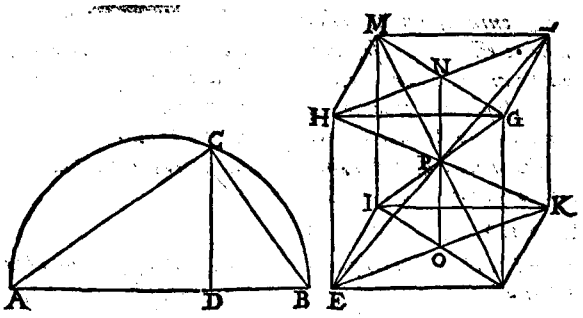
c 34. primi.

d 24. vndec.

e 15. vndec.

f 28. vndec.

g 4. vndec.



a 47. primi.

b 47. primi.

Cvm quadratum rectæ EK, [a] æquale sit quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplũ quadrati rectæ EF, hoc est, quadrati rectæ KL: Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL: [b] Est autẽ quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quòd angulus EKL, sit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectę EL, triplum erit quadrati rectę KL, hoc est, quadrati rectę BC: At verò eiusdem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cùm ergo AB, ipsius BD, sit tripla: erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt: ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphærarum, ideoque & ipsarum sphærę, æquales existunt.

Qvia verò ostensum est, quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi KL, manifestum est, diametrum sphærę potẽtia triplam esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

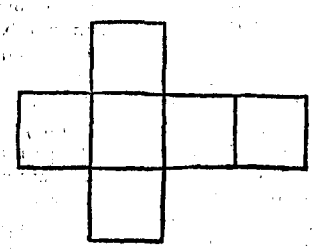
Ex demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseq; mutuò bifariam in centro sphæræ secare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppositorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseq; mutuò bifariam secare in centro P. Quòd verò & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHML, EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP, æquales sunt duobus angulis NMP, NPM, trianguli

a 29. primi b 16. vnde. c 15. primi.

NMP: ([a] Nam angulus OFP, æqualis est alterno NMP, inter lineas FI, GM, [b] quæ parallelæ sunt, cùm sint communes sectiones planorum parallelorum EFKI, GHML; [c] & angulus QPF, æqualis est oppositi ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cùm sint semidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam secabitur in P. Eademq; est ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.

COROLLARIVM II.

Rvrsvs potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul sumptis. d 13. tertij decimi. *[d] Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratum lateris tetraedri:* e 15. tertij decimi. *[e] Qualium verò partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrum sphæræ descripto, in quo latus tetraedri est AC, cubi verò BC.* f 47. primi. *[f] Perspicuum autem est, diametrum sphæræ AB, posse & rectã AC, & rectam BC, cùm angulus ACB, sit rectus.*



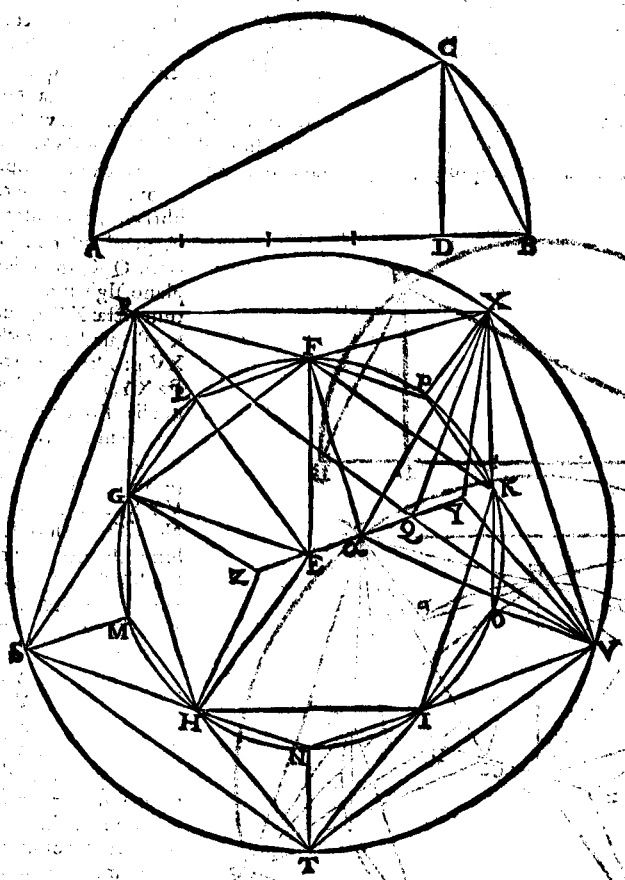
SCHOLIVM.

Qvod si ex aliqua materia conficiatur sex quadrata inter se æqualia, dissonanturq;, vt hac figura indicat, facilè componetur cubus secundum totam soliditatẽ, si dicta quadrata ritè complicentur inter se. Efficietur enim ex illis figura quædam solida, octo angulos solidos continens instar tessaræ cuiusdam, vt conflatis

16. PROBL. 4. PROPOS. 16.

Icosaedrvm constituere, & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras: & demonstrare, quòd Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

Sit



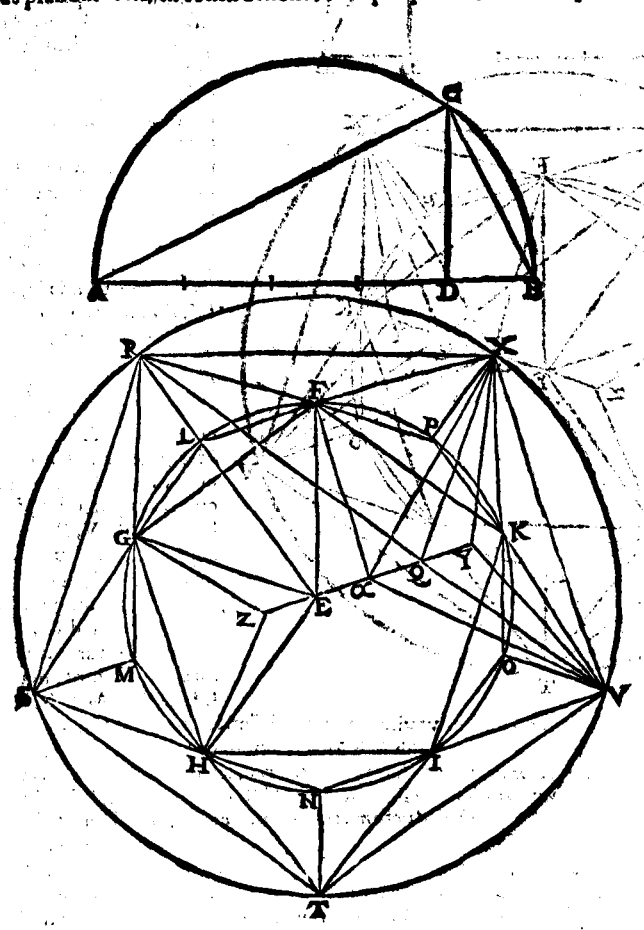
SIT sphærę, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, vt AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius AD, sesquiquarta: At verò AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E; [a] in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigãtur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur semidiametro EF, seu rectæ BC. Eruntq; omnes inter se æquales; [b] sed & parallelæ sunt. Igitur rectę, quę illas coniungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confusionem, non duximus) [c] binæ inter se æquales erũt: Ac proinde cùm æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC. [d] Quia verò planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: eademque ratione planum per rectas QS, QT, ductum, parallelum est plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum, per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum; necnon planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano. Ac proinde si ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritque æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R, S, T, V, X, rectis RS, ST, TV, VX, XR. Quia igitur LR, PX, æquales sunt, [e] & parallelæ; si concipiatur duci recta LP; [f] erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ; [g] Ac proinde ex æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rectas RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIK; & est LF, latus decagoni; [h] erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: [i] Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR; quòd angulus FLR, rectus sit, ex 3. definitione libri 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni; ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriusque pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia, cùm eorum omnia latera æqualia sint lateribus pen-

[a] 11. quarti.
[b] 6. vndec.
[c] 33. primi.
[d] 15. vndec.
[e] 6. vndec.
[f] 33. primi.
[g] 28. tertij.
[h] 10. tertij de cimi.
[i] 47. primi.

tagoni æquilateri. Post hæc, perpendicularis EQ, in vtramque partem extendatur, sintque rectæ QY, EZ, æquales singulæ, lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniam ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est, latus hexagoni, & QY, latus est decagoni eiusdem circuli; [a] erit quadratum lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarum QX, QY; [b] Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quòd angulus XQY, rectus sit, ex definitione tertia libri vndecimi. (Nam cùm plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex scholio propositionis decimequartæ libri vndecimi, ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea quæ recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemq; modo eidem XV, æqualis ostenditur VY. Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confusionem linearum, non duximus.) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX, hoc est, prioribus decem, cùm omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cùm EG, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusq; GEZ, rectus, ex tertia definitione libri vndecimi,) necnon quatuor triangula HZI, IZK, KZE, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, nõ duximus,) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cùm igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturq; singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutũ erit ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphæra diametri AB.

[a] 10. tertij decimi.

[b] 47. primi.



DIVISA enim recta EQ, bifariam in α, ducantur rectæ αF, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia sunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cùm QV, QX, sint semidiametri circuli RSTVX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe recti, ex definitione tertia libri vndecimi, [c] Erunt & bases αV, αX, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ αR, αS, αT, æquales & inter se, & ipsis αV, αX. Rursus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia sunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cùm QX, EF, sint semidiametri circulorum æqualium, & EQ, diuisa sit bifariam in α: Sunt autem & anguli αQX, αEF, æquales, nimirum recti, ex definitione tertia libri vndecimi. [d] Erunt quoque bases αX, αE, æquales: eodemque modo si ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, ostendentur αG, αH, αI, αK, æquales ipsi αX; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K, R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam verò QE, semidiameter est, hoc est, latus hexagoni circuli FGHIK, & EZ, latus decagoni eiusdem circuli; [e] erit QZ, diuisa in E, extrema ac media

[c] 4. primi.

[d] 4. primi.

[e] 9. tertij decimi.

dia ratione, maiusque segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens E∝, dimidium maioris segmenti, hoc est, recta ∝Z, [a] quintuplum potest eius, quod ex E∝, describitur quadrati: Potest autem & recta ∝F, quintuplum eiusdem quadrati rectæ E∝. (Nam cùm quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ ∝E, ex scholio propositionis quartæ libri secundi, quòd recta EF, dupla sit ipsius E∝; erunt quadrata rectarum EF, E∝, simul quintupla quadrati rectæ E∝. [b] Cùm ergo quadratis rectarum EF, E∝, æquale sit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ ∝F, quintuplum quadrati rectæ E∝.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum ∝Z, ∝F, ac proinde rectæ ipsæ ∝Z, ∝F, æquales erunt. Cùm igitur ZY, bifariá secetur in ∝, (propterea quòd si æqualibus ∝E, ∝Q, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Z∝, Y∝, æquales fiunt.) erunt omnes rectæ ductæ ex ∝, ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrum ZY, ex centro ∝, per omnes angulos Icosaedri cõstituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphæræ diametri AB.

a 3. tertiidec.

b 47. primi.

CVM enim sit vt ∝Z, ad ∝E, ita YZ, dupla ipsius ∝Z, ad QE, duplam ipsius ∝E; [c] Ac propterea vt quadratum rectæ ∝Z, ad quadratum rectæ ∝E, ita quadratum rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; sit autem quadratum rectæ ∝Z, ostensum quintuplum quadrati rectæ ∝E: Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc est, quadrati rectæ BC; quòd recta QE, æqualis sit posita semidiametro EF, hoc est, rectæ BC; Est autem & eiusdem quadrati recta BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cùm, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existente AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt.

c 15. quinti. d 22. sexti.

QVONIAM denique diameter sphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendum est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur.) potestq; quintuplum quadrati rectæ BC, hoc est, rectæ illi æqualis EF, erit quoq; semidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cùm habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cùm ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG, latus pentagoni, hoc est, latus Icosaedri, [f] Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icosaedrum igitur constituimus, & sphæra sumus complexi, qua & antedictas figuras: &c demonstrauimus, quòd Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. quod erat faciendum.

e 6. decimi.

f 11. tertiædecimi.

COROLLARIVM I.

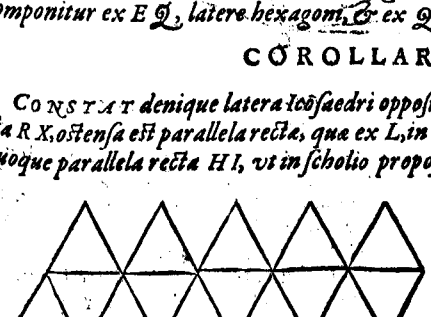
Ex dictis inferitur, sphæræ diametrum esse potentia quintuplam semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est quadratum diametri AB, quintuplum esse quadrati rectæ BC, hoc est, semidiametri EF.

COROLLARIVM II.

ITEM manifestum est sphæræ diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli: Nam YZ, diameter sphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

COROLLARIVM III.

CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cùm igitur eidem rectæ LP, sit quoque parallela recta HI, vt in scholio propositionis 27. lib. 3. demonstrauimus; (eò quòd æquales sunt arcus HL, IP; continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eademq; est ratio de cæteris lateribus oppositis.



SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hac figura indicat, componetur Icosaedrum secundùm totam soliditatem, si ritè inter sese aptentur.

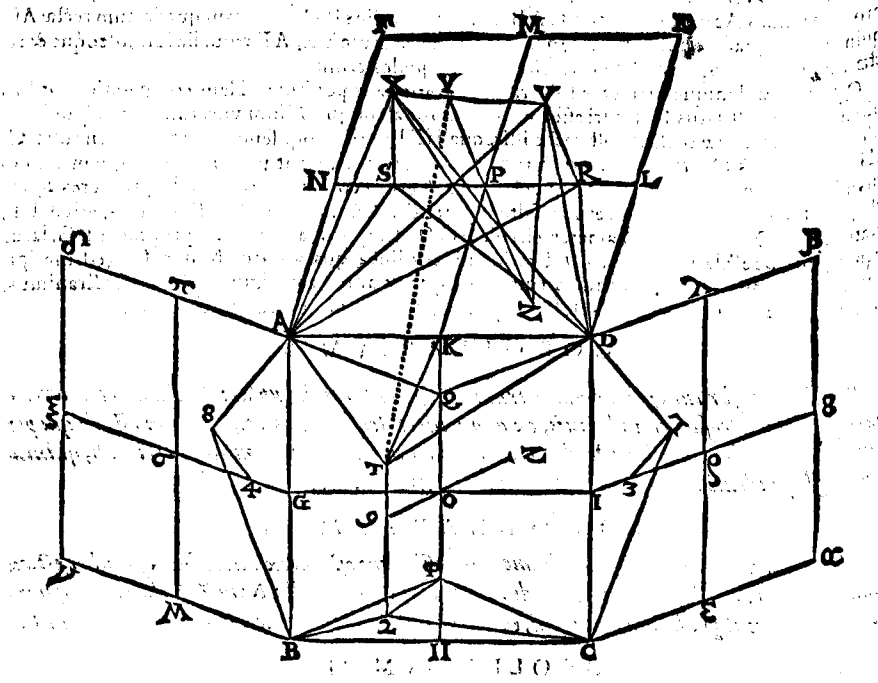
17. PROBL. 5. PROPOS. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphęra complecti, qua & prędictas figuras; & demonstrare, ꝙ Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum ABCD, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt sit communis horum sectio recta AD, (Insistunt enim omnes bases cubi sibi mutuò ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, vt cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis EFGH, quatuor lineę EI, FK, GL, HM, ipsi basi EFGH, perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. Quare & bases cubi per ipsas ductæ rectæ erunt ad eandem basin EFGH.) Diuisis itaq; cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis cõnectantur secantibus sese in O, P, centris quadratorum, vt constat ex demonstratione octaui problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, extrema ac media ratione in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, RV, SX, æquales segmentis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX; Dico ATDVX, esse vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Quod enim pentagonum ATDVX, sit in vno plano, ita ostendetur. Cum RV, SX, sint ad quadratum ADEF, rectæ, ᵇ ipsæ erunt parallelæ: Ac proinde, cùm sint æqua-

a 18. vndec.

b 6. vndec.



les, (quia segmenta maiora PR, PS, quibus æquales sunt positæ, æqualia sunt, cùm & lineæ sectæ PL, PN, æquales sint.) ᶜ erunt quoque coniungentes rectæ RS, VX, æquales & parallelæ: ᵈ Est autem & AD, eidem RS, siue LN, parallela, eò quòd AN, DL, parallelæ sunt & æquales. ᵉ Igitur & AD, VX, parallelæ sunt; ᶠ Ac propterea rectæ coniungentes AX, DV, in eodem cum ipsis erunt plano; ideoque trapezium ADVX, in vno existet plano: Est autem & triangulum ATD, in vno plano. Dico quòd & in eodem plano cum trapezio ADVX. Ex P, namque ducatur PY, parallela ipsi RV, ᵍ quæ erit recta ad quadratum ADEF, quòd ad idem recta sit RV: Et connectantur rectæ KT, KY. Quoniam igitur est vt OK, ad OQ, ita OQ, ad QK, ob sectionem rectæ OK: Est autem KP, ipsi OK, æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi;) & PY, ipsi OQ, (cùm æqualis sit ipsi RV, quæ posita fuit æqualis ipsi OQ, maiori segmento;) Erit quoque vt KP, ad PY, ita OQ, hoc est, QT, illi æqualis, ad QK. Quare cùm triangula PKY, QTK, duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad vnum angulum K, composita, ʰ ita vt homologa latera sint parallela, nempe PK, & QT, interse, quòd vtrumque rectum sit ad quadratum ABCD; & PY, QK, inter se, quòd vtrumque rectum sit ad quadratum ADEF: ⁱ Erunt reliqua latera KY, KT, in rectam lineam collocata; ᵏ Ac propterea recta TY, in vno erit plano, ideoq; planum ATD, & planum ADVX, vnum planum constituent, per rectas TY, AD, ductum. Quocirca pentagonum ATDVX, in vno existit plano.

c 33. primi.
d 33. primi.
e 9. vndec.
f 7. vndec.
g 8. vndec.
h 6. vndec.
i 32. sexti.
k 1. vndec.

QVOD

QVOD verò sit æquilaterum, ita docebitur. Cùm latera AN, NS, trianguli ANS, æqualia sint lateribus AK, KQ, trianguli AKQ; (Sunt enim AN, AK, dimidia latera cubi, & NS, KQ, segmenta minora rectarum æqualium sectarum.) & anguli ANS, AKQ, recti; si ducatur recta AQ, [a] erunt bases AS, AQ, æquales. Rursus cùm latera AS, SX, trianguli ASX, sint æqualia lateribus AQ, QT, trianguli AQT; (Nam rectæ AS, AQ, ostensæ sunt æquales, & SX, QT, sunt segmenta maiora rectarũ æqualium sectarum) & anguli ASX, AQT, recti; ex defin. 3. lib. 11. [b] Erunt quoque bases AX, AT, æquales. Quod si ducatur recta DQ, ostendemus eodem argumento, rectam DT, rectæ AT; si verò ducatur recta DR, rectam DV, rectæ DT, esse æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV; æqualia; quibus etiam æquale ostendemus reliquum VX, hac ratione. [c] Quadrata rectarum PN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati rectæ SX; Est autem quadrato rectæ PN, æquale quadratum rectæ AN. Igitur & quadrata rectarum AN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ SX. [d] Cùm ergo quadratis rectarũ AN, NS, æquale sit quadratũ rectæ AS; erit quoq; quadratũ rectæ AS, triplum quadrati rectæ SX; Ac proinde quadrata rectarum AS, SX, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectæ SX: [e] Est autem quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratum rectæ AX. Quadratum ergo rectæ AX, quadruplum quoque erit quadrati rectæ SX, hoc est, quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati rectæ XY; [f] Sunt enim rectæ PS, XY, æquales. Cùm igitur & quadratum rectæ VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ XY, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod VX, dupla sit ipsius XY; Erunt quadrata rectarum AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipsæ æquales. Quare cùm & XA, AT, TD, DV, ostensæ sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum ATDVX.

a 4. primi.
b 4. primi.
c 4. tertij decimi.
d 47. primi.
e 47. primi.
f 34. primi.

QVOD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cùm PN, secta sit in S, extrema ac media ratione, eiq; addita PR, æqualis maiori segmẽto PS; [g] erit quoq; NR, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit NP. [h] Quadrata igitur rectarum NR, RP, simul tripla sunt quadrati rectæ NP, hoc est, quadrati rectæ AN: Est autem quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla sunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla sunt eiusdem quadrati rectæ AN. [i] Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarum RV, AR, quadrupla sunt quadrati rectæ AN. [k] Cùm ergo quadratis rectarum AR, RV, æquale sit quadratum rectæ AV; Erit quoque quadratum rectæ AV, eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum. At verò eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum est quadratum rectæ AD, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd AD, dupla sit ipsius AN. Æqualia igitur sunt quadrata rectarum AV, AD, ideoq; & rectæ AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis DS, DX, ostendemus DX, DA, æquales esse; ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera TA, TD, trianguli TAD, æqualia sunt lateribus DV, VX, trianguli DXV; & bases AD, DX, æquales quoque: [l] Erunt & anguli ATD, DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV. Ac proinde, cũ in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV, [m] ipsum erit æquiangulum.

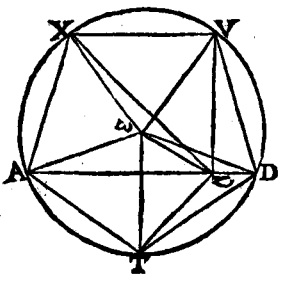
g 9. tertij decimi.
h 4. tertij decimi.
i 47. primi.
k 47 primi.
l 8. primi.
m 7. tertij decimi.

QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata $C\alpha BD$, $B\gamma AA$, recta ad quadratum ABCD, in communibus sectionibus CD, AB, quorum singula latera bifariam secẽtur in ι, λ, l, μ ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungãtur se mutuò secantibus in quadratorum centris ρ, σ. Secentur deinde OH, OK, ρ l, σ G, extrema ac media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ2, QT, 37, 48, æquales segmentis maioribus φO, QO, 3φ, 46, coniunganturq; rectæ T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonstrabimus eadem ratione, pentagona T2C7D, T2B8A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuò cohærentia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona, tangentia reliqua nouem cubi latera, constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonstrabimus.

n 19. vndec.
o 39. vndec.
p 6. vndec.

INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam secantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppositum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppositum, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniam igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quòd parallela sint basibus cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD, [n] Erunt & communes eorum sectiones ad eadem cubi plana rectę. Quare cùm YP, recta sit ad planum ADEF, ipsa producta versus Z, erit communis sectio planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eòdem pacto si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis 9OZ; erit ipsa communis sectio planorum, quæ per rectas GI, HK, ducuntur. [o] Quia verò dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuò bifariam secant; secent se mutuò bifariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bifariam in centro sphæræ cubum complectentis, ex corollario primo, propositionis decimæquintæ huius libri. Punctum igitur Z, centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoque esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta ZX. [p] Quoniam parallelæ sunt KP, OZ, quòd vtraq; recta sit ad planum ABCD; Item parallelæ sunt OK, ZP, quòd vtraq; recta sit ad planum ADEF; erit PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse cõiuncta) parallelo-

grammum; [a] ac propterea P Z, æqualis erit ipsi K O, hoc est, ipsi N P, dimidio lateri cubi: Est autem & P Y, ipsi P R, æqualis. Tota ergo Z Y, toti N R, æqualis erit. [b] Quare cùm quadrata rectarũ N R, P R, simul tripla sint quadrati rectæ N P, quòd N R, in P, secta sit extrema & media ratione; erunt quoq; quadrata rectarum Z Y, P Y, hoc est, quadrata rectarũ Z Y, Y X, simul tripla quadrati rectæ P Z: (Est enim Y X, æqualis ipsi P S, hoc est, ipsi P Y:) [c] Est autem quadratis rectarum Z Y, Y X, æquale quadratum rectæ Z X. Igitur & quadratum rectæ Z X, triplum erit quadrati rectæ Z P, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum, [d] est quoque quadratum semidiametri sphæræ cubum comprehendentis. ([d] Nam vt diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris; [e] Ac proinde vt quadratũ diametri ad quadratum lateris, ita quadratum semidiametri ad quadratum dimidij lateris. [f] Cùm ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Æquale igitur est quadratum rectæ Z X, quadrato semidiametri sphæræ, seu cubi; Ac propterea Z X, æqualis semidiametro. Eadem ratione erit ducta recta Z V, semidiametro æqualis. Vel certè quia cùm latera Z Y, Y X, trianguli Z Y X, æqualia sint lateribus Z Y, Y V, trianguli Z Y V, & anguli contenti recti. (cùm enim P Y, sit perpendicularis ad L N, erit quoque eadem [g] ad sibi parallelam V X, perpendicularis.) [g] Erunt bases Z X, Z V, æquales: Sunt autem & Z A, Z D, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictum est. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cùm sit æquilaterum & æquiangulum, circulus A T D V X, & in planum ipsius ex Z, centro sphæræ perpẽdicularis demittatur Z ω, connectanturq; rectæ ω A, ω T, ω D, ω V, ω X. [h] Quoniam igitur quadratum rectæ Z A, æquale est quadratis rectarum Z ω, ω A; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Z ω; ω X: Sunt autem quadrata rectarum Z A, Z X, æqualia, quòd rectæ Z A, Z X, ostensæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarum Z ω, ω A, quadratis rectarum Z ω, ω X, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Z ω, æqualia relinquẽtur quadrata rectarum ω A, ω X, ideoq; rectæ ipsæ ω A, ω X, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ ω V, ω D, & inter se, & ipsis ω A, ω X, æquales, quòd & rectæ Z V, Z D, æquales sint ostensę rectis Z A, Z X. Quare cùm ex ω, cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales, quàm duę, [i] punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis: ideoq; quadrata rectarum Z ω, ω A, æqualia erunt quadratis rectarum Z ω, ω T. [k] Cùm ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ Z A; his verò quadratum rectæ Z T; Erunt æqualia quadrata rectarum Z A, Z T: propterea q; & rectæ Z A, Z T, æquales. Quare sphæra complectens cubum, ex centro Z, descripta, comprehendet pentagonum quoque A T D V X; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.



[l] POSTREMO cùm sit vt N P, ad P S, ita P S, ad S N: [l] erit quoque vt N L, dupla ipsius N P, ad R S, duplam ipsius P S, ita R S, dupla ipsius P S, ad rectam compositam ex S N, R L, nimirum ad duplam ipsius S N. Si igitur cubi latus N L, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit S R: Sed N L, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cùm sit illud tertia pars huius.) [m] Igitur maius segmentum S R, hoc est, dodecaedri latus X V, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra cõplexi sumus, qua & prædictas figuras; & demõstrauimus, q; Dodecaedri latus Irrationalis est linea, q̃ vocatur Apotome. Quod erat faciendũ.

a 34. primi. b 4. tertij decimi. c 47. primi. d 15. quinti. e 22. sexti. f 15. tertij decimi. g 4. primi. h 47. primi. i 9. tertij. k 47. primi. l 15. quinti. m 6. tertij decimi.

COROLLARIVM I.

CVM ergo demonstratum sit; recta L N, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam R S: Sit autem L N, æqualis lateri cubi, & R S, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti.

COROLLARIVM II.

SIC quoq; latus cubi æquale est linea rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam A D, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estq; ostensum æquale rectis A V, D X, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

QVONIAM verò recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, [a] facit maius segmentũ latus pentagoni; [b] ac propterea recta cõposita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, factq; minus segmentum latus Dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi in eadem sphæra.

a 8. tertii decimi. b 5. tertii decimi.

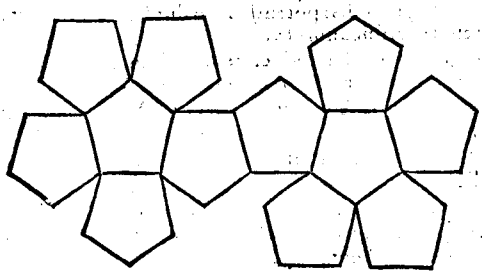
COROL-

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamq; secãtur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus seseinvicem in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt VX, TZ, quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi EF, AB; aliaq; quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cùm parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturq;, ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos, à lineis rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ YZ, 9Z, &c. quæ, vt demonstratum est, se mutuò intersecant in centro Z. Dico se mutuò secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cùm rectæ PZ, OZ, æquales sint dimidio lateri cubi; & YP, 9O, æquales maioribus segmentis æqualibus IS, O9; Erunt totæ YZ, 9Z, æquales; Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppositorum laterum ductæ, æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seq; bifariam in centro Z, mutuò secant: Ad angulos rectos verò, quia in parallelogrammo KOZP, angulus OZP, rectus est, cùm opponatur recto QKP. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium contingentes, efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE constat, si recta diuidens oppositalatera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus verò, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cùm enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ; erit ZY, secta in P, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit PZ, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY; ideoq; vt dupla ipsius ZY, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariã, ad duplam ipsius ZP, nimirũ ad latus cubi; ita eadem dupla ipsius ZP, ad duplam ipsius PY, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentũ, latus cubi, minus verò, latus Dodecaedri eiusdẽ sphæræ. a 15. quinti



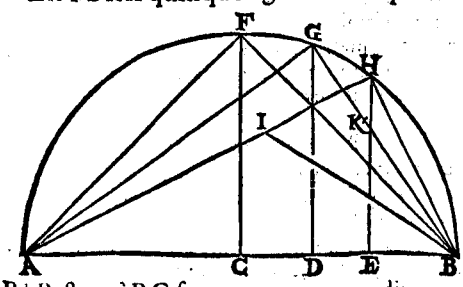
SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, disponanturq;, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrum secundùm totam soliditatem, si rectè inter se complicentur.

PROBL. 6. PROPOS. 18.

18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.



SIT sphæræ diameter AB, quæ in C, secetur bifariã; In D, verò ita, vt BD, sit ipsius pars tertia; In E, denique ita, vt BE, sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsi AB, perpendiculares CF, DG, EH; connectanturq; rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Post hæc ex HA, abscindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH: connectaturq; recta BI. Postremò BG, secetur extrema ac media ratione in K, sitq; maius segmentum BK.

QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico AG, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; AF, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icosaedri; BK, denique latus Dodecaedri. Quoniam n. AG, media proportionalis est inter BA, AD, ex coroll. propos. 8. lib. 6.

Erit ex coroll. propoſ. 20. eiuſdem lib. vt B A, ad A D, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A G: Eſt autem B A, ipſius A D, ſeſquialtera; cùm talium partium 2. ſit A D, qualium 3. eſt B A. Igitur & quadratum rectæ B A, ſeſquialterum eſt quadrati rectæ A G; [a] Ac proinde cùm diameter ſphæræ ſit potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri; erit A G, latus Tetraedri.

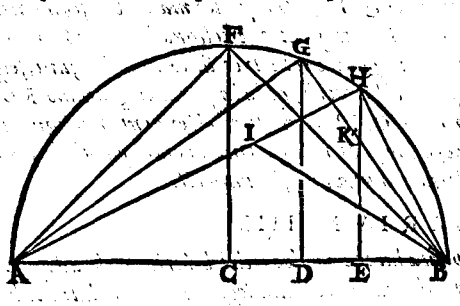
a 13. tertij decimi.

RVRSVS quoniam A F, eſt media proportionalis inter B A, A C, ex eodem coroll. propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde vt B A, ad A C, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A F, ex adducto coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem B A, ipſius A C, dupla: Erit quadratum rectæ B A, duplum quadrati rectæ A F. [b] Quare cùm diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri, erit A F, latus Octaedri. Eodem modo erit B F, latus Octaedri.

b 14. tertij decimi.

DEINDE cùm B G, ſit media proportionalis inter A B, B D, ideoq; vt A B, ad B D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B G, ex prefatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem A B, ipſius B D, tripla, ex conſtructione: Erit quadratum rectæ A B, triplum quadrati rectæ B G. [c] Quocirca cùm ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris cubi: Erit B G, latus cubi.

c 15. tertij decimi.



PRAETEREA quia, ex eiſdem corollariis, B H, eſt media proportionalis inter A B, B E, atque idcirco vt A B, ad B E, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B H: Eſt autem, ex conſtructione, A B, ipſius B E, quintupla: Erit quadratum rectæ A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cùm igitur diameter ſphæræ potentia ſit quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex coroll. 1. propoſ. 16. huius lib. Erit B H, ſemidiameter, hoc eſt, latus hexagoni dicti circuli; Eſt autem H I, latus decagoni eiuſdem circuli, ex cõſtructione. [d] Igitur latus pentagoni poterit & B H, & H I, ſimul; Ac proinde [e] cùm quadratum rectæ B I, æquale ſit quadratis rectarum B H, H I; erit B I, latus pentagoni circuli eiuſdem. [f] Quam ob rem B I, latus eſt Icoſaedri.

d 10. tertij decimi.
e 47. primi.
f 16. tertij decimi.

DENIQVE, cùm B G, latus cubi ſectum ſit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius ſegmentum, latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. huius lib. Expoſita ergo ſunt latera quinque figurarum regularium in eadem ſphæra deſcriptarum.

QVOD verò ad comparationem laterum iam inuentorum ſpectat; cùm demonſtratum ſit, diametrum ſphærę eſſe potentia ſeſquialterã lateris pyramidis; potentia verò duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi; perſpicuum eſt, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. eſſe quadratum lateris Tetraedri; talium verò 3. quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi, talium 2. Ac propterea latus pyramidis, ſeu Tetraedri, eſſe potentia ſeſquitertium lateris Octaedri, potentia verò duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia eſſe ſeſquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex ſphæræ diametro deſcripta, proportionem inter ſe habent, quã numerus ad numerum; [g] Ac propterea diameter ſphæræ, & latera dictarum figurarũ lineæ ſunt commenſurabiles; atque adeò cùm diameter ſphæræ ponatur eſſe Rationalis, erunt quoque prędicta latera Rationalia. Quia verò dicta quadrata nõ habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. [h] Erunt huiuſmodi lineæ, nimirum diameter ſphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommenſurabiles, ac proinde Rationales potentia tantùm commenſurabiles.

Diamet. 6.
Tetraed. 4.
Octaed. 3.
Cub. 2.
g 6. decimi.
h 9. decimi.

AT verò latera Icoſaedri, & Dodecaedri, quoniam ſunt lineę Irrationales, illud quidem, Minor; hoc verò Apotome, vt demonſtratum eſt, nullo modo, hoc eſt, nec longitudine, nec potentia commenſurabilia ſunt lateribus prædictis. Si enim commenſurabilia eſſent latera harum poſteriorum figurarum lateribus priorum, cùm latera priorum ſint diametro ſphærę commenſurabilia; eſſent quoque latera poſteriorum eidem diametro commenſurabilia; Ac proinde, exiſtente diametro Rationali, forent quoque ipſa latera Rationalia. Quod eſt abſurdum. oſtenſum enim eſt, ipſa eſſe Irrationalia.

SED neque inter ſe vllo pacto commenſurabilia ſunt dicta latera Icoſaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur eſſe commenſurabilia longitudine inter ſe, cùm latus Dodecaedri ſit Apotome, [i] erit quoque latus Icoſaedri, Apotome. Item cùm latus Icoſaedri ſit linea Minor, [k] erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod ſi dicantur commenſurabilia eſſe potentia tantùm, ſequetur eodem modo, latus Dodecaedri eſſe lineam Minorem, ex eo, [l] quòd latus Icoſaedri Minor eſt. Quod eſt abſurdum. Nam ex ſcholio propoſ. 112. lib. 10. Apotomé, & Minor ſunt lineæ Irrationales prorſus inter ſe differentes, ita vt neutra ſit eadem alteri.

i 104. deci.
k 106. deci.
l 16. tertij decimi.

ITAQVE quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe, & diametro ſphæræ, ideoq; Rationalia exiſtant, duo verò poſteriora incommẽſurabilia & inter ſe, & diametro, reliquisq; lateribus; ac proinde Irrationalia ſint:

Cernitur

Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; Hoc est, eo ordine se mutuò excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quæ fortè causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cùm enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quàm AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quàm AF, ex scholio propos. 28 lib. 3.

EODEM modo ostendemus latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quàm BG, cubi latus.

LATVS autem cubi BG, maius esse latere Icosaedri BI, hac arte demonstrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipsius BD; [a] & quadrata habent proportionem laterum duplicatam: erit quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BD, cum noncupla proportio sit duplicata proportionis triplæ, vt hìc apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. est quadratum rectæ AB, talium 3. est quadratum rectæ BG; [b] quod illud huius triplum sit. Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum GD, BD, cùm æqualia sint quadrato rectæ BG. Igitur si auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam verò quadratum rectæ AB, quintuplum est quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quàm talium partium 2. Nam cùm 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quòd 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; [c] erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quàm 2. Quare quadratum rectæ GD, maius est quadrato rectæ BH, ideoq; recta GD, maior quàm recta BH. Rursus quia diameter sphæræ AB, componitur ex BH, semidiametro circuli, ex quo Icosaedrum constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiusdem circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. constat latus decagoni HI, minus esse tertia parte rectæ AB, hoc est, minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipsi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD; Atque adeò, cùm quadratum rectæ AB, noncuplum sit ostensum quadrati rectæ BD, erit idem quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BH. Quod est absurdum. quintuplum enim est demonstratum. Non ergo HI, tertia pars est ipsius AB: Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI, dicatur maior tertia parte rectæ AB, & proinde dupla ipsius HI, maior quàm duæ tertiæ, hoc est, quàm AD, erit BH, minor quàm tertia pars BD. Quare quadratum rectæ AB, maius erit, quàm noncuplum quadrati rectæ BD. Quod magis est absurdum. Non igitur maior est HI, tertia parte ipsius AB: Sed neque æqualis tertiæ parti, vt ostendimus. Minor ergo est quàm tertia pars, hoc est, quàm BD. Itaque cùm rectæ GD, DB, maiores sint rectis BH, HI, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: [d] Est autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectæ BI, quadratis rectarum BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoque erit quadrato rectæ BI; Ac proinde recta BG, nempe latus cubi, maior erit quàm recta BI, latus scilicet Icosaedri.

MAIVS denique esse latus Icosaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patefiet. Cùm rectæ BG, diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BK, & minus GK; erit rectangulum sub BG, BK, maius rectangulo sub BG, GK; atque adeò rectangula sub BG, BK, & sub BG, GK, simul maiora duplo rectanguli sub BG, GK: [e] Est autem rectangulis sub BG, BK, & sub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis sub BG, GK, æqualia sunt duo quadrata rectæ BK. (Nam cùm sit, vt BG, ad BK, ita BK, ad GK; [f] erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo sub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis sub BG, GK.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG, sex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia sunt quinque quadrata rectæ BH, (Cùm enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectæ BH; erunt tam tria quadrata rectæ BG, quàm quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ BH, maiora erunt sex quadratis rectæ BK; Ac proinde vnum quadratum rectæ BH, maius erit vno quadrato rectæ BK. (Si namq; æquale esset quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus; forent quinque quadrata rectæ BH, minora sex quadratis rectæ BK. quod est absurdum, cùm illa quinq; hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta BH, maior erit quàm recta BK; Ac propterea cùm BI, maior sit quàm BH, multò maior erit BI, latus videlicet Icosaedri, quàm BK, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

[a] 20. sexti. [b] 15. tertiidecimi. [c] 10. quinti. [d] 47. primi. [e] 2. secundi. [f] 17. sexti.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinq; figuras non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur, inter se æqualibus, hac ferè ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris alius solidus angulus constitui non potest, cùm saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

Ex tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus.

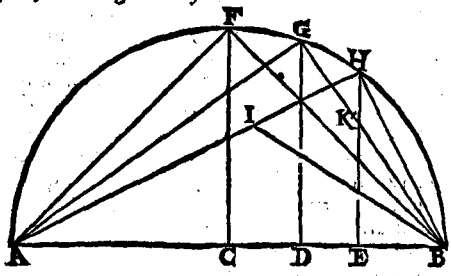
Ex quatuor, Octaedri angulus;

Ex quinque, angulus Icosaedri;

Ex sex autem huiusmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cùm enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. propos. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertias partes vnius recti, hoc est, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. [2] *Nam solidus omnis angulus, minoribus quàm quatuor rectis angulis continetur. Multò ergo minus ex pluribus, quàm sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.*

a 20. vndecimi.

Ex tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multò ergo minus ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.



Ex tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cùm enim quinq; anguli pentagoni æquales sint sex rectis, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoq; ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cùm enim vnus, vt dictum est, maior sit recto, eò quòd continet vnum rectum, & insuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis cõstituetur; Ac propterea multò minus ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sanè ex aliis figuris æquilateris & æquiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cùm sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, vt ad propos. 32 lib. 1. est demonstratum; Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea duas partes sextas vnius recti; continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atque idcircò multò minus ex pluribus eiusmodi angulis, quàm tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex aliis polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

Nam si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramidis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

Si verò quatuor eiusmodi triangula conueniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

Si denique assumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum solidum, conficietur Icosaedrum viginti triangulis eiusmodi contentum.

Quod si tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt constituant angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

Postremo, si tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

Hoc etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle Alexandrino, quo expeditè numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

Si enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis latera, vt habeantur omnium basium latera: Quia verò bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis solidi appareat.

Exemplvm. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadratæ cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12 pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

Quod si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli: Quia verò tres, quatuor,

quatuor, vel quinq; semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt ad angulum solidum constituendum, vt numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerũ angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si verò 6. quadrata cubi multiplicẽtur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum solidum cubi.) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidum angulum Octaedri.) conficiunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri.) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad constituendum angulum solidum Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

DENIQVE consideratione etiam dignum est, cubum & octaedrum reciproca esse, quod ad bases attinet, & ad angulos solidos. Nam quot bases in vno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contrà. Vt cubus habet sex bases, & octo angulos solidos, octaedrum verò octo continet bases, & sex angulos solidos. Sic etiã reciproca sunt Icosaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icosaedrum habet viginti bases, & duodecim solidos angulos, at Dodecaedrũ duodecim bases possidet, & viginti angulos solidos. Solum Tetraedrũ, (hoc est Pyramis) cum nullo reciprocatur, nisi cũ seipso. Habet enim quatuor bases totidemq; solidos angulos.

FINIS ELEMENTI DECIMITERTII.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM:

& Solidorum quartum,

vt quidam arbitrantur: Vt alij verò, Hypsiclis Alexandrini de quinq; corporibus,

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS ALEXANDRINI AD PROTARCHUM.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patriq; nostro ob disciplinæ societatem commendatus, longissimo peregrinationis tempore cum eo versatus est. Cumq; dissererent aliquando de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icosaedri eidem sphæræ inscriptorum, quam hæc inter se habeant rationem, censuerunt ea non rectè tradidisse Apollonium; quæ à se emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonstrationem accuratè complectebatur de re proposita, ex eiusq; problematis indagatione magnam equidem cæpi voluptatem. Illud certè ab omnibus perspici potest, quòd scripsit Apollonius, cùm sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conijcere licet, studio nos postea scripsisse videmur, id monimentis consignatum tibi dedicandum ducimus; vt qui feliciter cùm in omnibus disciplinis, tum vel maximè in Geometria versatus, scire ac prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam verò, quæ tibi cum patre fuit, vitæ consuetudinem, quaq; nos complecteris

beneuolentiam, tractationem ipſam libenter audias. Sed iam tempus eſt, vt proœmio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.

TREDECIM *libri hactenus expoſiti ab omnibus Euclidi aſcribuntur: Duo verò ſubſequentes à plerisq; Hypſicli Alexandrino & rectè, meo iudicio, tribui ſolent; in quorum quidem priori inter ſe comparantur Icoſaedrum, & Dodecaedrum, tam ſecundùm ſuperficies, quàm ſoliditates: In poſteriori verò exponuntur deſcriptiones aliquot figurarum regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri ſint inſtar appendicis cuiuſdam elementorum Euclidis. Verùm quia plurima omittuntur ab Hypſicle ſcitu non iniucunda, quæ ſpectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumq; mutuas inſcriptiones vnius in alio; quatuor enim propoſitionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinq; verò problematibus decimusquintus abſoluitur: Viſum eſt, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo vberius de dictis figuris regularibus in vniuerſum diſſerere, proponendo varia theoremata, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter ſe comparantur, & ſibi mutuò inſcribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuiſſe Campanum, & Franciſcum Fluſſatem Candallam, qui diligentem operam, & ſedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non ſolùm inſequentes duos libros quamplurimis theorematibus, problematibusq; locupletauit; verumetiam integrum librum, qui ordine decimusſextus eſt, adiunxit, in quo proprietates illuſtres de dictis corporibus proponit. Cæterum præcipuum fuiſſe Hypſiclis inſtitutum, in hoc lib. 14. diſputare de comparatione mutua Icoſaedri & Dodecaedri. facilè intelligi poteſt ex eius proœmio ad Protarchum, quod ſuperius eſt poſitum.*

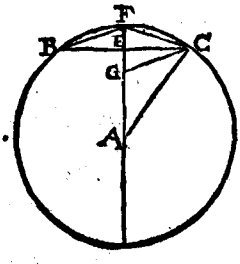
QVONIAM *verò in hiſce duobus libris Hypſicles, & Campanus tam in numero propoſitionum, quàm in earundem ordine, & inter ſe, & à Franciſco Fluſſate, ideoq; & à nobis diſcrepant; annotauimus in margine ordinem vtriuſque duobus numeris, quorum ſuperior ordinem Hypſiclis, inferior verò Campani ſeriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantùm numerus reperitur, nullam eſſe tunc differentiam inter Campanum & Hypſiclem, ſignificatur; Quod ſi aliquando loco ſuperioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum eſt, in Hypſicle dictam propoſitionem deſiderari. Idemq; in Campano intellige, ſi fortè loco numeri inferioris eadem nota poſita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio eſt, tam apud Hypſiclem, quam apud Campanum, illam propoſitionem deeſſe.*

1.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVAE ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimùl, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

Ex centro A, circuli B C D, ducatur A E, perpendicularis ad B C, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico A E, dimidium eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim A E, in vtramque partem, vt perficiatur tota diameter D F, ſumptaque E G, æquali ipſi E F; connectantur rectæ A C, C G, C F, B F. [a] Quoniam igitur perpendicularis A E, ſecat rectam B C, bifariam; erunt latera B E, E F, trianguli B E F, æqualia lateribus C E, E F, trianguli C E F; Cùm igitur & anguli contenti ſint æquales, nempe recti; [b] erunt baſes C F, B F, æquales; [c] ideoq; & arcus C F, B F, æquales; Ac proinde exiſtente arcu B C, quinta parte totius circumferentiæ, erit C F, eiuſdem pars decima; atq; adeò recta C F, latus erit decagoni. Rurſus quia latera C E, E F, trianguli C E F, æqualia ſunt lateribus C E, E G, trianguli C E G, ſuntque anguli contenti recti; [d] erunt & baſes C F, C G, & anguli C F G, C G F, æquales. Quia verò arcus C F, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ D C F, cùm ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus C F, quarum 4. eſt arcus D C, hoc eſt, arcus D C, quadruplus erit arcus C F. [e] Quare & angulus D A C, quadruplus erit anguli C A F: [f] Eſt autem angulus C F D, dimidium anguli D A C, cùm illius ad circumferentiam, & huius ad centrũ eadem ſit baſis D C. Igitur angulus C F D, atq; adeò illi æqualis oſtenſus C G F, duplus erit anguli C A F: [g] At qui angulus C G F, externus, æqualis eſt internis G A C, G C A, in triangulo G A C. Cùm igitur G A C, ſit dimidium anguli C G F, vt oſtenſum eſt, erit G C A, reliquum dimidium eiuſdem anguli C G F, ideoq; æquales erunt anguli G A C, G C A; [h] ac proinde & latera A G, C G, æqualia: Eſt autem C G, recta oſtenſa æqualis rectæ C F. Igitur & A G, recta æqualis erit eidem C F. Quare additis æqualibus G E, E F, fiet A E, æqualis duabus E F, F C, ſimul: Ac proinde tres ſimul A E, E F, F C, hoc eſt, duæ ſimul A F, F C, duplæ erunt ipſius A E, atque idcirco è contrario erit A E, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul A F, F C, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 3. tertij. b 4. primi. c 28. tertij. d 4. primi. e 33. ſexti. f 20. tertij. g 32. primi. h 6. primi.

COROL.

COROLLARIVM I.

Ex his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quem dicta haec linea recta subtendit, bifariam Demonstratum enim est rectam A E, quae ex centro perpendicularis est ad B C, dividere arcum B C, bifariam in F.

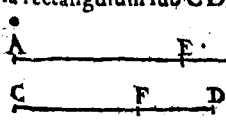
COROLLARIVM II.

Hinc quoque fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam, aequalem esse vtrique lineae simul, & ei, quae ex centro ad latus trianguli aequilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiae lateris decagoni. Quoniam enim, vt in hac propositione ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni aequalis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul; Est autem perpendicularis ad latus trianguli aequilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. aequalis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni esse aequalem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 4. 2.

SI binae rectae lineae extrema ac media ratione secentur; ipsae similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones.

SECENTVR binae rectae A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse vt A B, ad C D, ita A E, ad C F, & E B, ad F D; Item vt A E, ad E B, ita C F, ad F D, &c. Cùm enim sit, vt A B, ad A E, ita A E, ad E B; & vt C D, ad C F, ita C F, ad F D; [a] erit rectangulum sub A B, E B, aequale quadrato rectae A E; & rectangulum sub C D, F D, aequale quadrato rectae C F. Quamobrem erit vt rectangulum sub A B, E B, ad quadratum rectae A E, ita rectangulum sub C D, F D, ad quadratum rectae C F; (est enim vtrobique aequalitatis proportio.) Ac propterea, per ea, quę demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. vt quadruplum rectanguli sub A B, E B, ad quadratum rectae A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, ad quadratum rectae C F: & componendo, vt quadruplũ rectanguli sub A B, E B, & quadratum rectae A E, ad quadratum rectae A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, & quadratũ rectae C F, ad quadratum rectae C F; [b] Sed quod quater continetur sub A B, E B, vnà cum quadrato rectae A E, aequale est quadrato lineae compositae ex A B, E B; Et quod quater continetur sub C D, F D, vnà cum quadrato rectae C F, aequale est quadrato lineae compositae ex C D, F D. Igitur erit quoque, vt quadratum lineae compositae ex A B, E B, ad quadratum rectae A E, ita quadratum lineae compositae ex C D, F D, ad quadratum rectae C F; [c] Ac proinde, vt recta composita ex A B, E B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, ad rectam C F: Et cõponendo vt composita recta ex A B, E B, & recta A E, hoc est, dupla ipsius A B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, & recta C F, id est, dupla ipsius C D, ad rectam C F; Et permutando, vt dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita A E, ad C F; [d] Vt autem dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita est A B, ad C D. Erit ergo vt A B, ad C D, ita A E, ad C F; Ac propterea, cùm sit vt tota A B, ad totam C D, ita A E, ablata ad C F, ablatam; [e] erit quoque reliqua E B, ad reliquam F D, vt tota ad totam. Quare vt A E, ad C F, ita erit E B, ad F D, cùm vtraque proportio eadem sit proportioni A B, ad C D: Et permutando, erit vt A E, ad E B, sic C F, ad F D; & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binae itaq; rectae lineae extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendũ.



[a] 17. sexti.

[b] 8. secundi

[c] 22. sexti.

[d] 15. quinti.

[e] 19. quinti.

SCHOLIVM.

Facile hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni aequilateri & aequianguli ad latus ipsius pentagoni.

Quoniam enim [a] latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam; [b] & recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni; [c] fit vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad minus, quae maioris segmenti rectae angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cùm ergo sit, vt maius segmentum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta subtendens angulum pentagoni aequilateri & aequianguli ad latus pentagoni. quod est propositum.

[a] 9. tertij decimi.

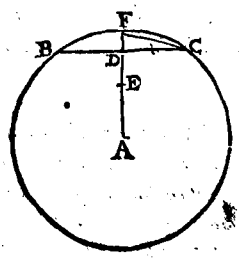
[b] 8. tertij decimi.

[c] 2. quarti decimi.

Ex hac quoque propositione & praecedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum aequale est perpendiculari

ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus verò æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.



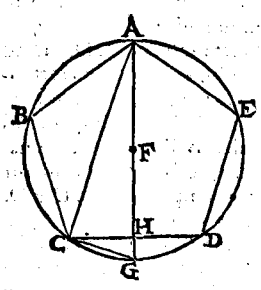
Ex centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum A E, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ductæ; minus verò segmentum E D, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Extensa namque recta A D, ad F, & connexa recta F C; erit F C, latus decagoni, cùm ex coroll. 1. propos. 1. huius libri, arcus B C, nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F; [a] *As proinde recta composita ex A F, latere hexagoni, & F C, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum A F, latus hexagoni, minus verò segmentum F C, latus decagoni. Quare, vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota A D, diuisa secundùm extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex A F, F C, similiter diuisam, ita A E, maius segmentum ad A F, maius segmentum; & E D, minus segmentum ad F C, minus segmentum:* [b] *Est autem tota A D, dimidium totius compositæ ex A F, F C. Igitur & A E, ipsius A F, semidiametri, & E D, ipsius F C, lateris decagoni dimidium erit. Cùm ergo, per corollarium propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidiæ semidiametri; perspicuum est, maius segmentum A E, æquale esse dictæ perpendiculari, minus verò E D, dimidio lateris decagoni. Quod est propositum.*

a 29. tertii decimi.

b 1. quarti decimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.



DESCRIBATVR in circulo A B C D E, cuius centrum F, pentagonum A B C D E, subtendatq; recta A C, bina latera A B, B C. Dico quadrata rectarum C D, A C, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta A F G, quæ p coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidat & arcum C D, & latus C D, bifariam in G, & H; erit arcus C G, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta subtensa C G, latus decagoni. Quoniam igitur recta A G, dupla est rectæ F G; erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ A G, quadruplum quadrati rectæ F G: [a] Sunt autem quadrato rectæ A G, æqualia quadrata rectarum A C, C G. Igitur & quadrata rectarum A C, C G, quadrupla sunt quadrati rectæ F G: Atque adeò tria quadrata rectarum A C, C G, F G, quintupla quadrati eiusdem rectæ F G; [b] Cùm ergo quadratis rectarum F G, C G, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ C D, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoq; quadrata rectarum A C, C D, quintupla quadrati rectæ F G, nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

a 47. primi.

b 10. tertiædecimi.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur; quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus A B C D E, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiam sphæra descripti; eritq; ex corollario secundo, propositionis decimæ septimæ, libri decimitertij, recta A C, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem sphæra descripti. [a] *Perspicuum est autem, quadrata rectarum A C, C D, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri F G, &c.*

a 3. quartidecimi.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius

illius ſegmentum erit latus decagoni eiuſdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, ſitque maius ſegmentum AC. Dico AC, eſſe latus decagoni eiuſdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni eiuſdem circuli, adiungaturque in rectum ipſi AB; [a] eritque tota compoſita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuiſa in A, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum BA: Ponitur autem & AB, ſecta in C, ſimiliter. [b] Igitur erit vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, tota ad maius ſui ſegmentum AC: Sed eſt quoque vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, maius ſegmentum ad AD, ſegmentum minus, per definitionem lineæ ſectæ extrema ac media ratione. Igitur erit vt AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erunt. Cùm ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni eſt AB; erit & AC, eiuſdem circuli latus decagoni.



a 9. tertiidecimi.

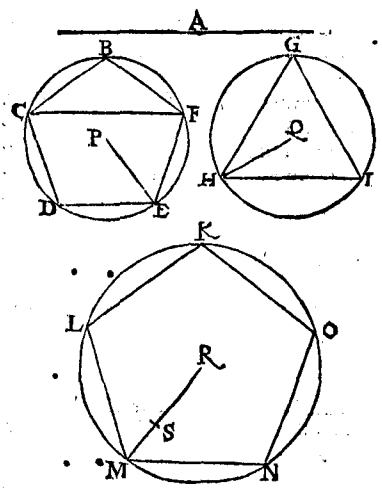
b 2. quartidecimi.

ALITER. Adiungatur ipſi AB, in rectum recta AD, æqualis maiori ſegmento AC; [c] eritque tota recta BD, diuiſa in A, extrema ac media ratione. Cùm igitur AB, maius ſegmentum ipſius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 9. lib. 13. AD, minus ſegmentum eiuſdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipſi AD, latus erit decagoni in eodem circulo deſcripti, cuius AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat oſtendendum.

c 5. tertiidecimi.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 2. 5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.



IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptum & Dodecaedrum, cuius vnũ pentagonum BCDEF, & Icoſaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundem circulũ circumſcribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc eſt, circulos BCDEF, GHI, ipſa circumſcribentes eſſe æquales. Circumſcribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, [d] ex quo Icoſaedrum ſphæræ inſcribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni ſint latera Icoſaedri, ideoq; quodlibet ipſorum æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Seceturque RM, extrema ac media ratione in S; [e] eritq; maius ſegmentum RS, latus decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, eſt latus hexagoni. Subtendat quoq; recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit per corollarium ſecũdum, propoſ. 17. lib. 13. latus cubi in eadẽ ſphæra deſcripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiuſdẽ propoſ. BF, latus Dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris cubi CF, ſecti extrema ac media ratione; [f] erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius ſegmẽtum ad RS, maius ſegmentum; [g] Ac propterea vt quadratũ rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratũ rectæ BF, ad quadratũ rectæ RS; Atq; adeò, p ea, quæ demonſtrata ſunt in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectę CF, ad quintuplum quadrati rectę RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectę RS; Eſt autẽ triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propoſ. 15. lib. 13. q̃ quintuplum quadrati ſemidiametri RM, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13. æquale eſt quadrato ex A, diametro ſphæræ,) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: [h] Quia verò quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia ſunt tribus quadratis rectæ CF, (cùm hæc oſtenſa ſint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed quoniam, ([i] cùm quadrata rectarũ CF, BF, quinque quadratis ſemidiametri PE, ſint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ PE, & quinque quadrata rectæ MN, æqualia ſunt quindecim quadratis ſemidiametri QH; (Nam cũ MN, æqualis ſit oſtenſa ipſi GH, lateri Icoſaedri, ſeu trianguli æquilateri; [k] ſit autem quadratum ipſius GH, æquale tribus quadratis ſemidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc eſt, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH.) erunt quoque

d 16. tertiidecimi.

e 4. quartidecimi.

f 2. quartidecimi.

g 22. ſexti.

h 10. tertiidecimi.

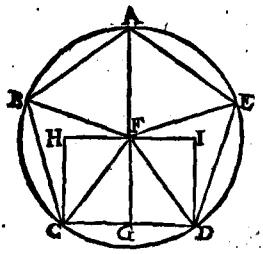
i 3. quartidecimi.

k 12. tertiidecimi.

quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac propterea vnũ quadratum rectæ PE, vni quadrato rectæ QH; & idcirco semidiameter PE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales sunt. Idem ergo circulus comprehẽdit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

3. 6. Si ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribẽtis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni. Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.



In centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, resoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex corollario propos. 8. lib. 1. cùm bina latera vnius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum sub HC, hoc est, sub FG, & CD. [a] Quoniam verò rectangulum CI, duplum est trianguli FGD, atque adeò cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, æqualium: erit rectangulum CI, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cùm quinque triangula æqualia sint vni pentagono: Atq; adeò sextuplum rectanguli CI, quinquies sumpti, nimirum rectangulum CI, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorum pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

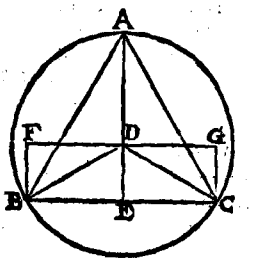
[a] 41. primi.

Aliter. Facta eadem figurę constructione, [b] cùm rectangulum CI, duplũ sit trianguli FCD, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto: Erit rectangulum CI, trigesies sumptũ æquale triangulo FCD, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies: ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cùm enim vnum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triangulis. Atque idcircò triangulum FCD, sumptum sexagesies æqualis erit superficiei Dodecaedri.

[b] 41. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

3. 7. Si ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnũ latus trianguli; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.



Ex centro D, circuli circumscribentis triangulum Icosaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum sub DE, & BC, trigesies sumptum, æquale esse toti superficiei Icosaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, resoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex corollario propositionis 8. libri 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & basis vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipsi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC, eritque rectangulum BG, contentum sub FB, hoc est, sub DE, & BC. [c] Quoniam verò rectangulum BG, duplum est trianguli BDC; atque adeò cuiuslibet reliquorum duorum triangulorum ipsi DBC, æqualium: Erit rectangulum BG, ter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cùm tria talia triangula æqualia sint vni triangulo Icosaedri; Atque adeò idem rectangulum trigesies sumptum, hempe decuplum rectanguli BG, ter sumpti, æquale erit viginti triangulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

[c] 41. primi.

Aliter. Facta eadem constructione figuræ, [d] cùm rectangulum BG, duplum sit trianguli DBC, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum BG, trigesies sumptum, æquale triangulo DBC, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta huiusmodi triangula conficiunt viginti triangula Icosaedri, eò quòd tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum, æquale est toti superficiei Icosaedri.

[d] 41. primi.

COROL-

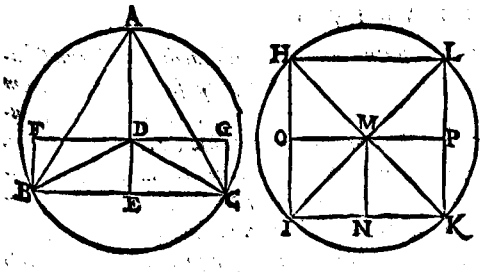
COROLLARIVM.

ITAQVE superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. [a] *Cùm enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto;* [b] *Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quàm hoc rectangulum, superficiei Icosaedri.* [c] *Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.*

[a] 16. quartidecimi.
[b] 17. quartidecimi.
[c] 15. quinti.

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri. In Octaedro verò & cubo duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primò triangulum Tetraedri A B C, circumscriptum à circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur D E, ad latus B C, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum B G, sexies sumptum, æquale esse superficiei Tetraedri. [d] *Quoniam enim rectangulum B G, duplum est trianguli D B C, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cùm igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipsi A B C, æqualia, eò quòd tria conficiunt vnum; Erit rectangulum B G, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis æquale.*



[d] 41. primi.

SIT deinde idem triangulum A B C, Octaedri, &c. Dico rectangulum B G, duodecies sumptũ, æquale esse superficiei Octaedri. [e] *Cùm enim rectangulum B G, duplum sit trianguli D B C, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptũ æquale vigintiquatuor huiusmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea q; tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum B G, duodecies sumptũ, æquale est superficiei Octaedri.*

[e] 41. primi.

SIT tertiò quadratum cubi H I K L, circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta M N, perpendiculari ad I K, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur O P, ipsi I K, parallela. Dico rectangulum I P, contentum sub O I, hoc est, sub M N, & I K, sumptum duodecies, æquale esse superficiei cubi. [f] *Quoniam enim rectangulum I P, duplum est trianguli M I K, hoc est, æquale duobus talibus triangulis: Erit idem duodecies sumptum æquale vigintiquatuor eiusmodi triangulis. Quare cùm vigintiquatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quòd quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum I P, duodecies sumptum æquale superficiei cubi. Quod est propositum.*

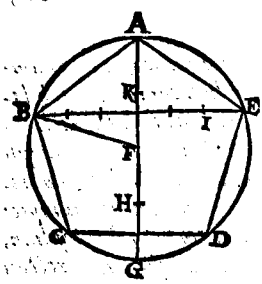
[f] 41. primi.

ALITER. Cùm duo rectangula I P, conficiant quadratum H I K L; (sunt enim I P, P H, æqualia, cùm recta O I, sit dimidium lateris H I, nempe æqualis ipsi M N,) constituent duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 4. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E, & ducta diameter A G, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint A H: Angulum verò A, subtendens recta B E, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint B I, & vna I E, ita vt B I, sit quintupla ipsius I E. Dico rectangulum comprehensum sub A H, B I, æquale esse pentagono A B C D E. Ducta enim recta B F, quoniam A H, continet tres quartas partes diametri, & A F, duas, cũ sit semidia-



meter, erit AH, ipſius AF, ſeſquialtera. Quia verò recta FA, diuidens arcũ BAE, bifariam, diuidit quoq; rectam BE, bifariam, per coroll. 1. propoſ. 10. lib. 13. in puncto K, continebit tam KB, quàm KE, tres ſextas rectæ BE: atq; adeò cùm BI, contineat quinque, cõtinebit KI, duas: Ac proinde & KB, ipſius KI, erit ſeſquialtera. Quamobrem erit vt AH, ad AF, ita KB, ad KI; *a* atque idcirco rectangulum ſub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo ſub mediis AF, KB. *b* Eſt autem rectangulum ſub AF, KB, duplum trianguli ABF, cùm rectangulum, & triangulum eandem habeant baſin AF, & eandem altitudinem BK, hoc eſt, inter eaſdem ſint parallelas conſtituta. Igitur & rectangulum ſub AH, KI, duplum erit eiuſdẽ trianguli ABF: *c* Eſt autem & rectangulum ſub AH, KI, duplum rectanguli ſub AH, IE: propterea quòd & baſis KI, dupla eſt baſis IE, (continet enim KI, duas ſextas partes ipſius BE, & IE, vnam.) eademq; ſemper altitudo AH. Igitur æqualia ſunt triangulum ABF, & rectangulum ſub AH, IE: ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At verò pentagonum ABCDE, quintuplum eſt trianguli ABF, quòd pentagonũ in quinque huiuſmodi triangula reſoluatur, ductis rectis è centro E, vt propoſ. 6. huius lib. docuimus. *d* Rectangulum verò ſub AH, BI, quintuplum eſt rectanguli ſub AH, IE: quòd & baſis BI, quintupla ſit baſis IE, eademq; ſemper altitudo AH. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum ſub AH, BI, æqualia ſunt. Rectangulum ergo contentum ſub tribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 16. *ſexti.*
b 41. *primi.*
c 1. *ſexti.*
d 1. *ſexti.*

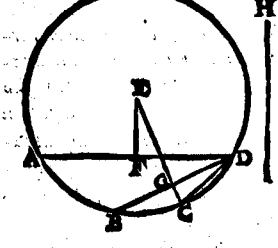
COROLLARIVM.

QVONIAM verò, ſi pentagonũ ABCDE, ſtatuatur baſis Dodecaedri in aliqua ſphæra deſcripti, BE, eſt latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icoſaedri in eadem ſphæra conſtituti, (comprehenſi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) ſecat Diametrum AG, in H, (cùm ex coroll propoſ. 12. lib. 13. ſecet ſemidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum FG, bifariam diuidit.) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, nempe ſub AH, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi eidem ſphæræ, in qua Icoſaedrum, inſcripti, nimirum ſub BI, æquale eſſe pentagono Dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti.*

a 5. quartidecimi.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri.



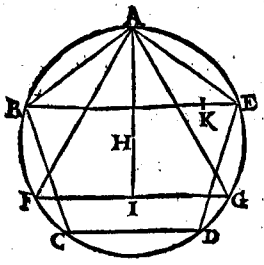
IN circulo ABCD, *a* circumſcribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icoſaedri, ſit latus pentagoni BD, & trianguli AD: & ex centro E, ducantur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG: Sit denique H, latus cubi in eadem ſphæra cum Dodecaedro, & Icoſaedro deſcripti. Dico eſſe vt H, latus cubi, ad AD, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim lateris cubi H, ſecti extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt BD, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, ſectæ quoque extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt EF, ex ſcholio propoſ. 2. huius libri. *b* Erit vt H, tota ad BD, maius ſui ſegmentum, ita EG, tota ad EF, maius ſui ſegmentum: *c* Ac proinde rectangulum ſub extremis H, EF, æquale erit rectangulo ſub mediis BD, EG. *d* Quia verò eſt, vt H, ad AD, ita rectangulum ſub H, EF, ad rectangulum ſub AD, EF, cùm baſes ſint H, AD, altitudo verò ſemper eadem EF: Erit quoque vt H, ad AD, ita rectangulum ſub BD, EG, (quod eſt æquale rectangulo ſub H, EF,) ad idem rectangulum ſub AD, EF. Quare cùm ex coroll. propoſ. 7. huius lib. ſit, vt rectangulum ſub BD, EG, ad rectangulum ſub AD, EF, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri: Erit quoque, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

a 5. *quartid.*
b 2. *quartid.*
c 16. *ſexti.*
d 1. *ſexti.*

ALITER. *e* Circumſcribat pentagonũ Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icoſaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta AI, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextæ partes ſint BK. Dico rurſus eſſe, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniã enim rectangulum ſub AI, BK, æquale eſt pentagono ABCDE, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub AI, IE, æquale eſt triãgulo AFG, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cùm

e 5. *quartid.*

FG,



FG, basis trianguli dupla sit ipsius IF, basis rectanguli: Erit vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulum sub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG; [a] Est autem vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulum sub AI, IF, ita BK, ad IF, cùm bases sint BK, IF, & altitudo eadem semper AI. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG, ita BK, ad IF. Ac proinde, (si primum, & tertium, nimirū pentagonum ABCDE, & recta BK, æquè multiplicentur per numerū 12. Item secundum, & quartum, nempe triangulum AFG, & rectā IF, æquè multiplicentur per numerum 20. [b] erit quoq; vt pentagonum ABCDE, duodecies sumptum, hoc est, superficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigesies sumptum, nempe ad superficiem Icosaedri, ita recta BK, duodecies sumpta ad rectam IF, vigesies sumptam: Atqui recta BK, duodecies sumpta æquiualet lateri cubi BE, decies sumpto; (Nam cùm BK, contineat quinque sextas partes ipsius BE; continebit eadem BK, duodecies sumpta sexaginta partes sextas eiusdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE.) Recta verò IF, vigesies sumpta æqualis est lateri Icosaedri FG, decies sumpto; (eò quòd FG, est ipsius IF, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi BE, decies sumptū ad latus Icosaedri FG, decies sumptum: Ac propterea, [c] cùm eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icosaedri; perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; vt latus cubi ad latus Icosaedri. Quod est propositum.

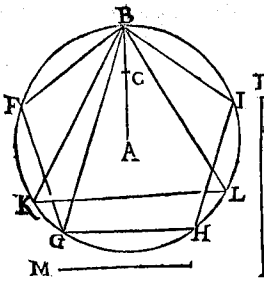
[a] 1. sexti.

[b] schol. 22. quinti.

[c] 15. quinti.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 4. 9.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori segmento, ad rectam potentē id, quod à tota, & id, quod à minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cū cubo inscripti.



SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoq; D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cū cubo descripti. Ex A, centro, ad interuallum AB, circulus describatur, in quo cōstituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam verò AC, maius segmentum semidiametri AB, sectæ extrema ac media ratione, [d] est latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus est Hexagoni; [e] poterit BF, latus pentagoni & totam AB, latus videlicet hexagoni, & maius segmētum AC, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Posit iam & recta M, totā AB, & minus segmentum BC, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositū Icosaedri, vt est BF, potens totā AB, & maius segmētum AC, ad M, potentē totam AB, & minus segmētum BC. [f] Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri BK, triplum est quadrati semidiametri AB; [g] Item quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc est, quadratum rectæ M, ipsis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ BK, ad quadratū rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC: Est autē vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratū rectæ BF. (Nam cùm rectæ BG, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BF, ex coroll. 1 propos. 17. lib. 13. eò q; BG, est latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ; [h] Erit vt tota AB, ad maius segmentum AC, ita tota BG, ad maius segmentum BF; [i] Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratū rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF.) Igitur erit quoq;, vt quadratum rectę BG, ad quadratum rectæ BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratū rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ M; [k] Ac propterea erit, vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC; ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum BC. Cùm igitur proposita latera D, E, cubi, & Icosaedri, eandem habeāt proportionē, quam rectæ BG, BK, vt mox ostendemus: perspicuum est, vt se habet recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentū BC, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaq; linea secetur extrema, ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

[d] 4. quarti decimi.

[e] 10. tertiȳde cimi.

[f] 12. tertiȳde cimi.

[g] 4. tertiȳde cimi.

[h] 2. quarti decimi.

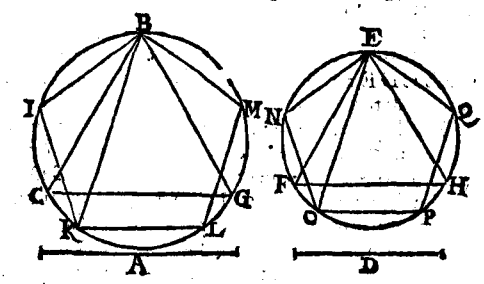
[i] 22. sexti.

[k] 22. sexti.

SCHOLIVM.

QVOD verò proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæræ eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK; demonstrabimus, hoc proposito theoremate.

QVAM proportionē habent latera cubi, & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum.



a 5. quartidecimi.

SIT enim A, latus cubi, & B C, latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ: Item D, latus cubi, & E F, latus Icoſaedri in quauis alia ſphæra. Dico eſſe vt A, ad B C, ita D, ad E F. Perfectis namq; triangulis Icoſaedrorum B C G, E F H, & circa ipſa deſcriptis circulis, deſcribantur in his circulis pentagona æquilatera B I K L M, E N O P Q, connectanturq; rectæ B K, C K, E O, F O. [a] *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum eiuſdem ſphæræ; & ponitur B C G, triangulum Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, in qua cubus lateris A: Erit B I K L M, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipſis ſphæra deſcripti; Ac propterea, ex corollario 2. propoſ. 17. lib. 13. recta B K, latus erit cubi eiuſdem ſphæræ, ideoq; ipſi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta E O, lateri cubi D. Rurſus quia arcus B I K, E N O, ſimiles ſunt; (Nam vterque continet duas quintas partes ſuæ circunferentiæ.) Item arcus B G C, E H F; (vterque enim duas tertias partes totius circunferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli B C K, E F O, ex definitione ſegmentorum ſimilium, æquales inter ſe, quàm anguli B K C, E O F: inter ſe cùm tam illi, quàm hi, in ſegmentis circulorum ſimilibus exiſtant: Ac proinde, ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. reliquus angulus C B K, trianguli B C K, reliquo angulo F E O, trianguli E F O, æqualis erit, & totum triangulum B C K, toti triangulo E F O, æquiangulum.* [b] *Quare erit, vt B K, hoc eſt, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad B C, latus Icoſaedri, ita E O, hoc eſt, recta D, illi æqualis, latus ſcilicet alterius cubi, ad E F, latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.*

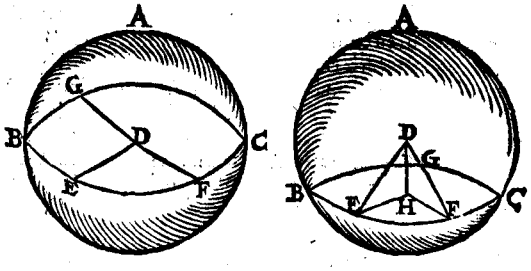
b 4. ſexti.

PERSPICVVM eſt igitur id, q̃ in demonſtratione aſſumebatur, nimirũ eandem habere proportionẽ D, & E, latera cubi & Icoſaedri in vna ſphæra, quam habẽt B G, B K, latera cubi & Icoſaedri in alia ſphæra.

EX hoc quoq; elicitur, Superficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolùm habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cũ ipſis, vt vult propoſ. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra.

LEMMA I.

Si ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.



SECETVR ſphæra A B C, cuius centrũ D, plano aliquo faciente communẽ ſectionem planum B E F C G. Dico B E F C G, eſſe circulum. Tranſeat enim primò planũ ſecans per centrum ſphæræ, ita vt centrum D, ſit in plano, ſeu communi ſectione B E F C G; ducanturq; ex D, centro ſphæræ ad extremitatem communis ſectionis, lineæ rectæ quotcunque D E, D F, D G. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales ſunt, ex definitione ſphæræ, cùm ex eius centro ad ſuperficiem cadant; erit, ex definitione circuli, figura plana B E F C G, vnica linea contenta, circulus, eiusq; centrum D, idem cum centro ſphæræ.

TRANSEAT ſecundò planum ſecans non per centrum ſphæræ: Ducatur autem ex D, centro ſphæræ ad planum ſecans perpendicularis D H; emittanturq; ex H, rectæ vtcunque H E, H F, ad extremitatẽ vſque communis ſectionis; & connectantur rectæ D E, D F. Quoniam igitur anguli D H E, D H F, ex defin. 3. lib. 11. recti ſunt; [c] *erit tam quadratum rectæ D E, quadratis rectarum D H, H E, quàm quadratum rectæ D F, quadratis rectarum D H, H F, æquale: Sunt autem quadratæ rectarum D E, D F, æqualium ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum D H, H E, quadratis rectarum D H, H F, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ D H, reliquum quadratum rectæ H E, reliquo quadrato rectæ H F, æquale erit. Quarè & rectæ H E, H F, æquales erunt. Eodem argumento oſtendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis ſectionis cadentes eſſe æquales & inter ſe, & dictis duabus H E, H F. Figura igitur plana B E F C G,*

c 47. primi.

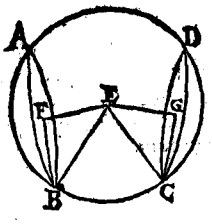
BEFCG, vnica linea contenta, ex definitione circuli, circulus erit; eiusq; centrum, punctum H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propositum.

COROLLARIVM.

ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si verò planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quàm sphæra; illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.



IN sphæra ABCD, cuius centrum E, sint circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter à centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per corollarium præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturq; rectæ EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti sunt, ex definitione 3. libri 11. [a] Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quàm quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cũ cadant ex centro sphæræ ad eius superficiem, æqualia. [b] Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cùm sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale; Atque adeò æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter distant à centro E.

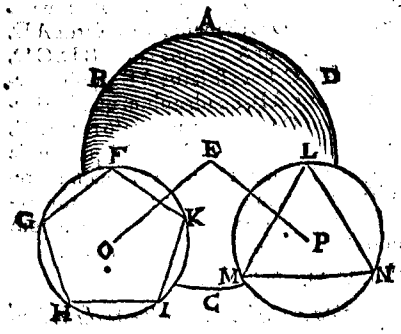
[a] 47. primi.

[b] 47. primi

SED iam æqualiter distent circuli AB, DC, à centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura, vt prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia esse quadratis rectarum EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cùm circuli æqualiter ponantur distare à centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, æquale erit; atq; adeò æquales erunt rectæ FB, GC, semidiametri scilicet circulorũ AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales sunt. Quod est propositũ.

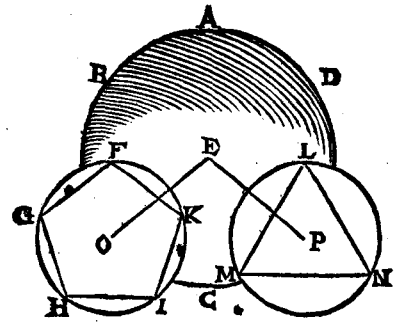
THEOR. 11. PROPOS. 11. 4. 10.

DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cubi latus ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra.



IN sphæra ABCD, cuius centrum E, inscriptum sit Dodecaedrum, cuius vnũ pentagonũ FGHIK: Item Icosaedrum, cuius vnum triangulum LMN. Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri, in vna eademq; sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphæra ABCD, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quàm trianguli, superficiem sphæræ tangunt; si per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per 1. lemma præcedens, duo circuli in sphæra FGHIK, LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. [a] Quia verò idem circulus comprehẽdit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum; æquales erunt idcircò circuli FGHIK, LMN. Ac propterea, per lemma 1. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icosaedri, deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudi-

[a] 5. quarti decimi.



dinum; Ac proinde cùm & baſes ipſarũ æquales ſint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales inter ſe, ex coroll. propoſ. 6. lib. 12. Eodemq; modo, ſi ex omnib[b] angulis Icoſaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, reſoluetur Icoſaedrum in 20. pyramides inter ſe æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. [a] Quoniam autem eſt, vt baſis FGHIK, ad baſin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cùm vtriuſque eadem ſit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demõſtrauimus, vt duodecim baſes Dodecaedri, tota videlicet ſuperficies Dodecaedri, ad baſin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc eſt, totum ſolidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rurſus quia eſt (ſicut modò diximus) vt tota ſuperficies Dodecaedri, ad Icoſaedri baſin LMN, ita Dodecaedrũ ad pyramidem LMNE; erit, per idem ſcholium, vt tota ſuperficies Dodecaedri ad 20. baſes Icoſaedri, id eſt, ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrũm ad 20. pyramides Icoſaedri, nempe ad totum ſolidum Icoſaedri: [b] Atqui ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad Icoſaedri ſuperficiem, vt cubi latus ad Icoſaedri latus eiuſdem cum ipſis ſphæræ; atq; adeò, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ vnius. Ergitur erit quoq; Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 6. duodec.

b 9. quartidecimi.

COROLLARIVM.

QVONIAM verò oſtenſum eſt quoq; [a] ita eſſe ſuperficiẽ Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cũ ipſis ſphæra: [b] Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri vnius eiuſdemq; ſphæræ, vt eſt linea potens totã diuiſam quamcunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum: [c] Item ita eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrũ eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in vna eademq; ſphæra; Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri; & ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.

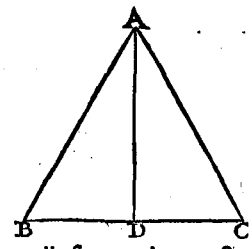
a 29. quartidecimi.

b 10. quartidecimi.

c 11. quartidecimi.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppoſitum deductæ.



In triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum BC, perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AB, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis AD. Quoniam enim ob æqualitatem laterum AB, AC, [a] anguli B, & C, æquales ſunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC; habent autẽ & latus AD, commune, vel AB, AC, æqualia. [b] Igitur & reliqua latera BD, CD, æqualia ſunt; ac propterea latus BC, hoc eſt, latus AB, duplum rectæ BD; & idcircò quadratũ lateris AB, quadruplum quadrati rectæ BD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. [c] Cùm igitur quadrato rectæ AB, æqualia ſint quadrata rectarum AD, BD; erunt quoque quadrata rectarum AD, BD, quadrupla quadrati rectæ BD; Ac proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum AD, BD, talium 1. erit quadratum rectæ BD, ideoque talium 3, quadratum reliquum rectæ AD. Quare quadratum rectæ AB, partium 4. ſeſquitertium eſt quadrati rectæ AD, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

a 5. primi.

b 26. primi.

c 47. primi.

COROLLARIVM.

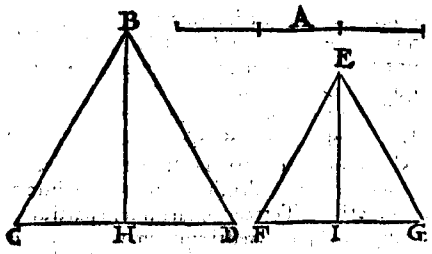
HINC manifeſtum eſt, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitũ demiſſam, ſecare & angulum & latus bifariam. Demonſtratum enim eſt BD, & CD, rectas æquales eſſe, hoc eſt, latus BC, ſecari bifariam à perpendiculari AD. Quare cùm latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia ſint lateribus AC, AD, trianguli ACD; & baſis BD, baſi CD, æqualis; [a] Erunt & anguli BAD, CAD, æquales, id eſt, angulus BAC, bifariam ſecabitur ab eadem perpendiculari AD.

a 8. primi.

THEOR.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quàm Octaedri in ea ſphæra, Media. 13.



SIT ſphæræ diameter Rationalis A. Dico tam ſuperficiem Tetraedri, quàm Octaedri in dicta ſphæra, eſſe Mediam. Sit enim B C D, vnum triangulum Tetraedri, & E F G, Octaedri illius ſphæræ, ducáturq; ex angulis B, & E, ad latera oppoſita C D, F G, perpendiculares B H, E I. [a] Quoniam igitur quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri B C, [b] & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, B C, E F, proportionem, quam numeri 6. 4. 3. [c] ideoque commenſurabilia erunt. Quare lineæ ipſæ A, B C, E F, commenſurabiles exiſtent, ſaltem potentia: Atque adeò, cùm A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales B C, E F, & idcircò & earum dimidiæ Rationales erunt C H, F I. [a] 13. tertiidecimi. [b] 14. tertiidecimi. [c] 6. decimi.

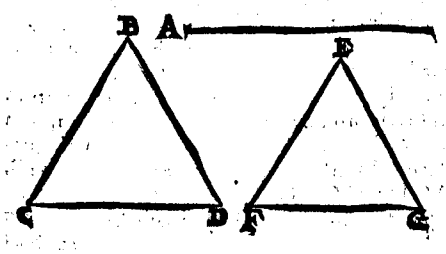
RVRSVS, [d] quia tam quadratũ rectæ B C, quadrati rectæ B H, q̃ quadratũ rectæ E F, quadrati rectæ E I, ſeſquitertium eſt; habebũt tam quadrata rectarũ B C, B H, q̃ quadrata rectarũ E F, E I, proportionem inter ſe, quam numeri 4. 3. [e] ideoq; tam illa, q̃ hæc inter ſe commenſurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipſæ B C, B H, q̃ lineæ E F, E I, commenſurabiles exiſtent. Eſt autẽ & tam C H, ipſi B C, q̃ F I, ipſi E F, dimidia videlicet toti, commenſurabilis. [f] Igitur & tam B H, C H, q̃ E I, F I, commenſurabiles inter ſe erunt; Ac proinde cùm C H, & F I, oſtenſæ ſint Rationales, erunt quoq; B H, E I, Rationales. [g] Quoniam verò tam C H, B H, q̃ F I, E I, longitudine ſunt incommenſurabiles, & earum quadrata nõ habeant proportionẽ, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habẽt enim proportionẽ, quam 1. ad 3. [h] cùm oſtenſum ſit talium partium 1. eſſe tam quadratũ C H, q̃ F I, quadratum, qualium 3. eſt tam quadratum B H, q̃ quadratum E I.) Erunt tam C H, B H, q̃ F I, E I, Rationales potentia tantũ commenſurabiles: [i] Ac proinde tam rectangulum ſub C H, B H, Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, q̃ rectangulum ſub F I, E I, Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contẽtum, Medium erit: Sunt autem triangula B C D, E F G, æqualia rectangulis ſub C H, B H, & ſub F I, E I, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cùm baſes triangulorum C D, F G, duplæ ſint baſium rectangulorum C H, F I. Igitur & triangula B C D, E F G, Media erũt. Quocirca cùm tota ſuperficies Tetraedri triangulo B C D, ſit commenſurabilis; (eſt enim triangulum B C D, totius ſuperficiei quarta pars.) Item tota ſuperficies Octaedri triangulo E F G, commenſurabilis; (Eſt enim triangulum E F G, totius ſuperficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propoſ. 24. lib. 10. ſuperficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, q̃ Octaedri in ea ſphæra, Media. Quod erat oſtendendum. [d] 12. quartidecimi. [e] 6. decimi. [f] 12. decimi. [g] 9. decimi. [h] 12. quartidecimi. [i] 22. decimi.

COROLLARIVM.

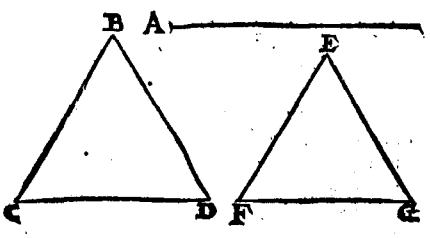
SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſ. omne triangulum æquilaterũ, cuius latus fuerit Rationale, eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo, q̃ latera B C, E F, & ob id eorum dimidia C H, F I, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas C H, B H, quàm F I, E I, eſſe Rationales potentia tantùm commenſurabiles; Ac propterea rectangula ſub C H, B H, & ſub F I, E I, hoc eſt, triangula B C D, E F G, ipſis æqualia, eſſe Media. Cùm igitur eadem ſit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus ſit Rationale; perſpicuum eſt, quod infertur.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atq; Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: Superficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri. 14.



SIT ſphæræ diameter A, in qua deſcripti Tetraedri baſis ſit triangulũ B C D; Octaedri verò baſis triangulum E F G. Dico triangulum B C D, ſeſquitertium eſſe trianguli E F G. At verò ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialteram ſuperficiei Tetraedri. [k] Quoniam enim quadratũ diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri C D; [l] duplum verò quadrati lateris Octaedri F G; ſit vt qualium partium 6. fuerit quadratũ diametri A, talium 4. ſit quadratum [k] 13. tertiidecimi. [l] 14. tertiidecimi.



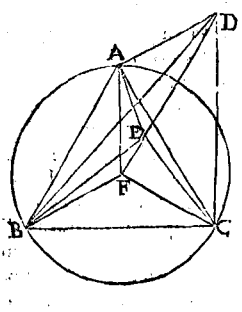
lateris CD, & talium 3. quadratum lateris FG. Quare quadratũ rectæ CD, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ FG: Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita eſt triangulum BCD, ad triangulũ EFG. (*a* quia tam quadrata, quàm triangula proportionem inter ſe habent laterum CD, FG, duplicatã, cùm ſint ſimilia.) Igitur & triangulum BCD, ſeſquitertium eſt trianguli EFG.

a 20. & 19. ſexti.

Rvrsvs, quoniam oſtenſum eſt triangulũ BCD, ſeſquitertium eſſe trianguli EFG; Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. eſſe triangulum EFG; Efficitur, vt triangulum EFG, octies ſumptum, hoc eſt, tota ſuperficies Octaedri, ſit earundem partium 24; At triangulum BCD, quater ſumptum, id eſt, tota ſuperficies Tetraedri, earundem partium 16. Quam ob rem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod erat oſtendendum.

0. THEOR. 15. PROPOS. 15.

15. RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrũ ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtq; perpendicularis ad dictam baſim.



SIT Tetraedrum ABCD, contẽtum quatuor triangulis æquilateris & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in ſphæra, cuius centrum E; ducaturq; ex angulo D, per E, centrum ſphæræ, recta DEF, incidens in baſim ABC, circulo inſcriptam ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis ABC, & DF, perpendiculare eſſe ad eandem baſin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ baſis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem æquales ſunt; erũt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & baſes AD, CD, æquales; cùm ſint latera triangulorũ æquilaterorum æqualium. *b* Igitur anguli AED, CED, æquales erunt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erũt; *c* eò q tam AED, AEF, q CED, CEF, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, ſi conſiderentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, trianguli EAF, æqualia ſunt lateribus EC, EF, trianguli ECF; & anguli ipſis contenti, oſtenſi æquales; *d* Erunt baſes FA, FC, æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC, ſi conſiderentur triangula EBF, ECF. Quare cùm tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes ſint æquales; *e* erit F, centrum baſis ABC, ſeu circuli eam circumſcribentis.

b 8. primi.
c 13. primi.
d 4. primi.
e 9. tertij.

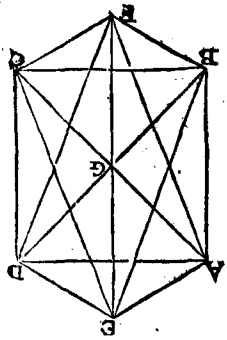
QVIA verò ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro ſphæræ ad planum circuli ABC, demiſſa, in centrum circuli cadit; efficitur, vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis ſit ad planũ circuli, ſeu baſis Tetraedri ABC. Nam ſi alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrũ circuli, per dictum coroll. Quare cùm F, quoq; ſit demonſtratum centrum eiuſdem circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra, quod eſt abſurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonſtrandum erat.

0. THEOR. 16. PROPOS. 16.

16. OCTAEDRVM in ſphæra deſcriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis verò vtriuſque eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentũ octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in ſphæra deſcriptũ, cuius centrum G. Dico ipſum diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles æqualium altitudinum, quarũ baſis communis eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Ductis enim ex G, centro ſphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, quæ æquales ſunt, cùm ſint ſemidiametri ſphæræ, ductæ videlicet è centro ad ſuperficiem ſphæræ: *f* quoniam quadratũ diametri ſphæræ, duplum eſt quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati ſemidiametri, AG, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Qualium partium 4 ponetur quadratũ diametri ſphæræ, talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratum rectæ AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cùm ergo quadratum rectæ AB, æquale ſit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG; *g* Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter oſtendẽtur reliqui anguli AGD, BGC, CGD, recti. *h* Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectum erunt coniunctæ; *i* atq; adeò rectæ AC, BD, ſeſe ſecantes in G, in vno exiſtent

f 14. tertij de cimi.
g 48. primi.
h 14. primi.
i 2. vnde.



existent plano; [a] Ac propterea rectæ earũ extrema connectentes A B, B C, C D, D A, in eodem plano erunt cum ipſis. Quare quadrilaterum A B C D, in vno plano eſt ſitum. Diuiſum eſt ergo Octaedrum in duas pyramides A B C D E, A B C D F, quarũ baſis communis A B C D, vertices verò E, & F; quę pyramides ęquales ſunt, & ſimiles, ex defin. 10. lib. 11. cùm quælibet conſtet ex quatuor triangulis æquilateris Octaedri, quę æqualia ſunt, & ſimilia, & baſi communi A B C D. Dico iam earum altitudines eſſe æquales, & baſin A B C D, eſſe quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphęræ. Quoniam enim oſtenſum eſt, quadratum lateris Octaedri A B, æquale eſſe duobus quadratis ſemidiametrorum A G, B G; erit quoq; quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis ſemidiametrorum A G, E G; [b] Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis A G, D G, ſe mutuò ſecãtibus in G, ad rectos angulos inſiſtit, [c] ipſa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, D G, ductum, nempe ad baſin pyramidũ. Quare E G, altitudo eſt pyramidis A B C D E. Similiter oſtendemus F G, altitudinem eſſe pyramidis A B C D F. Cùm ergo E G, F G, ſint ſemidiametri ſphęræ æquales, perſpicuum eſt, dictas pyramides eſſe æqualium altitudinum. Rurſus quia A C, eſt diameter ſphęræ; [d] erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D; Ac propterea æquale duobus quadratis laterũ A D, D C. [e] Quare angulus A D C, rectus eſt: Eodem modo recti erũt anguli D A B, A B C, B C D. Quare quadrilaterum A B C D, rectangulum eſt: Sed & æquilaterum, cùm eius latera ſint latera Octaedri. Igitur quadratum eſt; quod cùm ſit deſcriptum ex latere Octaedri A B; [f] conſtat ipſum eſſe ſubduplum quadrati diametri ſphęræ. Octaedrum ergo in ſphęra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 7. vndec.
[b] 48. primi.
[c] 4. vndec.
[d] 14. tertiædecimi.
[e] 48. primi.
[f] 12. tertiædecimi.

SCHOLIVM.

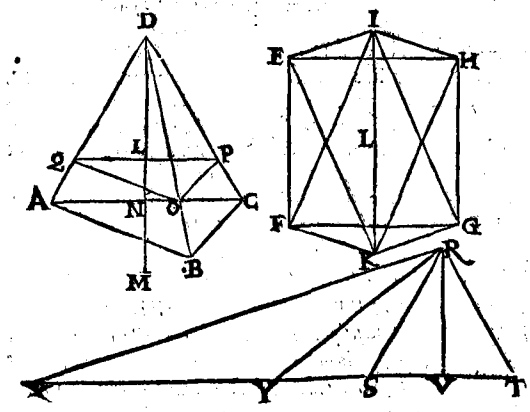
MVLTO breuius hanc propoſitionem demonſtrauimus in coroll. 2. propoſ. 14. lib. 13. ex ipſa videlicet conſtructione Octaedri. Veruntamen quia hic demonſtratur à Campano, non habita ratione conſtructionis Octaedri, viſum eſt eius demonſtrationem hoc etiam loco conſcribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM ſphęræ impoſitum ad Octaedrum in eadem ſphęra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continẽte octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum ad quadratum diametri ſphęræ. 17.

VEL, vt Campanus loquitur.

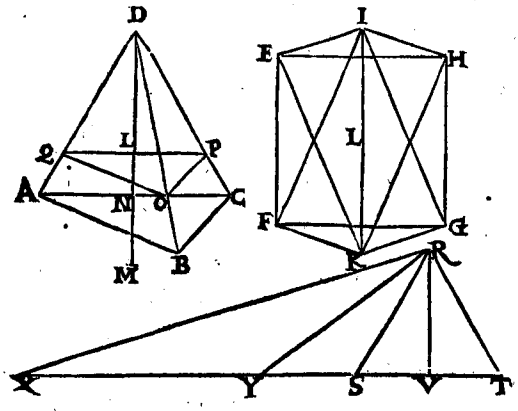
TETRAEDRVM ſphęræ impoſitum ad Octaedrum in eadem ſphęra deſcriptum ſe haber, vt rectangulum ſub linea, quæ potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris Tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarũ partium lateris Tetraedri contentum, ad quadratum diametri ſphęræ.



SIT Tetraedrum A B C D, & Octaedrũ E F G H I K, in vna eademq; ſphęra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter ſphęræ D M, incidens in baſin A B C, ad punctum N. [g] Erit igitur N, centrum baſis A B C, & D N, perpendicularis ad eandem baſin. Quia verò pars diametri L N, inter centrum ſphęræ & baſin Tetraedri, eſt ſexta pars diametri, & tertia ſemidiametri, p corol. 2. propoſ. 13. lib. 13. Erit D L, ſemidiameter talium partium 3. qualium 1. eſt L N; Ac propterea D N, talium 4. Ducatur deinde, ex ſcholio propoſ. 15. lib. 11. per centrum L, planum Q P Q, parallelum plano A B C; [h] E. runtq; rectæ Q O, O P, P Q, parallelæ rectis A B, B C, C A; Ac propterea triangulum Q O P, æquiangulum erit triangulo æquilatero A B C, [i] cùm anguli illius æquales ſint angulis huius, ſinguli ſingulis: At A B C, eſt æquiangulum, ex coroll. propoſ. 5. lib. 1. Igitur & Q O P, æquiangulum erit; Ac propterea & æquilaterum, ex corollario propoſ. 6. lib. 1. ideoque ſimile ipſi A B C; Sunt autem & triangula D Q O, D O P, D Q P,

[g] 15. quartædecimi.
[h] 16. vndec.
[i] 10. vndec.

triangulis D A B, D B C, D A C, æquilateris ſimilia, ex corollario propoſ. 4. lib. 6. Igitur pyramides
a 17. vndec. A B C D, Q O P D, ſimiles ſunt, ex defin. 9. lib. 11. a Rurſus, quia plana parallela A B C, Q O P, ſecãt rectas D N, D C, proportionaliter; erit vt D N, ad D L, ita D C, ad D P: Erat autem D N, ad D L, vt 4. ad 3. (cùm oſtenſum ſit D N, eſſe talium partium 4. qualium 3. eſt D L.) Igitur & D C, ad D P, e-
b 8. duodec. rit vt 4. ad 3. Ac proinde, b cùm pyramides ſimiles habeant proportionem laterum triplicatã, erit pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis 4. ad 3. vt cõſtat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri ſunt minimi in proportione 4.
c 20. ſexti. ad 3. vt conſtat ex propoſ. 2. libri 8. Rurſus c quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratũ rectæ D C, ad quadratũ rectæ D P, vt 64. ad 36. vt in iiſdem numeris conſtat.



d 12. quartidecimi. Sit iam triangulum æquilaterum R S T, æquale triangulo D Q P; demittatur; ex R, ad S T, perpendicularis R V. d Eritq; latus R T, hoc eſt, D P, illi æquale, potẽtia ſeſquitertium perpendicularis R V. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ D P, talium 27. erit quadratũ rectæ R V: Erat autem earundẽ partium 64. quadratũ rectæ D C. Igitur linea R V, eſt potens viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri.

Rvrsvs, extenſa T S, fiat T X, ad T S, vt 64. ad 27. ex coroll. propoſ. 6. libri 10. diuidaturq; T X, bifariam in Y, vt ſit T Y, talium partiũ 32. qualium 27. eſt T S, ſeu illi æqualis D P. Quoniam verò proportio D C, ad D P, erat, vt 4. ad 3. nempe ſeſquitertia, erit D C, talium partiũ 36. qualium D P, eſt 27. (proportio enim 36. ad 27. eſt ſeſquitertia.) ac propterea qualium partium T Y, eſt 32. Quare linea T Y, continet octo nonas partes lateris Tetraedri D C. Dico igitur ita eſſe Tetraedrũ A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, vt rectangulum contentũ ſub recta R V, (quæ poteſt viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris D C.) & ſub recta T Y, (quæ continet octo nonas partes eiuſdem lateris.) ad quadratum diametri ſphæræ.

e 1. ſexti. Cvm enim ductis rectis R X, R Y, e triangulũ R T X, duplum ſit trianguli R T Y, q & baſis T X,
f 41. primi. dupla ſit baſis T Y: f Eſt autẽ & rectangulum ſub R V, T Y, duplum eiuſdem trianguli R T Y; Erit
g 7. quinti. triangulum R T X, æquale rectangulo ſub R V, T Y. g Ac propterea erit, vt triangulum R T X, ad
h 1. ſexti. triangulum R S T, ita rectangulum ſub R V, T Y, ad idem triangulũ R S T: h Eſt autẽ triangulum R T X, ad triangulum R S T, vt baſis T X, ad baſin S T, nimirũ vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub R V, T Y, ad triangulum R S T, hoc eſt, ad triangulum D Q P, ſiue Q O P, ſibi æquale; erit vt 64. ad 27. Fuit autẽ & pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum ſub R V, T Y, ad triangulum Q O P, ita pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D: At verò vt triangulum Q O P, ad quadratum diametri ſphæræ D M, ita eſt pyramis Q O P D, ad Octaedrum E F G H I K. (Nam cùm D N, recta ſit ad planũ A B C, recta quoq; erit ad planum Q O P, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoq; ſphæræ ſemidiameter D L, altitudo erit pyramidis ſeu Tetraedri
i 16. quartidecimi. Q O P D: i Octaedrũ aũt E F G H I K, diuiditur in duas pyramides æquales E F G H I, E F G H K, quarum baſis cõmunis quadratũ E F G H, dimidium quadrati diametri ſphæræ; & altitudines æquales ſemidiametri ſphæræ L I, L K. Pyramides ergo Q O P D, E F G H I, æquales habent altitudines. Quare, ex ſcholio ppoſ. 5. lib. 12. erit vt baſis Q O P, ad baſin E F G H, ita pyramis Q O P D, ad pyramidem E F G H I; Ac propterea per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. oſtendimus, vt baſis Q O P, ad duplum baſis E F G H, hoc eſt, ad quadratum diametri ſphæræ D M, ita pyramis Q O P D, ad duplum pyramidis E F G H I, hoc eſt, ad Octaedrum E F G H I K.) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum ſub R V, potente viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri D C, & ſub T Y, octo nonis eiuſdem lateris D C, contentum ad quadratum diametri ſphæræ D M, ita pyramis, ſeu Tetraedrum A B C D, ad Octaedrum E F G H I K. Tetraedrum ergo ſphæræ impoſitum ad Octaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

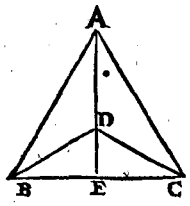
Qvoniam verò D C, talium partium 4. fuit, qualium 3. D P; continebit D P, ſeu illi æqualis R T, tres
a 12. quartidecimi. *quartas partes lateris Tetraedri D C: ac proinde, a cũ recta R T, ſit potentia ſeſquitertia rectæ R V; erit R V, potentia ſubſeſquitertia ipſius R T, nempe trium quartarum partium lateris Tetraedri. Rurſus quia T Y, fuit talium partium 32. qualium 27. S T, ſeu D P; (tres videlicet quartæ partes lateris Tetraedri.) erit T Y, ſuperquintupartiens vigeſimas ſeptimas partes ipſius S T, nimirum trium quartarum partium lateris Tetraedri. Quare conſtat, eſſe quoq; Tetraedrum A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, vt rectangulum ſub R V, quæ potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris Tetraedri, & ſub T Y, quæ ſuperquintupartiens eſt vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris Tetraedri, vt volebat Campanus.*

THEOR.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

0. 17.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem baſin deducitur.



SIT triangulum æquilaterũ A B C, cuius centrũ D; Ducatur ex A, per D, recta A E, q̃ perpendicularis erit ad B C, eamq; bifariam diuidet, ex coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. Dico A E, triplã eſſe rectæ D E, quæ ſcilicet perpendicularis eſt è centro ad baſin ducta. Ductis enim rectis B D, C D, cũ latera D A, D B, trianguli A D B, æqualia ſint lateribus D B, D C, trianguli B D C; (è centro enim ducuntur;) ſit autem & baſis A B, baſi B C, æqualis: Erunt triangula A B D, B D C, æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula A D B, A D C. Quare ob æqualitatem trium triangulorum A D B, B D C, C D A, triangulum A B C, triplum eſt trianguli B D C. Quoniam verò rectangulum ſub A E, E B, triangulo A B C; & rectangulum ſub D E, E B, triangulo B D C, æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cùm baſis trianguli B C, dupla ſit baſis B E, vtriuſq; rectanguli: Erit quoque rectangulum ſub A E, E B, triplum rectanguli ſub D E, E B: [a] Eſt autem vt rectangulum ſub A E, E B, ad rectangulum ſub D E, E B, eiuſdem altitudinis E B, ita baſis A E, ad baſin D E. Igitur & A E, tripla eſt ipſius D E. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat oſtendendum. [a] 1. ſexi.

COROLLARIVM.

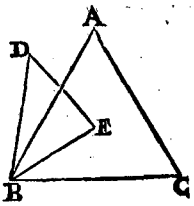
ITAQVE eadem perpendicularis A E, ſeſquialtera eſt reliquæ rectæ A D, inter angulum & centrum comprehenſæ. Cùm enim A E, tripla ſit ipſius D E; qualium partium 3. ponetur A E, talium 1. erit D E; Reliqua igitur A D, earundem partium 2. continebit: Ac propterea A E, ſeſquialtera erit ipſius A D.

Ex quibus rurſus fit, rectam A D, rectæ D E, duplam eſſe.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

0. 17.

SI Octaedrum ſphæræ inſcribatur; erit ſemidiameter ſphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſin quamcunq; Octaedri ducitur.



SIT baſis aliqua octaedri in ſphæra, cuius centrum D, deſcripti, triangulum æquilaterum A B C, in quod è centro ſphæræ D, perpendicularis demittatur D E; ducaturque ſemidiameter ſphæræ D B. Dico ſemidiametrum D B, potentia triplam eſſe perpendicularis D E. Cùm enim, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. perpendicularis D E, in centrum circuli ſphæræ, qui triangulum A B C, circumſcribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta B E; [b] quoniam quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris octaedri A B; & quadruplum quadrati ſemidiametri ſphæræ D B, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris A B, 6. & quadratum ſemidiametri ſphæræ D B, 3. [c] Quia verò quadratum lateris A B, triplum eſt quadrati ſemidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ ſcilicet B E; Erit quadratum rectæ B E, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris A B. Quare [d] cùm quadratum rectæ D B, æquale ſit quadratis rectarum B E, D E; ſit autem quadratum rectæ D B, oſtenſum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis D E, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ D B, triplum eſt quadrati rectæ D E. Si igitur octaedrum ſphæræ inſcribatur, &c. [b] 14. tertij. dec. [c] 12. tertij. dec. [d] 47. primi.

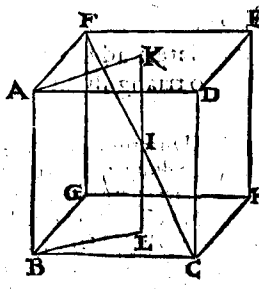
THEOR. 20. PROPOS. 20.

0. 18.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati: Perpendicularis autem à centro ſphæræ in aliquam baſin cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi.

SIT cubus A B C D E F G H, in ſphæra deſcriptus, cuius centrum I, ex quo I K, perpendicularis ducatur ad vnam baſin cubi, nempe ad A D E F. Dico duplum quadrati diametri ſphæræ æquale eſſe ſuperficiei cubi; & perpendicularẽ I K, æqualem eſſe dimidio lateris cubi. [e] Cùm enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, hoc eſt, æquale tribus quadratis cubi; Erit duplum eiuſdem quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti æquale ſex quadratis cubi, id eſt, toti ſuperficiei cubi. [e] 15. tertij. dec.

PRODVCTA autem K I, ad baſin oppoſitam B C H G, vſque in punctum L; cùm K L, recta ſit ad planum A E, recta quoque erit ad planum B H, illi parallelum, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11.



a 6. vndec.

b 16. vndec.

Rursus, a quia AB, KL, parallelæ sunt, quòd rectę sint ad planum AE; ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, b quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea parallelogrammũ erit ABLK; atque adeò recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam verò perpendicularis KL, è centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas bases ambientium in sphæra, per coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariam secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propos. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea cùm KL, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

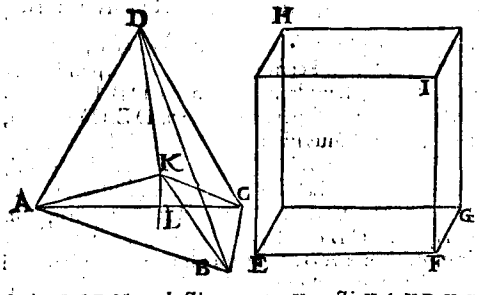
Ex dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. a *Cùm enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ;* b *Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partẽ quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eò quòd dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cùm dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.*

a 15. tertii decimi.

b 31. vndecimi.

ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.



VNIVERSE autem solidũ, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basim ducta in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est opposito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, solidum autem EFGH, contentum sub EI, tertia parte superficiei corporis ABCD, & sub altitudine FG, quæ æqualis sit perpendiculari KL, ductæ ex centro K, ad basin ABC. Dico solidum EFGH, æquale esse dato corpori regulari ABCD. Nam ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, resoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cùm æquales habeãt bases & altitudines. Cùm enim circuli dictas bases ambientes, æquales sint; ipsi æqualiter à centro distabunt per lemma 2. propos. 10. huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipsorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam verò prisma contentum sub basi ABC, & altitudine KL, triplum est pyramidis ABCK, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL, tripla sunt suarum pyramidum; Erit prisma contentum sub totâ superficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cùm idem prisma triplum sit prismatis EFGH, quòd & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida EFGH, ABCD, æqualia. Quod est propositum.

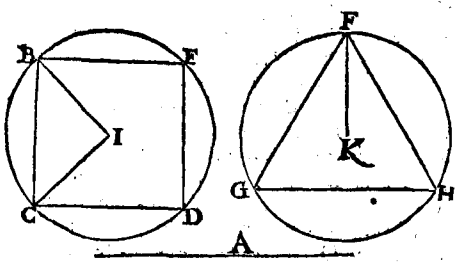
THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & Octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & Octaedrum, cuius vnum triãgulum FGH. Dico eundem circulum circumscribere & quadratum BCDE, & triangulũ FGH, hoc est, circulos BCDE, FGH, ipsa circumscribẽtes, esse æquales. Sint enim rectæ è cẽtris IB, KF. a Quia igitur quadratũ diametri A, triplũ est quadrati lateris cubi BC, & quadratũ lateris BC, duplũ quadrati rectæ BI; (Nã ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus,

a 15. tertiædecimi.

b 47. primi.



rectus, cùm ſubtendat quadrantem; [a] Ac proinde quadratum rectæ B C, æquale erit quadratis rectarum B I, I C. Quare cùm rectarum æqualium B I, I C, æqualia ſint quadrata: duplum erit quadratum rectæ B C, quadrati rectę B I.) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris B C, & talium 1. quadratum rectæ B I. Rurſus [b] quia quadratum diametri A, duplum eſt quadrati lateris Octaedri F G; [c] & quadratum lateris F G, triplum quadrati rectæ F K, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris F G, & talium 1. quadratum rectæ F K. Cùm igitur & talium partium 1. oſtenſum ſit quadratum rectæ B I; æqualia erunt quadrata rectarum B I, F K; Ac propterea & rectæ ipſæ, & circuli ex ipſis deſcripti B C D E, F G H, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 47. primi.

[b] 14. tertiidecimi.

[c] 12. tertiidecimi.

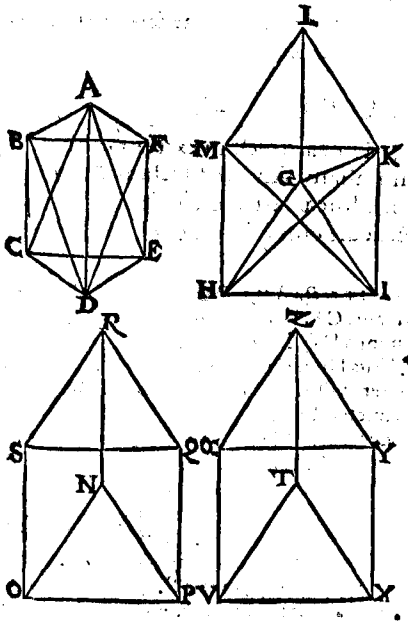
COROLLARIVM.

Hinc fit, lineas perpendiculares cõiungentes centra circulorum, qui baſes oppoſitas tam cubi, quàm Octaedri circumſcribunt, æquales eſſe. Si enim ex centro ſphæræ, ad baſes cubi & Octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipſas circumſcribentiũ, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. [a] *qui cùm ſint æquales oſtenſi, æqualiter diſtabunt à centro ſphæræ, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cùm ſint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppoſitarum baſium connectunt, (Nam ſi producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppoſitas baſes, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. propterea quòd parallelæ ſunt oppoſitæ baſes in Octaedro, ex coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. quemadmodum & oppoſitæ baſes cubi parallelæ ſunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppoſitarum baſium coniungentes tam in cubo, quàm in Octaedro. quod eſt propoſitum.*

[a] 21. quartidecimi.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

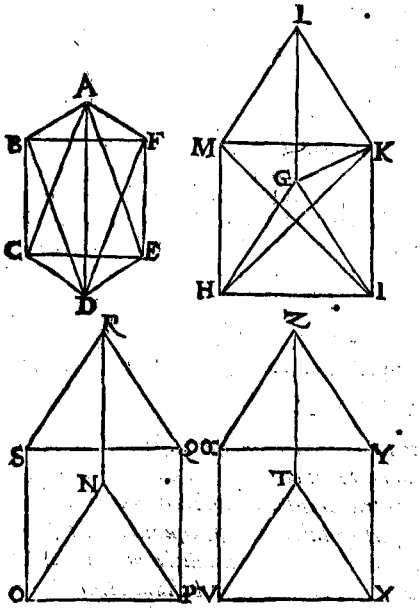
Si Octaedrum, atq; Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur; Erit Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.



In eadem ſphæra inſcriptum ſit & Octaedrum A B C D E F, & Tetraedrum G H I K. Dico ita eſſe Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus B F, ad latus H I. Ducta enim in Octaedro diametro A D, diuidetur Octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus commune eſt ipſa diameter A D, & vertex communis A, nempe in B C D A, cuius baſis B C D; in B D F A, cuius baſis B D F; in C D E A, cuius baſis C D E; & in D E F A, cuius baſis D E F; quæ quidem omnes baſes infra quadratum B C E F, exiſtunt, cõtinentes cum ipſo dimidiatam partem Octaedri. Quoniam verò quælibet harum pyramidum conſtat duobus triãgulis æquilateris Octaedri, & duobus aliis triangulis, quæ quoniam latus ipſorum commune eſt A D, diameter, & reliqua latera, ipſius Octaedri latera exiſtunt, [a] inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cùm contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Conſtituatur ſuper G H I, baſin Tetraedri, priſma G H I K L M, eiuſdem cum Tetraedro altitudinis; quod ipſius Tetraedri triplum erit, per corollarium primum, propoſitionis ſeptimę, libri duodecimi. Rurſus, ſuper baſin octaedri N O P, & T V X, baſi Tetraedri æqualem, cõſtituantur, duo priſmata N O P Q R S, T V X Y Z [a], eiuſdem cum Octaedro, ſeu pyramide A C D E, altitudinis. [b] Quoniam igitur G H I, hoc eſt, T V X, baſis Tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius N O P, baſis Octaedri: Erit quoq; priſma T V X Y Z [a], priſmatis N O P Q R S, ſeſquitertium, cùm priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt

[a] 8. primi.

[b] 14. quartidecimi.



baſes, ex iis, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autẽ & Octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium: (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus, ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. qualium quatuor cõtinere diximus Octaedrũ.) Igitur æquale eſt Octaedrum priſmati TVXYZ α. Quia verò priſma TVXYZ α, ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14. libri 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZ α, quod Octaedro æquale eſt, eadẽ quæ Octaedri, ex conſtructione: Erit quoque Octaedrum ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplum Tetraedri GHIK, vt altitudo Octaedri ad altitudinẽ Tetraedri: Eſt autem altitudo Octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem Tetraedri, ita eſt latus Octaedri ad latus Tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis Tetraedri, quàm quadratum lateris Octaedri ad quadratũ lateris Tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito enim quadrato diametri ſphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis Tetraedri 4. ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. ideoq; quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis Tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. [a] erit quadratum lateris Octaedri 3. & quadratum lateris Tetraedri 4. &c.) Eſt igitur Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Si itaq; Octaedrum, atq; Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandũ erat.

a 18. tertiidecimi.

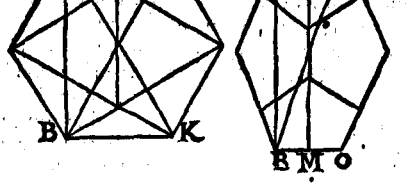
COROLLARIVM.

Ex dictis infertur, ita eſſe altitudinem Octaedri ad altitudinẽ Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini Octaedri, ad altitudinem Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus cubi. [a] *Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris Octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram.*

a 18. tertiidecimi.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea propoſita potuerit totam aliquã lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.



Poſsit recta AB, rectam CD, & eius ſegmẽtum maius CE; Item rectam FG, & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius ſphæræ, cuius AB, diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cuius diameter AB, deſcriptũ Icoſaedrum AIBK, & Dodecaedrũ ANBO. Latera deinde Icoſaedri oppoſita AI, BK, connectantur recta IB, quæ ſubtẽdet vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus cõpoſiti, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 13. (Nam in ea figura, ducta recta ZF, erit RSHZF, pentagonum, ob quinque latera Icoſaedri æqualia GR, GS, GH, GZ, GF, cadentia ex G, in ſuperficiẽ ſphæræ, in quo recta RH, latera oppoſita RX, HI, coniungens angulum RSH, ſubtendit) clariusq; patebit ex cõſtructione Icoſaedri, quam ad finem libri 16. ex Pappo afferemus: quod etiã videre licet in aliquo Icoſaedro materiali. Quia verò AI, BK, latera oppoſita parallela ſunt, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 13. [a] erunt anguli AIB, IBK, æqua-

a 29. primi.

IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cùm sint inter se æquales, (Ducta enim alia diametro IK; cùm latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia sint lateribus KB, BI; & bases quoque AB, IK, æquales; [a] Erunt anguli AIB, IBK, æquales.) recti erunt; [b] ideoque quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB: Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia sunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cùm CE, sit maius segmentum ipsius CD, diuisæ extrema ac media ratione; Item IA, maius segmentum ipsius IB, similiter diuisæ; (Nam IB, subtendit angulum pentagoni, cuius latus est IA, latus Icosaedri. Constat autem, rectæ subtendentis angulum pentagoni, si secetur extrema ac media ratione, [c] maius segmentum esse æquale lateri eiusdem pentagoni.) æquale erit CE, maius segmentum ipsi IA, lateri Icosaedri. [d] Cùm enim sit vt CD, ad CE, ita IB, ad IA; [e] erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, ita quadratum rectæ IB, ad quadratum rectæ IA; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA, ad quadratum rectæ IA: Ostensa sunt autem quadratis rectarum CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; [f] Igitur & quadrato rectæ CE, æquale est quadratum rectæ IA; ideoq; rectæ CE, IA, æquales sunt. Quod est propositum.

[a] 8. primi. [b] 47. primi. [c] 8. tertiædecimi. [d] 2. quartidecimi. [e] 22. sexti. [f] 14. quinti.

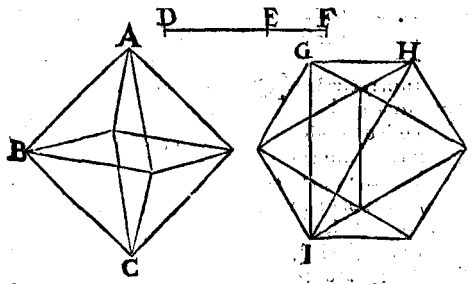
RVRSVS, latera Dodecaedri opposita AN, BO, secentur bifariam in L, & M, punctis quæ recta LM, & ipsa latera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales, parallelæ sunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. [g] erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Est autem recta LM, secans latera opposita bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita, per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit. [h] Ac proinde quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA. Quare cùm idem quadratũ rectæ AB, æquale sit positum quadratis rectarum FG, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG: Ac propterea, cùm HG, sit minus segmentum ipsius FG, sectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus segmentum ipsius NB, hoc est, ipsius LM, similiter diuisæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus segmentum ipsi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac suprà demõstrauimus CE, maius segmentũ æquale esse ipsi IA, lateri Icosaedri. Si recta ergo linea propositа potuerit totam aliquam lineam sectã extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentũ prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris, &c. Quod erat ostendendũ.

[g] 33. primi. [h] 47. primi.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus Octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, Octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem sphæræ inscriptum Icosaedrum GHI, cuius latus GH, & subtendẽs angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmẽti EF. Cùm enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI; [i] erit GH, maius segmentum ipsius GI, diuisæ extrema ac media ratione; [k] Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione. [l] Quia verò quadratum diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quòd angulus IGH, rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est: & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarũ GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: [m] Est autem quadratũ diametri HI, duplum quadrati lateris Octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarũ DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. ([n] Nam cùm sit vt GI, ad GH, ita DE, ad EF. [o] Erit quoq; vt quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectę EF; & componendo, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectę GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF: Et permutando, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.

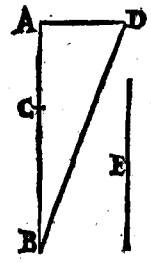


[i] 8. tertiædecimi. [k] 5. tertiædecimi. [l] 47. primi. [m] 14. tertiædecimi. [n] 2. quartidecimi. [o] 22. sexti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angu-

lum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quę potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.



LINEA recta AB, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta AD, quę æqualis sit minori segmento AC, angulum rectum A, cui recta subtendatur BD, sitq; recta E, potentia subdupla ipsius BD. Dico E, latus esse Octaedri illius sphęræ, in qua AD, vel AC, latus est Dodecaedri. Cùm enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. maius segmentum BC, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmentum AC, vel AD, latus est Dodecaedri: erit diameter illius sphæræ potentia tripla maioris segmenti BC, nempe lateris cubi: [a] Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmẽti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphæræ, æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc est, quadrato rectæ BD: Ac proinde recta BD, diameter est sphæræ. [b] Quare cùm diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Posit autem recta BD, duplum rectæ E, quòd recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD: Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

a 4. tertiædecimi.

b 14. tertiædecimi.

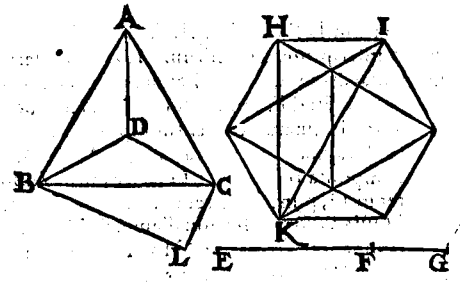
COROLLARIVM.

[a] *QVONIAM verò latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri, vt constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cùm BC, sit maius segmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta (nimirum BC,) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum AD,) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.*

a 18. tertiædecimi.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ: latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.



POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectæ EG, diuisæ extrema ac media ratione: Sit quoq; HI, latus Icosaedri HIK, eiusdem sphæræ. Dico HI, rectam potentia esse sesquialterã minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturq; recta IK, diameter. [a] Quia igitur HI, est maius segmentum rectæ HK, diuisæ extrema ac media ratione: [b] Erit quoque composita KHI, diuisa eodem modo in H, maiusq; segmentum HK, & minus HI. [c] Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulum BCL, ita vt BL, recta ipsi EF, & CL, ipsi FG, sit æqualis: [d] Eritq; angulus L, rectus, quòd recta BC, ponatur posse rectas BL, CL, hoc est, rectas EF, FG: Est autem & angulus IHK, rectus, vt propos. 23. huius lib. ostendimus: [e] Estque vt BL, ad LC, ita KH, ad HI. [f] Igitur triangula BLC, KHI, æquiangula sunt. [g] Ac propterea vt KI, ad IH, ita BC, ad CL: & permutando, vt KI, ad BC, ita HI, ad CL: [h] Atqui IK, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri BC. Ergo & HI, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius CL, hoc est, minoris segmenti FG. Si latus itaque Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

a 8. tertiædecimi.

b 5. tertiædecimi.

c 22. primi.

d 48. primi.

e 2. quartidecimi.

f 6. sexti.

g 4. sexti.

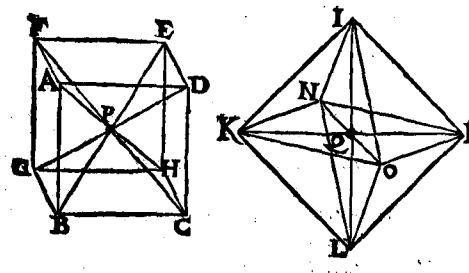
h 13. tertiædecimi.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæra cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quàm Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quòd habeant & bases æquales, & altitudines. (Cùm enim circuli descripti circa pyramidum, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter à centro sphæræ distent

erunt



erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales, per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales; eandem ob causam. [a] Quoniam autē idem circulus complectitur & cubi quadratum, & Octaedri triangulum; æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & Octaedri à centro sphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erūt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basim pyramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde, ex iis, quæ in scholio propos. 12. lib. 5. demonstrauimus, vt sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies videlicet tota cubi, ad basim pyramidis Octaedri; Ideoq; rursus, ex eodē scholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrum, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

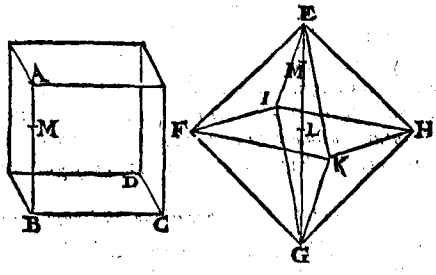
[a] 21. quarti decimi.

SINT rursus in eadem sphæra cubus A B C D, & Octaedrum E F G H I K, sitq; diameter sphæræ, seu Octaedri E G, & centrum L. Auferatur autem ex A B, latere cubi tertia pars A M; Item ex semidiametro E L, tertia pars E N. Quoniam verò quadratum I F K H, lateris Octaedri, basis existens duarum pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propos. 16. huius lib. [b] sesquialterum est quadrati B D, lateris cubi B C: Est autem & recta A B, rectæ B M, sesquialtera, ex constructione; reciprocabuntur bases I F K H, B D, & altitudines A B, B M: [c] Ac propterea parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, æquale erit parallelepipedo super basim B D, & sub altitudine A B, nimirum cubo A B C D. Rursus quia recta E L, rectæ E N, tripla est; erit & parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine E L, triplum parallelepipedi super eandem basim, & sub altitudine E N, vt in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus; Sed & idem parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine E L, triplū est pyramidis I F K H E, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Igitur pyramis I F K H E, æqualis erit parallelepipedo super basim I F K H, & sub altitudine E N: Atqui huius parallelepipedi duplum est parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, ex scholio propos. 14. lib. 12. quod & altitudo L N, dupla sit altitudinis E N: [d] Item Octaedrum E F G H I K, duplum est pyramidis I F K H E. Æquale igitur erit parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine L N, Octaedro E F G H I K. Cæterùm quia parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, est ad parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, vt altitudn B M, ad altitudinem L N, ex scholio propos. 14. lib. 12. Vt autem B M, ad L N, ita est A B, ad E L. (Cùm enim sit vt A M, ad M B, ita E N, ad N L: & componendo, vt A B, ad B M, ita E L, ad L N; erit quoque permutando, vt A B, ad E L, ita B M, ad L N.) Et parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, æquale est ostensum cubo A B C D; Et parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, æquale est Octaedro E F G H I K. Igitur erit quoq; vt cubus A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, semidiametrum sphæræ. Quod secundo loco demonstrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

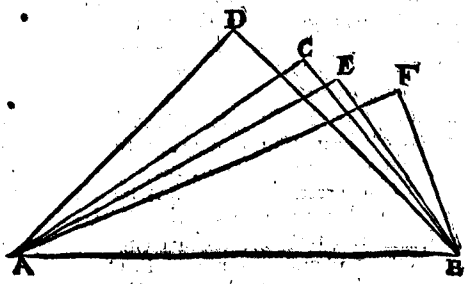
[b] 18. tertiæ decimi.

[c] 34. vndec.

[d] 16. quarti decimi.

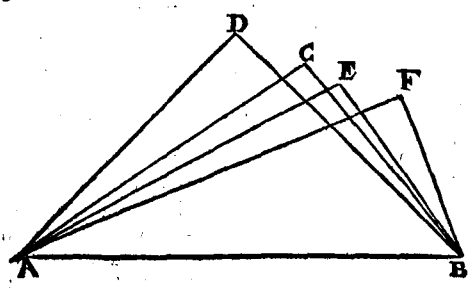


SCHOLIVM.



QVIA demonstratum est, [a] *diametrum sphæræ, in qua omnia quinq; corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri, ita vt, si quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. sit quadratum lateris Tetraedri; perspicuum est, si ex quadrato diametri date auferatur quadratum duas tertias illius partes continens; vt in scholio propos. 33. lib. 6. ostendimus, latus huiusce quadrati esse Tetraedri latus. Vel etiam, si quadrato diametri constituantur duo quadrata æqualia, quæ*

[a] 13. tertiæ decimi.



proportionem habeant duplam, ex eodem ſcholio; maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem quadratum lateris Tetraedri. Vt ſi diameter ſphæræ ponatur A B, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri A B; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarũ A C, B C, quadrato diametri A B, æqualia, ita vt quadratum rectæ A C, duplum ſit quadrati rectæ B C; Erit recta A C, latus Tetraedri.

a 14. tertiidecimi.

RVRSVS,[a] *cùm oſtenſum ſit, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris Octaedri; Fit, ſi ex quadrato diametri A B, dematur quadratum rectæ A D, quod dimidium ſit quadrati diametri A B; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum A D, E D, quadrato diametri A B, æqualia, & inter ſe proportionem habentia æqualitatis, ſecundùm doctrinam ſcholij propoſ. 33. lib. 6. rectam A D, latus eſſe Octaedri.*

b 15. tertiidecimi.

DEINDE,[b] *quoniam docuimus, diametrũ ſphæræ potẽtia eſſe triplam lateris cubi; Efficitur, ſi ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum rectæ B C, quod tertia pars ſit quadrati diametri A B; Vel ſi quadrato diametri A B, conſtruantur duo quadrata æqualia rectarum A C, B C, ita vt quadratum rectæ A C, duplum ſit quadrati rectæ B C, iuxta doctrinam eiuſdem ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Lineam rectam B C, cubi latus exiſtere. Vel certè cùm diameter A B, poſſit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 13. manifeſtum eſt, ſi ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum lateris Tetraedri A C, relinqui quadratum lateris cubi B C: Quemadmodum è contrario, ſi ex quadrato diametri A B, tollatur quadratum lateris cubi B C, remanet quadratum lateris Tetraedri A C.*

c 23. quartidecimi.

PRAETEREA, *quia ſi recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione ſectam, & maius ipſius ſegmentum;* [c] *Maius ſegmentum eſt latus Icoſaedri illius ſphæræ, cuius diameter eſt recta prior linea; Conſtat, ſi quadrato diametri A B, exhibeantur, iuxta ea, quæ in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. demonſtrata ſunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarum A E, E E, proportionem habentium, quam recta quæuis extrema ac media ratione diuiſa ad maius ſegmentum; Rectam minorem B E, eſſe Icoſaedri latus.*

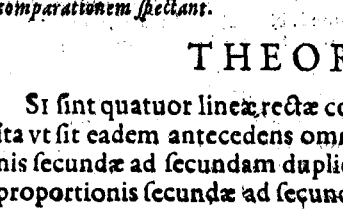
d 23. quartidecimi.

POSTREMO, *quoniam ſi recta quæpiam potuerit totam aliquam rectam diuiſam extrema ac media ratione, & minus illius ſegmentum;* [d] *Minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri eius ſphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, ſi quadrato diametri A B, conſtituantur duo quadrata æqualia rectarum A F, B F, proportionem habentium, quam quacunq; recta linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum: Minorem lineam B F, latus eſſe Dodecaedri.*

HACTENVS ergo Hypſicles, Campanus, & Franciſcus Candalla de comparatione ſolidorum regularium eidem ſphæræ impoſitorum ſcripſerunt: Sequentes autem quinq; propoſ. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui ſequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adiiciemus, quæ ad eorundem quinq; corporum Regularium in ſphæra deſcriptionem, eorundemq; comparationem ſpectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI ſint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt ſit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata.



SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continuè proportionales; necnon quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens ſit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiã, eſſe duplicatam proportionis B, ad E, ſecundæ ad ſecundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam, eſſe triplicatam eiuſdem proportionis B, ad E, ſecundæ ad ſecũdam. Cùm enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; [a] habeat autem & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplicatam proportionem eiuſdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, vt recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A: Et cõuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur eſt quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadra-

a 20. ſexti.

quadr. B. Recta C.
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F.

& quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E, vt recta C, ad rectam F: [a] Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est primum. [a] 20. sexti.

RVRSVS, cum recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A: [b] habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo, vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo est cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A: & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectæ E, vt recta D, ad rectam G: [c] Est autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectá G, triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundũ. Itaq; si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandũ erat. [b] 33. vndec. [c] 33. vndec.

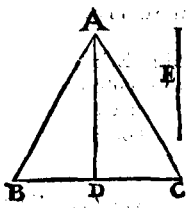
Cubus B.	*Recta D.*
Cubus A.	*Recta A.*
Cubus E.	*Recta G.*

SCHOLIVM.

Hoc idem demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continuè proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemq; numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.



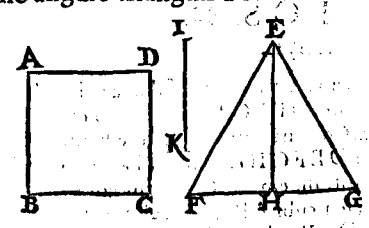
IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositũ B C, recta perpendicularis A D, quæ bifariam secabit latus B C, vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris A B. [d] Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cùm enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. [e] Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Æqualia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. [f] Quoniam verò quadratum lateris A B, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoque duplicatam lateris A B, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum. [d] 13. sexti. [e] 17. sexti. [f] 20. sexti.

COROLLARIVM.

ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter A D, D B, æquale esse triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.



SIT quadratum cubi cuiusuis A B C D, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppositum F G, deducta, diuidens F G, latus bifariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum A C, ad triangulum E F G, vt latus trianguli E F, ad perpẽdicularem E H. Posita enim inter E H, F H, media proportionali I K; [g] cùm quadratum lateris Tetraedri E F, duplum sit quadrati lateris cubi A B, [h] sit autem & duplum rectanguli sub latere E F, & dimidio eius F H, eò quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe E F: Erit rectangulum sub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; [i] Ac propterea A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc est, tres rectæ F H, A B, E F, continuè erunt proportionales: Sunt autẽ & tres rectæ F H, I K, E H, continuè [g] 18. tertij decimi. [h] 1. sexti. [i] 17. sexti.

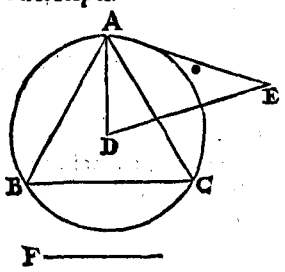
FH. AB. IK. EF. EH. proportionales, ex constructione. Igitur cùm omnium antecedens sit FH, [a] erit proportio rectæ EF, ad rectam EH, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ AB, ad rectam IK secundæ ad secundam duplicata. Quare cùm & quadratum AC, rectæ AB, & quadratum rectæ IK, hoc est, ad triangulum EFG, (est enim, ex coroll. propos. 19. huius libri, quadratum rectæ IK, æquale triangulo EFG.) [b] proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ AB, ad rectam IK; Erit quadratum cubi AC, ad triangulum Tetraedri EFG, vt latus EF, ad perpendicularem EH. Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphæra describantur, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 18. quartidecimi.

[b] 20. sexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius: Axis verò, siue altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.



SIT Tetraedri triangulum ABC, & altitudo, seu axis Tetraedri DE, latusque cubi eiusdem sphæræ F. Dico latus Tetraedri AB, esse potentia sesquialterum axis DE: Axem verò DE, potentia sesquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum, [c] descripto circulo ABC; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis DE, vt constat ex propos. 15. huius lib. ducatur AD, semidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris AE, hoc est, lateris AB, [d] æquale est quadratis rectarum AD, DE, [e] & triplum quadrati semidiametri AD; Fit, vt posito quadrato lateris AB, seu AE, partium 6. quadratum rectæ AD, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis DE, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.

[c] 15. quarti.

[d] 47. primi.

[e] 12. tertiidecimi.

QVONIAM verò latus Tetraedri AB, [f] potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris AB; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis DE. Igitur quadratum axis DE, sesquitertium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

[f] 18. tertiidecimi.

COROLLARIVM I.

QVIA verò, posito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. [a] *quòd diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Earundem verò partium 4. ostensum est quadratum axis DE; perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde,* [b] *cùm quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialtera enim proportionis duplicatæ est proportio dupla sesquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.*

[a] 13. tertiidecimi.

[b] 20. sexti.

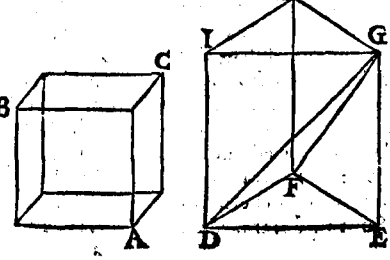
COROLLARIVM II.

CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet [c] *tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad latus oppositum deducta, quàm ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.*

[c] 12. quartidecimi.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.



DESCRIBANTVR in eadē sphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. [a] Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam, ita est, per coroll. 2. propos. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis

[a] 30. quartidecimi.

is DEFGHI, ad latus cubi, ideoq; ad altitudinem cubi, seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata ABC, DEFGHI, cùm ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEFGHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG; ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoq; erit eiusdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendũ erat.

COROLLARIVM.

VNDE prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum ABC, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM:

& Solidorum quintum,

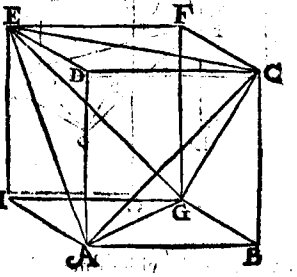
vt nonnulli putant: Vt verò alij, Hypsiclis Alexandrini de quinq; corporibus,

LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1. 1.

In dato cubo Pyramidem describere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat describere pyramidem, seu Tetraedrum. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducãtur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri EA, EG, EC, ex quarum extremitatibus A, G, C, similiter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus basibus, quæ extrema priorũ trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales sunt, quòd potẽtia duplæ sint laterũ æqualium quadratorum, vt in schollo propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, perspicuum est, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia; Ac propterea pyramidem, seu Tetraedrum constitui ex ipsis. Quòd verò omnes anguli Tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex definitione trigesimæ primæ, libri vndecimi. Quare in dato cubo Pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.



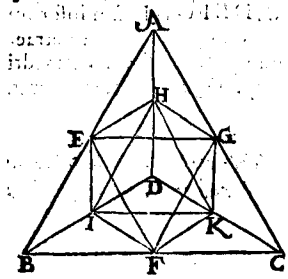
PROBL. 2. PROPOS. 2. 2.

In data Pyramide Octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu Tetraedro ABCD, describendum Octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis, EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum consistunt.

Quoniam verò latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quod sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC: Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quòd sint anguli triangulorum æquilaterorum, ABD, ACD: [a] æquales erunt bases EH, GH. Eademq; ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque Octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex definitione 31. lib. 11. intra Tetraedrum descriptum est; cùm omnes eius anguli tangant omnia latera Tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide Octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

a 4. primi.



COROLLARIVM.

Quoniam verò tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, seseq; mutuò ad angulos rectos secantia, vt in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauimus; quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD, & prisma HIKGAE; necnon in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem, pyramidi esse æqualem, & prisma prismati: [a] *Eodemq; modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifestum est, si in Tetraedro Octaedrum inscribatur, Tetraedrum bifariam secari, tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & seseq; ad angulos rectos intersecant.*

a 3. duodecimi.

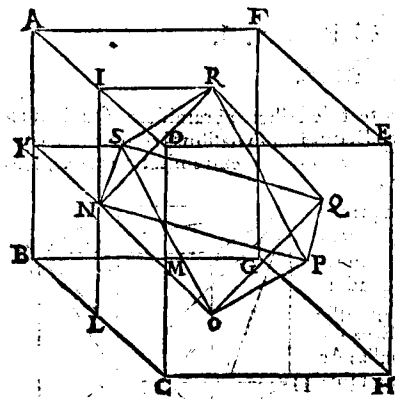
3. PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN dato cubo Octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit Octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, secantibus seseq; in N, puncto, quod quidem centrum est quadrati ABCD, vt constat ex demonstratione propositionis octauæ, lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ, ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NK, SK, &c. æquales dimidijs lateribus cubi, seu quadratorum, vt perspicuum est ex prædicta demonstratione propos. 8 lib. 4. Postremò, si præfata centra conjungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; constituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, supra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum consistunt. Quoniam verò latera IN, IR, trianguli INR, æqualia sunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quòd omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum est; Item & anguli contenti, æquales; propterea quòd, cùm NI, IR, parallelæ sint rectis BA, AF; [a] angulus NIR, æqualis sit recto angulo KAF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; [b] Erunt bases NR, NS, æquales. Non aliter ostendemus, reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse; si nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune est duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas esse ad I, dimidium lateris AD, quod commune est quadratis AC, AE, quorum centra sunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ NK, SK, ductæ sunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune est quadratis AC, AG, quorum centra existunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem constituta octo triangula & æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque Octaedrum constituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum est descriptum, cùm omnes eius sex anguli tangant cubi omnes sex bases in earum centris. Quam ob rem in dato cubo Octaedrum inscripsimus. Quod faciendum erat.

a 10. vndec.

b 4. primi.



c 31. quintidecimi.

d 2. quintidecimi.

ALITER. [c] In cubo dato inscribatur pyramis; [d] In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quòd proponitur. Cùm enim ex demonstratione propositionis 2. huius libri, anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera verò pyramidis, ex demonstratione propos. 1. huius

huius lib. existant in planis basium cubi, cùm sint harum basium diametri; perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi; atque adeò Octaedrum cubo esse inscriptum.

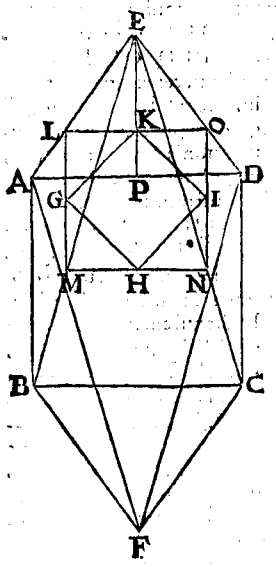
COROLLARIVM.

QVIA verò diametri Octaedri in cubo descripti N Q, R O, si ducerentur, se mutuò secant ad angulos rectos, ex. coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solùm sese mutuò bifariam, vt docuimus coroll. 1. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, vt hic ostendimus, dividere.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

4.

IN dato Octaedro cubum inscribere.



DATVM Octaedrum sit A B C D E F, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in Octaedro sex pyramides quadrangulę continentur; quarum videlicet vertices sunt sex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum constituunt; sit vna earum pyramis, A B C D E, cuius basis A B C D, quadratum, triangula verò æquilatera A B E, E B C, C E D, D E A, sintq; horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ L M, M N, N O, O L, parallelæ lateribus A B, B C, C D, D A. Erunt igitur & triangula L M E, E M N, N E O, O E L, æquilatera, cùm similia sint triangulis æquilateris A B E, E B C, C E D, D E A, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeò inter se æqualia, propterea quòd latera habeant communia. Est enim E M, latus commune triangulis L M E, E M N; Et E N, cõmune triangulis E M N, N E O; & deniq; E O, cõmune triãgulis N E O, O E L. Hinc enim fit, triangulum L M E, triangulo E M N, hoc verò ipsi N E O; & hoc ipsi O E L, æquale esse. Conueniunt enim rectæ L M, M N, N O, O L, in punctis L, M, N, O, vt mox ostendemus. Quocirca & quatuor rectæ L M, M N, N O, O L, inter se æquales sunt. [a] Quia verò ducta recta E K P, tripla est rectæ K P; [b] Est autem vt E P, ad K P, ita E A, ad L A; Erit quoque E A, tripla rectæ L A. Eademque ratione E B, E C, E D, triplę erunt rectarum M B, N C, O D. Quocirca rectæ L M, M N, N O, O L, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumque constituent L M N O. Rursus quia L O, L M, parallelæ sunt rectis A D, A B, nõ in eodem cum ipsis existentibus plano; [c] æqualis erit angulus M L O, angulo B A D, qui rectus est, cùm A B C D, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus M L O, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos L M N, M N O, N O L, rectos esse. Quoniam verò tam planum per L O, L M, quàm per N M, N O, ductum, [d] parallelum est plano A B C D; ipsa quoque inter se parallela erunt, atque adeò, cùm conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca L M N O, quadratum erit, cùm habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cùm latera E L, E K, trianguli E L K, æqualia sint lateribus E O, E K, trianguli E O K, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quòd recta E K, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri E A D, ducta bifariam secet angulum A E D, per corollarium propositionis 12. libri 13. [e] Erunt & bases K L, K O, æquales, hoc est, recta L O, bifariam secabitur in K. Eadem ratione L M, M N, N O, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ G L, G M, H M, H N, I N, I O, K O, K L, cùm sint laterum quadrati L N, dimidia, æquales inter se erunt; Ideoque, cùm & angulos contineant æquales, nimirum rectos, [f] æquales erunt & rectæ G H, H I, I K, K G, centra G, H, I, K, connectentes. Quia verò hæ rectæ in plano existunt quadrati L N, angulosque comprehendunt rectos; ([g] cùm enim anguli L K G, G K I, I K O, duobus sint rectis æquales; Sint autem L K G, I K O, per corollarium 2. propositionis 32. libri 1. semirecti; rectus erit angulus G K I; Eademque ratione recti erunt anguli K G H, G H I, H I K.) quadratum erit G H I K, cùm habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quòd si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungãtur, describentur similiter quadrata: quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex definitione 31. libri 11. intra Octaedrum descriptus erit, cùm octo eius anguli tangant octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

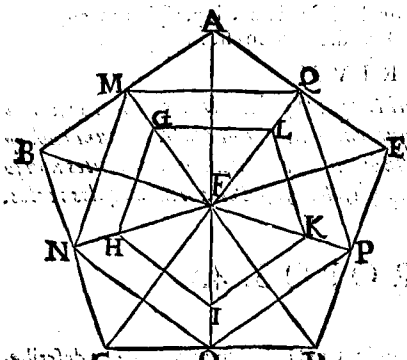
[a] 28. quarti decimi.
[b] 2. sexti.
[c] 10. vndec.
[d] 15. vndec.
[e] 4. primi.
[f] 4. primi.
[g] 13. primi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

5.

IN dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere.

6.



SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icosaedro continétur, quarũ videlicet bases sunt pentagona ex quinque Icosaedri lateribus composita, vertices verò, duodecim anguli Icosaedri, vna pyramis A B C D E F, cuius basis pentagonũ A B C D E, triangula verò æquilatera A B F, B C F, C D E, D E F, E A F, sintq; horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectãtur lineis G H, H I, I K, K L, L G. Rursus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur F M, F N, F O, F P, F Q; quę, ex scholio propos. 12. lib. 13. bifariam secabunt latera A B, B C, C D, D E, E A, in M, N, O, P, Q: ita vt decẽ rectæ M A, M B, N B, N C, O C, O D, P D, P E, Q E, Q A, æquales sint, quæ cũ angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, [a] æquales quoque erunt rectæ M N, N O, O P, P Q, Q M, puncta

[a] 4. primi.

[b] 8. primi. M, N, O, P, Q, connectentes; [b] Ac proinde & anguli M F N, N F O, O F P, P F Q, Q F M, æquales erũt, quòd & latera F M, F N, F O, F P, F Q, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorũ æqualiũ ad bases oppositas demissæ. Cùm enim latera F B, B M, trianguli F B M, lateribus F B, B N, trianguli F B N, æqualia sint, continéatq; angulos æquales, nempe trian-

[c] 4. primi. gulorum æquilaterorũ; [c] erũt bases F M, F N, æquales; & sic de reliquis. Quoniá verò & rectę F G, F H, F I, F K, F L, nimirũ semidiametri circulorũ æqualium triangula æquilatera æqualia circum-

[d] 4. primi. scribentium æquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonstratum est; [d] Erunt & rectæ G H, H I, I K, K L, L G, æquales. [e] Rursus quia tam anguli A M Q, Q M N, N M B, q̃ anguli

[e] 13. primi. B N M, M N O, O N C, æquales sunt duobus rectis. [f] Sunt autẽ anguli A M Q, N M B, angulis

[f] 4. primi. B N M, O N C, æquales; Erunt reliqui anguli Q M N, M N O, æquales; Eademque ratione reliqui anguli N O P, O P Q, P Q M, & inter se, & hisce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum M N O P Q, in plano pentagoni A B C D E, existens. Denique cùm rectæ F M, F N, F O, F P, F Q, æquales, proportionaliter secentur in G, H, I, K, L, quòd & F G, F H, F I, F K, F L, ex centris, æquales sint; Vel certè quia F G, F H, F I, F K, F L, duplę sunt ipsarum G M,

[g] 2. sexti. H N, I O, K P, L Q, ex corollario propos. 18. lib. 14. [g] parallelæ erunt G H, H I, I K, K L, L G, ipsis

[h] 10. vndec. M N, N O, O P, P Q, Q M; [h] Ac propterea anguli L G H, G H I, H I K, I K L, K L G, angulis æqua-

[i] 15. vndec. libus Q M N, M N O, N O P, O P Q, P Q M, ideoque & inter se, æquales erunt. [i] Quia verò plana per rectas G H, H I, & per H I, I K, ducta, parallela sunt plano pentagoni M N O P Q, per rectas M N, N O, O P, ducto, conueniuntque in recta H I; ipsa vnum planum efficient, ex scholio propositionis 16. libri vndecimi. Eodemq; modo ostendemus plana per I K, K L, & per K L, L G, nec non per L G, G H, ducta, idem planum constituere cum plano per G H, H I, I K, ducto. Quocirca G H I K L, pentagonum est æquilaterum & æquiangulum, cùm & latera habeat æqualia & angulos. Quòd si eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icosaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, describentur similiter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quamobrem duodecim huiusmodi pentagona Dodecaedrum constituẽt: quod quidem ex defin. 11. lib. 11. in Icosaedro erit describtum, cùm viginti anguli Dodecaedri in centris viginti basium Icosaedri consistant. Quapropter in dato Icosaedro Dodecaedrum describimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

ITAQVE cùm omnes rectæ è centro Icosaedri ad centra basium, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint æquales; (Cùm enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14 perpendiculares sint ad plana circulorum æqualium bases Icosaedri circumscribentium, atq; adeò eorundem distantiæ existant à centro sphæræ, seu Icosaedri; æquales erunt inter se, ex lemmate secundo eiusdem propositionis 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icosaedri, atque sibi inscripti Dodecaedri.

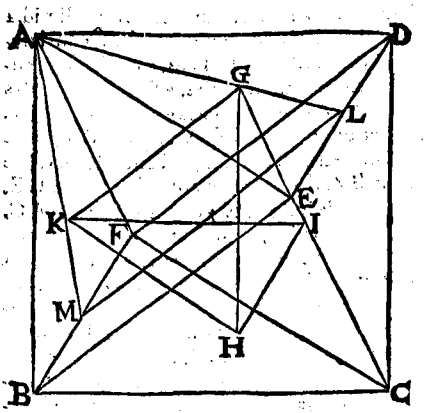
PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato Octaedro Pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in Octaedro A B C D E F. In pyramide Octaedri superiori A B C D E, sumantur G, & H, centra triangulorum ex aduerso sibi respondentium A E D, B E C; Item in pyramide inferiori A B C D F, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerso quoque sibi correspondentium C F D, A F B: quæ quidẽ centra coniungantur sex rectis G H, G I, G K, H I, H K, I K; vt fiat pyramis H I K G. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ A L, A M, secantes latera opposita Octaedri D E, B F, bifariam in L, & M, per scholium propositionis 12. libri 13. coniunga-

[k] 33. primi. turque recta L M, [k] quæ ipsi B E, vel F D, æqualis & parallela erit: cùm E L, B M; Item D L, F M, rectæ æquales sint, & parallelę, nimirum dimidia laterum D E, B F, oppositorum in quadratò E F.

Quoniam



Quoniam verò rectæ A L, A M, sectæ sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quòd A G, A K, duplæ sint ipsarum G L, K M, ex corollario propositionis 18. libri 14. [a] Erunt G K, L M, parallelæ; Ac propterea, per corollarium propositionis 4. libri 6. triangula A L M, A G K, similia. [b] Quare erit, vt A L, ad L M, ita A G, ad G K; & permutando, vt A L, ad A G, ita L M, ad G K. Est autem A L, ipsius A G, sesquialtera: [c] quòd G L, sit tertia pars ipsius A L, ideoque A G, eiusdem A L, duæ tertiæ. Igitur & L M, hoc est, ipsi æqualis, D F, sesquialtera erit ipsius G K. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentium sesquialtera esse latera Octaedris Ac proinde rectas pyramidē H I K G, componentes inter se esse æquales, hoc est, triāgula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoq; Tetraedrū constitui: qd', cùm habeat angulos omnes in centris quatuor basium Octaedri, descriptū erit, ex defin. 31. lib. 11. in Octaedro. Quocirca in dato Octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciēdum.

a 2. sexti.
b 4. sexti.
c 18. quarti decimi.

ALITER. [d] In Octaedro dato inscribatur cubus, [e] & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim cubi anguli consistant in centris basium Octaedri; & in angulis cubi collocentur quoque anguli pyramidis: perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases Octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi Octaedro esse inscriptam.

d 4. quinti decimi.
e 1. quinti decimi.

COROLLARIVM I.

QVIA verò ostensum est, vtramque G K, D F, parallelam esse ipsi L M; [a] ac propterea & G K, ipsi D F, atq; adeò ipsi B E, parallelam esse; Atque eadem ratione K H, ipsis F C, E A, parallelam esse; [b] Atque idcirco planum G K H, per G K, K H, ductum, parallelum esse plano D F C, per D F, F C, nec non & plano B E A, per B E, E A, ducto; Eodemq; modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis Octaedri esse parallela, binis nimirum singula; Constat, si Tetraedrum Octaedro inscribatur, quatuor bases Tetraedri, octo basibus Octaedri parallelas esse, singula videlicet binis oppositis.

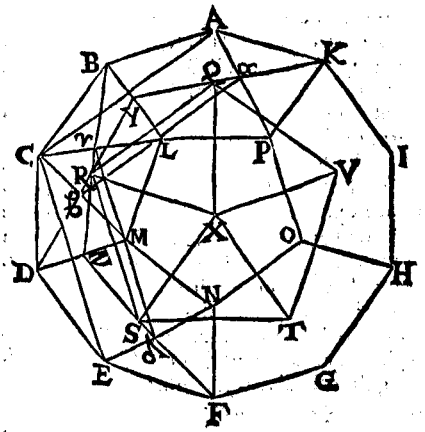
a 9. vndec.
b 15. vndec.

COROLLARIVM II.

PRAETEREA, cùm Octaedrum circumscribat & cubum, & Tetraedrum in cubo descriptum, quòd Tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium Octaedri constituantur; Atque adeò recta coniungens centra basium Octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphæræ circumscribentis & cubum, & Tetraedrum in cubo descriptum, vt constat ex 4. propos. huius lib. Sit autem diameter sphæræ sesquialtera axis Tetraedri in ea sphæra descripti, per coroll. 1 propos 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Manifestum est, si in Octaedro Tetraedrū inscribatur, rectā, quæ centra basiū Octaedri oppositarū coniūgit, sesquialterā esse axis Tetraedri, h.e. perpēdicularis ab angulo Tetraedri ad basin oppositā deductæ.

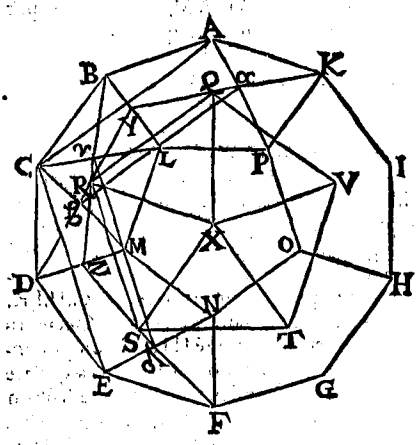
PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato Dodecaedro Icosaedrum describere.



SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis A B L P K, P K I H O, O H G F N, N F E D M, M D C B L, L M N O P, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur Q R, R S, S T, T V, V Q, Q X, R X, S X, T X, V X: Et ex angulis K, D, quos subtendant rectæ A P, C M, per centra Q, R, rectæ ducantur K Y, D Y, quę per corollarium 2. propositionis 10 libri 13. bifariam diuident latus oppositum B L, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem Y K, Y D, rectas A P, C M, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiusdem propos. 9. & arcus A K P, C D M, circulorum circa pentagona descriptorum bifariam diuidant. ([a] constat enim rectas A K, P K; Item C D, M D, arcus subtendere æquales.) [b] Igitur A α, C β, parallelæ sunt rectæ B Y; [c] atque adeò & inter se

a 28. tertij.
b 28. primi.
c 9. vndec.

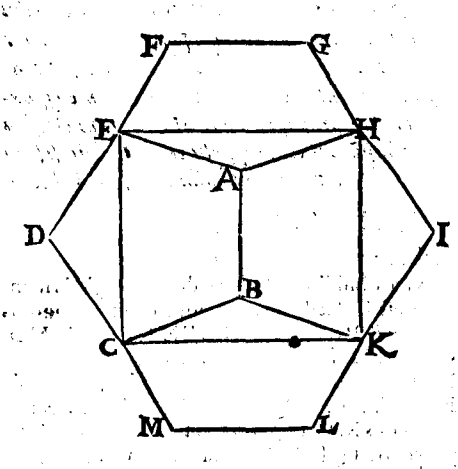


parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimidia rectarum AP, CM: [a] quæ æquales sunt, cùm latera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia sint, angulosque contineant æquales. [b] Rectæ ergo ipsas connectentes AC, α β, æquales erunt, & parallelæ. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, quos subtendant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, γ δ, æquales esse ipsas CE, γ δ: [c] Sunt autem AC, CE, inter se æquales, cùm contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera Dodecaedri AB, BC, quàm CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versus X, vt figura monstrare videtur, sed extrorsum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & α β, γ δ, æquales erunt. Quapropter cùm & rectæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales sint, (Nam YQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum BL, DM, à centris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, [d] atque adeò æquales. Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, distantiæ sunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, à centris eorundem circulorum æqualium, [e] ideoque æquales: Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt.) [f] Erunt quoq; anguli αYβ, γZδ, æquales: Ac propterea, cùm & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales sint; [g] æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N, O, P, constituta, æquilatera erunt, & æqualia. Quòd si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula construantur: (Habet enim Dodecaedrum viginti angulos solidos.) quæ quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cùm duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium Dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

[a] 4. primi.
[b] 33 primi.
[c] 4. primi.
[d] 14. tertij.
[e] 14. tertij.
[f] 8 primi.
[g] 4. primi.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubum describere.



PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus AB CDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC. conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, ABKIH, secundùm latus idem commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundùm angulos EAH, CBK. In his verò pentagonis subtendãtur angulis A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK, quadrilaterum efficientes EHKC. quod æquilaterum erit. Cùm enim omnia latera AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia sint, angulósque contineant æquales, ex hypothesi; [h] æquales erũt bases EH, HK, KC, CE. [i] Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferũt x circulo pentagonum ABCDE, circumscribente arcus æquales; Erunt, ex scholio propositionis 27. libri 3. rectæ AB, CE, parallelæ. Eademque ratione parallelæ erunt AB, HK. [k] Quare & EC, HK, inter se parallelæ erunt; [l] Ac propterea rectæ EH, CK, quæ ipsas connectunt, parallelæ erunt, [m] in eodemq; cum ipsis plano; ideoque parallelogrammum erit EHKC, quod ostendimus esse æquilaterum. Quia verò planum ECKH, productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma 2. propos. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK, descriptum; [n] Erunt tam anguli oppositi E, K, quàm C, H, duobus rectis æquales: [o] Ac propterea cùm oppositi E, & K, sint æquales, nec non & oppositi C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare EK, quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo aliæ rectæ subtendantur eodem ordine; constitutum erit solidum sex quadratis contentum; quæ cùm sint æqualia, [p] eò quòd eorum

[h] 4. primi.
[i] 28. tertij.
[k] 9. vndec.
[l] 33. primi.
[m] 7. vndec.
[n] 22. tertij.
[o] 34. primi.
[p] 4. primi.

rum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehẽsos ſubtendentia æqualia ſunt; cubum conſtituent intra Dodecaedrum deſcriptum, propterea quòd duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusq; octo anguli in octo Dodecaedri angulis reſident. In dato ergo Dodecaedro cubum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

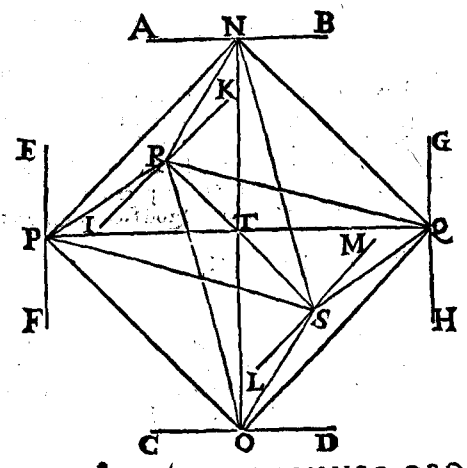
COROLLARIVM.

HINC ſit, rectam, quæ ſubtendit vnũ angulum pentagoni equilateri, & æquianguli, parallelam eſſe oppoſito lateri. Oſtenſum enim eſt, C E, ipſi A B, eſſe parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

o. 9.

IN dato Dodecaedro Octaedrum deſcribere.



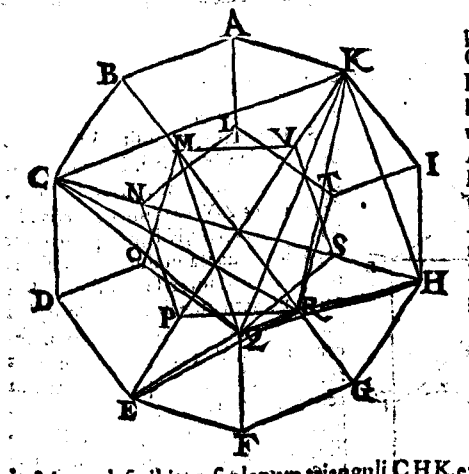
SVMANTVR in Dodecaedro, cui inſcribendum ſit Octaedrum, ſex illa latera, quæ oppoſita eſſe diximus in corollario 3. propoſitionis 17. lib. 13. nimirum A B, C D, E F, G H, I K, L M, quę bifariam ſecentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur N O, P Q, R S, ſectiones oppoſitorum laterum coniungentes æquales erunt, ſeque mutuò in T, centro ſphæræ bifariam, & ad angulos rectos dividunt, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13. atque adeò æquales quoque erunt earum dimidiatæ partes N T, O T, P T, Q T, R T, S T. [a] Quocirca duodecim rectæ ſubtendentes duodecim angulos rectos N T P, P T O, O T Q, Q T N, N T R, R T P, P T S, S T Q, Q T R, R T O, O T S, S T N, quales ſunt N P, P O, O Q, Q N, N R, R P, P S, S Q, Q R, R O, O S, S N, æquales erunt, cùm dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo triangula N R P, P R O, O R Q, Q R N, O S P, P S N, N S Q, Q S O, æquilatera, & æqualia erunt, conſtituentque Octaedrum intra Dodecaedrum deſcriptum, cùm ſex anguli Octaedri tangant ſex latera Dodecaedri oppoſita, ex conſtructione. In dato igitur Dodecaedro Octaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] 4. primi.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

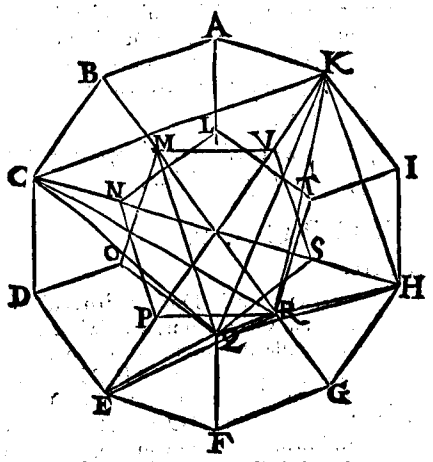
o. 10.

IN dato Dodecaedro, Pyramidem deſcribere.



SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis A B C N L, C D E P N, E F G R P, G H I T R, I K A L T, M O Q S V, B C D O M, D E F Q O, F G H S Q, H I K V S, K A B M V, L N P R T, in quo deſcribenda ſit pyramis, ſiue Tetraedrum. Sumantur tria pentagona A B C N L, L A K I T, T L N P R, angulum ſolidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri A L, communi pentagonis C A L, A L I; At verò K, lateri L T, communi pentagonis K L T, L T P; Denique R, lateri L N, communi pentagonis R L N, L N B,) rectis connectantur C K, C R, K R; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipſi L, oppoſitum, rectæ ducantur C Q, K Q, R Q, vt ſit pyramis conſtructa C K R Q. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, ſeu ſphæræ, C H, K E, R M, & connexis rectis K H, R H, R E, Q E, Q M, Q H; [b] quoniam Dodecaedrũ in ſphæra deſcribitur; ſi planum trianguli C H K, extendatur, fiet communis eius ſectio cũ ſphæra circulus, p lemma 1. propoſ. 10. lib. 14. [c] Ac propterea angulus C K H, in ſemicirculo exiſtens, rectus erit. Non ſecus oſtendemus rectos eſſe angulos C R H, K R E, K Q E, R Q M, C Q H. [d] Quocirca cùm in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppoſiti æquale ſit quadratis laterum circa rectum angulum; ſint autem quadrata diametrorum æqualium C H, K E, R M, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarum C K, K H, quadratis rectarum C R, R H, & quadratis rectarum K R, R E, & quadratis rectarum K Q, Q E, & quadratis rectarum R Q, Q M, nec non &

[b] 17. terti. decimi.
[c] 31. tertij.
[d] 47. primi.



quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergò quadratis æqualibus, rectarũ æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH; (Hæ enim rectæ cùm ſubtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehẽſos, [a] æquales ſunt.) æqualia remanebũt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ: Ac proinde & ipſæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera ſunt, & æqualia, ideoque Tetraedrum componunt CKRQ: quod cũ habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inſcriptum erit intra Dodecaedrum.

[a] 4. primi.

ALITER. [b] In propoſito Dodecaedro cubus deſcribatur; [c] & in hoc cubo pyramis, factumq; erit, quod proponitur. Cùm enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri reſideãt; perſpicuum eſt, angulos pyramidis ſedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro deſcripta erit. Itaq; in dato Dodecaedro pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[b] 8. quinti decimi.
[c] 1. quinti decimi.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

11.

IN dato Icoſaedro cubum deſcribere.

[d] DESCRIBATVR in dato Icoſaedro Dodecaedrum; [e] & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit, quod proponitur. Cùm enim anguli cubi reſideant in angulis Dodecaedri; anguli verò Dodecaedri in centris baſium Icoſaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra baſium Icoſaedri: Ac propterea cubus in Icoſaedro deſcriptus erit. Quam ob rem in dato Icoſaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[d] 5. quinti decimi.
[e] 8. quinti decimi.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

12.

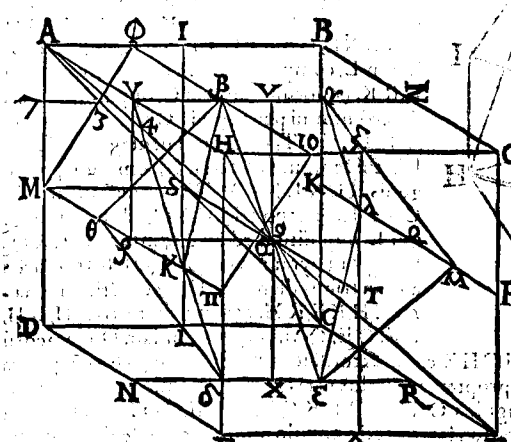
IN dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere.

IN dato Icoſaedro [f] cubus deſcribatur, [g] & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. [h] Cùm enim anguli cubi tangant centra baſium Icoſaedri; [i] & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifeſtum eſt, angulos pyramidis attingere centra earundem baſium Icoſaedri. Ac proinde pyramidem in Icoſaedro eſſe deſcriptam. In dato igitur Icoſaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[f] 11. quinti decimi.
[g] 1. quinti decimi.
[h] 11. quinti decimi.
[i] 11. quinti decimi.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum deſcribere.



SIT in cubo propoſito AF, deſcribendum Dodecaedrũ. Secentur ſingula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R. ω, ſ, Z, Y, coniunctis rectis I L, Y Z, ſ O, M ω, K P, N R, nũſquam inter ſe coeuntibus, ita vt ductæ in baſibus oppoſitis ſint inter ſe parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducãtur, ſed vna duntaxat, quæ rurſus bifariam ſecentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis S T, V X, ρ Q, quæ ſe mutuò in centro σ, bifariam ſecant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propoſ. 3. huius libri docuimus, ſuntque lateribus cubi, ſitus & priores ſex, æquales. Iam dimidia rectarum Y Z, M ω, ſecentur extrema ac media ratione in β, γ, δ, κ; vt ſint maiora ſegmenta, Y β, Z γ, Mδ, ωκ, ductis rectis, Y ρ, Y κ, βδ, βκ. Quoniam ergo Y ρ, Y V, dimidio lateris cubi ſunt æquales, & ρκ, κV, ſegmenta minora rectarum æqualium Y V, ρω, æqualia quoque: [k] Sunt autem quadrata rectarum Y V, κV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt

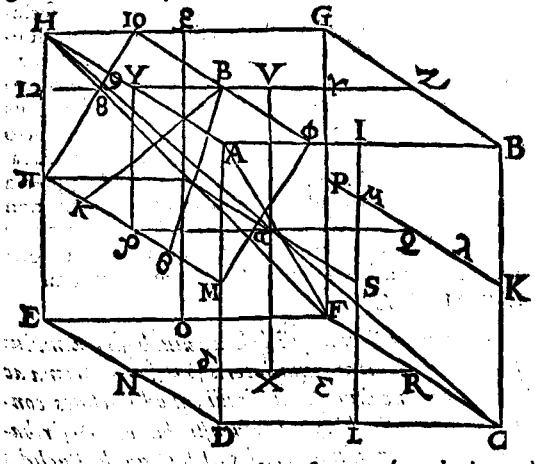
[k] 4. tertiid.

runt & quadrata rectarum Y ρ, ρ κ, tripla eiusdem quadrati rectæ Y β. Quare, [a] cùm quadratis rectarum Y ρ, ρ κ, æquale sit quadratum rectæ Y κ, [b] quòd angulus Y ρ κ, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Y κ, triplum quadrati rectæ Y β. Rursus, quia V Y, perpendicularis ad A Y, Y ρ, [c] recta est ad planum A E, per rectas A Y, Y ρ, ductum, rectus erit angulus β Y κ, ex defin. 3. lib. 11. [d] Ac propterea quadratum rectæ β κ, æquale quadratis rectarum Y κ, Y β, existens, quadruplum erit quadrati rectæ Y β. (quia nimirum quadrata rectarum Y κ, Y β, quadrupla etiã sunt quadrati rectæ Y β, cùm quadratum rectæ Y κ, triplum sit ostensum quadrati rectæ Y β.) Ideoq; [e] cùm quadrata proportionem habeat laterum duplicatam, dupla erit recta β κ, rectæ Y β. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet: Est autẽ & ∂ κ, dupla ipsius ρ κ, quòd minora segmenta ∂ ρ, κ ρ, rectarum æqualium M ρ, ω ρ, æqualia sint. [f] Erit igitur vt Y β, ad ρ κ, ita β κ, dupla ipsius Y β, ad ∂ κ, duplam ipsius ρ κ: Est autem Y β, maius segmentum ad ρ κ, rectam minori segmento β V, æqualem, vt tota ad maius segmentũ. Ergo & β κ, ad ∂ κ, erit vt tota ad maius segmentum; Ac proinde ∂ κ, erit maius segmentũ rectæ β κ, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus ∂ κ, maius esse segmentum rectæ β ∂, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta Y ∂. Quare æquales erunt β ∂, β κ, constituentes triangulum Isosceles β ∂ κ, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus; Ac proinde ∂ κ, erit latus pentagoni in circulo triangulum β ∂ κ, circumscribente descripti, vt perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.

a 47. primi.
b 29. primi.
c 4. vndec.
d 47 primi.
e 20. sexti.
f 15. quinti.

INTELLIGATVR iam planum trianguli β ∂ κ, extendi, (ducta per β, recta β ϕ, ipsi M ω, parallela.) per parallelas M ω, ϕ 10. vt sit planum extensum ϕ ω, occurrens diametro A C, quadrati A B C D, in puncto 3. cubi verò diametro A F, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi A ϕ, parallela, connectaturque M S, quæ parallela est vtrique A ϕ, 73. Quoniam igitur, per corollariũ propos. 4. lib. 6. triangulum A 73. simile est triangulo A M S; [h] ac proinde vt A M, ad M S, ita est A 7. ad 73. Sunt autem A M, M S, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoque A 7. 73. æquales. Eadem ratione erit, vt M A, ad A ϕ, ita M 7. ad 73. Est autem A ϕ, maius segmentum rectæ M A, diuisæ extrema ac media ratione. ([i] quòd æquales sint A ϕ, Y β, nec non & M A, Y V, dimidia cubi latera.) Igitur & 73. hoc est, 7 A, maius segmentum erit rectæ M 7. extrema ac media ratione sectæ; [k] Ac propterea tota M A, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusque segmentum erit M 7. [l] Atqui vt M 7. ad 7 A, ita est S 3. ad 3 A. Secta est ergo & S A, extrema ac media ratione in 3. maiusq; segmentum est S 3. [m] Quia verò S κ T, parallela est ipsi M ω; quòd & recta ducta ω T, æqualis & parallela sit ipsi M S; si per S κ T, planum ducatur parallelum plano ϕ ω, ducto per M ω, [n] secabuntur rectæ A S, A κ, in eadem rationes, in punctis 3. & 4. cùm planum ϕ ω, rectas A S, A κ, secet in 3. & 4. at planum per S κ T, ductũ plano ϕ ω, parallelum eadem secet in S, & κ. Atque idcircò, cùm A S, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo A κ, semidiameter cubi, in 4. maiusque segmentum erit κ 4.

g 33. primi.
h 4. sexti.
i 34. primi.
k 5. tertiid.
l 2. sexti.
m 33 primi.
n 17. vndec.

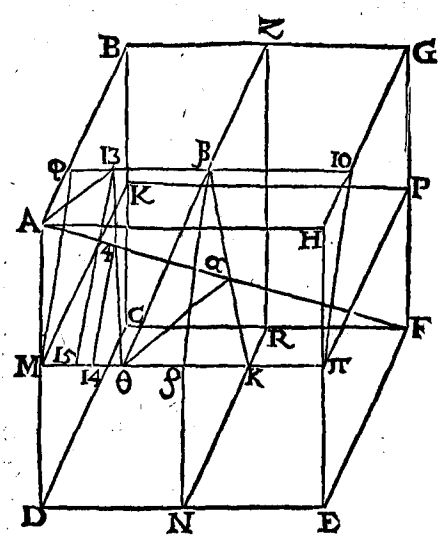


IISDEM argumentis ostendemus, ducta diametro H F, quadrati E F G H, & diametro cubi H C, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media ratione à plano ϕ ω, vt perspicuum est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figuræ, licèt bases cubi sedes mutauerint, ita vt quadratum A C, locum quadrati H F; & quadratũ H F, locum quadrati A C, obtineat in hac secunda figura. Quod tamen in prima figura, sine hac inuersione, probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi H C, in ea figura, quam planum ϕ ω, secet in 9. prope punctum A, intelligaturque per rectam A H, planum plano ϕ ω, parallelum. Quoniam igitur rectæ A κ, H κ, in centro κ, conueniunt, secanturque planis parallelis in punctis A, H, & 4. 9; (Nam planum ϕ ω, eas secat in 4. & 9, planum verò per A H, ductũ plano ϕ ω, parallelum eadem secat in A, & H;) erit vt κ 4. ad 4 A, ita κ 9, ad 9 H. Cùm ergo κ A, secta sit in 4, extrema & media ratione, erit [o] quoq; κ H, similiter secta. quæ quidem demonstratio locum etiam habet in hac cubi Inuersione in secunda figura. Ostendamus nunc, si rectæ iungantur ∂ 4, β 4, β 9, κ 9, rectilineum β 4 ∂ κ 9, in plano ϕ ω, existens, pentagonum esse æquilaterum, & æquiangulum.

o 17. vndec.

INVERTATVR rursum cubus, vt quadrata A D E H, A B G H, quæ nimirum continent triangulum β ∂ κ, siue planum ϕ ω, hunc situm habeant, quem monstrat tertia hæc figura. Deinde in plano ϕ ω, recta coniuncta ∂ 4. extendatur vsque ad rectam ρ 10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta K P, & iunctis rectis M K, ω P, P planum M P, parallelum est plano A G, (quòd & rectæ P K, K M, parallelæ sint rectis G B, B A,) 7 secatque cubum bifariam; ideoque per centrum κ, transit, p

p 15. vndec.
q 32. vndec.

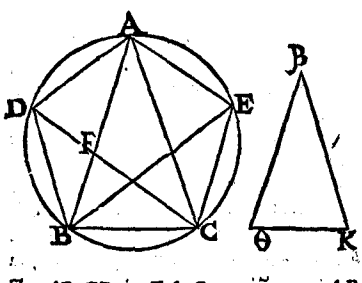


ea, quæ in ſcholio propoſ.39.lib.11. oſtenſa ſunt, ſi p rectas α 4 A, ϑ 4.13. planũ extendatur, [a] fient α ϑ, A 13. communes ſectiones planorũ M P, A G, parallelæ: Ac proinde triangula α ϑ 4. A 13 4. æquiangula erunt; [b] Eritq; vt α 4. ad 4. A, ita ϑ 4. ad 4.13. Quare cùm α A, in 4. ſecta ſit extrema ac media ratione, vt oſtẽdimus; eodem modo erit ſecta ϑ 13. in 4. Rurſus plano N Z, per centrum α, tranſeunti, parallelum ducatur planum p punctum 4. ex ſcholio propoſ.15.lib.11. ſecans planũ φ ϖ, recta 4.14. [c] Eſt autem eidem plano N Z, parallelum planum D B. [d] Rectæ igitur α A, ρ M, in eaſdem rationes ſecabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ρ M, in 14. ſecta erit extrema ac media ratione, minusq; erit ſegmẽtum 14. M, ideóque æquale minori ρ ϑ, ipſius M ρ. Quare cùm ex ρ 14. maiori ſegmento ipſius ρ M, auferatur ρ ϑ, minus ſegmentum; Erit, vt demonſtrauimus ad propoſ.5. lib. 13. ρ 14. diuiſa in ϑ, extrema ac media ratione, maiusque ſegmentum erit ρ ϑ. Poſtremò, acta per 13. recta 13.15. rectæ 4.14. parallela, [e] ſecabuntur rectæ ϑ 13, ϑ 15. proportionaliter Ac proinde & ϑ 15. ſecta erit in 14. extrema ac media ratione, maiusque ſegmentum erit ϑ 14. [f] Quapropter erit vt ρ ϑ, maius ſegmentum ad ϑ 14. minus, ita ϑ 14. maius ad 14.15. minus: Vt autem ϑ 14. ad 14.15. ita eſt tota ϑ 15. ad ϑ 14. maius ſegmentum. Igitur erit vt ρ ϑ, ad ϑ 14. ita ϑ 15. ad eandem ϑ 14. Ac propterea rectæ ρ ϑ, vel ρ κ, & ϑ 15. æquales erunt. Quoniam verò planum N Z, & planum illi parallelum per 4.14. ductum, ſecantur plano φ ϖ, [g] erunt communes ſectiones β ρ. 4.14. parallelæ, ideoq; & 13 15, β ρ, parallelæ erunt, [h] angulusq; externus β ρ κ, interno 13.15 ϑ, æqualis. Cũ igitur & latera β ρ, ρ κ, lateribus 13.15.15 ϑ, ſint æqualia, [i] æquales erunt quoq; rectæ β κ, 13 ϑ; Ac proinde & earũ ſegmenta maiora ϑ κ, ϑ 4. (Oſtenſum enim eſt ϑ κ, eſſe maius ſegmentum ipſius β κ.) æqualia erunt. Eadem arte & β 4. ipſi β γ, in prima figura oſtendetur æqualis, ſi ſimili ſitu triangulum Iſoſceles formetur ſuper baſim β γ, cuius vertex conſiſtat in puncto, quod rectam I S, diuidit extrema ac media ratione. Eodemq; modo eiſdem ϑ κ, β γ, æquales erunt κ 9 β 9. Æquilaterũ ergo eſt pentagonum β 4 ϑ κ 9; quandoquidẽ β γ, ϑ κ, rectæ æquales ſunt, cùm componantur ex minoribus ſegmentis linearum æqualium extrema ac media ratione ſectarum, quales ſunt Y V, Z V, ϖ ρ M ρ. Sed & æquiangulũ, vt mox oſtendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad ſingulas rectas M ϖ, Y Z, N R, I L, ξ O, K P; bina ipſi β ϑ κ, ſimilia, & æqualia conſtruantur, (Ita enim ad M ϖ, duo huiuſmodi triangula vides β ϑ κ, ϑ κ.) & ipſorũ officio duodecim pentagona ipſi β 4. ϑ κ 9, ſimilia & æqualia fabricentur, conſtituetur Dodecaedrũ, cuius duodecim quidẽ anguli in ſex rectis lineis M ϖ, Y Z, N R, I L, ξ O, K P, bini nimirũ in ſingulis, octo verò reliqui in octo ſemidiametris cubi conſiſtũt, nempe in punctis, q̃ ipſas extrema ac media ratione diuidũt, qualia ſunt puncta 4. & 9. in ſemidiametris A α, & H α, ſecundæ figuræ; Ac proptereà quodammodo inſcriptũ eſſe dicetur cubo huiuſmodi Dodecaedrũ, quamuis non ꝓpriè, cùm non omnes eius anguli vel in angulis, vel lateribus, vel deniq; in planis cubi conſtituãtur, ſed 12. quidẽ in ſex planis cubi, octo verò in punctis, quæ octo ſemidiametros cubi extrema ac media ratione ſecant, reſideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[a] 16. vndec.
[b] 4. ſexti.
[c] 15. vndec.
[d] 17. vndec.
[e] 2. ſexti.
[f] 2. quartidecimi.
[g] 16. vndec.
[h] 29. primi.
[i] 4. primi.

LEMMA.

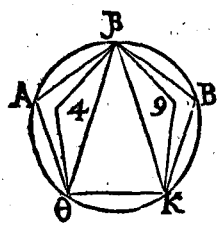
Quod adiẽ triangulũ β ϑ κ, cuius baſis ϑ κ, maius ſegmẽtum exiſtit vtriuſq; lateris β ϑ, β κ, extrema ac media ratione diuiſi ſimile ſit illi, quod Euclides conſtruxit propoſ.10. lib.4. ita demonſtrabimus. Deſcribatur circa triangulum Iſoſceles A B C, quale Euclides conſtruere docet propoſ.10. lib.4. circulus A D B C E, diuiſiſq; angulis A B C, A C B, bifariã rectis B E, C D, perficiatur pentagonũ æquilaterũ & æquiangulũ A D B C E, vt propoſ.11. lib.4. tradimus, ſecentq; ſe mutuò



rectæ AB, CD, in F. [a] *Quoniã ergo A B, in F, ſecatur extrema ac media ratione, maiusq; eius ſegmentum eſt AF, æquale lateri BC:* [b] *Erit vt AB, tota ad maius ſuũ ſegmentũ B C, ita C θ, tota ad maius ſuum ſegmentũ ϑ κ; Eodemq; modo, vt tota A C, ad maius ſegmentum C B, ita β κ, tota ad maius ſegmentũ κ θ: Eſt autẽ quoq; vt AB, ad AC, ita β θ, ad β κ, vtrobiq; enim eſt proportio æqualitatis. Triangula igitur β θ κ, A B C, proportionalia habentia latera æquiangula ſunt, æqualesq; erunt anguli θ, B; Item κ, C, & β, A; propterea q; vterq; angulorum θ, κ, duplus erit anguli β; & triangula β θ κ, A B C, ſimilia.*

[a] 8. tertijdecimi.
[b] 2. quartidecimi.

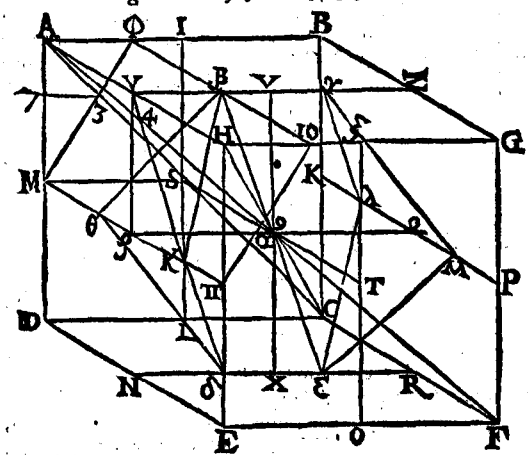
PENTA-



PENTAGONVM verò β 4 ϑ κ 9, æquilaterum, esse quoq; æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum β ϑ κ, circulus β A ϑ κ B; qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex ijs, quæ ad propos. 10 lib. 4. docuimus, pentagonum, æquiangulum esse. Si verò non incedat per puncta 4, & 9. describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum β A ϑ κ B. Quoniam igitur tam recta A ϑ, A β, quàm recta 4 ϑ, 4 β, æquales sunt rectæ ϑ κ, cùm & β 4 ϑ κ 9, & β A ϑ κ B, pentagonum sit æquilaterum; Erunt tamdua rectæ ϑ A, ϑ 4, quàm duæ β A, β 4, æquales. quod fieri nõ posse demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo circulus triangulo β ϑ κ, circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4 ϑ κ 9, æquiangulum est.

SCHOLIVM.

Ex his colligere licebit sequentes propositiones.



I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri β ι, intelligatur q3 cõiuncta recta γ ι, [a] *æqualis existens & parallela lateri cubi V X, q3 & V γ, X ι, æquales sint, & parallelæ. Quoniam igitur angulus β V X, rectus est;* [b] *rectus quoq3 erit angulus β γ ι, ad γ, constitutus;* [c] *Ac proinde quadratũ diametri β ι, æquale erit quadratis laterum β γ, γ ι, nempe Dodecaedri, & cubi.*

a 33. primi.
b 29. primi
c 47. primi.

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Maius verò segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti.

IN eadem enim prima figura, [d] *cùm sit vt Υ V, ad β V, ita Υ Z, dupla ipsius Υ V, ad β γ, duplam ipsius β V; Sit autẽ β V, minus segmentum ipsius Υ V, secta extrema ac media ratione: Erit & β γ, minus segmentum lateris cubi Υ Z, secti extrema ac media ratione; composita verò ex Υ β, γ Z, hoc est, recta β κ, (quæ dupla fuit ostensa ipsius Υ β, idem q3 composita ex Υ β, γ Z, æqualis) maius segmentum. Constat autem ex constructione β γ, esse latus Dodecaedri,* [e] *& β κ, seu β ϑ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cùm subtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel β 4 ϑ.*

d 15. quinti
e 8. quinti decimi.

III.

LATVS cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi Υ Z, componitur ex latere Dodecaedri β γ, in ipso descripti, & ex recta composita ex Υ β, γ Z; quã constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cùm enim Υ Z, cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, vt perspicuum est ex 8. propos. huius lib. [f] *Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris Υ Z, secti extrema ac media ratione: Erit β ϑ, existens quoq3 maius segmentum eiusdem lateris Υ Z, & æqualis duabus Υ β, γ Z, simul, vt iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris Υ Z, circumscripti.*

f 8. tertij d.

IIII.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

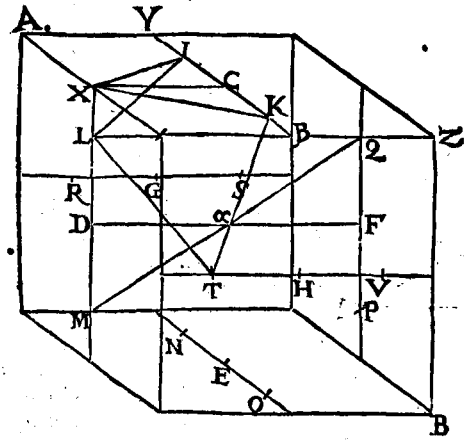
IN prima enim figura, recta connectens puncta β, ϑ, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri ϑ κ, oppositi, & æqualis est rectæ V X, (quòd & β V, ϑ X, æquales sint, & parallelæ) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

g 33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrum describere.

CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, p cuius basium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquã inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V; quorũ quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, K, T, & R; R, cũ L, M, I, & N, &c. vt constituãtur viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVK, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora verò octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Connectantur iam rectæ XC, XI, XK. Quoniam igitur
a 29. primi. latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia sunt lateribus XC, CK, trianguli XCK; a & anguli conten-
b 4. primi. ti, recti, q XC, parallela sit ipsi AY; b Erunt & bases XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta



c 4. primi.
d 47. primi.

est ad planum AZ, per defin. 4. lib. 11. recta quoq; erit ad lineas XI, XK; Ac propterea cũ latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia sint lateribus LX, XK, trianguli LXK, & anguli contenti, recti; c æquales erũt bases LI, LK. Rursus d quoniam quadratũ rectæ LI, æquale est quadratis rectarum LX, XI; Et quadratũ rectæ LX, quadrato rectæ IY; quadratum verò rectę XI, quadratis rectarum XC, CI, est æquale: Æquale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarũ XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, q eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratũ rectæ LI, æquale est tribus quadratis rectarũ CY, CI, IY: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectę CI; (e Cùm enim quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ CI, ma-
e 4. 12. elem. ioris segmenti; Addito quadrato rectæ CI, illis duobus; erũt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiusdem quadrati rectæ CI) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum est quoq; quadrati rectæ CI; Ac propterea, cùm eiusdem quadrati rectæ CI, quadruplum sit quadratum rectæ
f KI, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æquales erunt quadrata rectarum LI, IK, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Æquilaterum igitur est triangulum IKL, lateri cubi AG, subtratum.

NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi suppositis, esse æquilatera; Atq; adeo inter se æqualia, cùm eorũ latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia sint. Quoniam verò latera reliquorum octo triangulorũ, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo KTL, latus KL, cõmune est triangulo IKL, & latus KT, triangulo TVK; & latus TL, triangulo LMT; perspicuũ est, ea quoq; esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cùm eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bi bi nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS *ex hoc, propositiones sequentes.*

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

a 33. primi. *DVCTA enim recta LQ, a qua lateri cubi DF, parallela est, & æqualis, q & DL, FQ, parallelæ sint, &*
b 47. primi *æquales; b manifestum est, quadratũ diametri QM, æquale esse quadratis rectarum LM, lateris Icosaedri, &*
c 29. primi. *EQ, lateris cubi, in quo Icosaedrum descriptũ est, c cùm angulus MLQ, sit rectus, quòd & LDF, rectus sit.*

II.

BIFARIAE sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis, æqualibus, seseq; in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ, nimirum DF, CE, GH, cùm coniungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, sesecq; per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quòd sit a, diuidunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta a P. Quoniam latera a F, FQ, trianguli a FQ, æqualia sunt lateribus a F, FP, trianguli a FP, angulosq; comprehendũt rectos,
d 4. primi. *d æquales erunt rectæ a Q, a P. Eademq; ratione æquales erunt omnes rectæ ex a, ad angulos Icosaedri prodeuntes. Igitur a, centrum est Icosaedri.*

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM

Cvm enim CI, sit maius segmentum rectæ CY; a sitq; vt CI, ad CY, ita KI, dupla ipsius CI, ad BY, dupla ipsius CY; b erit quoq; KI, latus Icosaëdri, segmentum maius lateris cubi BY. a 15. quinti. b 2. quartidecimi.

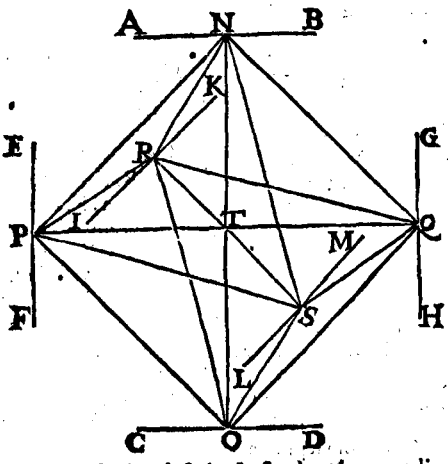
IIII.

Icosaedri tam latera, quàm triangula opposita, inter se sunt parallela.

Si enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta, duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter se æqualia, angulosq; alternos habentia æquales, ex 4. propos. lib. 1. quæ quidem in centro conueniunt. Quare qualibet latera opposita parallela erunt; c Atq; idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela. c 15. vndec.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

In dato Icosaedro Octaedrum describere.



Exponantvr dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita, AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales, sese in centro T, bifariam, & ad angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos. præcedentis ostensa sunt; ducanturq; rectæ NP, NR, NS, NQ; OP, OR, OS, OQ; PR, PS; QR, QS, constituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN; RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia sunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cũ sint rectarũ æqualium dimidia.) angulosq; continent rectos, vt dictũ est; a Æquales erũt bases NS, NP: Eodemq; modo reliquæ oês lineæ æquales erũt & hisce duabꝰ, & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt, & inter se æqualia; Ideoq; Octaedrum constituunt. a 4 primi.

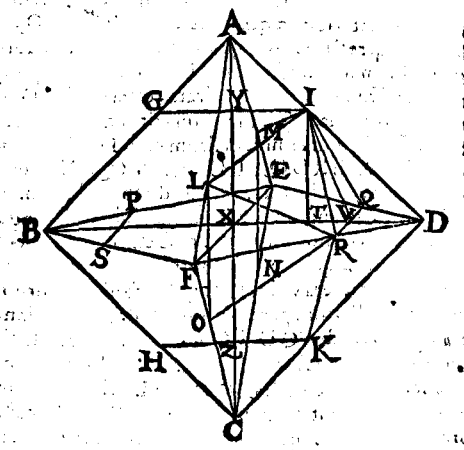
Quod in Icosaedro descriptũ est, cùm eius anguli resideant in bifariis sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaque Icosaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Sequitvr hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrũ Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS, sibi inscripti. Quare T, centrũ Icosaedri, vbi se intersecant, centrũ quoq; est Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

In dato Octaedro Icosaedrum describere.



Datvm Octaedrum, in quo describẽdum est Icosaedrum, sit ABCDEF. Cùm à quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur à singulis bina non proxima, sed sibi è regione respondentia, hoc est, quę ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt BA, BC; DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD; AF, AE; CE, CF, iuxta angulos oppositos A, C, quadrati AECF: (Nam à quolibet angulo sumenda sunt tantùm duo latera; at verò latera AB, AD; CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eosdem angulos A, C, iam sumpta fuêre.) EB, ED; FD, FB, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati EBFD; (Nam latera EA, EC; FC, FA, quadrati AECF, iuxta eosdem angulos, E, F, iam accepta sunt.) quæ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmẽta sint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & à singulis ad quinque proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint

in figura, ad euitandam linearũ confusionem. Quę autẽ sint hæc quinq; puncta proxima, puloere indicat Octaedrum materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quę cum eo, in quo punctum acceptũ est, pyramidem constituunt; alia autẽ duo sunt in duobus lateribus duorum triangulorum Octaedri, quæ habẽt cõmune illud latus, in quo punctum acceptũ est. Vt quia punctum acceptum est R, in latere D F, quod cum tribus D E, D A, D C, pyramidem constituit in vertice D, & est cõmune triangulis Octaedri D F A, D F C: propterea ex R, ad quinq; puncta horũ quinque laterũ ductę sunt lineę rectæ, & sic de cæteris. Post hæc, ductis tribus Octaedri diametris A C, B D, E F, sese in centro X, secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quarum A C, B D, secant rectas G I, R Q, in Y, & V; connectaturq; recta I V, agaturq; I T, parallela ipsi Y X. Quoniam ergo latera D Q, D I, trianguli D Q I, æqualia sunt lateribus D R, D I, trianguli D R I, (Sunt enim D Q, D R, minora segmẽta rectarũ æqualium D E, D F,) & angulos comprehendunt

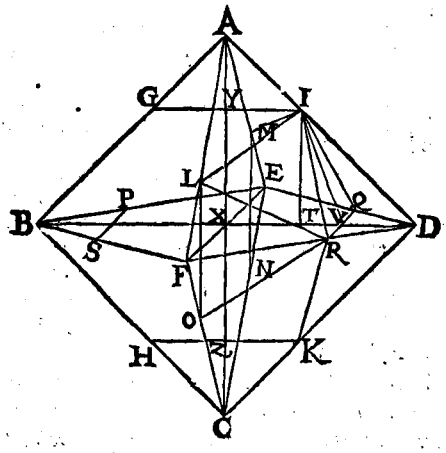
a 4. primi. æquales, nempe triangulorũ Octaedri A D E, A D F; *a* Erunt bases I Q, I R, æquales. Deinde cùm

b 2. quarti decimi. sit, *b* vt B G, ad G A, ita D I, ad I A; *c* erit G I, rectæ B D, parallela. Eademq; ratione Q R, ipsi E F, parallela; *d* Ac proinde vt D I, ad I A, ita X Y, ad Y A. Recta igitur X A, secta erit in Y, extrema ac media

c 2. sexti. ratione. Rursus, quia est vt A X, ad X D, ita A Y, ad Y I, (quòd triangulum A Y I, simile sit triangulo

d 4. sexti. A X D, p coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autẽ A X, ipsi X D, æqualis; Erit & A Y, ipsi Y I, æqualis. Quare Y I, minus segmẽtum est rectæ X A. Non aliter ostendemus A Y, ipsi Y G, esse æqualem; ideoq; G I, rectam, bifariam in Y; similiterque Q R, in V, secari. Cùm verò latera A G, A I, trianguli A G I, æqualia sint lateribus D Q, D R, trianguli D Q R, (nimirũ minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) angulosq; comprehendant rectos, nempe quadratorum A B C D, D E B F,

e 4. primi.



e Æquales erũt bases G I, Q R. Eadem ratione his æquales ostendentur rectæ H K, P S, M N, L O, quę nimirũ subtendunt reliquos quadratorum A B C D, D E B F, A E C F, angulos, in singulis videlicet quadratis binos oppositos, complectunturq; duo segmenta laterũ minora. Deinde quia Y I, minus segmentum ipsius X A, ostensum, maius est segmentum maioris segmenti X Y, diuisi extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. Est autem X Y, rectæ X V, æqualis, (cùm ambæ sint maiora segmẽta æqualium rectarũ X A, X D.) *f* & Y I, rectæ X T; erit X T, maius segmentum ipsius X V; & idcirco T V, segmentum minus eiusdem X V. Quare quadrata rectarum X V, totius, hoc est, ipsius I T, (*g* cùm & recta I T, æqualis sit ipsi X Y.) & T V, minoris segmenti, *h* tripla sunt quadrati rectæ X T, maioris segmenti; Atq; adeò quadratũ rectæ I V, *i* æqua-

f 34. primi.

g 34. primi.

h 4. tertij.

i 47. primi. le existens quadratis rectarum I T, T V, triplum est eiusdem quadrati rectæ X T, hoc est, rectę R V, quæ æqualis est ipsi X T, seu ipsi Y I, ex demonstratis, cùm R V, Y I, dimidia sint æqualium rectarum R Q, G I. Addito igitur quadrato rectæ R V, ipsi quadrato rectæ I V; erunt quadrata rectarum I V, V R, quadrupla quadrati rectę R V: *k* At quadratis rectarum I V, V R, æquale est quadratum rectæ I R, *l* quòd anguli I V R, I V Q, comprehensi lateribus æqualibus I V, V R; I V, V Q, & subtensi basibus æqualibus I R, I Q, æquales sint, ideoq; recti. Ergo & quadratũ rectæ I R, quadruplum est quadrati rectæ V R; Ac propterea cùm eiusdem quadrati rectæ V R, quadruplum quoq; sit, per scholium propos. 4. lib. 2. quadratũ rectæ Q R; Æqualia erũt quadrata rectarum I R, Q R, ideoq; & rectæ ipsæ æquales: Erat autem I Q, ipsi I R, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum est I Q R. Non secus demonstrabimus, æquilatera esse triangula similem situm cum I Q R, habentia, nempe K Q R; G I L, G I M; G P S, H P S; N H K, O H K; R L O, S L O; P M N, Q M N; atque adeò triangulo I Q R, æqualia, cùm latera omnium sint æqualia inter se. quòd tamen hac etiam ratione demonstrabimus. Cùm enim in quolibet horum triangulorũ vnum latus subtendat angulum rectum quadrati, comprehensum duobus segmentis minoribus laterum Octaedri; duo verò reliqua subtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorũ, contentos singulos duobus segmentis laterũ Octaedri, maiore & minore: Erunt latera vnius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per corollarium propositionis 8. lib. 1. Vt in triangulis I Q R, G I L, latera R Q, G I, subtendentia angulos rectos Q D R, G A I, quadratorum D E B F, A B C D, comprehensos minoribus segmentis D Q, D R; A G, A I, æqualia sunt. Eodem modo latera I Q, I L, æqualia erunt, cùm subtendant angulos æquales I D Q, I A L, triangulorum æquilaterorum A D E, A D F, quorum ille continetur segmentis laterum Octaedri D I, D Q, maiore & minore; hic verò segmentis A L, A I, maiore & minore quoque. Non secus latera I R, G L, æqualia erunt. Æqualia igitur sunt triangula I Q R, G I L, per corollarium propositionis 8. libri 1. Atqui I Q R, ostensum est esse æquilaterum; Ergo & G I L, æquilaterum est. Eademq; est ratio de cæteris habenda. Atq; hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina

k 47. primi.

l 8. primi.

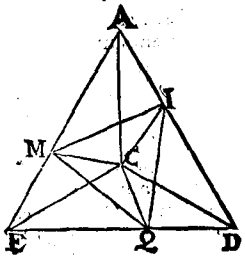
videlicet

videlicet singulis. Ex his cõsequitur reliqua octo triãgula, octo basibus Octaedri imposita; videlicet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ, in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoq; esse, & prædictis æqualia, cùm horum latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum Octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi, (vt vides in quinque RQI, RIL, RLO, ROK, RKQ, solidum angulum R, componentibus.) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum, cùm Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. In dato itaque Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonstratis, si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmẽtum, alterius verò minus, sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cùm enim in triangulo æquilatero A D E, maius segmentum lateris A D, sit D I, & D Q, minus lateris D E; Sit autem recta I Q, ostensa æqualis rectæ G I, quæ duplum potest minoris segmenti A I, [a] *cùm quadratum rectæ G I, æquale sit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium A G, A I: Perspicuũ est, & rectam I Q, duplum posse eiusdem segmẽti minoris A I.* [a] 47. primi

COROLLARIVM II.



RVRSVS fit, cùm octo Icosaedri bases collocatæ sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namque Octaedri superioris triangulum A E D, in quo collocatum est triangulum Icosaedri I M Q, sitq; C, centrum trianguli A E D, ex quo rectæ educantur C A, C E, C D; C I, C M, C Q. Quoniam igitur latera C A, A M, trianguli C A M, æqualia sunt lateribus C E, E Q, trianguli C E Q, (quòd hæc latera sint ex centro, & maiora segmenta æqualium rectarum.) angulosq; comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in scholio propos. 12. lib. 13. ostendimus; Erunt bases C M, C Q, æquales. Non secus demonstrabimus C I, æqualem esse lineis C M, C Q. Quare C, centrum erit trianguli I M Q.

COROLLARIVM III.

NON difficile est denique ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunque duos angulos Icosaedri, nimirum rectis X G, X O, ad angulos G, & O; cùm latera X A, A G, trianguli X A G, æqualia sint lateribus X F, F O, trianguli X F O, (Nam X A, X F, semidiametri sunt Octaedri, & A G, F O, segmenta minora laterum æqualium Octaedri, sectorum extrema ac media ratione.) angulosq; complectantur æquales, semirectos videlicet; (cùm A C, E F, diametri sint quadratorum A B C D, E A F C; ac proinde, per demonstrata in scholio propos. 34. lib. 1. anguli quadratorum bifariam secent.) [b] *æquales erunt & bases X G, X O. Eodemq; argumento ostendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icosaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.* [b] 4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

[a] INSCRIBATVR dato Octaedro Icosaedrum; [b] & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factúmque erit, quod iubetur. Cùm enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concentrice sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centris octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere: Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quanquam non propriè, vt ex defin. 11. lib. 11. apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

[a] 16. quintidecimi. [b] 5. quintidecimi.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data Pyramide cubum describere.

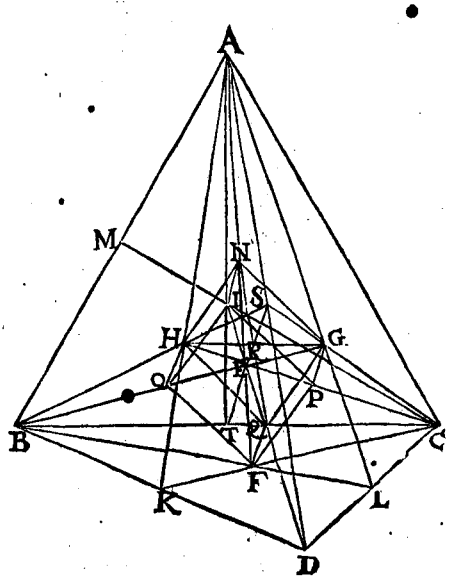
DATVR pyramis A B C D, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex

a 15. quarti decimi. quatuor angulis Pyramidis rectæ educantur AEF, BEG, CEH, DEI, [a] quæ cadent in centra baſium oppoſitarum F,G,H,I, eruntque perpendiculares ad eaſdem baſes BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porrò ex angulis A,B,C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, ſecantes baſes oppoſitas BD, CD, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectæ ex ſolidis angulis per centrum E, demiſſæ AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris baſium (centris, inquam, baſium ipſam lineam, in qua punctum eſt, circumſtantium, ita vt relinquatur centrum illius baſis, in quam perpendicularis cadit.) rectis lineis coniungantur, vt N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico ſolidum NF, contentum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubum eſſe. Cùm enim latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia ſint lateribus AF, FL, trianguli AFL, (quòd FK, FL, cùm perpendiculares ſint ad BD, CD, ex centro F, ductæ, oſtendant æquales diſtantias rectarum æqualium BD, CD, à centro F.) angulosque contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. [b] Æquales erunt & baſes AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rurſus, quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia ſunt lateribus AN, AG, trianguli ANG, (ſunt enim AH, AG, ſemidiametri triangulorum æquilaterorũ æqualium ABD, ACD.) angulos item comprehendunt æquales, vt demonſtrauimus; [c] Æquales erunt baſes NH, NG. Haud ſecus oſtendentur æquales rectæ QG, QH, ſi rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cùm omnes ſubtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehenſos; vt perſpicuum eſt. Si enim recta ducatur FT, cùm latera AF, FT, æqualia ſint lateribus AF, FK, (Sunt namque FT, FK, diſtantiæ rectarum æqualium BC, BD, à centro.) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cùm latera AN, AI, æqualia ſint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, ſemidiametri triangulorum æquilaterorũ æqualium ABC, ABD;) angulosq; contineant æquales: [d] Æquales erũt baſes NI, NH, &c. Sunt igitur ſex dicta quadrilatera, æquilatera. Oſtendamus iam, ipſa plana eſſe, atque rectangula, vt tandem quadrata eſſe concludamus, atque adeò componere cubum NF.

b 4. primi.

c 4. primi.

d 4. primi.



Assvmatvr quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, oppoſita ſunt, hoc eſt, non coeuntia in aliquo puncto; ſi eorum puncta media S, & T, coniungantur rectæ ST, erit ea diameter Octaedri in pyramide deſcripti, vt conſtat ex figura propoſ. 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ reſpondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cùm & in illa ſint latera oppoſita, ſiue non coeuntia BC, AD. Quocirca cùm idem ſit centrum pyramidis & Octaedri in ipſa deſcripti, vt mox demonſtrabimus, tranſibit ST, per E, centrum Pyramidis, æqualesq; erunt ES, ET, nempe ſemidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares ſunt ad AD, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. [e] erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter ſecantur, [f] atque idcirco HG, parallela eſt lateri BC, ſecatq; latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars eſt trianguli BSC.) proportionaliter; ideoque & SR, tertia pars eſt ipſius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rurſus, [g] quia DI, perpendicularis eſt ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars ſemidiametri DE, ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. hoc eſt, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4, recta DI, ideoq; eius dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1. atque idcirco EQ, tertia pars erit ipſius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipſius AE; Ac propterea, cùm latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter ſecentur, [h] recta NQ, parallela erit lateri AD, ſecabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidem pars eſt trianguli AED.) proportionaliter, ideoque, cùm EQ, ſit tertia pars ipſius DE; tertia pars erit ER, ipſius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiuſdem SE. Quoniam igitur vtraque HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abſtulit, in eodem puncto R, ſecabitur SE, à rectis HG, NQ. Atque idcirco & ipſæ HG, NQ, in eodem ſeſe puncto interſecabunt. [i] Quare in eodem ſunt plano, propterea; & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipſis plano. Planum igitur eſt quadrilaterum NQ. Eademque eſt ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum ſit, nunc demonſtremus.

e 18. quarti decimi.

f 2. ſexti.

g 15. quarti decimi.

h 2. ſexti.

i 2. vndec.

Cvm oſtenſa ſit HG, ipſi BC, parallela, atq; adeò triangulum SHG, ſimile triangulo SBC, ex

k 2. ſexti. coroll. propoſ. 4. lib. 6. [k] Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutãdo, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC:

ad B C: Est autem S H, tertia pars ipsius S B: Igitur & H G, tertia pars erit lateris BC. Haud secus ostendemus N Q; tertiam esse partem lateris A D. Cùm ergo latera B C, A D, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes H G, N Q, æquales. Ac proinde cùm subtendantur æqualibus lateribus H N, G N; G Q, H Q; N G, Q G; N H, Q H; [a] Æquales erunt quatuor anguli, H N G, N G Q, G Q H, Q H N. Quocirca cùm ipsi sint quatuor rectis æquales, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. recti erunt; ideoq; quadratum erit N Q. Eademq; ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent; qui ideò pyramidi dicetur inscriptus, licet impropriè, quòd quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor basium pyramidis, quatuor verò reliqui N, O, P, Q, in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, vt constat. [a] 8. primi.

ALITER. In data pyramide describatur Octaedrum, & in hoc Octaedro cubus; factumq; erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in centris octo basium Octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex propos. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus; fit, vt quatuor anguli cubi resideât in centris quatuor basium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonstratione dictum est. Rursus, quia reliquæ quatuor bases Octaedri parallelæ sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. ([b] cùm enim rectæ E G, E H, parallelę sint rectis B C, B D; [c] erunt quoq; triangula E G H, B C D, per illas rectas ducta, inter se parallela, & sic de cæteris.) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoque ad illas quatuor reliquas bases Octaedri perpendiculares, ex scholio propos. 14. lib. 11. Quare cùm prædictæ bases abscindant ex pyramide pyramides similes toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum basium, quemadmodum & in centra basium totius pyramidis cadunt. [d] Et quia dictæ quatuor bases Octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc est, bifariam; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi statuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonstratio docuit. Constat ergo cubum in pyramide esse descriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat. [b] 2. sixti. [c] 15. vndec. [d] 17. vndec.

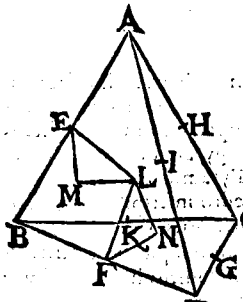
COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi N F, O G, P H, Q I, cùm sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, per E, centrum pyramidis transeunt.

COROLLARIVM II.

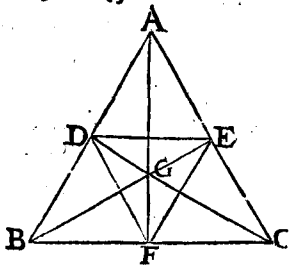
INTERTVR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamq; esse lateris cubi in pyramide descripti. Cùm enim E R, ex E, centro cubi, in R, centrum basis G N H Q, ducta, dimidium sit lateris cubi, vt constat; Recta R S, dupla ipsius E R, æqualis erit lateri cubi. Cùm igitur R S, ostensa sit tertia pars ipsius S T; perspicuum est, rectam S T, coniungentem S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis A D, B C, transire per centrũ pyramidis, triplamq; esse lateris cubi R S.

LEMMA.



IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemq; centrum basis pyramidis, & basis Octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primùm pyramis A B C D, cuius omnia sex latera bifariam secentur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro Pyramidis in bases A B D, B C D, perpendiculares demittantur L M, L N, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex corollario lemmatis primi, propositionis decimæ, libri decimiquarti. Coniunctis autem rectis L E, E M, L F, F N; quoniam latera L M, M E, trianguli L M E, æqualia sunt lateribus L N, N F, trianguli L N F, (cùm enim circuli bases A B D, B C D, circumscribentes sint æquales, æqualiter distabunt ipsi à centro L, per lemma secundũ, propositionis 10. lib. 14. Ac propterea eorum distantiæ L M, L N, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt M E, N F, distantiæ rectarum æqualium A B, B D, à centris M, & N, circulorum æqualium) angulosq; comprehendunt rectos, per defin. 3. lib. 11. [a] Æquales erunt recta L E, L F. Eademq; ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ L G, L H, L I, L K. Quare cùm anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat; Erit L, centrum [a] 4. primi.

Octaedri, cùm ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cùm igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit centrum pyramidis & Octaedri in ea descripti.

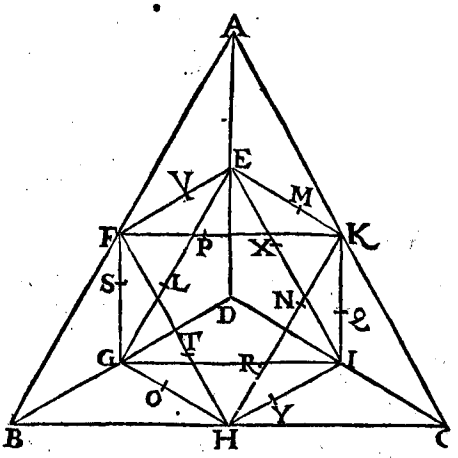


2 4. primi.

Sit deinde in basi pyramidis A B C, basis Octaedri D E F, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex propos. 2. huius lib. sit autem G, centrum trianguli A B C, à quo ad angulos vtriusque basis rectæ ducantur. Quia igitur latera A G, A D, lateribus B G, B F, æqualia sunt, angulosq; continent æquales, nimirum semisses angulorum æqualium trianguli aquilateri [a] erunt & bases G D, G F, æquales: Eademq; ratione erit G E, vtrique G D, G F, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli D E F. quod est propositum.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

In data Pyramide Icosaedrum describere.



a 2. quinti-decimi.

Datæ Pyramidi A B C D, [a] inscribatur Octaedrum E F G H I K, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorũ Octaedri cadentia, vt in propos. 16. huius lib. diximus, qualia sunt E G, E K; H K, H G; K F, K I; G I, G F; F H, F E; I E, I H, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinq; proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M. cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrum in dicto Octaedro, vt constat ex propos. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis sectionibus duodecim laterum Octaedri. Cùm ergo hæc ipsa latera Octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quod & terna latera Octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi A B C, existũt latera F H, H K, K F; In A B D, latera E F, F G, G E; In B D C, latera G H, H I, I G; In A D C, denique latera I K, K E, E I. Quare dictum Icosaedrum in Pyramide descriptum erit, per defin. 11. lib. 11. cuius quidem quatuor bases M X Q, R O Y, L S V, N P T, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt constat. In data igitur Pyramide Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

In data Pyramide Dodecaedrum describere.

b 19. quintidecimi.
c 5. quintidecimi.
d 8. quintidecimi.
e 18. quintidecimi.

Pyramidi datæ [b] inscribatur Icosaedrum, [c] & in hoc Dodecaedrum habens, viginti suos angulos in centris viginti basium Icosaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cùm enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti propos. diximus; consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde, [d] quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, [e] quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifariis sectionibus perpendicularium dictarum: Superfunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur. Atque adeo dictum Dodecaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiam si non propriè. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

13.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

In dato solido regulari sphæram describere.

Ex cen-

Ex centro ſphærę datum ſolidum complectentis ad ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum baſes circumſcribentium, ideoque æquales erunt, quòd dicti circuli, æquales cùm ſint, æqualiter à centro diſtent, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares æquales, in ſolido deſcripta erit, cùm eius ſuperficies conuexa ſingulas baſes in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cùm quodlibet quinque ſolidorum regularium in quatuor reliquis inſcribatur, vt ſint in vniuerſum viginti inſcriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum impropriè deſcribitur in cubo, Octaedro atque Pyramide, vt perſpicuum eſt ex propoſ. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantum Octaedrus in Pyramide impropriè deſcribitur, vt ex propoſ. 18. huius lib. eſt manifeſtum. Nam vt propriè ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti conſtitui vel in angulis, vel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, vt defin. 31. lib. 11. expoſuimus: quæ quidem Dodecaedro, ſi deſcribatur in cubo, Octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Pyramide, non conuenit.

CAETERVM inter omnia quinque ſolida regularia, vnum Octaedrum reliqua quatuor mutuò ſibi inuicem ſuſcipit inſcripta. [a] *In Octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens duodecim ſuos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera Octaedri extrema ac media ratione ſecantur. Deinde* [b] *Icoſaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem Octaedro inſcriptum eſt, vt conſtat ex propoſ. 17. huius lib. Poſt hæc in Dodecaedro* [c] *deſcribitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra baſium Octaedri poſident; ac propterea & cubus ipſe in Octaedro deſcriptus eſt.* [d] *Denique in cubo Pyramis includitur, quæ ideò in Octaedro dicetur eſſe deſcripta, quòd eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor baſium Octaedri reſideant. Hoc autem priuilegium reliquis ſolidis regularibus denegari, perſpicuum eſt ex dictis.*

a 15. quintidecimi.
b 5. quintidecimi.
c 8. quintidecimi.
d 1. quintidecimi.

NEQVE verò prætereundum eſt, Dodecaedrum, ſibiq; inſcriptum cubum, & huic cubo inſcriptam pyramidem, eadem ſphæra comprehendi. [e] *Cùm enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor poſſideant,* [f] *conueniantq; omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquidò conſtat, ſphæram Dodecaedro circumſcriptam complecti quoq; cubum atque Pyramidem, cùm ſphæra illius ſuperficies per horum ſolidorum angulos incedat.*

e 1. quintidecimi.
f 8. quintidecimi.

PARI ratione ex dictis manifeſtum eſt, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem ſimiliter inſcribi Icoſaedro, Octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum baſium centris conſtituuntur, vt demonſtratum eſt: In centris quidem baſium Icoſaedri, propoſ. 5. 11. & 12. In centris verò baſium Octaedri, propoſ. 17. 4. & 6. In centris denique baſium pyramidis propoſ. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porrò prioribus huius lib. propoſitionibus omnes delineationes inſcriptionéſve quinque ſolidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari poſſunt, abſoluimus, cùm in quolibet reliqua quatuor deſignauerimus. In Pyramide enim Octaedrum, cubum, Icoſaedrum, atque Dodecaedrum, propoſ. 2. 18. 19. 20. In Octaedro verò, Pyramidem, cubum, Icoſaedrum, & Dodecaedrum, propoſ. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icoſaedrum, ac Dodecaedrum, propoſ. 1. 3. 14 13. In Icoſaedro autem, Pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propoſ. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icoſaedrum, propoſ. 10. 9 8. 7. deſcripſimus. At verò poſteriori vnica propoſitione, qua arte in quouis ſolido regulari ſphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM:

Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuò inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Franciſco Fluſſate Candalla adiectum; & de quinque corporibus,

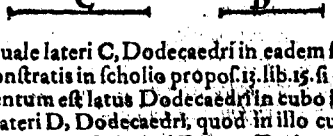
LIBER TERTIVS.

VEMADMODVM libro 14. tradita ſunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem libro 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuò inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit; vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hæc quinque corporum regularium, ſi liber hic decimuſextus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

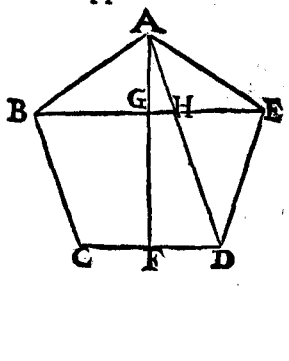
SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, q̃ habet maius ſegmentũ ad minus rectę lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit A B, & latus Dodecaedri in cubo lateris A B, deſcripti ſit D: diuidaturq; A B, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quã habet A E, maius ſegmentum ad E B, minus. Cùm enim, vt in ſcholio vltimæ propoſ. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubusq; in illo deſcriptus, eadem comprehendantur ſphęra: Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadẽ ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13, erit A E, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demonſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti: erit E B, minus ſegmẽtum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur: Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumſcripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inſcripti, vt A E, maius ſegmẽtum ad E B, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris ſegmenti A E, ad minus ſegmentum E B. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.



IN pentagono æquilatero, & æquiangulo A B C D E, ex angulo A, ad latus oppoſitum C D, perpendicularis demittatur A F. Dico A F, à recta B E, ſubtendente angulum A, ſecari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta A D, quæ ſecet B E, in H; quoniam B E, recta lateri C D, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. eſt parallela, [a] ſecabuntur rectæ A F, A D, proportionaliter: [b] Atqui A D, in H, ſecta eſt extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum D H. Igitur & A F, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

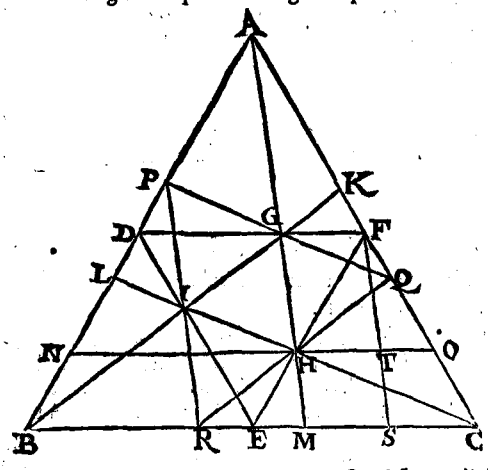
a 2. ſexti.
b 18. tertiidecimi.

THEOR.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentū vnius lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta Pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli Pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM Pyramidis sit A B C, cuius latera secētur bifariam in D, E, F, iunctis rectis D E, E F, F D, quibus rursum sectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ G H, H I, I G, constituentes G H I, triangulum Icosaedri in dicta Pyramide descripti, vt constat ex propos. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis B K, C L, A M. Dico has rectas suis sectionibus producere triangulum Icosaedri G H I, hoc est, rectam B K, transire per puncta G, I; & rectam C L, per puncta H, I; & rectā A M, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta N O, ipsi B C, parallela; erit triangulum F H O, triangulo F E C, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. ideoq; & æquilaterum, cùm & F E C, æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo A B C, per idem coroll. Quare H O, recta æqualis est rectæ F H, maiori segmento rectæ F E, seu D F, ipsi æqualis: (Est enim & D E F, triangulum æquilaterum, cùm eius latera subtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis scilicet æqualium laterū eiusdem trianguli comprehensos; [a] ideoq; æqualia sint.) [b] Est autē & N H, æqualis toti D F, in parallelogrammo D H, [c] propterea quòd F H, D F, parallelæ sunt rectis A B, B C, seu N O. Igitur recta N O, composita ex N H, tota, & H O, maiori segmento, [d] secta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cùm tres parallelæ B C, N O, D F, similiter sint sectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem A M, ex iis, quæ demonstrauimus ad propos. 4. lib. 6. secet easdem similiter; liquidò constat, ipsam A M, transire per puncta G, H. Haud secus ostendemus B K, per puncta G, I, & C L, per puncta H, I, transire, si per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus A C, A B; Atque idcirco rectæ B K, C L, A M, suis sectionibus producent triangulum Icosaedri G H I.

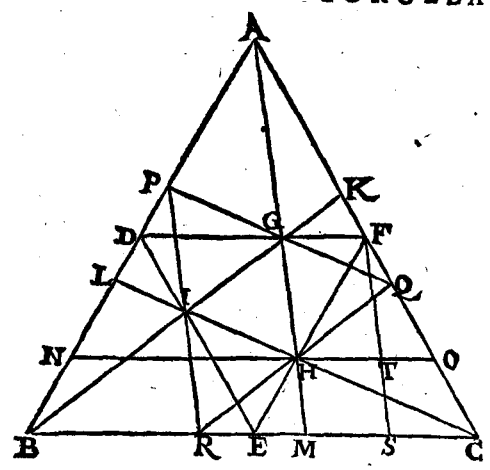


[a] 4 primi.
[b] 34. primi.
[c] 2. sexti.
[d] 5. tertiædecimi.

AGATVR iam per G, recta P Q, rectæ C L, parallela. Quoniam igitur A F, æqualis est rectæ D F, seu rectæ F E, cuius maius segmentum fuit F H, hoc est, F O, illi æqualis; Erit quoq; F O, maius segmentum rectæ A F; [e] ac proinde tota A O, secta in F, extrema ac media ratione; [f] Est autem vt A F, ad F O, ita A G, ad G H, ob triangulum A H O; & vt A G, ad G H, ita A Q, ad Q C, & A P, ad P L, ob triangula A H C, A H L. Igitur & rectæ A H, A C, A L, secantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, suntque maiora segmenta A G, A Q, A P. Rectæ ergo A Q, A L, segmenta maiora rectarum æqualium A C, A B, æquales erunt. Quia verò est [g] vt A Q, maius segmentum, ad Q C, minus, ita A L, tota ad A P, maius segmentum; Et est A Q, recta rectæ A L, æqualis; Erit & Q C, recta æqualis rectæ A P. Quare & recta A P, minus segmentum erit lateris A B, maiusque reliqua B P; ac propterea recta P Q, secabit latera B A, A C, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta P R, quæ per I, ducitur, parallela rectæ A M, secabit latera C B, B A, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta R Q, per H, ducta parallela rectæ B K, latera A C, C B, secabit extrema ac media ratione, atque adeò in puncta R, Q, cadet. Quoniam verò singula latera trianguli P Q R, cùm subtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehensos, nimirum maiore & minore segmento singulos, [h] æqualia inter se sunt; erit triangulum P Q R, ex ipsis compositum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam secantur ab angulis trianguli Icosaedri G H I: (Cùm enim in triangulo A C L, recta P Q, parallela sit lateri C L; secabuntur P Q, L C, in easdem rationes, ex iis, quæ ad propos. 4. lib. 6. demonstrauimus; Diuiditur autem C L, bifariam in H, ob triangulum A C L, in quo F H, parallela est lateri A L, [i] secans proportionaliter latera C A, C L. Igitur & P Q, bifariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis Q R, R P.) Ac propterea triangulum Icosaedri G H I, inscriptum est triangulo æquilatero P Q R, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosaedri G H I. Quapropter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

[e] 5. tertiædecimi.
[f] 2. sexti.
[g] 2. quartidecimi.
[h] 4 primi.
[i] 2. sexti.

COROLLARIVM.

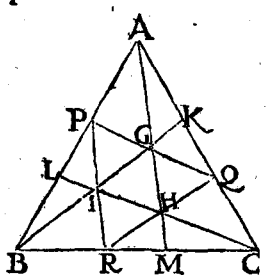


Ex his facilè colligi poteſt, latus Icoſaedri Octaedro inſcripti, maius eſſe ſegmentum rectæ diuiſæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo baſis Octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. Cùm enim, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. G H I, triangulum ſit Icoſaedri in Octaedro, cuius baſis D E F, deſcripti; ducatur ex angulo F, trianguli F E C, quod triangulo D E F, eſt æquale, recta F S, parallela rectæ A M, ſecans M C, H O, in S, & T. [a] *Cùm igitur M C, bifariam ſecetur in S, ob triangulum A M C;* [b] *ſitq; M S; ipſi G F, æqualis, ob parallelogrammũ G S; Erit & S C, æqualis eidem G F, minori ſegmento rectæ D F; Ac propterea cùm totæ D F, E C, æquales ſint; erit quoque reliqua E S, reliquæ D G, maiori ſegmento æqualis: Idcoq; E C, in S, ſecta erit extrema ac media ratione. Deinde* [c] *quia F E, F S, ſimiliter ſecantur; ſecatur autem F E, extrema ac media ratione; ſecabitur & F S, in T, extrema ac media ratione, maiusq; ſegmentum erit F T, recta* [d] *æqualis exiſtens lateri Icoſaedri G H, ob parallelogrammum G T. Igitur F T, latus Icoſaedri Octaedro inſcripti, maius eſt ſegmentum rectæ F S, quæ diuidit E C, latus Octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demiſſa. Quod eſt propoſitum.*

a 2. ſexti.
b 34. primi
c 2. ſexti.
d 34. primi

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti, duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea Pyramide deſcripti.



BASIS Pyramidis ſit A B C, cuius latera extrema ac media ratione ſecentur in K, L, M, & ductis rectis B K, C L, A M, producentibus G H I, baſim Icoſaedri in illa pyramide deſcripti, inſcriptã triangulo æquilatero P Q R, cuius anguli latera trianguli A B C, ſecẽt extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipſa latera P Q, Q R, R P, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in propoſ. præcedenti demonſtratum eſt. Dico A P, minus ſegmentum lateris Pyramidis duplum eſſe potentia lateris Icoſaedri H I. Cùm enim P Q, dupla ſit potentia minoris ſegmenti A P, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 15. quadrupla verò potentia rectæ H I, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quòd P Q, recta dupla ſit rectæ P G, hoc eſt, ſibi æqualis H I, ob parallelogrammum P H; Erit P Q, potentia 4. & A P, 2. & H I, 1. Quamobrem A P, dupla erit potentia rectæ H I. Minus ergo ſegmentum lateris, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icoſaedri in Pyramide deſcripti, eſſe Apotomen. [e] *Cùm enim diameter ſphæræ potentia ſeſquialtera ſit lateris Pyramidis; ſi diameter ponatur Rationalis,* [f] *erit & latus Pyramidis Rationale,* [g] *cùm diametro potentia ſit commenſurabile.* [h] *Quare minus ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti Apotome erit; Atque adeò* [h] *cùm minori ſegmento lateris Pyramidis latus Icoſaedri potentia ſit commenſurabile; (oſtendimus enim minus ſegmentum potentia eſſe duplum lateris Icoſaedri.) Erit & latus Icoſaedri, ex ſcholio propoſ. 104. lib. 10. Apotome.*

e 13. tertiidecimi.
f 6. decimi
g 6. tertiidecimi.
h 6. decimi

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis in eo deſcriptæ: Latus verò Pyramidis duplum eſt longitudine lateris Octaedri ſibi inſcripti: latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti Octaedri.

CVM

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diameter sit basis cubi, vt constat ex propos.1. lib.15. Sit autem quadratum huius diametri duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt Octaedrum in Pyramide descriptum, vt liquet ex propos.2. lib.15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius sectiones, cùm ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt constat ex coroll. propos. 4. lib. 6. [a] Nam cùm sit parallela tertio lateri, auferet triangulũ æquilaterũ, &c. Perspicuũ est latus pyramidis duplũ esse longitudine lateris Octaedri sibi inscripti. [a 2. sexti.]

DENIQVE [b] quia diameter sphæræ, seu Octaedri potentia est dupla lateris Octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cùm diameter Octaedri coniungat centra basium cubi oppositarum, vt in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia esse duplum lateris Octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum. [b 14. tertij. decimi.]

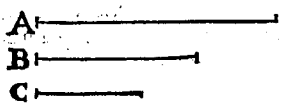
THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus Dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; [c] existat denique latus cubi dimidium potentia lateris Pyramidis sibi inscriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum. [c 5. sextidecimi.]

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.



SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cùm enim, ex iis, quę in scholio propos. 14. lib. 15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A, & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum sit eiusdem lateris cubi: Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, vt B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia Octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim, per ea, quæ propos. 18. lib. 15. sunt demõstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti, (ostensum enim est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti, tertiam esse partem lateris Pyramidis BC.) [d] Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cùm noncupla proportio sit triplæ duplicata, vt in his numeris 1.3.9. apparet. Quare, cùm quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, vt si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1. quadratum eiusdem basis diametri sit 2. & quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum. [d 20. sexti.]

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud Dodecaedrum inscribitur, vt docuimus in scholio propos. vlt. lib. 15. [e] Erit latus Pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi, & Dodecaedro inscripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione secti maius segmentum est, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide descripti, in quo nimirum cubus est descriptus. Igitur latus Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in Pyramide descripti. Quod demonstrandum erat. [e 8. sextidecimi.]

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in Octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris Octaedri extrema ac media ratione diuisi.

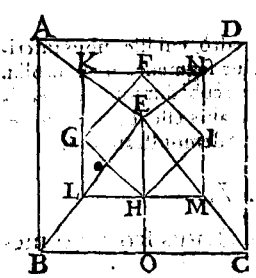
VT enim constat ex propos. 16. lib. 15. recta coniungens duas sectiones duorum laterum Octaedri rectum angulum continentium prope minora segmenta, (qualis fuit ibi recta G I, subtendens angulum rectum G A I, minoribus segmentis A G, A I, comprehensum:) latus est Icosaedri in Octaedro descripti. Quare, [a] cùm hoc ipsum latus Icosaedri possit duo illa minora segmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris segmenti. Si in Octaedro ergo Icosaedrum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 47. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT vna sex pyramidum Octaedri A B C D E, cuius basis quadratum A B C D, triangula verò ad E, verticem, A B E, E B C, C E D, D E A, sintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur K L, L M, M N, N K, rectis A B, B C, C D, D A, parallelæ. Quod si coniungantur rectæ F G, G H, H I, I F; erit F G H I, quadratum cubi in Octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta E H O, sesquialtera est rectæ E H, per coroll. propos. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur E O, talium 2. erit E H: [b] Atqui vt E O, ad E H, ita est E B, ad E L. Igitur qualium partium 3. continet E B, talium 2. erit E L, seu L M, sibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris Octaedri E B, partium erit 9. & quadratum rectæ L M, nimirum K L M N, partium 4: ideoq; & quadratū lateris cubi G H, videlicet F G H I, talium partium 2. cùm quadratum I N, duplum sit quadrati G I, sibi inscripti, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Est enim L N, quadratum ex diametro quadrati G I, descriptum: [c] cùm G I, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri L M. Quapropter latus Octaedri E B, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi G H, cùm eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.



[b] 2. sexti.

[c] 33. primi.

COROLLARIVM

QVIA verò latus cubi extrema ac media ratione diuisum, efficit maius segmentum latus Dodecaedri, cui inscribitur, per coroll. 2. propos. 13. lib. 15. Inscribunturq; Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidem Octaedro, vt docuimus in scholio propos. vltima, lib. 15. Perspicuum fit, Octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius recta extrema ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri Octaedro inscripti. Est enim eiusmodi recta latus cubi eidem Octaedro inscripti, cuius quadruplum sesquialterum potentia esse ostendimus latus Octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti.

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones cõiungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt constat ex propos. 14. lib. 15. eiusq; scholio. Et in bifariis sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri resident sex anguli Octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 15. eiusdem lib. 15. Fit diametrum Octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare cùm, per ea, quæ ad propos. 14. lib. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri maius segmentum diametri Octaedri in illo Icosaedro descripti. [d] Atqui diameter sphæræ, seu Octaedri dupla est potentia lateris Octaedri, Igitur latus Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat.

[d] 14. vndecimi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema

ma ac media ratione. Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

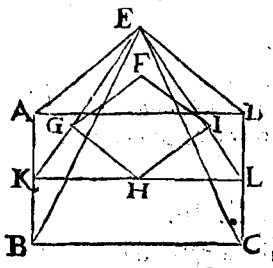
OSTENSVM est in scholio propos. 13. lib. 15. minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti, esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cùm ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius segmentum, vel maioris segmenti ad minus, (quòd tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continuè proportionales:) liquidò constat, proportionem lateris cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti esse quoq; proportionis maioris segmenti ad minus duplicatá.

PRAETEREA, cùm constet ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cùm enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri A B C D E, cuius basis quadratum A B C D, triangula autem ad verticem E, sint A B E, E B C, C E D, D E A, sintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur F G, G H, H I, I F, quadratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam verò Pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimę lib. 15. expositum est; Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter G I, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus Octaedri B C, sesquialterum esse lateris Pyramidis G I. Ductis enim rectis E G K, E I L, diuidentur latera A B, C D, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque E K, E L, sesquialteræ erunt rectarum E G, E I, per coroll. propos. 18. lib. 14. [a] Ac propterea G I, parallela erit rectæ K L, auferens, per corollarium propositionis quartæ, libri sexti, triángulum E G I, simile triangulo E K L. Quare erit, vt E K, ad K L, ita E G, ad G I; & permutando, vt E K, ad E G, ita K L, ad G I; ideoque cùm E K, sesquialtera sit ipsius E G, erit & K L, sesquialtera ipsius G I. [b] Cùm ergo B C, æqualis sit ipsi K L, quòd & B K, C L, æquales sint, & parallelæ; Erit B C, latus Octaedri sesquialterum lateris Pyramidis G I, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

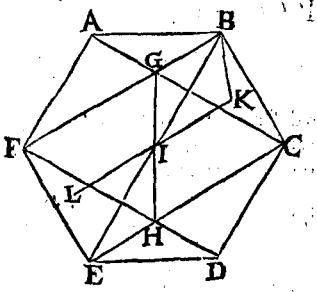


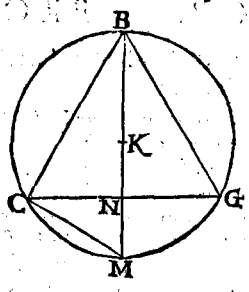
[a] 2. sexti.

[b] 33. primi.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

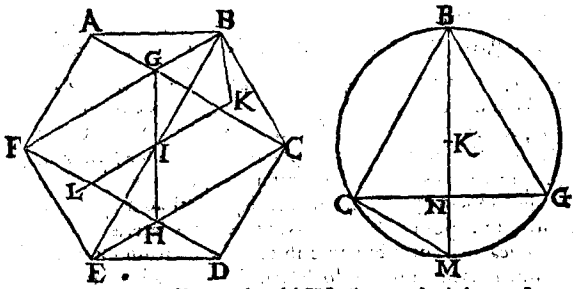
SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.





SIT *Icosaedrum* A B C D E F G H, cuius diameter B E, & centrum I; triangula verò opposita & parallela, per corollarium quartum, propositionis decimæquartæ, lib. 13. B C G, E F G, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum B C G, perpendicularis I K, cadens, ex corollario lemmatis 4. propos. 10. lib. 14. in centrum K. Producta igitur K I, perpendicularis quòque erit ad planum E F H, parallelum plano B C G, per scholium propos. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cùm cubus in Icosaedro descriptus statuat suos angulos in centris basium *Icosaedri*, vt constat ex propos. 11. lib. 15. atque adeò angulos oppositos in centris basium oppositarum; Erit K L, diameter cubi in Icosaedro descripti, transiens per I, centrum Icosaedri. Cùm ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, transeant, erit I, quoq; centrum cubi inscripti, ideoq; I K, I L, semidiametri æquales: Coniuncta autem K B, semidiametro circuli triangulum B C G, circumscribentis, erit angulus B K I, rectus, ex defin. 3. lib. 11. [c] Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadratis rectarum

[c] 47 primi.



BK, KI. Igitur & quadratum diametri BE, quadruplum existens quadrati semidiametri BI, vt in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum BCG, circumscribẽtis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem scholium, quadrupla quadratorum ex semidiametris BK, KI, descriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL, (a quod triplum est quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri Icosaedri BE, remanet quadratum diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis. Hoc igitur dico sesquitertium esse quadrati lateris Icosaedri BC. Describatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG, circulus, extensaq; BK, vsque ad M, quæ secet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur BN, per centrum K, ducta, perpendicularis est ad CG, per ea, quæ ostendimus in schol. propos. 12. lib. 13. (b erit recta BC, potentia sesquitertia rectæ BN: Vt autem BC, ad BN, ita est BM, ad BC, quòd BC, sit media proportionalis inter BM, & BN, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (c cùm angulus BCM, rectus sit in semicirculo existens. Recta igitur BM, potentia quoq; sesquitertia est rectæ BC; Ac propterea quadratum diametri BM, sesquitertium est quadrati lateris BC. Quapropter si ex quadrato diametri Icosaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

a 15. tertij decimi.

b 12. quarti decimi.

c 31. tertij.

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrum Icosaedri binas rectas posse, diametrum scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis. Ostensum siquidem est, quadratum diametri Icosaedri BE, æquale esse quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti (d duplum potens lateris Octaedri, coniungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, vt manifestum est ex propos. 9. lib. 15. Est autem rectæ dictas sectiones coniungentis diuisæ extrema ac media ratione minus segmẽtum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propos. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti, cùm huiusmodi recta coniungat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem minus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonstrandum.

d 14. tertij decimi.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

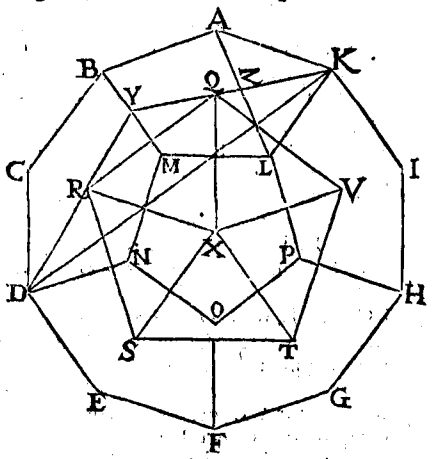
CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodem Icosaedro describantur, vt docuimus in schotio propos. vltimæ lib. 15. eademq; sphæra comprehendantur: eadem erit diameter cubi, & diameter sphæræ pyramidem circundantis: (e potest autem diameter sphæræ sesquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter circuli basim Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, vt in demonstratione propos. 15. huius libri demonstrauimus. Igitur diameter Icosaedri potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basin Icosaedri circumdantis, ex coroll. propos. 15. huius libri, potest & suiipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basim Icosaedri descripti, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandũ.

e 13. tertij decimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque

atque extrema ac media ratione diuisæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ.

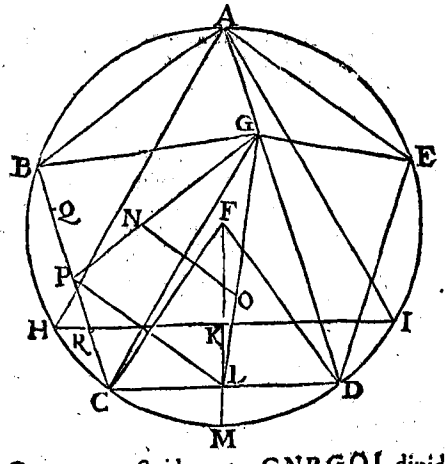


SIT dimidium Dodecaedrum contẽtum sex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungãtur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Constituta sunt igitur quinque triangula Icosaedri in Dodecaedro descripti, componentia angulum solidum K, in centro pentagoni LMNOP, vt ostensum est in demonstratione propos. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem basim BM, p centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos secant latus BM, per coroll. 2. propos. 19. libri 13. conuenient in puncto Y. Quòd si subtendatur recta AL, angulo K, secabitur a perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita esse latus Dodecaedri LM, ad latus Icosaedri sibi inscripti QR, vt KZ, minus segmẽtum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrũ Q, & latus BM, interceptam. Subtensa enim recta DK, quæ, p demonstrata in scholio propos. 13. lib. 15. latus est cubi, in quo Dodecaedrum propositũ describitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius DK, si extrema ac media ratione secetur, ex eodem scholio propos. 13. lib. 15. Quoniam verò latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter secantur in R, & Q; (sunt enim RD, QK, semidiametri circulorũ æqualium æquales; necnon & YR, YQ, distantiæ minimũ rectæ BM, à centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium.) b parallela erit QR, ipsi DK; Ideoq; triangulum YRQ, triangulo YDK, simile, p coroll. propos. 4. lib. 6. c Quam ob rem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY. d Vt autẽ DK, tota ad totã KY, ita est LM, minus segmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KZ, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ, minus segmentũ perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. sextidecimi.
b 2. sexti.
c 4. sexti.
d 2. quarti decimi.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

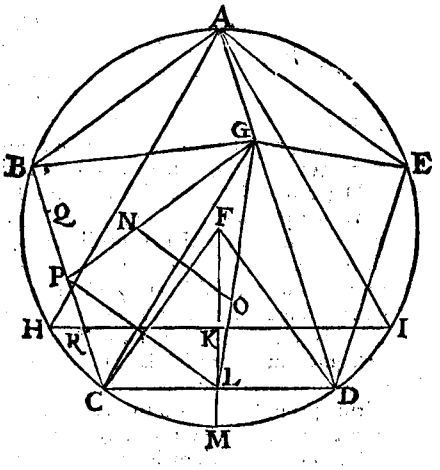
SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusq; is segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque recta pars tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.



CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icosaedri compositum, circulus describatur, cuius centrũ F, & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur, constituẽtia angulum solidum Icosaedri G, ex iis, quę in propos. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur AHI. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales sunt, cùm quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus ABH, AEI, cũ sint tertiæ partes eiusdẽ circumferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; propterea q; rectæ HI, CD, parallelæ, p scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, e secans rectas HI, CD, bifariam in K, & L; coniungantúrque rectæ FC, FD. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diuidentes, per scholium propositionis 12. libri 13. latera opposita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuisa est CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt constat ex demonstratis in propositione 5. lib. 15. latus erit Dodecaedri in Icosaedro descripti. Denique BP, dimidium lateris Icosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ,

e 3. tertij.

ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem esse lateri Dodecaedri NO. Cùm enim FL, perpendicularis à latere trianguli æquilateri HI, secetur in K, extrema ac media ratione; (quòd FL, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari FK, per coroll. propos. 2. libri 14.) sit autem maiori segmento FK, æqualis recta KM, per coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex iis, quę demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. maius segmentum KM, sectum quoque in L, à minori segmento KL, extrema ac media ratione: Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ suiipsius segmento LM. Quoniam verò iuncta PL, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABCDE, descripti, idemque centrum F, habentis, ex scholio vltimo, lib. 4. ideoque similis illi; erunt triangula FCD, FPL, (si recta duceretur FP.) similia, per scholium propos. 20. lib. 6. [a] Quare vt FC, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP: Atqui FC, hoc est, sibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore segmento dimidij ipsius FM, nempe minore segmento rectæ KM, vt ostendimus. Recta igitur CD, vel sibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore segmento dimidij ipsius BC, nimirum minore segmento rectæ BP, quod fuit BQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rursus, quia GP, GL, proportionaliter secantur in centris NO; (quòd GN, GO, duplæ sint ipsarum NP, OL, per corollarium propos. 18. lib. 14.)



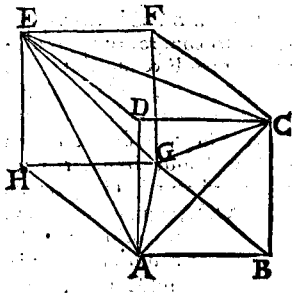
[a] 4. sexti.

[b] 2. sexti. [b] parallelæ erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, simile, ex corollario [c] 4. sexti. propos. 4. libri 6. [c] Igitur erit, vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Est autem GP, ipsius GN, sesquialtera, per corollarium propos. 18. lib. 14. Quare & PL, hoc est, sibi æqualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO; Ac proinde, cùm CQ, sesquialtera quoque sit rectæ QR; (Nam qualium partium 3. est CQ, talium 1. est CR; per constructionem; Ac propterea earundem 2. QR.) æqualis erit QR, ipsi NO, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo AE, descripta sit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum esse. Cùm enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstent 4. pyramides, fundatæ super 4. bases ipsius, vertices verò habentes reliquos 4. angulos cubi, in quibus non residet 4. anguli pyramidis æquilateræ inscriptæ: (Nam super basin ACE, fundatur pyramis ACED; super basin AEG, pyramis AEGH, super basin CEG, pyramis CEGF; & super basin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. definitione libri 11. cùm contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine & magnitudine. Quælibet enim constat tribus æqualibus & similibus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ.) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus; (Nam, exempli causa, pyramis ABCG, basim habens ABC, dimidium basis cubi BD, altitudinem verò eandem, quam cubus, rectam videlicet BG, tertia pars est, per corollarium 1. propositionis 7. lib. 12. prismatis eandē basin, & altitudinem habentis. [d] Cùm igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quòd & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem ABCG, sextam partem esse cubi, propterea que cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi: Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inscriptam eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.



[d] 32. vndec.

ALITER. Cùm cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio propositionis vltimæ, lib. 15. [e] Cubus verò triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est; perspicuè colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptę pyramidis, quandoquidem hæc in eadem sphæra, in qua cubus, continetur.

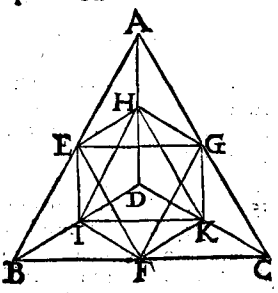
[e] 32. quartidecimi.

THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti Octaedri dupla est.

IN pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri esse duplam. Cùm enim octaedrum circumstent quatuor pyramides pyramidi ABCD, similes, vt prop.3. lib.12. demonstratum est, fundatæ super quatuor bases octaedri EGH, EFI, EGK, HIK, quales sunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin.10. lib.11. cùm contineantur triangulis similibus, æqualibusque numero & magnitudine, quippe quæ similia sint basibus pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propos. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiusdem pyramidis ABCD, ex constructione propos. 2. lib.15.) [a] Habeant autem pyramides similes proportionem homologorum laterum triplicatam: Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpositarum, (cùm octupla proportio, sit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, vt in his numeris 1.2.4.8. perspicuè apparet.) hoc est, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD. Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id est, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur sibi inscripti octaedri dupla est. Quod erat demonstrandum.



[a] 8. duodec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

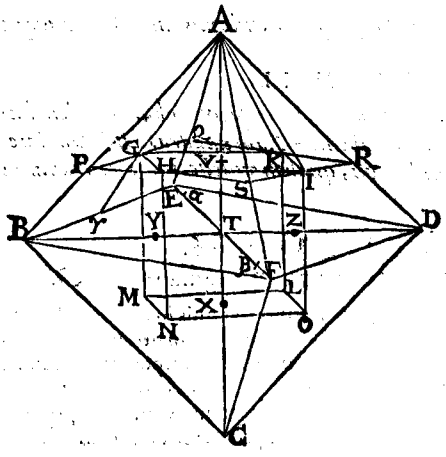
CVBVS sibi inscripti Octaedri sextuplus est.

QVONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inscriptum est, vt constat ex secunda demonstratione propos.3.lib.15. [b] Est autem cubus pyramidis in eo descriptæ triplus, [c] & pyramis octaedri sibi inscripti dupla: Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, taliũ 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum: atq; adeò cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. Quod erat demõstrandũ.

[b] 20. sexti decimi. [c] 21. sexti decimi.

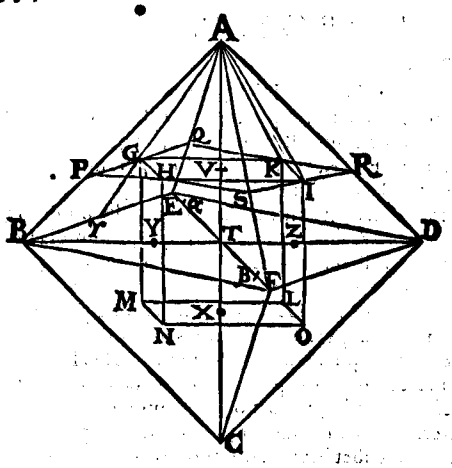
THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.



IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum. Assumpta n. pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, cétra quatuor basiũ octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ, quadratũ constituẽtes PQRS, vt in propos.4. lib.15. est demõstratum: [d] quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoq; octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. propos.14. lib.13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholium propos.14. lib.11. Est autem V, centrum quadrati PQRS: ([e] cùm n. plana BEDF, PQRS, parallela secent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. [f] Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ; æqualia sunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ, quòd anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin.3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ, propterea; & rectæ ipsæ VP, VQ, æquales. Non aliter ostendemus & hisce, & inter se æquales esse rectas VR, VS. Quare V, centrum est quadrati PQRS.) Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo descripti, per scholium vltimum lib. 4. Secentur enim latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt constat ex demonstratis in propos. 4. lib. 15. Eodem argumento concludemus X, centrum esse basis LMNO; Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, &, A, centra reliquarum basium transire. Ducta

[d] 15. vndec. [e] 17. vndec. [f] 47. primi



iam recta A γ, per G, centrum trianguli æquilateri A B E; erit A G, dupla ipsius G γ, per coroll. propos. 18. lib. 14. [a] Cùm ergo plana P R, B D, parallela secent rectas A γ, A T, proportionaliter; dupla quoque erit A V, ipsius V T. Eodem modo dupla probabitur C X, ipsius X T; Ac proinde cùm æquales A T, C T, similiter secentur in V, & X; æquales erunt A V, C X: nec non V T, X T. Recta igitur V X, coniungens cētra basium cubi oppositarum, bifariam secatur in T. Quare cùm ad eundem modum Y Z, αβ, bifariam secentur in T, erit T, centrum cubi; cùm, per coroll. 1. propos. 15. lib. 13. rectæ centra basium cubi oppositarum connectentes se se bifariā secent in centro. Iam verò, quoniam V X, ipsius V T, dupla est; dupla autē fuit & A V, eiusdem V T; æqualis erit A V, ipsi V X, nempe altitudini cubi. Quare pyramis G H I K A, ductis rectis A I, A K, A H, tertia pars est cubi, seu prismatis G O, per coroll. 1, prop. 7. lib. 12. cùm vtriusq; eadem sit basis G I, & altitudines æquales A V, V X: [b] Est autem pyramis P Q R S A, pyramidis G H I K A, dupla, quòd & basis P Q R S, dupla sit basis G H I K, illi inscriptæ. Igitur pyramis P Q R S A, duas tertias partes cubi G O, continet. Quia verò pyramides B E D F A, P Q R S A, similes existentes, per defin. 9. lib. 11. (cùm triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis illius.) [c] proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus A B, lateris A P, sesquialterum, quòd & recta A γ, [d] proportionaliter secta ipsi A B, sesquialtera sit ipsius A G; Erit pyramis B E D F A, ad pyramidem P Q R S A, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum A B C D E F, duplum existens pyramidis B E D F A, proportionem habebit ad eandem pyramidem P Q R S A, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis P Q R S A, talium 12. esse cubum G O, iam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum A B C D E F, ad cubum G O, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

[a] 17. vndec.

[b] 6. duodec.

[c] 8. duodec.

[d] 2. sexti.

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. [a] *Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, qualem videlicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.*

[a] 11. sexti. dec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

QVONIAM, vt ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; [a] Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis [b] triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

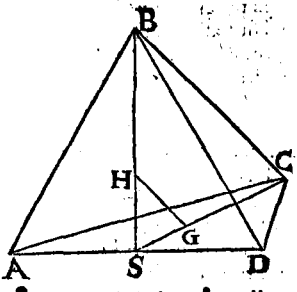
[a] 23. sexti. dec.

[b] 20. sexti. dec.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide A B D C, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim G H, centra duarum basium A C D, A B D, commune latus A D, habentium; per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum A D, rectæ ducantur C G S, B H S, insidentes latus A D, bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa verò recta G H, cùm B H, C G, duplæ sint rectarum H S, G S, ex



GS, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter ſecentur B S, C S, [a] parallelæ erunt B C, H G, & per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulum H G S, triangulo B C S, ſimile. [b] Erit ergo vt B C, ad C S, ita H G, ad G S; & permutando, vt B C, ad H G, ita C S, ad G S: [c] Eſt autem C S, ipſius G S, tripla. Igitur & B C, tripla erit ipſius H G. Quoniam autem latus pyramidis deſcriptæ in cubo diameter eſt baſis cubi, vt in propoſ. 1. lib. 15. demonſtratum eſt; Recta verò connectens duo centra baſium pyramidis commune latus habentium diameter eſt baſis cubi in pyramide deſcripti, vt perſpicuum eſt ex demonſtratis in propoſ. 18. lib. 15. (Ibi enim recta G H, iungens centra G, H, baſium A C D, A B D, commune latus A D, habentium, diameter fuit baſis G N H Q, cubi deſcripti in pyramide.) Erit latus pyramidis B C, diameter baſis cubi pyramidem A B D C, circumſcribentis; G H, verò diameter baſis cubi in eadem pyramide deſcripti. Cùm ergo eaadem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Eſt enim vt diameter vnius quadrati ad ſuum latus, ita diameter alterius quadrati ad ſuum latus, quòd proportio vtraque ſit potentia dupla: Permutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus.) habeat autem B C, diameter baſis cubi circumſcripti ad G H, diametrum baſis cubi inſcripti proportionem triplam, vt oſtendimus; habebit quoque latus cubi circumſcripti ad latus cubi inſcripti proportionem triplam. At verò cubi, cùm ſint parallelepipeda ſimilia, [d] proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumſcriptus ad cubum inſcriptum pyramidi A B D C, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata eſt triplæ proportionis, vt hîc 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, [e] cùm cubus ad pyramidem inſcriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis A B D C, ad cubum ſibi inſcriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeò pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

[a] 2. ſexti.
[b] 4. ſexti.
[c] 18. quarti decimi.
[d] 33. vndec.
[e] 20. ſexti decimi.

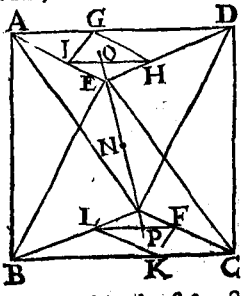
COROLLARIVM.

IGITVR cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo deſcribitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonſtratum eſt ex propoſ. 33. lib. 11. in demõſtratione huius propoſitionis.

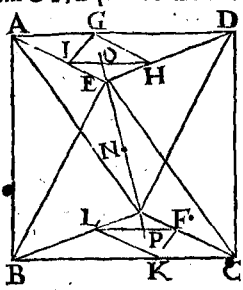
THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes Octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

IN octaedro A B C D E F, concipiatur deſcriptum Icoſaedrum. Dico octaedrum eſſe ad Icoſaedrum, vt ſunt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cùm enim, vt ex demonſtratis in propoſ. 16. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponãtur; ſint duæ baſes Icoſaedri G H I, K L M, in duabus baſibus oppoſitis octaedri A D E, B C F; atque ex N, centro octaedri, nec non & Icoſaedri (idẽ enim vtriuſq; eſt centrũ, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 15.) ad baſim A D E, perpendicularis ducatur N O, cadens in centrum O, trianguli A D E, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1. prop. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque eſt trianguli G H I, per coroll. 2. propoſ. 16. lib. 15. Cùm ergo plana oppoſita A D E, B C F, parallela ſint, ex corollario 4. propoſitionis 14. lib. 11. Recta O N, producta, perpendicularis quoque erit, per ſcholium propoſitionis 14. lib. 11. ad planum B C F, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam trianguli K L M, cadet. Quare O P, recta, altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia verò octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icoſaedrum in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis N O: Eſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Erit priſma, cuius baſis A D E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri: At verò priſma, cuius eadem baſis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem A D E, altitudo verò O N, per ea, quæ in ſchollio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus. Priſma igitur, cuius baſis A D E, & altitudo O P, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſim A D E, & ſub altitudine O P, conſtituti; priſma videlicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli A D E, altitudo verò eadem O P. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem A D E, & ſub altitudine O P; cùm, per ea, quæ docuimus ad prop. 7. lib. 12. priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint, vt baſes. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis A D E, & altitudo O P, alterius autem baſis tertia pars baſis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia ſunt octaedro A B C D E F. Non ſecus demonſtra-



bimus prisma, cuius basis G H I, altitudo verò O P, æquale esse sex pyramidibus Icosaedri: propterea; triplum huius prismatis, nempe prisma, cuius basis tripla sit basis G H I, altitudo autem eadem O P, æquales esse 18. pyramidibus Icosaedri. Reliquis igitur duabus Icosaedri pyramidibus, quæ tertiam partem sex pyramidum eiusdem Icosaedri constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basem G H I, & sub altitudine O P, cõstituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli G H I, altitudo verò eadem O P; Atque idcirco duo prismata, quorum vnius basis tripla sit trianguli G H I, altitudo autẽ O P, alterius verò basis tertia pars basis G H I, & altitudo eadem O P, æqualia erunt Icosaedro in dicto Octaedro descripto. Iam verò cùm duo illa prismata,



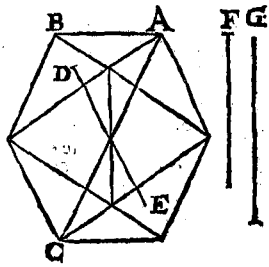
Octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro æqualia sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib. 12. vt bases prismatum Octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli A D E, continentes, (cùm vnius basis sit A D E, nempe tres tertiæ partes ipsius A D E, complectens, alterius verò basis tertia pars ipsius A D E.) ad bases prismatum Icosaedro æqualium, decem tertias partes trianguli G H I, comprehendentes: (cùm vnius basis tripla sit trianguli G H I, nimirum nouem tertias partes ipsius G H I, continens, alterius verò basis tertia pars ipsius G H I.) Sint autem, vt quatuor tertiæ partes trianguli A D E, ad decem partes tertias trianguli G H I; *a* ita duæ tertiæ partes ipsius A D E, nempe dimidiũ quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius G H I, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius A D E, ad quinque tertias partes ipsius G H I, ita quoq; sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. sex tertiæ partes ipsius A D E, (hoc est, duæ bases octaedri tripluin duarum tertiarum vnius basis constituentes, cùm sex tertias contineant.) ad quindecim tertias partes ipsius G H I; (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cùm quindecim tertias complectantur.) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, vt duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum, proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quod erat demonstrandum.

a 15. quinti.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

Icosaedrvm ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem.

Exhibeatvr Icosaedrum A B C, in quo recta D E, coniungat centra basium oppositarum, diameter autem eius sit A C; & F, sit latus Icosaedri, & G, latus cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti. Dico proportionem Icosaedri A B C, ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icosaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri A C, ad



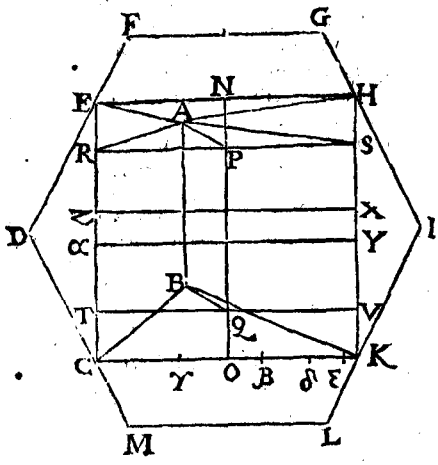
rectam D E. Cùm enim, ex demonstratis propos 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icosaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icosaedri, atque adeò oppositos angulos in centris basium oppositarum: Erit D E, diameter dodecaedri in Icosaedro A B C, descripti, cùm copulet angulos ipsius oppositos in D, & E, centris basium Icosaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri A C, hoc est, in eadem sphæra, in qua Icosaedrum A B C, descripto, cùm vtriusq; eadem sit diameter; & Dodecaedro diametri D E, intra Icosaedrum videlicet, A B C, constructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icosaedri A B C, ad tertiam, videlicet ad Dodecaedrum diametri D E, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib 6. à nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosaedri A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, in eadem sphæra cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icosaedro A B C, descriptum. Cùm ergo Icosaedrũ A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, eadem sphæra comprehensum, sit vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi: (*b* Nam Dodecaedrum diametri A C, ad Icosaedrũ A B C, eiusdem diametri, est vt G, latus cubi ad F, latus Icosaedri. Conuertendo igitur, erit Icosaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi.) At verò Dodecaedrum, eiusdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icosaedro videlicet A B C, descriptum, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, id est, ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Manifestum est, proportionem Icosaedri A B C, ad sibi inscriptum Dodecaedrum diametri D E, componi quoque ex proportione F, lateris Ico-

b 11. quartidec.

ris Icosaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectam D E. Quare Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis à quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At verò altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.



QVONIAM ex demonstratis propos. 8. lib. 15. quatuor latera basis cubi in Dodecaedro descripti subtendunt quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium; sint huiusmodi pentagona A B C D E, E F G H A, A H I K B, B K L M C, conuenientia ad latus A B; duo quidem A B C D E, A H I K B, secundùm latus idem commune A B, alia autem duo A E F G H, B C M L K, secundùm angulos E A H, C B K. His verò pentagonis inscriptum sit quadratum cubi E C K H, super quod consistat pars Dodecaedri cubum circumscribentis, solidum scilicet C B K H A E, constans quinque planis C B K, E A H, A B C E, A B K H, E C K H; quorũ duo C B K, E A H, [a] triangula sunt æqualia, cùm latera pentagoni B C, B K, æqualia sint lateribus pentagoni A E, A H, angulosque comprehendant æquales pentagonorũ E A H, C B K. Duo verò A B C E, A B K H, trapezia sunt æqualia quoque: (cùm enim & pentagona A B C D E, A B K I H, per hypothesin, & triangula ex ipsis ablata C D E, H I K, [b] æqualia existant; æqualia erunt & reliqua trapezia A B C E, A B K H,) Quintum denique est basis cubi inscripti E C K H. Simili modo reperientur alia quinque solida huic similia & æqualia, per 10. definitionem libri 11. super reliquas quinque cubi bases; ita vt Dodecaedrum superet cubum sibi inscriptum sex huiusmodi solidis. Dico igitur hunc totum excessum ex sex illis solidis cubum inscriptũ circumstantibus conflatum, æqualem esse parallelepipedo, cuius quidem basis deficit à C E H K, base cubi, rectangulo contento sub latere cubi C K, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; at verò altitudo ab altitudine, seu latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Sectis enim lateribus E H, C K, bifariam in N, O, iunctaque recta N O, quæ parallela est lateri pentagoni A B, & in quam cadunt perpendiculares A P, B Q, demissæ in planum E K, vt constat ex demonstratis propos. 17. lib. 11. (Exprimunt etiam lineæ N O, A B, A P, B Q, huius figuræ lineas L N, V X, V R, X S, figuræ propos. 17. lib. 13.) Erit vtraque recta A B, P Q, maius segmentum lateris cubi N O, vel H K, & vtraque A P, B Q, æqualis dimidio lateris pentagoni A B, seu maioris segmenti lateris cubi, vt liquet ex eadem propositione 17. libri 13. Ac propterea si per P, Q, ducantur rectæ R S, T V, rectis E H, C K, parallelæ; erunt quoque T R, S V, maiora segmenta laterum E C, H K; atq; adeò E R, C T, simul, & H S, K V, simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis A R, A S, B T, B V, constituantur duæ pyramides E R S H A, C T V K B, quæ per corollarium propositionis 6. libri 12. æquales inter se erunt, cùm & earum bases E R S H, T C K V, & altitudines P A, Q B, æquales sint; consistentque extra solidum A B T V S R. [c] Quoniam autem A S, ipsi B V, & A R, ipsi B T, æqualis est, & parallela, cùm coniungant æquales rectas, & parallelas A B, S V, R T, [d] parallela erunt plana triangulorum A R S, B T V, atque adeò inter se æqualia, ex corollario propositionis 8. libri 11. cùm latera vnius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum A B T V S R, contentum duobus aduersis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis A R S, B T V, & tribus parallelogrammis R V, A T, A V, prisma est, ex definitione.

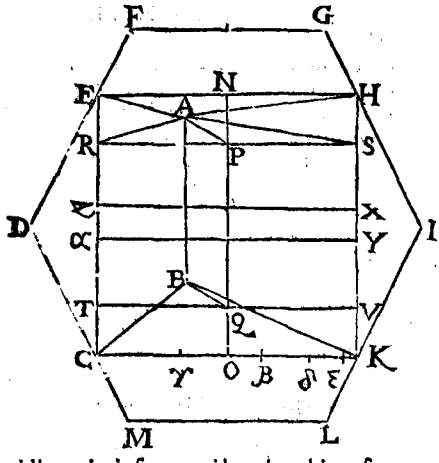
IAM verò, cùm ostensum sit, rectas H S, K V, minus segmentum efficere lateris H K, fiat illis æqualis V X, dupla nimirum vtriusque H S, & K V; & ipsius V X, minoris segmẽti lateris H K, duas tertias partes contineat V Y, tertia verò pars sit X Y, ducanturque X Z, Y α, rectæ T V, parallelæ. Quoniam igitur pyramides E R S H A, C T V K B, æquales sunt ostensæ; [e] vtriusque verò earum dupla est pyramis super basem T X, & sub eadem altitudine P A, vel Q B, constituta, [f] quòd & basis T X, dupla sit basis C V, vel R H; Æqualis erit pyramis T V X Z B, vtrique pyramidi E R S H A, C T V K B, simul: At pyramis T V X Z B, duas tertias partes cõtinet prismatis, cuius basis eadem

[a] 4. primi. [b] 4. primi. [c] 33 primi. [d] 15. vndec. [e] 6. duodec. [f] 1. sexti.

T X,& altitudo eadē Q B,vertex verò linea recta,pars videlicet rectæ AB, quę æqualis sit ipsi V X, vt demonstrauimus in scholio propos.7.lib.12.Item eiusdem prismatis,cuius basis T X,& altitudo Q B,vertex verò pars rectæ A B, æqualis ipsi V X, duas tertias partes continet prisma, cuius basis T Y,& altitudo eadē Q B,vertex verò pars rectæ A B,æqualis ipsi V Y,ex scholio propos.25.lib.11. *a* quòd & basis T Y,duas partes tertias complectatur basis T X. Igitur & prisma, cuius basis T Y,& altitudo Q B,vertex verò pars rectæ AB,æqualis ipsi V Y, æquale erit duabus pyramidibus E R S-H A, C T V K B; Ac proinde hoc prisma appositum prismati A B T V S R, efficiet prisma æquale solido C B K H A E, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi T V, & sub recta composita ex V Y, duas tertias partes minoris segmēti V X, comprehendēte,& ex V S, maiore segmento,ideoq; à basi cubi deficiente rectangulo ω X, contento sub latere cubi ω Y,& sub X Y, tertia parte minoris segmenti V X. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinque prismata æqualia & proximè dicto prismati,& reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptū. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componūt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construētur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadē altitudine Q B, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni A B,seu maioris segmēti lateris cubi, & super bases à basi cubi deficientes singulas rectangulo contētō sub latere cubi,& sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubū sibi inscriptum æquale, cuius basis à basi cubi deficit rectangulo contēto sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudo verò æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum,hoc est,altitudini Q B, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi,ter sumptæ.Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine,seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentū minus existit. Diuidatur enim C K, latus cubi extrema ac media ratione in β; Itemq; C β, maius segmentum, & β K, minus bifariam in γ, δ; atque ex β K, abscindatur β ε, æqualis ipsi β γ, seu C γ, ita vt C γ, vel γ β, vel β ε, dimidia pars maioris segmenti C β, æqualis sit ipsi Q B, & C ε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento β K, abscindi recta æqualis ipsi C γ, dimidio maioris segmenti; quia β K, maior est,quàm dimidium maioris segmenti C β. Cùm enim sit, vt C K, ad C β, ita C β, ad β K; sit autem C K, minor, quàm dupla ipsius C β, quòd C β, sit ipsius maius segmentum; erit quoque C β, minor, quàm dupla ipsius β K, hoc est, erit β K, maior, quàm dimidium ipsius C β. Quoniam igitur est, vt tota C K, ad maius segmentum C β, ita maius segmētum C β, ad minus β K; *b* erit quoq; vt C O, dimidia ipsius C K, ad C γ, vel β ε, dimidiā ipsius C β, ita C γ, vel β ε, ad β δ, dimidiam ipsius β K; Ac proinde si C O, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum C γ, vel β ε, & minus β δ. Quare & β δ, minus segmentum secabit β ε, maius segmentum extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos.5.lib.13. eritq; maius segmentum β δ, minus autē δ ε. Ac propterea rursus δ ε, minus segmentum secabit rectam δ K, maiori segmento β δ, æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit ε K. Deficit igitur C ε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi C K, minore segmēto ε K, rectæ δ K, vel sibi æqualis rectæ β δ, quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentū minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedi, quo Dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum à basi cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaq; parte minoris segmēti eiusdem lateris cubi; altitudinē verò ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptū parallelepipedo,&c. Quod erat demonstrandum.

a 1. *sexti.*

b 15. *quinti.*



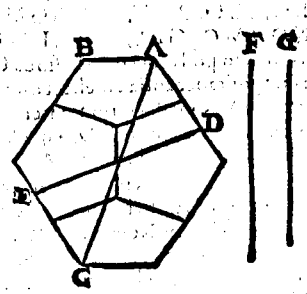
COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi sibi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorū vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autē tertiæ parti minoris segmēti eiusdem lateris cubi, altitudo deniq; à latere cubi deficit minore segmēto eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentū existit; Alterius verò et longitudo, et latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autē minus segmētū eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmētū minus existit, ita vt amborū altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nā si prius parallelepipedū addatur illi parallelepipedo, quo cubū à Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum,

lelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo verò à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque idcircò, vt Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda; cùm his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immò verò alter cubus, vt demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.



IN Dodecaedro A B C, diameter sit A C, & recta coniungens centra basium oppositarum D E; At verò F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri A B C, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectam D E; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cùm enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeò anguli oppositi in centris basium oppositarum sit recta D E, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter D E, in eadem sphæra cum Icosaedro intra Dodecaedrum A B C, collocato describetur, cùm eandem habeant diametrum D E. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri D E; & Icosaedro eiusdem diametri D E, intra Dodecaedrum videlicet A B C, descripto; Proportio Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinẽ, componetur, per ea, quæ ad definitionem 5. libri 6. à nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro D E, descripti secundæ magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro A B C, descriptum, tertiam magnitudinem. Cùm ergo Dodecaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri D E, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, ex corollario propositionis 17. lib. 12. [a] Dodecaedrum verò diametri D E, ad Icosaedrum eiusdem diametri D E, quod nimirum in Dodecaedro A B C, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquidò constat proportionem Dodecaedri A B C, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter D E, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri A C, ad diametrum D E, rectam videlicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi, ad G, latus Icosaedri, in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaq; ad sibi inscriptũ Icosaedrum proportionẽ habet compositam, &c. Quod erat demonstrandũ.

[a] 12. quarti decimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo verò tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo verò minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

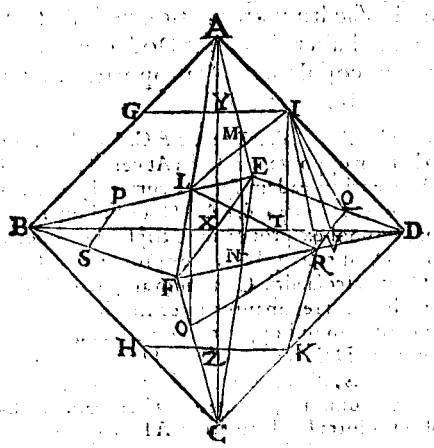
QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in qua describitur, nona pars est, [b] cùm pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla. Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare,

[b] 15. fundamentalis.

cùm Dodecaedrũ cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorũ mentio facta est in verbis propositionis huius: non obscurè colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes cõtinere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis: adeò vt si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demũ magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes cõtinet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò maius segmentum semidiametri Octaedri extrema ac media ratione sectæ.



OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrũ, sit A B C D E F, repetita figura propos. 16. libri 15. vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrum inscriptum componentia esse I Q R, K Q R, G I L, G I M, G P S, H P S, N H K, O H K, R L O, S L O, P M N, Q M N, G M P, H N P, K N Q, I M Q, G L S, H Q S, K O R, I L R, quorum octo postrema octo basibus Octaedri sunt imposita, secantia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione: item rectam I T, perpendicularem ad B D, æqualem esse maiori segmẽto X Y, semidiametri A X. Dico Octaedrum A B C D E F, superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri Q R, altitudo verò I T, maius segmẽtum semidiametri A X. Cùm enim in quatuor basibus Octaedri D E A, D F A, D E C, D F C, angulum solidum Octaedri D, constituentibus, positæ sint quatuor bases Icosaedri I M Q, I L R, K N Q, K O R, remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus Octaedri quatuor triangula I Q D, I R D, K Q D, K R D, quibus si accedant duo triangula Icosaedri, Q I R, K Q R, & commune triangulum D Q R, constituentur duæ pyramides super commune basem D Q R, nempe I D Q R, K D Q R, inter se æquales, per coroll. propos. 5. lib. 12. cùm earum altitudo sit recta eadem I T, maius videlicet segmentum semidiametri Octaedri. (Nam quemadmodum A X, secta est à recta G I, in Y, extrema ac media ratione; ita quoq; secta est C X, à recta H K, in Z. Quare si ex K, ad B D, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis K D Q R, erit ea æqualis rectæ Z X, maiori segmento semidiametri C X, hoc est, ipsi I T.) Quæ quidem pyramides extra Icosaedrum in Octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinque angulos Octaedri constituentur binæ pyramides & inter se & dictis duabus æquales, extra Icosaedrum prædictum: Ita vt Octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia verò triangulum D Q R, dimidium est quadrati lateris D Q; (Cùm D Q, D R, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum Octaedri, angulumq; contineant rectum.) erit recta Q R, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius Q R, duplum erit quadrati lateris D Q, ideoq; quadruplum trianguli D Q R. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratũ rectæ Q R, & altitudo I T, quadruplum quoq; erit prismatis, cuius basis triangulum D Q R. & altitudo eadem I T, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis D Q R, & altitudo I T, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis I D Q R, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, vel parallelepipedũ, cuius basis quadratũ rectæ Q R, & altitudo I T, quadruplum quoq; est trium illarũ pyramidum. Quare cùm earundem trium pyramidum quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrũ ambientes: Æquale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ Q R, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo I T, maius segmentum semidiametri A X, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui Octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptum. Ac proinde Octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

« 34. primi.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta linea bifarias sectiones oppositorũ laterum Icosaedri coniungens. Cùm enim ex demonstratis propos. 19. lib. 15. constet, si Pyramidi Octaedrum

Octaedrum, & huic Octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum; [a] *Octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptũ parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, nempe recta Q R, altitudo verò maius segmentum semidiametri Octaedri, recta videlicet I T, seu T X: Fit, vt Octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur,* [b] *quòd Pyramis dupla sit sibi inscripti Octaedri) superet idem Icosaedrũ in Octaedro, ideoq; & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta T Z, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum G I, H K. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata à nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cùm altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.*

a 31. sextidecimi.

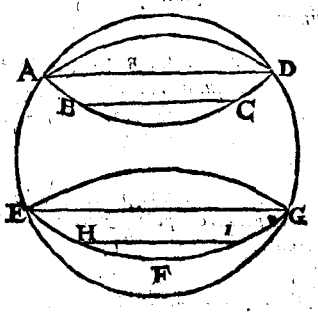
b 21. sextidecimi.

DE QVINQVE CORPORVM REGVLARIVM descriptione in data sphæra, ex Pappo Alexandrino.

QVONIAM Euclides lib. 13. quinque corpora Regularia seorsum extra sphæram construxit, deinde verò eadem à sphæra comprehendi, noua demonstratione confirmauit; non erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data sphæra describat: præsertim cùm eius ratio multò clarior videatur, & facilior, q̃ constructio illa, ab Euclide præscripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda sunt, quorum aliqua etsi per elementa sphærica Theodosii demonstrantur, non tamẽ propterea ordinem Euclidis peruertere censeri possumus; quippe cùm propositiones Sphæricorum elementorũ, quibus hic indigemus, ex solis 19. prioribus propos. lib. 11. Euclidis pendeant; vt commodè antè lib. 12. at q̃ adeò multò magis ante hãc corporũ Regularium constructionem percipi possint. In citandis autem Theodosii propositionibus, sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, dataque in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.



IN sphæra sint duo circuli paralleli A B C D, E F G; sitq; primũ in A B C D, data diameter A D, cui in E F G, ducẽda sit diameter parallela. Ducatur, vt in scholio propos. 18. lib. 11. docuimus, per diametrum A D, planũ rectum ad circulum A B C D, [c] *faciens in sphæræ superficie circulum A E G D. Quoniam igitur circulus A E G D, circulum A B C D, bifariam, & ad angulos rectos secat, erit circulus A E G D, maximus, transibitq; per polos circuli A B C D, ex scholio propos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli E F G,* [d] *cùm paralleli eosdem polos habeant:* [e] *ideoq; eum bifariam secabit. Communis ergo sectio E G, eius diameter erit:* [f] *qua cùm sit ipsi A D, parallela, patet propositum.*

c 1. 1. Theodosij.

d 1. 2. Theodosij.

e 15. 1 Theodosij.

f 16. vndec.

DEINDE in circulo A B C D, data recta B C, non sit eius diameter, cui ducenda sit diameter parallela in circulo E F G. E Ducatur ipsi B C, per centrum circuli A B C D, diameter parallela A D; cui in circulo E F G, ducatur diameter parallela E G, vt proximè ostendimus. Quoniam igitur vtraque B C, E G, eidem A D, parallela est, ex constructione, [h] *ipsa quoque B C, E G, inter se parallelæ erunt. Quod est propositum.*

g 31. primi.

h 19. vnde.

EADEM ratione recta B C, ducetur in circulo E F G, parallela H I, à diametro E G, diuersa, quæ ipsi B C, æqualis sit, si modò B C, maior non sit diametro E G. Nam si in circulo E F G, ducatur ipsi B C, parallela H I, & æqualis, vt ad propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

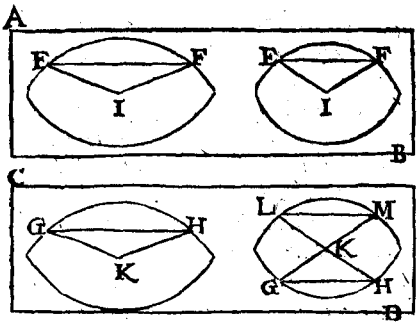
LEMMA II.

SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes; erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectę cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt.

IN planis parallelis A B, C D, descripti sint duo circuli, in quibus rectæ E F, G H, primùm parallelæ sint, ad easdem partes centrorum I, K; auferantq; arcus similes E F, G H, ac tandem iungantur ad centra rectæ E I, F I, G K, H K. Dico tam E I, G K, quàm F I, H K, parallelas esse. Quoniam enim arcus E F, G H, similes sunt, erunt anguli I, K, æquales, ex scholio propositionis 22. libri 3. [i] *Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales erunt.* [k] *Cùm ergo tam illi, quàm hi, sint inter se æquales; erit tam angulus E, angulo G, quàm*

i 32. primi.

k 5. primi.



angulus F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in plánis parallelis recta E F, G H, parallela ſunt, & recta E I, G K, ad eaſdem partes plani per E F, G H, ductæ efficiunt cum ipſis æquales angulos E, G; erunt, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 16. lib. 11. demonſtrauimus, E I, G K, parallelæ: Eadémq; ratione F I, H K, parallelæ erunt.

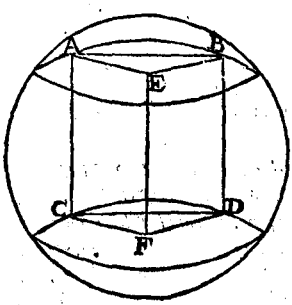
DEINDE *ſint E F, G H, parallelæ, non ad eaſdem partes centrorum I, K. Dico tam E I, H K, quàm F I, G K, eſſe parallelas. Productis enim G K, H K, iungatur recta L M. Et quia latera G K, H K, lateribus L K, M K, ſunt æqualia,* [a] *anguloſq; ad verticem K, æquales continent;* [b] *erũt & baſes G H, L M, & anguli*

a 15. primi.
b 4. primi.
c 28. tertij.
d 27. primi.
e 9. vndec.

H, L, æquales, & anguli G, M. [c] *Igitur arcus G H, L M, æquales ſunt,* [d] *& recta G H, L M, inter ſe parallelæ: Ac proinde cùm vtraq; E F, L M, ipſi G H, ſit parallela,* [e] *erũt & E F, L M, parallelæ inter ſe. Quia igitur E F, L M, parallelæ ſunt, abſcindentes ad eaſdem partes centrorũ arcus ſimiles E F, L M; (Nam cùm arcus G H, ſit arcui E F, ſimilis, eritquoq; arcus L M, qui arcui G H, æqualis eſt, eidem arcui E F, ſimilis.) erunt tam E I, L K, hoc eſt, E I, H K, quàm F I, M K, hoc eſt, F I, G K, parallelæ. Quod eſt propoſitum.*

LEMMA III.

Si in ſphæra ſint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad eaſdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes coniungẽtes, æquales quoque & parallelæ ſunt, & ad plana circulorum perpendiculares.



In ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, in quibus ſint duæ rectæ æquales, & parallelæ A B, C D, ad eaſdem partes centrorum, quarũ extrema iungantur ad eaſdem partes rectis A C, B D. Dico rectas A C, B D, æquales quoq; eſſe, ac parallelas, & ad plana circulorũ perpendiculares. Quoniam enim A B, C D, parallelæ ſunt; [f] *erunt A C, B D, in eodem cum ipſis plano. Quare cùm A B, C D, ſint etiam æquales;* [g] *æquales quoq; erunt, ac parallelæ A C, B D, quod eſt primum.*

f 7. vndec.
g 33. primi.

Ex centris deinde E, F, ductis rectis E A, E B; F C, F D, iunctáque recta E F; erunt tam A E, C F, quàm B E, D F, parallelæ, ex ſecundo lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. [h] *Igitur & A C, E F, & B D, E F, parallelæ erunt, & æquales.* [i] *Quoniam verò circuli A B, C D, paralleli circa eoſdem polos ſunt,* [k] *recta per eorum polos ducta tranſibit per eorundem centra, & per centrum ſphæræ, & ad plana eorundem recta erit. Quocirca recta E F, eorundem centra coniungens, per eorum polos, & centrum ſphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur tranſire, nimirum recta E F, & recta per eorum polos extenſa. quod eſt abſurdum. Haberent enim illæ rectæ ſegmentum commune E F.* [l] *Igitur E F, ad plana circulorum A B, C D, recta eſt:* [m] *Ac propterea & vtraque A C, B D, ipſi E F, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod eſt ſecundum.*

h 33. primi.
i 1. 2. Theodoſij.
k 10. 1. Theodoſij.
l 10. 1. Theodoſij.
m 8. vndecimi.

HÆC *demonſtratio locum etiam habet, quando parallelæ A B, C D, ſunt circulorum diametri, ſed tũc E A, E B, F C, F D, erunt partes diametrorum, vt patet.*

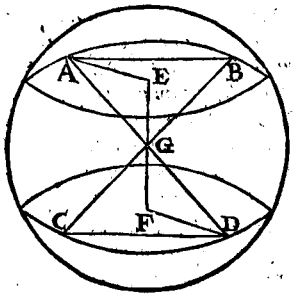
LEMMA IIII.

Si in ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad eaſdem partes centrorum: rectæ harũ parallelarum extrema puncta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales: Rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt.

In ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, & in iis duæ rectæ parallelæ & æquales A B, C D, non ad eaſdem partes centrorum, quarum puncta extrema primùm non ad eaſdem partes iungantur rectis A D, B G. Dico rectas A D, B C, in centro ſphæræ ſe interſecare, ideoq; diametros eſſe ſphæræ inter ſe æquales.

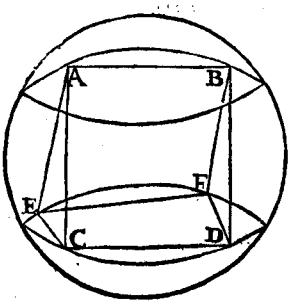
n 7. vndec.

Quoniam enim A B, C D, parallelæ ſunt; [n] *erunt A D, B C, in eodem cum ipſis plano; ac proinde ſe mutuò interſecabunt, vt in puncto G: quod dico eſſe centrũ ſphæræ. Connectantur enim circulorũ centra E, F, rectis E A, E G;*



EA, EG; FD, FG. [a] *Et quia anguli AGB, CGD, ad verticem aequales sunt:* [b] *item tam alterni anguli BAD, CDA, quàm alterni ABC, DCB; aequiangula erunt triangula ABG, CDG.* [c] *Igitur erit vt AB, ad BG, ita DC, ad CG: Item vt AB, ad AG, ita DC, ad DG. Cùm ergo AB, CD, ponantur aequales,* [d] *erunt quoque tam BG, CG, quàm AG, DG, inter se aequales. Rursus quia AE, DF, semidiametri circulorum aequalium aequales sunt; sunt autem ex 2. lemmate & parallelæ,* [e] *ideoq; anguli alterni EAD, FDA, aequales; erunt duo latera EA, AG, duobus lateribus FD, DG, aequalia, angulosq; comprehendent aequales.* [f] *Igitur & bases EG, FG, & anguli AGE, DGF, aequales sunt.* [g] *Et quia AD, in eodem plano est, in quo parallelæ AE, DF;* [h] *& EG, FG, in eodem plano, in quo AD, AE, DF; erunt EG, FG, in rectum & continuum constituta, propter aequales angulos AGE, DGF, vt ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ transibit, vt in præcedenti lemmate demonstrauimus,* [i] *perpendicularisq; ad eorum plana erit. Cùm ergo EG, FG, aequales sint ostensæ, erit G, centrum sphæræ,* [k] *propterea quòd circuli æquales AB, CD, aequaliter à centro sphæræ absunt; inæqualiter verò abessent, si centrum sphæræ in rectâ EF, diceretur aliud punctum quàm G. Quocirca AD, BC, diametri sphæræ sunt, & inter se propterea aequales. quod est primum.*

a 15. primi.
b 29. primi
c 4. sexti.
d 14. quinti.
e 29. primi
f 4 primi.
g 7. vndec.
h 2. vndec.
i 10. 1. Theodosij.
k 6. 1. Theodosij.

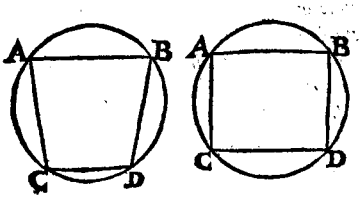


SED iam puncta extrema parallelarum aequalium AB, CD, ad easdem partes iungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & aequales ac parallelas inter se esse, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA, esse rectos. Quòd enim sint parallelæ & aequales, [l] *manifestum est, cùm extrema puncta parallelarum aequalium coniungant. Quòd autem ad AB, CD, sint perpendiculares, ita ostendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpendiculares CE, DF, iungaturq; EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti sunt, erunt ex scholio propos. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, semicirculi, ac proinde & reliqui arcus EFD, CEF, semicirculi erunt,* [m] *& anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, rectæ CD, EF, aequales sunt,* [n] *ideoq; & AB, EF, parallelæ erunt, & aequales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde, ex defin. 3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramque EC, EA, & ad vtrasq; FD, FB, vt ostendimus,* [o] *perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti:* [p] *ac propterea & CD, AB, ipsi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoq; ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod est secundum.*

l 33. primi.
m 31. tertii.
n 9. vndec.
o 4. vndec.
p 8. vndec.

LEMMA V.

SI in sphæra sint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt. Et si parallelæ fuerint æquales, coniungentes non solùm æquales, sed & parallelæ erunt, rectosq; cum ipsis angulos conficient.



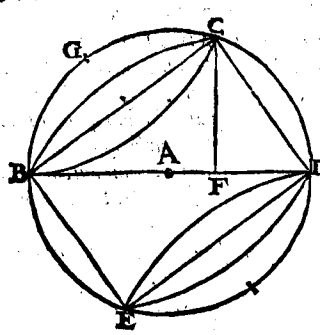
SINT in sphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad easdem partes connectantur rectis AC, BD. Dico AC, BD, æquales esse. Quia enim parallelæ sunt AB, CD; [q] *erunt AC, BD, in eodem cum ipsis plano. Ducto igitur per ipsas plano,* [r] *fiat in sphæra circulus AEBC, in quo cùm parallelæ sint AB, CD; erunt, ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus AC, BD, æquales:* [s] *ideoq; & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod si parallelæ AB, CD, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum ABDC, in circulo habeat duo opposita latera AB, CD, parallela, & æqualia; erit ex scholio propos. 31. lib. 3. ABDC, parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod est propositum.*

q 7. vndec.
r 1. 1. Theodosij.
s 29. tertii.

LEMMA VI.

IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.

SIT sphæra centrum A, per quod planũ ductum faciat circulum maximũ BCDE, cuius diameter BD, ex coroll. 1. prop. 1. lib. 1. Theod. Secta autem BD, in F, vt BF, ipsius FD, dupla sit; erit BD, talium partium 3.



qualium 2. est BF; ac proinde BD, ipsius BF, sesquialtera est. Ducta quoque FC, ad BD, perpendicularis, iungantur rectæ BC, DC, ductæq; DE, ipsi BC, parallela, connectatur recta BE.

a 29. primi b 31. tertij. *[a] Et quoniam tam duo anguli BCD, EDC, quàm duo BED, CBE, duobus rectis æquales sunt. [b] estq; tam BCD, quàm BED, rectus; erit quoq; & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex scholio prop. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelogrammum est; [c] ideoq; rectæ BC, DE, æquales sunt. Diuiso iam arcu BC, bifariam in G, erit quoque arcus EGD, diuisus bifariam in G, quòd ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus quoque BE, CD, æquales sint. Polo igitur G, & interuallo GB, GE, circuli in superficie sphæræ describantur transeuntes per C, D, ob æqualitatem tam arcuum GB, GC, quàm GE, GD; [d] qui paralleli erunt, cùm*

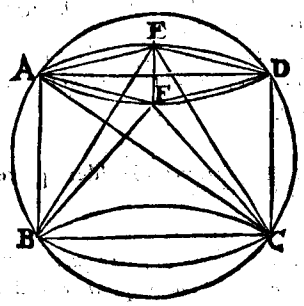
c 34. primi d 2. 2. Theodosij. e 15 1. Theodosij. *eosdem habeant polos. [e] Et quia circulus maximus BCDE, per polos secat circulos BC, ED. bifariam; erunt BC, ED, diametri ipsorum, quæ cùm æquales sint ostensæ, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum sphæræ BD, ad vtramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentia sesquialteram. Quoniam enim, ex coroll. propos. 8. lib. 6. tres rectæ DB, BC, BF, continuè proportionales sunt; erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC. Est autem BD, ipsius BF, sesquialtera, vt ostensum est. Igitur & quadratum ex BD, quadrati ex BC, atque adeò & quadrati ex DE, sesquialterum est: atque idcirco diameter sphæræ BD, vtriusque diametri BC, DE, potentia sesquialtera est. quod est propositum.*

His demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinq; corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data sphæra Pyramidem describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, æquales, & paralleli, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD, f 15. 1. Theodosij. *[f] qui eos ad angulos rectos, ac bifariam secabit, ac proinde cum eis communes sectiones faciet diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, secans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, esse pyramidem, hoc est, quatuor triangula EBC, BCF, CFE, EFB, esse æquilatera & æqualia. Iunctis enim rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; erit AC, diameter sphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum rectæ, ex 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, descriptum, vt constat ex prop. 6. lib. 4. Itaque quoniam, ex constructione, quadratum ex diametro sphæræ AC, sesquialterum est quadrati ex AD, diametro circuli; si ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cùm ergo quadratum ex AC,* g 47. primi *æquale sit quadratis ex AD, DC, quòd angulus ADC, rectus sit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Est autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex scholio prop. 47. lib. 1. æqualia ergo sunt quadrata ex DC; DF; [h] quibus cùm æquale sit quadratum ex CF, quòd angu-*



h 47. primi *lus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; erit quadratum ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum. propterea quadrato ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc est, ipsi BC, æqualis est. Eodem modo ostendetur BF, eidem BC, æqualis; ideoq; BCF, triangulum est æquilaterum.*

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum est ostensum; est autem, ex scholio pro-

i 47. primi *pos. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: [i] quibus cùm æquale sit quadratum ex CE, quòd angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo sunt quadrata ex CE, AD, propterea quæ recta CE, rectæ AD, hoc est, rectis BC, EF, æqualis est, atque adeò & rectæ CF; quæ ipsi BC, ostensa est æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam est, & ipsi BCF, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonstrabimus, triangulum BEF, esse æquilaterum, & ipsis BCF, FCE, æquale. Ex quo sequitur & BCE, triangulum æquilaterum esse, & aliis tribus æquale: quippe cùm latera BE, CE, ipsi BC, ostensa sint æqualia. Pyramis ergo est EBCF, ex defin. 26. lib. 11. & in data sphæra descripta, cùm eius anguli solidi E, B, C, F, in superficie sphæræ consistant. quod est propositum.*

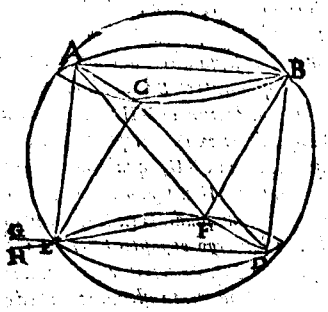
COROL-

COROLLARIVM.

HINC sequitur, diametrum sphæræ potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphæra descriptæ. Nam latus pyramidis est æquale diametro AD, vt ostendimus, & ex constructione, diameter sphæræ potentia est sesquialtera diametri AD.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data sphæra Octaedrum describere.



DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales & paralleli ABC, DEF, ita vt sphæræ diameter diametri cuiuslibet eorum potentia sit sesquialtera. Descripto autem triangulo æquilatero ABC, in circulo ABC, ducatur, per primum lemma, recta AB, in circulo DEF, parallela & æqualis DE, ad diuersas partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo DEF, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero DEF, erunt singula eius latera singulis lateribus trianguli ABC, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum AB, DE, æqualitatem: parallela verò, ex schol. propos. 16. lib. 11. Cùm enim parallelæ sint AB, DE, & anguli ABC, DEF, æquales; productis rectis DE, FE, ad G, H, erunt quoque anguli ABC, GEH, æquales. Cùm ergo parallelæ sint AB, GE, & BC, EH, ad easdem partes plani per AB, GE, ductæ; erunt quoque BC, HE, hoc est, BC, EF, parallelæ, ex illo scholio propos. 16. lib. 11. Eadem ratione parallela erit DF, ipsi AC. Connectantur denique AE, EC, CD, DB, BF, FA, vt in figura. Dico AD, octaedrum esse, hoc est, octo triangula ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera esse, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus sphæræ, rectæ AB, DE, æquales sunt & parallelæ ad diuersas partes centrorum, erunt, per 4. lemma, rectæ iunctæ AD, BE, (quas tamen confusionis vitandæ gratia non duximus.) diametri sphæræ, & rectæ AE, BD, æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipsas AB, DE. [a] *Quadratum igitur ex BE, duobus quadratis ex BD, DE, æquale erit: Posito autem quadrato ex diametro sphæræ BE, 6. quadratum ex DE, est 3 (Nam cùm per constructionem diameter sphæræ potentia sit sesquialtera diametri circuli DEF: posito quadrato ex BE, 6. erit quadratum diametri circuli DEF, 4. At posito quadrato diametri circuli DEF, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri DE, est 3. quod, ex coroll. 1. prop. 12. lib. 13. diameter circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex BD, est 3. ac proinde quadrata ex DE, BD, æqualia sunt, & rectæ ipsæ DE, BD, æquales. Est autem DE, ipsi AB, per constructionem, & BD, ipsi AE, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ AB, BD, DE, EA, æquales erunt, constituentq; quadratum ABDE, cùm anguli ad A, B, D, E, recti sint, ex eodem 4. lemmate.* a 47. primi

RVRSVS quia BC, EF, parallelæ sunt & æquales ad diuersas partes centrorum; erunt quoque iunctæ rectæ BE, CF, non ad easdem partes, diametri sphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ BF, CE, æquales inter se, atq; ad BC, EF, perpendiculares, eritq; rursus, vt prius, quadratum BCEF. Non aliter ostendemus, ACDF, quadratū esse; cùm iunctæ rectæ AD, CF, sint quoq; sphæræ diametri, ex 4. lemmate, &c. Cùm ergo tria quadrata AD, BE, CF, constructa sint super latera æqualia AB, BC, CA, nimirum super latera trianguli æquilateri, cùm AB, latus sit quadrati AD, & BC, quadrati BE, & CA, quadrati CF; erunt omnia triangula octo ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera, & inter se æqualia. Octaedrum ergo est AD, ex defin. 27. lib. 11. & in data sphæra descriptū, cùm eius anguli solidi, A, B, D, E, C, F, sphæra superficiem attingant. quod est propositum.

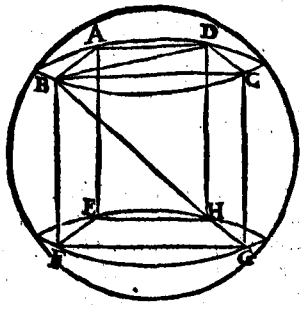
COROLLARIVM

COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrū potentia duplam esse lateris octaedri in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex BE, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex DE, latere octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN data sphæra cubum describere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac paralleli ABCD, EFGH, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ. [c] *Descripto autem quadrato ABCD, in circulo ABCD, ducatur, per 1. lemma, recta AD, in circulo EFGH, parallela EH, & æqualis ex eadem parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo EFGH, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato EFGH, erunt singula eius latera singulis lateribus quadrati ABCD, æqualia, & parallela: æqualia quidem, ob laterum AD, EH, æqualitatem; parallela verò ex scholio* c 6. quarti.



propoſ.16. lib.11. Nam quia parallelæ ſunt A D, E H, ſuntq́, anguli æquales A D C, E H G, nimirum recti; erunt quoq́, D C, H G, parallelæ, cùm ſint ad eaſdem partes plani per A D, E H, ducti, & ſic de cæteris. Iungantur denique ad eaſdem partes centrorum rectæ A E, B F, C G, D H, quæ, per lemma 3. ad plana circulorũ rectæ erũt, & inter ſe parallelæ. Dico A G, eſſe cubum, hoc eſt, ſex quadrilatera A B C D, E F G H, A D H E, B C G F, A B F E, C D H G, eſſe quadrata & æqualia. Ductis enim rectis B H, B D, erit, ex lemmate 4. B H, diameter ſphæræ; at B D, diameter circuli A B C D, quippe quæ diameter ſit quadrati circulo inſcripti. Quoniam igitur, per conſtructionem, quadratum ex B H, ſeſquialterum eſt quadrati ex B D; quadratum autem ex B D, quadrati ex B C, duplum, ex ſcholio propoſ.47. lib.1. ſi ſtatuatur quadratum ex B H, 3. erit quadratum ex B D, 2. & quadratum ex D C, 1. atque adeò quadratum ex B H, quadrati ex D C, triplum erit. Rurſus quia quadratum ex B H, eſt 3. & quadratum ex B D, 2. [a] *eſtq́, quadratum ex B H, æquale quadratis ex B D, D H, quòd angulus B D H, ex deſin.3. lib.11. rectus ſit, erit quadratum ex D H, 1. Quadratum igitur ex B H, triplum eſt quadrati ex D H. Fuit autem idem quadratum ex B H, triplum quadrati ex D C. Æqualia ergo ſunt quadrata ex D C, D H, ac proinde rectæ D C, D H, æquales. Cùm ergo oppoſitis lateribus G H, C G, æquales ſint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo C H. Cùm igitur & anguli recti ſint, ex deſin.3. lib.11. quadratum erit C H. Eadem ratione & B E, A H, B G, quadrata oſtendentur: Sed & A C, E G, quadrata ſunt, ex conſtructione. Sunt ergo omnia ſex quadrilatera quadrata, & inter ſe æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur eſt A G, ex deſin.25. lib.11. & in data ſphæra deſcriptus, cùm eius anguli ſolidi A, B, C, D, E, F, G, H, ſuperficiem ſphæræ contingant. quod eſt propoſitum.*

a 47. primi

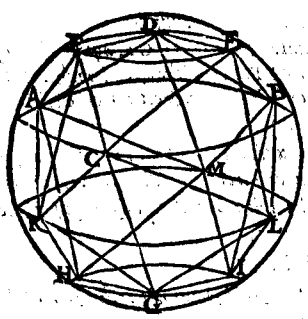
COROLLARIVM

CONSTAT ex his, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratum ex diametro ſphæræ B H, triplum eſſe quadrati lateris cubi D C, vel D H, vel A D, &c.

MANIFESTVM quoque eſt, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus A B C D, huius figuræ æqualis eſt circulo A B C, figuræ antecedentis propoſitionis. Id quod demonſtratum quoque eſt lib.14. propoſ.21.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data ſphæra Icoſaedrum deſcribere.



b 12. ſexti.

c 1. quarti.

d 1. 1. Theodoſij.

e 12. ſexti.

f 1. 1. Theodoſij.

g 2. quarti.

REPERIATVR [b] *recta linea, ad quam ſic ſe habeat diameter ſphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti: Fiatq́, ex coroll. propoſ.6. lib.10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiuſdam lineæ, ad cuius interuallum, veluti ſemidiametrũ, circulus in data ſphæra deſcribatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Deſcripto maximo circulo in ſphæra data,* [c] *accommodetur in eo recta, quæ inuentæ ſemidiametri ſit dupla, cùm hæc recta minor ſit diametro ſphæræ, ſiue illius circuli maximi, vt infrà probabitur. Nam ſi per eam rectam planum ducatur rectũ ad circulum illum maximum,* [d] *faciet id circulum A B C, in ſphæra, cuius ſemidiameter, ex conſtructione, potentia ſubtripla eſt rectæ initio inuentæ. Deinde* [e] *inueniatur rurſus recta linea, ad quam ita ſe habeat data ſphæra diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti; Fiatq́, vt 3. ad 1. ita, per coroll. propoſ.6. lib.10. quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo A B C, parallelus: quod fiet, ſi in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ ſemidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro, ex iis, quæ ad propoſ.1. lib.4. demonſtrauimus, & per eam rectam planum extendatur priori circulo parallelum, hoc eſt, ad dictum circulum maximum rectum, ex ſcholio propoſ.18. lib.11. Nam per idem ſcholium, planum hoc erit circulo A B C, parallelum,* [f] *faciet q́, in ſphæra circulum D E F, cuius ſemidiameter ſemidiametro inuentæ æqualis eſt. Hiis duobus circulis ex altera parte centri ſphæræ alij duo æquales ac paralleli deſcribantur G H I, K L M: quod facilè fiet, ſi illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c.* [g] *Deſcripto autem in circulo D E F, triangulo æquilatero D E F, ducatur*

ducatur latere E F, in parallelo circulo A B C, ex lemmate primo, recta linea A B, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis ſit vni lateri trianguli æquilateri in circulo A B C, deſcripti: Item huic A B agatur ex altera parte centri, parallela K L, in circulo K L M, & æqualis: Ac denig; huic K L, in circulo G H I, ducatur ex altera parte centri, parallela H I, & æqualis ipſi E F, hoc eſt, lateri trianguli æquilateri in circulo G H I, deſcripti. Completis ergo triangulis æquilateris A B C, K L M, G H I, erunt ſingula latera ſingulis lateribus trianguli D E F, parallela: nimirum A C, M L, G H, ipſi D F; at B C, M K, G I, ipſi D E: quod probabitur ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. vt in problemate ſecundo oſtendimus, parallelas eſſe B C, E F, ad diuerſas partes centrorum ductas. In figura non deſcripſimus ea triangula in circulis A B C, K L M, ne multitudo linearum confuſionem pareret, ſed tantùm laterum extrema puncta notauimus. Poſtremò, ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ; videlicet ex puncto D, rectæ D E, D A, D M, D B, D F: ex G, recta G H, G K, G C, G L, G I, & ita vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emiſſas eſſe cernis. Dico D G, eſſe Icoſaedrum, hoc eſt, viginti triangula D E F, D E A, D A M, D M B, D F B, &c. eſſe æquilatera, & æqualia. Quod vt demonſtretur, oſtendendum prius eſt, Icoſaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in ſphæra data deſcribi Icoſaedrum, Euclides docuit propoſ. 16. lib. 13.) ſuos 12. angulos conſtituere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, nimirum ternos angulos in ſingulis circulis, atque eo ſitu, quo eadem puncta notauimus.

SI igitur in ſphæra deſcriptum Icoſaedrum D G, duodecim angulos ſtatuens in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinque rectæ D E, D A, D M, D B, D F, æquales ſunt, cùm ſint latera triangulorum æquilaterorum æqualium: ſi ex polo D, per E, in ſphæra circulus deſcribatur, tranſibit is per reliqua puncta A, M, B, F: ac propterea pentagonum E A M B F, in vno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cùm ergo eius latera ſint æqualia, vtpote latera Icoſaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonſtrata ſunt à nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit A K C F D, ob quinque rectas æquales E A, E K, E C, E F, E D: Et K H M D E, ob quinque latera Icoſaedri inter ſe æqualia A K, A H, A M, A D, A E: Et H G C E A, ob quinque latera Icoſaedri æqualia K H, K G, K C, K E, K A: Et G I M A K, ob latera quinque Icoſaedri æqualia H G, H I, H M, H A, H K: Et I L C K H, ob quinque rectas æquales G I, G L, G C, G K, G H: Et L B M H G, ob rectas quinque æquales I L, I B, I M, I H, I G: Et B F C G I, ob quinque rectas æquales L B L F, L C L G, L I: Et F D M I L, ob quinque rectas æquales B F, B D, B M, B I, B L: Et D E C L B, ob rectas quinque æquales F D, F E, F C, F L, F B: Et D A H I B, ob quinque latera Icoſaedri æqualia M D, M A, M H, M I, M B: Ac tandem G L F E K, ob quinque Icoſaedri latera æqualia C G, C L, C F, C E, C K; ita vt 12. pentagona æquilatera, æquiangula, inter ſe æqualia conſtituantur. Quoniam verò recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus; erit iuncta recta A B, ipſi E F, parallela in pentagono E A M B F: & A C, iuncta ipſi D F, parallela in pentagono A K C F D: Et B C, iuncta parallela ipſi D E, in pentagono D E C L B. [a] Plana ergo per rectas D E, E F, & G B, B A, ducta parallela ſunt, & faciunt q; circulos parallelos in ſphæra D E F, A B C. Eodem modo erit iuncta K L, ipſi H I, parallela in pentagono I L C K H: Et iuncta K M, ipſi G I, in pentagono G I M A K: Et L M, iuncta ipſi G H, in pentagono L B M H G. Ac proptereà circuli in ſphæra paralleli erunt G H I, K L M. Non aliter erit A B, iuncta ipſi H I, parallela in pentagono D A H I B: Et iuncta K L, ipſi E F, in pentagono G L F E K. [c] Igitur E F, H I, cùm ſint eidem iuncta A B, vel K L, parallelæ, inter ſe parallelæ ſunt. Eadem ratione D E, G I, cùm ſint eidem iunctæ B C, vel K M, parallelæ, inter ſe parallelæ erunt; propterea q; plana circulorum D E F, G H I, per rectas D E, E F & H I, G I, ducta parallela erunt. Quinque ergo quatuor circuli in ſphæra D E F, A B C, K L M, G H I, paralleli inter ſe ſunt; & tam circuli D E F, G H I, inter ſe æquales, ob triangula æquilatera in illis deſcripta æqualia; quam circuli A B C, K L M, inter ſe etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipſis, quæ ex iunctis A B, B C, C A; & K L, L M, M K, conſtituuntur; quippe cùm latera hæc ſint recta ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium.

Q[VI]A verò iuncta recta K B, quæ connectit non ad eaſdem partes extrema K, B, parallelarum K L, A B, in parallelis circulis non ad eaſdem partes centrorum ductarum, ſphæræ diameter eſt, & angulus B A K, rectus, ex 4. lemmate, quòd K A, connectat ad eaſdem partes extrema K, A, earundem parallelarum; [d] erit quadratum diametri K B, æquale duobus quadratis ex A B, A K. Rurſus quia in pentagono E A M B F, recta iuncta A B, angulum A M B, ſubtendit: Vt autem recta angulum pentagoni ſubtendens, ad latus pentagoni, ita eſt hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum, ex ſcholio propoſitionis ſecundæ, libri decimiquarti, erit A B, iuncta ad E F, vel A K, ipſi E F, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco [e] cùm latus pentagoni poſsit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum; erit diameter ſphæræ K B, (quæ ambas A B, A K, potest, vt oſtendimus.) latus pentagoni in eo circulo, in quo A B, latus eſt hexagoni, & A K, vel E F, latus decagoni. Quare ſphæræ diameter K B, ad iunctam A B, proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at verò ad E F, eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni: [f] Ac proinde cùm tam A B, latus trianguli æquilateri in circulo A B C, quam E F, latus trianguli æquilateri in circulo D E F, potentia triplum ſit ſemidiametri ſui circuli; erunt circuli D E F, A B C, ac proinde & G H I, K L M, qui illis æquales ſunt, illi,

a 15 vndec.
b 1. 11. Theodoſij.
c 9. vndec.
d 47. primi
e 10. tertiidecimi.
f 12. tertiidecimi.

quos in principio propoſitionis deſcripſimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla eſt ſemidiametri initio inuentæ, minorem eſſe diametro ſphæræ, vt ſuprà diximus.

His demonſtratis, facili negotio concludemus, ſolidam figuram à nobis deſcriptam D G, eſſe Icoſaedrũ, cum Icoſaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis triangulum D E F, omnes eius anguli ſolidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Icoſaedri congruant.

COROLLARIVM I.

Conſtat ex his, ſphæræ diametrum ad latus Icoſaedri in ea deſcripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum: adeò vt ſi diameter ſphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icoſaedri ſit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam deſcripto Icoſaedro D G, in ſphæra, oſtenſum eſt eſſe diametrum ſphæræ K B, ad E F, latus Icoſaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

Ex quo fit, latus Icoſaedri maius eſſe ſemidiametro ſphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius eſt ſemiſſe lateris pentagoni, quippe cùm duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Iſoſceles conſtituant: [a] *ac propterea duo latera decagoni maiora ſint latere pentagoni, ideoq; vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni.*

a 20. primi

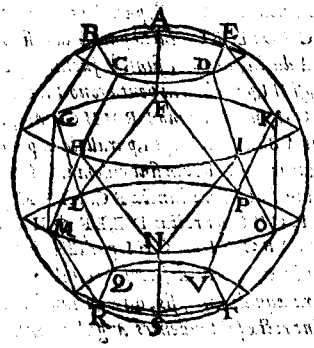
COROLLARIVM II.

Colligitur etiam ex demonſtratis, diametrum ſphæræ eſſe potentia triplam lateris pentagoni in circulo A B C, deſcripti. Quoniam enim eſt, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo A B C, deſcriptorum, ita diameter ſphæræ K B, ad iunctam A B, ex conſtructione; erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum ſphæræ, ita latus hexagoni ad iunctam A B: [b] *Eſt autem latus hexagoni in circulo A B C, (hoc eſt, ſemidiameter) potentia ſubtriplum rectæ iunctæ A B, quòd A B, ſit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo A B C, potentia ſubtriplum eſt diametri ſphæræ, hoc eſt, diameter ſphæræ potentia tripla eſt lateris pentagoni in circulo A B C, deſcripti.*

b 12. tertii decimi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

In data ſphæra Dodecaedrum deſcribere.



Deſcribatur in data ſphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propoſ. A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, ita vt ſemidiametri circulorum A B C D E, Q R S T V, ſint potentia ſubtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ita ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; ſemidiametri verò circulorum F G H I K, L M N O P, potentia ſint ſubtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ſphæræ ſic ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Deſcripto autem in circulo A B C D E, pentagono A B C D E, æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri C D, ad eaſdem partes centrorum parallela H I, in circulo F G H I K, & æqualis lateri pentagoni eiuſdem circuli, ex 1. lemmate: Recta autem H I, ad diuerſas partes centrorum agatur eodem modo parallela L P, in circulo L M N O P: Huic tandem L P, ad eaſdem centrorum partes ducatur parallela Q V, in circulo Q R S T V. Completis autem pentagonis in hiſce tribus circulis, (quorum tamen latera, vt confuſionem vitaremus, non duximus, ſed eorum tantùm extrema puncta notauimus.) erunt ſingula latera eorum ſingulis lateribus pentagoni A B C D E, parallela, eo ordine, quo lateri C D, parallela iunctæ ſunt: quod demonſtrabitur, vt in probl. 2. oſtendimus, parallelas eſſe B C, E F, itemrum H G, P O, T V, latera iuncta, parallela erunt ipſi B C, &c. Poſtremò, ex quolibet 20. punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectæ videſſe emiſſas. Dico A S, Dodecaedrum eſſe, hoc eſt, duodecim pentagona A B C D E, D E K O I, O I N S T, S T V Q R, Q R M G L, G E F A B, A F P K E, K P V T O, R S N H M, F L Q V P, C D I N H, B C H M G, æquilatera eſſe, æquiangula, & æqualia. Quod vt oſtendatur, demonſtrandum prius eſt, Dodecaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in data ſphæra Dodecaedrum deſcribi, docuit Euclides propoſ. 17. lib. 13.) ſolos 20. angulos ſtatuere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, quinos videlicet in ſingulis circulis, atque in eo ſitu, quo eadem 20. puncta notauimus.

Sit ergo in ſphæra deſcriptum Dodecaedrum A S, viginti angulos ſtatuens in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus, erit iuncta G H, lateri B C, parallela in penta-

in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & IK, lateri DE, in pentagono DEKOI; & KF, ipsi AE, in pentagono AEKPF, & FG, ipsi AB, in pentagono ABGLF; & sic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectis FG, FK, parallelæ sunt; [a] *erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per FG, GH, ductum; quòd hæ rectæ rectis AB, BC, sint parallelæ. Igitur, ex scholio propos. 16. lib. 11. planæ per FG, FK, & per FG, GH, ductæ, inter se parallelæ sunt, cùm eidem plano pentagoni ABCDE, sint parallelæ; atque adeò, ex eodem scholio, cùm conueniant in rectâ FG, vnum planum efficient. Non aliter ostendemus, planum quoque per FK, KI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto, vnum planũ efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in sphæra* [b] *efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemq; modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta, circulos parallelos efficient QRSTV, LMNOP. Erunt q; tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quàm duo FGHIK, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL,* [c] *quæ omnes æquales sunt, cùm subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.*

a 15. vndec.

b 1. 1. Theodosij.

c 4. primi.

Deinde, quia ex scholio propos. 8. lib. 13. rectæ iunctæ ND, MB, lateri CH, parallelæ sunt in pentagonis CHNID, BGMHC; [d] *erunt quoq; ipsæ iunctæ ND, ME, parallelæ: Sunt autem & æquales, & æquales angulos in pentagonis æqualibus subtendant.* [e] *Igitur & iunctæ NM, BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iunctæ NO, CE, cùm connectant duas NC, OE, æquales ac parallelas, quòd vtraq; lateri DI, sit parallela.* [f] *Circulus igitur LMNOP, circulo ABCDE, parallelus est, cùm ille ducatur per rectas NM, NO, hic verò per rectas BD, CE, quibus illæ parallelæ sunt ostensæ. Non secus ostendentur paralleli circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli sunt.*

d 9. vndec.

e 33. primi.

f 15. vndec.

Rursvs, quoniam iuncta rectæ EF, OV, cùm, ex scholio propos. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVPKO, æquidistent, [g] *parallelæ sunt; nec non & inter se æquales, quòd angulos æquales in pentagonis æqualibus subtendant,* [h] *erunt & rectæ iunctæ EO, FV, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo EFVO, in vno plano est,* [i] *cùm EF, OV, in eodem sint plano cum parallelis EO, FV. Est autem & in circulo,* [k] *propterea quòd planum, in quo existit, in sphæra circulum efficit. Igitur, ex iis, quæ ad propos. 31. lib. 3. demõstrauimus, cùm in eo quadrilatero oppositæ latera æqualia sint, quadrilaterũ rectangulum est EVO; ac proinde cùm omnia latera æqualia sint, subtendentia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum potest lateris FE, ex scholio propos. 47. lib. 1. hoc est, rectæ iunctæ FG, quòd æquales sint FG, FE, subtendentes angulos pentagonorum æqualium: ideoq; qualium partium 1. statuetur quadratum rectæ FG, talium 2. erit quadratum rectæ FO, & ambo quadrata simul earundem partium 3. Quibus* [l] *cùm æquale sit quadratum iunctæ rectæ OG, quæ diameter sphæræ est; (Nam cùm æquales sint iunctæ FG, ON, subtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter se parallelæ, quòd duabus parallelis AB, ST, parallelæ sint, ex scholio propos. 8. lib. 13. erit, ex lemmate 4. iuncta recta OF ad FG, perpendicularis, & OG, diameter sphæræ.) erit quoq; quadratum diametri sphæræ 3. qualium 1. est quadratum rectæ FG, hoc est, quadratum diametri sphæræ quadrati rectæ FG, triplum erit.* [m] *Est autem & quadratum lateris trianguli æquilateri triplum quadrati semidiametri, hoc est, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri sphæræ ad quadratum rectæ FG, ita quadratum lateris trianguli ad quadratum lateris hexagoni;* [n] *atq; adeò vt diameter sphæræ ad rectam FG, ita latus trianguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta FG ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita est latus pentagoni eiusdem circuli ad latus trianguli, quòd FG, sit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appositâ formulâ apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propos. sit quoq; vt diameter sphæræ ad latus trianguli, hoc est, ad iunctam rectam AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtriq; circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ æqualis.*

g 9. vndec.

h 33. primi.

i 7. vndec.

k 1. 1. Theodosij.

l 47. primi.

m 12. tertiidecimi.

n 22. sexti.

Diam. sphæræ.	Latus pentag.
Recta FG.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

Præterea quia, ex scholio propos. 2. lib. 14. est, vt iuncta recta FG, subtendens angulum pentagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pentagoni in circulo ABCDE, ita latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE; erit quoque vt latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono descripti. Vt autem diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo FGHIK, ita est latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt proximè demõstratum est. Igitur ex æquo erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt in hac altera formula apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propos. sit quoq; vt diameter

Diam. sphæræ.	Lat. pẽtagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

ſphæra ad E F, latus trianguli in circulo D E F, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterque circulus D E F, G H I, figuræ antecedentis propoſ. vtriq; circulo A B C D E, Q R S T V, huius figuræ æqualis. Quare circuli A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, ſunt illi, quos in propoſ. antecedenti, & in hac deſcripſimus.

Q V I B V S demonſtratis, nullo negotio probabimus, ſolidam figuram A S, à nobis deſcriptam, eſſe Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis pentagonum A B C D E, omnes eius anguli ſolidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icoſaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem ſphæra deſcriptorũ: quia videlicet circulus D E F, figuræ antecedentis propoſ. æqualis eſt circulo A B C D E, figuræ huius propoſ. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſ. 5.

MANIFESTVM quoq; eſt, eoſdem prorſus circulos ſuſtinere & angulos ſolidos Icoſaedri, & angulos ſolidos Dodecaedri.

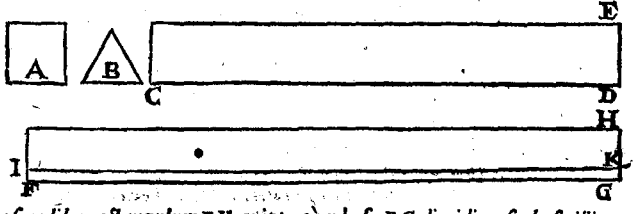
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonſtrauimus, facilè etiam oſtendemus, ſi omnia quinque corpora regularia in vna eademq; ſphæra deſcribantur, maximum omnium eſſe Dodecaedrum: Deinde Icoſaedrum maius reliquis tribus: Tertiò, cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro eſſe maius. Ex quo conſtabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora conſtruxiſſe, cùm poſt Tetraedrum ſtatim Octaedrum, non autem cubum, conſtituerit. Ita enim ſemper à minoribus ad maiora progreſſus eſt. Sed prius alia nonnulla demonſtranda ſunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

Si quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula ſimul maiora, quàm octo quadrata ſimul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis eſſe maiora. Sit enim rectangulum C E, cuius vnum latus C D, octuplum ſit lateris quadrati
a 1. ſexti. *A, & latus D E, lateri eiuſdem quadrati æquale: Erit q. rectangulum C E, octuplum quadrati A,* a *cum ſit, vt C D, ad latus quadrati A, ita rectangulum C E, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoq; rectangulum F H, cuius vnum latus F G, decuplum ſit lateris trianguli B, & latus G H, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius baſem demiſſæ, hoc eſt, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectan-*



gulum, cuius vnum latus eſt
b 1. ſexti. *vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipſi G H, hoc eſt, altitudini trianguli B,* b *vigecuplum eſt trianguli B; Et autem triangulo rectangulo æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. rectangulum F H, quippe cùm baſis F G, dimidium ſit baſis illius trianguli; erit quoque rectangulum F H, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur eſt, rectangulum F H, maius eſſe rectangulo C E.*
c 12. quartidecimi. *c Quoniam latus trianguli B, hoc eſt, latus D E, potentia ſeſquitertium eſt eius perpendicularis, hoc eſt, lateris G H: Latus autem F G, ad latus C D, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quòd F G, ſit 10. & C D, 8. hoc eſt, F G, 5. & C D, 4. Erit maior proportio F G, ad C D, quàm D E, ad G H. Eſt enim maior proportio 25. ad 16. ſupernoncupartiens ſextaſdecimas, quàm 4. ad 3. ſeſquitertia, quòd maior ſit fractio $\frac{9}{16}$. quàm*
d 12. ſexti. $\frac{1}{3}$. d *Fiat vt F G, ad C D, ita D E, ad H K; erit q. maior quoque proportio D E, ad H K, quàm ad G H;*
e 10. quinti *e ac proinde maior erit G H, quàm H K. Ducta ergo K I, ipſi F G, parallela, erit vt I K, ipſi F G, æqualis ad C D, ita*
f 14. vel 16. ſexti. *D E, ad H K.* f *Igitur erit I H, rectangulum rectangulo C E, æquale: ideoq; F H, maius, quàm C E. Quod eſt propoſitum.*

II.

Octo quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti.

g 20. quartidec. *g QVONIAM duo quadrata ex diametro ſphæra deſcripta ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti æqualia ſunt: Duo verò eadem quadrata æqualia ſunt octo quadratis ex ſemidiametro ſphæræ deſcriptis, quòd quadratum diametri quadruplum ſit quadrati ſemidiametri, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata ſemidiametri ſphæra æqualia quoque eſſe ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæra. Quod eſt propoſitum.*

III.

Si Octaedrum, cubus, & Icoſaedrum in eadẽ ſphæra deſcribãtur, erit perpendicularis è centro

centro ſphæræ ad vnam baſim Icoſaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro ſphærſe ad vnam baſim Octaedri, & cubi ducta.

NAM [a] *quia latus Octaedri maius eſt latere Icoſaedri in eadem ſphæra; erit vnum triangulum Octaedri maius quoque vno triangulo Icoſaedri. Quare ſi vtrumque ſolidum ita intra ſphæram conſtituantur, vt triangulum vnius triangulo alterius ſit parallelum, longius à centro aberit Icoſaedri triangulum, quàm triangulum Octaedri; cùm vtrumque tribus angulis ſuperficiem ſphæræ attingat: Acproinde perpendicularis è centro ſphæræ ad baſim Icoſaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad baſim Octaedri. Cùm ergo perpendicularis Octaedri æqualis ſit perpendiculari cubi;* [b] *quòd baſis cubi, & baſis Octaedri eodem circulo circumſcribantur, ideóque æqualiter à centro diſtent; erit quoque perpendicularis Icoſaedri perpendiculari cubi maior. Quod eſt propoſitum.*

[a] 18. tertiidecimi.

[b] 21. quartidec.

IIII.

SI Cubus & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior eſt.

QVONIAM viginti triangula æquilatera ſuper ſemidiametro ſphæræ maiora ſunt octo quadratis ex eadem ſphæræ ſemidiametro deſcriptis, vt theoremate 1. demonſtrauimus: Sunt autem viginti triangula Icoſaedri maiora viginti triangulis æquilateris ſuper ſemidiametro ſphæræ conſtructis, quòd latus Icoſaedri ſemidiametro ſphæræ maius ſit, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris. Igitur & viginti triangula Icoſaedri multò maiora ſunt octo quadratis ex ſphæræ ſemidiametro deſcriptis. Quam ob rem, cùm viginti triangula Icoſaedri totam ſuperficiem Icoſaedri conficiant, at octo quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta, ſuperficiei cubi æqualia ſint, ex theoremate 2. paulò antè demonſtrato; erit quoque Icoſaedri ſuperficies maior ſuperficie cubi. Quod eſt propoſitum.

DE COMPARATIONE SOLIDITATVM quinque corporum Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum.

HIS præmiſſis, demõnſtremus iam, Dodecaedrum maius eſſe Icoſaedro: Icoſaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icoſaedro maius eſt.

QVONIAM eſt, [c] *vt cubi latus ad latus Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad Icoſaedrum:* [d] *eſt autem latus cubi latere Icoſaedri maius; maius quoq; erit Dodecaedrum Icoſaedro. Quod eſt propoſitum.*

[c] 11. quartidec.

[d] 18. tertiidecimi.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius eſt.

QVONIAM perpendicularis ex centro ſphæræ in vnam baſim Icoſaedri cadens, maior eſt perpendiculari ex eodem centro in vnam baſim cubi demiſſa, vt in 3. theoremate præmiſſo oſtenſum eſt: Item ex 4. theoremate, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior quoque eſt; Erit ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vnam baſim Icoſaedri cadente, & tertia parte ſuperficiei Icoſaedri contẽtum, maius ſolido, quod ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in vnam baſim cubi cadente, & tertia parte ſuperficiei cubi continetur. Cùm ergo, vt in ſcholio propoſ. 20. lib. 14. demonſtrauimus, illud ſolidum Icoſaedro ſit æquale, & hoc cubo; maius quoq; erit Icoſaedrum, quàm cubus. Quod eſt propoſitum.

III.

CVBVS Octaedro maior eſt.

QVONIAM eſt, [e] *vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ, ita Cubus ad Octaedrum: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius. (Nam* [f] *cùm latus cubi maius ſit latere Icoſaedri; & latus Icoſaedri, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris, maius ſemidiametro ſphæræ erit latus cubi multò maius ſemidiametro ſphæræ.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod eſt propoſitum.*

[e] 27. quartidec.

[f] 18. tertiidecimi.

IIII.

OCTAEDRVM Tetraedro maius eſt.

QVONIAM baſis Octaedri minor eſt baſe Tetraedri, [g] *quòd baſis Tetraedri ad baſem Octaedri proportionem habeat ſeſquitertiam; erit perpendicularis ex centro ſphæræ ad vnam baſim Octaedri demiſſa, maior perpendiculari ex eodem ſphæræ centro ad vnam baſim Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quàm ſuprà theoremate 3. oſtẽdimus, perpendicularem in Icoſaedro maiorẽ eſſe perpẽdiculari in Octaedro, & cubo. Eſt autem & ſuperficies Octaedri ſuperficie Tetraedri maior,* [h] *cùm illa huius ſit ſeſquialtera. Igitur ſolidum contentum ſub perpẽdiculari ex cẽtro ſphæræ in vnã baſim Octaedri cadente, & tertia parte ſuperficiei Octaedri, maius eſt ſolido contẽto ſub perpendiculari ex eodẽ centro ſphæræ in vnã baſim Tetraedri deducta, & tertia parte ſuperficiei Tetraedri. Quocirca cùm, ex ſcholio propoſ. 20. lib. 14. illud ſolidũ Octaedro ſit æquale, hoc verò Tetraedro; erit quoq; Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propoſitum.*

[g] 14. quartidec.

[h] 14. quartidec.

ALITER. Quoniam eſt, [i] *vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri:*

[i] 22. quartidec.

Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrum. Igitur ex æqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cùm ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri:

a 18. tertij decimi. b 10. quin.

(Nam [a] quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertiũ est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionẽ minorem sesquitertia, ideoq; multò minorem tripla; [b] ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoq; Octaedrũ Tetraedro maius. Quod est propositũ.

c 17. quartidec.

ALITER. [c] Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet, vt rectangulum sub linea potente $\frac{2}{3}$ quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente $\frac{3}{2}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quòd eius latera minora sint sphæræ diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.

d 32. quartidecimi. e 27. quartidecimi.

ALITER. [d] Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor verò quàm triplus Octaedri: (Nam [e] cubus ad Octaedrum est, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quàm triplum semidiametri sphæræ, quòd & tota diameter, quæ cubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quàm triplam.) Erit Octaedrum maius, quàm Tetraedrum. Quod est propositum.

EODEM prorsus ordine se mutuò superant cõuexa superficies eorundem corporum Regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri: Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri deniq; superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

f 9. quartidecimi. g 18. tertij decimi.

QVONIAM enim [f] est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus latere Icosaedri maius, [g] vt suprà demonstratum est. Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.

SVPERFICIEM verò Icosaedri maiorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulò antè theoremate quarto, ante comparationem soliditatum quinq; corporum Regularium.

h 27. quartidec.

DEINDE [h] quoniam est superficies cubi ad Octaedri superficiem, vt latus cubi ad semidiametrũ sphæræ: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo ostendimus, cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoq; superficies cubi superficie Octaedri maior.

i 14. quartidec.

DENIQVE [i] quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuũ est, Octaedri superficiem maiorem esse Tetraedri superficie.

Vides igitur superficies & soliditates corporũ Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus: ita vt quò maius fuerit corpus, eò maiorem quidem habeat etiam superficiẽ, at eò minus latus. Nam [k] vt suprà demonstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius verò superficies atq; soliditas, vt hic demonstrauimus, omniũ minima est: Item Dodecaedri latus omniũ est minimũ, eius verò cõuexa superficies & soliditas omnium maxima. Deniq; quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrum in eadem sphæra describta sint, latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atq; ab Euclide descripta, se mutuò superant, [l] vt suprà ostensum est; ita contrario ordine eorundem superficies conuexæ, atque soliditates se mutuò superant, vt hoc loco demonstrauimus.

k 18. tertij decimi. l 18. tertij decimi.

CAETERVM prætereundum non est hoc loco id, quod à Pappo demonstratum est lib. 5. Mathematicarum collectionum; soliditates videlicet quinq; corporum Regularium, si Isoperimetra sint, atq; idcirco, non in eadem sphæra constructa, longè aliter se habere, quàm à nobis demonstratum est. Nam corpus, quod plures habet bases, maius semper est corpore pauciorum basium: Ita vt Icosaedrum superet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubus deniq; Tetraedro maius sit.

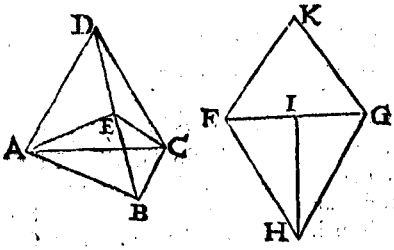
INVENTIO ANGVLI INCLINATIONIS DVArum basium cuiuscunq; solidi Regularis, vnius ad alteram, ex Isidoro Hypsiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT Pyramis ABCD, cuius latere BD, bifariam secto in E, ex angulis A, & C, lateri BD, oppositis rectæ ducantur AE, & CE; quæ cùm perpendiculares sint ad BD, communem sectionem planorum ABD, CBD, in quibus existunt. (a Sunt enim in triangulis AEB, AED, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis AEC, basium ABD, CBD, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur FGH, triangulum æquilaterum super rectam FG, lateri pyramidis æqualem constructum, atq; idcirco triangulo cuicunque pyramidis propositæ, ipsi nimirũ ABD, æquale, in quo ducta HI, perpendiculari ad FG, constituatur super FG, trian-

a 8. primi.



triangulum F G K, habens vtrumque latus F K, G K, æquale perpendiculari H I, hoc eſt, vtrique perpendiculari A E, C E, cùm perpendiculares H I, A E, C E, ſint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum F K G, æqualem eſſe angulo inclinationis A E C, baſium A B D, C B D. Cùm enim latera K F, K G, æqualia ſint lateribus E A, E C; & baſis F G, baſi A C: [a] Æquales erunt anguli F K G, A E C. Dico inſuper angulum inclinationis A E C, acutũ eſſe [b]. Cùm enim latus A D, vel illi æquale A C, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis A E, C E; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ A C, talium 3. erit quadratum vtriuſque rectæ A E, C E; ideoque earundem partium 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum A E, C E. Quare cùm in triangulo A B C, quadratum lateris A C, minus ſit quadratis ſimul laterum A E, C E, acutus erit angulus A E C, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.

[a] 8. primi.

[b] 12. quartidecimi.

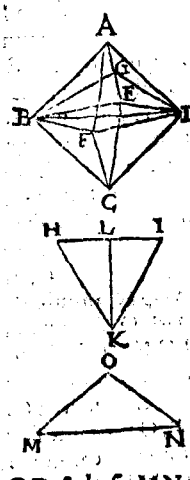
COROLLARIVM

Facile hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cùm enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſint A E, C E, ſubtendanturq; à lateribus pyramidis, quale fuit A C; [a] omnes erunt inter ſe æquales, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, nec non & latera pyramidis eoſdem ſubtendentia, ſint æqualia.

[a] 8. primi.

II.

ANGVLVM inclinationis duarũ Octaedri baſium, vnius ad alteram, reperire.



EXHIBEATVR Octaedrum A B C D E F, cuius diameter B D. Ex angulis B, & D, ad latus A E, triangulis A B E, A D E, commune, bifariamque ſectum in G, rectæ ducantur B G, D G; quæ cùm perpendiculares ſint ad A E, communem ſectionem planorum A B E, A D E, in quibus exiſtunt, (quòd in triangulis B G A, B G E, anguli ad G, æquales ſint, &c.) continebunt angulum B G D, inclinationis baſium A B E, A D E, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano, quolibet hac via. Sumatur H I K, triangulum æquilaterum ſuper rectam H I, lateri Octaedri æqualem fabricatum, ideóque triangulo cuicunque Octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet A B E, æquale, in quo ducta K L, perpendiculari ad H I, conſtituatur ſuper recta M N, quæ æqualis ſit diametro Octaedri B D; hoc eſt, diametro quadrati A B C D, ex A B, latere Octaedri deſcripti, triangulum O M N, habens vtrumque latus M O, N O, perpendiculari K L, æquale, hoc eſt, vtrique perpendiculari B G, D G, cùm perpendiculares K L, B G, D G, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum M O N, æqualem eſſe angulo inclinationis B G D, baſium A B E, A D E. Cùm enim latera O M, O N, æqualia ſint lateribus G B, G D; & baſis M N, baſi B D, [b] Æquales erunt anguli M O N, B G D. Dico præterea, angulum inclinationis B G D, eſſe obtuſum. [c] Cùm enim diameter Octaedri B D, dupla ſit potentia lateris A B; [d] latus verò A B, potentia ſeſquitertium rectæ B G: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri B D, talium 4. erit quadratum lateris A B, earundemque 3. quadratum rectæ B G; ideoque ambo ſimul quadrata rectarum B G, D G, talium partium 6. erũt. Quare quadratũ lateris B D, in triangulo G B D, maius eſt quadratis ſimul laterũ G B, G D; Ac propterea angulus B G D, obtuſus erit, vt in ſcholio prop. 12. lib. 2. oſtẽdimus.

[a] 8. primi.

[b] 8. primi.

[c] 14. tertij decimi.

[d] 12. quarti decimi.

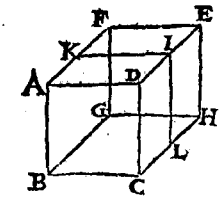
COROLLARIVM.

Hinc ſit, omnes inclinationes baſium Octaedri æquales eſſe. Cùm enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt B G, D G, ſubtendanturq; ab Octaedri diametris, cuiuſmodi eſt B D; [a] omnes inter ſe æquales erunt, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, nec non & diametri Octaedri eoſdem ſubtendentes, ſint æquales.

[a] 8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, inuenire.



a 33. primi. b 29. primi. c 10. vndec.

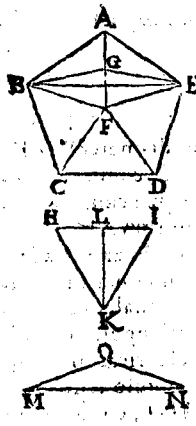
SIT cubus A B C D E F G H, in quo secetur latus D E, bifariam in I, necnon & latera illi opposita in quadratis A E, E C, commune latus illud D E, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectæ ducantur I K, I L; [a] quæ cùm æquales, ac parallelæ sint lateribus E F, E H, (quòd & K F, I E, inter se, nec non & I E, L H, inter se æquales existant, & parallelæ.) [b] ideoque angulos rectos ad latus D E, efficiât, continebunt K I L, angulum inclinationis basium A E, E C, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam verò rectæ I K, I L, parallelæ existentes rectis E F, E H, & non in eodem cum illis plano, [c] angulum K I L, æqualem continent angulo recto F E H; Rectus erit angulus inclinationis basiũ cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, cõstituendus erit angulus rectus. Hic enim; vt modò demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.

COROLLARIVM.

QVOCIRCA, cùm eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum; perspicuè concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

IIII.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, vnius ad alterã, inuenire.



ESTO pyramis A B C D E F, vna ex 12. pyramidibus Icosaedri, cuius basis pentagonum A B C D E, ex quinque Icosaedri lateribus cõpositum, vertex autem F. Diuisa itaque latere A F, bifariam in G, ducantur ex triangulorum A B F, A E F, latus A F commune habẽtium, angulis B, & E, lateri A F, oppositis rectæ B G, E G, quæ cùm ex demonstratis in problemate 2. huius scholij, perpendiculares sint ad A F, communem sectionem planorum A B F, A E F, in quibus ducuntur, comprehendent B G E, angulum inclinationis basium A B F, A E F, per 6. defin. lib. 11. Huis igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulum æquilaterũ H I K, super rectam H I, lateri Icosaedri æqualem fabricatum, hoc est, cuiuis triangulo Icosaedri, ipsi videlicet A B F, æquale, in quo ducta recta K L, ad H I, perpendiculari, constituatur super recta M N, quæ rectæ B E, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum O M N, habẽs vtrumque latus M O, N O, perpendiculari K L, æquale, hoc est, vtrique perpendiculari B G, E G, cùm perpendiculares K L, B G, E G, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum M O N, angulo B G E, inclinationis basium A B F, A E F, æqualem esse. Cùm enim latera O M, O N, æqualia sint lateribus G B, G E, & basis M N, basi B E; [d] Æquales erunt anguli M O N, B G E. Dico hunc etiã angulũ inclinationis B G E, esse obtusum. Cùm enim B G, angulũ rectũ faciat A G B; [e] erit recta A B, maior quã recta B G; ad eundemq; modũ A E, maior erit quàm E G. Quare rectæ A B, A E, maiores quoq; erũt rectis O M, O N, cũ hæ rectis G B, G E, positæ sint æquales. Si itaq; recta B E, super rectã sibi æqualem M N, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulũ M O N, ita vt rectæ A B, A E, rectas O M, O N, prorsus includant. [f] Angulus ergo O, maior erit angulo B A E: At hic obtusus est. (cùm enim quinq; anguli pẽtagoni sex rectis sint æquales, per ea, quæ à nobis sunt demonstrata in scolio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorũ rectũ, ac insuper vnius recti partẽ quintã; obtusus ergo erit, cũ recto sit maior.) Multò igitur magis obtusus erit angulus M O N, hoc est, sibi æqualis B G E.

a 33. primi. b 29. primi. c 10. vndec. d 8. primi. e 19. primi. f 32. primi.

COROLLARIVM

NON obscurè quoq; ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cùm singuli anguli inclinationum, continentur binis perpendicularibus, ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt B G, E G, subtendanturq; à rectis, angulos pentagonorum subtẽdentibus, cuiusmodi est B E; [a] omnes inter se erũt æquales, quòd & illæ omnes perpẽdiculares, quæ ipsos continẽt, æquales sint, nec nõ & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, [b] æquales erunt.

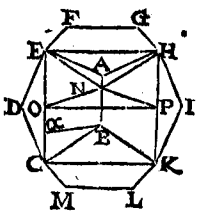
a 8. primi. b 4. primi.

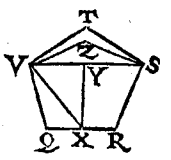
V.

ANGVLVM inclinationis duarũ basiũ Dodecaedri, vnius ad alterã, reperire.

CVM,

CVM, per ea, quæ oſtendimus in propoſ.8.libri 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti, ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus coëuntium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE,EFGHA,AHIKB,BKLMC, ad latus AB, conuenientia; duo quidem ABCDE,AHIKB, ſecundùm idem latus commune AB; alia autẽ duo AEFGH,BCMLK, ſecundùm angulos EAH,CBK. His porrò pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorum D,B,I,A. Diuiſo autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE,ABKIH, ad AB, perpendiculares NO,NP, ſecantes latera EC,HK, in O,& P, ad angulos quoque rectos, cùm rectæ EC,HK, ipſi AB, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ.8.lib.13. Comprehenditur igitur NO,NP, angulum ONP, inclinationis baſium ABCDE,ABKIH. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem, conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirũ ipſi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta ſubtendatur VS, [a] æqualis exiſtens rectæ EC, cùm & latera TV,TS, lateribus DC,DE, æqualia ſint, angulosq; contineãt æquales. Diuiſa deinde recta QR, bifariam in X, ducatur à puncto X, ad QR, perpendicularis XY; propterea q; perpendicularis ad VS, cùm VS, ſint parallela ipſi QR, ex ſcholio propoſ.8.lib.13. Ac poſtremò, ſuper recta VS, triangulum fabricetur VZS, habens vtrumq; latus ZV,ZS, perpendiculari XY, æquale. Dico angulum VZS, æqualem eſſe angulo inclinationis ONP. Ductis enim rectis NE,NH,VX; cùm latera EA,AN, æqualia ſint lateribus HA,AN: Item lateribus VQ, QX, angulos q; comprehendant æquales; [b] Æquales erunt & baſes NE,NH,VX, & anguli ANE,ANH,QXV; ideoq; & reſidui ex rectis, anguli videlicet ENO,HNP,VXY, æquales erunt. Quoniã igitur anguli ENO, EON, trianguli ENO, æquales ſunt angulis HNP,HPN, trianguli HNP; necnon & angulis VXY,VYX, trianguli VXY; (ſunt enim EON,HPN,VYX, oſtenſi recti.) Et latus NE, lateribus NH,VX, æquale demonſtratum; [c] Æqualia erunt reliqua latera NO,OE, reliquis lateribus NP,PH; Item lateribus XY,YV. Quare rectæ ZV,ZS, æquales exiſtentes ipſi XY, rectis NO,NP, æquales erunt. Iam verò, quia OE,PH, æquales ſunt, ac parallelæ; [d] erit quoq; recta cõiuncta OP, æqualis & parallela ipſi EH, ideoq; æqualis ipſi EC, hoc eſt, rectæ VS. Quã ob rẽ, cùm latera ZV,ZS, lateribus NO,NP, æqualia ſint; baſis item VS, baſi OP; [e] æqualis erit angulus VZS, angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ONP, inclinationis, eſſe obtuſum. Nam ducta recta Bα, ipſi NO, parallela; cùm ſit quoq; NB, ipſi Oα, parallela, ex ſcholio propoſ. 8.lib.13. Parallelogrammum erit NOαB, [f] ideoque recta Bα, ipſi NO, æqualis. Quia verò BC, latus pentagoni oppoſitum angulo CαB, qui rectus eſt, ([g] æqualis nimirum interno CON.) maius eſt latere Bα, hoc eſt, recta NO, vel vtraque ZV,ZS, quæ ipſi NO, oſtenſæ ſunt æquales; Erunt duæ rectæ TV,TS, maiores duabus rectis ZV,ZS. Cadit igitur punctum Z, intra triangulum TVS, ita vt rectæ TV,TS, recta ZV,ZS, includant omnino; Atque proinde angulus VZS, ideoque illi æqualis ONP, maior eſt angulo pentagoni T: Hic verò, cùm ſit pentagoni angulus, paulò antè, cùm de inclinatione baſium Icoſaedri ageremus, demonſtratus eſt maior recto. Multò igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtuſus.





[a] 4.primi.

[b] 4.primi.

[c] 26.primi.

[d] 33.primi.

[e] 8.primi.

[f] 34.primi.

[g] 29.primi.

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes baſium Dodecaedri æquales eſſe inter ſe. Cùm enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus à medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro deſcripti ductis; quales ſunt NO, NP, ſubtendanturq; à rectis, quæ cubi inſcripti lateribus ſunt æquales, vel certè, quæ rectis ſubtendentibus angulos pentagonorum æquales ſunt, cuiuſmodi eſt recta OP, lateri cubi inſcripti EH, quod angulum pentagoni EAH, ſubtendit, æqualis; [a] *Erunt omnes inter ſe æquales, cùm & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & rectæ illæ omnes, quæ eoſdem ſubtendunt, latera videlicet cubi, inter ſe etiam ſint æquales.*

[a] 8.primi.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

INDEX PROBLEMATVM, QVAE HISCE COMMENTARIIS CONTINENTVR:

QVORVM ea, quæ Euclidis ſunt, eodem charactere ſunt expreſſa, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ verò adiecta à nobis, charactere, quo ſcholia notauimus. Litera porrò A, primũ tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autẽ faciliùs quiſque inueniat problemata, quæ cupit, digeſſimus ea ſecundùm materias, de quibus proponuntur.

ACVTANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

ÆQVIANGVLA, & æquilatera figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERA, & æquiangula figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERVM triangulum. Vide Triangulum.

ANGVLI proportionales. Vide Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Angulum datum rectilineum bifariam ſecare. pag. 29. A

Angulum datum rectilineum in quotuis partes æquales diuidere. 29.30. & 352. A

Angulum rectum datum in tres angulos æquales partiri. 61. A

Angulum rectum ad punctum in data recta linea datum conſtituere. 31. A

Angulum rectum ad extremum punctum lineæ rectæ conſtituere. 31.32. & 57. A

Angulum rectũ in data recta p lineã ex puncto extra rectam dato ductam conſtiuere. 32. A

Angulum rectum in data recta conſtituere per lineam ductã ex puncto extra rectam dato, quando punctum vicinum eſt datæ rectæ, vel prope extremum plani cuiuſpiam, vel quando recta data prope extremũ plani eſt, vel denique quando & datum punctum eſt vicinum extremo plani, & recta data eſt prope aliud extremum plani. 33. & 57. A

Angulus propoſitus, rectúsne ſit, an obtuſus, acutúsve, cognoſcere. 6. A

Angulum dato angulo rectilineo æqualem ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum conſtituere. 42. & 43. A

Angulos rectilineos, & arcus circulorũ reperire incommenſurabiles. 359. A

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe. 208. B

Ad datam rectam lineam, eiuſq; punctum angulum ſolidum cõſtituere, ſolido angulo dato æqualem. 212. B

ARCVS. Vide Circulus.

CIRCVLVS.

Circuli dati centrum reperire. 122. A

Per datum punctum in circumferentia rectam, quæ circulum tangat, ducere. 132. A

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum tangat. 145.146. & 167. A

Circulis duobus datis, quorum neuter alterum includat, rectam lineam ducere, quæ vtrumque circulum tangat. 146. A

Circulum per datum punctum deſcribere, qui alium datum circulum tangat. 148. A

Lineæ rectæ, quæ circulum ſecat, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat. 150. A

Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum. 157. A

Circulum per tria puncta non exiſtentia, in linea recta deſcribere. 158. & 178. A

Arcum datum ſecare bifariam. 164. A

Circuli ſegmentum ſuper datam rectam deſcribere, in quo angulus exiſtens ſit æqualis dato angulo rectilineo. 168. A

A dato circulo ſegmentum abſcindere, capiens angulum, angulo dato rectilineo æqualem. 169. A

Circulis duobus datis, quorum vnus non ſit totus intra alium; circulum, qui vtrumque tangat, deſcribere. 149. A

In circulo dato rectam accommodare datæ rectæ, quæ diametro maior non ſit, æqualem. 175. A

In circulo rectam accommodare æqualem datæ rectæ, quæ circuli diametro maior non ſit, & alteri rectæ parallelam. 175. A

Dato circulo, & duobus punctis, ſiue extra circulum, ſiue intra, dummodò vtrumque ſit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam ſe-

cant, parallela ſit rectæ data duo puncta connectenti. 347. *A*
Datum arcum circuli in datam proportionem dimidere. 351. *A*
Datum arcum, vel angulum rectilineum in quotuis partes æquales partiri. 352. *A*
Dato arcui circuli, ex cuius quadrante quadratrix deſcripta eſt, rectam lineam inuenire æqualem. 353. & 354. *A*
Dato circulo quadratum æquale conſtituere. 355. *A*
Dato quadrato, circulum æqualem deſcribere. 356. *A*
Circulum cuicunque rectilineo æqualem deſcribere: Et circulo figuram rectilineã æqualem conſtituere, quæ cuicunque alteri ſimilis ſit. 356. *A*
Datæ rectæ lineæ circumferentiam circuli æqualem reperire. 356. & 357. *A*
Datis duobus circulis inæqualibus, datoq; arcu in vno eorum; ex altero arcum æqualem abſcindere. 357. *A*
Arcus circulorum, & angulos rectilineos inuenire incommenſurabiles. 359. *A*

CIRCVMFERENTIA. Vide Circulus.

COMMENSVRABILES, & incommenſurabiles magnitudines.

An duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nécne, explorare. 104. *B*
Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire. 104. B
An quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nécne, conſiderare. 105. *B*
Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem inuenire. 105. B
Propoſitis duabus magnitudinibus commẽſurabilibus, quam proportionem habeant in numeris, inuenire. 107. *B*
Rectam inuenire, ad quam ita ſe habeat quæuis alia data recta, vt numerus ad numerũ. 108. B
Rectam inuenire, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. 108. B
Propoſitæ rectæ lineæ inuenire duas rectas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentia. 114. B

COMPOSITI inter ſe numeri. Vide Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. Vide Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. Vide Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. Vide Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. Vide Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. Vide Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, ſphæram, atque aliam figuram.

In circulo dato triangulũ deſcribere dato triangulo æquiangulum. 176. A
Circa datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum. 176. A
In dato triangulo circulum deſcribere. 176. & 177. A
Trianguli lateribus cognitis, inuenire puncta, in quibus circulus inſcriptus ipſa latera tangere debet. 177. & 178. *A*
Circulum circa datum triangulum deſcribere. 178. A
In dato circulo quadratum deſcribere. 179. A
Circa datum circulum quadratum deſcribere. 179. A
In dato quadrato circulum deſcribere. 179. A
Circa datum quadratum circulum deſcribere. 179. & 180. A
In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere. 181. A
Super datam rectam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. 181. *A*
Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. 182. A
Circa circulum deſcribere quamcunque figuram regularem, quæ circulo inſcribi poteſt. 182. *A*
In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere. 183. A
In quacunque figura regulari circulum deſcribere. 184. *A*
Circa pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum deſcribere. 184. *A*
Circa quamcunque figuram regularem circulum deſcribere. 184. *A*
In circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. 184. & 185. A
In circulo quintidecagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. 185. & 186. A
Figura quacunque regulari circulo inſcripta, deſcribere ſimilem circa circulum, & in ea circulum inſcribere, & circa eandem circulum deſcribere. 190. *A*
Figura quacunque regulari circulo inſcripta, inſcribere aliam duplo plurium laterum. 190. *A*
Figuras regulares imparium laterum circulo inſcribere beneficio Iſoſcelium, quorũ anguli ad baſim angulorum ad verticem multiplices ſunt. 191. *A*
Figuras regulares parium laterum circulo inſcribere beneficio Iſoſcelium, quorũ anguli ad baſim angulorum ad verticem multiplices ſeſquialteri ſunt. 191. *A*
Figuram quamcunque regularem abſque beneficio Iſoſcelium circulo practicè inſcribere. 191. *A*
Figuram quamcunque regularem ſuper datam rectam practicè deſcribere. 192. *A*
Latus pentagoni, & decagoni in eodem circulo, ex Ptolemæo inuenire. 192. *A*. & 261. *B*
Quadratricem lineam intra quadrãtem, & quadratum deſcribere. 349. & 350. *A*
Duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum. 246. B

Ex quo fit, perpendicularem ad diametrum dictam, ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, totam extra minorem circulum cadere. 247. B

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrũ inscribere, quod nõ tangat minoris sphæræ superficiem. 247. B

Ex quo fit, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrũ in altera sphæra esse triplicatam eius, quã habent sphærarum diametri. 250. B

Pyramidem constituere, & data sphæra complecti. 264. & 344. B

Octaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem. 265 & 345. B

Cubum constituere, & sphæra complecti, qua priores figuras. 267. & 345. B

Icosaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras. 268. & 346. B

Dodecaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & prædictas figuras. 272. & 348. B

Latera quinque corporum Regularium exponere, & inter se comparare. 275. B

Numerum laterum, & angulorum solidorum cuiusque corporis Regularis expeditè cognoscere. 278. B

In dato cubo pyramidem describere. 305. B

In data pyramide octaedrum describere. 305. B

In dato cubo octaedrum describere. 306. B

In dato octaedro cubum inscribere. 307. B

In dato Icosaedro dodecaedrũ inscribere. 307. B

In dato octaedro pyramidem describere. 308. B

In dato Dodecaedro Icosaedrum describere. 309. B

In dato Dodecaedro cubum describere. 310. B

In dato Dodecaedro octaedrum describere. 311. B

In dato Dodecaedro Pyramidem describere. 311. B

In dato Icosaedro cubum describere. 312. B

In dato Icosaedro Pyramidem describere. 312. B

In dato cubo Dodecaedrum describere. 312. B

In dato cubo Icosaedrum describere. 315. B

In dato Icosaedro octaedrum describere. 317. B

In dato octaedro Icosaedrum describere. 317. B

In dato octaedro Dodecaedrum describere. 319. B

In data pyramide cubum describere. 319. B

In data pyramide Icosaedrum describere. 322. B

In data pyramide Dodecaedrum describere. 322. B

In dato solido Regulari sphæram describere. 322. B

Datis duobus circulis in sphæra parallelis, datã in vno eorum lineã rectã, ducere in altero diametrũ huic rectæ datæ parallelam: vel etiã aliam rectam, quæ datæ rectæ sit æqualis & parallela, dummodò recta data maior non sit diametro posterioris circuli. 341. B

In data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera. 343. B

Angulum inclinationis duarum basium cuiusque corporis Regularis inuenire. 352. 353. & seq.

FIGVRAE, anguli, & lineæ proportionales.

A data recta linea imperatã partẽ auferre. 298. A

Datam rectam lineam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit. 298. A

Datam rectam in quotuis partes æquales secare. 29. 30. & 299. A

Datam rectam secare in duas partes datã proportionem habentes. 300. A

Datam rectam in quotuis partes Arithmeticè proportionales secare. 301. A

Datis duabus rectis, tertiam proportionalem inuenire. 302. A

Quotuis rectas in data proportione continuè proportionales reperire. 302. & 303. A

Datis tribus rectis, quartam proportionalem inuenire. 303. A

Datis duabus rectis, alias duas in eadem cum illis proportione reperire. 303. A

Datis tribus rectis, quartã inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam. 303. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalem inuenire. 304. A

Data recta, aliam rectam (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius. 304. A

Secta recta in duas partes vtcunque alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continuè proportionales. 307. A

Datis duabus rectis, mediã proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire. 307. A

Datis duabus rectis, minorẽ extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire. 308. & 309. A

Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Harmonica medietate inuenire. 309. A

Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 309. A

A data recta dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere. 314. A

Dato rectilineo simile, similiterq; positum, & alteri dato æquale idem constituere. 327. A

Ad datam rectam, dato rectilineo, quod maius non sit parallelogrammo ad dimidiam applicato, æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. 330. A

Ad datam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quę similis sit parallelogrammo alteri dato. 331. A

Datam rectam terminatam extrema ac media ratione secare. 332. A

A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamẽ, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterq; positum. 338. A

Datis duobus rectilineis, tertium proportionale inuenire. 339. A

Datis tribus rectilineis, quartum proportionale inuenire. 339. A

Datis duobus rectilineis, medium proportionale inuenire. 339. A
Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterq; descripta cuicunq; rectilineo, habeantq; datam proportionem inter se. 340. A
Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterq; descripta, lateraq; eorum homologa habeant inter se datam proportionem. 340. A
Datis duobus rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterq; positum dato rectilineo. 341. A
A dato puncto in latere trianguli rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta, secundùm datam proportionem. 343. A
Dato rectilineo simile, similiterq; positum rectilineum describere, maius vel minus, secundùm datam proportionem. 343. A
In dato quadrato aliud quadratũ describere in data proportione, quæ dupla maior non sit. 345. A
Datum arcum circuli in datam proportionem diuidere. 351. A
Isosceles triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam. 352. A

FIGVRAE planę quadrilateræ. Vide Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. Vide Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. Vide Minutię numerorũ.

IMPAR numerus. Vide Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. Vide Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. Vide Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. Vide Triangulum.

LINEA perpendicularis. Vide Recta linea.

LINEA recta. Vide Recta linea.

LINEAE parallelæ. Vide Recta linea.

LINEAE proportionales. Vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commẽsurabiles, & incommensurabiles. Vide Commẽsurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in cõmuni.
Proportionem ex duabus, vel pluribus proportionibus componere. 323. A
Proportionem minorem ex maiore auferre. 323. A

MINVTIAE numerorum.
Duas minutias diuersarũ denominationũ ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere. 88. B
Integrum numerum quemcunque ad dati denominatoris minutiam reducere. 88. B
Datam minutiam duplare, ac dimidiare. 88. B
Minutiam minutiæ, aut minutiam minutiarũ ad simplicem minutiam reducere. 89. B
Datis duabus minutijs, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent, per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorẽ alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos. 90. B
Datam minutiam ad minimos terminos reducere. 91. B
Datam minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare. 91. B
Minutias plures in vnam summam colligere. 91. B
Minutiam minorem ex maiore detrahere. 92. B
Minutiam per minutiam multiplicare. 93. B
Minutiam per minutiam diuidere. 93. B
Minutiam in minutiam inferere. 94. B

NVMERI proportionales in communi.
Ex datis duobus numeris, tres numeros Harmonicè proportionales inuenire, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri. 310. A
Datis duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem inuenire. 311. A
Datis duobus numeris, minorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 311. A
Datis duobus numeris, maiorem extremitatem in Harmonica proportionalitate inuenire. 312. A
Datis numeris quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationẽ habentium cum ipsis. 35. B
Duos minimos numeros reperire in proportione quotuis numerorum continuè proportionalium. 35. B
Numeros reperire deinceps proportionales minimos quotcunque quis iusserit in data ratione. 40. B
Numeros quotcunque integros, & minimos continuè proportionales aliter reperire, in proportione data nõ multiplici. 41. B
Datis quotcunque rationibus in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus. 42. B
Duobus numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri. 74. B
Tribus numeris datis, considerare, an ipsis quartus proportionalis possit inueniri. 75. B
Datis quotlibet numeris, considerare, an ipsis possit alius proportionalis adiungi. 75. B
Summam quotcunque numerorum continuè proportionalium inuenire. 82. B
Inuenire quotcunque numeros continuè proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibusuis duobus, qui ab extremis æqualiter distant. 85. B
Item quorum summa sit numerus quadratus, cuius radix sit medius terminus. 85. B
Duos numeros in data proportione inuenire, quorũ summa æqualis sit numero producto ex vno in alium. 85. B

NVMERVS fractus. Vide Minutiæ numerorũ.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Dati duo numeri an ſint primi inter ſe, nécne, conſiderare. 13. B

Datis duobus numeris non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire. 14. B

Dati quotuis numeri ſint ne primi inter ſe, an non, conſiderare. 14. B

Datis tribus numeris non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire. 15. B

Datis duobus numeris, minimũ numerum ab eis numeratum reperire. 35. B

Tribus numeris datis, reperire minimũ ab eis numeratum. 36. B

Datis quotuis numeris, inuenire minimum ab eis numeratum. 37. B

Numerum reperire, q̃ minimus cùm ſit, habeat datas partes. 38. B

Numerum reperire, qui minimus cùm ſit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars contineat partẽ ſubſequentem. 38. & 39. B

Primus numeris datis quotcunque, inuenire alium primum numerum ab illis diuerſum. 77. B

Omnes pariter pares tantùm reperire. 80. B

Omnes pariter impares tantùm inuenire. 81. B

Omnes pariter pares, & pariter impares inuenire. pag. 81. B

Omnes numeros perfectos inuenire. 83. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, ſimiles plani, ac ſolidi numeri.

Quadratum numerum inuenire, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoq; numerum conſtituat: Et à quo idem datus numerus ſubtractus relinquat quadratum. 98. 99. 100. & 103. A

Planos numeros, vel ſolidos duos non ſimiles reperire. 62. B

Planos, vel ſolidos numeros quotcunque non ſimiles inuenire. 114. B

Duos numeros planos ſimiles inuenire, pares, vel impares, vel vnum parem, & alterum imparem. 131. B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit. 131. B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt exceſſus eorum quadratus etiam ſit. 131. & 132. B

Duos numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus non ſit quadratus. 132. B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus. 132. B

Duos numeros inuenire, ita vt cõpoſitus ex ipſis ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. 133. B

OBTVSANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

PARALLELAE lineæ. Vide Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & plana parallela.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere. 202. B

A data recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere. 213. B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammum conſtruere, cuius vnus angulorum æqualis ſit dato angulo rectilineo, latera q̃ circa illum angulum datis duabus rectis æqualia. 56. A

Parallelogrammum ſecare bifariã per rectam per quodnis punctum ductam, quod non ſit in diametro, niſi quando diametrum ſecat bifariam. 64. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale conſtituere in dato angulo rectilineo. 78. A

Parallelogrammo dato æquale triangulum conſtituere in dato angulo rectilineo. 79. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale cõſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 80. A

Parallelogrammo dato æquale triangulũ conſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 81. A

Parallelogrammũ dato rectilineo æquale conſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 81. A

Parallelogrammum datis quotcunque rectilineis æquale conſtituere ſuper datam rectam, et in dato angulo rectilineo. 82. A

Rectilineis duobus inæqualibus datis, exceſſum maioris ſupra minus inquirere. 82. A

Quadratum ſupra datã rectam cõſtruere. 82. A

Quadratis duobus inæqualibus datis, inuenire alia duo quadrata, quæ et æqualia inter ſe ſint, & ſimul ſumpta æqualia duobus datis ſimul ſumptis. 86. A

Quadratis quotlibet datis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale. 87. A

Quadratis duobus datis, alteri illorũ adiungere figuram, quæ reliquo quadrato ſit æqualis, ita vt tota figura compoſita ſit etiam quadrata. 87. A

Quadratum dato rectilineo æquale conſtituere. 117. A

Dato exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem Inuenire latus ipſius quadrati. 118. A

Dato circulo quadratum æquale conſtituere. 355. A

Dato quadrato, circulum æqualem deſcribere. 356. A

PAR, & impar numerus. Vide Numerus par, &c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. Vide Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. Vide Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atque aliam figuram. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. Vide Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. Vide Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri ſimiles. Vide Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. Vide Angulus.

PLANVS numerus. Vide Numerus planus.

PORTIO circuli. Vide Circulus.

PRIMI inter ſe numeri. Vide Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PRISMA. Vide Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarum, Angulorum, & Linearum. Vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES magnitudines in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PROPORTIO numerorum in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. Vide Parallelepipedum, &c.

QVADRATVM. Vide Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. Vide Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. Vide Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Duas Rationales longitudine & inter ſe, & expoſitæ Rationali commenſurabiles inuenire, quarũ vna Rationali expoſitæ ſit æqualis. 122. B

Duas Rationales longitudine & inter ſe, & expoſitæ Rationali commenſurabiles inuenire, quarum neutra Rationali expoſitæ æqualis ſit. 122. B

Duas Rationales longitudine quidem inter ſe, potentia verò tantùm expoſitæ Rationali commenſurabiles inuenire. 122. B

Rationales quotcunque longitudine inter ſe commenſurabiles inuenire. 123. B

Duas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles inuenire, quarum altera expoſitæ Rationali ſit æqualis. 124. B

Duas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles inuenire, quarum neutra ſit expoſitæ Rationali æqualis. 124. B

Rationales quotcunque potentia tantùm inter ſe commenſurabiles reperire. 124. & 125. B

Datis quotcunq; Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus, inuenire aliam Rationalem illis omnibus potentia tantùm commenſurabilem. 125. B

Duas Medias rectas longitudine commenſurabiles: Item duas potentia tantùm commenſurabiles inuenire. 128. B

Medias inuenire potẽtia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant. 130. B

Medias inuenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant. 131. B

Duas Rationales inuenire potentia tantũ commenſurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. 133. B

Duas Rationales inuenire potentia tantũ commenſurabiles, ita vt maior, quàm minor plus poſſit quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. 134. B

Duas Medias inuenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus poſſit, quàm minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. 134. B

Duas Medias inuenire potẽtia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus poſſit, quàm minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. 135. B

Duas rectas inuenire potentia incommenſurabiles, quæ faciãt compoſitũ quidem ex ipſarum quadratis, Rationale, rectangulum verò ſub ipſis contentum, Medium. 136. B

Duas rectas inuenire potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium: Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Rationale. 137. B

Duas rectas inuenire potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabile ei compoſito ex ipſarum quadratis. 138. B

Duas Medias inuenire longitudine, & potentia incommenſurabiles. 138. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur, inuenire. 146. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur, inuenire. 167. B

RECTA LINEA.

Rectæ datæ lineæ æqualem rectam lineam ad datum punctum ponere. 21. A

Rectam lineam æqualem datæ minori ex maiore detrahere. 22. A

Rectam lineam datam finitam bifariam ſecare. 30. A

Rectam perpendicularem ad rectam lineam ex puncto in ea dato educere. 31. A

Rectam perpendicularem ad rectam in puncto extremo erigere. 32. & 33. A

Rectam perpendicularem ad rectam ducere ex puncto extra eam dato. 32. & 33. A

Rectam perpendicularẽ ad rectam ducere ex puncto extra eam dato, quando punctum datum est vicinum datæ rectæ, vel prope extremũ plani cuiuspiã, vel quando recta data prope extremũ plani est, vel denig; quãdo & datũ punctum est vicinũ extremo plani, & recta data est prope aliud extremum plani. 33. & 57. A

Rectæ datæ parallelam rectam à dato puncto ducere. 55. A

Rectam lineam à puncto extra datam rectam lineã proposito ducere, quæ cũ data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem. 56. A

Rectam lineam datæ rectæ parallelam ducere per punctum datæ rectæ vicinum. 57. A

Inter duas rectas infinitas angulum facientes lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum vtralibet earũ faciat angulum dato angulo æqualem, dummodò datus angulus, & angulus comprehensus datis rectis minores sint duobus rectis. 64. A

Rectam datam lineam finitam, in quotlibet partes æquales secare. 75. & 299. A

Rectis duabus inæqualibus datis, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor. 86, 87. A. & 117. B

Datis duabus rectis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest. 86. A. & 117. B

Rectam lineam datam secare, vt rectangulum sub tota, & altero segmento æquale sit quadrato reliqui segmenti. 106. A

Datis duabus rectis, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta, æquale sit quadrato alterius. 173. A

Rectam lineam cuilibet arcui circuli, ex cuius quadrante Quadratrix linea describitur, æqualem inuenire. 353. & 354. A

Duabus datis rectis inæqualibus quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata. 119. B

Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub segmentis contentum æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum à dimidia linea descriptum. 119. B

A dato puncto in sublimi ad subiectum planũ perpendicularem rectam ducere. 200. B

Dato plano, à puncto, quod in illo datum est, perpendicularẽ rectam excitare. 200. & 201.

Per rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum. 205. B

RECTANGVLVM parallelogrammum. Vide Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

REGVLARIS figura. Vide Figura intra & extra circulum, sphæram, &c.

SCALENVM triangulum. Vide Triangulum.

SEGMENTVM circuli. Vide Circulus.

SIMILES plani ac solidi numeri. Vide Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra sphæram, atque aliam figuram. Vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri similes. Vide Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. Vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. Vide Angulus.

SOLIDVS numerus. Vide Numerus planꝰ, &c.

SPHAERA. Vide Figura intra & extra circulũ, sphæram, &c.

TRAPEZIVM. Vide Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triangulum æquilaterum super data recta linea terminata constituere. 19. A

Isosceles super data recta constituere. 20. A

Scalenum super data recta constituere. 20. & 21. A

Triangulum ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, quarũ quælibet duę reliqua sint maiores, cõstituere. 41. A

Triangulum alteri dato triangulo æquilaterum, & æquiangulum constituere. 42. A

In scaleno, & Isoscele, cuius basis minor non sit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarum vtraq; simul vtriq; lateri simul sit æqualis. 65. A

In æquilatero, vel Isoscele, cuius basis vtrouis latere minor sit, quælibet duæ lineæ intra triangulum ductæ, sunt simul minores duob. lateribus simul. 65. & 66. A

In scaleno, & Isoscele, cuius basis minor non sit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarum vtraq; vtriq; lateri sit æqualis, vel maior. 66. A

Triangulum bifariam secare per lineam à quouis puncto in vno latere dato ductam. 71. A

Triangulo dato æquale parallelogrammũ constituere in dato angulo rectilineo. 78. A

Triangulum dato parallelogrammo æquale constituere in dato angulo rectilineo. 79. A

Triangulo dato parallelogrammũ æquale constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 80. A

Triangulum dato parallelogrammo constituere æquale super datã rectam, & in dato angulo rectilineo. 81. A

Trianguli rectanguli cognitis duobus lateribus, in cognitionem reliqui lateris peruenire. 87. A

Amblygonium triangulũ constituere, in quo propos. 12. lib. 2. numeris possit accommodari. 108. A

Oxygonium triangulum constituere, in quo propos. 13. libri 2. numeris possit accommodari. 112. & 113. A

Trianguli cuiusuis aream cognoscere. 116. A

Isosceles constituere, quod habeat vtrumq; angulorum ad basim reliqui duplum. 180. A

Isosceles oxygonium constituere, cuius tertium latus vtrouis æqualium sit maius. 185. A

In dato triangulo quocunque quadratum describere. 344. & 345. A

FINIS.

INDEX
THEOREMATVM, QVAE HISCE COMMENTARIIS CONTINENTVR:

QVORVM ea, quæ ab Euclide demonſtrantur, eodem charactere ſunt notata, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ verò à nobis adiecta, charactere, quo ſcholia excuſimus. Litera porrò A, primum tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autem faciliùs quiſque inueniat theoremata, quæ cupit, digeſsimus ea ſecundùm materias, de quibus demonſtrantur.

ACVTANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

ÆQVIANGVLA, & æquilatera figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERA, & æquiangula figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERVM triangulum. Vide Triangulum.

ANGVLI proportionales. Vide Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Anguli rectí omnes ſunt inter ſe æquales. 16. *A*

Anguli oppoſiti ad verticem duarum rectarum ſe interſecantium ſunt æquales. 34. A

Anguli quatuor à duabus rectis ſe interſecantibus facti, ſunt quatuor rectis æquales. 35. *A*

Anguli quotcunque circa idem punctum quatuor rectis ſunt æquales. 35. *A*

Angulus externus trianguli maior eſt vtrouis interno oppoſito. 36. A

Angulus externus figuræ quadrilateræ maior eſſe poteſt quouis interno oppoſito. 36. *A*

Anguli duo trianguli quomodocunque ſumpti duobus rectis ſunt minores. 37. A

Anguli duo trianguli orthogonij, & amblygonij ſunt acuti. 37. *A*

Anguli omnes trianguli æquilateri, & duo Iſoſcelis ſupra baſem, acuti ſunt. 37. *A*

Anguli tres cuiuſcunque trianguli æquales ſunt duobus rectis: Et externus æqualis eſt duobus internis oppoſitis ſimul. 57. *A*

Anguli omnes interni cuiuſcunq; figuræ rectilineæ quot rectis angulis æquiualeant. 58. *& 59. A*

Anguli omnes externi cuiuſcunque figuræ rectilineæ, productis ſingulis lateribus ordinatim verſus eandem partem, quatuor rectis ſunt æquales. 59. *A*

Anguli quinque, qui fiunt ex concurſu binorum laterum pentagoni productorum æquales ſunt duobus rectis. 60. *A*

Angulus contactus verè angulus eſt, contra Peletarij, vbi eius ſophiſmata diſſoluuntur. 133. *Vſq; ad* 145. *A*

Angulo quouis contactus dari poteſt alius minor, & hoc alius minor vſque in infinitum: Item maior, & hoc alius maior in infinitum. 135. *A*

Anguli contactus, quo modo inter ſe ſint æquales, et qui æquales ſint. 136. *A*

Anguli contactus, quotquot ſint, efficiunt aggregatum omni rectilineo acuto angulo minus. 137. *A*

Anguli contactus Apologia aduerſus Peletarium. 137. *Vſq; ad* 145. *A*

Angulus quiſpiam poteſt in infinitũ augeri, & alius in infinitũ minui; & tamen augmentũ illius, quantumcunque ſit, minus ſemper erit decremẽto huius. 145. *A*

A minori angulo tranſitur ad maiorẽ, & per omnes intermedios, nunquã tamen per æqualem. 145. *& 166. A*

Anguli oppoſiti in quadrilatero intra circulum deſcripto æquales ſunt duobus rectis. 154. A

Angulus externus quadrilateri in circulo, æqualis eſt ei, qui opponitur angulo ei deinceps. 156. *A*

Angulus rectus in centro inſiſtit quadranti: acutus verò arcui quadrante minori: & obtuſus maiori. Et contrà, angulus in centro quadranti inſiſtens, rectus eſt; inſiſtens verè arcui quadrante minori, acutus; & maiori, obtuſus. 161. *A*

Angulus curuilineus angulo rectilineo æqualis eſſe poteſt, 245. *A*

Si duę rectę ſe mutuò tangentes, ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelæ, nõ autem in eodem plano: illæ angulos æquales comprehendent. 199. B

Idem euenier, ſi omnes illæ rectæ ſint in vno plano. 199. *& 200. B*

Si ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vtut aſſumpti tertio ſunt maiores. 205. B

Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, q̃ quatuor rectis angulis planis continetur. 206. B

Si fuerint tres anguli plani, quorũ duo vtlibet aſſumpti reliquo ſint maiores, cõprehendant autem ipſos rectæ lineę æquales: fieri poteſt, vt ex lineis æquales iſtas rectas connectentibus triangulum conſtituatur. 207. B

Si fuerint duo plani anguli æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos contineãt æquales, vtrumq; vtrique; in ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primùm poſiti, ductæ fuerint perpendiculares: à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primũ poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos cõprehendẽt. 220. B

Si fuerint duo anguli plani æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ æquales cum lineis primùm poſitis angulos continentes æquales, vtrumque vtrique: Erunt à punctis extremis linearũ ſublimium ad plana angulorum primùm poſitorum demiſſæ perpendiculares, inter ſe æquales. 221. B

ARCVS. Vide Circulus.

CIRCVLVS.

Circulus à diametro bifariam diuiditur. 8. A

Circulus à recta, quæ diameter non ſit, diuiditur non bifariam. 8. A

Si in circulo recta aliqua linea rectã quampiam bifariam ſecet, & ad angulos rectos: in ſecante centrum erit circuli. 122. A

Si in circuli peripheria duo puncta coniungantur linea recta: cadet hæc recta intra circulum. 122. & 123. A

Recta circulum in vno tantùm puncto tangit, ſi ita tangat, vt eum non ſecet. 123. A

Si in circulo recta linea per centrum ducta ſecet aliam nõ per centrum ductam bifariam: & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet: bifariam quoque eam ſecabit. 123. A

Duobus circulis ex eodem centro deſcriptis, ſi ab aliquo puncto circumferentiæ exteriorꝰ recta ducatur interiorem circumferentiam ſecans: erunt eius ſegmẽta inter vtramq; circumferentiam æqualia. 124. A

In circulo duæ rectæ non per centrum extenſæ, ſe mutuò bifariam non ſecant. 124. A

Duo circuli ſe mutuò ſecantes nõ habent idem centrum. 124. A

Duo circuli ſe mutuò interius tangentes, nõ habent idem centrum. 124. & 125. A

Si in diametro circuli à puncto, quod centrum non ſit, plurimæ rectæ cadant: maxima omnium erit, in qua centrum, minima verò reliquarum: aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolùm rectæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt ad vtraſque partes minimæ vel maximæ. 125. A

Si intra circulum punctum ſumatur, ab eoq; in circulum rectarũ cadentiũ, vna quidem ſit maxima, vna verò minima, & reliquarũ aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidẽ per centrũ tranſibit, minima verò erit reliqua pars diametri: & aliarũ maiores quidem erunt maximæ propinquiores, æquales autem à minima vel maxima, æqualiter diſtabunt. 126. A

Si extra circulum ſumatur punctũ quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: In cauam peripheriam cadẽtium rectarum, maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur: aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt, &c. 126. A

Ex puncto extra circulum ſumpto, in peripheriam concauam duæ tantùm lineæ rectæ æquales cadunt, ad vtraſque partes maximæ lineæ. 127. A

Si ex puncto extra circulum ducatur recta tangens circulum, erit ea minor omnibus ex eodem puncto in concauam peripheriam cadentibus, maior verò omnibus in conuexam peripheriam cadentibus. 127. A

Punctum in circulo, à quo plures quàm duæ rectæ æquales ad peripheriam ducuntur, centrum circuli eſt. 127. A

Circulus circulum in pluribus punctis, quàm duobus, non ſecat. 128. A

Recta per centra duorũ circulorum ſe interius tangentium ducta, cadit in circulorum contactum. 128. A

Recta per centra duorũ circulorum ſe exterius tangentium ducta, tranſit per circulorũ contactum. 129. A

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno. 129. A

Si in ſemidiametro circuli producta punctum vltra centrum ſumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus, tanget priorem circulum in eo puncto extremo, totus q; extra eundem cadet. 130. A

In circulo æquales rectæ æqualiter à centro diſtant. Et quæ æqualiter à centro diſtãt, ſunt æquales. 130. & 131. A

In circulo maxima quidem linea eſt diameter: aliarum autẽ propinquior centro, remotiore ſemper maior. 131. A

Ex puncto circumferẽtiæ in concauam peripheriam duæ tantùm rectæ æquales cadunt ad vtraſq; partes diametri. 131. A

Quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet: & in locum inter ipſam rectam, & peripheriam comprehenſum, altera recta non cadet: Et ſemicirculi quidem angulus quouis acuto rectilineo angulo maior eſt, reliquus autem minor. 132. A

Recta ad extremum diametri perpendicularis circulum tangit. 132. A

Si circulum recta tangat: recta ad contactum ducta, perpendicularis eſt ad tangentem lineam. 150. A

Circuli duobus ex eodem centro deſcriptis: rectæ interiorem tangentes, & vſque ad exteriorem extenſæ, inter ſe æquales ſunt, bifariam q; in punctis contactuũ ſecantur. 151. A

Si circulum tetigerit recta, perpendicularis ad tangentem in puncto cõtactus, per centrum tranſit. 151. A

In circulo, angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam, ſi fuerit eadem peripheria baſis angulorum. 151. A

In circulo ſpatium ad centrum, duplum eſt anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria baſis ſpatij, & anguli. 152. A

In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli ſunt inter ſe æquales. 152. & 153. A

Si à duobus punctis quatuor rectæ ducantur, ex ſingulis binæ, quæ in concurſu continent duos angulos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum deſcriptus, per alterum quoque angulum tranſibit. 153. A

In circulo quadrilaterũ quodcunq; habet angulos oppoſitos duobus rectis æquales. 154. A
Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales; circulus circa ipſum deſcribi poteſt. 154. A
Si ex ſemicirculis, aut circulis ſimilia ſegmenta detrahantur; reliqua ſegmenta ſimilia etiam ſunt. 154. A
Arcus, quibus anguli æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias inſiſtunt, ſimiles ſunt: Et anguli arcubus ſimilibus inſiſtentes, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias, æquales ſunt. 155. A
Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Recta ex centro ducta abſcindit arcus ſimiles. 155. et 337. A
Si duo aut plures circuli ſe mutuò tangant interius; Rectæ à puncto contactus ductæ abſcindunt arcus ſimiles. 155. A
Si vnum latus quadrilateri in circulo producatur; angulus externus æqualis eſt angulo, qui opponitur angulo ei deinceps. 156. A
Segmenta ſimilia, & inæqualia non conſtituentur ſuper eadem recta linea. 156. A
Segmenta ſimilia ſuper æqualibus rectis, ſunt æqualia. 156. A
Segmenta ſimilia, & æqualia, ſunt conſtituta ſuper æquales rectas, vel ſuper eandem rectam. 157. A
In circulis æqualibus, vel eodem anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias. 158. A
In circulis æqualibus, vel eodem maior angulus, maiori peripheriæ inſiſtet. 159. A
In circulis æqualibus, vel eodem anguli æqualibus peripheriis inſiſtentes, ſunt æquales. 159. & 160. A
In circulis æqualibus, vel eodem angulus maiori peripheriæ inſiſtens, maior eſt. 160. A
In circulo, duæ rectæ ſe non interſecantes & intercipientes arcus æquales, parallelæ ſunt: Et parallelæ intercipiunt arcus æquales. 160. A
Rectæ, quæ ex medio puncto arcus alicuius ducitur tangens circulũ, parallela eſt chordæ illius arcus. 160. A
Angulus rectus in centro inſiſtit quadranti; acutus vero, arcui minori quadrante; & obtuſus, maiori. Et contrà, angulus in centro inſiſtens quadranti, rectus eſt: inſiſtens verò arcui quadrãte minori, acutus: et maiori obtuſus. 161. A
Recta è centro ſecans rectam aliã bifariam, ſecat quoq; arcum bifariam. Et ſecans arcũ bifariam, ſecat quoq; chordam bifariam. 161. A. & 161. 281. B
In circulis æqualibus, vel eodem rectæ æquales, auferunt arcus æquales. 162. A
In circulis æqualibus, vel eodem, maior linea maiorem arcum aufert, ſi de arcubus ſemicirculo minoribus ſermo fiat; minorem verò, ſi de ſegmentis maioribus agatur. 162. A
In circulis æqualibus, vel eodem, ſi arcus ſint æquales, erunt & rectæ æquales. 162. A
In circulis æqualibus, vel eodem maior arcus habet chordam maiorem, ſi de arcubus ſemicirculo minoribus loquamur: minorem verò, ſi de maioribus. 162. A
Circuli, è quibus æquales rectæ auferunt ſimiles arcus, æquales ſunt. 163. A
Ex circulis inæqualibus rectæ æquales auferunt arcus diſſimiles. 163. A
Ex circulis inæqualibus lineæ rectæ auferentes arcus ſimiles, inæquales ſunt. 163. A
Rectæ lineæ auferentes arcus ſimiles inæquales ex quibuſuis circulis, inæquales ſunt. 163. A
Si in diametro circuli præter centrum ſumatur punctum, ab eoq; in peripheriam duæ rectæ nõ in eaſdem partes cadentes, efficiant ad diametrũ angulos æquales; rectæ illæ æquales erunt, & arcus abſcindent æquales. Et ſi lineæ ſint æquales, conſtituent ad diametrum angulos æquales, abſcindentq; arcus æquales. Si denig; abſcindant arcus æquales, erunt rectæ illæ æquales, angulosq; ad diametrum æquales conſtituent. 163. A
Si in diametro circuli præter centrũ ſumatur punctum, à quo ad caſdẽ partes duo anguli æquales conſtituantur, inſiſtent ei anguli arcubus inæqualibus, maiorq; erit ille, qui à minori portione diametri remotior eſt. 164. A.
In ſemicirculo angulus rectus eſt: In maiore ſegmento acutus. Et in minore obtuſus. Angulus item maioris ſegmenti recto maior: minoris verò ſegmenti recto minor. 164. A
Segmentum circuli, in quo angulus rectus eſt, eſt ſemicirculus, in quo verò acutus, ſegmẽtum maius eſt: & in quo obtuſus, ſegmẽtum minus. Et ſegmentum, cuius angulus eſt recto maior, eſt maius: cuius verò angulus eſt recto minor, eſt minus. 166. A
Circulus ex puncto medio lateris recto angulo oppoſiti in triangulo rectangulo deſcriptus per vnum angulum, tranſit quoq; per reliquos. 167. A
Si per centrum circuli alius circulus deſcribatur, & per vtriuſque centrum recta ejiciatur; à puncto verò, vbi hæc recta poſteriorem circulum ſecat, ducatur recta vtcunque, ſecabitur eius portio intra priorem circulum bifariam. 167. A
Si circulum tangat recta, & à contactu ducatur linea vtcunque ſecans: anguli ad contingentem æquales ſunt angulis in alternis ſegmentis. 168 A
Si recta ducta ad extremitatem rectæ circulum ſecantis faciat cum ea angulos æquales angulis in alternis ſegmentis, recta illa ducta circulum tangit. 168. A
Si in circulo duæ rectæ ſe ſecent: rectangulum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis alterius. 169. A
Si duæ rectæ ita ſe ſecent, vt rectangulum ſub ſegmentis vnius æquale ſit rectangulo ſub ſegmentis alterius: deſcribi poterit per quatuor earum puncta extrema circulus. 170. A
Si extra circulum ſumatur punctum, à quo ducatur recta tangens, & altera ſecans: erit quadratum tangentis æquale rectangulo ſub tota ſecante, & eius ſegmento exteriore. 170. A
Si à puncto extra circulum ducantur plures rectæ ſecantes; rectangula ſub totis ſecantibus, & ſegmentis exterioribus, æqualia ſunt. 171. A
Duæ rectæ tangentes circulum ab eodem puncto ductæ, ſunt æquales. 171. A
Ab eodem puncto duæ tantùm rectæ circulum tangentes duci poſſunt. 171. A
Si duæ rectæ æquales ducantur ab eodem puncto ad circulum, vna autem earum ſit tangens, erit & altera tangens. 172. A
Si à puncto duæ rectæ egredientes ita ſecentur in binas partes ſingulæ, vt rectangula ſub totis, & ſegmentis prope punctũ, æqualia ſint: deſcribi poterit circulus p extrema

extrema reliquorum segmentorum. 172.A
Si extra circulum punctum sumatur, à quo ducatur recta secans, & altera incidens, vsq; ad circumferentiam conuexam: sit autem quadratũ incidentis æquale rectangulo sub tota secante, & eius segmẽto exteriore: Incidens circulum tanget. 173.A
Si à puncto duæ tangentes ad circulum ducantur, aut duæ secantes æquales: Recta ab eodem puncto per centrum ducta diuidit angulum ab eis comprehẽsum, bifariam. Et contrà, Recta secans angulum bifariam, per centrum circuli transit. 173.A
Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorẽ est arcus minoris circuli, quàm vt similis sit arcui circuli maioris 337.A
Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus simpliciter inæquales, maiorẽ est arcus circuli minoris simpliciter, & non solùm maior, quàm vt similis sit arcui circuli maioris. 337.A
Si in circulo, ductis duabus diametris sese ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eiq; ex vna parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrumque quadruntem in partes æquales, ac deniq; ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctũ proximæ parallelæ recta ducatur, cõueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis, vnà cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis. 161.A
Si ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitẽtur, & ab eisdem extremis per vnum idemq; punctum duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus: erit rectangulum sub vtralibet secantiũ, & eius segmento interiore comprehẽsum, quadrato diametri æquale 346.A
Si in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secent, & ab vnius extremo recta ducatur vtcunq; secans circumferentiam, & alteram diametrum siue productam, siue intra circulum: erit rectangulum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum verò inter idem punctum extremum, & circumferentiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum descripto. 346.A
Circumferentia circuli ad eius diametrum quam proportionem plus minus, habeat. 354.A

CIRCVMFERENTIA. vide Circulus.

COMMENSVRABILES & incommensurabiles magnitudines.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiore auferatur maius quàm dimidium: & ab eo quod reliquum est, rursus detrahatur maius quàm dimidium: & hoc semper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine. 102.B
Idem eueniet, si dimidium auferatur, &c. 103.B
Si duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minimè præcedentem metiatur: incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines. 103.B
Si duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam reliqua præcedentem metietur. 104.B
Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam reliqua præcedẽtem metietur. 104.B
Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, metietur quædam reliqua præcedentem. 104.B
Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem. 105.B
Magnitudo metiens tres aut quotcunq; magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem. 106.B
Si sint quotcunq; magnitudines, & totidem numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: & ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri. 106.B
Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum. 106.B
Commensurabiles magnitudines proportionem habent eandem, quam numeri, per quos earum mensura communis maxima ipsas metitur. 107.B
Si duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines. 107.B
Incommẽsurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum. 108.B
Si duæ magnitudines inter se proportionẽ non habeant, quam numerus ad numerum: incommẽsurabiles erunt magnitudines. 108.B
Si sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoq; proportionales, sitq; vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam. 109.B
Idem sequitur si plures quantitatet sint, quàm tres, &c. 109.B
Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, inter se proportionẽ habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata: inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem nõ habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ; neq; latera habebunt longitudine commensurabilia. 109.B
Rectæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia sunt commensurabiles: quæ verò potentia commensurabiles sunt, non om-

nino & longitudine commenſurabiles ſunt. Et quæ longitudine ſunt incommenſurabiles, non omnino & potentia incommenſurabiles ſunt, quæ verò potentia incommenſurabiles ſunt, omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt. 110.B

Si quatuor magnitudines ſint proportionales, prima verò ſecundæ ſit commenſurabilis: & tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ ſit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommenſurabilis erit. 113.B

Recta media proportionalis inter duas rectas potentia tantùm commenſurabiles, vtrilibet illarum incommenſurabilis eſt longitudine & potentia, ac proinde appellabitur Irrationalis, ſi alterutra illarum ſtatuatur Rationalis. 115.B

Quæ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles. 115.B

Si ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera verò ſit vni cuipiam commenſurabilis; erit & reliqua eidem commenſurabilis. 115.B

Si ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera verò incommenſurabilis; incommenſurabiles erunt magnitudines. 116.B

Si ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera autem ipſarũ magnitudini cuipiam incommẽſurabilis fuerit; Et reliqua eidem incommenſurabilis erit. 116.B

Quæ incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles; & inter ſe incommenſurabiles erunt. 116.B

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus poſſit, quàm ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ ſibi commenſurabilis longitudine; Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quãtum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine commẽſurabilis. Quod ſi prima tantò plus poſſit quã ſecũda, quantum eſt quadratum rectæ ſibi incommenſurabilis longitudine; Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. 117.B

Si duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtriq; ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit, & quæ à principio magnitudines commenſurabiles erunt. 118.B

Si tota magnitudo ex duabus compoſita, commenſurabilis ſit alteri ipſarum; eadem & reliquæ commenſurabilis eſt. 118.B

Si duæ magnitudines incommẽſurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipſarũ incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum incommenſurabilis fuerit, & quæ à principio magnitudines incommẽſurabiles erunt. 118.B

Si tota magnitudo ex duabus cõpoſita incommenſurabilis ſit alteri ipſarum; eadem & reliquæ incommenſurabilis eſt. 118.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati; quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat: Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tãtò plus poſſit quã minor, quantum eſt quadratũ rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammũ ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; In partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet. 120.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommẽſurabiles longitudine ipſam diuidat: Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. Quod ſi maior tantò plus poſſit, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; In partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet. 121.B

Diameter quadrati longitudine incommenſurabilis eſt lateri. 253.254.A. & 47.184.B

Inuentis rectis lineis longitudine incommenſurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atq; ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. 185.B

COMPOSITI inter ſe numeri. vide Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. vide Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. vide Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. vide Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. vide Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. vide Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. vide Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, ſphæram, atque aliam figuram.

Quadrilaterum in circulo habet oppoſitos angulos duobus rectis æquales. 154.A

Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales; circulus circa ipſum deſcribi poteſt. 154.A

Quadrilateri in circulo angulus externus æqualis eſt ei, qui opponitur ei deinceps. 156.A

Quadrilaterum in circulo, cuius duo latera oppoſita ſunt parallela, & æqualia, parallelogrammum eſt rectangulum. 167.A

In omni triangulo, cui circulus inſcribitur, duo quæuis latera

latera ſuperant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli comprehenſi ſub recta ab angulo illis lateribus comprehenſo in canam peripheriam ducta, & ſub ſegmento eius exteriore. Quod ſi angulus comprehenſus ſit rectus, ſuperabunt duo illa latera latus recto angulo oppoſitum diametro circuli triangulo inſcripti. Vel duo quæuis latera ſuperant reliquum duabus rectis tangentibus inter angulum illorum laterum, & circulum interpoſitis. 177.A

Si centrum circuli triangulo circumſcripti cadit intra triangulum, omnes eius anguli acuti ſunt: Si in vnũ latus, angulus oppoſitus rectus eſt: Si denique extra vnum latus, angulus oppoſitus obtuſus eſt. 178.A

In triangulo acutangulo centrum circuli circumſcripti cadit intra: In rectangulo, in latus recto angulo oppoſitum: In obtuſangulo denique extra latus angulo obtuſo oppoſitum. 178.A

Quadratum circulo circumſcriptum duplum eſt quadrati eidem circulo inſcripti. 180.A

Pentagoni circulo inſcripti, hoc eſt, æquilateri, & æquianguli, angulus quilibet cõtinet tres quintas duorum rectorum, vel ſex quintas vnius recti. 181.A

Si in circulo figura quæuis æquilatera & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum excitentur perpendiculares, conſtituent hæ perpendiculares ſimilem figuram circulo circumſcriptam. 182.A

Hexagoni circulo inſcripti latus, æquale eſt ſemidiametro circuli. 185.A

Si in circulo ab eodem puncto inſcribantur latera duarum figurarum regularium, continebit arcus inter illa incluſus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter ſe differunt denominatores eorundem laterum: Figura autem inſcribenda continebit tot latera, quot vnitates ſunt in numero ex multiplicatione denominatorum producto. 186. & 187.A

Omnis figura æquilatera circulo inſcripta, eſt quoque æquiangula: at non omnis figura æquilatera circulo circumſcripta, æquiangula quoque eſt, niſi quando numerus angulorum ipſius eſt impar, &c. 187.A

Omnis figura æquiangula circulo circumſcripta, eſt quoque æquilatera: at non omnis figura æquiangula circulo inſcripta, æquiangula quoque eſt, niſi quando numerus laterum, &c. 189.A

Si bifariæ ſectiones laterum regularis figuræ rectis coniungantur, inſcripta erit ſimilis figura, idem centrum habens. 193.A

Solum triangulum æquilaterum, quadratum, & Hexagonum æquilaterum atq; æquiangulum, ex omnibus figuris regularibus, locum replent. 193.A

In figura æquilatera, & æquiangula, ſi quidem angulorum numerus impar eſt, recta linea ex quouis angulo demiſſa ſecans oppoſitum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam: Et contrà, recta linea diuidens angulum bifariam, ſecat quoque latus oppoſitum bifariam. Si verò numerus angulorum eſt par, recta linea ex ex quouis angulo ad oppoſitum angulum ducta ſecat vtrumque angulum bifariam: Et cõtrà, recta linea ſecans quemuis angulum bifariam, cadit in oppoſitum angulum, eumque bifariam etiam diuidit. 183.A

Si baſis quadratricis intra quadrantem & quadratum deſcriptæ, ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli; eius latus, ſiue ſemidiameter quadrantis æquabitur quadranti illius circuli, &c. 354.A

Quæ in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata. 226.B

Si pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint; æquiangulum erit ipſum pentagonum. 258.B

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant lineæ rectæ; hæ extrema ac media ratione ſe mutuò ſecant, & maiora ipſarum ſegmẽta æqualia ſunt pentagoni lateri. 258.B

Recta ſubtendens vnum angulum pentagoni æquilateri & æquianguli, parallela eſt oppoſito lateri. 259. & 311.B

Si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum componantur; tota recta linea extrema atque media ratione ſecatur; & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. 259.B

Si latus hexagoni ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentum eſt latus decagoni. 259.B

Si lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli. 260.B

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum. 260.B

Diameter circuli ex angulo quouis pentagoni, vel alterius figuræ æquilateræ imparium laterum, diuidit & latus oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos, & arcum, quem illud latus ſubtendit. 261.B

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus potentia triplum eſt eius lineæ, q̃ ex centro circuli ducitur. 262.B

Diameter circuli potentia eſt ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti. 263.B

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; diameter ex vno angulo ducta diuidit & angulum bifariam, & latus oppoſitum; ac inſuper ad angulos rectos: Semidiameter quoque vicißim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur à latere oppoſito. 263.B

Sphæræ diameter potentia eſt ſeſqualtera lateris pyramidis in ea deſcriptæ. 264. & 345.B

Diameter ſphæræ potentia eſt quadrupla ſeſqualtera ſemidiametri circuli circa baſem pyramidis in ea ſphæra exiſtentis deſcripti. 265.B

Perpendicularis ex centro ſphæræ ad baſim pyramidis in ea ſphæra exiſtentis demiſſa, ſexta pars eſt diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. 265.B

Altitudo pyramidis intra ſphæram continet duas tertias partes diametri. Et diameter potentia eſt dupla ſeſquiquarta altitudinis pyramidis. 265.B

Sphæræ diameter potentia eſt dupla lateris Octaedri in ea deſcripti. 265.& 345.B

In octaedro tres diametri se mutuò ad angulos rectos secant. pag. 266.B

Octaedrum diuiditur in duas pyramides similes & æquales; quarum basis communis quadratum lateris octaedri, altitudo verò semidiameter sphæræ vel octaedri. 266. & 292.B

Si tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potẽtia sesquitertium lateris octaedri. 266. 267. & 297.B

Octaedri bases oppositæ sunt inter se parallelæ. 267. & 345.B

Sphæræ diameter potentia est tripla lateris cubi in ea descripti. 267. & 346.B

Omnes diametri cubi æquales sunt, seseq; bifariam secant in centro sphæræ. Item rectæ coniungentes centra basium oppositarum se mutuò bifariam secant in eodem centro. 268.B

Potentia diametri sphæræ, seu cubi æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul. 268.B

Si diameter sphæræ sit Rationalis linea; latus Icosaedri in ea est Irrationalis linea, quæ vocatur Minor. 268.B

Sphæræ diameter potentia est quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis. 271.B

Diameter sphæræ composita est ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli. 271.B

Icosaedri latera opposita sunt parallela. 271. & 346.B

Si diameter circuli sit Rationalis linea; latus Dodecaedri in ea descripti est Irrationalis linea, quæ vocatur Apotome. 272.B

Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum est latus Dodecaedri eiusdem sphæræ. 274.B

Latus cubi æquale est rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eiusdem sphæræ. 274.B

Si recta secetur extrema ac media ratione, minusq; segmentum sit latus Dodecaedri; maius segmentum erit latus cubi eiusdem sphæræ. 274.B

In Dodecaedro sunt sex latera, quorũ bina opposita sunt parallela, bifariamq; secantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. 275.B

Si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, secetur extrema ac media ratione; maius segmentum est latus cubi, minus verò, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ. 275.B

Plura corpora Regularia, quàm quinque, constitui non possunt. 277.B

Cubus & octaedrum: Item Icosaedrum & Dodecaedrũ, reciprocantur, quod ad numerum basium & angulorum attinet. Solum tetraedrum tot bases habet, quot angulos solidos. 279.B

Quæ ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque lineę simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti. 280.B

Perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta æqualis est vtriq; rectæ simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni. 281.B

Latus hexagoni ad latus decagoni eiusdem circuli eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni, ad latus ipsius pentagoni. 281.B

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus verò æquale est dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. 281. & 282.B

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati. 282.B

Si in sphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inscribantur; quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, vtrag; simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum dodecaedri circumscribentis. 282.B

Si latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentũ erit latus decagoni eiusdem circuli. 282. & 283.B

Idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triãgulum, eidem sphæræ inscriptorum. 283. & 350.B

Si ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehẽditur, rectãgulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale. 284.B

Si ex centro circuli triangulũ Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Icosaedri superficiei æquale. 284.B

Superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem Icosaedri cuiuscunq; etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectãgulum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ex centro pentagoni Dodecaedri in latus illud ducta contentum ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in illud latus. 285.B

Si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum latus; Erit quod sub dicto latere & perpendiculari cõtinetur, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri: In Octaedro verò & cubo, duodecies sumptum superficiei Octaedri, & cubi æquale. 285.B

Rectangulum contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinq; sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti, æquale est dicto pentagono. 285.B

Rectangulum contentum sub perpendiculari ex angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, & sub quinq; sextis partibus lateris cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti, æquale est pentagono Dodecaedri eiusdem sphæræ. 286.B

Superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem

portionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri. 286.B

Si recta linea ſecetur extrema ac media ratione: erit vt recta potẽs id, quod à tota, & id, quod à maiori ſegmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id, quod à minore ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti. 287.B

Quam proportionem habẽt latera cubi & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum. 288.B

Si ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit. 288.B

Si planum ſecans tranſit per centrum ſphæræ, fit circulus idem centrum habens cum ſphæra: Si verò non tranſit per centrum, fit circulus, cuius centrum punctum eſt, in quod cadit perpendicularis ex cẽtro ſphæræ ad circulum ducta. 289.B

Circuli in ſphæra æquales æqualiter diſtãt à cẽtro ſphæræ: Et circuli æqualiter diſtantes à centro ſphæræ, æquales ſunt. 289.B

Dodecaedrum ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri, in vna eademq; ſphæra. 289.B

Eadem proportio eſt lateris cubi ad latus Icoſaedri, quæ ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extremâ ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentẽ totam eandem, & eius ſegmentum minus: & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ. 290.B

Baſis Tetraedri ſeſquitertia eſt baſis Octaedri eiuſdem ſphæræ: Superficies autem octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri. 291.B

Recta ex angulo Tetraedri per centrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtq; perpendicularis ad baſim 292.B

Tetraedrum ad Octaedrum eiuſdem ſphæræ ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimas quartas partes lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris comprehenſum, ad quadratum diametri ſphæræ. 293.B

Sphæræ ſemidiameter potentia tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſim octaedri eiuſdem ſphæræ cadit. 295.B

Duplum quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæræ: perpendicularis autem à centro ſphæræ in baſim cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi. 295.B

Solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale eſt cubo. Item quod fit ex latere cubi in tertiam partem eius quadrati. 296.B

Solidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuſcunq; corporis Regularis in baſim demiſſa, in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori Regulari. 296.B

Idem circulus comprehendit & cubi quadratũ, & octuedri triangulum eiuſdem ſphæræ. 296.& 346.B

Rectæ coniungentes centra baſium oppoſitarum tam in cubo, quàm in Octaedro, æquales ſunt. 297.B

Octaedrum ad triplum Tetraedri eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. 297.B

Altitudo Octaedri ad altitudinem Tetraedri eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri: Item diameter ſphæræ ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus cubi. 298.B

Si recta propoſita potuerit totam aliquam rectam extremâ ac media ratione ſectam, & maius eius ſegmẽtum: Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta propoſita diameter eſt. 298.B

Si latus Octaedri potuerit maius & minus ſegmentum rectæ extrema ac media ratione ſectæ: poterit latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ duplum minoris ſegmenti. 299.B

Si recta diuiſa extrema ac media ratione, cum minore ſegmento angulum rectum conſtituat, cui recta ſubtendatur: erit recta, quæ potentia ſit ſubdupla eius rectæ ſubtenſæ, latus Octaedri eius ſphæræ, in quã dictum minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri. 299. & 300.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, & alia recta potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum erit latus Dodecaedri eiuſdem cum octaedro ſphæræ. 300.B

Cubus ad Octaedrum eiuſdem ſphæræ eſt, vt ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem. Item vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ. 300.B

Alia inuentio laterum quinq; corporum Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum. 301.& 302.B

Quadratum cubi ad triangulum Tetraedri eiuſdẽ ſphæræ eſt, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo, trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum ductam. 303.B

Latus Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, vel altitudinis ipſius: Axis verò Tetraedri potentia ſeſquitertius eſt lateris cubi eiuſdem ſphæræ. 304.B

Diameter ſphæræ ſeſquialtera eſt axis Tetraedri illius ſphæræ. 304.B

Axis Tetraedri ad latus cubi eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. 304.B

Cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. 304.B

Priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo eiuſdem ſphæræ. 305.B

Si in Tetraedro Octaedrum inſcribatur, Tetraedrum bifariam ſecatur tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant. 306.B

Rectæ connectentes centra baſium cubi oppoſitarum ſe mutuò ſecant & bifariã, & ad angulos rectos. 307.B

Idem eſt centrum Icoſaedri, atq; ſibi inſcripti Dodecaedri. 308.B

Si Tetraedrum Octaedro inſcribatur, erunt quatuor baſes Tetraedri octo baſibus Octaedri parallelæ, ſingulæ binis. 309.B

Item recta centra baſium octaedri oppoſitarum coniungens, ſeſquialtera eſt axis Tetraedri. 309.B

Diameter Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri & cubi, in quo Dodecaedrum inſcribitur. 315.B

Si latus cubi ſecetur extrema ac media ratione; maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in cubo deſcripti: Maius verò ſegmentum latus cubi in hoc Dodecaedro deſcripti. 315.B

Latus cubi æquale eſt duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipſo deſcripti, & Dodecaedri circa eundem cubum deſcripti. 315.B

Recta duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens, eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur. 315.B

Diameter Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri & cubi Icoſaedri ambientis. 316.B

Bifariæ ſectiones ſex oppoſitorũ laterum Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſeſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecãtibus. 316.B

Si latus cubi extrema ac media ratione ſecetur; maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in eo cubo deſcripti. 316.B

Icoſaedri tam latera, quàm triangula oppoſita ſunt parallela. 317.B

Idem eſt centrum Icoſaedri, & Octaedri in eo deſcripti. 317.B

Idem eſt centrum baſis octaedri, & baſis Icoſaedri in eo deſcripti. quod intelligendum eſt de octo baſibus Icoſaedri in octo baſibus octaedri collocatis. 319.B

Idem eſt centrum octaedri, & Icoſaedri in eo deſcripti. 319.B

Idem eſt cẽtrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. 321.B

Recta coniungens bifarias ſectiones oppoſitorum laterũ pyramidis, tranſit per centrum pyramidis, eſtq; tripla lateris cubi in pyramide deſcripti. 321.B

Idem eſt centrum pyramidis, & octaedri in ea deſcripti. 321.B

Idem eſt centrum baſis pyramidis, & baſis octaedri in ea deſcripti. quod intelligendum eſt de quatuor baſibus octaedri in quatuor baſibus pyramidis incentibus. 321.B

Quæ ſolida Regularia, in quibus proprijs deſcribantur, & quæ non: Et alia de hac inſcriptione mutua. 323.B

Si in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum; erit proportio Dodecaedri exterioris ad interius Dodecaedrum triplicata proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ extrema ac media ratione diuiſæ. 324.B

Si ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ ſecantes oppoſita latera extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſem Icoſaedri in ea pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri productæ. 325.B

Latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius ſegmentum eſt rectæ diuiſæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoq; ac media ratione. 326.B

Minus ſegmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione ſecti, potentia duplum eſt lateris Icoſaedri in ea deſcripti. 326.B

Latus cubi potentia dimidium eſt lateris pyramidis in eo deſcriptæ: Latus verò pyramidis duplum eſt longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: Latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri. 326.B

Latus Dodecaedri maius ſegmentum eſt rectæ, quæ potentia dimidium poteſt lateris pyramidis ſibi inſcriptæ. 327.B

Si in cubo deſcribatur & Icoſaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icoſaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & latus Dodecaedri. 327.B

Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti. 327.B

Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. 327.B

Si in octaedro Icoſaedrum deſcribatur; erit latus Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi. 328.B

Latus octaedri potentia eſt quadruplum ſeſquialterum lateris cubi in ipſo deſcripti. 328.B

Latus octaedri potentia eſt quadruplum ſeſquialterum rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri Octaedro inſcripti. 328.B

Latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris Octaedri in Icoſaedro deſcripti. 328.B

Latus cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ extrema ac media ratione ſectæ. Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ lineæ. 328. & 329.B

Latus octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ pyramidis. 329.B

Si ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertiũ quadrati lateris Icoſaedri. 329.B

Diameter Icoſaedri binas rectas poteſt, diametrum ſcilicet cubi in eo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis. 330.B

Latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ duplum poteſt lateris Icoſaedri in eo deſcripti. 330.B

Diameter Icoſaedri poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, & lateris pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum. 330.B

Latus Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atq; extrema ac media ratione ſectæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiuſdem poſitæ. 330. & 331.B

Si dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſecetur, minuſq; eius ſegmentum, à toto latere Icoſaedri detrahatur; à reliqua quoque recta pars rurſum tertia dematur; relinquetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. 331.B

Cubus ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt. 332.B

Pyramis ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. 333.B

Cubus ſibi inſcripti octaedri ſextupla eſt. 333.B

Octaedrum ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt. 333.B

Idem eſt cẽtrum Octaedri, atq; cubi in eo deſcripti. 334.B

Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eſt, vt quadratum lateris Octaedri ad quadratum lateris cubi in eo deſcripti. 334.B

Octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt. 334.B

Pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. 334.B

Cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo

cubo describitur, est vt 27. ad 1. 335.B

Octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionẽ habet, quam duæ bases Octaedri ad quinq; bases Icosaedri. 335.B

Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri opposita rum coniungentem. 336.B

Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis à quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaq; parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: at verò altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. 337.B

Dodecaedrum à duplo cubi sibi inscripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit: alterius verò & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit; ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. 338.B

Dodecaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositã ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri opposita rum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadẽ sphæra cum cubo descripti. 339.B

Dodecaedrum pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo verò tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit: alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo verò minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales. 339.B

Octaedrum excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ. 340.B

Pyramis excedit duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. 340.B

Si in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes cõiungentes, æquales quoq; & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares. 342.B

Si in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad easdem partes coiungentes, in centro sphæræ se intersecãt, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales: rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt. 342.B

Si in sphæris sint duæ rectæ parallelæ; rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt. Et si parallelæ fuerint æquales, coniungentes non solùm æquales, sed & parallelæ erunt, rectosq; cum ipsis angulos conficient. 343.B

Sphæræ diameter ad latus Icosaedri in ea descripti est, vt latus pentagoni ad latus decagoni eiusdem circuli cuiuslibet. 348.B

Latus Icosaedri maius est semidiametro sphæræ, in qua describitur. 348.B

Sphæræ diameter potentia est tripla lateris pentagoni descripti in circulo, qui per tres angulos Icosaedri eius sphæræ incedit, parallelusq; est vni triangulo Icosaedri. 348.B

Iidem circuli sphæræ sustinent & angulos Icosaedri, & angulos Dodecaedri in ea sphæra descriptorũ. 350.B

Si quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula simul maiora, quàm octo quadrata simul. 350.B

Octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti. 350.B

Si octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim octaedri, & cubi ducta. 350.& 351.B

Icosaedri superficies maior est superficie cubi in eadem sphæra descripti. 351.B

Dodecaedrum Icosaedro maius est. 351.B

Icosaedrum cubo maius est. 351.B

Cubus Octaedro maior est. 351.B

Octaedrum Tetraedro maius est. 351.B

Superficies Dodecaedri superficiem Icosaedri superat, & hæc superficiem cubi, & hæc superficiem Octaedri, atque hæc denique superficiem Tetraedri. 352.B

Latus Tetraedri maius est latere Octaedri, & hoc maius latere cubi, & hoc maius latere Icosaedri, atq; hoc denique maius latere Dodecaedri. 352.B

Si corpora regularia sint Isoperimetra; illud, quod plures habet bases, maius est: Vt Icosaedrum maius Dodecaedro, & hoc maius Octaedro, & hoc maius Cubo, atq; hoc denique maius Tetraedro. 352.B

Omnes inclinationes duarum basium cuiusque corporis Regularis æquales sunt. 353.& 354.B

FIGVRAE, anguli, & lineæ proportionales.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem est altitudo, ita se habent inter se, vt bases. 292.A

Triangula & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem. 292.A

Triangula & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines. 293.A

Triangula & parallelogramma, quæ ita se habent inter

ſe, vt altitudines, æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant. 293.A

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta ſit, hæc ſecabit duo latera reliqua proportionaliter. Et ſi duo latera ſecta ſint proportionaliter; recta linea ſectiones iungens, parallela erit reliquo lateri. 293.A

Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecet & baſim: baſis ſegmenta ita ſe habebunt inter ſe, vt reliqua duo latera. Et ſi baſis ſegmenta ita ſe habeant, vt reliqua duo latera: recta à vertice ad ſectionem ducta, bifariam ſecabit angulum trianguli. 294.A

Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera circa æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. 294.A

Recta linea vni lateri trianguli parallela, aufert triangulum toti triangulo ſimile. 295.A

Si ex duobus punctis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum verò intra lineam, duæ parallelæ inter ſe educantur ad eaſdem partes, ita vt habeant eandem proportionem, quam rectæ inter ipſas, & alterum punctum extremum incluſæ: Recta coniungens extremum vnius earum, cum extremo prioris lineæ tranſibit per extremum alterius lineæ. 295.A

Si in triangulo parallela vni lateri agatur, recta ex angulo oppoſito ducta ſecat parallelam, & latus illud in eaſdem rationes. 295.A

Si duo triangula latera proportionalia habeãt; æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur. 296.A

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, æqualesq; habebunt angulos, ſub quibus latera homologa ſubtenduntur. 296.A

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circa autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum verò ſimul vtrumq; aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, circa quos proportionalia ſunt latera. 296.A

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in baſim perpendicularis ducta ſit: quæ ad perpendicularem triangula tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt. 297.A

Item tam perpendicularis eſt media proportionalis inter duo baſis ſegmenta, quàm vtrumlibet laterum circa rectum angulum inter totam baſim, & ſegmentum baſis ei lateri adiacens. 298.A

Si duæ rectæ ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoq; intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuſlibet ſegmentis duobus. 300.A

Si recta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales ſecta ſit, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quas illæ, proportiones habeant: Erunt quoq; partes huius lineæ Arithmeticè proportionales. 301.A

Si duæ rectæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoque exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt prioru vna ad vnam poſteriorũ. 301.A

Recta à quouis puncto diametri ducta perpendicularis vſq; ad circumferentiam ſemicirculi, media proportionalis eſt inter diametri ſegmenta. 304.A

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera circa æquales angulos. Et quorũ reciproca ſunt latera circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. 305.A

Æqualium & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera circum æquales angulos. Et quorum reciproca ſunt latera circa æquales angulos, illa ſunt æqualia. 305.A

Si quatuor rectæ proportionales ſint; rectangulum ſub extremis æquale eſt rectangulo ſub mediis. Et ſi rectangulum ſub extremis æquale ſit rectangulo ſub mediis, illæ quatuor rectæ proportionales ſunt. 305.A

Idem euenier, ſi parallelogramma non ſint rectangula, ſed tantùm æquiangula. 306.A

Si tres rectæ ſint proportionales; rectangulum ſub extremis quadrato mediæ æquale eſt. Et ſi rectangulum ſub extremis quadrato mediæ ſit æquale; illæ tres proportionales ſunt. 306.A

Recta, cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub duabus rectis quibuſcunque, media proportionalis eſt inter eas duas rectas. 306.A

Idem euenier, ſi parallelogramma non ſint rectangula, æquiangula tamen. 306.A

Triangula ſimilia inter ſe ſunt in duplicata ratione homologorum laterum. 316.A

Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiam, ita eſt triangulum ſuper primam ad triangulum ſuper ſecundam ſimile, ſimiliterq; deſcriptum. 316.A

Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent rationem homologorum laterum. 317.A

Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiam, ita eſt polygonum ſuper primã, ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum. 318.A

Similia polygona æquilatera, & æquiangula, diuiduntur in ſimilia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis rectis à centris circulorum ipſa circumſcribentium ad omnes angulos. 319.A

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. 319.& 320.A

Si quatuor rectæ ſint proportionales: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta, proportionalia ſunt. Et ſi à rectis ſimilia ſimiliterq; deſcripta rectilinea, proportionalia ſint: ipſæ etiam rectæ proportionales erunt. 320.A

Æqualia rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta, ſunt ſuper æquales rectas. 320.& 321.A

Si tres rectæ ſint proportionales; erunt quoq; rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta ab eis proportionalia, &c. 321.A

Æquiangula parallelogramma inter se rationẽ habent ex lateribus compositam. 321.A

Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia proportionem habent ex lateribus circa æqualem angulum compositam. 323.A

Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia, eandem proportionem habent, quam rectangula sub lateribus circa angulum æqualem contenta. 323.A

Parallelogramma æquiangula eandem rationem habẽt, quam rectangula sub lateribus circa angulum æqualem contenta. 324.A

Triangula & parallelogramma inter se rationem habẽt compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum. 324.A

In parallelogrammo parallelogrãma circa diametrum, & toti, & inter se sunt similia. 325.A

Datis duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare. 326.A

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit simile toti, & similiter positũ, communem cum eo habens angulum: hoc circa eandem cum toto diametrum cõsistit. 327.A

Idem euenit, si angulum habeant non communem. 328.A

Parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus, similiterque positis ei, quod à dimidia describitur: maximum id est, quod ad dimidium applicatur, parallelogrammum simile existens defectui. 329.A

In rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. 332.A

Si figura, quæ ab vno latere trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ à reliquis duobus lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: angulus sub reliquis his lateribus comprehensus, rectus est. 333.A

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundùm vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint parallela: tum reliqua latera in rectam lineam collocata reperientur. 333.& 334.A

In circulis æqualibus, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper verò & sectores, quippe qui ad centra consistunt. 334.A

In circulis æqualibus, est sector ad sectorem, vt angulus ad angulum in centro. 335.A

Vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita est arcus illi angulo subtensus ad totam circumferentiam. Et contrà. 335.A

Similia circulorum segmenta eandem habent proportionem ad totas circumferentias. 336.A

Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Rectæ ex centro ductæ abscindunt arcus similes. 155. & 337.A

Si in circulo duæ rectæ se mutuò secent: erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca. 341.A

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ circulum secantes: erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto recta ducatur circulum tangens: erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentũ exterius. 341.A

Si duæ rectæ se mutuò secent, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuò demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum, & sectionem, altera verò inter sectionem, & prioris lineæ assumptæ perpendicularem interiicitur, aliis duabus eodem modo inclusis reciprocæ. 341.A

In parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuò secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia. 342.A

Omne quadrilaterum à duabus diametris diuiditur in quatuor triangula proportionalia. 342.A

In triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione: tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sint continuè proportionalia: perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa, secat basim extrema ac media ratione. 342.A

Si ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis ducantur rectæ vsq; ad peripheriam quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittantur perpendiculares, & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: Erunt arcus quadrantis inter semidiametros interiecti, perpendicularibus, vel segmentis semidiametri intra parallelas positis, proportionales. 350.& 351.A

Si quadrantis & Quadratricis idem centrum sit: erunt arcus quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis, continuè proportionales. 353.A

Circumferentia circuli ad eius diametrum, proportio in numeris plus minus, quæ sit. 354.A

Si sint duæ rectæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum primæ ad rectangulum sub illis duabus contentum. Et vt secunda ad primã, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum primæ. 123.B

Si sint duæ rectæ inæquales, erit vt prima ad secundam, ita rectangulum sub ipsis ad quadratum secundæ. 134.B

Si sint tres rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda cõtentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur. 135.B

Si recta linea secetur in partes duas inæquales: erit vt alterutra pars ad alteram, ita rectangulum sub tota & priore parte assumpta, ad rectangulum sub tota, & altera parte contentum. 136.B

Si recta sit secta vtcunque: erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum sub tota, & vna parte contentum, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis. 148.B

Si duæ rectæ parallelis planis secentur: In easdem rationes secabuntur. 203.& 204.B

Si solidum parallelepipedum plano secetur, aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. 210.B

Idem conuenit in omne prisma. 211.B
Si prisma quodcunq; secetur plano oppositis planis æquidistante, sectio est figura æqualis, & similis planis oppositis. 212.B
Solida parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases. 217.B
Si parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. 217.B
Similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. 218.B
Si sint quatuor rectæ continuè proportionales, vt est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super primam descriptum, ad parallelepipedum simile, similiterq; descriptũ super secundam. 218.B
Æqualium solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur. Et quorum solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocãtur; illa sunt æqualia. 218.B
Hæc quinq; quæ proximè de parallelepipedis dicta sunt, conueniunt etiam prismatis, in quibus duo plana opposita sunt triangula. 220.B
Si tres rectæ sint proportionales; quod ex illis fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum verò prædicto. 221.B
Si parallelepipedum ex tribus rectis descriptum, æquale sit parallelepipedo sibi æquiangulo à media recta descripto; erunt tres rectæ continuè proportionales. 222.B
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. 222.B
Eodem modo si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. 223.B
Idem quoque quadrat in prismata triangularium planorum oppositorum ex quatuor rectis, vel tribus, continuè proportionalibus descripta, si similia, similiterq; posita sint. 223.B
Circuli inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. 227.B
Circulus ad circulum est, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. 228.B
Sub eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases. 230.B
Si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. 231.B
Sub eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases. 231.B
Idem verum est de pyramidib. eiusdem altitudinis, quarum vna basim habet plurium angulorum, quam altera. 232.B
Pyramides quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases; tandem habent altitudinem. 233.B
Pyramis quælibet tertia pars est prismatis, & eandem cum illa habet & basim, & altitudinem. Siue prisma quodlibet triplum est pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basim & altitudinem. 233.B
Eodem modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini æqualem. 234.B
Prismata eiusdem altitudinis super quascunque bases, inter se sunt, vt bases. 234.B
Si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. 234.B
Quæ de prismatis dicta sunt, intelligi debent de iis, quæ habent plana opposita basibus æqualia, & similia. 234.B
Similes pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione. 235.B
Similes pyramides, quarum bases plura latera, quàm tria continent, habent proportionem homologorum laterum triplicatam. 235.B
Similia prismata triplicatam proportionem habent laterum homologorum. 236.B
Pyramides multangulæ similes diuiduntur in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. 236.& 237.
Prismata multangula similia diuiduntur in prismata similia triangulares bases habẽtia, & numero æqualia, & homologa totis. 237.B
Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases, & altitudines; illæ sunt æquales. 237.B
Æqualium pyramidum, quarum bases non sunt triangulares, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. 237.B
Idem conuenit prismatibus. 238.B
Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. 239.B
Atque hoc verum est, siue coni & cylindri recti sint, siue scaleni. 240.B
Si coni & cylindri quicunq; inter se sint, vt bases, ipsi sub eadem altitudine erunt. 241.B
Coni & cylindri similes, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. 241.B
Idem hoc locum habet in conis & cylindris scalenis. 241.B
Si cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 243.B
Idem intelligatur de cylindro scaleno. 243.B
Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri, inter se sunt, vt altitudines. 244.B
Idem conuenit conis & cylindris scalenis. 244.B
Item prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. 244.B
Coni & cylindri tam recti, quàm scaleni: Item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales. 245.B
Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur

cantur baſes, & altitudines. Et quorum conorum & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales. 245.B

Idem conuenit conis & cylindris ſcalenis. 246.B

Sphæræ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. 251.B

Ex quo fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum, ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. 252.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati. 253.B

Si recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſsit; Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ à principio, rectæ. 253.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. 254.B

Si recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſsit eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione. 255.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; quod à tota, quodq; à minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrati. 255.B

Si recta inæqualiter ſecetur, ſitq; quadratum totius, vnà cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti: Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur. 256.B

Si recta ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur, tota linea aſſumens minus ſegmentum, quintuplum poteſt eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur, quadrati. Et ſi recta inæqualiter ſecetur, totaq; aſſumens minus ſegmentum poſsit quintuplum eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur, quadrati; Recta illa ſecundùm extremam & mediam rationem ſecta eſt. 256.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; apponaturq; ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principio, recta linea. 256.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturq; ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat. 257.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, atq; ex dimidio illius auferatur dimidia maioris ſegmenti; erit quoq; dimidia totius diuſa extrema ac media ratione, maiusq; ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius lineæ. 257.B

Si ad rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. 264.B

Si binæ rectæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones. 281.B

Si ſint quatuor rectæ continuè proportionales, necnon & aliæ quatuor, ita vt eadem ſit antecedens omnium; erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata. 302.B

Si duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmentum, alterius verò minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; recta connectens puncta ſectionum duplum poteſt minoris ſegmenti. 319.B

Perpendicularis ex angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione. 324.B

FIGVRAE planæ quadrilateræ. vide Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide Minutię numerorum.

FRACTVS numerus. vide Minutię numerorū.

IMPAR numerus. vide Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide Commenſurabiles, & incommenſurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. vide Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide Triangulum.

LINEA perpendicularis. vide Recta linea.

LINEA recta. vide Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide Recta linea.

LINEAE proportionales. vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commenſurabiles, & incommenſurabiles. vide Commenſurabiles, & incommenſurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in cōmuni.

Si ſint tres rectæ Arithmeticè proportionales: rectangulum ſub extremis, vnà cum quadrato exceſſus, æquale erit quadrato lineæ mediæ. 100.A

Proportionum rationalium genera, & inuentio: Et proportionalitatis Arithmeticæ, Geometricæ, atq; Harmonicæ, ſiue Muſicæ, proprietates variæ, à 195.196. &c. vſq; ad 244.A

Euclides cur in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum

æquè multiplicia definierit. 249.A

Si sint quotcunq; magnitudines quotcunq; magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æquè multiplices; quàm multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium. 261.A

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundę æquè multiplex, atque sexta quartæ: erit & composita prima cum quinta, secundę æquè multiplex, atq; tertia cum sexta quartę. 261.A

Idem sequitur, si prima & tertia, æquales sint secundæ & quartæ; at quinta & sexta, æquè multiplices secundæ & quartæ: Vel prima & tertia, æquè multiplices secundæ & quartæ; at quinta & sexta, æquales secundæ ac quartæ: Vel denique si tam prima & tertia, quàm quinta ac sexta, æquales sint secundæ ac quartæ. 261.& 262.*A*

Si sit prima secundæ æquè multiplex, atq; tertia quartæ: sumantur autem æquè multiplices primæ ac tertię: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusq; æquè multiplex, altera quidem secũdæ, altera autem quartæ. 262.A

Si prima ad secundam habeat eandem rationẽ, quam tertia ad quartam: Etiam æquè multiplices primæ & tertię, ad æquè multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptę fuerint. 262.A

Magnitudines quatuor proportionales, conuertendo quoq; proportionales sunt. 263.A

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atq; ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. 264.A

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æquè multiplices, & detractæ quædam sint earundem æquè multiplices: Et reliquę eisdem aut æquales sunt, aut æquè ipsarum multiplices. 265.A

Æquales ad eandem, eandem habẽt rationem: Et eadem ad æquales. 265.A

Eodem modo, æquales ad æquales eandem habent rationem. 266.*A*

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem. 266.A

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ æquales quoq; sunt. 267.A

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est. 268.A

Quę eidem sunt eędem rationes, & inter se sunt eædem. 268.A

Quæ eisdem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. 268.*A*

Si sint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes. 269.A

Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, maiorem rationẽ habebit, quàm quinta ad sextam. 269.A

Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; tertia verò ad quartam, minorem rationem habuerit, quàm quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam, minorem rationem habebit quàm quinta ad sextam. 269.*A*

Si prima ad secundam, maiorem habuerit rationem, quã tertia ad quartam; tertia item ad quartam, maiorem habuerit, quàm quinta ad sextam: Prima quoque ad secũdam, maiorem habebit, quàm quinta ad sextam. Quod si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; tertia item ad quartam, minorem, quàm quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, minorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam. 269.*A*

Si prima ad secundam sit, vt tertia ad quartam; sit autem prima maior, quàm tertia: erit & secunda maior quàm quarta. Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 270.A

Eodem modo, si secunda maior fuerit quàm quarta; erit & prima maior quàm tertia: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 270.*A*

Partes cum pariter multiplicibus in eadẽ sunt ratione, si prout sibi mutuò respondent, ita sumantur. 271.A

Magnitudines quatuor proportionales; vicissim quoque proportionales sunt. 271.A

Si sint quatuor magnitudines proportionales, sit autem prima maior quàm secunda: erit quoq; tertia maior quàm quarta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 271.*A*

Si compositæ magnitudines fuerint proportionales, hæ quoq; diuisę proportionales erunt. 272.A

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, hę quoq; compositæ proportionales erũt. 272.A

Si sit, vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatũ: erit quoq; reliquum ad reliquum, vt totum ad totum. 274.A

Si sint quatuor magnitudines proportionales; hæ quoque per conuersionem rationis proportionales erunt. 274.A

Si sint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binę & in eadem ratione sumantur; sit autem ex æquo prima maior, quàm tertia; erit & quarta maior quàm sexta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 274.A

Si sint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binæ & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima maior fuerit quã tertia: Erit & quarta maior quàm sexta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 275.A

Si sint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt. 275.A

Si sit prima ad secundam, vt tertia ad quartam: habebunt æquemultiplices primæ, ac tertiæ ad secundam & quartam.

& quartàm, eandem rationem: Item æquemultiplices ſecundæ & quartæ ad primam ac tertiam. Et contrà, eandem rationem habebunt ſecunda & quarta ad æquè multiplices primæ ac tertiæ: Item prima ac tertia, ad æquè multiplices ſecundæ & quartæ. 276. A

Si ſint tres magnitudines, aliæque ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 277. A

Si ſit prima ad ſecundam, vt tertia ad quartam; Item quinta ad ſecundam, vt ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta ad ſecundam erit, vt compoſita tertia cum ſexta ad quartam. 277. A

Si duæ magnitudines ad duas eandem habeãt rationem, & detractæ ex prioribus ad eaſdem poſteriores eandem quoq; habeant rationem; Et reliquæ ad eaſdem poſteriores eandem rationem habebunt. 278. A

Si quatuor magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt. 278. A

Si tres magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quàm dupla reliquæ. 278. A

Si prima ad ſecundam habeat maiorem rationem, q̃ tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam, minorem rationem, q̃ quarta ad tertiam. 279. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem proportionem, quàm tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam, maiorem rationem, quàm quarta ad tertiam. 279. A

Si prima ad ſecundam habeat maiorem rationem, quàm tertia ad quartam: habebit quoq; vicißim prima ad tertiam, maiorẽ rationẽ, quàm ſecunda ad quartam. 279. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem rationẽ, quàm tertia ad quartam: habebit quoq; vicißim prima ad tertiam, minorem rationem, quàm ſecunda ad quartam. 279. A

Si prima ad ſecundam habeat maiorem rationem, quàm tertia ad quartam: habebit quoq; compoſita prima cũ ſecunda, ad ſecundam maiorem rationem, quàm compoſita tertia cum quarta, ad quartam. 280. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quàm tertia ad quartam: habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam minorem rationem, quàm compoſita tertia cum quarta, ad quartam. 280. A

Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam, maiorem habeat rationem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoq; diuidendo prima ad ſecundam maiorem rationem, quàm tertia ad quartam. 280. A

Si prima cum ſecunda ad ſecundam minorem rationem habeat, quàm tertia cum quarta ad quartam: habebit quoq; diuidendo prima ad ſecundam minorem rationem, quàm tertia ad quartam. 280. A

Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habeat maiorem rationem, quàm compoſita tertia cũ quarta ad quartam, habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, minorem rationẽ, quàm tertia cum quarta, ad tertiam. 281. A

Si prima cum ſecunda ad ſecundam, minorem habeat rationem, quàm tertia cum quarta ad quartam: habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, maiorẽ rationem, quàm tertia & quarta ad tertiam. 281. A

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio primæ priorum ad ſecundam, q̃ primæ poſteriorum ad ſecundam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ poſteriorum ad tertiam. 281. A

Idem eueniet, ſi proportio primæ ad ſecundam eadem fuerit, quæ primæ ad ſecundam; at ſecundæ ad tertiam maior, quàm ſecundæ ad tertiam: Vel contrà, ſi proportio primæ ad ſecundam fuerit maior, quàm primæ ad ſecundam; at ſecundæ ad tertiam eadem, quæ ſecundæ ad tertiam. 281. & 282. A

Quòd ſi proportiones priorum magnitudinum minores fuerint: erit quoq; ex æqualitate minor proportio primæ ad tertiam, quàm primæ ad tertiam. 282. A

Idem eueniet, ſi proportio primæ ad ſecundam fuerit eadem, quæ primæ ad ſecundam; at ſecundæ ad tertiam minor, quàm ſecundæ ad tertiam: Vel contrà, ſi proportio primæ ad ſecundam fuerit minor, quàm primæ ad ſecundam; at proportio ſecundæ ad tertiã eadem, quæ ſecundæ ad tertiam. 282. A

Quod ſi plures ſint magnitudines tribus, ſiue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum ſint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum; ſiue vna tantùm maior, quàm vna, vel duæ, &c. Erit maior vel minor proportio primæ ad vltimam in vno ordine, quàm primæ ad vltimam in alio ordine. 282. A

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ poſteriorum ad tertiam. 282. A

Idem eueniet, ſi proportio primæ priorum ad ſecundam ſit, quæ ſecundæ poſteriorum ad tertiam; at ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ priorum ad ſecundam: Vel contrà, ratio primæ priorum ad ſecundam maior, quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam; at ſecundæ priorum ad tertiam eadem, quæ primæ poſteriorum ad ſecundam. 283. A

Quòd ſi in primis magnitudinibus aliquæ proportiones, vel omnes ſint minores; erit minor proportio primæ ad tertiam, quàm primæ ad tertiam. 283. A

Quòd ſi plures ſint magnitudines quàm tres in quolibet ordine: erit quoq; maior vel minor proportio primæ ad vltimam, quàm primæ ad vltimam. 283. A

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio quàm totius ad totum. 283. A

Si fuerit minor ratio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit etiam minor ratio reliqui ad reliquum, quàm totius ad totum. 283. A

Si ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior ratio primæ priorum, ad primam poſteriorum, quàm ſecundæ ad ſecundam; & hæc maior, quàm tertiæ ad tertiam, & ſic deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, maiorem rationem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes poſteriores, relicta quoq; prima;

minorem autem, quàm prima priorum ad primam posteriorum; maiorē denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam posteriorum. 283. A

Propositis quotcunque magnitudinibus, proportio primæ ad vltimam componitur ex omnibus proportionibus intermedijs, vt ex proportione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, &c. 288. A

Si quatuor magnitudines sint Arithmeticè proportionales, hoc est, idem excessus sit inter primam & secundam, qui inter tertiam & quartam; hæ vicissim quoq; erunt Arithmeticè proportionales, hoc est, idem excessus erit inter primam & tertiam, qui inter secundam & quartam. 163. & 164. B

MAGNITVDINES rationales, & irrationales. Vide Rationales, & irrationales magnitudines.

MINVTIAE numerorum.

Nullus numerus fractus, aut compositus ex integro & fracto, in se multiplicatus procreat quadratum numerum integrum. 254. A

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores. 85. B

Numeratoꝝ cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionē habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia. 85. B

Minutia quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata. 86. B

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quàm numeratores. 86. B

Si duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur; erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem. 86. B

Integrum ad summam duarum minutiarū eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter verò ex numeratore posterioris in denominatorē prioris gignitur. 87. B

Si duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris. 87. B

Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem. 87. B

Minutiæ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorem proportionem habet, quàm denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quàm denominator. 88. B

Minutia minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator verò ex mutua denominatorū multiplicatione procreatur. 89. B

Duæ minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt numeros æquales, æquales sunt: & minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti, gignunt æquales numeros. Cuius verò numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: & maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit. 90. B

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator verò maior numerus dividens. 91. B

NVMERI proportionales in communi.

Propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptiq; primi ac tertij æquè multiplicibus iuxta quāuis multiplicationem, item secundi & quarti æquè multiplicibus iuxta quamcunque etiam multiplicationem: si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit & multiplex tertij maior multiplice quarti: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 251. A

Propositis quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; si sumantur æquè multiplices primi, ac tertij, item æquè multiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex autem tertij non maior multiplice quarti. 251. & 252. A

Propositis quatuor numeris, sumptiq; æquè multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æquè multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem; si multiplice primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoq; sit necesse erit, quàm multiplex quarti; Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor: Erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum. 253. A

Propositis quatuor numeris, sumptiq; primi ac tertij æquè multiplicibus, item secundi & quarti æquè multiplicibus; si quando contingat, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, multiplicem verò tertij non maiorē multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum. 253. A

Datis tribus terminis Geometricè proportionalibus, siue æqualibus, siue inæqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa conflata ex secundo & tertio semel; ac tertius semel, sunt etiam Geometricè proportionales. pag. 313. A

Datis tribus terminis, siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus: Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata; ac denique tertius semel, sunt Arithmeticè proportionales. 313. A

Datis tribus terminis, siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus: Summa collecta ex primo

ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel: ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coaceruata, Harmonicè proportionales sunt. 314. *A*

Numerus ex multiplicatione duorum numerorum productus, ita se habet ad alterutrum multiplicantium, vt alter multiplicantium ad vnitatem. 6. *B*

Numerus ex diuisione duorum numerorum procreatus, ita se habet ad vnitatem, vt diuisus numerus ad dividentem. 6. *B*

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriusque simul eadem pars erit, quæ vnus vnius. 15. B

Idem conuenit numeris fractis. 16. *B*

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus, alterius numeri eadem pars: Et simul vterque vnitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri. 16. *B*

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars: Et omnes omnium simul eadem pars erũt, quæ vnus vnius. 16. *B*

Idem numeris fractis conuenit. 17. *B*

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æquè multiplices: quàm multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium. 17. *B*

Idem verum est de numeris fractis. 17. *B*

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius. 17. B

Idem locum habet in numeris fractis. 17. *B*

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes: Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius. 17. *B*

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius. 18. B

Idem locum habet in numeris fractis. 18. *B*

Si numerus numeri æquè fuerit multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius. 18. *B*

Idem verum est de numeris fractis. 18. *B*

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: & reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius. 18. B

Idem in fractis numeris verum est. 19. *B*

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti. 19. B

In fractis numeris idem concludes. 19. *B*

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars. 19. B

Numeris fractis hoc idem conuenit. 19. *B*

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. 20. B

Idem in fractis numeris verum est. 20. *B*

Si primus secundum, & tertius quartum æqualiter continet, eandemq; insuper partẽ, aut partes: erit secundus primi, & quartus tertij eædem partes. Et si secundus primi, & quartus tertij eædem partes sit: continebit primus secundum, & tertius quartum æqualiter, eandemq; insuper partem, aut partes. 20. *B*

Idem verum est in numeris fractis. 20. *B*

Si sint quotcunque numeri proportionales: erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes. 21. B

Verum quoq; hoc est in numeris fractis. 22. *B*

Si quatuor numeri proportionales sint: Et vicissim proportionales erunt. 22. B

In fractis idem cernitur. 23. *B*

Si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 23. B

Idem in numeris fractis verum est. 23. *B*

Duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem sunt: inter se quoque sunt eædem. 23. *& 24. B*

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æquè vnitas tertium numerũ metietur, & secundus quartum. 24. B

Si numerus duos numeros multiplicãs fecerit aliquos: geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati. 25. B

In fractis numeris idem verum est. 25. *B*

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipsis eandẽ rationem habebunt, quam multiplicantes. 25. B

In fractis idem habet locum. 25. *B*

Si numerus quotcunq; numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent, habebunt producti numeri easdem rationes, quas numeri multiplicantes. 25. *B*

Si quatuor numeri sint proportionales: q ex primo & quarto fit, numerus, æqualis est ei, qui ex secundo & tertio fit, numero. Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis sit ei, q ex secundo & tertio fit, numero: ipsi quatuor numeri proportionales erunt. 25. & 26. B

Verum est idem in numeris fractis. 26. *B*

Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem, multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem: geniti ex ipsis æquales erunt. 26. *B*

Idem conuenit numeris fractis. 26. *B*

Si maior sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum: qui ex primo & quarto fit, numerus, maior est eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et contrà tam in fractis numeris, quàm integris. 26. *B*

Si tres numeri sint proportionales: qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui à medio efficitur: Et si qui sub extremis continetur, æqualis sit ei, qui à medio describitur: ipsi tres numeri proportionales erunt. 27. B

In fractis idem verum est. 27. *B*

Si maior sit proportio primi ad secundum, quàm secundi ad tertium: maior fiet numerus ex primo in tertium, quàm ex secundo in se: Et contrà, tam in numeris fractis, quàm integris. 27. *B*

Minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationē habentes, maior quidem maiorē, minor verò minorem. 27.B

Si tres numeri sint continuè proportionales, & primi duo dicantur in sua proportione minimi, metietur primus secundum, & secundus tertium. 27.& 28.B

Quotlibet numeri minimi in continuatione suarum proportionum, sive eædem sint, sive diversæ proportiones, metiuntur æquè totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, & tertius tertium, &c. 28.B

Si sint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 28.B

Idem verum est in numeris fractis. 29.B

Si quatuor numeri tam integri, quàm fracti, proportionales sint, & convertendo proportionales erūt. 29.B

Si compositi numeri, sive integri, sive fracti, proportionales sint, & divisi proportionales erunt. 29.B

Si divisi numeri proportionales sint, sive integri, sive fracti, & divisi proportionales erunt. 29.B

Si compositi numeri tam fracti quàm integri, proportionales sint, & per conversionem rationis proportionales erunt. 30.B

Si primus ad secundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum: habeat autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum, tam in fractis numeris, quàm integris: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum. 30.B

Si duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem, & detracti quidam habeant ad eosdem eandem, tam in numeris fractis, quàm integris: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt. 30.B

Si primus ad secundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum; habeat autē & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum, tam in integris, quàm fractis numeris: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eundem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto. 30.B

Si quotcunque numeri ad eundem habeant proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam aliū eundem, tam in fractis, quàm integris numeris: habebunt quoq; omnes illi simul ad eundem, proportionē, quam hi alij omnes simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habeat, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: habebit quoq; idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul. 30.B

Ultimæ nouem propos. lib. 5. à Campano adiectæ, qua ratione eodem modo demonstrentur in numeris improportionalibus. 31.B

Maxima mensura quotlibet numerorum metitur ipsos per numeros minimos eandē cum ipsis proportionem habentes. 35.B

Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorē, & minor maiorem; producetur minimus numerus ab illis numeratus. 36.B

Si fuerint quotcunq; numeri deinceps proportionales, extremi verò ipsorum primi inter se sint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 39.B

Si sint quotuis numeri non continuè proportionales, extremi verò ipsorum sint inter se primi; ipsi minimi sunt in continuatione suarum proportionum. 40.B

Si tres numeri sint minimi cōtinuè proportionales; extremi quadrati sunt: Si autem quatuor cubi, &c. 40.& 41.B

Extremi numeri continuè proportionalium quotcunq; minimorum primi sunt inter se. 41.& 42.B

Duo numeri minimi in sua pportione metiuntur omnes medios quotcunque minimorū in eadem ratione. 41.B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur, neq; alius quisquam vllum metietur. 44.B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi nō sit multiplex; neq; alius quisquam vllius multiplex erit. 45.B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus verò secundum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur: Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit. 45.B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum à secundo metiatur, neq; primus secundum metietur. Et si primus vel alius quisquam nullius à secundo sit multiplex; neq; primus secundi multiplex erit. 45.B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur; is etiam metietur secundum. 45.B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet à secundo sit multiplex, primus quoq; secundi multiplex erit. 46.B

Si inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadūt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent. 46.B

Inter duos numeros duplæ, triplæ, aut quintuplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis nō potest cadere medius numerus proportionalis. 46.& 47.B

Item neque inter duos numeros sola vnitate, aut binario differentes. 46.& 47.B

Ex quo fit, neq; Diapason, neq; Tonum in Musicis dividi posse bifariam. 47.B

Si duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem inter vtrumq; eorum, & vnitatem medij continua proportione cadent. 47.B

Si numerus seipsum multiplicans fecerit aliquē, & vnusquisq; multiplicet productum, &c. omnes producti sunt continuè proportionales ab vnitate. 48.B

Si

Si inter duos numeros & vnitatē continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 48. B

Si quotquot numeri ſint ab vnitate continuè proportionales, ſecundus ab vnitate in ſe multiplicatus producet tertium, & ex eodem in hunc fiet quartus, & ſic deinceps. 49. B

Si ſint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium: habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatā eius, quam habent ſecundi ab vnitate: quarti verò eiuſdem triplicatam, & quinti quadruplicatam: & ſemper deinceps vno amplius. 49. B

Si ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continuè proportionaliū, & multitudine æqualium: habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem: quarti verò eiuſdem triplicatam, &c. 49. B

Si inter duos numeros, & aliquē alium numerum aſſumptū, continuè proportionales ceciderint numeri: quot inter vtrumque ipſorum, & aſſumptū deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 50. B

Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos: qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primùm poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt. Et ſemper circa extremos hoc eueniet. 52. B

Primi autem numeri producti, ſunt in duplicata ratione proportionis datorum numerorum: & ſecundo loco geniti in triplicata, &c. 52. B

Si ab vnitate quotcunque numeri ſint deinceps proportionales: minor quicunque maiorem quemlibet metitur per aliquē eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris. 66. B

In numeris ab vnitate continuè proportionalibus, quantum abeſt maior quilibet à minore quouis eū metiente, tantùm ab vnitate diſtat numerus, per quem minor maiorē metitur. Item quilibet numerus ſeipſum multiplicans, producit numerum tantùm ab eo diſtantem, quantum ipſe ab vnitate abeſt. Si verò minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreatur numerus tantùm à maiore diſtans, quantum minor ab vnitate. 67. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales ſint: quicunque primorum numerorum vltimū metiuntur, iidem & eum, q vnitati proximus eſt, metientur. 67. B

Itaque neq; vllus numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens, metiri poteſt vltimum. 68. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales ſint, qui verò poſt vnitatem, primus ſit: Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus. 68. B

Si quotcunque numeri continuè proportionales, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cū ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſunt minimi: vel certè ad alterum erit compoſitus. 69. B

Si tres numeri ſint deinceps proportionales, & minimi omnium eandem cū ipſis rationem habētium: Duo quilibet ſimul, ad reliquum primi erunt. 73. A

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, ſint minimi omnium eandem cum illis rationem habentium, ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul collecti, erūt primi. 74. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad aliū quempiam. 74. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint: nō erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam. 74. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à ſecundo, & vltimo æquales ipſi primo: Erit vt ſecundi exceſſus ad primum, ita vltimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes. 81. B

Quolibet numero per duos quoſuis numeros diuiſo, erunt duo hi numeri Quotientibus, conuerſo ordine proportionales. 83. B

Quolibet numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales. 83. B

Quolibet numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiſo, erūt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales. 83. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorū ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet. 83. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma priorum per ipſos diuiſa facit. 84. B

Si ſumma quotuis numerorū continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; & quotientum ſumma per ipſos Quotientes: Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes, & ſic deinceps in infinitum; procreabuntur alterniſ ſemper iidem primi Quotientes ordine conuerſo. 84. B

Si ſumma quotuis numerorū continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; erit ſumma omniū quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorū ab extremis æqualiter diſtantium, vel denig, (ſi quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe. 84. B

Itaque quando numerus terminorum eſt impar, ſumma Quotientum eſt numerus quadratus, cuius radix eſt medius Quotiens. 85. B

Proportionum compoſitio, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. non eſt verè additio proportionū, vt plerique falsò exiſtimant. 96. B

Additio proportionum, ſubtractio, multiplicatio, atq; diuiſio, quomodo fiant. 97. B

NVMERVS fractus. Vide Minutiæ numerorū.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Numeros, quotquot iusserit quis, qui inter se multiplicati datum numerum gignant, reperire. 290. & 291. A

Numero per numerum diuiso, diuisus numerus gignitur ex multiplicatione numeri per diuisionē inuenti in numerum diuidentem. 6. B

Si duobus numeris inæqualibus datis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadā detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas: qui principio dati sunt numeri, primi inter se erunt. 13. B

Si duobus numeris inter se primis datis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadā detractione: nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas. 13. B

Si datis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: detractio ad vnitatem vsq; non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur. 13. B

Numerus duos numeros metiēs: metitur quoque maximam eorundem mensuram. 14. B

Numerus tres numeros metiens, vel plures; metitur etiam maximam eorum mensuram communem. 15. B

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. 15. B

Si duo numeri mutuò se multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipsis æquales inter se erunt. 24. B

Idem in fractis numeris concludes. 24. B

Si duo numeri se mutuò multiplicauerint; procreabitur vnus, idemq; numerus. 25. B

Verum hoc etiam est in numeris fractis. 25. B

Primi inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 31. B

Minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. 31. B

Quotcunque numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi. 32. B

Si duo numeri primi inter se fuerint; qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquū primus erit. 32. B

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit. 32. B

Si duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit. 32. B

Si duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt. 33. B

Si duo numeri primi inter se fuerint; & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erūt: Et semper circa extremos hoc eueniet. 33. B

Si duo numeri primi inter se fuerint; etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit. Et si vterque simul ad vnum illorum primus fuerit; etiam qui in principio, numeri primi inter se erunt. 33. B

Numerus, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primus erit. 34. B

Omnis primus numerus, ad omnē numerum, quem non metitur, primus est. 34. B

Si duo numeri se mutuò multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur. 34. B

Si duo numeri se mutuò multiplicantes fecerint aliquē: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorū, qui in principio, compositus erit. 34. B

Omnem compositū numerum, aliquis primus numerus metitur. 34. B

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. 35. B

Si duo numeri numerum quempiam metiantur; Etiam minimus, quē illi metiuntur, eundem metietur. 36. B

Si tres numeri numerum quempiam metiantur; Etiam minimus ab eis numeratus eundem metietur. 37. B

Idem euenit in pluribus numeris. 37. B

Si numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partē habebit à metiente denominatam. 37. B

Si numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus. 37. B

Minimus numerus, quem quotlibet numeri metiuntur; minimus est, habēs partes à numeris metientibus denominatas. 38. B

Datis quotlibet numeris, idem semper numerus procreabitur ex eorū mutua multiplicatione, quomodocunq; ordinem inter se permutent. 56. B

Si minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur. 69. B

Demonstratio priorum 10. propositionum lib. 2. in numeris. 70. B

Nullus numerus ita diuidi potest, vt productus ex toto in vnam partem, sit æqualis quadrato alterius partis. 72. 73. & 79. B

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum. 76. B

Si pares numeri quoteunque componantur; totus par erit. 77. B

Si impares numeri quoteunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par, totus par erit. 77. B.

Si impares numeri quoteunque componātur multitudo autem ipsorum sit impar, & totus impar erit. 77. B

Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus additus, facit imparem. 77. B

Si à pari numero par detrahatur; & reliquus par erit. 77. B

Si

Si à pari numero impar detrahatur; & reliquus impar erit. 78. B

Si ab impari numero impar detrahatur; reliquus par erit. 78. B

Si ab impari numero par detrahatur; reliquus impar erit. 78. B

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem; factus par erit. 78. B

Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; factus par erit. 78. B

Par in se multiplicants facit parem. 78. B

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem; factus impar erit. 78. B

Impar numerus in se multiplicatus gignit imparem. 79. B

Numerus impar numerū parem metiens, per numerum parem eum metitur. 79. B

Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur. 79. B

Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur. 79. B

Si impar numerus ad aliquē numerum primus sit; & ad illius duplum primus erit. 80. B

Immò & ad quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps in proportione dupla. 80. B

Numerorum à binario duplorum vnusquisque pariter par est tantùm. 80. B

Si numerus dimidium habeat imparem; pariter impar est tantùm. 80. B

Si par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem; pariter par est, & pariter impar. 81. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicetur: Factus erit Perfectus. 81. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, similes plani, ac solidi numeri.

Nullus numerus compositus ex integro & fracto, vel numerus fractus in se multiplicatus procreat numerum quadratum integrum. 254. A

Plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. 44. B

Duorum quadratorum numerorum vnus medius est proportionalis numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem. 50. B

Medio proportionali cadente inter duos quadratos; erit is ad vtrumuis quadratorum compositus. 51. B

Duorum cuborum numerorū duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem. 51. B

Duobus medijs proportionalibus cadentibus inter duos cubos; erunt ij, & vterlibet cuborum inter se compositi. 51. B

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratū metietur. 53. B

Si cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur. 53. B

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius; neq; quadratus quadratum metietur. 53. B

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur. 53. B

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris multiplex erit. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex. 54. B

Duorum similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem. 54. B

Medius numerus proportionalis inter duos planos similes, ad vtrumlibet compositus est. 54. B

Duorum similium solidorum numerorū duo medij proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum. 55. B

Duo numeri medij proportionales inter duos solidos similes, & vterus solidorum, sunt compositi inter se. 55. B

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; similes plani erunt illi numeri. 57. B

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; similes solidi sunt illi numeri. 57. B

Si tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit. 58. B

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit. 58. B

Si duo numeri rationem habeāt inter se, quam quadratus ad quadratum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit. 59. B

Proportio quadrati numeri ad non quadratum exhiberi non potest in duobus numeris quadratis. 59. & 60. B

Duo numeri in quintupla proportione proportionē non habent, quam quadratus ad quadratum. 60. B

Si duo numeri rationem inter se habeāt, quam cubus ad cubum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit. 60. B

Proportio cubi ad non cubum, reperiri non potest in duobus numeris cubis. 60. B

Similes plani numeri rationem inter se habēt, quam quadratus ad quadratum. 60. B

Numeri proportionẽ habentes, quam quadratus ad quadratum, ſimiles plani ſunt. 60. B

Similes ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus ad cubum. 60. B

Numeri proportionem habentes, quam cubus ad cubum, ſimiles ſolidi ſunt. 61. B

Nulli numeri habentes duplam proportionẽ, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem: vel duo numeri primi, vel primi inter ſe, quamuis neuter primus ſit, dummodò quadrati non ſint, aut cubi; ſimiles plani ſunt, aut ſolidi. 61. B

Si ſint duo numeri plani, aut ſolidi ſimiles, ſitq; minor primus; metietur minor maiorem. 61. B

Duo numeri inter ſe primi, quorũ minor primus ſit, non poſſunt eſſe plani, vel ſolidi ſimiles. 61. B

Si duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuò faciant quendam; productus quadratus erit. 62. B

Si duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciãt quadratum; ſimiles plani erunt. 62. B

Duo numeri quadrati ſe mutuò multiplicantes producũt quadratum. 62. B

Si duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciant quadratum, alter autem ſit quadratus; Et reliquus quadratus erit. 62. B

Si duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus, reliquus non quadratus erit. 63. B

Quadratus multiplicans non quadratum producit non quadratum. 63. B

Si cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem; productus cubus erit. 63 B

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus cubus erit. 63 B

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit. 63. B

Cubus non cubum multiplicans facit non cubum. 63. B

Si cubus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit. 64. B

Si numerus ſeipſum multiplicãs faciat cubum; Et ipſe cubus erit. 64. B

Si compoſitus numerus numerum aliquẽ multiplicans quempiam faciat; Factus ſolidus erit. 64 B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales ſint; tertius quidem ab vnitate quadratus eſt, & vnũ intermittentes omnes; quartus autẽ eſt cubus, & duos intermittentes omnes; ſeptimus verò cubus ſimul, & quadratus, & quinq; intermittẽtes omnes. 64 B

Si ſint quotcunq; numeri ab vnitate continuè proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proximè poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri, quartus, ſeptimus, decimus, &c. ſunt cubi. Omnes verò, qui proximè ſequuntur poſitos in locis, ſexto, duodecimo, decimooctauo, & alijs, quæ metitur ſenarius, quales ſunt, ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, &c. ſunt cubi ſimul & quadrati. 65. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri ſint deinceps proportionales, qui verò poſt vnitatem, ſit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt. 65. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps ſint proportionales, qui verò poſt vnitatem, non ſit quadratus, neq; alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At ſi, qui poſt vnitatem, nõ ſit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes. 66. B

Quando in numeris ab vnitate proportionalibus continuè, qui poſt vnitatem, non eſt cubus ſimul & quadratus; non neceſſe eſt, nullum alium eſſe quadratum ſimul & cubum, præter ſeptimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes: quia aliquando etiam quartus, eſt quadratus ſimul ac cubus, non exiſtente primo ab vnitate quadrato ac cubo ſimul. 66. B

OBTVSANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

PARALLELAS lineæ. Vide Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & aliæ figuræ ſolidæ non Regulares, ac plana parallela.

Ad quæ plana, eadem recta linea recta eſt; illa ſunt parallela. 201. B

Si ſint duo plana parallela; recta linea, quæ ad vnũ eorum recta eſt, ad reliquum quoq; recta erit. 201. B

Si duæ rectæ ſe mutuò tangẽtes, ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelę, non in eodem conſiſtentes plano; Parallela ſunt, quæ per illa ducuntur, plana. 202. B

Si duo plana parallela plano quopiam ſecentur; communes illorum ſectiones ſunt parallelæ. 202. B

Quæ eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallelas; vel ſi conueniunt, vnum planum efficient. 203. B

Si in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & lineæ vna vnius, lineæ vni alterius parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, ſi modo ductæ ſint ex eadem parte plani per priores parallelas ductæ. 203. B

Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorum parallelorum, ſi vnum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum ad idem, rectum. 205. B

Si ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana parallelogramma ſunt ſimilia, & æqualia. 210. B

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios aduerſorum planorum; bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. 214. B

Solida parallelepipeda ſuper eandẽ baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis, ſunt inter ſe æqualia. 214. B

Solida parallelepipeda ſuper eandẽ baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis; inter ſe ſunt æqualia. 215. B

Solida parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſim, ſunt inſiſtentes

insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue nõ; in eadem sunt altitudine. 215.B

Solida parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine; æqualia sunt inter se. 215.B

Solida parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basim. 217.B

Hæc quinque, quæ proximè dicta sunt de parallelepipedis, conueniunt etiam in prismata, in quibus duo plana opposita sunt triangula. 220.B

Si solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: Communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuò secabunt. 223.B

In omni parallelepipedo diametri se mutuò bifariam diuidunt in vno puncto. 224.B

Si solidum parallelepipedum plano secetur per centrum; bifariã secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam; per centrũ transibit ipsum planum. 224.B

Si fuerint duo prismata planorũ triangularium oppositorum æqualis altitudinis, quorũ hoc quidem basim habeat, triangulum, illud verò, parallelogrammum, duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli; Æqualia erunt ipsa prismata. 225.B

Omnis pyramis triangularem habens basim diuiditur in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis. 228.B

Si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autẽ illarum vtraque diuisa & in duas pyramidas æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraq; pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat: Erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quę in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia. 229.B

Pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares, sunt inter se æquales. 231.B

Pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases, eandem habent altitudinem. Et pyramides triangulares æquales, eiusdemq; altitudinis, habent bases æquales, vel eandem. 231.B

Pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases quascunque, vel eandem, sunt inter se æquales. 233.B

Pyramides multangulæ æquales, & super æquales bases, vel super eandem; habent eandem altitudinem. Et pyramides multangulæ æquales, eandemq; habentes altitudinem, bases habent æquales, vel eandem. 233.B

Omne prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes. 233.B

Prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Et prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, vel eandem. 234.B

Quæ de prismatis dicta sunt, intelligi debent de ijs, quæ habent plana opposita basibus æqualia, & similia. 234. & 235.B

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. 238.B

Atque hoc verum est, siue coni & cylindri sint recti, siue scaleni, licèt non sit idem axis conorum, & cylindrorum. 239.B

Coni & cylindri eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constituti, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, inter se sunt æquales. 241.B

Coni & cylindri æquales super eandẽ vel æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et cõi ac cylindri æquales in eadem altitudine, super æquales bases sunt, vel eandem. 241.B

Si in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ abscindant arcus similes; erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cũ centro coniungunt. 341.B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammi cuiusque æqualia sunt & latera opposita, & anguli oppositi, atque ipsum diameter secat bifariam. 61.A

Quadrilaterum habens latera opposita æqualia, parallelogrammum est. 62.A

Quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, parallelogrammum est. 62.A

Rhombus, & Rhomboides parallelogramma sunt. pag. 62.A

Quadratum & altera parte longius, parallelogramma sunt. 62.A

Quadrilaterum diuisum bifariam ab vna diametro, non semper est parallelogrammum. 62.A

Quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum. 62.A

Quadrati, & Rhombi angulos secat diameter quælibet bifariam. 62. & 63.A

Rhomboidis, & altera parte longioris angulos secat diameter non bifariam. 63.A

Quadrati, & altera parte longioris diametri sunt æquales. 63.A

Rhombi, & Rhomboidis diametri non sunt æquales. 63.A

Parallelogrammi cuiusque diametri se mutuò secant bifariam. 63.A

Quadrilaterum, in quo diametri se mutuò bifariam secant, parallelogrammum est. 63.A

Parallelogrammum bifariam diuiditur à recta, quæ diametrum bifariam secat: Et recta diuidens parallelogrammum bifariam, secat diametrũ quoq; bifariam. 64.A

Parallelogramma super eadẽ basi, & in eisdem parallelis constituta sunt æqualia. 67.A

Parallelogramma æqualia super eandem basim, ad eas-

demque partes conſtituta, ſunt inter eaſdem parallelas. 68. A

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt æqualia. 68. A

Parallelogramma æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis: Et parallelogramma æqualia in eiſdem parallelis, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 68. A

Parallelogrammorum inter eaſdem parallelas, quod maiorem baſim habet, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. 69. A

Quadrilaterum, quod ab vtraque diametro diuiditur bifariam, parallelogrammum eſt. 72. A

Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes ſunt æquales, ſunt æqualia. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales. 73. A

Trapeziorum in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quod maiorem habet baſim oppoſitam, maius eſt: Et quod maius eſt, habet baſim oppoſitam maiorē. 73. A

Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorū oppoſitæ baſes ſint æquales, æqualia ſunt. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales. 73. A

Trapeziorum in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quod maiorem habet oppoſitam baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim oppoſitam. 74. A

Parallelogrammum duplum eſt trianguli eandem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti. 76. & 77 A

Parallelogrammum æquale eſt triangulo duplam habenti baſim, & in eiſdem parallelis conſtituto. 77. A

Parallelogrammum duplum eſt trianguli æqualem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti. 77. A

Si parallelogrammū duplum fuerit trianguli, eandem habuerint baſim, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtitutæ in eiſdem erunt parallelis: Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdem parallelis erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem. 77. A

Si trapezium & triangulum ſuper eadem baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij ſit baſis trianguli: erit trapezium minus duplo trianguli: Si verò minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli: erit trapezium maius duplo trianguli. 78. A

Trapezium habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt trianguli, quod baſim habet vnū latus trapezij, coniungēs duas parallelas, verticē verò in medio puncto lateris oppoſiti. 78. A

In parallelogrammo, complemēta circa diametrum æqualia ſunt. 79. A

Si parallelogrammo diuiſo in quatuor parallelogramma, duo aduerſa ſint æqualia, conſiſtent reliqua duo circa dianetrum. 79. A

Quadrata lineārum æqualium ſunt æqualia: Et quadratorum æqualium æquales ſunt lineæ. 82. A

Quadratum ex diametro quadrati deſcriptum, duplum eſt ipſius quadrati. 86. A

Quadratum diametri figuræ alterā partē longiorū, æquale eſt duobus quadratis laterum inæqualium. 86. A

Parallelogrammum, cuius vnus tantùm angulus detur rectus, habet omnes angulos rectos. 91. A

Rectangulum quodcunque æquale eſt alteri rectangulo ſub duabus rectis contento, quæ duobus lateribus illius ſint æquales. 92. A

Parallelogramma circa diametrum quadrati, ſunt quadrata. 97. A

Quadratum cuiuſque rectæ quadruplum eſt quadrati rectæ, cuius illa dupla eſt. Et ſi quadratum quadrati ſit quadruplum, latus lateris duplum eſt. 97. & 319. A

Parallelogrammum ad rectam applicatum deficiēs quadrato, æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis per applicationem factis comprehenſo. 331. A

PAR & impar numer⁹. Vide Numerus par, &c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. Vide Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. Vide Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atque aliam figuram. Vide Figura intra & extra circulum, &c,

PLANAE figuræ quadrilateræ. Vide Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. Vide Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri ſimiles. Vide Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. Vide Angulus.

PLANVS numerus. Vide Numerus planus.

PORTIO circuli. Vide Circulus.

PRIMI inter ſe numeri. Vide Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PRISMA, Vide Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarum, Angulorum, & Linearum. Vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES magnitudines in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PROPORTIO numerorum in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. Vide Parallelepipedum, &c.

QVADRATVM. Vide Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. Vide Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. Vide Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Omnes Rationales lineæ non solùm expositæ Rationali, sed etiam inter se sunt commensurabiles. 123.B

Spatium Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est. 123.B

Quod sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis (quomodocunque commensurabiles sint expositæ Rationali) continetur Rectangulum, Rationale est. 123.B

Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem. 124.B

Quod sub Rationalibus potentia solùm commensurabilibus rectis continetur rectangulum Irrationale est: Et recta ipsum potens, Irrationalis. Vocetur autem Media. 125.B

Recta media proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, Irrationalis est, quæ vocatur Media. 126.B

Rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentum, Medium dici potest. 126.B

Non omne rectangulum Medium continetur sub duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus. 126.B

Quod à media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinẽ efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem. 126.B

Omne spatium Medium æquale est rectangulo sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contento. 126.& 127.B

Mediæ commensurabilis, Media est. 127.B

Medio spatio commensurabile, Medium est. 127.B

Non omnis Media rectæ cuilibet Mediæ est commensurabilis. 128.B

Quod sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis cõtinetur rectangulum, Medium est. 128.B

Quod sub Mediis potentia tantùm commensurabilibus rectis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium. 128.B

Quod sub Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus continetur, nec Rationale est, nec Medium, sed Irrationalis aliud, quod æquale est rectangulo sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur, contento. 129.B

Medium non superat Medium Rationali. 130.B

Rationale superat Rationale Rationali. 130.B

Duo Spatia Irrationalia componere possunt Spatium Rationale. 137.B

Duo Spatia Rationalia componunt semper Spatium Rationale. 137.B

Si duæ Rationales potentia tantùm commensurabiles componantur, tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. 138.B

Si duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant, tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima. 139.B

Quod sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est. 139.B

Si duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quę Medium contineãt, tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis secunda. 139.B

Si duæ rectę potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autẽ sub ipsis continetur, Medium, tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Maior. 140.B

Si duę rectæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale, tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens. 141.B

Si duę rectæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositũ ex ipsarum quadratis Mediũ, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum, tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens. 141.B

Sex lineæ Irrationales compositæ, vt ea, quę ex binis nominibus, quę ex binis Mediis prima, quæ ex binis Mediis secunda, Maior, Rationale, ac Medium potens, & bina Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiduntur in nomina, singulæ. à pag. 142. vsque ad 145.B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur. 145.B

Si sex spatia contineantur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, secunda, tertia, quarta, quinta, ac sexta: Rectæ ea potentes Irrationales sunt hæ ordine: ex binis Mediis prima, ex binis Mediis secunda, Maior, Rationale, ac Medium potens, & bina Media potens. 149. vsque ad 152.B

Quadrata sex harum linearum Irrationalium: eius quæ ex binis nominibus, ex binis Mediis primæ, ex binis Mediis secundæ, Maioris, Rationale, ac Medium potentis, & bina Media potentis: ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine sex lineas ex binis nominibus. 152. vsque ad 155.B

Rectæ longitudine commensurabiles sex lineis Irrationalibus prædictis, sunt quoque eiusdem ordinis, & nominis Irrationales. 155. vsque ad 158.B

Idem euenit, si potentia tantùm sint commensurabiles,

præterquam in ea, quæ ex binis nominibus dicitur. 156. B

Si Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt: vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale, ac Medium potens. 158. B

Si duo Media inter se incommensurabilia componantur; duæ reliquæ Irrationales fiunt: vel ex Mediis secunda, vel bina Media potẽs. 159. B

Ea, quæ ex binis nominibus, & aliæ quinque Irrationales eam sequentes, & inter se, & à Media differunt. 159. & 160. B

Recta linea media proportionalis secundùm Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cuiusuis lineæ Irrationalis, per compositionem factæ, est quoq; Irrationalis eiusdem ordinis. 160. B

Si à Rationali Rationalis auferatur potẽtia tantùm commensurabilis existens toti: (*Vel si à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome. 161. B

Si à Media auferatur Media potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat: (*Vel si à maiori nomine eius, quæ ex binis mediis prima, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autẽ Mediæ Apotome prima. 161. B

Si à Media auferatur Media potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cùm tota Medium contineat: (*Vel si à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda. 162. B

Si à recta linea auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cùm tota faciat compositũ quidem ex ipsarum quadratis Rationale: quod autem sub ipsis continetur Medium: (*Vel si à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor. 162. B

Si à recta auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cũ tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium: quod autem sub ipsis continetur, Rationale: (*Vel si à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. 163. B

Si à recta auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cũ tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium: & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: (*Vel si à maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autẽ cum Medio Medium totum efficiens. 163. B

Apotomæ vna tantùm congruit recta Rationalis, potentia solùm commensurabilis existẽs toti. 164. B

Mediæ Apotomæ primæ vna tantùm congruit recta Media, potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens. 164. B

Mediæ Apotomæ secundæ vna tantũ congruit recta Media, potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens. 165. B

Minori vna tantùm congruit recta, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositũ quidem ex ipsarum quadratis Rationale: quod autem sub ipsis continetur, Medium. 165. B

Ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit recta potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciẽs compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium: quod autem sub ipsis continetur, Rationale. 166. B

Ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit recta, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Mediũ, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. 166. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur. 167. B

Si sex spatia contineantur sub Rationali, & Apotoma prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta; Rectæ ea potentes Irrationales sunt hæ ordine: Apotome, Mediæ Apotome prima, Mediæ Apotome secunda, Minor, ea quæ cum Rationali Medium totum efficit, & ea quæ cum Medio Medium totum efficit. 169. vsque ad 172. B

Quadrata harum sex linearum Irrationalium, Apotomæ, Mediæ Apotomæ primæ, Mediæ Apotomæ secundæ, Minoris, eius quæ cum Rationali Medium totum efficit, & eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine sex Apotomas. 173. vsque ad 175. B

Rectæ longitudine commensurabiles sex lineis Irrationalibus prædictis, quæ per detractionem fiunt, sunt quoq; Irrationales eiusdem ordinis & nominis. 176. vsque ad 178. B

Idem euenies, si potentia tantùm eũ sint commensurabiles, præterquam in Apotoma. 176. B

Medio à Rationali detracto: Recta, quæ reliquũ spatiũ potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor. 178. B

Rationali à Medio detracto: aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totũ efficiens. 179. B

Medio à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti: reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens. 179. B

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus. 179. B

Apotome, & aliæ quinque Irrationales eam sequentes, & inter se, & à Media differunt. 180. B

Tredecim lineæ Irrationales inter se diuersæ. 180. & 181. B

Quadratum Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione: & adhuc Apotomie quę fit, eundem habet ordinem, quę ea, quæ est ex binis nominibus. 181.B

Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione: & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome. 182.B

Si spatium cõtineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione: Recta spatium potens, est Rationalis. 183.B

Rationale spatium contineri potest sub duabus rectis Irrationalibus. 183.B

A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem. 183.B

Si recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome. 257.B.

Si recta secundùm extremam & mediam rationem secetur, sitq; maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum Apotome. 258.B

Si in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur; pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. 262.B

Si sphæræ diameter fuerit Rationalis; erit tam superficies Tetraedri, quàm Octaedri in ea sphæra, Media. 291.B

Triangulum æquilaterum, cuius latus est Rationale, superficies Media est. 291.

Latus Icosaedri in pyramide descripti est Apotome. 326.B

RECTA LINEA.

Rectæ duæ lineæ non habent vnum, & idem segmentum commune. 15.A

Rectæ duæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessariò se mutuò in eo puncto intersecabunt. 15.A

Rectæ duæ lineæ spatiũ non comprehendunt. 16. & 17.A

Rectæ duæ lineæ duabus eisdem rectis lineis super eadem recta linea æquales, vtraque vtrique, non constituentur ad aliud atq; aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. 26.A

Recta linea alteri insistẽs facit cum ea aut duos rectos angulos, aut duobus rectis æquales. 33.A

Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo puncto educta cum illis facit duos angulos non ad easdem partes duobus rectis æquales. 34.A

Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ non faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo puncto educta cum illis facit duos angulos ad easdem partes duobus rectis æquales. 34.A

Rectæ duæ se intersecantes faciunt angulos ad verticem oppositos æquales. 34.A

Rectæ duæ se intersecantes faciũt quatuor angulos quatuor rectis æquales. 35.A

Rectæ quotcunque ad vnum punctum conuenientes faciunt omnes angulos quatuor rectis æquales. 35.A

Rectæ duæ facientes cum alia recta in eodem puncto, non ad easdem partes, angulos ad verticem æquales, in directum sunt coniunctæ. 35.A

Rectæ quatuor in eodem puncto facientes binos oppositos angulos æquales, constituunt duas rectas lineas. 35.A

Rectæ lineæ inter se æquales ex vno puncto ad rectam lineam plures quàm duæ, duci non possunt. 36.A

Rectæ lineæ ad eandem rectam perpendiculares, plures quàm vna, duci non possunt. 37.A

Recta linea faciente cum alia angulos inæquales, perpendicularis ex vno illius puncto ad hanc demissa, cadit ad partes anguli acuti. 37.A

Rectarum omnium ex vno puncto ad aliam rectam demissarum, minima est perpendicularis. 38.A

Rectæ duæ lineæ ab extremitatibus vnius lateris trianguli interius cõstitutæ, reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem sunt, maiorem verò angulum continent. 40.A

Rectæ duæ lineæ intra triangulum, quarum vna ab extremo vnius lateris, altera verò non ab extremo ducitur, maiores esse possunt reliquis trianguli duobus lateribus, minorem q; angulum comprehendere. 41.A

Rectæ duæ lineæ parallelæ sunt, si recta in eas incidens faciat alternos angulos æquales. 47.

Rectæ duæ lineæ parallelæ sunt, si recta in eas incidens faciat externum angulum interno ad easdem partes opposito, æqualem; aut internos ad easdem partes duobus rectis æquales. 47.A

Rectas duas lineas concurrere productas, si recta in eas incidens faciat duos internos angulos ad easdem partes duobus rectis minores: quo modo à Proclo demonstretur. 49.A

Rectas easdem duas concurrere, qua ratione à nobis demonstretur. 53.A

Rectarum linearum angulum constituentium distantia, si in infinitum producantur, omnem finitam magnitudinem excedet. 48. & 50.A

Recta linea secans vnam duarum parallelarum, productas secat & alterum. 48.A

Linea, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est. 50.A

Recta linea super aliam rectam in transversum mota, constituens q; in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet altero suo extremo lineam quoque rectam. 51.A

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis. 52.A

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ

erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum. 52.A

Si in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum; duæ illæ rectæ minus semper inter se distabunt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera verò parte semper inter se magis distabunt. 52.A

Recta incidens in duas parallelas facit & angulos alternos æquales, & externum interno ad easdem partes æqualem, & internos duos ad easdem partes duobus rectis æquales. 54.A

Rectæ lineæ, eidem parallelæ, & inter se sunt parallelæ. 55.A

Rectæ lineæ, eidem parallelæ, si inter se coeunt, constituunt vnam lineam rectam. 55.A

Rectæ lineæ, quæ parallelas ad easdem partes connectunt, æquales sunt, & parallelæ. 61.A

In figura æquilatera, & æquiangula parium laterum, opposita quælibet duo latera sunt parallela. 66.A

Recta secans duo trianguli latera bifariam, reliquo lateri est parallela. 72.A

Si fuerint duæ rectæ, secturque ipsarum altera in quotuis segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis. 93.A

Si fuerint duæ rectæ lineæ, secenturq; ambæ in quotuis segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur, rectangulis. 94.A

Si sint duæ rectæ lineæ, secenturq; ambæ vtcunq;: Rectangulum comprehensum sub illis duabus lineis, vnà cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuò continentur, rectangulis, vnà cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso. 94.A

Si recta linea secta sit vtcunq;, vel etiam in plura segmenta: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorũ comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato. 94. & 95.A

Si linea recta secetur in quotuis segmenta; quadratum, quod à tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis. 95.A

Si recta linea secta sit vtcunq;: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato. 95.A

Si recta linea secta sit vtcunq;: Quadratum totius æquale est quadratis segmentorum, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis. 96.A

Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam: rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vnà cum quadrato intermediæ sectionum, æquale est quadrato ex dimidia descripto. 98.A

Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vnà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato rectæ compositæ ex dimidia, & adiecta. 99.A

Si recta linea secetur vtcunque: Quadratum totius, & quadratum vnius segmenti, simul æqualia sunt rectangulo sub tota & illo segmento bis contento vnà cum quadrato alterius segmenti. 101.A

Si recta linea inæqualiter secetur: Erunt quadrata segmentorum æqualia rectangulo bis sub segmentis comprehenso, vnà cum quadrato excessus, quo maius segmentum superat minus. 101.A

Si recta linea secetur vtcunque; rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum quadrato reliqui segmenti, æquale est quadrato rectæ compositæ ex tota, & priore segmento. 102.A

VEL.

Si linea recta secetur vtcunque; eiq; in rectum adiiciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta, siue dicto segmento, vnà cum quadrato alterius segmẽti. 102.A

VEL.

Si linea recta secetur bifariam, eique in rectum adiiciatur recta alia quantacunq;: Quadratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehẽso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & dimidia, vnà cum quadrato adiectæ. 102. & 103.A

Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam: quadrata segmentorum inæqualium, simul dupla sunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex intermedia sectionum. 103.A

Si recta linea secetur bifariam, adiiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiecta, & quod ab adiecta, vtraque simul quadrata dupla sunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex composita ex dimidia & adiecta. 104.A

Perpendicularis linea ex puncto aliquo ad rectã quamq; piam cadens, est omnium ex eodem puncto ad eandem rectam cadentium brevissima. 120.A

Si recta secetur extrema ac media ratione; Isosceles, cuius basis maiori segmento sit æqualis, vtrumuis verò laterum æqualium sectæ lineæ, habet vtrumque angulorum ad basim duplum reliqui. 180.A

Si sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia. 127.B

Si sint duæ rectæ inæquales, erit rectangulum sub ipsis contentum, dupplum rectanguli sub alterutra earum, & dimidio alterius contenti. 136.B

Si recta

Si recta linea non bifariam ſecetur; erit compoſitum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineæ, quæ maior pars minorem ſuperat. 140.B

Si recta non bifariam ſecetur, & rurſus non bifariam in alio puncto: erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partiũ minus inæqualiũ ſimul. 142.B

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam verò in ſublimi. 195.B

Si duæ rectæ ſe mutuò ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano. 196.B

Si duo plana ſe mutuò ſecent, cõmunis eorum ſectio eſt linea recta. 196.B

Si recta linea rectis duabus ſe mutuò ſecãtibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit. 197.B

Si recta linea rectis tribus ſe mutuò ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat; Illæ tres rectæ in vno ſunt plano. 197.B

Si duæ rectæ eidem plano ad rectos ſint anguloſ; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ. 198.B

Si duæ ſint parallelæ rectæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa recta, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. 198.B

Idem euenit, ſi rectæ non ſint parallelæ, in eodem tamen exiſtant plano. 198.B

Si duæ ſint parallelæ rectæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. 198.B

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano; hæ quoq; ſunt inter ſe parallelæ. 199.B

Dato plano, à puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes. 201.B

Item neq; à puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ perpendiculares demittentur. 201.B

Si recta plano cuipiam ad rectos ſit angulos; & omnia, quæ per ipſum, plana eidem plano ad rectos angulos erunt. 204.B

Si duo plana ſe mutuò ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit. 205.B

Si planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt, planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit; In communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis 223.B

RECTANGVLVM parallelogrammum. vide Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulũ. vide Triangulũ.

REGVLARIS figura. vide Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

SCALENVM triangulum. vide Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide Circulus.

SIMILES plani ac ſolidi numeri. vide Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra ſphæram, atque aliam figuram. vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri ſimiles. vide Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. vide Angulus.

SOLIDVS numerꝰ. vide Numerus planus, &c.

SPHAERA. vide Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

TRAPEZIVM. vide Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triangula duo habẽt & baſes, & angulos æquales, ipſaq; æqualia fiunt, ſi duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, angulosque contentos habeant æquales. 22.A

Iſoſcelium triangulorum anguli tam ſupra baſem, quam infra, æquales ſunt. 23. & 24.A

Æquilaterum triangulum habet tres angulos æquales. 24.A

Triangulum, cuius duo anguli ſupra baſem æquales ſunt, habet duo latera angulis illis oppoſita æqualia. 25.A

Triangulum, cuius omnes anguli æquales ſunt, æquilaterum eſt. 25.A

Triangulum, cuius duo anguli infra baſem æquales ſunt, Iſoſceles eſt. 25.A

Triangula duo habent vnum angulum vni angulo æqualem, ſi duo latera vnum ambientia æqualia ſint duobus lateribus alterum ambientibus, & baſis baſi. 27.A

Triangula duo æqualia ſunt, & inter ſe æquiangula, ſi duo latera vnius ſint æqualia duobus lateribus alterius, & baſis baſi. 28.A

Trianguli externus angulus maior eſt vtrouis interno oppoſito. 36.A

Trianguli duo quilibet anguli duobus rectis minores ſunt. 37.A

Trianguli orthogonij, vel amblygonij duo reliqui anguli ſunt acuti. 37.A

Trianguli æquilateri omnes anguli, & Iſoſcelis duo ſupra baſem, acuti ſunt. 37.A

Trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit. 37.& 38.A

Scalenum habet omnes tres angulos inæquales. 38.A

Trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur. 38.A

Trianguli angulo bifariam ſecto, ſi recta ſecans partitur baſem inæqualiter, latera circa illum angulũ inæ

qualia ſunt, maiusq; eſt illud, quod maiori ſegmento baſis adiacet. 38. & 39. A

Trianguli angulo inæqualibus lateribus comprehenſo bifariam ſecto, recta ſecans diuidit baſim inæqualiter, maiusq; ſegmentum maiori lateri adiacet. 39. A

Trianguli angulo bifariam ſecto, ſi recta ſecans diuidat baſem bifariam, latera circa eum angulum æqualia ſunt: Et ſi æqualia ſint, recta ſecans angulum bifariam, ſecat & baſim bifariam. 39. A

Trianguli duo latera quomodocunq; ſumpta, reliquo ſunt maiora. 40. A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumq; vtriq;, angulum verò comprehenſum angulo maiorem, habent & baſem baſe maiorem. 43. A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, baſem verò baſe maiorem, habent & angulum comprehenſum angulo maiorem. 44. A

Triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales, vtrumq; vtriq;, vnumq; latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſiue quod vni æqualium angulorum ſubtenditur; habent & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumq; vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. 45. A

Triangula habentia eaſdem conditiones, de quibus proximè dictum eſt, ſunt inter ſe æqualia. 46. A

In triangulo æquilatero, vel Iſoſcele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenſo ducta, diuidens & vel angulum, vel baſem bifariam, perpendicularis eſt ad baſem; & ſi quidem angulum bifariã diuidat, ſecabit quoq; baſem bifariam. Si verò baſem ſecet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contrà, linea perpendicularis ad baſem ducta diuidit & baſem, & angulum bifariam. 46. A

Triangulum, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad baſem perpendicularis diuidit vel baſin, vel angulum bifariam, habet duo latera circa illum angulum æqualia: Et ſi quidem baſis diuidatur bifariam, angulus quoq; bifariam ſecabitur: ſi verò angulus bifariam ſecetur baſis quoque diuidetur bifariam. 46. A

Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quod tamen neque æqualibus adiacet angulis, neque vni æqualium angulorum opponitur; nihil colligi poteſt. 56. A

Trianguli externus angulus duobus internis oppoſitis eſt æqualis: Et omnes tres anguli duobus rectis æquales ſunt. 57. B

Trianguli cuiuſlibet omnes tres anguli ſimul æquales ſunt tribus angulis ſimul cuiuſcunq; alterius trianguli. 60. A

Iſoſceles duo anguli ſupra baſim ſemirecti ſunt, quando reliquus angulus rectus eſt. 60. A

Æquilateri trianguli quilibet angulus cõtinet duas tertias partes vnius recti, vel vnam tertiam partem duorum rectorum. 60. A

Æquilaterum triangulum à perpendiculari ex angulo ad baſim ducta diuiditur in duo ſcalena orthogonia, &c. 60. A

Triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, ſunt æqualia. 69. A

Triangula, quorum duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumq; vtriq; angulum verò contentum angulo maiorem, quo pacto poßint æqualia eſſe, & inæqualia. 69. A

Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. 70. A

Triangulum à recta ex angulo ad medium punctum lateris oppoſiti ducta ſecatur bifariam. 71. A

Triangula æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 71. A

Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 72. A

Triangula æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 72. A

Triangulorum inter eaſdem parallelas, quod maiorem habet baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. 73. A

Si in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur; Recta ex angulo oppoſito ducta, dividensq; alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoq; alteram bifariam. 74. A

In rectangulis triangulis, quadratum lateris angulo recto oppoſiti, æquale eſt duobus quadratis ſimul reliquorum duorum laterum. 83. A

Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppoſita, ſint æqualia; erunt duo quadrata, reliquorum duorum laterum vnius trianguli, æqualia duobus quadratis reliquorũ duorum laterum alterius. 86. A

Si ex angulo à duobus lateribus inæqualibus trianguli cuiuſuis comprehenſo ad baſim perpendicularis ducatur, cadens intra triangulum; ſecabitur baſis inæqualiter, maiorq; pars iuxta maius latus erit. Et contrà, ſi baſis à perpendiculari ſecetur inæqualiter, erit duo latera inæqualia, maiusq; erit prope maiorem partem baſis. 88. A

In omni triangulo, parallelogramma quæcunq; duorum laterum æqualia ſunt parallelogrammo reliqui lateris, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera continent, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius producantur. 88. A

Si quadratum vnius lateris trianguli æquale ſit duobus quadratis reliquorum duorum laterum; angulus ſub his comprehẽſus, rectus erit. 89. A

Triangulorum comparationes variæ, & quo modo fiant. 89. A

In amblygoniis triangulis, quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti quanto maius ſit quadratis reliquorũ duorum laterum. 106. A

In amblygoniis triangulis perpendicularis ex alterutro angulorum acutorum ad latus oppoſitum demiſſa, cadit extra triangulum ad partes anguli obtuſi. 107. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis aliorum duorum laterum: angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit. 107. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: demissa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus. 107.A

In oxygoniis triangulis, quadratum lateris angulo acuto oppositi, quanto minus sit quadratis aliorum duorum laterum. 109. & 110. A

In quolibet triangulo perpendicularis in latus duobus acutis angulis adiacens ex opposito angulo demissa, cadit intra triangulum. 110.A

Si in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum; angulus illi lateri oppositus, est acutus. 111.A

Si in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri opposito demissam: Linea hæc demissa ad alterum illius lateris perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus. 111.A

Si in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur secans latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum circa illum angulum, simul dupla duorum quadratorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum verò ex dimidiato latere describitur. 115.A

Trianguli angulus, qui reliquis duobus est æqualis, rectus est. 166.A

Isoscelis trianguli, cuius vterq; angulorum ad basim duplus est reliqui, angulus reliquus continet quintam partem duorum rectorum, vel duas quintas vnius recti; vterq; verò ad basim cõtinet duas quintas duorum rectorũ, vel quatuor quintas vnius recti. 180.A

Si recta secetur extrema ac media ratione; Isosceles, cuius basis maiori segmento sit æqualis, vtrumuis verò laterum æqualium datæ lineæ sectæ, habet vtrumque angulorum ad basim duplum reliqui. 180.A

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto demittatur perpendicularis ad basim; erit rectangulũ sub base, & alterutro basis segmento, æquale quadrato lateris illi segmento adiacentis; Rectangulũ verò sub basis segmentis æquale quadrato perpẽdicularis; Rectangulum deniq; sub base, & perpendiculari æquale rectangulo sub lateribus circa angulum rectum. 136.B

Triangulum omne in vno est plano. 196.B

Latus trianguli æquilateri potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad basim demissæ. 263. & 290.B

Perpendicularis ex angulo trianguli æquilateri ad basim oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basim deducitur; sesquialtera verò semidiametri circuli triangulum circumscribentis. 295.B

Quadratum lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem, inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris. 303.B

Quadratum rectæ mediæ proportionalis inter dimidium latus trianguli æquilateri, & eius perpendicularem; æquale est ipsi triangulo. 303.B

FINIS.

